



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Físicas

Escuela Profesional de Física

**Solución numérica de la ecuación de transferencia de
radiación (ETR) en una dimensión**

MONOGRAFÍA TÉCNICA

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

Modalidad M3

AUTOR

Ivan PORRAS GONZALES

ASESOR

Raúl Felix CARITA MONTERO

Lima, Perú

2018

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mis padres por apoyarme siempre en todos mis proyectos y alentarme día a día a salir adelante con mucho esfuerzo y sacrificio.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue hecho posible con la ayuda de Dios, gracias por darme la salud, perseverancia y empeño para lograr terminar dicho trabajo.

A mis padres por darme la el aliento y el apoyo moral para poder concluir con dicho trabajo.

A mi alma mater UNMSM (facultad de ciencias físicas) por permitirme poder avanzar en mis estudios superiores y llegar a ser un profesional competitivo en la carrera de física.

A mi asesor el Dr. Raúl Félix Carita Montero, por su gran apoyo y motivación en el desarrollo del presente trabajo.

Al Dr. Poma Torres como jurado examinador, por hacer la revisión de mi trabajo y sus sugerencias.

Al Magister Rolando Badaracco Meza por su apoyo en mi trabajo con algunos textos y materiales a fines y sugerencias.

RESUMEN

La ecuación de transferencia radiativa (ETR) modela la interacción de la radiación en un medio donde existen los fenómenos de absorción, dispersión y emisión (medio participante).

La ETR en una dimensión es una ecuación diferencial no lineal, que no tiene una solución analítica. Por tanto se resuelve en forma aproximada por métodos numéricos o por el método de Montecarlo.

La parte espacial es discretizada por segmentos de línea y la discretización del espacio angular en forma regular. La ETR es aproximada por diferencias finitas, elementos finitos, volúmenes finitos, etc. y es resuelta en forma iterativa para un conjunto de ecuaciones generadas por la discretización del espacio angular.

Existen resultados en la literatura especializada en este tema de estudio, que se compararan con los resultados obtenidos en este trabajo. Los algoritmos más empleados en la solución numérica de la ETR son las que tienen bajo tiempo computacional, rápida convergencia.

ÍNDICE

CAPITULO 1.....	1
Objetivos.....	1
Introducción.....	1
CAPITULO 2.....	4
La ecuación de transferencia radiativa.....	4
CAPITULO 3.....	7
Solución de la ecuación de transferencia radiativa.....	7
3.1. Aproximación de la ecuación de transferencia radiativa por el método de ordenadas discretas.....	7
3.2. El método de ordenadas discretas para un medio de una dimensión.....	11
3.3. Método de diferencias finitas para la ecuación de transferencia radiativa en una dimensión.....	12
3.4. Algoritmo para la solución de la ecuación de transferencia radiativa.....	16
CAPITULO 4.....	18
4.1. Validación del problema directo.....	18
4.2. Convergencia del algoritmo solución de la ecuación de transferencia radiativa...19	
CAPITULO 5.....	22
Conclusiones.....	22
REFERENCIAS.....	23

LISTA DE TABLAS

Tabla 4.1. Valores calculados q_{med} para el problema propuesto por Fiveland, 1987	18
Tabla 4.2. Ordenadas (puntos de colocación) y pesos de la cuadratura LSH S_{10} , $L_0=10$	18
Tabla 4.3. La convergencia para el problema directo en un medio homogéneo.	19
Tabla 4.4. La convergencia para el problema directo en un medio heterogéneo.	20

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1. El vector angular de incidencia $\vec{\Omega}'$ y el de dispersión $\vec{\Omega}$	7
Figura 3.2. Cuadratura con nivel de simetría S_6	10
Figura 3.3. Medio de una dimensión.....	12
Figura 3.4. Discretización del dominio espacial en diferencias finitas.....	12
Figura 3.5. Hemisferios descritos por los cosenos directores μ_l	13
Figura 3.6. El segmento e	13
Figura 3.7. Condiciones de continuidad en la frontera.....	15
Figura 3.8. Algoritmo para la solución de la ecuación de transferencia radiativa 1D....	17
Figura 4.1. La convergencia para el problema directo en un medio homogéneo.....	20
Figura 4.2. La convergencia para el problema directo en un medio heterogéneo.....	21

CAPITULO 1

1.1. OBJETIVOS

Este trabajo tiene por objetivos resolver la ecuación de transferencia radiativa (ETR) en forma aproximada mediante métodos numéricos. Se utilizara el método de ordenas discretas para la variable angular ($\bar{\Omega}$) y el método de diferencias finitas para la variable espacial en una dimensión (x).

1.2. INTRODUCCIÓN

La interacción de la radiación con la materia es estudiada por los físicos desde finales del siglo XIX, lo cual tiene aplicaciones importantes en la medicina e ingeniería, como en el caso de las tomografías cerebrales o en el estudio de la radiación atmosférica, entre otros.

La transferencia de calor por radiación térmica en medios participantes, donde un medio participante se define como un medio donde los fenómenos físicos relevantes (absorción, emisión y dispersión) son modelados por la ecuación de transferencia radiativa (MODEST, F.M., 2013).

Procesos de altas temperaturas en muchas aplicaciones físicas hacen que la transferencia radiativa sea un mecanismo importante de transferencia de calor. El modelado matemático de la transferencia radiativa, particularmente cuando se combina con la simulación de flujo de fluido, reacciones químicas y otros modos de transferencia de calor, puede ser una tarea extensa si se busca una precisión muy alta del modelo.

Se han desarrollado y probado varios métodos a lo largo de los años para resolver la ecuación de transferencia radiativa (ETR) con diferentes resultados. Aunque la ETR se utiliza ampliamente, algunas veces se prefiere la ecuación de difusión aproximada, particularmente en medios ópticos gruesos, debido a los menores requisitos computacionales. Recientemente se han propuesto modelos de escala múltiple, los métodos de descomposición del dominio, el modelo micro-macro y el modelo híbrido de transporte – difusión, como una alternativa a la ETR. En los métodos de

descomposición del dominio, el dominio se divide en dos sub dominios, un subdominio microscópico donde se resuelve la ETR y un subdominio macroscópico donde se resuelve la ecuación de difusión. En los modelos micro- macro e híbridos transporte difusión, la intensidad de la radiación se descompone en un componente macroscópico y uno microscópico. En ambos casos, el objetivo es recuperar los requisitos computacionales, manteniendo la precisión o mejorar la precisión para requisitos computacionales similares. (COELHO, P. et. al., 2016)

La solución numérica en problemas de transferencia de calor por radiación es bastante compleja. El cálculo se realiza en medios absorbentes de gris y en las formas triangulares no estructuradas. El contexto del estudio es la aplicación de un complejo conductivo-convectivo y código de transferencia de calor por radiación para la simulación de problemas industriales complejos, como quemadores y hornos. En muchos de estos procesos industriales, el nivel de temperatura es bastante alto y la transferencia de calor por radiación desempeña un papel predominante. Entre los numerosos métodos de solución para la ETR se elige trabajar con el método de transferencia discreta (DTM). Este método ha sido desarrollado originalmente en mallas cartesianas estructuradas por Lockwood y Shah. En el contexto de la aplicación industrial, la transferencia discreta del método es ventajoso debido a su principio básico: la discretización de la intensidad radiativa desde los límites del dominio. (FELDHEIM, V; LYBAERT, P, 2004)

El método de elementos finitos junto con el método de ordenadas discretas se utiliza para la discretización espacio angular de la ETR en estado estacionario monocromático en un medio de dispersión anisotrópica. Se presentan dos métodos muy diferentes, métodos de descomposición angular y espacial. Se establece una comparación detallada de escala, rendimiento y eficiencia en muchos procesadores para casos de pruebas heterogéneas en dos y tres dimensiones. Los tiempos muestran que ambos algoritmos se escalan bien cuando se utilizan pre acondicionadores adecuados. En general realizamos simulaciones numéricas a escalas que anteriormente no se podía alcanzar con los solucionadores de ecuaciones de transferencia radiativa estándar (BADRI, M. et. al., 2017)

La intensidad radiativa varía según su ubicación pero también con la dirección de propagación, entonces mediante un esquema de discretización espacial y también una discretización angular se detalla la solución de la ETR a lo largo de cada rayo, así como la evaluación de la fuente de radiación térmica y la distribución del término fuente elemental entre los nodos de cada elemento. Los resultados se comparan con soluciones analíticas o con los resultados numéricos obtenidos por el método de zona (CHAN, S.H., 1987) y el método de volúmenes finitos (ROUSSE, D.R. et. al., 2000). Se habla de la influencia del espacio y las discretizaciones angulares.

