Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Estudio de una ecuación de onda no lineal que modela una actividad del cerebro

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Julio César PON QUISPE

ASESOR

María Natividad ZEGARRA GARAY

Lima, Perú

2013

Estudio de una Ecuación de Onda No Lineal que Modela una Actividad del Cerebro

Julio César Pon Quispe

Tesis sometida al Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos - UNMSM, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del Título de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dra. María Natividad Zegarra Garay - UNMSM
(Asesor)

Lic. Felix Gregorio Pariona Vilca - UNMSM

Lic. Saúl Víctor Rojas Cauti - UNMSM

LIMA - PERÚ

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Julio César Pon Quispe

Estudio de una Ecuación de Onda No Lineal que Modela una Actividad del Cerebro, Lima 2013.
VIII, 72 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado en Matemática, 2013).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas

DEDICATORIA

Dedico este trabajo en primer lugar a Dios, Señor Todopoderoso, ya que permitió la publicación del mismo, recordando siempre su enseñanza citada en los pasajes bíblicos en los libros de Colosenses 3:23-24, Proverbios 3:5-7 y Filipenses 4:13. En segundo lugar a mis amados padres, por su paciencia, su gran apoyo a lo largo de mi carrera y su gran comprensión.

AGRADECIMIENTOS

- Agradezco de una manera muy especial a mi asesora principal la Dra. María Natividad Zegarra Garay, pues sin su ayuda no hubiera sido posible el desarrollo del presente trabajo, y también agradezco al Dr. Alfonso Pérez Salvatierra por ese gran apoyo brindado para el inicio del mismo.

- A la Dra. Roxana Lopez Cruz, quien fuera mi profesora en Seminario II por su motivación brindada en aquel entonces, de lo que fue el punto de partida a inclinarme a la investigación en el área de las ecuaciones diferenciales. También de manera especial a mis profesores: Lic. Saúl Víctor Rojas Cauti, Lic. Felix Gregorio Pariona Vilca y a todos mis profesores por mi formación académica y profesional.

- A mi familia, los seres que mas amo: padres, hermanos y sobrinos, por su gran apoyo y compañía.

- A mis hermanos cristianos y amigos de la iglesia "La Voz de Dios"por sus muchas bendiciones y oraciones, dirigidas a mi persona y que en mis peticiones el Altísimo derrame gran bendición a todos mis hermanos en Cristo, siervos del Señor.

- A mi gran amigo Elard Juárez, por su gran apoyo y a quién considero también como mi hermano cristiano.

- A todos mis amigos que tienen siempre mi respeto y admiración, quienes me alentaron, apoyaron y me dieron los animos necesarios para terminar el desarrollo del presente trabajo.

RESUMEN

ESTUDIO DE UNA ECUACIÓN DE ONDA NO LINEAL QUE MODELA UNA ACTIVIDAD DEL CEREBRO

Julio César Pon Quispe

Junio 2013

Asesora: **Dra. María Natividad Zegarra Garay**

Título obtenido: **Licenciado en Matemática**

En el presente trabajo, estudiaremos la ecuación de onda no lineal que modela la actividad neuronal del cerebro, determinado por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha\Delta u = a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), & (t,x) \in [0,+\infty\rangle \times \Omega \\ u(0,x) = u_0,\ u_t(0,x) = u_1, & x \in \Omega \\ u = 0, & (t,x) \in [0,+\infty\rangle \times \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, $(n \leq 4)$, con frontera $\partial\Omega$ bien regular; y $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega), a \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}), b \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ para $\alpha \geq 1$.

Nuestro objetivo principal es estudiar la existencia de la solución débil global del sistema dado, utilizando el método de Faedo - Galerkin y además establecer la unicidad y estabilidad de la solución utilizando criterios de desigualdades integrales e inmersiones de Sobolev. Los términos $a(u,p)u_t$ y $b(u,p,p_t)$ son términos no lineales que caracterizan la actividad neuronal del modelo. El estudio de nuestro sistema es planteado por Mauhamad y Maitine, (ver[22]), quienes prueban que el sistema tiene una única solución estable, bajo supuestos datos reales. De hecho, estos supuestos están motivados por el modelo de la actividad cerebral física subyacente, que conduce a una ecuación que es un caso particular de la ecuación que iremos a desenvolver.

Palabras Clave:

- Ecuación no lineal - Gronwall
- Inmersión - Existencia - Unicidad

ABSTRACT

STUDY OF A NONLINEAR WAVE EQUATION MODELING OF BRAIN ACTIVITY

Julio César Pon Quispe

June 2013

Advise: **Dra. María Natividad Zegarra Garay**

Title obtained: **Licenciado en Matemática**

In this paper, we study the nonlinear wave equation modeling brain neuronal activity, determined by the following system:

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha\Delta u = a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), & (t,x) \in [0,+\infty\rangle \times \Omega \\ u(0,x) = u_0,\ u_t(0,x) = u_1, & x \in \Omega \\ u = 0, & (t,x) \in [0,+\infty\rangle \times \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is a bounded open domain in $\mathbb{R}^n$, $(n \leq 4)$, with border $\partial\Omega$ good average; and $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega), a \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}), b \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ for $\alpha \geq 1$.

The main objective is to study the existence of the weak solution given by our system overall using the Faedo-Galerkin method and also to establish the uniqueness and stability of the solution using integral inequalities and criteria for Sobolev immersions. The terms $a(u,p)u_t$ and $b(u,p,p_t)$ are not linear and are characteristic of the neuronal activity model. The study proposed is developed by Mauhamad and Maitine, (see [22]), who prove that the system has a stable solution, under assumptions actuals. In fact, these assumptions are motivated by the pattern of brain activity underlying physics, which leads to an equation which is a particular case of the equation that we development.

Key Words:

- Nonlinear equation - Gronwall
- Immersion - Existence - Uniqueness

Índice general

Introducción

Para conocer los fundamentos de la ecuación que estudiaremos, mencionaremos un poco la actividad neuronal que ha permitido modelar la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha \Delta u = a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), & (t,x) \in [0,+\infty\rangle \times \Omega \\ u(0,x) = u_0,\ u_t(0,x) = u_1, & x \in \Omega \\ u = 0, & (t,x) \in\ [0,+\infty\rangle \times \partial\Omega \end{cases}$$

El cerebro humano es el órgano mayor del sistema nervioso central y el centro de control para todo el cuerpo, tanto para actividades voluntarias como involuntarias. También es responsable de la complejidad del pensamiento, memoria, emociones y lenguaje. Este órgano controla el comportamiento activando músculos, o produciendo la secreción de químicos tales como hormonas.
Por medio de dos estudios recientes, matemáticos de la Universidad Queen Mary de Londres ayudarán a los científicos a comprender cómo se relaciona la estructura del cerebro con su función. Con publicaciones en la revista Physical Review Letters, investigadores del grupo de Redes Complejas de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Queen Mary, describen cómo las diferentes áreas en el cerebro pueden tener una asociación a pesar de la falta de interacción directa (Fuente: Queen Mary University of London, 2013).

El equipo, en colaboración con investigadores de Barcelona y París, combinaron dos redes cerebrales humanas distintas, una que mapea todas las conexiones físicas entre las áreas del cerebro, conocida como la red troncal, y otra que informa de la actividad de las diferentes regiones, tales como los cambios de flujo sanguíneo, conocida como la red funcional.

Demostraron que la presencia de neuronas simétricas dentro de la red troncal podrían ser responsables de la actividad sincronizada de regiones del cerebro físicamente distantes. Estos científicos notables dijeron entender completamente cómo funciona el cerebro humano. Pero hasta ahora, el enfoque ha estado más en el análisis de la función de las regiones individuales localizadas. Sin embargo, no es un modelo completo que reúna toda la funcionalidad del cerebro. Dicha investigación ayudará a los neurocientíficos a desarrollar un mapa más exacto del cerebro y a investigar su funcionamiento más allá de las "zonas individuales". La investigación se suma a los hallazgos recientes, publicados en Proceedings of the National Academy of Sciences en los que investigadores de Queen Mary y del Departamento de Psiquiatría de la Universidad de Cambridge, analizaron el desarrollo del cerebro de un pequeño gusano llamado Caenorhabditis elegans. En este trabajo, el equipo examinó el número de enlaces formados en el cerebro durante la vida del gusano, y observó un cambio brusco inesperado en el patrón de crecimiento, que correspondía con el momento de eclosión de sus huevecillos. Aparte de la investigación teórica sobre la estructura y función de las redes complejas, el grupo está trabajando en la caracterización de redes cerebrales de capas múltiples, para conciliar e integrar las diferentes señales del cerebro, con el fin de producir una imagen más informativa del cerebro humano. Podemos citar algunos sitios web como:

- http://cienciaaldia.com/2013/05/matematicos-ayudan-a-revelar-la-funcion-cerebral/
- http://es.wikipedia.org/wiki/Neurona
- http://es.wikipedia.org/wiki/Sinapsis
- http://www.qmul.ac.uk/media/news/items/se/98439.html

Estos sitios ofrecen algunas informaciones importantes acerca de la actividad cerebral, tomamos como punto de partida tales informaciones, las cuales motivaron al desarrollo de este trabajo en una primera instancia en la búsqueda de información.

El cerebro es un sistema sumamente complejo, tal es, que su complejidad emerge por la naturaleza de la unidad que nutre su funcionamiento: la neurona. Estas se comunican entre sí por medio de largas fibras protoplasmáticas llamadas axones, que transmiten trenes de pulsos de señales denominados potenciales de acción a partes distantes del cerebro o del cuerpo depositándolas en células receptoras específicas. La corteza del cerebro humano contiene aproximadamente 15 000 a 33 000 millones de neuronas dependiendo del género y la edad. Se estima que en el interior de la corteza cerebral hay unos 22 000 millones de neuronas, aunque hay estudios que llegan a reducir esa cifra a los 10 000 millones y otros a ampliarla hasta los 100 000 millones. Las neuronas tienen como función principal la excitabilidad eléctrica de su membrana plasmática; estas están especializadas en la recepción de estímulos y conducción del impulso nervioso entre ellas o con otros tipos de células, como por ejemplo, las fibras musculares de la placa motora. Las neuronas presentan principalmente en sus características morfológicas típicas que sustentan sus funciones: un cuerpo celular llamado soma o pericarion, un núcleo central; una o varias prolongaciones cortas que generalmente transmiten impulsos denominados dendritas; y una prolongación larga denominada axón que conduce los impulsos desde el soma hacia otra neurona

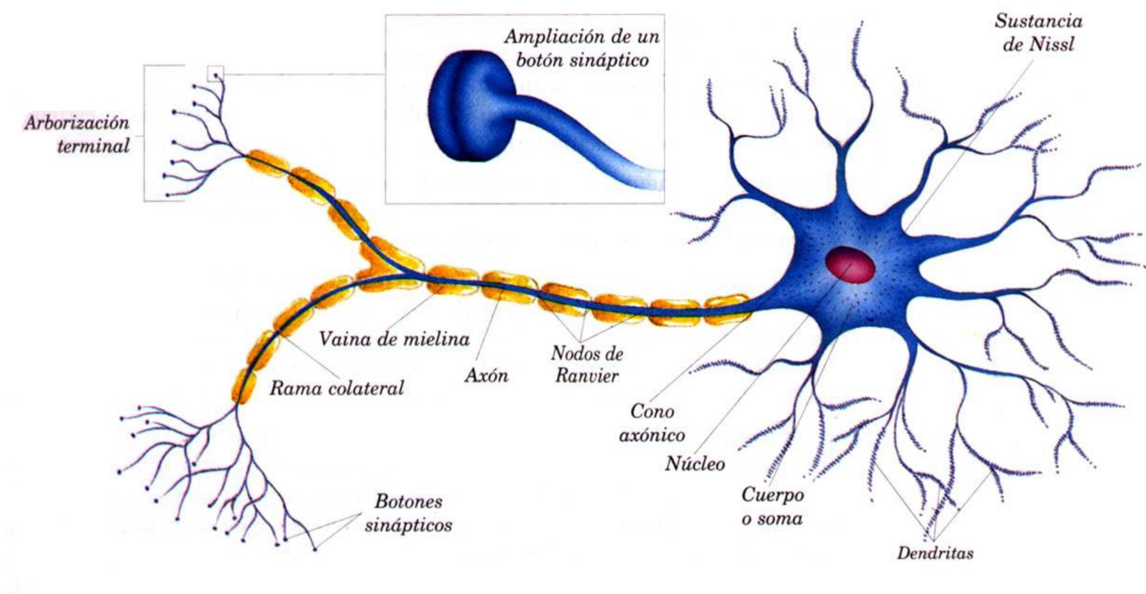

Figura 1: La neurona y sus partes

Cada una de las neuronas se encuentran interconectadas hasta con 10 000 conexiones sinápticas (botones sinápticos). La sinapsis es la unión intercelular especializada entre neuronas o entre una neurona y una célula efectora (glandular o muscular).

En estos contactos se lleva a cabo la transmisión del impulso nervioso. Este se inicia con una descarga química que origina una corriente eléctrica en la membrana de la célula presináptica (célula emisora); una vez que este impulso nervioso alcanza el extremo del axón (la conexión con la otra célula), la propia neurona segrega un tipo de compuestos químicos (neurotransmisores) que se depositan en el espacio sináptico (espacio intermedio entre la neurona transmitida y la receptora o postsináptico). La sinapsis se produce en el momento en que se registra actividad químico eléctrica presináptica y otra postsináptica. Si esta condición no se da, no se pude hablar de sinapsis. En dicha acción se liberan neurotransmisores ionizados con base química, cuya cancelación de carga provoca la activación de receptores específicos los que, a su vez, generan otro tipo de respuestas químico eléctricas. Cada milímetro cúbico de córtex cerebral contiene aproximadamente 1 000 millones de sinapsis. Se estima que en el cerebro humano adulto hay por lo menos 10^{14} conexiones sinápticas (aproximadamente, entre 100 y 500 billones). En niños alcanza los 1000 billones. Este número disminuye con el paso de los años, estabilizándose en la edad adulta. Las corrientes dendríticas se generan por las sinapsis activas que sirven como fuentes de corriente que causan los campos de ondas extracelulares. Estas ondas corresponden a cantidades medidas por técnicas no invasivas. Existen técnicas no invasivas (es decir, técnicas no violentas, ni traumatizantes que se emplean tomando muestras y observaciones directas para análisis clínico), como la resonancia magnética funcional, electroencefalografía (EEG) y magnetoencefalografía (MEG) que proporcionan información inicial de la dinámica del cerebro humano para fines clínicos, así como para el estudio del comportamiento humano y la cognición. Cada una de estas tecnologías de observación proporcionan información espacio-temporal de la actividad neuronal en la corteza del cerebro. Desafortunadamente estas medidas tienen ciertas limitaciones que hacen difícil identificar la ecuación que gobierna la dinámica de la actividad neuronal. Muchos físicos citados en [14],[24],[30] han formulado modelos continuos llamados campos neuronales para predecir la actividad neuronal con la anatomía del cerebro.

