UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Perfeccionamiento en equilibrio de Nash

TESIS

para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Edgar Mark Santiani Acosta

ASESOR

Ramón García-Cobián

Lima – Perú

2005

A mis padres

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar de manera muy especial mi más sincero agradecimiento, a mi asesor el Dr. Ramón García - Cobián, quien con su valiosa orientación y estímulo ha contribuido en forma sustancial en la elaboración exitosa de este trabajo.

RESUMEN

PERFECCIONAMIENTO EN EQUILIBRIO DE NASH

EDGAR MARK SANTIANI ACOSTA

NOVIEMBRE – 2005

Orientador: Dr. Ramón García- Cobián J.
Título Obtenido: Licenciado en Matemática.

En el presente trabajo se introducen formalmente los conceptos referidos a la Teoría de Juegos. Para el caso de juegos de n jugadores, se propone un análisis que da a conocer la necesidad de refinar el concepto de Equilibrio de Nash, y por ello, el objetivo planteado es obtener el refinamiento más estricto: el equilibrio regular. La necesidad de tal refinamiento induce a plantear refinamientos previos como son el equilibrio perfecto, propio y esencial, los cuales son desarrollados, además de establecerse las relaciones existentes entre ellos.
Por otra parte, se presenta un análisis sobre juegos matriciales y bimatriciales. Adicionalmente a ello, se propone un problema de programación lineal, el cual permite establecer si un equilibrio es no dominado(consecuentemente perfecto) en estos tipos de juegos.

PALABRAS CLAVES: JUEGO
EQUILIBRIO
REFINAMIENTO
ESTRATEGIA
OPTIMIZACIÓN

ABSTRACT

IMPROVEMENT OF NASH EQUILIBRIA

EDGAR MARK SANTIANI ACOSTA

NOVIEMBRE – 2005

Orientador: Dr. Ramón García- Cobián J.
Título Obtenido: Licenciado en Matemática.

In the present study it were introduced formaly some concepts about Game Theory. In the case of games with n players, it is proposed an analysis that let us to know the necessity of improve the concept of Nash Equilibrium, and for that, the objective proposed was to obtain the most stringent refinement: the concept of regular equilibria. The necessity of that refinement induce to expound previous refinements such as the perfect, proper, and essential equilibria, which are developed. Even so, it were definid the relation ships among then.

In addition, it is presented an analysis about matrix and bimatrix games. Even more, it is proposed a linear programming problem, wich let us to stablish if an equilibria is not dominated (consequently perfect) in these kind games.

KEYWORDS: GAME
EQUILIBRIA
REFINEMENT
STRETEGUE
OPTIMIZATION

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El problema que presentan algunos equilibrios de Nash, en juegos finitos en forma normal, es que pueden resultar "inestables" bajo pequeñas perturbaciones en los datos del juego. Presentamos en este trabajo varios refinamientos del concepto de equilibrio de Nash, para este tipo de juegos.

El desarrollo del tema está dividido en dos partes:

En La PRIMERA PARTE, dividida en 5 capítulos, estudiamos los juegos finitos en forma normal para, "n" jugadores. En el capítulo 1, proveemos de una introducción general al concepto de juego finito en forma normal así como del concepto de equilibrio de Nash. En el capítulo 2. consideramos el **concepto de equilibrio perfecto.** Este concepto es estable para algunas pequeñas perturbaciones en el equilibrio estratégico. Se muestra que cada juego en forma normal posee al menos un equilibrio perfecto. También consideramos el concepto de equilibrio perfectamente estable, el cual es estable bajo pequeñas perturbaciones arbitrarias en el equilibrio estratégico. En el capítulo 3, consideramos el concepto de equilibrio propio y equilibrio débilmente propio, Ambos conceptos son refinamientos del concepto de equilibrio perfecto. Mostramos también que cada juego en forma normal posee al menos un equilibrio propio. En el capítulo 4, estudiamos el concepto de equilibrio esencial. Este equilibrio se mantiene estable bajo pequeñas modificaciones arbitrarias en los pagos del juego, y mostramos que cada equilibrio esencial es estrictamente perfecto. En el capítulo 5, introducimos el concepto de equilibrio regular, él más estricto. de los refinamientos. En todos estos refinamientos, además, se establecen las relaciones existentes entre ellos.