En la teoría de transporte de partículas no cargadas, de radiación electromagnética, en el interior de un medio participante pueden considerarse como **problema directo** si la geometría, las propiedades del medio (tales como el coeficiente de absorción y coeficiente de dispersión), la intensidad, la distribución de la fuente de radiación en el medio y las condiciones de contorno, son todas conocidas y se puede calcular la intensidad de la radiación en cualquier punto (CARITA, R.F. et. al., 2004).

CAPITULO 2

LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

La teoría de transporte se basa en el balance de energía, considerando la energía que ingresa, que sale, que es absorbida y emitida en un elemento de volumen infinitesimal dentro de un medio participante (un medio donde ocurre emisión, absorción y dispersión). Esto es descrito matemáticamente por la ecuación de Boltzmann, usada en la teoría cinética de los gases (MODEST, F.M., 2013):

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial I(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t) + \sigma^a(\vec{r}, \lambda) I(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t) = \\ = \int_{\Gamma^2} \int_0^\infty \sigma^s(\vec{r}, \lambda' \rightarrow \lambda, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) I(\vec{r}, \lambda', \vec{\Omega}', t) d\lambda d\vec{\Omega} + S(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

que es la ecuación (2.4) escrita de forma equivalente.

Dónde:

$I(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t)$	Es la intensidad de la radiación en la posición \vec{r} , en la dirección unitaria $\vec{\Omega}$, de longitud de onda λ , en el tiempo t. Con unidades [$\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1} \mu\text{m}$].
$\sigma^a(\vec{r}, \lambda)$	Es el coeficiente de absorción en la posición \vec{r} , para longitud de onda λ . Con unidad [m^{-1}].
$\sigma^s(\vec{r}, \lambda)$	Es el coeficiente de dispersión en la posición \vec{r} , para longitud de onda λ . Con unidad [m^{-1}].
$\sigma^t(\vec{r}, \lambda)$	$= \sigma^a(\vec{r}, \lambda) + \sigma^s(\vec{r}, \lambda)$ es el coeficiente de extinción total en la posición \vec{r} , para longitud de onda λ . Con unidad [m^{-1}].
$S(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t)$	Es la fuente distribuida en el interior del medio en el punto \vec{r} , con longitud de onda λ , en la dirección unitaria $\vec{\Omega}$, en el tiempo t. Con unidades [$\text{Wm}^{-3} \text{sr}^{-1} \mu\text{m}$].
\vec{r}	Es la variable espacial, con coordenadas (x,y,z). Con unidad [m].
$\vec{\Omega}$	Es la dirección angular del movimiento de la radiación..

$\vec{\Omega}'$	Es la dirección angular de la radiación dispersada.
t	es el tiempo. Con unidad [s].
Γ^2	Es el conjunto de las direcciones $\vec{\Omega}$ en un medio en tres dimensiones, es decir el ángulo sólido. Con unidad [sr]
λ	Es la longitud de onda de la radiación. Con unidad [μ m]
V	es la rapidez característica de la radiación en el medio. Con unidades [ms^{-1}].
$d\Omega$	Elemento de ángulo sólido asociado a la dirección angular Ω . Con unidad [sr]

El primer término de la Ec. (2.1) es la variación en el tiempo de la intensidad en el medio de estudio. El segundo término es la tasa de variación de la intensidad por difusión en el volumen de estudio. El tercer término es la tasa de pérdida de intensidad por absorción y dispersión (“out-scattering”). El cuarto término es la tasa de ganancia por dispersión (“in-scattering”). Y el quinto término es la tasa de ganancia por una fuente de radiación colocada dentro del medio de estudio.

En transferencia radiativa para aplicaciones en medios tridimensionales es usual denotar el dominio angular como $\Gamma^2 = 4\pi$. Considerando un sistema sin dependencia espectral, la dependencia en la energía (λ) de cada función desaparece, lo que lleva a la conocida formulación de la ecuación de transporte de una energía. Si consideramos también que el sistema es estacionario, el primer término de la izquierda de la Ec. (2.1) es nulo, y la dependencia temporal de cada función desaparece. Considerando todas las hipótesis aquí mencionadas la Ec. (2.1) queda simplificada como:

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sigma'(\vec{r})I(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{\Gamma^2} \sigma^s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})I(\vec{r}, \vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' + S(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (2.2)$$

Donde $I(\vec{r}, \vec{\Omega})$ es la intensidad de la radiación monocromática o flujo angular de radiación a una sola energía en el punto \vec{r} en la dirección $\vec{\Omega}$, y $S(\vec{r}, \vec{\Omega})$ representa la fuente interna distribuida en el medio (Ver DUDERSTAND Y MARTIN, 1979).

Usando el criterio de separación de variables entre la variable espacial y angular, el coeficiente de dispersión puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\sigma^s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \sigma^s(\vec{r}) \frac{\phi(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})}{4\pi} \quad (2.3)$$

Donde $\phi(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$ es denominada función de fase y puede ser aproximada por una sucesión de polinomios de Legendre. Observe que aquí estamos usando el mismo símbolo σ^s en ambos lados de la Ec.(2.3); esto es hecho con el fin de simplificar la notación en todos los casos considerados. Entonces, se está considerando que el coeficiente de dispersión posee dependencia espacial representada por $\sigma^s(\vec{r})$ y dependencia angular representada por la función de fase $\phi(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$ (FIVELAND, W.A., 1987).

Luego, la Ec. (2.2) puede ser escrita como

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sigma^t(\vec{r}) I(\vec{r}, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (2.4)$$

Con

$$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\sigma^s(\vec{r})}{4\pi} \int_{S^2} \phi(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) I(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + S(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (2.5)$$

La Ec. (2.5) representa el término fuente; el término integral representa la contribución de la radiación incidente "in-scattering" en la dirección $\vec{\Omega}'$ y que es dispersada en la dirección $\vec{\Omega}$. La Figura 3.1 muestra este proceso, donde una partícula incide con dirección $\vec{\Omega}'$ sobre un elemento de volumen situado en el punto \vec{r} , usando coordenadas cartesianas, y luego es dispersada en la dirección $\vec{\Omega}$. En coordenadas cartesianas el vector angular unitario es igual a

$$\vec{\Omega} = \mu \hat{e}_x + \xi \hat{e}_y + \eta \hat{e}_z$$

es decir

$$\vec{\Omega} = \text{sen}\theta \cos\varphi \cdot \hat{e}_x + \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \cdot \hat{e}_y + \cos\theta \cdot \hat{e}_z$$

CAPITULO 3

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

3.1. APROXIMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA POR EL MÉTODO DE ORDENADAS DISCRETAS

El método de ordenadas discretas está basado en una representación discreta de la variación angular de la intensidad radiativa. Una solución para el problema de transporte es construida resolviendo la ecuación de transporte radiativo sobre un conjunto de direcciones discretas extendidas sobre el alcance total del ángulo sólido, 4π , y el método de diferencias finitas en la parte espacial. El método de ordenadas discretas consiste, por tanto, en la discretización de la variable angular, y el término integral (in-scattering) sobre el ángulo sólido es aproximado por un conjunto de direcciones ordenadas, denominadas cuadraturas numéricas.