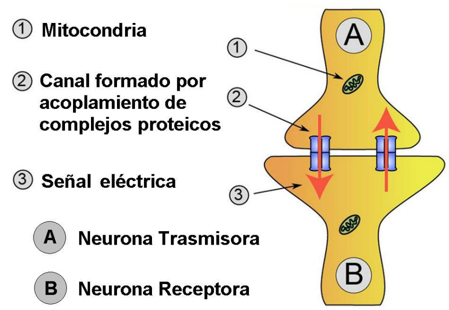

Figura 2: La sinapsis

El modelo de Jirsa Haken [30] conduce al siguiente problema de ecuación de evolución que se investiga en este trabajo,

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha\Delta u = a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), & (t,x) \in [0,+\infty\rangle \times \Omega \\ u(0,x) = u_0,\ u_t(0,x) = u_1, & x \in \Omega \\ u = 0, & (t,x) \in\ [0,+\infty\rangle \times \partial\Omega. \end{cases}$$

donde consideraremos, Ω abierto acotado en $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 4)$, con frontera $\partial\Omega$ bien regular; la notación u_t y u_{tt} representan la primera y la segunda derivada parcial respectivamente de u con respecto a la variable del tiempo t, Δ representa el operador de Laplace y p es una función regular dada la cual modela un estímulo externo (representa la entrada). Por simplicidad asumiremos $\alpha = 1$. La ecuación en estudio será un problema abierto si no asumimos condiciones adicionales sobre los términos a, b, u_0, u_1. Además, la existencia global no siempre está garantizada (ver [8],[32]). El estudio planteado es desarrollado por Mauhamad y Maîtine [22] quienes prueban que el sistema tiene solución estable, bajo supuestos datos reales. De hecho, estos supuestos están motivados por el modelo de la actividad cerebral física subyacente, que conducen a un sistema que es un caso particular de la ecuación que estudiaremos cuando $\alpha = 1$.

Nuestra ecuación de Jirsa Haken pertenece a una clase de ecuaciones de onda no lineal con amortiguamiento las que han sido ampliamente estudiadas por muchos matemáticos e ingenieros. En [34], [31], los autores demuestran la existencia y unicidad de soluciones globales bajo ciertas condiciones, utilizando el método de Galerkin. Zhou [35] ha estudiado un caso particular de nuestro sistema, sin considerar la entrada externa p, suponiendo a la función a constante y al término b definido por $b(u) = |u|^{n-1}u$. La ecuación más cercana a la que investigamos ha sido estudiada por Zhijian [31], a saber con las condiciones iniciales y de contorno:

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma(u_{x_i}) + \beta(u_{x_i t})) + F(u, u_t, \nabla u, \nabla u_t) \quad \text{sobre} \quad [0,\infty[\times\Omega$$

Nuestro primer paso es estudiar la existencia de la solución débil global del sistema, utilizando el método de Faedo - Galerkin y además tenemos por objetivo establecer la estabilidad y unicidad de la solución utilizando criterios de desigualdades e inmersiones de

Sobolev. La no linealidad de nuestra ecuación en estudio se presenta en el término $a(u,p)u_t$ llamado también término disipativo. Además las funciones $a(u,p)$ (término de amortiguamiento) y $b(u,p,p_t)$ (término no lineal) son los términos más importantes porque enlazan la parte física-biológica con la parte matemática y permiten que la ecuación modele una actividad neuronal del cerebro, donde u representa las vibraciones de la corteza cerebral.
El sistema que desarrollaremos pertenece a una clase de ecuaciones de onda con amortiguamiento no lineal que será probada tiene soluciones globales débiles, por otra parte si el problema es unidimensional, la solución dependen contínuamente de los datos iniciales, por lo que obtendremos la estabilidad de solución.

Capítulo 1

Preliminares

En el contenido de este primer capítulo se enunciarán algunas definiciones y teoremas que serán de utilidad para poder desarrollar el trabajo en cuestión, suponiendo que conocemos los elementos básicos de los espacios con producto interno, los espacios normados y de la topología general .

1.1. Resultados Básicos del Análisis Funcional

1.1.1. Espacios de Banach

Definición 1.1.1 *Un espacio de Banach X es un espacio normado y completo, es decir, un espacio X normado donde toda sucesión de Cauchy es convergente en algún punto de dicho espacio.*

Ejemplo 1.1.2 *El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach con la norma usual definida por*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + ... + (\xi_n)^2}$$

donde $x = (\xi_1, \xi_2, ...\xi_n) \in \mathbb{R}^n$

Sean $x = (\xi_1, \xi_2, ...\xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ...\eta_n)$ pertenecientes a $\mathbb{R}^n$ cualesquiera, este espacio $\mathbb{R}^n$ es completo, produciendo la métrica

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \eta_i)^2\right)^{1/2} = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\eta_2)^2 + ... + (\xi_n-\eta_n)^2}$$

Un producto interno en X define una norma sobre X dado por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Todo producto interno da origen a una norma, pero lo recíproco no siempre es verdadero. Por tanto, todo espacio con producto interno es un espacio normado.

Una condición necesaria y suficiente para que la norma de un espacio normado X sea obtenida a partir de algún producto interno, es que ella verifique la ley del paralelogramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

donde $x, y \in X$.

Los espacios normados en los cuales toda sucesión de Cauchy es una sucesión convergente son denominados espacios de Banach, como se mencionó anteriormente en la definición. Pero cuando la norma proviene de un producto interno, tales espacios llevan el nombre de espacios de Hilbert.

Sea $p \geq 1$ un número real fijo. Se define el espacio ℓ^p de modo que cada elemento es una sucesión $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números tales que la suma $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + ...$, converge; así

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty, \qquad (p \geq 1, \text{ fijo})$$

y la métrica definida por

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{1/p}$$

donde $y = (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p < \infty$. Si tomamos sólo las sucesiones reales, obtenemos el espacio real ℓ^p, y si tomamos sucesiones complejas, obtenemos el espacio complejo ℓ^p.

1.1.2. Espacios de Hilbert

Definición 1.1.3 *Un espacio de Hilbert es un espacio normado completo cuya norma es inducida por un producto interno.*

Ejemplo 1.1.4 *El espacio ℓ^p es un espacio de Banach si $p \geq 1$, pero será un espacio de Hilbert solamente si $p = 2$.*

1.2. Topologías Débiles

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$, donde E' es el dual topológico de E, i.e., el espacio de las formas lineales y continuas sobre E; donde también E' está dotado de la norma dual

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|, \text{ donde } x \in E$$

Cuando $f \in E'$ y $x \in E$ se denota $\langle f, x \rangle$ el producto escalar en la dualidad E', E (dicho escalar pertenece a los reales o a los complejos).
Se designa por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Cuando f recorre E' se obtiene una familia $(\varphi_f)_{f \in E'}$ de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.1 *(**Topología débil**) La topología débil $\sigma(E, E')$ sobre E es la topología menos fina sobre E que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E, se designa por $x_n \rightharpoonup x$, a la convergencia débil de x_n hacia x en la topología débil $\sigma(E, E')$. También se dirá que x_n converge débilmente a x en $\sigma(E, E')$.
En el caso de que se cumpla $\|x_n - x\| \to 0$, se dirá entonces que: $x_n \to x$ fuertemente.

Proposición 1.2.2 *Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión sobre E. Se verifica*

(i) *$x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$.*

(ii) *Si $x_n \to x$ fuertemente, entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E')$.*

(iii) *Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E')$, entonces $\|x_n\|$ está acotada y $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

(iv) *Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E')$ y si $f_n \to f$ fuertemente en E' i.e.$\|f_n - f\| \to 0$, entonces $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Proposición 1.2.3 *Si E es de dimensión finita, la topología débil $\sigma(E, E')$ y la topología usual coinciden. En particular, una sucesión (x_n) converge débilmente si y solamente si converge fuertemente.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Los abiertos (respectivamente los cerrados) de la topología débil $\sigma(E, E')$ son también abiertos (respectivamente cerrados) en la topología fuerte. Cuando E es de dimensión infinita la topología débil $\sigma(E, E')$ es estrictamente menos fina que la topología fuerte i.e.(es decir) existen abiertos (respectivamente los cerrados) en la topología fuerte que no son abiertos (respectivamente los cerrados) en la topología débil.

Definición 1.2.4 ***(Topología débil estrella o topología** $\sigma(E', E)$ **)*** *Sea E un espacio de Banach y E' su dual. La topología débil estrella que se designa también por $\sigma(E', E)$ es la topología menos fina sobre E' que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_x)_{x\in E}$, tomando en cuenta que, para cada $x \in E$ se considera la aplicación $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$. Cuando x recorre E se obtiene una familia de aplicaciones $(\varphi_x)_{x\in E}$ de E' en $\mathbb{R}$.*

Sea E'' el bidual de E, i.e., E'' el dual de E' donde $E \subset E''$. La topología $\sigma(E', E)$ posee menos abiertos que la topología $\sigma(E', E'')$, que a su vez posee menos abiertos que la topología fuerte.

Si una topología posee menos abiertos también posee más compactos. Una bola unitaria de E' tiene la notable propiedad de ser compacta para la topología débil estrella o topología $\sigma(E', E)$. Los conjuntos compactos juegan un papel fundamental cuando se trata de establecer teoremas de existencia. De ahí la importancia de esta topología.

Proposición 1.2.5 *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* E'*. Se verifica*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\sigma(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.

(ii) *Si* $f_n \to f$ *fuertemente, entonces* $f_n \rightharpoonup f$ *en* $\sigma(E', E'')$.

Si $f_n \rightharpoonup f$ *en* $\sigma(E', E'')$ *entonces* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\sigma(E', E)$.

(iii) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\sigma(E', E)$ *entonces* $\|f_n\|$ *está acotado y* $\|f\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|$.

(iv) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\sigma(E', E)$ *y si* $x_n \to x$ *fuertemente en* E, *entonces* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(E', E)$ y si $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(E, E')$, no se puede concluir que $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. Cuando E es de dimensión finita las tres topologías: fuerte, débil y débil estrella coinciden.

Proposición 1.2.6 *Sea* $\varphi : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ *una aplicación lineal y continua para la topología* $\sigma(E', E)$*. Entonces existe* $x \in E$ *tal que*

$$\varphi(f) = \langle f, x\rangle, \forall f \in E'$$

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Teorema 1.2.7 ***(Banach - Alaoglu - Bourbaki)*** *El conjunto* $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ *es compacto en la topología débil estrella* $\sigma(E', E)$.

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Este teorema afirma que toda sucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E' limitada, posee una subsucesión que converge débil estrella. Esto es

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

o equivalentemente

$$f_{n_k}(x) \to f(x), \quad \forall x \in E.$$

1.3. Espacios Reflexivos

Definición 1.3.1 *Sea E un espacio de Banach y sea J la función definida de la siguiente forma*

$$J : E \to E''$$

$$x \mapsto J(x), \quad < J(x), f >= f(x), \quad \forall f \in E'.$$

Se dice que E es reflexivo si $J(E) = E''$

La función J así definida es llamada inyección canónica de E en E''.

Teorema 1.3.2 *Sea E un espacio de Banach. Entonces E es reflexivo si y sólo si*

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$$

es compacto en la topología débil $\sigma(E, E')$.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Lema 1.1 ***(Goldstine)*** *Sea E un espacio de Banach. Entonces $J(B_E)$ es denso en $B_{E'}$ para la topología $\sigma(E'', E')$, y en consecuencia $J(E)$ es denso en E'' en la topología $\sigma(E'', E')$*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Proposición 1.3.3 *Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $M \subset E$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces M es reflexivo, dotado de la norma inducida por E.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Proposición 1.3.4 *Sea E un espacio de Banach. Entonces E es reflexivo si y solamente si E' es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

1.4. Espacios Separables

Definición 1.4.1 *Se dice que un espacio métrico E es separable si existe un subconjunto $D \subset E$ numerable y denso.*

Proposición 1.4.2 *Sea E un espacio métrico separable y sea F un subconjunto de E. Entonces F es separable.*

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Teorema 1.4.3 *Sea E un espacio de Banach tal que E' es separable. Entonces E es separable*

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Corolario 1.4.1 *Sea E un espacio de Banach. Entonces*

$$(E \text{ es reflexivo y separable}) \Leftrightarrow (E' \text{ es reflexivo y separable}).$$

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Corolario 1.4.2 *Sea E un espacio de Banach separable y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en E'. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge en la topología $\sigma(E', E)$.*

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Teorema 1.4.4 *Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge en la topología $\sigma(E, E')$.*

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Teorema 1.4.5 ***(Eberlein-Smulian)*** *Sea E un espacio de Banach tal que toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en la topología $\sigma(E, E')$. Entonces E es reflexivo.*

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

1.5. Los Espacios $L^p(\Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto dotado de la medida de Lebesgue. Se designa por $L^1(\Omega)$ al espacio de las funciones integrables u sobre Ω con valores en $\mathbb{R}$. Se escribe

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)|dx$$

Cuando no hay ambigüedad, se escribe L^1 en lugar de $L^1(\Omega)$. También, al identificarse dos funciones de L^1 que coinciden en casi todo punto, se usará la notación,
c.t.p.= [para casi todo punto excepto en un conjunto de medida nula].

Definición 1.5.1 *Sea $p \geq 1$. Se denota por $L^p(\Omega)$ a la clase de todas las funciones medibles u, para las cuales $|u|^p$ es una función integrable sobre Ω.*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \ \textit{medible y} \ |u|^p \in L^1(\Omega)\}$$

En $L^p(\Omega)$ se define la norma

$$\|u\|^p_{L^p} = \int_\Omega |u(x)|^p dx \ ; \quad 1 \leq p < \infty,$$

con esta norma $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Teorema 1.5.2 *(**Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue**) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$. Supongamos que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *c.t.p. en* Ω

(ii) *Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω.*

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ *y* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Demostración.- Ver [2] en las referencias bibliográficas.