La SEGUNDA PARTE, está dividida en dos capítulos, estudiamos Juegos matriciales y bimatriciales, es decir juegos en forma normal para 2 jugadores. En el capítulo 6, introducimos la notación y terminología que usamos en este tipo de juegos. En el capítulo 7, estudiamos los equilibrios perfectos en estos juegos, es decir lo estudiado en el segundo capítulo, pero para i = 2, entre los principales, resultados tenemos que en un juego matricial un equilibrio es perfecto si y sólo si es no dominado. Además podemos verificar si un equilibrio de un juego matricial es perfecto resolviendo un problema de, programación lineal.

PRIMERA PARTE

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE TEORIA DE JUEGOS

Un *juego finito n-personal en forma normal* es una 2n-upla Ã = (Ô$_1$,..... ,Ô$_n$, R_1, ..., R_n), donde Φ_i es un conjunto finito no vacío y $R_i : \prod_{j=1}^{n} \Phi_j \rightarrow \mathbb{R}$; para i $\in \{1,...n\}$. El conjunto Φ_i es el conjunto de *estrategias puras* (elecciones) del jugador i y R_i es la *función de pago* de este jugador.

Usualmente hablaremos de juego en forma normal en vez de un juego finito en forma normal. Ahora introduciremos la terminología que usaremos en adelante:

R denota el conjunto de números reales y $\mathbb{R}^m$ es el espacio euclidiano m-dimensional. Para x, y $\in \mathbb{R}^m$, escribimos x $\leq$ y, si $x_i \leq y_i$, para todo i. además x < y, significa $x_i < y_i$ para todo i. escribimos como $\mathbb{R}^m_+$ al conjunto de todos los x $\in \mathbb{R}^m$ el cual satisface 0 $\leq$ x; y denotamos con $\mathbb{R}^m_{++}$ al conjunto de todos los x $\in \mathbb{R}^m$ para el cual 0 < x.

El conjunto de funciones de A a B es denotado por F(A, B). Si f $\in$ F($\mathbb{R}^m_{++}$,$\mathbb{R}^l$), entonces "y es punto límite de una sucesión $\{f(x)\}_{x \downarrow 0}$" es usar la abreviación para "existe una sucesión $\{x(t)\}_{t \in N}$ tal que x(t) converge a 0 y $f(x_t)$ converge a y cuando t tiende a infinito".

Si A es un subconjunto de algún Espacio Euclidiano, 2^A denota el conjunto potencia de A. Sea A y B dos subconjuntos de algún Espacio Euclidiano, una correspondencia de A a B es un elemento de F(A, 2^B). La correspondencia F de A a B es llamada *superiormente semi-continua* si tiene su gráfico cerrado.

El número de elementos de un conjunto finito A es denotado por |A|. Si A es finito y f$\in$ F(A, $\mathbb{R}$) entonces: f(A) := $\sum_{a \in A} f(a)$.

Sea Ã = (Ô$_1$,..... ,Ô$_n$, R_1, ...,R_n) fijado. Escribiremos:

m_i : = $|\Phi_i|$ (número de elementos del conjunto Φ_i)

$$m := \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad\qquad m^* := \prod_{i=1}^{n} m_i \qquad (1.1)$$

Denotaremos con j_i a un elemento genérico de Φ_i. Como Φ_i es finito, sus elementos son numerables y consecuentemente hablaremos acerca de la k-ésima estrategia pura. Por tanto más a menudo un elemento genérico de Φ_i, lo denotaremos también por k. Una *estrategia mixta* "s_i" del jugador i es una distribución probabilística sobre Φ_i. Denotamos la probabilidad que asigna "s_i" a la estrategia pura k del jugador i por s_i^k y escribimos "S_i" para el conjunto de todas las estrategias mixtas de este jugador. De aquí:

$$S_i := \{\, s_i \in \mathsf{F}(\Phi_i ,, \square);\ \sum_k s_i^k = 1,\ s_i^k \geq 0,\ \forall\, k \in \Phi_i \,\} \qquad (1.2)$$