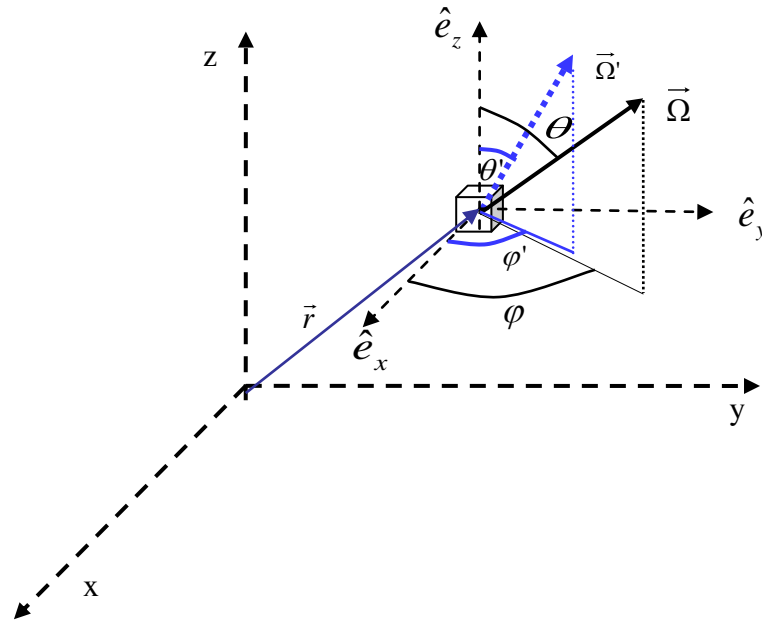


Figura 3.1. El vector angular de incidencia $\vec{\Omega}'$ y el de dispersión $\vec{\Omega}$.

Empecemos por discretizar el dominio angular de $\vec{\Omega} \in \Gamma^2$ en L_0 direcciones ordenadas, esto es

$$\vec{\Omega} \in \{ \vec{\Omega}_l \} \text{ con } l=1,2,\dots,L_0, \quad (3.1)$$

Luego podemos aproximar la integral en $\vec{\Omega}$ por la sumatoria de un conjunto de direcciones ordenadas y cuadratura numérica, resultando

$$\int_{S^2} f(\vec{\Omega}) d\Omega \approx \sum_{l=1}^{L_0} w_l f(\vec{\Omega}_l) \quad (3.2)$$

Donde w_l es el peso de la cuadratura asociada a la dirección $\vec{\Omega}_l$, y la sumatoria de los pesos w_l , $l = 1, 2, \dots, L_0$, es igual a 4π . El término integral del lado derecho de la Ec. (2.9) puede ser entonces aproximado por la cuadratura.

$$\int_{4\pi} \phi(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) I(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \approx \sum_{m=1}^{L_0} w_m \phi(\vec{\Omega}_m, \vec{\Omega}_l) I(\vec{r}, \vec{\Omega}_m) \quad (3.3)$$

En coordenadas cartesianas rectangulares, tenemos que $\vec{\Omega}_l$ puede ser descompuesto en las direcciones sobre los tres ejes coordenadas (cosenos directores). Se tiene:

$$\vec{\Omega}_l = \mu_l \cdot \hat{e}_x + \xi_l \cdot \hat{e}_y + \eta_l \cdot \hat{e}_z \quad \text{con} \quad \mu_l^2 + \xi_l^2 + \eta_l^2 = 1 \quad (3.4)$$

$$\vec{r} = x \cdot \hat{e}_x + y \cdot \hat{e}_y + z \cdot \hat{e}_z \quad (3.5)$$

$$y \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \quad (3.6)$$

Entonces las Ecs. (2.8) y (2.9) pueden ser aproximadas por

$$\mu_l \frac{\partial I_l(\vec{r})}{\partial x} + \xi_l \frac{\partial I_l(\vec{r})}{\partial y} + \eta_l \frac{\partial I_l(\vec{r})}{\partial z} + \sigma_l I_l(\vec{r}) = Q_l(\vec{r}) \quad \text{con} \quad l = 1, 2, \dots, L_0 \quad (3.7)$$

Y haciendo $\phi(\vec{\Omega}_m, \vec{\Omega}_l) = \phi_{m,l}$, se tiene:

$$Q_l(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{L_0} \frac{\sigma_s(\vec{r})}{4\pi} w_m \phi_{l,m} I_m(\vec{r}) + S_l(\vec{r}) \quad (3.8)$$

El término $\phi_{l,m}$ representa la función de fase descrita por (FIVELAND, W.A., 1987) de la siguiente forma

$$\phi_{l,m} = \sum_{n=0}^M a_n \cdot P_n(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\Omega}_l) = \sum_{n=0}^M a_n \cdot P_n(\mu_m \mu_l + \xi_m \xi_l + \eta_m \eta_l) \quad (3.9)$$

Donde $P_n(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\Omega}_l)$ son los polinomios de Legendre que dependen de los cosenos directores, μ_l, ξ_l, η_l , y M es el orden de la expansión. En transferencia radiativa los

coeficientes a_n pueden ser determinados con la teoría de Mie (MODEST, F.M., 2013), válida en una región intermedia entre la óptica geométrica (cuando la longitud de onda de la radiación es menor que el diámetro de las partículas del medio con las cuales ella interacciona), y la teoría de Rayleigh válida en el caso opuesto.

Considerando el caso de dispersión anisotrópica lineal (entonces el orden de expansión es $M = 1$, con $P_0 = 1$, $P_1 = \vec{\Omega}_m \cdot \vec{\Omega}_l$ y el valor $a_0 = 1$), tendremos que la representación de la función de fase en polinomios de Legendre dada por la Ec. (3.9) y por Fiveland (1984), se reduce a

$$\phi_{lm} = 1 + a_1[\mu_l \mu_m + \xi_l \xi_m + \eta_l \eta_m] \quad (3.10)$$

El valor a_1 es el factor de asimetría, y varia en el intervalo $-1 \leq a_1 \leq 1$; donde los valores $a_1 < 0$ denotan que la dispersión es hacia atrás, el valor $a_1 = 0$ representa la dispersión isotrópica y los valores de $a_1 > 0$ corresponden a la dispersión hacia adelante. Cuando la dispersión es isotrópica ($a_1 = 0$, que es el caso que vamos estudiar) se tiene

$$\phi_{lm} = 1 \quad (3.11)$$

Asociado a cada dirección $\vec{\Omega}_l$ se tiene un peso de la cuadratura (llamado también factor de ponderación en métodos numéricos) w_l , cada peso representa una pequeña área sobre una esfera unitaria, por tanto, la suma total de todos los pesos corresponde al área total 4π de una esfera unitaria (LIOU, K. N., 2002).

Aprovechando la invarianza de las direcciones ordenadas y la simetría de una esfera, y definiendo las direcciones de un octante tendremos definidas las direcciones en los otros octantes restantes; si (μ_l, ξ_l, η_l) representa una dirección, en el primer octante, la condición de simetría requiere la existencia de los puntos $(-\mu_l, \xi_l, \eta_l)$ en el segundo octante, $(-\mu_l, -\xi_l, \eta_l)$ en el tercer octante, $(\mu_l, -\xi_l, \eta_l)$ en el cuarto octante, $(\mu_l, \xi_l, -\eta_l)$ en el quinto octante, $(-\mu_l, \xi_l, -\eta_l)$ en el sexto octante, $(-\mu_l, -\xi_l, -\eta_l)$ en el séptimo octante, y $(\mu_l, -\xi_l, -\eta_l)$ en el octavo octante. De esta forma la descripción de los puntos de colocación en un octante, permite la inmediata identificación de los puntos de colocación en todos los octantes.