Recordemos que un $\lambda \in \mathbb{R}$ es llamado un mayorante essencial de una función u cuando $u(x) \leq \lambda$ c.t.p., esto es, cuando un conjunto de puntos x para los cuales $u(x) > \lambda$ tiene medida nula. Sea Λ el conjunto de todos los mayorantes essenciales de una función u, se denota por supess u, al ínfimo del conjunto Λ, es decir, supess $u = \text{ínf}\,\Lambda$.

$$\text{supess}|u| = \text{ínf}\,\{M > 0/|u(x)| < M \text{ c.t.p. en } \Omega\}$$

En el caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ es el espacio formado por todas las funciones u, esencialmente limitadas sobre Ω.

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \quad \text{medible} : \quad |u(x)| \leq M \quad \text{c.t.p. en} \quad \Omega\}$$

De esta forma, $L^\infty(\Omega)$ junto a la norma:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x\in\Omega}{\text{supess}}|u(x)|$$

es un espacio de Banach.

El siguiente cuadro nos muestra las principales propiedades de los espacios L^p, tomando en consideración lo siguiente:

- Se tiene que $q = p$ si $1 < p < \infty$
- Se designa por p' al exponente conjugado de $1 \leq p \leq \infty$ i.e.: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

En resumen se tiene

L^p	Reflexivo	Separable	Su Espacio Dual
L^q	SI	SI	$L^{p'}$
L^1	NO	SI	L^∞
L^∞	NO	NO	$L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))'$

Cuando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

y norma

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Teorema 1.5.3 *Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en L^p y $u \in L^p$, tales que $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$. Entonces existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

(i) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ *c.t.p. en* Ω

(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq v(x), \forall k$ *y c.t.p. en* Ω *con* $v \in L^p$.

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

1.5.1. Desigualdades Básicas

Proposición 1.5.4 *(**Desigualdad de Young**) Sean a y b números reales no negativos. Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

donde $1 < p < \infty$ y $p' = \frac{p}{p-1}$ es llamado el índice conjugado de p.

Demostración.- Ver [5], [16] y [4] en las referencias bibliográficas.

Lema 1.2 *(**Desigualdad de Hölder**) Sea $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces se cumple que*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad y \quad \int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$$

Demostración.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Proposición 1.5.5 *(**Desigualdad de Interpolación**) Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ donde $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $u \in L^r(\Omega)$, $\forall\ p \leq r \leq q$ y se verifica la desigualdad de interpolación donde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$*

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^\alpha \|u\|_q^{1-\alpha}$$

Demostración.- Observemos que $\int_\Omega |u|^r dx = \int_\Omega |u|^{\alpha r}|u|^{(1-\alpha)r}dx$, y aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\int_\Omega |u|^r dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{\alpha r \frac{p}{\alpha r}} dx\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int_\Omega |u|^{(1-\alpha)r\frac{q}{(1-\alpha r)}} dx\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}}$$

Proposición 1.5.6 ***(Desigualdad de Hölder Generalizada)*** *Sean $f_1, f_2, ..., f_k$ funciones tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$, donde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Entonces se tiene el producto $f = f_1 f_2 ... f_k \in L^p(\Omega)$ y se cumple*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} ... \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

DEMOSTRACIÓN.- Lo obtenemos por inducción y usando la desigualdad de Hölder. Ver [9] en las referencias bibliográficas.

Teorema 1.5.7 ***(Desigualdad de Minkowski)*** *Sean las funciones $u, v \in L^p(\Omega)$ donde $1 \leq p$, entonces se tiene que*

$$\left\{ \int_\Omega |u(x) + v(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_\Omega |v(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Por otro lado, si $p < 1$ tenemos la desigualdad inversa de Minkowski

$$\left\{ \int_\Omega |u(x) + v(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \geq \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_\Omega |v(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [23] en las referencias bibliográficas.

Teorema 1.5.8 *Supongamos que $1 \leq p \leq 2$ entonces para todas las funciones $u, v \in L^p(\Omega)$ se cumplirá que*

$$\left\{ \int_\Omega \left| \frac{u(x) - v(x)}{2} \right|^p dx \right\}^{\frac{q}{p}} + \left\{ \int_\Omega \left| \frac{u(x) + v(x)}{2} \right|^p dx \right\}^{\frac{q}{p}} \leq \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |u(x)|^p + |v(x)|^p dx \right\}^{\frac{q}{p}}$$

donde q es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $p \geq 2$ entonces tenemos que

$$\int_\Omega \left| \frac{u(x) - v(x)}{2} \right|^p dx + \int_\Omega \left| \frac{u(x) + v(x)}{2} \right|^p dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u(x)|^p + |v(x)|^p dx$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [23] en las referencias bibliográficas.

Teorema 1.5.9 ***(Desigualdad de Clarkson)*** *Sea $2 \leq p < \infty$; se verifica*

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}(\|u\|_{L^p}^p + \|v\|_{L^p}^p),\ \forall u, v \in L^p$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] y [23] en las referencias bibliográficas.

1.6. Distribuciones

Sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in I\!N^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ y se denota por D^α el operador derivada de orden $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Cuando $\alpha = (0, 0..., 0)$ se define $D^\alpha u := u$.

Si u y v son funciones numéricas con un número suficiente de derivadas, tenemos la regla de Leibniz para la derivada del producto uv como sigue

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$$

1.6.1. Soporte de una Función

Definición 1.6.1 *(**Soporte de una Función**) Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se denomina soporte de u, al cerrado en Ω del conjunto formado por todos los $x \in \Omega$ tales que $u(x) \neq 0$ y denotado por* $\mathrm{sop}(u)$.

$$\mathrm{sop}(u) = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

Si este conjunto fuera un compacto de $\mathbb{R}^n$ entonces diremos que u tiene soporte compacto. Cuando una función u sea continua en Ω y admita derivadas continuas de todas las órdenes, se dirá que es infinitamente derivable, y se denotará por

$$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \exists D^\alpha(u) \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^n\}$$

Denotaremos también por $C_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de las funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que son infinitamente derivables en Ω y que tienen soporte compacto.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \text{ tal que } u \in C^\infty(\Omega) \text{ tiene soporte compacto}\}$$

Ejemplo 1.6.2 *Consideremos la función*

$$u(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

donde $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$, $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ *. Entonces* $u \in C_0^\infty$ *y*

$$\mathrm{sop}(u) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leq 1\}.$$

Definición 1.6.3 ***(El Espacio** $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$) *Denotamos por* $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ *al espacio de (clases de) funciones* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que* $|u|^p$ *es integrable en el sentido de Lebesgue sobre cada compacto de* Ω.

Para más información podemos ver [7] y [20] en las referencias bibliográficas.

1.6.2. Inmersión Continua

Definición 1.6.4 ***(Inmersión Continua)*** *Sea* V, W *espacios de Banach,* W *subespacio de* V. *Diremos que* W *tiene inmersión continua en* V *(o que está inmerso continuamente en* V*) si la aplicación inclusión* $i : W \longrightarrow V$ *es continua. En este caso denotaremos por* $W \hookrightarrow V$.

Recordemos que para aplicaciones lineales, continuidad equivale a acotación, es decir, si $T : X \longrightarrow Y$ lineal entonces, T es continua $\Leftrightarrow \exists\, C > 0 : \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall x \in X$. Por tanto

$$W \hookrightarrow V \Leftrightarrow \exists\, C > 0 : \|\omega\|_V \leq C\|\omega\|_W, \ \forall \omega \in W.$$

Si adicionalmente: $\overline{W} = V$, se dice que la inmersión es densa. Si también, la aplicación es compacta, decimos que hay una inmersión compacta de W en V.
En términos ordinarios, las convergencias débiles en W, se traducen a convergencias fuertes en V.
Sean dos espacios de Banach X e Y. Si existe una aplicación $T : X \longrightarrow Y$ inyectiva y continua, entonces $X \hookrightarrow Y$ y se dirá que X está inmerso en Y.
Como ejemplo tenemos que

$$C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega), \quad p > 1.$$

Proposición 1.6.5 ***(Du Bois Raymond)*** *Sea* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ *c.t.p. en* Ω.

Demostración.- Ver [7] en las referencias bibliográficas.

Teorema 1.6.6 *El espacio vectorial* $C_0^\infty(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$.

Demostración.- Ver [3] y [7] en las referencias bibliográficas.

Definición 1.6.7 *Se dice que una sucesión* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge a* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *cuando satisface las siguientes condiciones*

(i) *Los soportes de todas las funciones de Prueba* φ_n , *de la sucesión dada, se encuentran dentro de un compacto fijo de* Ω, *es decir, existe un subconjunto compacto* K *de* Ω *tal que*

$$\mathrm{sop}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N} \ \ y \ \ \mathrm{sop}(\varphi) \subset K$$

(ii) *Para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *la sucesión* $(D^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* φ *uniformemente en* Ω, *es decir*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi \quad \textit{uniformemente sobre } K.$$

1.6.3. Funciones de Prueba

Definición 1.6.8 *(**Funciones de Prueba o Funciones Test**) El espacio* $C_0^\infty(\Omega)$ *con la noción de convergencia de la definición anterior es llamado el espacio de las funciones de prueba en* Ω *y es representado por* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 1.6.9 *(**Distribuciones sobre** Ω) Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto. Una aplicación lineal* $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es llamada una distribución si es continua en el sentido de la convergencia en* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Por tanto, Si la sucesión* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a cero en* $\mathcal{D}(\Omega)$, *en el sentido de la definición anterior, entonces la sucesión* $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a cero en* $\mathbb{R}$.

También denotamos $T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle$, así también $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\langle T, \varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces de la definición

$$\varphi_n \to 0 \ \text{ en } \ \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi_n\rangle \to 0 \ \text{ en } \ \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 1.6.10 *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces T_u definida por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

es una distribución sobre Ω. Ver [7] en las referencias bibliográficas.

El espacio vectorial de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que

$$T_n \to T \quad \text{si} \quad \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

El espacio $L^1_{loc}(\Omega)$ está inmerso en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir

$$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

. Ver [7] y [20] en las referencias bibliográficas.

Consideremos una distribución T sobre Ω y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. **La derivada de orden α de T sobre** Ω es definida como una función lineal denotada por $D^\alpha T$, que a la vez es una distribución sobre Ω. Su definición esta dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observación 1.6.11 *Se prueba que si $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, de esta manera, una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ posee derivadas de todas las órdenes en el sentido de las distribuciones. Observemos también que la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} D^\alpha : & \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ & T & \mapsto & D^\alpha T. \end{array}$$

es lineal y continua en el sentido de la convergencia definida en $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Ver [7] y [20] en las referencias bibliográficas.

1.7. Espacios de Sobolev

Con las definiciones y notaciones de la sección anterior se define el espacio

$$W^{m,p}(\Omega) \;=\; \Big\{ \, u \in L^p(\Omega)\,, \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,, \quad |\alpha| \leq m \quad \text{en el sent. de las distrib.} \Big\}.$$

Sea

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx$$

con esta norma, $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. Ver [1],[7] y [20] en las referencias bibliográficas.

1.7.1. Espacio $W^{m,p}(\Omega)$

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado ***Espacio de Sobolev de orden m***.
Si $m = 0$, se tiene que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, sabiendo que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, pero no es cierto que $\mathcal{D}(\Omega)$ sea denso en $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \ge 1$.
Cuando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ es denotado por $H^m(\Omega)$, y este espacio es un espacio de Hilbert con producto interno definido por

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

y norma dada por

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx.$$

También se define el espacio de Banach $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en el espacio $W^{m,p}(\Omega)$, esto es

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Si $m = 1$, las funciones de $W_0^{1,p}(\Omega)$ son aquellas funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan sobre la frontera de Ω, es decir sobre $\Gamma = \partial\Omega$.
Cuando $m = 2$, se escribe $H_0^m(\Omega)$ en lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.
En el caso que $\Omega = \mathbb{R}^n$ se tiene que C_0^∞ es denso en $H^m(\mathbb{R}^n)$, es decir $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$

Se define el dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ como

$$H^{-m}(\Omega) = \{T : H_0^m \longrightarrow \mathbb{R}/ \text{ T es lineal y continua } \}$$

i.e.: $H^{-m}(\Omega) = [H_0^m(\Omega)]'$.
Tenemos la siguiente cadena de inyecciones continuas y densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

1.7.2. Abiertos Bien Regulares

Definición 1.7.1 ***(Abiertos Bien Regulares)*** *Se dice que un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es bien regular, cuando su frontera $\Gamma = \partial\Omega$ es una variedad C^∞ de dimensión $n-1$ y Ω se encuentra localmente de un mismo lado de Γ. Esto quiere decir que para todo $x \in \Gamma$ existe un abierto limitado U de $\mathbb{R}^n$, conteniendo x, y una aplicación $\varphi : \overline{U} \longrightarrow \overline{Q}$ que satisface dos condiciones*

(1) *φ es un difeomorfismo de $\overline{U}$ sobre $\overline{Q}$, esto es, φ es biyectiva siendo φ y φ^{-1} funciones con derivadas continuas de cualquier orden.*

(2) $\varphi(U \cap \Omega) = Q^+$; $\varphi(U \cap \partial\Omega) = \Gamma_0$ *y* $\varphi(\partial(U \cap \Omega)) = \Gamma_1$.

Sea el espacio $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ de las restricciones a Ω de funciones de prueba en Ω. Diremos que la frontera de Ω, $\Gamma = \partial\Omega$, es bien regular si Γ es una variedad de clase C^2 de dimensión $n-1$ y existe un campo vectorial de funciones $\nu_i : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$, denominado campo normal, tal que $\|\nu_i(x)\| = 1$, para $x \in \Gamma$, y la siguiente fórmula de Gauss se cumple $\forall u$ función de clase C^1 en $\overline{\Omega}$ que se anule fuera de un compacto de $\overline{\Omega}$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx = \int_\Gamma \nu_i(x)u(x)d\Gamma, \qquad i = 1,2,3,...,n$$

Por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ se representa a la restricción a $\overline{\Omega}$ de las funciones en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.7.2 *Sea Ω un abierto bien regular de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{m,p(\Omega)}$.*

Demostración.- Ver [20] en las referencias bibliográficas.

1.8. Desigualdades de Sobolev

Teorema 1.8.1 ***(Desigualdad de Poincaré)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto limitado. Entonces existe una constante $C = C(\Omega, p)$ (dependiente de Ω y p), tal que*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \ donde \ \ \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [23] en las referencias bibliográficas.