Donde $\mathsf{F}(\Phi_i, \square)$ es el conjunto de todas las funciones de Φ_i a $\square$. Si $s_i \in S_i$, entonces $C(s_i)$ denota el "soporte" de s_i, es decir

$$C(s_i) := \{k \in \Phi_i\,;\ s_i^k > 0\} \qquad (1.3)$$

"s_i" es llamada *completamente mixta* si $C(s_i) = \Phi_i$. La estrategia pura k del jugador i es identificada con la estrategia mixta que asigna probabilidad 1 a k. Nosotros definimos los conjuntos Φ y S por:

$$\Phi := \prod_{i=1}^{n} \Phi_i \quad \text{y} \quad S := \prod_{i=1}^{n} S_i \qquad (1.4)$$

Φ (respectivamente S) es el conjunto de "combinaciones estratégicas puras (respectivamente mixtas) de Ã. Un elemento de Φ (respectivamente de "S") es denotado por j (respectivamente "s"). En un juego en forma normal, los jugadores hacen sus elecciones independientemente de cada uno de los otros, por lo tanto, la probabilidad, $s(j)$, de que $j = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ocurra si $s = (s_1, s_2, \ldots s_n)$ es jugado, es dado por:

$$s(j) := \prod_{i=1}^{n} s_i^{k_i} \qquad (1.5)$$

El *soporte de s*, el cual es denotado por C(s), es definido por

$$C(s) := \{\, j\,;\ s(j) > 0\} \qquad (1.6)$$

y resulta ser igual a $\prod_{i=1}^{n} C(s_i)$, y s es llamada *completamente mixta* si C(s)= Φ.

Si "s" es jugado, el pago esperado $R_i(s)$ para el jugador "i" es dada por:

$$R_i(s) := \sum_j s(j).R_i(j) \text{ [1]} \qquad \text{. .. …(1.7)}$$

Sea $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$ y sea $\overline{s_i} \in S_i$. Denotamos $s|\overline{s_i}$ a la combinación estratégica que resulta de s al reemplazar la estrategia la estrategia s_i del jugador i por la estrategia $\overline{s_i}$ de este jugador. Así, $s|\overline{s_i}$ es la combinación estratégica $(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, \overline{s_i}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$. Decimos que $\overline{s_i}$ es una *respuesta óptima* del jugador i a s, si

$$R_i(s|\overline{s_i}) = \max_{s_i' \in S_i} R_i(s|s_i') \qquad \text{……….(1.8)}$$

El conjunto de todas las "respuestas óptimas puras" del jugador i a s (i.e. la respuesta óptima del jugador i que está en Φ_i) es denotada por $B_i(s)$, de aquí:

$$B_i(s) := \{k \in \Phi_i \ ; R_i(s|k) = \max_{s_i' \in S_i} R_i(s|s_i') \} \qquad \text{…….(1.8.1)}$$

<u>TEOREMA 1.1</u>

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. $\overline{s_i}$ es respuesta óptima a s. . ….. (1.9)

ii. $\forall k(\exists l(R_i(s \mid k) < R_i(s \mid l)) \Rightarrow \overline{s_i^k} = 0)$ …….. (1.10)

iii. $C(\overline{s_i}) \subset B_i(s)$ ……. (1.11)

Prueba.

(i)$\Rightarrow$**(ii)** Sea $\overline{s_i}$ respuesta óptima a S y además sea un $k \in \Phi_i$ tal que $\exists\, l \in \Phi_i$, $R_i(s|k) < R_i(s|l)$ (k es una estrategia pura del jugador "i" a la cual

---

[1] Hay un abuso de notación al denotar R_i a este pago esperado pero el contexto ayudara.

la estrategia pura l supera en pago). Debemos probar que $\bar{s}_i$ = 0 (la probabilidad que asigna $\bar{s}_i$ a k es cero).

Supongamos que $\bar{s}_i$ > 0 (H. A.)

Definimos:

$$ {}_{i}^{h} := \begin{cases} 0 \quad , & \text{si} \quad h = k \\ \bar{s}_i^{\,k} + \bar{s}_i^{\,l}, & \text{si} \quad h = l \\ \bar{s}_i^{\,h} \quad , & \text{si} \quad h \neq k, l \end{cases} $$

Probaremos que con $_i$ se obtiene para el jugador i un pago mayor que con $\bar{s}_i$, lo cual contradice la hipótesis de que $\bar{s}_i$ es respuesta óptima a "s".