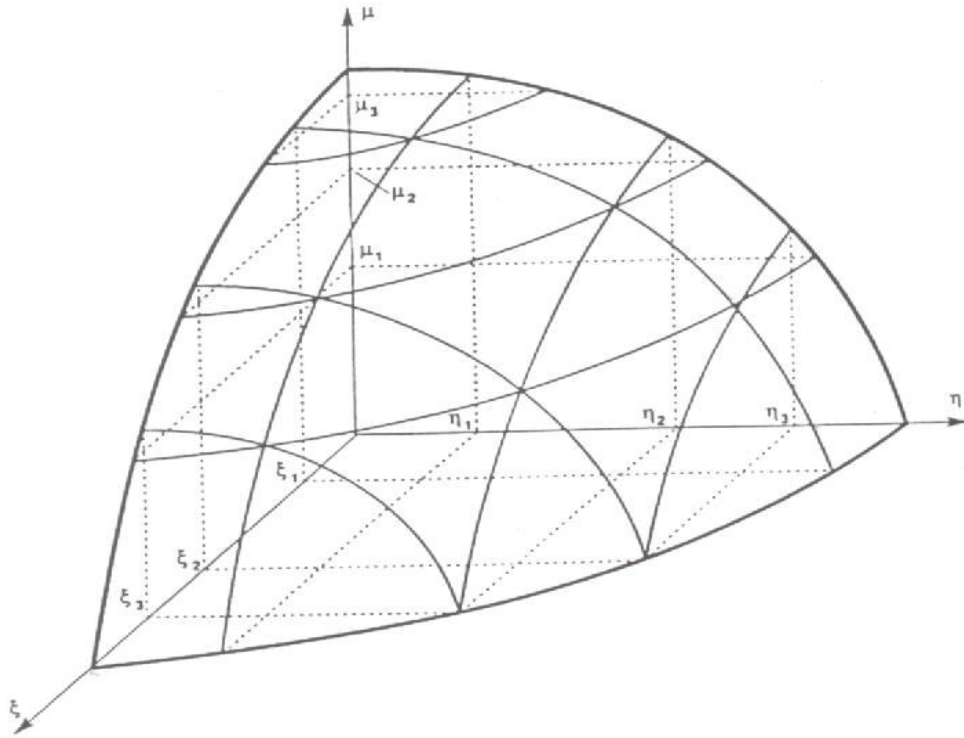


Figura 3.2. Cuadratura con nivel de simetría S_6 .

Los puntos son colocados sobre $N/2$ niveles relativos a cada eje como ilustra la Fig. 3.2, donde N es el orden de la cuadratura. Las intersecciones de cada nivel con los niveles relativos a los otros ejes forman los vértices de triángulos sobre la superficie de la esfera. El número total de vértices por cada octante es igual a $N(N+2)/8$, y define la aproximación S_N del método de ordenadas discretas en los octantes.

Existen varios conjuntos de cuadraturas, pero todos no pueden ser utilizados cuando se trabaja con dispersión anisotrópica. La cuadratura de nivel simétrico LSH (Level Symmetric Hybrid) y la cuadratura de pesos iguales EWO (Equal Weight Odd) propuestas por FIVELAND, W.A., 1987 y la cuadratura LSN (Level Symmetric N) propuesta por WALKIL Y SACADURA, 1992, son utilizados en casos con dispersión anisotrópica. Estas cuadraturas satisfacen los momentos de orden cero (entropía), momento de orden uno y de orden dos

$$\int_{4\pi} d\Omega = 4\pi = \sum_{m=1}^N w_m$$

$$\int_{4\pi} \bar{\Omega} d\Omega = 0 = \sum_{m=1}^N w_m \bar{\Omega}_m$$

$$\int_{4\pi} \bar{\Omega} \bar{\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta = \sum_{m=1}^N w_m \bar{\Omega}_m \bar{\Omega}_m$$

respectivamente. Donde δ es el tensor unidad. Estos momentos corresponden a la energía incidente del flujo de calor en las condiciones de difusión.

El nivel de cuadratura simétrico (Level symmetric Odd) solo satisface momentos de bajo orden; esta cuadratura tiene buen desempeño cuando se trabaja con dispersión isotrópica.

Para una cuadratura de orden 10, $N = 10$, en un medio tridimensional existen $N(N+2)=120$ puntos de colocación y para medios bidimensionales sólo se considera $N(N+2)/2=60$ puntos de colocación pues no se considera la dependencia con relación al tercer eje representado por η_l .

3.2. EL MÉTODO DE ORDENADAS DISCRETAS PARA UN MEDIO DE UNA DIMENSIÓN

La colección de datos se realizará resolviendo la ecuación de transferencia radiativa (llamado problema directo). La ecuación de transporte radiativo (ETR) en coordenadas cartesianas para un medio de una dimensión, en régimen permanente, considerando simetría azimutal, sin dependencia espectral, en un medio isotrópico y sin fuentes se escribe como:

$$\mu_l \frac{dI_l(x)}{dx} + \sigma^t(x) I_l(x) = Q(x), \text{ donde } Q(x) = \sum_{m=1}^{L_0} \frac{\sigma^s(x)}{4\pi} w_m I_m(x) \quad (3.12)$$

Con $l = 1, 2, \dots, L_0$; $0 \leq x \leq L$ y $-1 \leq \mu_l \leq 1$

Donde $I_l(x)$ es la intensidad de la radiación, x es la variable espacial, μ_l es el coseno de la dirección de propagación con el eje x (coseno del ángulo polar), $\sigma^s(x)$ es el coeficiente de dispersión, $\sigma^a(x)$ es el coeficiente de absorción, $\sigma^t(x) = \sigma^a(x) + \sigma^s(x)$ es el coeficiente de extinción total. L es la longitud espacial del dominio. La

discretización del dominio angular (Método de Ordenadas Discretas, MOD) es hecha en L_0 valores de ángulos sólidos Ω_l ; es decir, L_0 indica también el número de discretizaciones en el dominio angular. l indica una dirección y w_l es el peso de la cuadratura asociada a la dirección l . La dirección Ω_l alrededor del eje x va a ser representado por los cosenos directores μ_l , (MODEST, F.M., 2013).

3.3. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA EN UNA DIMENSIÓN

La Figura 3.3 presenta el problema físico a resolver en una placa de área infinita de espesor L . El dominio espacial será discretizado (Método de Diferencias Finitas, MDF) en E intervalos iguales Δx ; como se aprecia en la Figura 3.4 el espesor del medio es L , que cumple con $L = \Delta x E$. Como producto de la discretización cada segmento espacial va a ser identificado por un subíndice e ; de lo cual resulta $I_l(x) = I_l(x_e) = I_{l,e}$. Por ejemplo, el centro del segmento e (ver Figura 3.4 la parte que está sombreado) es determinado por:

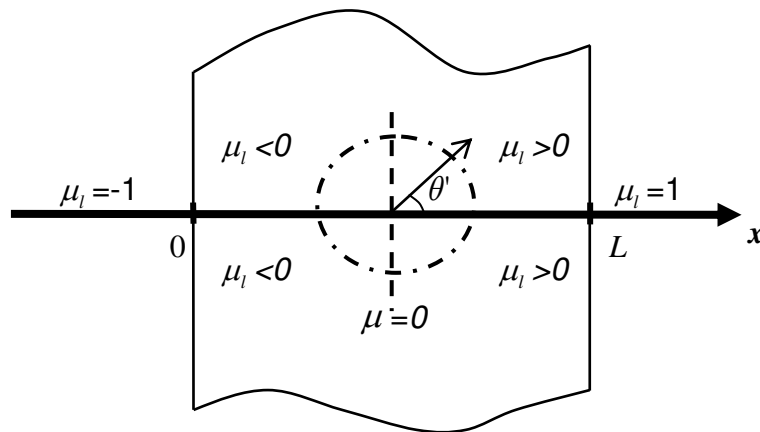


Figura 3.3. Medio de una dimensión.