Del teorema anterior tenemos que con las mismas condiciones, existe una constante $C_1 = C_1(\Omega, p)$, tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

En particular, la expresión $\|\nabla u\|_{L^p}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}}$.
Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Proposición 1.8.2 ***(Inmersiones de Sobolev)*** *Sea Ω un abierto acotado (limitado) en $\mathbb{R}^n$ de frontera bien regular. Entonces se verifican las siguientes inmersiones continuas y densas*

(i) *Si* $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{m}{n} > 0$ *entonces* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

(ii) *Si* $\frac{1}{2} - \frac{m}{n} = 0$, *entonces* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \forall \ \ 1 \leq p \leq \infty$.

(iii) *Si* $\frac{1}{2} - \frac{m}{n} < 0$, *entonces* $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, *donde* $m > \frac{n}{2} + k$.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [1] en referencias bibliográficas.

Teorema 1.8.1 ***(Sobolev, Gagliardo, Niremberg)*** *Sea $1 \leq p < N$ y considere p^* tal que $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

y también, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [1],[3] en las referencias bibliográficas.

Observación 1.8.3 *En el caso unidimensional se sigue inmediatamente*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R})$$

con inmersión contínua. En efecto, se toma $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$. Luego se tomará $x \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R} = \cup_{i \in N}] - i, -i+1] \cup]i, i+1]$ se tiene que $x \in]a, a+1]$ portanto se puede escribir

$$u(x) - u(y) = \int_x^y \frac{du}{ds}\, ds, \quad para \quad x, y \in]a, a+1] \qquad ....(1.9.1)$$

Demostración.- *Integrando la desigualdad anterior sobre $]a, a+1]$ con respecto a y y usando el teorema del valor medio para integrales se tiene*

$$u(x) = \int_a^{a+1} u(y)\, dy + \int_x^{y_0} \frac{du}{ds}\, ds, \quad x, y_0 \in]a, a+1]$$

usando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$|u(x)| \leq \left(\int_a^{a+1} |u(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^{a+1} \left| \frac{du}{ds} \right|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

de donde se concluye

$$\|u\|_{L^{\infty}(a,a+1)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$$

siendo a un entero cualquier, se tiene

$$\|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$$

de donde se sigue el resultado.

Observación 1.8.4 *De la identidad (1.8.3) se tiene que*

$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \left\| \frac{du}{ds} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Portanto las funciones de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ son continuas.

Observación 1.8.5 Como consecuencia del resultado anterior, $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ posee una derivada parcial nula en $L^p(\mathbb{R}^N)$, entonces $u = 0$.

Corolario 1.8.1 *Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < N$, entonces para todo $q \in [p, p^*]$ es válido*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{1-\alpha}_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \quad donde \quad \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

en particular se tiene

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [p, p^*]$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [23], [1] en las referencias bibliográficas.

Corolario 1.8.2 *Para $p = N$ se verifica*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [N, \infty[$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3], [23] nas referencias bibliográficas.

Observación 1.8.6 *La inmersión anterior es estricta para $N > 1$. Entonces, para esto basta considerar la función $f(x, y) = ln(x^2 + y^2)$, es simple verificar que $f \in W^{1,1}(B_1(0))$, donde $B_1(0)$ es la bola de $\mathbb{R}^2$ centrada en el cero y de radio unitario y que f no es limitada en la bola. Se puede también construir un ejemplo en $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$, utilizando el operador de prolongamiento P. Entonces, $P(f) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ e $P(f)$ no es limitada.*

Teorema 1.8.1 ***(Teorema de Morrey)*** *Sea $p > N$ entonces se tiene*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$$

con inmersión continua. También, se verifica

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}\|\nabla u\|_{L^p} \tag{1.1}$$

donde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ e C es una constante positiva.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [1] y [3] en las referencias bibliográficas.

Corolario 1.8.3 *Sea $1 < p \leq \infty$. Se verifican los siguientes resultados*
Si $1 \leq p < N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$ donde $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
Si $p = N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, +\infty[$,
Si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$

Además,

si $p > N$ se verifica

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x - y|^{\alpha} \;\; c.t.p. \;\;\; x, y \in \Omega, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

donde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ y C dependiente solamente de Ω, p y N. En particular $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Proposición 1.8.7 ***(Desigualdad de Interpolación de Gagliardo-Nirenberg)***

(i) *Sea $u \in L^p(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq r \leq \infty$. Entonces $u \in W^{1,q}(\Omega)$ donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)$ y $\exists C > 0$ tal que*

$$\|Du\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{2,r}}^{1/2}\|u\|_{L^p}^{1/2}$$

(ii) *Sean $1 \leq q \leq p < \infty$. Entonces sea $a = 1 - \frac{q}{p}$, $\exists C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^q}^{1-a}\|u\|_{W^{1,N}}^{a}, \quad \forall u \in W^{1,N}(\Omega)$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] en las referencias bibliográficas. Señalemos un caso particular tomando $N = 2$, $p = 4$, $q = 2$ y $a = 1/2$ en (ii). Obtenemos una desigualdad que se utiliza frecuentemente cuando

$$\exists C > 0 : \quad \|u\|_{L^4} \leq C\|u\|_{L^2}^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2}$$

Teorema 1.8.2 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Sea Ω un conjunto limitado de clase C^1, en estas condiciones se tiene las siguientes inmersiones compactas.*

$$\begin{array}{lll}
p < N & \Rightarrow & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[\quad \text{donde} \quad \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N} \\
p = N & \Rightarrow & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty[\\
p > N & \Rightarrow & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}),
\end{array}$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [23] y [3] en las referencias bibliográficas.

1.9. Espacio de las Distribuciones Vectoriales

A continuación veremos el espacio vectorial de las clases de funciones que comprenden el mapeo del tiempo a un espacio de Banach X. Esto es un factor esencial para la construcción de soluciones débiles en EDP parabólicas e hiperbólicas.

Definición 1.9.1 *Sea $1 \leq p < \infty$, se denota con $L^p(0,T;X)$ el espacio vectorial de funciones medibles $u : [0,T] \longrightarrow X$ con norma:*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$L^p(0,T;X)$ dotado con esta norma es un espacio de Banach. En el caso de $p = 2$ y X sea un espacio de Hilbert, $L^2(0,T;X)$ resulta ser un espacio de Hilbert con producto interno dado por:

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt$$

donde $(u(t),v(t))_X$ denota el producto interno en X.

Definición 1.9.2 *Sea $p = \infty$, se define*

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \longrightarrow X;\ u \text{ es medible y } \underset{t\in[0,T]}{\text{supess}} \|u(t)\|_X < \infty \right\}$$

En $L^\infty(0,T;X)$ se define

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \underset{t\in[0,T]}{\text{supess}} \|u(t)\| < \infty.$$

Con esta norma $L^\infty(0,T;X)$ resulta ser un espacio de Banach.

Tomaremos en cuenta que $L^p(0,T;X)$ también puede ser escrito como $L^p([0,T];X)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Si $1 \leq p < \infty$, entonces el dual topológico de $L^p(0,T;X)$ se identifica como el espacio $L^q(0,T;X^*)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Además si X es reflexivo (respectivamente separable) y $1 < p < \infty$ (respectivamente $1 \leq p < \infty$) entonces $L^p(0,T;X)$ es reflexivo (respectivamente separable). Con esta identificación, tenemos que

$$\langle u,v \rangle_{L^q(0,T;X');L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t),v(t) \rangle_{X',X} dt.$$

Definición 1.9.3 *Sea X un espacio de Banach, representamos por $C(0,T;X)$ al espacio de las funciones $u:[0,T]\longrightarrow X$ tales que la aplicación $t\mapsto\|u(t)\|_X$ es continua en $[0,T]$. La norma en $C(0,T;X)$ está dada por*

$$\|u\|_{C(0,T;X)}=\max_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_X<\infty.$$

Proposición 1.9.4 *Sean X y Y, espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$. Entonces*

(i) *$C(0,T;X)$ es denso en $L^p(0,T;X)$ y además $C(0,T;X)\hookrightarrow L^p(0,T;X)$*

(ii) *Si $X\hookrightarrow Y$, entonces $L^p(0,T;X)\hookrightarrow L^q(0,T;Y)$ $1\leq q\leq p\leq\infty$.*

Demostración.- Ver [17] en referencias bibliográficas.

Lema 1.3 *Si $f\in L^p(0,T;X)$, $\partial f/\partial t\in L^p(0,T;X)$, $1\leq p\leq\infty$. Entonces $f\in C(0,T;X)$.*

Demostración.- Ver [17] en las referencias bibliográficas.

Definición 1.9.5 *Sea $u\in L^1(0,T;X)$. Diremos que $u'\in L^1(0,T;X)$ es la derivada débil de u, siempre que*

$$\int_0^T\phi'(t)u(t)dt=-\int_0^T\phi(t)u'(t)dt$$

$\forall\phi$ función de prueba en $C_0^\infty(0,T)$.

Definición 1.9.6 *Sea E un espacio de Banach separable y $]a,b[$ un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Se dice que la función $u:]a,b[\longrightarrow E$ es **Bochner integrable** en $]a,b[$ si la función real $t\mapsto\|u(t)\|_E$ es lebesgue integrable en $]a,b[$.*

Definición 1.9.7 *Sea X un espacio de Banach. Se define el espacio de las distribuciones vectoriales como*

$$\mathcal{D}'(0,T;X)=\{S:\mathcal{D}(0,T)\longrightarrow X,\ \textit{tal que}\, S\ \textit{es lineal y continua}\}.$$

La continuidad significa, Si $n\in\mathbb{N}$, cuando $n\to\infty$, $\varphi_n\to\varphi$ en $\mathcal{D}(0,T)$ entonces $\langle S,\varphi_n\rangle\to\langle S,\varphi\rangle$ fuertemente en X.

Si $u \in L^p(0,T;X)$, $\;1 \leq p < \infty$, se define la transformación S_u de $\mathcal{D}(0,T)$ en X dada por

$$\langle S_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

donde la integral es aplicada en el sentido de Bochner.
La aplicación

$$\begin{array}{rllll} S: & L^p(0,T;X) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(0,T;X) & & \\ & u & \mapsto & S_u : \mathcal{D}(0,T) & \longrightarrow & X \\ & & & \qquad \varphi & \mapsto & S_u(\varphi) = \langle S_u, \varphi \rangle \end{array}$$

Denotamos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ el espacio de las distribuciones vectoriales S sobre $[0,T]$ con valores en X. S_u definida anteriormente es lineal y continua y por tanto $S_u \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. Además, como S_u es inyectiva definida por u, podemos identificar S_u con u llamándola simplemente la distribución de u a través de S_u. Por tanto, u' designará la derivada de u en el sentido de $\mathcal{D}'(0,T;X)$, es decir

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

en este sentido podemos decir que $L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$. Se tienen las siguientes inmersiones

$$\begin{bmatrix} & \longrightarrow \\ L^p(0,T;X) & \rightharpoonup \\ & \overset{*}{\rightharpoonup} \end{bmatrix} \hookrightarrow [\mathcal{D}'(0,T;X)]$$

inyectivas y continuas con las topologías respectivas. Definimos ahora la derivada de orden k, $S^{(k)}$ de la siguiente forma

$$\langle S^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle S, \varphi^{(k)} \rangle,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Definición 1.9.8 *Se representa por* $W^{k,p}(0,T;X)\, 1 \leq p < \infty$, *el espacio de Banach tal que*

$$W^{k,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X);\ u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ 0 \leq j \leq k\}$$

donde $u^{(j)}$ *representa la j-ésima derivada de u en el sentido de las distribuciones vectoriales, unida con la norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{1/p},$$

o la norma equivalente,

$$\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}$$

cuando $p = 2$ y X es un espacio de Hilbert o espacio $W^{k,2}(0,T;X)$ es denotado por $H^k(0,T;X)$ el espacio de Hilbert unido con el producto interno

$$(u,v)_{H^k(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{k} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}$$

con la norma inducida por

$$\|u\|_{H^k(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|^2_{L^2(0,T;X)} \right)^{1/2}.$$

Cuando $k = 0$, $H^k(0,T;X)$ es el espacio $L^2(0,T;X)$. Denotamos también por $\mathcal{D}(0,T;X)$ al espacio de las funciones que son infinitamente derivables en $[0,T]$, con los valores en X y con soporte compacto en $]0,T[$. Por $W_0^{k,p}(0,T;X)$ denotamos el cerrado de $\mathcal{D}(0,T;X)$ en $W^{k,p}(0,T;X)$ y por $H_0^k(0,T;X)$ el cerrado de $\mathcal{D}(0,T;X)$ en $H^k(0,T;X)$. El espacio $H_0^k(0,T;X)$ es un espacio de Hilbert y se define como

$$H_0^k(0,T;X) = \left\{ u \in H^k(0,T;X) \,/\, u^{(j)}(0) = u^{(j)}(T) = 0, \ \text{donde} \ \ 0 \leq j \leq k-1 \right\}.$$

El dual topológico de $H_0^k(0,T;X)$ es representado por $H^{-k}(0,T;X')$.

1.10. Resultados de Compacidad

En esta sección mostraremos resultados de compacidad para espacios de distribuciones vectoriales y veremos un lema que es de fundamental importancia para demostrar la existencia de soluciones en problemas no lineales. Este es conocido como lema de Aubins-Lions.

Lema 1.4 *Sean B_0, B_1, B espacios de Banach, donde B_0, B_1 son reflexivos satisfaciendo:*

$$B_0 \hookrightarrow B \ \ \textbf{\textit{con inmersión compacta}}$$

y además

$$B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1 \ \ \textbf{\textit{con inmersines continuas}}.$$

Sea

$$W = \{v \in L^p(0,T;B_0); v' \in L^q(0,T;B_1)\}$$

donde $1 < p, q < \infty$ con la norma definida por

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^p(0,T;B_0)} + \|v\|_{L^q(0,T;B_1)}$$

Entonces $\forall \eta > 0$ existe una constante $C(\eta)$ tal que

$$\|v\|_B \leq \eta \|v\|_{B_0} - C(\eta)\|v\|_{B_1}$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [23] en las referencias bibliográficas.

Lema 1.5 ***(Aubins-Lions)*** *Sean B_0, B_1, B espacios de Banach, donde B_0, B_1 son reflexivos satisfaciendo:*

$$B_0 \hookrightarrow B \ \ \textbf{\textit{con inmersión compacta}}$$

y además

$$B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1 \ \ \textbf{\textit{con inmersines continuas}}.$$

Sea

$$W = \{v \in L^p(0,T;B_0); v' \in L^q(0,T;B_1)\}$$

donde $1 \leq p, q < \infty$ con la norma definida por

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^p(0,T;B_0)} + \|v\|_{L^q(0,T;B_1)}$$

Entonces W es un espacio de Banach y $W \hookrightarrow L^p(0,T;B)$ tiene inmersión compacta.