Sea $A_1 := \{ \boldsymbol{j} \in \Phi : \boldsymbol{j}_i = k \}$, $A_2 = \{ \boldsymbol{j} \in \Phi : \boldsymbol{j}_i = l \}$ y $A := A_1 \cup A_2$ (unión disjunta).

Por hipótesis $R_i(s|k) < R_i(s|l)$ ....(P_1)

Por definición (1.7) tenemos:

$$R_i(s|k) = \sum_{j} (s \mid k)(\boldsymbol{j}) R_i(\boldsymbol{j}) \qquad \text{..........(*)}$$

Donde (s|k) es la distribución probabilística en la cual su i-ésima componente es la estrategia mixta denotada por k que asigna a k una probabilidad 1. y a cualquier $\boldsymbol{j}_i \neq$ k, (s|k) le asigna probabilidad cero. Así , la expresión (*) quedará de la siguiente forma:

$$\sum_{j \in A_1} (s \mid k)(\boldsymbol{j}) R_i(\boldsymbol{j}) \qquad \text{...........(**)}$$

Por la definición (1.5), (**) es expresado como:

$$\sum_{j \in A_1} \Big(\prod_{i=1}^{n} s_i^{j_i} \Big) . R_i(\boldsymbol{j})$$

lo cual es igual a:

$$\sum_{j \in A_1} \Big(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} s_j^{j_j} \Big) s_i^{j_i} . R_i(\boldsymbol{j}) \qquad \text{..........(***)}$$

Sin embargo al ser k la i-ésima componente de (s|k) y además j_i = k, pues $j \in A_1$, entonces $s_i^{j_i}$ = 1, con lo que (***) resulta:

$$R_i(s|k) = \sum_{j \in A_1} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} s_j^{j_j} \right) R_i(j),$$

De manera análoga obtenemos los siguientes resultados:

$$R_i(s|l) = \sum_{j} (s \mid l)(j) R_i(j) = \sum_{j \in A_2} (s \mid l)(j) R_i(j) = \sum_{j \in A_2} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} s_j^{j_j} \right) s_i^{j_i} \; R_i(j)$$

$$= \sum_{j \in A_2} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} s_j^{j_j} \right) R_i(j), \qquad \text{pues } s_i^{j_i} = 1.$$

De P_1 obtenemos:

$$\sum_{j \in A_1} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} s_j^{j_j} \right) R_i(j) \quad < \quad \sum_{j \in A_2} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} s_j^{j_j} \right) R_i(j) \qquad ....(P2)$$

Multiplicando (P2) por $\bar{s}_i^k$ (por H.A. $\bar{s}_i^k$ >0), obtenemos:

$$\sum_{j \in A_1} (s \mid \bar{s}_i)(j) R_i(j) \quad < \quad \sum_{j \in A_2} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} s_j^{j_j} \right) \bar{s}_i^k \; R_i(j) \qquad ..\ ......(P3)$$

pues en el lado izquierdo de la desigualdad, tenemos que j , varia en A_1, i.e. j_i = k (i-ésima componente es k), por lo tanto:

$$\sum_{j \in A_1} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} s_j^{j_j} \right) \bar{s}_i^k R_i(j) = \sum_{j \in A_1} (s \mid \bar{s}_i)(j) R_i(j)$$

donde $(s \mid \bar{s}_i)$ significa que la estrategia mixta del jugador i ahora es $\bar{s}_i$.