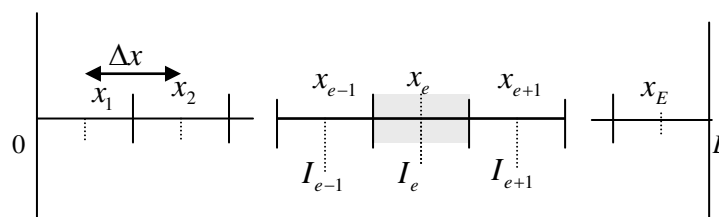


Figura 3.4. Discretización del dominio espacial en diferencias finitas.

$$x_e = (e - 1/2)\Delta x \quad (3.13)$$

En un medio de una dimensión encontramos dos sentidos (o hemisferios, ver Figura 3.5) por donde la radiación se puede transferir (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, ver Figura 3.6). Luego la intensidad de radiación $I_{l,e}$ puede propagarse por cualquiera de los dos sentidos (o hemisferios). El I (ver Figura 3.5) indica una marcha hacia la derecha (o este), con los cosenos directores $\mu_l > 0$. El hemisferio II indica una marcha hacia la izquierda (u oeste) con $\mu_l < 0$.

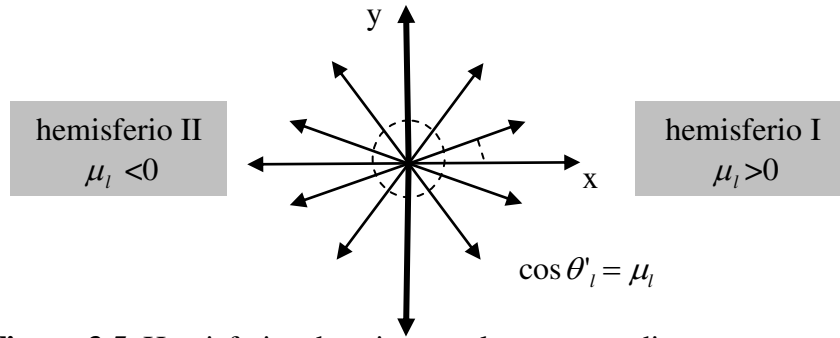


Figura 3.5. Hemisferios descritos por los cosenos directores μ_l .

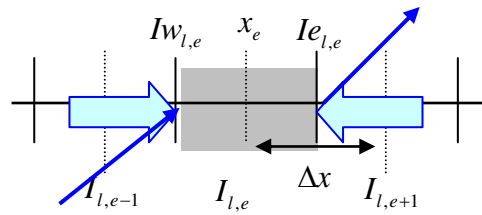


Figura 3.6. El segmento e .

Considerando la radiación (intensidad) que se está transfiriendo hacia la derecha, y tomando el segmento e , la variación en intensidad, $\Delta I_{l,e}$, dentro del segmento e , es la radiación que sale por el este, $I_{e_{l,e}}$, menos la que entra por el oeste, $I_{w_{l,e}}$, es decir, por los puntos de frontera del segmento e , como se ve en la Figura 3.6:

$$\Delta I_{l,e} = I_{e_{l,e}} - I_{w_{l,e}} \quad (3.14)$$

Ahora μ_l está dentro del intervalo $-1 \leq \mu_l \leq 1$. Entonces el valor positivo o negativo de μ_l describe dos hemisferios (ver Figura 3.5), en los cuales la radiación puede propagarse o sufrir dispersión.

Aproximando las derivadas por la discretización hecha en el espacio, la Ec. (3.12) resulta:

$$\mu_l \frac{\Delta I_{l,e}}{\Delta x} + \sigma_{l,e} I_{l,e} = Q_{l,e}, \quad l=1,2,\dots,L_0 \quad (3.15)$$

de la Ec. (3.14) en la Ec. (3.15):

$$\mu_l \frac{I_{e_{l,e}} - I_{w_{l,e}}}{\Delta x} + \sigma_{l,e} I_{l,e} = Q_{l,e}, \quad l=1,2,\dots,L_0 \quad (3.16)$$

el valor de la intensidad $I_{l,e}$, puede ser aproximado por:

$$I_{l,e} = \gamma I_{e_{l,e}} + (1-\gamma) I_{w_{l,e}}, \quad \text{con } \gamma \text{ entre } 0 \text{ y } 1. \quad (3.17)$$

Como en este caso la intensidad se calcula en el centro del segmento x_e , entonces $\gamma = 0.5$, que resulta en la relación “diamond difference” propuesta por CARLSON Y LATHROP (1968) y usada más tarde por FIVELAND (1984), resultando:

$$I_{l,e} = \frac{I_{e_{l,e}} + I_{w_{l,e}}}{2} \quad (3.18)$$

De lo anterior, se sabe que la intensidad $I_{l,e}$ puede propagarse por dos hemisferios, (ver Figura 3.6). El hemisferio I, indica una marcha hacia la derecha, con los cosenos directores $\mu_l > 0$ hemisferio II, indica una marcha hacia la izquierda con $\mu_l < 0$. La intensidad $I_{l,e}$ para cada marcha es descrita a continuación

HEMISFERIO I: Para $\mu_l > 0$, tenemos que la dirección de propagación de la intensidad $I_{l,e}$ es hacia la derecha; en esta dirección la intensidad, $I_{w_{l,e}}$, es conocida (ya que por ese lado la radiación entra), luego de la Ec. (3.18) despejamos $I_{e_{l,e}}$, que es desconocido:

$$I_{e_{l,e}} = 2I_{l,e} - I_{w_{l,e}} \quad (3.19)$$

y de la Ec. (3.19) en la Ec. (3.16), despejamos $I_{l,e}$ obteniendo:

$$I_{l,e} = \frac{2\mu_l \cdot I_{w_{l,e}} + \Delta x \cdot Q_{l,e}}{2\mu_l + \sigma_{l,e} \cdot \Delta x}, \quad l=1,2,\dots,L_0, \quad e=1,2,\dots,E \quad (3.20)$$

Considerando las condiciones de continuidad en la frontera entre segmentos adyacentes (ver Figura 3.7), la intensidad oeste en el segmento $e+1$, $I_{w_{l,e+1}}$, es igual a la intensidad este del segmento e , $I_{e_{l,e}}$:

$$I_{w_{l,e+1}} = I_{e_{l,e}}$$

Cuando $e+1 = E$ esta condición no se calcula pues la intensidad estaría en el segmento $E+1$, el cual ya no existe, como puede verse en la parte derecha de la Figura 3.7.