Demostración.- Ver [17] y [23] en las referencias bibliográficas.

Lema 1.6 ***(Lions)*** *Sea Q un abierto de $\mathbb{R}_n$ acotado; $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y g son funciones de $L^p(Q)$ donde $1 < p$, si se cumple:*

(i) *$(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^p(Q)$.*

(ii) *$g_k \to g$ casi siempre en Q*

Entonces $g_k \rightharpoonup g$ en $L^p(Q)$.

Demostración.- Ver [18] en las referencias bibliográficas.

Teorema 1.10.1 *Sea $u_{nn\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tal que*

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \textbf{\textit{en}} \quad L^\infty(0,T;H^\beta(\Omega))$$

$$u_n' \rightharpoonup u' \quad \textbf{\textit{en}} \quad L^\infty(0,T;H^\alpha(\Omega))$$

Para $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Entonces tenemos que

$$u_n \to u \quad \textbf{\textit{en}} \quad C^\infty(0,T;H^r(\Omega))$$

para todo $r \leq \beta$.

Demostración.- Ver [23] en las referencias bibliográficas.

1.11. Resultados de Teoría Espectral

Definición 1.11.1 *(**Base Hilbertiana**) Sea H un espacio de Hilbert. Se llama base Hilbertiana a toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de H tales que*

(i) $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *y* $(x_n, x_m) = 0$, $\forall m \neq n$ *($(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal en H).*

(ii) *El espacio vectorial generado por los $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en H.*

Teorema 1.11.2 *Todo espacio de Hilbert separable admite una base hilbertiana.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [3] en las referencias bibliográficas.

Definición 1.11.3 *(**Operador Autoadjunto**) Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto si:*

$$(Tu, v) = (u, Tv),\ \forall u, v \in H.$$

Definición 1.11.4 *(**Forma Sesquilineal**) Sea V un espacio de Hilbert y $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. La aplicación a:$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama una forma sesquilineal continua, si cumple*

(i) *Es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda variable. Es decir, sean $u, v, w \in V$ además $\alpha, \beta, \in \mathbb{C}$ con $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{C}$ sus respectivos conjugados, se tiene*

1. *Es lineal* $\Longleftrightarrow$ $a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\, a(u, w) + \beta\, a(v, w)$.
2. *Es antilineal* $\Longleftrightarrow$ $a(u, \alpha v + \beta w) = \bar{\alpha}\, a(u, v) + \bar{\beta}\, a(u, w)$.

(ii) *Es continua, si $\exists\, C > 0$ tal que: $|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in V$*

Definición 1.11.5 *(**Aplicación Hermitiana**) La aplicación sesquilineal $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ será hermitiana si*

$$a(v, w) = \overline{a(v, w)},\ \forall u, v \in V.$$

Muchos problemas de EDP pueden ser reformulados de una forma abstracta usando operadores en espacios de Hilbert. En esta sección presentaremos el clásico Teorema Espectral, fundamental para la elección de bases convenientes para la construcción de soluciones aproximadas. Para tener una idea clara del enunciado del Teorema Espectral, consideremos dos espacios de Hilbert, V y H tales que $V \hookrightarrow H$ y V denso en H. Consideremos una forma sesquilineal continua en $V \times V$.

Sea un operador lineal $A : V \longrightarrow V$. Denotaremos por $\mathfrak{D}(A)$ al conjunto de los $u \in V$ tal que la forma antilineal $v \mapsto a(u, v)$ es continua en V con la topología inducida por H. Como $\overline{A} = H$, podemos prolongar esta forma antilineal a todo H, por tanto, para cada $u \in \mathfrak{D}(A)$, $\exists!\ A(u) \in H$ tal que $a(u, v) = (Au, v)$, $\forall v \in V$. Observemos que:

$$\mathfrak{D} = \{u \in V;\ \exists! f \in H \text{ tal que } a(u, v) = (f, v)_H,\ \forall u \in V\} \quad \text{y} \quad A_u = f.$$

Con estas características tenemos que $\mathfrak{D}(A)$ es un subespacio lineal de H y que , $A : \mathfrak{D}(A) \subset V \longrightarrow H$, definido antes, es un operador de H. Por tanto, diremos que A es un operador definido por la terna $\{V, H, a(u, v)\}$.

Teorema 1.11.6 ***(Espectral)*** *Sea V y H dos espacios de Hilbert, tales que $V \hookrightarrow H$ con inmersión compacta en V es denso en H. Supongamos que $a(u, v)$, es una forma sesquilineal continua en $V \times V$ con $a(u, v)$ hermitiana. Sea A un operador definido por la terna $\{V, H, a(u, v)\}$. Entonces*

(i) *A es autoadjunto y existe un sistema numerable, ortonormal y completo $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H constituído por autovectores de A, que además, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es completo en V.*

(ii) *Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los autovalores de A correspondientes a los $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2, ..., \leq \lambda_n \leq ...,$ y $\lambda_n \to \infty$.*

(iii) *Un dominio de A es dado por*

$$\mathfrak{D}(A) = \left\{ u \in H; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(u, w_n)_H|^2 < \infty \right\}$$

(iv) *Se tiene*

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, w_n)_H w_n, \qquad \forall u \in \mathfrak{D}(A).$$

Demostración.- Ver [21] en las referencias bibliográficas.

El operador de Laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ es un operador diferencial de orden 2 formalmente autoadjunto. La teoría espectral para operadores no acotados en un espacio de Hilbert nos muestra que el operador $(-\Delta)$ es definido por la terna $\{H_0^1, L^2(\Omega), ((\cdot,\cdot))\}$ y su dominio está caracterizado por $\mathfrak{D}(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, esto es:

$$\begin{array}{rlcc} -\Delta : & H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & u & \mapsto & -\Delta u \end{array}$$

es un operador autoadjunto no acotado en $L^2(\Omega)$. Además, el teorema espectral muestra que existe una sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de autovectores del operador $(-\Delta)$, con sus respectivos autovalores $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esto es:

$$-\Delta w_n = \lambda_n w_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.12. Resultados Adicionales Importantes

Definición 1.12.1 *Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida en X está uniformemente acotada, si existe un número K tal que*

$$|f_n| < K, \qquad \forall x \in X \quad y \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 1.12.2 *La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{Sen(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$, está uniformemente acotada en $\mathbb{N}$, pues*

$$|Sen(nx)| \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad y \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema 1.12.3 ***(Teorema del Valor Medio)*** *Dada $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, con un segmento de recta $[a, a+v]$ contenido en U, entonces existe $\theta \in]0,1[$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a+\theta v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta v) \cdot \alpha_i \quad donde \quad v = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

Demostración.- Ver Análise Real Volume 2 - Elon Lages Lima.

Lema 1.7 ***(Gronwall)*** *Sean u, v, g funciones no negativas donde u, v son continuas y se satisface*

$$u(t) \leq g(t) + \int_0^t v(s)u(s)ds,\ \forall t \in [0,T]$$

Entonces

$$u(t) \leq g(t) + \int_0^t v(s)g(s) \exp^{\int_0^t v(r)dr} ds$$

Demostración.- Ver [23] en las referencias bibliográficas.

Lema 1.8 ***(Desigualdad de Gronwall)*** *Con las hipótesis del lema anterior, asumiendo que g es una función creciente, se tiene*

$$u(t) \leq g(t) \exp^{\int_0^t v(s)ds}$$

Demostración.- Ver [23] y [27] en las referencias bibliográficas.

Sea $u \in L^\infty(]0,T[)$, $v \in L^1(]0,T[)$, $v(t) > 0$, $u(t) > 0$ y $g(t) = K \geq 0$, constante. Si

$$u(t) \leq K + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad \forall t \in]0,T[,$$

entonces se tiene

$$u(t) \leq K \exp^{\left(\int_0^t v(s)ds\right)}, \quad \forall t \in]0,T[.$$

En efecto, sea $\psi(t) = K + \int_0^t v(s)u(s)ds$.

De esta manera, tenemos que ψ es una función absolutamente contínua, pues

$$v(s)u(s) \in L^1(]0,T[) \quad \text{y} \quad \psi'(t) = v(t)u(t) \leq v(t)\psi(t),$$

es decir, $\psi'(t) - v(t) \leq 0 \quad \wedge \quad \psi(0) = K.$

Lo que implica

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(t) \exp^{\left(-\int_0^t v(s)ds\right)}\right) \leq 0$$

Así, tenemos que

$$\psi(t) \leq \psi(0) \exp^{\left(\int_0^t v(s)ds\right)}.$$

De esta forma se obtiene

$$\psi(t) \leq K \exp^{\left(\int_0^t v(s)ds\right)}.$$

Teorema 1.12.4 ***(Peano)*** *Sea f continua en $\Omega = I_a \times B_b$, donde $I_a = \{t/|t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{t/|x - x_0| \leq b\}$. Si $|f| < M$ en Ω, entonces se tiene al menos una solución del P.V.I.:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

en I_α donde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [27] en las referencias bibliográficas.

Proposición 1.12.5 *Sean $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $u_t \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $u_{tt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, se cumple*

$$(u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 dt$$

donde $\frac{d}{dt}$ es la derivada distribucional en $\mathcal{D}'(0, T)$, $(\cdot, \cdot)$ y $\|\cdot\|$ el producto interno y la norma en $L^2(\Omega)$ respectivamente.

DEMOSTRACIÓN.- Sea $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle (u_{tt}, u_t), \varphi \rangle &= \int_0^T (u_{tt}, u_t)\varphi(t) dt \\ &= \int_0^T \left[\int_\Omega u_{tt}.u_t dx\right] \varphi(t) dt = \int_\Omega \int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t)^2 \varphi(t) dt dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega \left[(u_t)^2 \varphi(t)|_0^T - \int_0^T (u_t)^2 \varphi'(t) dt\right] dx\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (u_t)^2 \varphi'(t) dt = \frac{1}{2}\langle \frac{d}{dt}\|u_t\|^2, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Existencia de Soluciones

En este capítulo demostraremos la existencia de soluciones para el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha\Delta u = a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), & (t,x) \in [0,+\infty\rangle \times \Omega \\ u(0,x) = u_0,\ u_t(0,x) = u_1, & x \in \Omega \\ u = 0, & (t,x) \in\ [0,+\infty\rangle \times \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

donde Ω es un conjunto abierto acotado en $\mathbb{R}^n, (n \leq 4)$, con frontera $\partial\Omega$ bien regular; $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Las hipótesis que asumiremos en este trabajo son las siguientes:

$$a \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

$$b \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}).$$

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

y por simplicidad asumiremos que $\alpha = 1$.

Usaremos el método de Faedo - Galerkin, que consiste en construir soluciones aproximadas en espacios de dimensión finita. La idea es probar que estas sucesiones de soluciones son limitadas en espacios adecuados y que convergen débil para la solución del problema (2.1)

En lo que sigue para nuestro trabajo será tomar en cuenta las siguientes notaciones. Denotaremos por $\|\cdot\|$ la norma en $L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|_\infty$ la norma $L^\infty(\Omega)$, $\|\cdot\|_1$ la norma en $H^1(\Omega)$

y $(\cdot,\cdot)$ el producto interno en $L^2(\Omega)$.

Nuestro punto de partida para el estudio de existencia de soluciones, es definir lo que entenderemos por solución débil del problema.

Definición 2.0.1 *Sea* $(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $T>0$ *arbitrario. Diremos que* u *es solución débil para el problema (2.1), si*

$$u\in L^2([0,T],H_0^1(\Omega)),\quad u_t\in L^2([0,T],L^2(\Omega)),$$

para cualquier $t\geq 0$, *y* $\forall\omega\in H_0^1(\Omega)$

La formulación débil del problema (2.1) es:

$$\frac{d}{dt}(u_t(t),\omega)+(\nabla u(t),\nabla\omega(t))=(a(u,p)(t)u_t(t)+b(u,p,p_t),\omega)\tag{2.2}$$

en el sentido de las distribuciones en $]0,T[$ *y además*

$$u(0,x)=u_0,\quad u_t(0,x)=u_1\tag{2.3}$$

En este capítulo nos encargaremos de encontrar un resultado de existencia de soluciones débiles y soluciones fuertes para el problema (2.1).

Para ello usaremos el método de Faedo-Galerkin y así poder construir la solución del problema. Desarrollaremos esta demostración paso a paso.

2.1. Problema Aproximado

Del teorema espectral (1.11.6) sabemos que existe una base formada por autovectores que denotaremos por $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ asociados a los autovalores $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Esta base forma un sistema ortogonal y completo de $L^2(\Omega)$. El problema aproximado consiste en hallar una función de la forma

$$u^n(t)=\sum_{k=1}^{n}d^{n,k}(t)\omega_k\in V_n\tag{2.4}$$

para $t \in [0,T]$, donde V_n es el espacio generado por los primeros n autovectores de Δ $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, es decir, $V_n = gen[\omega_1, \dots, \omega_n]$ teniendo que $L^2(\Omega) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n}$ y donde los coeficientes $d^{n,k}$ son funciones determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(u_{tt}^n(t), \omega_k) + (\nabla u^n, \nabla \omega_k) = (a(u^n, p)u_t^n + b(u^n, p, p_t), \omega_k), \quad \forall \omega_k \in V_n \quad \text{y} \quad k = 1, 2, ..., n \tag{2.5}$$

$$u^n(0) = u_{0n}, \quad u_t^n(0) = u_{1n} \tag{2.6}$$

donde u_{0n} y u_{1n} son sucesiones que convergen para u_0 y u_1 fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ respectivamente. Estas sucesiones están definidas como

$$u_{0n} = \sum_{k=1}^{n} (\omega_k, u_0)\omega_k \in V_n, \quad u_{1n} = \sum_{k=1}^{n} (\omega_k, u_1)\omega_k \in V_n$$

Claramente estas sucesiones verifican

$$u_{0n} \to u_0 \quad \text{fuerte} \quad H_0^1(\Omega)$$

$$u_{1n} \to u_1 \quad \text{fuerte} \quad L^2(\Omega)$$

$$d^{n,k}(0) = u_0^k = (u_0, \omega_k) \quad , \quad d_t^{n,k}(0) = u_1^k = (u_1, \omega_k) \tag{2.7}$$

Mostraremos que el problema aproximado posee solución. Para esto introducimos la notación vectorial.