A ambos lados de la desigualdad (P3) sumamos:

$$\sum_{j \in A_2} (s \mid \bar{s}_i)(j) R_i(j)$$

y obtenemos:

$$\sum_{j\in A_1}(s\,|\,\bar{s}_i)(\boldsymbol{j})R_i(\boldsymbol{j}) + \sum_{j\in A_2}(s\,|\,\bar{s}_i)(\boldsymbol{j})R_i(\boldsymbol{j}) \;<\; \sum_{j\in A_2}\Big(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n} s_j^{j_j}\Big)\,\bar{s}_i^{k}\;\; R_i(\boldsymbol{j}) + \sum_{j\in A_2}(s\,|\,\bar{s}_i)(\boldsymbol{j})R_i(\boldsymbol{j})$$

..............(P4)

Como A = $A_1 \cup A_2$ (Unión disjunta), en el lado izquierdo de (P4) obtenemos:

$$\sum_{j\in A_1}(s\,|\,\bar{s}_i)(\boldsymbol{j})R_i(\boldsymbol{j}) + \sum_{j\in A_2}(s\,|\,\bar{s}_i)(\boldsymbol{j})R_i(\boldsymbol{j}) \quad = \quad \sum_{j\in A}(s\,|\,\bar{s}_i)(\boldsymbol{j})R_i(\boldsymbol{j})$$

y además por definición de A_2, tenemos que $\boldsymbol{j}_i = l$ si $\boldsymbol{j} \in A_2$

Con lo cual (P4) queda como sigue:

$$\sum_{j\in A}(s\,|\,\bar{s}_i)(\boldsymbol{j})R_i(\boldsymbol{j}) \;<\; \sum_{j\in A_2}\Big(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n} s_j^{j_j}\Big)\,\bar{s}_i^{k}\;\; R_i(\boldsymbol{j}) + \sum_{j\in A_2}(s\,|\,\bar{s}_i)(\boldsymbol{j})R_i(\boldsymbol{j}) \qquad ....(P5)$$

En el lado derecho de (P5) tenemos:

$$\sum_{j\in A_2}\Big(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n} s_j^{j_j}\Big)\,\bar{s}_i^{k}\;\; R_i(\boldsymbol{j}) + \sum_{j\in A_2}(s\,|\,\bar{s}_i)(\boldsymbol{j})R_i(\boldsymbol{j})$$

$$= \quad \sum_{j\in A_2}\Big(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n} s_j^{j_j}\Big)\,\bar{s}_i^{k}\;\; R_i(\boldsymbol{j}) + \sum_{j\in A_2}\Big(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n} s_j^{j_j}\Big)\,\bar{s}_i^{l}\;\; R_i(\boldsymbol{j})$$

$$= \quad \sum_{j\in A_2}\Big(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n} s_j^{j_j}\Big)\big(\bar{s}_i^{k} + \bar{s}_i^{l}\big)\,R_i(\boldsymbol{j})$$

$$= \quad \sum_{j\in A_2}\Big(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n} s_j^{j_j}\Big)\,.\quad {}_i^{l}\,.\,R_i(\boldsymbol{j})$$

esto último por la definición de $\;{}_i^{h}$.

$$= \quad \sum_{j\in A_2}(\mathrm{s}|\quad {}_{\mathrm{i}})(\boldsymbol{j})\,\mathrm{R_i}(\boldsymbol{j})\,.$$

Como $\boldsymbol{j}_i = l$ si $\boldsymbol{j} \in A_2$, y por la definición de A, si $\boldsymbol{j} \in$ A, $\boldsymbol{j}_{\mathrm{i}}$ solo puede ser *k* ó *l*, pero si $\boldsymbol{j}_{\mathrm{i}} = k$, $\;{}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}} = 0$, entonces tenemos:

$$= \quad \sum_{j\in A}(\mathrm{s}|\quad {}_{\mathrm{i}})(\boldsymbol{j})\,\mathrm{R_i}(\boldsymbol{j})\,.$$

Por lo tanto (P5) se convierte en:

$$\sum_{j\in A}(s\,|\,\overline{s_i})(j)R_i(j) \quad < \quad \sum_{j\in A}(s|\ \ _i)(j)\,R_i(j) \qquad .....(P6)$$

De la definición de $\ \ _i^h$, tenemos:

$$\sum_{j\in\Phi|A}(s\,|\,\overline{s_i})(j)R_i(j) \quad = \quad \sum_{j\in\Phi|A}(s|\ \ _i)(j)\,R_i(j) \quad ,$$