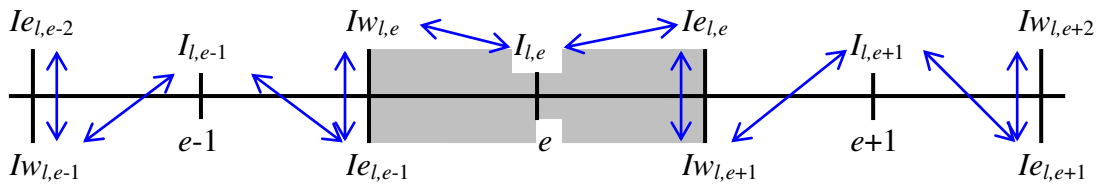


Figura 3.7. Condiciones de continuidad en la frontera

HEMISFERIO II Para $\mu_l < 0$ tenemos que la dirección de propagación de la intensidad $I_{l,e}$ es hacia la izquierda; en esta dirección la intensidad $I_{e_{l,e}}$ es conocida (ya que ahora la radiación entra por ese lado), luego de la Ec. (3.18) despejamos $I_{w_{l,e}}$, que es desconocido:

$$I_{w_{l,e}} = 2I_{l,e} - I_{e_{l,e}} \quad (3.21)$$

y de la Ec. (3.21) en la Ec. (3.17), despejamos $I_{l,e}$ obteniendo:

$$I_{l,e} = \frac{-2\mu_l \cdot I_{e_{l,e}} + \Delta x Q_{l,e}}{-2\mu_l + \Delta x \sigma_{l,e}}, \quad l=1,2,\dots,L_0, \quad e = E, E-1, \dots, 1 \quad (3.22)$$

Considerando las condiciones de continuidad en la frontera entre los segmentos adyacentes, la intensidad este del segmento $e-1$, $I_{e_{l,e-1}}$, es igual a la intensidad oeste del segmento e , $I_{w_{l,e}}$:

$$I_{e_{l,e-1}} = I_{w_{l,e}}; \quad (3.23)$$

Cuando $e-1 = 1$ esta condición no se calcula pues la intensidad estaría en el segmento 0, la cual no existe, como puede verse en la parte izquierda de la Fig. 3.7

Las condiciones de frontera son: $Iw_{l,1} = 1$, para $l = 1, 2, \dots, L_0$, y no entra ninguna radiación por el segmento E .

3.4. ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

Para determinar $I_{l,e}$ necesitamos de $Q_{l,e}$. Observamos que $Q_{l,e}$ depende de $I_{l,e}$. Por lo que es necesario utilizar un procedimiento iterativo para la obtención de una solución aproximada para $I_{l,e}$. Sea h un contador de iteraciones. La Ec. (3.20), que es la solución en el hemisferio I, puede ser escrita como:

$$I_{l,e}^h = \frac{2\mu_l \cdot Iw_{l,e}^h + \Delta x \cdot Q_{l,e}^{h-1}}{2\mu_l + \sigma_{t,e} \cdot \Delta x}, \text{ con } Q_{l,e}^{h-1} = \sum_{m=1}^{L_0} \frac{\sigma_{s,e}}{4\pi} w_m \cdot I_{m,e}^{h-1} \quad (3.24)$$

y la Ec. (3.22) que es la solución en el hemisferio II, puede ser escrita como:

$$I_{l,e}^h = \frac{-2\mu_l \cdot Ie_{l,e} + \Delta x Q_{l,e}^{h-1}}{-2\mu_l + \Delta x \sigma_{t,e}}, \text{ con } Q_{l,e}^{h-1} = \sum_{m=1}^{L_0} \frac{\sigma_{s,e}}{4\pi} w_m \cdot I_{m,e}^{h-1}, \quad (3.25)$$

El proceso de iteración se detiene cuando la siguiente norma del error relativo se cumple:

$$\left| \frac{I_{l,e}^h - I_{l,e}^{h-1}}{I_{l,e}^h} \right| < 10^{-6}, \quad (3.26)$$

O se comprobó que el proceso de iteración en ITERACION = 20 es un buen proceso de parada, pues en todos los casos siempre se cumple con la Ec. (3.26). Por consiguiente el algoritmo para los dos hemisferios se muestra en la Figura 3.8.

Cualquier intensidad medida por un detector q_e posicionado en un elemento e puede ser escrita como una función de la forma

$$q_{e,\text{calculado}} = F_k(\sigma^a, \sigma^s), k = 1, 2, \dots, K \quad (3.27)$$

Donde K es el número total de datos medidos.

Para las medidas de transmisión, el detector $q_{e, \text{calculado}}$ está en $e = E$ y para las medidas de reflexión, el detector $q_{e, \text{calculado}}$ está en $e = 1$.

Como las fuentes son externas, la condición de frontera en el segmento 1 es:

$$I_{w_{l,1}} = 1, \text{ para } l = 1, 2, \dots, L_0.$$

ALGORITMO

```

Para h = 1 hasta 20
  Para l = 1 hasta L0
    Para e = 1 hasta E
      Si estamos en el 1er HEMISFERIO hacer
        Ecuación (3.20)
         $I_{e_{l,e}} = 2I_{l,e} - I_{w_{l,e}}$ 
        si  $e < E$  hacer,  $I_{w_{l,e+1}} = I_{e_{l,e}}$ , fin de si.
      Fin del 1er HEMISFERIO
      Si estamos en el 2do HEMISFERIO
        Ecuación (3.22)
         $I_{w_{l,e}} = 2I_{l,e} - I_{e_{l,e}}$ 
        si  $e > 1$  hacer,  $I_{e_{l,e-1}} = I_{w_{l,e}}$ , fin de si.
      Fin de 2do HEMISFERIO
    Fin de e
    Ecuación (3.26)
  Fin de l
  Calcular  $Q_{l,e}$ 
Fin de h
  
```

Figura 3.8. Algoritmo para la solución de la ecuación de transferencia radiativa 1D.

CAPITULO 4

4.1. VALIDACIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO

La validación de nuestro programa fue hecha comparando nuestros resultados con aquellos publicados por (FIVELAND, W.A., 1987 y CHANDRASEKHAR, S., 1960), para un problema planteado por ellos (medio homogéneo, con condición en la frontera igual a 1.0). La Tabla 4.1 muestra esa comparación. Vemos que el método empleado en este trabajo (Método de diferencias finitas (MOD) y método de ordenadas discretas LSH S_{10}) y el método de elementos finitos combinado con el MOD LSH S_{10} son los más próximos a los valores exactos.

Tabla 4.1. Valores calculados q_{med} para el problema propuesto por FIVELAND, W.A., 1987.

σ_t	Valores exactos	Harmónicos esféricos P_1	Elementos Finitos LSH S_{10}	Diferencias finitas LSH S_{10}	Diferencias finitas Gauss –Leg S_{20}
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.9157	0.9302	0.9138	0.9138	0.9145
0.5	0.7040	0.7273	0.7027	0.7026	0.7026
1.0	0.5532	0.5714	0.5530	0.5529	0.5517
5.0	0.2077	0.2105	0.2076	0.2078	0.2070

La Tabla 4.2 presenta el conjunto de ordenadas (ángulos) y pesos de la cuadratura LSH S_{10} que discretiza el espacio angular, empleado en este trabajo.

Tabla 4.2. Ordenadas (puntos de colocación) y pesos de la cuadratura LSH S_{10} , $L_0=10$.

Punto Número	Ordenadas μ_i	Pesos w_i	Punto Número	Ordenadas μ_i	Pesos w_i
1	0.1372719	2.0122	6	-0.1372719	2.0122
2	0.5046889	2.1071	7	-0.5046889	2.1071
3	0.7004129	0.5990	8	-0.7004129	0.5990
4	0.8523177	1.1872	9	-0.8523177	1.1872
5	0.9809754	0.3778	10	-0.9809754	0.3778

4.2. CONVERGENCIA DEL ALGORITMO SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

Para la sustentación del proceso de convergencia, se hizo dos ejemplos. En el primero, un medio homogéneo con coeficientes de absorción y dispersión iguales a 0.1. En el segundo un medio heterogéneo con coeficientes de absorción y dispersión iguales a 0.1, 0.1 hasta $x = 3$; 0.3, 0.2 hasta $x = 6$, y 0.1, 0.1 hasta $x = 10$, respectivamente. El espesor es $L = 10$, la intensidad de la fuente que entra es 10^5 . Los resultados que se observan en la Tablas 4.3 y 4.4, son las intensidades multiplicadas por 10^4 , y se ve que en la séptima iteración el algoritmo ya convergió, así como en las Figuras 4.1, 4.2 donde se observan sus gráficas.