Denotemos por U^n el vector

$$U^n(t) = (d^{n,1}, d^{n,2}, \cdots, d^{n,n})$$

Ahora, (2.5) y (2.7) son equivalentes a

$$d_{tt}^{n,k} + \lambda_k d^{n,k} = f_k(U^n, U_t^n, t) \quad \quad k = 1, 2, .., n \tag{2.8}$$

$$d^{n,k}(0) = u_0^k \quad , \quad d_t^{n,k}(0) = u_1^k \tag{2.9}$$

donde

$$f_k(U^n, U_t^n, t) = (a(u^n, p)u_t^n + b(u^n, p, p_t), \omega_k) \quad \text{casi siempre para} \quad t \geq 0 \tag{2.10}$$

Observemos que las funciones f_k son funciones cuya regularidad depende de las funciones no lineales $a(u^n, p)$ y $b(u^n, p, p_t)$. Como por hipótesis tenemos que $a \in C^1$ y $b \in C^1$ entonces tendremos que $f_k \in C^1$. Por lo tanto f_k son funciones localmente de Lipschitz.

La ecuación anterior puede ser reducida a primer orden introduciendo la siguente notación,

$$W = \begin{pmatrix} U^n \\ U_t^n \end{pmatrix}, \quad F(U^n, U_t^n) = \begin{pmatrix} f_1^n(U^n, U_t^n) \\ \vdots \\ f_n^n(U^n, U_t^n) \end{pmatrix}$$

Como cada una de las funciones f_k son localmente de Lipschitz, entonces la función F definida anteriormente es también localmente de Lipschitz. Así la ecuación aproximada puede ser reescrita como

$$W_t = \begin{pmatrix} U_t^n \\ U_{tt}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_t^n \\ -DU^n + F(U^n, U_t^n) \end{pmatrix} = G(W)$$

el cual es un sistema de ecuaciones no lineales de primer orden. Por lo tanto podemos aplicar el teorema de Peano, que nos garantiza que existe una solución local, pues los términos no lineales son C^1, esto es, son localmente Lipzchitsianos. Lo que significa que el sistema tiene al menos una solución $d^{n,k}$ definida en $[0, T_n]$ para algún $T_n > 0$. Además, para cada k tal que $1 \leq k \leq n$, $\;d^{n,k} \in C^2([0, T_n])$.

A continuación obtendremos estimativas a priori para las soluciones aproximadas $u^n(t, x)$, que nos permitirán extender estas soluciones $\forall t \geq 0$ y obtener así subsucesiones cuyo límite será el candidato a ser solución del sistema (2.8)-(2.9).

2.2. Estimativas a Priori

Lema 2.1 *Sean* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *y* $u_1 \in L^2(\Omega)$,

(A_1) $a \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *y* $b \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ *donde* $a, \nabla a, \nabla b$ *son funciones uniformemente acotadas.*

(A_2) $|b(u,p,p_t)(t,x)| \leq C_1|u(t,x)| + C_2$ *casi siempre sobre* $[0;T] \times \Omega$, *donde* C_1 *y* C_2 *son constantes no negativas.*

(A_3) $p \in H^2(0,T,L^\infty(\Omega))$.

(A_4) $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Entonces la sucesión de soluciones aproximadas $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisface*

$$\|u_t^n(t)\| + \|u^n\|_1 \leq M(T)$$

donde $M(T)$ *depende solamente de* T. *En particular, esto significa que* $u^n(t)$ *puede ser extendida a* $[0,T]$.

Demostración.- Recordemos la ecuación (2.5),

$$(u_{tt}^n(t), \omega_k) + (\nabla u^n, \nabla \omega_k) = (a(u^n,p)u_t^n + b(u^n,p,p_t), \omega_k), \quad \forall \omega \in V_n \quad \text{y} \quad k = 1,2,...,n$$

Multiplicamos la ecuación (2.5) por $d_t^{n,k}$, además sumando sobre $k = 1,2,...,n$ y por las hipótesis A_1 y A_2 obtenemos $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}(u_{tt}^n(t), u_t^n) + (\nabla u^n, \nabla u_t^n) &= (a(u^n,p)u_t^n + b(u^n,p,p_t), u_t^n) \\ &= (a(u^n,p)u_t^n, u_t^n) + (b(u^n,p,p_t), u_t^n) && \text{por linealidad} \\ &\leq \|a(u^n,p)u_t^n\|\|u_t^n\| + \|b(u^n,p,p_t)\|\|u_t^n\| && \text{por Cauchy Schwarz.}\end{aligned}$$

Por (A_1) tenemos $a \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $b \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $a, b, \nabla a, \nabla b$ son funciones uniformemente acotadas, i.e. existe $K_1 > 0$ tal que $|a(x,y)| \leq K_1$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

De (A_2) tenemos que existen constantes C_1 y C_2 tales que: $|b(x,y,z)| \leq C_1\|u^n\| + C_2$. Por lo tanto se tiene

$$|a(u^n,p)u_t^n| \leq K|u_t^n| \quad \text{y} \quad |b(u^n,p)u_t^n| \leq C_1|u^n| + C_2$$

Sea $K_2 = \text{máx}\{K_1, C_1, C_2\}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\|a(u^n,p)u_t^n\|\|u_t^n\| + \|b(u^n,p,p_t)\|\|u_t^n\| &= |a(u^n,p)|\|u_t^n\|^2 + |b(u^n,p,p_t)|\|u_t^n\| \\
&\leq K_1\|u_t^n\|^2 + (C_1\|u^n\| + C_2)\|u_t^n\| \\
&\leq K_2(\|u_t^n\|^2 + \|u^n\|\|u_t^n\| + \|u_t^n\|)
\end{aligned}$$

Por la proposición (1.12.5), se tiene,

$$(u_{tt}^n(t), u_t^n(t)) + (\nabla u^n, \nabla u_t^n(t)) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2\right)\right]$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2\right)\right] &\leq K_2(\|u_t^n\|^2 + \|u^n\|\|u_t^n\| + \|u_t^n\|) \\
&\leq K_2\left(\|u_t^n\|^2 + \frac{\|u^n\|^2}{2} + \frac{\|u_t^n\|^2}{2} + \|u_t^n\|\right) && \text{desig. Young} \\
&\leq K_2\left(\|u_t^n\|^2 + \frac{\|u^n\|^2}{2} + \frac{\|u_t^n\|^2}{2} + \frac{\|u_t^n\|^2}{2} + \frac{1}{2}\right) && \text{desig. Young} \\
&= \frac{K_2}{2}\left(4\|u_t^n\|^2 + \|u^n\|^2 + 1\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2\right) &\leq K_2\left(4\|u_t^n\|^2 + \|u^n\|^2 + 1\right) \\
&\leq K_3\left(\|u_t^n\|^2 + \|u^n\|^2 + 1\right) && K_3 \geq 4K_2
\end{aligned}$$

De la desigualdad de Poincaré tenemos que $\exists K_4 > 0$ tal que: $\|u^n(t)\| \leq K_4\|\nabla u^n(t)\|$ Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2\right) &\leq K_3\left(\|u_t^n\|^2 + \|u^n\|^2 + 1\right) \\
&\leq K_3\left(\|u_t^n\|^2 + (K_4\|\nabla u^n\|)^2 + 1\right) \\
&\leq K_5\left(\|u_t^n\|^2 + \|\nabla u^n\|^2 + 1\right) && K_5 = \text{máx}\{K_3, K_3K_4^2\}
\end{aligned}$$

Ahora aplicaremos la desigualdad de Gronwall

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2\right) \leq K_5\left(\|u_t^n\|^2 + \|\nabla u^n\|^2 + 1\right)$$

Entonces procedemos integrando

$$\begin{aligned}
\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2 &\leq E^n(0) + \int_0^T K_5\left(\|u_t^n\|^2 + \|\nabla u^n\|^2 + 1\right) dt \\
&= E^n(0) + \int_0^T K_5\left(\|u_t^n\|^2 + \|\nabla u^n\|^2\right) + K_5 dt \\
&= E^n(0) + \int_0^T K_5\left(\|u_t^n\|^2 + \|\nabla u^n\|^2\right) dt + K_5 T
\end{aligned}$$

donde por $E^n(0)$ estamos denotando

$$E^n(0) = \|u_1^n\|^2 + \|\nabla u_0^n\|^2.$$

Usando la desigualdad de Gronwall concluímos

$$\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2 \leq K_6 T \exp^{\int_0^T K_5 dt}.$$

Por lo tanto, multiplicando por $\frac{1}{2}$ y por la desigualdad de Young, se tiene

$$\|u_t^n(t)\|\|\nabla u^n(t)\| \leq \frac{\|u_t^n(t)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla u^n(t)\|^2}{2} \leq \frac{K_5 T}{2}\exp^{K_5 T}$$

$$\Rightarrow 2\|u_t^n(t)\|\|\nabla u^n(t)\| \leq K_5 T \exp^{K_5 T}$$

Sumando

$$\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2 + 2\|u_t^n(t)\|\|\nabla u^n(t)\| \leq K_5 T \exp^{K_5 T} + K_5 T \exp^{K_5 T}$$

$$\Rightarrow (\|u_t^n(t)\| + \|\nabla u^n(t)\|)^2 \leq 2K_5 T \exp^{K_5 T}$$

Como K_5 es constante podemos expresar: $\sqrt{2K_5 T \exp^{K_5 T}} = M(T)$ y así tenemos

$$\|u_t^n(t)\| + \|\nabla u^n(t)\| \leq M(T) \tag{2.11}$$

Entonces aplicamos la desigualdad de Poincaré (1.8.1) y por tanto, tenemos

$$\|u_t^n(t)\| + \|u^n(t)\|_1 \leq M(T) \tag{2.12}$$

Luego por (2.10),

$$|f(d^{n,k}, d_t^{n,k}, t)| = |(a(u^n, p)u_t^n + b(u^n, p, p_t), \omega_k)| \quad \text{casi siempre para} \quad t \geq 0$$

Recordando (2.10) y también que $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$ motivo por el cual $\|\omega_k\| = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
|f(d^{n,k}, d_t^{n,k}, t)| &\leq |(a(u^n, p)u_t^n + b(u^n, p, p_t)|\|\omega_k\| && \text{Desig.Cauchy Schwarz} \\
&\leq |(a(u^n, p)u_t^n + b(u^n, p, p_t)| && \|\omega_k\| = 1 \\
&\leq K_1\|u_t^n\| + C_1\|u^n\| + C_2 && \text{Hip. } A_1 \text{ y } A_2 \\
&\leq K_2(\|u_t^n\| + \|u^n\| + 1) && K_2 = \text{máx}\{K_1, C_1, C_2\} \\
&\leq K_2(M(T) + 1) && \text{Por (2.8)} \\
&\leq K_6 + K_6 && K_6 = \text{máx}\{K_2, K_2M(T)\} \\
&\leq K_7 && K_7 \geq 2K_6
\end{aligned}$$

Así tenemos que $f(d^{n,k}, d_t^{n,k}, t)$ es una función acotada y la solución puede ser extendida a $[0, T]$.

A seguir mostraremos que si los datos iniciales (u_0, u_1) están en el espacio $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ entonces las soluciones aproximadas están limitadas en espacios mas regulares, esto es, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.2 *Supongamos que* $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *entonces la sucesión de soluciones aproximadas* $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisface*

(i) $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada en* $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

(ii) $\{u_t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada en* $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.

(iii) $\{u_{tt}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada en* $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

DEMOSTRACIÓN.-

(i) Es inmediato del Lema 2.1 y la definición de L^∞. Por tanto $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. También tenemos que:

$$\int_0^T \|u^n\|_1^2 dt \leq \int_0^T M^2(T)dt < \infty$$

Entonces $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

(ii) En 2.5 diferenciamos la ecuación aproximada

$$(u_{tt}^n(t),\omega_k) + (\nabla u^n, \nabla\omega_k) = (a(u^n,p)u_t^n + b(u^n,p,p_t),\omega_k).$$

Obtenemos aplicando la regla de la cadena, con respecto a t para los valores de $k = 1,2,...,n$

$$(u_{ttt}^n(t),\omega_k) + (\nabla u_t^n, \nabla\omega_k) = R$$

donde

$$\begin{aligned} R &= (a_u(u^n,p)(u_t^n)^2 + a_p(u^n,p)p_t u_t^n + a(u^n,p)u_{tt}^n + \\ &\quad +b_u(u^n,p,p_t)u_t^n + b_p(u^n,p,p_t)p_t + b_{p_t}(u^n,p,p_t)p_{tt},\omega_k) \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} |R| &\leq \left[K_1\|u_t^n\|^2 + |a_p||p_t|\|u_t^n\| + |a(u^n,p)|\|u_{tt}^n\| + |b_n|\|u_t^n\|\right] \\ &\quad + \left[|b_p||p_t| + |b_{p_t}||p_{tt}|\right]\|\omega_k\| \end{aligned}$$

a_u, a_p, b_u, b_p y b_{p_t} denotan derivadas parciales. Considerando el lema (2.1) en (A_1) donde ∇a y ∇b son funciones uniformemente acotadas: $\exists_n K_8, K_9 > 0$ tales que $|\nabla a| < K_8$ y $|\nabla a| < K_9$. También por hipótesis del lema (2.1) en (A_3) tenemos

$$p \in H^2(0,T,L^\infty(\Omega)) \Rightarrow \begin{cases} p_t \in L^\infty(\Omega), \text{por tanto, } \exists\, C_3 > 0/|p_t| < C_3 \\ p_{tt} \in L^\infty(\Omega), \text{por tanto, } \exists\, C_4 > 0/|p_{tt}| < C_4 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |R| &\leq \left[K_8(u_t^n)^2 + K_8\|u_t^n\| + K_1\|u_{tt}^n\| + K_9\|u_t^n\| + K_9C_3 + K_9C_4\right]\|\omega_k\| \\ &\leq \left[K_8(u_t^n)^2 + K_{10}\|u_t^n\| + K_1\|u_{tt}^n\| + K_9C_3 + K_9C_4\right]\|\omega_k\| \\ &\leq \left[K_8(u_t^n)^2 + K_{10}\|u_t^n\| + K_1\|u_{tt}^n\| + C_5\right]\|\omega_k\| \\ &\leq K_{11}\left[(u_t^n)^2 + \|u_t^n\| + \|u_{tt}^n\| + 1\right]\|\omega_k\| \end{aligned}$$

Considerando,

$K_{10} = \text{máx}\{K_8, K_9\}, \quad C_5 = \text{máx}\{K_9C_3, K_9C_4\}, \quad K_{11} = \text{máx}\{K_{10}, K_1, C_5\}.$

Tomando en cuenta la proposición (1.12.5), utilizamos el método similiar al usado en el Lema 2.1 reemplazando ahora ω_k por $u_{tt}^n(t)$.