Por tanto sumando esto a ambos lados de la desigualdad (P6), obtenemos:

$$\sum_{j\in A}(s\,|\,\overline{s_i})(j)R_i(j) + \sum_{j\in\Phi|A}(s\,|\,\overline{s_i})(j)R_i(j) < \sum_{j\in A}(s|\ \ _i)(j)\,R_i(j) + \sum_{j\in\Phi|A}(s|\ \ _i)(j)\,R_i(j)$$

i.e. $$\sum_{j}(s\,|\,\overline{s_i})(j)R_i(j) \quad < \quad \sum_{j}(s|\ \ _i)(j)\,R_i(j)$$

i.e. $$R_i(s\,|\,\overline{s_i}) \quad < \quad R_i(s|\ \ _i)$$

$\therefore$ $\overline{s_i}$ no podría ser óptimo, al ser superado (en pago para el jugador i) por $\ \ _i$, lo cual contradice la hipótesis auxiliar.

$\therefore$ $\overline{s_i}^{\,k} = 0$

(ii) $\Rightarrow$(iii)

Tenemos por hipótesis:$\forall k(\exists l(R_i(s\,|\,k) < R_i(s\,|\,l)) \Rightarrow \overline{s_i^k} = 0)$. Debemos probar que si : $j_{\text{i}} \in C(\overline{s_i})$ entonces $j_{\text{i}} \in B_i(s)$.

Supongamos que: $j_{\text{i}} \notin B_i(s)$

entonces $\exists\, \overline{j_i} \in \Phi_i$, tal que $R_i(s|\overline{j_i}) > R_i(s|j_{\text{i}})$ ($\overline{j_i}$ supera en pago a j_{i}) ....(*)
En efecto: si no fuera así, no habría ninguna estrategia mixta que supere a j_i, ya que estas son combinaciones convexas de las puras,

Supongamos que $\forall\, \bar{j}_i \in \Phi_i$, $R_i(s|\bar{j}_i) \le R_i(s|j_i)$, entonces para toda combinación convexa s_i' de las $\bar{j}_i$, se tendría que: $R_i(s|\, s_i') \le R_i(s|j_i)$, lo que contradiría que $j_i \notin B_i(s)$

De (*) y por hipótesis (ii) implicaría que:

$$\bar{s}_i^{j_i} = 0$$

lo que contradice que $j_i \in C(\bar{s}_i)$.

$\therefore\quad j_i \in B_i(s)$.

(iii)$\Rightarrow$(i)

Primero veamos que:

$$R_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum_{j_i \in \Phi_i} R_i(s \mid j_i) s_i(j_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1.12)$$

En efecto:

Por (1.7), $\quad R_i(s) = \sum_{j} s(j) R_i(j)$

$$= \sum_{j_n \in \Phi_n} \cdots\cdots\cdots \sum_{j_1 \in \Phi_1} R_i(j_i, \ldots\ldots, j_n) s_1(j_1) \ldots s_n(j_n)$$

$$= \sum_{j_i \in \Phi_i} (R_i(s \mid j_i)) s_i(j_i),$$

lo que muestra la linealidad de cada argumento s_i, más aún, que es una combinación convexa de los $R_i(s \mid j_i)$.

Por hipótesis $C(\bar{s}_i) \subset B_i(s)$. DP $\bar{s}_i$ es respuesta óptima a s.
i.e. Si la estrategia mixta $\bar{s}_i$ es tal que todo elemento de su soporte, j_i, es respuesta óptima para s en estrategias puras, entonces s_i es respuesta óptima para s.

En efecto, si hubiera un $s_i' \in S_i$, mejor que $\bar{s}_i$, entonces se tendría que:

$$R_i(s|s_i') > R_i(s|\bar{s}_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Pero esto exige que haya alguna estrategia pura $j_i´ \in$ C(s$_i$´)/

$$R_i(s|j_i´) > R_i(s|\overline{j}_i),\ \exists \overline{j}_i \in C(\overline{s}_i) \qquad ......(**)$$

pues de nos ser así nos sería posible la desigualdad (*) ya que ambos miembros de esa desigualdad son combinaciones convexas de las $s_i´(j_i)$ y de las $\overline{s}_i(j_i)$ respectivamente. Pero la desigualdad (**) contradice la hipótesis que C($\overline{s}_i$) $\subset$ B$_i$(s).

$\therefore \overline{s}_i$ es respuesta óptima para s.