Tabla 4.3. La convergencia para el problema directo en un medio homogéneo.

Esesor placa	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3	Iteración 4	Iteración 5	Iteración 6	Iteración 7	Iteración 8	Iteración 9
0.5	90.301	91.349	91.434	91.445	91.447	91.447	91.447	91.447	91.447
1.0	81.542	83.273	83.446	83.469	83.472	83.473	83.473	83.473	83.473
1.5	73.633	75.815	76.065	76.100	76.106	76.106	76.107	76.107	76.107
2.0	66.491	68.968	69.282	69.328	69.335	69.336	69.336	69.336	69.336
2.5	60.042	62.701	63.066	63.121	63.131	63.132	63.133	63.133	63.133
3.0	54.218	56.977	57.381	57.445	57.456	57.458	57.458	57.458	57.458
3.5	48.960	51.756	52.188	52.259	52.271	52.274	52.274	52.274	52.274
4.0	44.211	46.998	47.450	47.526	47.540	47.542	47.542	47.543	47.543
4.5	39.923	42.666	43.128	43.209	43.223	43.226	43.227	43.227	43.227
5.0	36.050	38.722	39.190	39.274	39.289	39.292	39.292	39.293	39.293
5.5	32.554	35.135	35.602	35.688	35.704	35.707	35.708	35.708	35.708
6.0	29.396	31.873	32.335	32.422	32.439	32.442	32.443	32.443	32.443
6.5	26.545	28.908	29.362	29.449	29.466	29.469	29.470	29.470	29.470
7.0	23.970	26.214	26.657	26.743	26.760	26.764	26.764	26.764	26.764
7.5	21.645	23.768	24.196	24.282	24.299	24.302	24.303	24.303	24.303
8.0	19.546	21.546	21.959	22.042	22.059	22.062	22.063	22.063	22.063
8.5	17.650	19.529	19.925	20.006	20.022	20.026	20.026	20.027	20.027
9.0	15.938	17.699	18.076	18.154	18.171	18.174	18.174	18.175	18.175
9.5	14.392	16.038	16.396	16.471	16.487	16.490	16.490	16.491	16.491
10.0	12.996	14.531	14.869	14.940	14.955	14.958	14.959	14.959	14.959

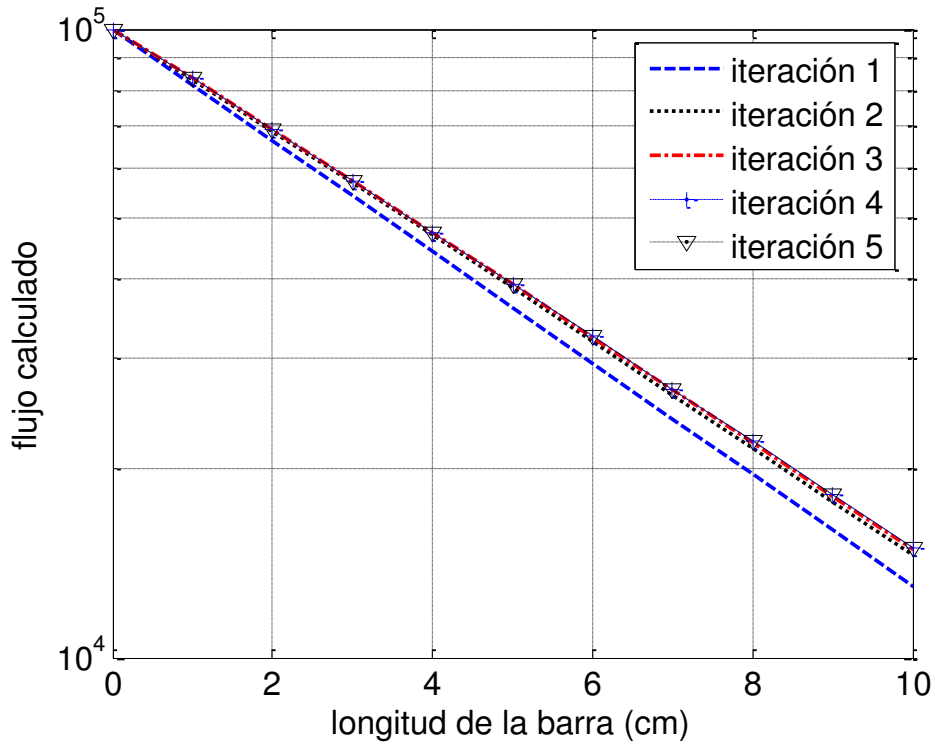


Figura 4.1. La convergencia para el problema directo en un medio homogéneo.

Tabla 4.4. La convergencia para el problema directo en un medio heterogéneo.

Espesor placa	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3	Iteración 4	Iteración 5	Iteración 6	Iteración 7	Iteración 8	Iteración 9
0.5	90.301	91.349	91.430	91.439	91.440	91.440	91.440	91.440	91.440
1.0	81.542	83.273	83.437	83.456	83.458	83.459	83.459	83.459	83.459
1.5	73.633	75.815	76.051	76.080	76.083	76.084	76.084	76.084	76.084
2.0	66.491	68.968	69.261	69.297	69.302	69.302	69.303	69.303	69.303
2.5	60.042	62.701	63.035	63.078	63.083	63.084	63.084	63.084	63.084
3.0	48.933	51.419	51.742	51.784	51.790	51.791	51.791	51.791	51.791
3.5	39.880	42.139	42.440	42.480	42.485	42.486	42.486	42.486	42.486
4.0	32.502	34.516	34.790	34.828	34.833	34.833	34.833	34.833	34.833
4.5	26.488	28.260	28.507	28.541	28.546	28.546	28.547	28.547	28.547
5.0	21.588	23.129	23.350	23.381	23.385	23.385	23.386	23.386	23.386
5.5	17.594	18.924	19.119	19.147	19.151	19.152	19.152	19.152	19.152
6.0	14.339	15.480	15.651	15.677	15.680	15.681	15.681	15.681	15.681
6.5	12.948	14.027	14.194	14.219	14.223	14.224	14.224	14.224	14.224
7.0	11.692	12.709	12.871	12.897	12.900	12.901	12.901	12.901	12.901
7.5	10.558	11.513	11.671	11.696	11.700	11.700	11.700	11.701	11.701
8.0	0.9534	10.429	10.581	10.606	10.610	10.610	10.611	10.611	10.611
8.5	0.8609	0.9446	0.9592	0.9616	0.9620	0.9621	0.9621	0.9621	0.9621
9.0	0.7774	0.8555	0.8694	0.8718	0.8722	0.8723	0.8723	0.8723	0.8723
9.5	0.7020	0.7748	0.7880	0.7903	0.7907	0.7908	0.7908	0.7908	0.7908
10.0	0.6339	0.7016	0.7141	0.7163	0.7167	0.7167	0.7168	0.7168	0.7168