$$(u_{ttt}^n(t), u_{tt}^n(t)) + (\nabla u_t^n(t), \nabla u_{tt}^n(t)) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|\nabla u_t^n(t)\|^2\right)\right]$$

Entonces, asumiendo la dependencia de t, tenemos

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\|u_{tt}^n\|^2 + \|\nabla u_t^n\|^2\right)\right] \leq K_{11}\left[(u_t^n)^2 + \|u_t^n\| + \|u_{tt}^n\| + 1\right]\|u_{tt}^n\|$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\leq K_{11}\left[\|(u_t^n)^2\| + \|u_t^n\| + \|u_{tt}^n\| + 1\right]\|u_{tt}^n\| \\
&\leq K_{11}\left[\|(u_t^n)^2\|\|u_{tt}^n\| + \|u_t^n\|\|u_{tt}^n\| + \|u_{tt}^n\|\|u_{tt}^n\| + \|u_{tt}^n\|\right] \\
&\leq K_{11}\left[\frac{\|(u_t^n)^2\|^2}{2} + \frac{\|u_{tt}^n\|^2}{2} + \frac{\|u_t^n\|^2}{2} + \frac{\|u_{tt}^n\|^2}{2} + \|u_{tt}^n\|^2 + \frac{\|u_{tt}^n\|^2}{2} + \frac{1}{2}\right] \quad \text{Desig.Young} \\
&= \frac{K_{11}}{2}\left[\|(u_t^n)^2\|^2 + 5\|u_{tt}^n\|^2 + \|u_t^n\|^2 + 1\right]
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|u_{tt}^n\|^2 + \|\nabla u_t^n\|^2\right) &\leq K_{11}\left[\|(u_t^n)^2\|^2 + 5\|u_{tt}^n\|^2 + \|u_t^n\|^2 + 1\right] \\
&\leq K_{12}\left[\|(u_t^n)^2\|^2 + \|u_{tt}^n\|^2 + \|u_t^n\|^2 + 1\right] \qquad K_{12} \geq 5K_{11}
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\|(u_t^n)^2\|^2 = \left[\int_\Omega [(u_t^n)^2]^2 dx\right] = \left[\int_\Omega |u_t^n|^4 dx\right] = \left(\left[\int_\Omega [u_t^n]^4 dx\right]^{1/4}\right)^4 = \|u_t^n\|^4_{L^4(\Omega)}$$

Por los teoremas de inmersión de Sobolev, la desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg (ii) y la Proposición 1.8.7 tenemos

$$\begin{cases}
\exists\, C_6 > 0 / \|u_t^n\|_{L^4(\Omega)} \leq C_6 \|u_t^n\|^{1/2}\|u_t^n\|_1^{1/2} \\
H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \text{por tanto, } \exists\, C_7 > 0 / \|u_t^n\| \leq C_7\|u_t^n\|_1 \\
\text{Por la desigualdad de Poincaré, } \exists\, C_8 > 0 / \|u_t^n\|_1 \leq C_8\|\nabla u_t^n\|
\end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|u_{tt}^n\|^2+\|\nabla u_t^n\|^2\right) \leq & K_{12}\left[\|(u_t^n)^2\|^2+\|u_{tt}^n\|^2+\|u_t^n\|^2+1\right]\\ \leq & K_{12}\Big(\|u_t^n\|^4_{L^4(\Omega)}+\|u_{tt}^n\|^2+(C_7)^2(\|u_t^n\|_1)^2+1\Big)\\ \leq & K_{12}\left(C_6^4\|u_t^n\|^2\|u_t^n\|_1^2+\|u_{tt}^n\|^2+(C_7)^2)(\|u_t^n\|_1)^2+1\right)\\ \leq & K_{12}\left(C_6^4(M)^2\|u_t^n\|_1^2+\|u_{tt}^n\|^2+(C_7)^2)(\|u_t^n\|_1)^2+1\right)\end{aligned}$$

Por (2.10) $\|u_t^n\| \leq M(T)$, se tomó $M(T)=M$.

$$\begin{aligned}\leq & K_{13}\left(\|u_t^n\|_1^2+\|u_{tt}^n\|^2+(\|u_t^n\|_1)^2+1\right)\\ & \text{existe } K_{13}=\text{máx}\{K_{12},K_{12}(C_6)^4M^2,K_{12}(C_7)^2\}\\ \leq & K_{14}\left(\|u_t^n\|_1^2+\|u_{tt}^n\|^2+1\right) && K_{14}\geq 2K_{13}\\ \leq & K_{14}\left(C_8^2\|\nabla u_t^n\|_1^2+\|u_{tt}^n\|^2+1\right) && \text{D.Poincaré}\\ \leq & K_{15}\left(\|u_{tt}^n\|^2+\|\nabla u_t^n\|_1^2+1\right)\\ & K_{15}=\text{máx}\{K_{14},K_{14}(C_8)^2\}\end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_{tt}^n\|^2+\|\nabla u_t^n\|^2\right) \leq K_{15}\left(\|u_{tt}^n\|^2+(\|\nabla u_t^n\|)^2+1\right) \tag{2.13}$$

Por la hipótesis sobre los datos iniciales tenemos que las sucesiones

$$u_{tt}^n(0), \quad u_t^n(0)$$

son limitadas en $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ respectivamente.

Ahora plicaremos la desigualdad de Gronwall en 2.13

Entonces procedemos

$$
\begin{aligned}
\|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|\nabla u_t^n(t)\|^2 &\leq \int_0^T K_{15}\left(\|u_{tt}^n\|^2 + \|\nabla u_t^n\|^2 + 1\right) dt && \text{integrando}\\
&= \int_0^T K_{15}\left(\|u_{tt}^n\|^2 + \|\nabla u_t^n\|^2\right) + K_{15} dt\\
&= \int_0^T K_{15}\left(\|u_{tt}^n\|^2 + \|\nabla u_t^n\|^2\right) dt + K_{15}T\\
&\leq K_{15}T\exp^{\int_0^T K_{15}dt} && \text{d. Gronwall}\\
&= K_{15}T\exp^{K_{15}T} && \text{integrando}
\end{aligned}
$$

Por tanto, multiplicando por $\frac{1}{2}$ y por la desigualdad de Young, se tiene

$$
\|u_{tt}^n(t)\|\|\nabla u_t^n(t)\| \leq \frac{\|u_{tt}^n(t)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla u_t^n(t)\|^2}{2} \leq \frac{K_{15}T}{2}\exp^{K_{15}T}
$$

$$
\Rightarrow 2\|u_t^n(t)\|\|\nabla u^n(t)\| \leq K_{15}T\exp^{K_{15}T}
$$

Sumando

$$
\|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|\nabla u_t^n(t)\|^2 + 2\|u_{tt}^n(t)\|\|\nabla u_t^n(t)\| \leq K_{15}T\exp^{K_{15}T} + K_{15}T\exp^{K_{15}T}
$$

$$
\Rightarrow (\|u_{tt}^n(t)\| + \|\nabla u_t^n(t)\|)^2 \leq 2K_{15}T\exp^{K_{15}T}
$$

Como K_{15} es constante podemos expresar: $\sqrt{2K_{15}T\exp^{K_{15}T}} = N(T)$ y así tenemos

$$
\|u_{tt}^n(t)\| + \|\nabla u_t^n(t)\| \leq N(T) \tag{2.14}
$$

Entonces aplicamos la desigualdad de Poincaré 1.8.1 y por tanto, tenemos

$$
\|u_t^n(t)\|_1 + \|u_{tt}^n(t)\| \leq N(T) \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T[\tag{2.15}
$$

(iii) Lo obtenemos a la vez del resultado (2.15).

Teorema 2.2.1 *Sea $T > 0$. Supongamos,*

(A_1) $a \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *y* $b \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ *donde* $a, \nabla a, \nabla b$ *son funciones uniformemente acotadas.*

(A_2) $|b(u,p,p_t)(t,x)| \leq C_1|u(t,x)| + C_2$ *casi siempre sobre* $[0;T[\times\Omega$, *donde* C_1 *y* C_2 *son constantes no negativas.*

(A_3) $p \in H^2(0,T,L^\infty(\Omega))$.

(A_4) $(u_0,u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Entonces el problema 2.1 admite al menos una solución débil u *en* $[0,T[$

Demostración.- Del lema 2.1 obtenemos que la energía de primer orden está limitada, esto es, existe una constante $C(T)$ positiva que depende de T tal que

$$\|u_t^n(t)\| + \|u^n(t)\|_1 \leq C(T)$$

Por un resultado clásico de compacidad, conocido como el Lema de Lions-Aubin, tenemos que el conjunto

$$\mathcal{W}(T) = \left\{w \in L^2([0,T[;H_0^1(\Omega)); \;\; w_t \in L^2([0,T[;L^2(\Omega))\right\}$$

tiene inmersión compacta sobre el conjunto de las funciones

$$C(0,T;L^2(\Omega))$$

Por el lema 2.1, la sucesión de soluciones aproximadas está limitada en $\mathcal{W}(T)$. Por lo tanto existe una subsucesión de soluciones aproximadas u^n que converge fuerte en $C(0,T;L^2(\Omega))$. Esto es,

$$u^n \to u \quad \text{fuerte en} \quad C(0,T;L^2(\Omega))$$

que en particular implica

$$u^n(x,t) \to u(x,t) \quad \text{casi siempre} \quad \Omega\times]0,T[$$

de donde sigue

$$a(u^n,p) \to a(u,p) \quad \text{casi siempre} \quad \Omega\times]0,T[$$

análogamente

$$b(u^n,p,p_t) \to b(u,p,p_t) \quad \text{casi siempre} \quad \Omega\times]0,T[$$

como a es una función acotada tendremos

$$|a(u^n,p)| \leq C$$

Por el teorema de la convergencia dominada concluimos

$$a(u^n,p) \to a(u,p) \quad \text{fuerte en} \quad L^2(\Omega \times]0,T[)$$

Análogamente, de la hipótesis A_2 y usando el teorema de la convergencia dominada para

$$|b(u^n,p,p_t)| \leq C|u^n(x,t)| + C$$

mostramos

$$b(u^n,p,p_t) \to b(u,p,p_t) \quad \text{fuerte en} \quad L^2(\Omega \times]0,T[)$$

De esta forma, tenemos

$$(a(u^n,p)u_t^n,\omega_k) = \int_\Omega [a(u^n,p)\omega_k]u_t^n \, dx.$$

Como $a(u^n,p)$ converge fuerte en L^2 entonces $a(u^n,p)\omega_k$ converge fuerte en L^2 y u_t^n converge débil en L^2, entonces

$$\lim_{n\to\infty}(a(u^n,p)u_t^n,\omega_k) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega [a(u^n,p)\omega_k]u_t^n \, dx = \int_\Omega [a(u,p)\omega_k]u_t \, dx$$

y como $b(u^n,p,p_t)$ converge fuerte en L^2 entonces

$$\lim_{n\to\infty}(b(u^n,p,p_t),\omega_k) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega b(u^n,p,p_t)\omega_k \, dx = \int_\Omega b(u,p,p_t)\omega_k \, dx$$

luego la ecuación aproximada

$$(u_{tt}^n(t),\omega_k) + (\nabla u^n,\nabla\omega_k) = (a(u^n,p)u_t^n + b(u^n,p,p_t),\omega_k), \quad \forall\omega \in V_n \quad \text{y} \quad k = 1,2,...,n$$

puede ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(u_t^n(t),\omega_k) + (\nabla u^n,\nabla\omega_k) = (a(u^n,p)u_t^n + b(u^n,p,p_t),\omega_k), \quad \forall\omega \in V_n \quad \text{y} \quad k = 1,2,...,n.$$

Multiplicando por la función de prueba $\phi \in D(0,T)$ e integrando en $[0,T]$

$$-\int_0^T (u_t^n(t),\omega_k)\phi'\,dt + \int_0^T (\nabla u^n,\nabla\omega_k)\phi\,dt = \int_0^T (a(u^n,p)u_t^n + b(u^n,p,p_t),\omega_k)\phi\,dt.$$

Usando las convergencias débiles de u^n y u_t^n, así como las convergencias de a y de b, tomando límite en la ecuación anterior se tiene

$$-\int_0^T (u_t(t),\omega_k)\phi'\,dt + \int_0^T (\nabla u,\nabla\omega_k)\phi\,dt = \int_0^T (a(u,p)u_t + b(u,p,p_t),\omega_k)\phi\,dt.$$

Por la densidad de los autovectores ω_k concluimos que el límite u de las soluciones aproximadas verifica

$$-\int_0^T (u_t(t),\omega)\phi'\,dt + \int_0^T (\nabla u,\nabla\omega)\phi\,dt = \int_0^T (a(u,p)u_t + b(u,p,p_t),\omega)\phi\,dt.$$

Para todo $\omega \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $\phi \in D(0,T)$. Lo que significa que u es una solución débil de la ecuación.

2.3. Soluciones fuertes

Terminaremos este capítulo, mostrando que cuando los datos iniciales son más regulares, obtenemos soluciones fuertes para el problema. Más precisamente, se tiene el siguiente teorema

Teorema 2.3.1 *Sea $T > 0$. Supongamos,*

(A_1) *$a \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, y $b \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ donde $a, \nabla a, \nabla b$ son funciones uniformemente acotadas.*

(A_2) *$|b(u,p,p_t)(t,x)| \leq C_1|u(t,x)| + C_2$ casi siempre sobre $[0;T[\times\Omega$, donde C_1 y C_2 son constantes no negativas.*

(A_3) *$p \in H^2(0,T,L^\infty(\Omega))$.*

(A_4) *$(u_0,u_1) \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.*

Entonces nuestro problema 2.1 en estudio tiene una única solución fuerte u *en* $[0, T[$

Demostración.- Por el teorema (2.2.1), existe una solución débil que satisface

$$-\int_0^T (u_t(t), \omega)\phi' \, dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla \omega)\phi \, dt = \int_0^T (a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), \omega)\phi \, dt$$

para todo $\omega \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $\phi \in D(0,T)$. Del Lema 2.2, podemos concluir que la sucesión de soluciones aproximadas u^n converge en $L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ y sus derivadas u_t^n converge en $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$. Por lo tanto concluimos

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$$

y

$$u_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$$

luego tenemos regularidad suficiente para hacer integración por partes en la formulación débil del problema, Así tenemos que u verifica

$$\int_0^T (u_{tt}(t), \omega)\phi \, dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla \omega)\phi \, dt = \int_0^T (a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), \omega)\phi \, dt.$$

esto es,

$$\int_0^T [(u_{tt}(t), \omega) + (\nabla u, \nabla \omega) - (a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), \omega)] \, \phi \, dt = 0.$$

para todo $\omega \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $\phi \in D(0,T)$. Por el lema de du Bois Reymond obtenemos

$$(u_{tt}(t), \omega) + (\nabla u, \nabla \omega) - (a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), \omega) = 0$$

usando integración por partes,

$$(u_{tt}(t), \omega) - (\Delta u, \omega) - (a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), \omega) = 0$$

o equivalentemente

$$(u_{tt}(t) - \Delta u - a(u,p)u_t - b(u,p,p_t), \omega) = 0$$

para todo $\omega \in H_0^1(\Omega)$. De donde aplicando nuevamente el lema de du Bois Reymond sigue que

$$u_{tt}(t) - \Delta u - a(u,p)u_t - b(u,p,p_t) = 0$$

lo que significa que u es una solución fuerte del problema 2.1.