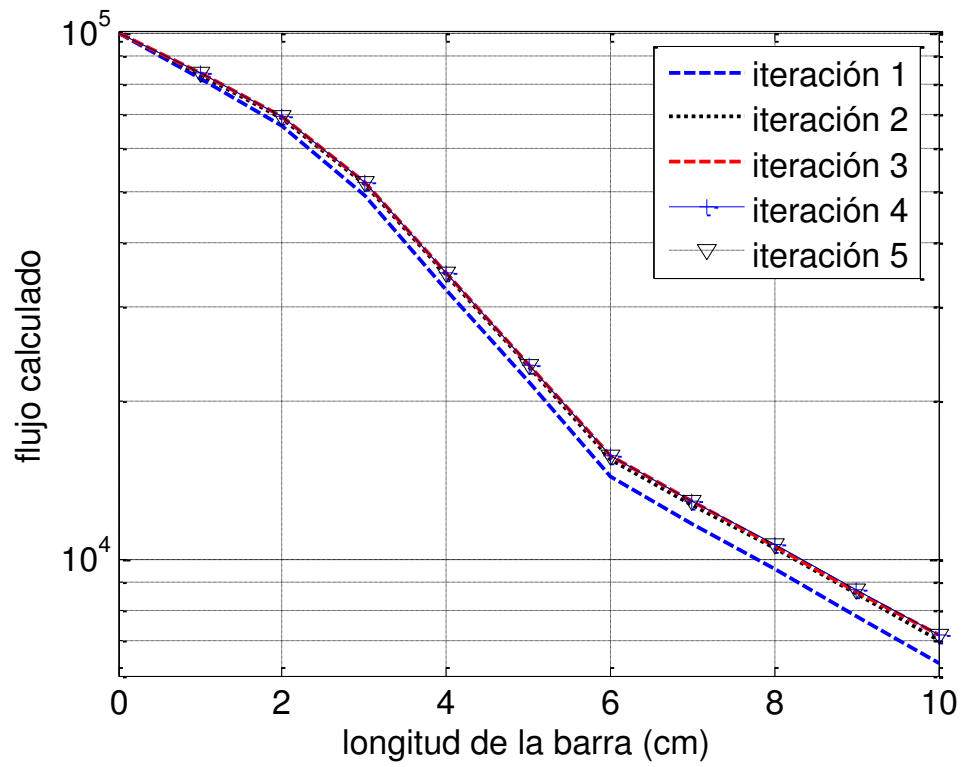


Figura 4.2. La convergencia para el problema directo en un medio heterogéneo.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES

- La ETR (ecuación 2.5) se muestra en forma general, el cual puede ser aplicado a cualquier problema físico de transferencia de radiación en el tiempo, mediante un balance de energías en un elemento de volumen infinitesimal dentro de un medio participante (un medio donde ocurre emisión, absorción y dispersión).
- Se resolvió la ETR por métodos numéricos con el método de diferencias finitas para la parte espacial (en una dimensión) y el método de ordenadas discretas para la parte angular, llegando a un algoritmo iterativo de rápida convergencia, obteniendo la intensidad de la radiación en cada punto de la región estudiada, utilizando el lenguaje de programación MATLAB R09, no se utilizó ninguna función de minimización del MATLAB.
- Los resultados del método de diferencias finitas y del método de ordenadas discretas (LSHS₁₀) que se muestra en la tabla 4.1 se aproxima más a los valores exactos que se aprecian en dicha tabla.
- En la figura 4.1, figura 4.2, tabla 4.3 y tabla 4.4 se muestra la convergencia en la iteración 7, el cual indica que el método aplicado tiene una convergencia muy rápida y eficiente.

REFERENCIAS

- BADRI, M., JOLIVET, P., ROUSSEAU, B., FAVENNEC, Y., 1 may 2017, High performance computation of radiative transfer equation using the finite element method, volume 360, , pages 74 - 92
- BREGMAN, L.M., 1967, The Relaxation Method of Finding the Common Point of Convex Sets and Its Application to the Solution of Problems in Convex Programming, *USSR Comp. and Math.l Physics Journal*, 7, pp. 200-217.
- CARITA MONTERO, R.F., ROBERTY, N.C. y SILVA NETO, A.J., 2004, Reconstruction of a Combination of the Absorption and Scattering Coefficients with a Discrete Ordinates Method Consistent with the Source-Detector System, *Inverse Problems In Science And Engineering*, EEUU, v. 12, p. 81-101, 2004.
- CARLSON, B.G., y LATHROP, K.D., 1968, Transpor Theory – The Method of Discrete Ordinates in *Computing Methods in Reactor Physics*, edited by Greenspan, Kelber y krent, Gordon and Breach, New York.
- CHAI, J.C.; LEE, H.S. y PANTAKAR, S.V., 1993, Ray Effect and False Scattering in the Discrete Ordinates Method, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, v. 24 pp. 373-389.
- CHAN, S.H., 1987, Numerical methods for multidimensional radiative transfer analysis in participating media, Annual Reviewof Numerical Fluid Flowand Heat Transfer, Vol. 1, Chawla Edition, Hemisphere, Washington, D.C (Chapter 6).
- CHANDRASEKHAR, S., 1960, Radiative Transfer, is an unabridged and slightly revised version of the work. (Chapter 1), pages 1 – 23
- COELHO, P., CROUSEILLES., N, PEREIRA, P., ROGER, M., March 2016, Multi-scale methods for the solution of the radiative transfer equation, Volumen 172, , pages 36-49

- DUDERSTADT, J.J. y MARTIN, W.R., 1979, *Transport Theory*, John Wiley & Sons, New York.
- FELDHEIM, V., LYBAERT, P., 2004, Solution of radiative heat transfer problems with the discrete transfer method applied to triangular meshes.
- FIVELAND, W.A., 1984, Discrete – Ordinates Solution of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures, *Journal of Heat transfer*, v. 106, pp 699-706.
- FIVELAND, W.A., 1987, Discrete – Ordinates Methods for Radiative Heat Transfer in Isotropically and Anisotropically Scattering Media, *Journal of Heat transfer*, v. 109, pp 809-812.
- HAVDRA, J. y CHARVAT, F., 1967, Concept of Structural α -Entropy. *Kybernetika*, v. 3 pp. 30-35.
- KIRSCH, A., 1996, *Ill – Posed Problems in an Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer – Verlag, v. 120, New York, USA.
- LIU K. N., 2002, An introduction to atmospheric radiation, Academic Press, 2, 599.
- LOBATO, F.S.; STEFFEN JR.V. y SILVA, A.J.N., 2008, Solution of Inverse Radiative Transfer Problems in Two-Layer Participating Media with Differential Evolution, *EngOpt 2008 - International Conference on Engineering Optimization*, Rio de Janeiro, Brazil, 01 - 05 Junio.
- LOCKWOOD, F.C. Y SHAH, N.G., 1981, A new radiation solution method for incorporation in general combustion prediction procedures, 18th International Symposium on Combustion, The Combustion Institute, Pittsburgh, PA, pp. 1405–1414.

- MODEST, F.M., 2013, *Radiative Heat Transfer*, 3^{da} Edición, Academic Press.
- PRAHL, S.A.; VAN GEMERT, M.J.C. y WELCH, A.J., 1993, Determining the Optical Properties of Turbid Media Using the Adding - Doubling Method, *Applied Optics*, v. 32, pp. 559 – 568
- RIPOLL, J. et. al., 2001, Recovery of Optical Parameters in Multiple - Layered Diffusive Media: Theory and Experiments, *J Opt. Soc. Am.* v. 18, pp. 821 - 830.
Leerlo urgente
- ROUSSE, D.R., GAUTIER, G., SACADURA, J.F., 2000, Numerical predictions of two-dimensional conduction, convection and radiation heat transfer. II. Validation, *Internat. J. Thermal Sci.* 39. 332–353.
- SHANNON, C.E., 1948, A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Tech. J.*, v. 27, pp. 379 - 423.
- VARMA, R.S., 1966, Generalizations of Rényi Entropy of Order Alfa, *J. Math. Sci.* v. 1, pp. 34 - 48.
- WALKIL, N.E. y SACADURA, J.F., 1992, Some Improvements of the Discrete Ordinates Method for the Solution of the Radioactive Transport Equation in Multidimensional, Anisotropically Scattering Media, *Journal of Heat transfer*, v. 203, pp. 119 - 125.