La unicidad es inmediata, pues por hipótesis tenemos que las funciones a y b son de Lipschitz y la solución es regular.

Capítulo 3

Unicidad y Estabilidad de la Solución

3.1. El Caso 1-D

En este capítulo estudiaremos el modelo unidimensional. Destacamos este caso debido a que las inmersiones de Sobolev nos permiten demostrar que las soluciones débiles y fuertes del modelo son estables con relación a los datos iniciales. Esto es, la solución del problema no lineal depende continuamente de los datos iniciales. En este capítulo usaremos principalmente la inmersión

$$H^1(a,b) \hookrightarrow C([a,b])$$

la cual es compacta y válida solamente en dimensión $n = 1$.

Teorema 3.1.1 *Asumiendo que $n = 1$ y que las condiciones del teorema 2.2.1 se satisfacen para algún $T > 0$. Sea u, v dos soluciones del problema (2.1) correspondiente a los datos iniciales (u_0, u_1) y $(v_0, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Entonces para c.t.p. $t \in [0, T[$*

$$\|u_t(t) - v_t(t)\|^2 + \|u(t) - v(t)\|_1^2 \leq M(T)\|u_1 - v_1\|^2 + \|u_0 - v_0\|_1^2$$

donde $M(T)$ es una constante positiva que depende de T.

Demostración.- Sean u y v soluciones del problema (2.1) correspondientes a los datos iniciales (u_0, u_1) y (v_0, v_1) respectivamente.

Sean $\omega = u - v$, $\omega_i = u_i - v_i$, $i = 0, 1$. Entonces $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ tenemos

$$\begin{cases} (\omega_{tt},\varphi)+(\nabla\omega,\nabla\varphi)=(a(u,p)u_t-a(v,p)v_t+b(u,p,p_t)-b(v,p,p_t),\varphi) \\ \omega=0 \quad \text{en} \quad [0,T[\times\partial\Omega \\ \omega(0,x)=w_0, \qquad \omega_t(0,x)=w_1 \quad \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Reemplazamos φ por $2\omega_t$, recordando que u_t y $v_t \in H_0^1(\Omega)$

$$2(\omega_{tt},\omega_t)+2(\nabla\omega,\nabla\omega_t)=(a(u,p)u_t-a(v,p)v_t+b(u,p,p_t)-b(v,p,p_t),2\omega_t)$$

Por la Proposición 1.12.5 tenemos

$$\frac{d}{dt}(\|\omega_t\|^2+\|\nabla\omega\|^2)=(a(u,p)u_t-a(v,p)v_t+b(u,p,p_t)-b(v,p,p_t),2\omega_t)$$

Definimos la función $f(u,u_t,p)=a(u,p)u_t$ y como $\omega=u-v$.

Notamos que

$$a(v,p)u_t-a(u,p)u_t=f(u,u_t,p)-f(v,v_t,p)=f((v,v_t,p)+(w,w_t,0))-f(v,v_t,p),$$

Por otra parte; dados $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^3$, existe $\xi\in(\alpha,\beta)$ donde por el teorema del valor medio para espacios de Banach, se tiene

$$\|F(\beta)-F(\alpha)\|\leq\|\beta-\alpha\|\sup_{t\in(0,1)}\|F'(\xi)\|$$

donde $\xi=\alpha+(\beta-\alpha)t$, $t\in(0,1)$.

Hagamos $\alpha=(u,u_t,p)$ y $\beta=(v,v_t,p)$ entonces

$$
\begin{aligned}
|(a(v,p)u_t - a(u,p)u_t, 2w_t)| &\leq \|f((v,v_t,p)+(w,w_t,0)) - f(v,v_t,p)\|\|2\omega_t\| \\
&\leq (\|w\|+\|w_t\|) \sup_{0<t<1} \|\nabla a\|\|v_t + tw_t\|\|2\omega_t\|
\end{aligned}
$$

por (2,10) $\|v_t\|_1, \|w_t\|_1 \leq M$, luego

$$
\begin{aligned}
&\leq C(\|w\|+\|w_t\|)(\|v_t\|_1 + \|w_t\|_1)\|2\omega_t\| \\
&\leq C \cdot M(\|w\|+\|w_t\|)\|2\omega_t\| \\
&\leq K(\|w\|\|w_t\| + \|w_t\|^2) \\
&\leq H(\|w(t)\|_1^2/2 + \|w_t(t)\|^2/2)
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
|(b(u,p,p_t) - b(v,p,p_t), 2\omega)| &\leq |(\frac{\partial b}{\partial u} \cdot \omega, 2\omega_t)| \\
&\leq \|\frac{\partial b}{\partial u}\|\|\omega\|_\infty\|\omega_t\| \quad \text{(desig. Hölder generalizada)} \\
&\leq C\|\omega\|_\infty\|\omega_t\| \\
&\leq A\|w(t)\|_1\|\omega_t\| \\
&\leq A(\|w(t)\|_1^2/2 + \|w_t(t)\|^2/2)
\end{aligned}
$$

esta última desigualdad se sigue de la inmersión de Sobolev $\|w(t)\|_\infty \leq N\|w(t)\|_1$, desde que $n = 1$.

Uniformizando constantes,

$$
\frac{d}{dt}(\|\omega_t\|^2 + \|\nabla\omega\|^2) \leq (\|w(t)\|_1^2 + \|w_t(t)\|^2)
$$

y aplicando la desigualdad de Gronwall,

$$
\|w(t)\|_1^2 + \|w_t(t)\|^2 \leq G(T)(\|w(0,x)\|_1^2 + \|w_t(0,x)\|^2) \quad c.t.p \quad t \in [0,T)
$$

Por lo tanto, con esto finaliza la prueba, esto es, para $n = 1$ en las hipótesis del Teorema 2.2.1, nuestro problema admite única solución débil.

La unicidad es una consecuencia inmediata del teorema 3.1.1. De hecho, sean u y v dos soluciones para el problema (2.1), con datos iniciales $v_0 = u_0$ y $v_1 = u_1$ respectivamente. Usando la desigualdad del teorema 3.1.1 concluímos

$$\|u_t(t) - v_t(t)\|^2 + \|u(t) - v(t)\|_1^2 \leq 0$$

de donde, $u = v$.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Conclusiones y trabajo futuro

En el presente trabajo estudiamos el modelo propuesto por Mouhamad Jradeh en su artículo ver [22], el cual modela la actividad cerebral a partir de una ecuación no lineal de ondas. Su principal hipótesis es que esta actividad cerebral se propaga de forma análoga a un sistema de ondas a través de las neuronas. Los valores de esta actividad cerebral están descritos a través de un modelo no lineal de ecuación de ondas. Cuando consideramos el caso bidimensional o tridimensional de la actividad cerebral, estamos asumiendo que la actividad cerebral se propaga como ondas sobre una superficie o sobre un volumen respectivamente. En nuestro caso la regularidad de las soluciones depende de la dimensión en que trabajamos.

El modelo unidimensional consiste en suponer que esta actividad cerebral se propaga con un grado de libertad, como por ejemplo sobre un segmento de recta o de curva. En este caso tenemos que la solución es más regular debido a la inmersión compacta:

$$H^1(a,b) \hookrightarrow C([a,b])$$

Esto quiere decir, que en particular las soluciones débiles serán funciones continuas; propiedad que no se verifica cuando $n \geq 1$. Para obtener esta regularidad en los casos $n = 2$ o $n = 3$ será necesario tomar datos más regulares, por ejemplo:

$$(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

y en este caso tendremos que la solución u será una función continua. Nuestro objetivo es demostrar que este modelo está bien puesto, en el sentido de que existe una única solución del problema. El método que usamos es el método de Galerkin.

En el caso bidimensional demostramos que existe una única solución débil y una única solución fuerte. La regularidad es muy importante para probar unicidad en los problemas hiperbólicos.

En el caso unidimensional probamos adicionalmente que existe estabilidad de la solución con relación a los datos iniciales; lo cual es de fundamental importancia para las aplicaciones de las correspondientes técnicas numéricas.

Si no existe continuidad de las soluciones en términos de los datos iniciales, entonces el sistema se torna inestable a pequeñas variaciones de los datos, lo cual inviabiliza los cálculos numéricos.

Finalmente como posibles puntos de estudio posteriores a este trabajo, consideraremos el modelaje de diversas actividades cerebrales que serian modeladas a través de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Otro punto es estudiar las propiedades cualitativas de estos modelos, como por ejemplo el comportamiento asintótico cuando t es grande.

Bibliografía

[1] ADAMS, R. A., **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.

[2] APOSTOL Tom M. **ANÁLISIS MATEMÁTICO** Segunda edición. EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1991.

[3] BRÉZIS, H. **Análisis funcional. Teoría y Aplicaciones** Editorial Alianza, 1983.

[4] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications**. University of Windsor 1989.

[5] BACHMAN George and Lawrence Narici. **Functional Analysis**. Department of mathematics polytechnic institute of Brooklyn, New York. Academic Press. 1972.

[6] BOURNAVEAS, Nikolaos. **Low regularity solutions for a class of nonlinear wave equations** . Proc. Amer. Math. Soc., 133(9): 2721 - 2727 (electronic), 2005.

[7] CAVALCANTI, Marcelo Moreira y Valeria Neves Domingos Cavalcanti. **Iniciacao a teoría das Distribuicoes e aos Espacos de Sobolev**. 2007.

[8] ESQUIVEL, Jorge A. **The dynamics of a nonlinear wave equation. J. Math. Anal**. Appl., 279(1): 135-150, 2003.

[9] EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations.** Graduate Studies in Mathematics Vol 19,AMS:American Mathematical Society, 1998.

[10] GROZDENA Todorova. **Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms**. Nonlinear Anal., 41(7-8, Ser. A: Theory Methods): 891-905, 2000.

[11] GROZDENA Todorova and Borislav Yordanov. **Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping**. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 330(7):557-562, 2000.

[12] HOWARD A. Levine, Sang Ro Park, and James Serrin.**Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equation**. J. Math. Anal. Appl., 228(1):181-205, 1998.

[13] HOWARD A. Levine and Grozdena Todorova. **Blow up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy**. Proc. Amer. Math. Soc., 129(3):793-805 (electronic), 2001.

[14] H.R. Wilson and J.D. Cowan. **Excitatory and inhibitory interactions inlocalized populations of model neurons**. Biophysical Journal, 1972.

[15] KESAVAN, S. **Topics in Funcional Analysis and Applications**. Wiley Eastern Limited. New Delhi, India, 1989.

[16] KOLMOGOROV, A. N. - Fomin, S. V. **Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional**. Editorial Mir. Moscú, 1978.

[17] LIONS, J. L. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**. Dunod, 1969.

[18] LIONS, J. L. - MAGENES, E;**Problems Aux limites non Homogenes e Aplications**, Vol I, Dunod, Paris 1968.

[19] LÓPEZ, Julián - GOMEZ. **On the linear damped wave equation. J. Differential Equations**, 1997.

[20] MEDEIROS, L. A. - P.H. Rivera **Espacos de Sobolev e Equacoes Diferenciais Parciais**. Textos de Métodos Matemáticos Nº9 - Río de Janeiro - RJ, 1975.

[21] MEDEIROS, L. A. - Milla Miranda, M. **Iniciacao aos Espacos de Sobolev e as Equacoes Diferenciais Parciais**. Instituto de Matemática - UFRJ. Río de Janeiro, 1989.

[22] MOUHAMAD Jradeh and Maîtine Bergounioux. **On Solutions of a Nom linear Wave Equations Derived From Brain Activity Modeling**. Prepint submitted to Elserver. Laboratoire MAPMOUMR 6628 - Federation Denis Poisson - Universiti d'Orleans - 2007.

[23] MUÑOZ Rivera, J. E., **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.** Textos Avanzados-LNCC. Petrópolis-Rio de Janeiro. (2004).

[24] P. L. Nunez. **The brain wave equation: A model for eeg. Mathematical Biosciences**, 1974.

[25] SALSA, Sandro. **Partial Differential Equations in Action**. From Modelling to Theory. Springer. 2008.

[26] RIVERA Rodrigues, Pedro H. **Métodos de Espacios de Hilbert en ecuaciones Diferenciales Parciales**. Escuela Latinoamericana de Matemática - 1978.

[27] SOTOMAYOR, Jorge **Lecciones de ecuaciones Diferenciales Ordinarias.** Ed. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[28] TARIEL Kiguradze. **On bounded and time-periodic solutions of nonlinear wave equations**. J. Math. Anal. Appl., 259(1):253-276, 2001.

[29] V.K Jirsa. **Connectivity and dynamics of neural information processing. neuroinformatics**. Neuroinformatics, 2:183-204, 2004.

[30] V.K. Jirsa and H Haken.**Field theory of electromagnetic brain activity**. Phys, Rev. Let., 77:960-963, 1996.

[31] YANG Zhijian. **Initial boundary value problem for a class of non-linear strongly damped wave equations**. Math. Methods Appl. Sci., 26(12):1047-1066, 2003.

[32] YONG Zhou. **A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping And vanishing initial energy in Rn**. Appl. Math. Lett., 18(3):281-286,2005.

[33] YONG Zhou. **Global existence and nonexistence for a nonlinear wave equation with damping and source terms**. Math. Nachr., 278(11):1341-1358, 2005.

[34] YUKIYOSHI Ebihara. **On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation**. J. Differential Equations, 30(2): 149-164, 1978.

[35] ZHOU, Shengfan and Xiaoming Fan. **Kernel sections for non-autonomous strongly damped wave equations**. J. Math. Anal. Appl., 275(2):850-869, 2002.