***Ejemplo 1**:* Mostraremos el caso de un juego con tres jugadores donde cada uno tiene dos estrategias puras. Sea I = {1,2,3}, Φ_1 ={a, b}; Φ_2 = {c, d}, Φ_3 = {e, f}, entonces:

$\Phi = \Phi_1 x \Phi_2 x \Phi_3$ = { j_1= (a, c, e), j_2 = (b, c, e), j_3 = (a, c, f), j_4 = (b, c, f), j_5 = (a, d, e), j_6 = (b, d, e), j_7 = (a, d, f), j_8 = (b, d, f)}

Por (1.7): $R_2(s) = s_1^a.s_2^c.s_3^e R_2(j_1) + s_1^b.s_2^c.s_3^e R_2(j_2) + s_1^a.s_2^c.s_3^f R_2(j_3) + s_1^b.s_2^c.s_3^f R_2(j_4)$
$+ s_1^a.s_2^d.s_3^e.R_2(j_5) + s_1^b.s_2^d.s_3^e.R_2(j_6) + s_1^a.s_2^d.s_3^f.R_2(j_7) + s_1^b.s_2^d.s_3^f R_2(j_8)$

Por (1.12); tenemos :

$$R_2(s) = \sum_{j_i \in \Phi_2} (R_2(s\,|\,j_i))s_2(j_i)$$

$$= R_2(s|c)\, s_2(c) + R_2(s|d)s_2(d)$$

$$= [s_1^a.c^c.s_3^e R_2(j_1) + s_1^b.c^c.s_3^e R_2(j_2) + s_1^a.c^c.s_3^f R_2(j_3) + s_1^b.c^c.s_3^f R_2(j_4)]\, s_2^c \ +$$
$$[s_1^a.d^d.s_3^e.R_2(j_5) + s_1^b.d^d.s_3^e.R_2(j_6) + s_1^a.d^d.s_3^f.R_2(j_7) + s_1^b.d^d.s_3^f R_2(j_8)]\, s_2^d$$

Con lo cual queda la igualdad.

A partir del teorema 1.1, $\bar{s}_i$ es respuesta óptima del jugador *i* a *s* si y solo si, $\bar{s}_i$ asigna probabilidad positiva solo a las respuestas óptimas puras del jugador *i* a *s*.

Sea s, $\bar{s} \in$ S. Decimos que "$\bar{s}$ es una respuesta óptima a *s*" si $\bar{s}_i$ es una respuesta óptima acerca de *s* para todo *i*., y denotamos al conjunto de todas las respuestas óptimas puras a *s* por B(*s*), de aquí:

$$B(s) = \prod_{i=1}^{n} B_i(s) \qquad ....(1.13)$$

Una combinación estratégica es un *EQUILIBRIO DE NASH* de Ã, si "*s*" es una respuesta óptima a si mismo. Se sigue de (1.1), (1.6) y (1.13) que "*s*" es un Equilibrio de Nash si y solo si:

$$C(s) \subset B(s) \qquad …….(1.14)$$

Usualmente hablaremos de *equilibrio,* en vez de *equilibrio de Nash*. Denotamos al conjunto de equilibrios de Ã por Ã(E). Nash muestra que cada juego finito en forma normal posee al menos un equilibrio.

<u>TEOREMA 1.2:</u> (Teorema de Nash)

Todo juego finito en forma normal posee al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Prueba:

Ver [5]

La ecuación (1.14) muestra que en un equilibrio cada jugador usa sólo sus respuestas óptimas. Un refinamiento del concepto de equilibrio de Nash, es el llamado *equilibrio cuasi-estricto.*

<u>DEFINICIÓN 1.3</u>

Decimos que una combinación estratégica es un equilibrio *cuasi estricto* si satisface:

$$C(s) = B(s)$$

i.e. el conjunto de estrategias óptimas a s es igual que su soporte.

Ejemplo 2: Veamos el siguiente juego:

	1	2
1	1 ; 1	1 ; 0
2	1 ; 1	0 ; 0

Las filas representan las elecciones del jugador 1, las columnas las del jugador 2. En cada celda la entrada superior izquierda es el pago del jugador 1, mientras que la entrada inferior derecha es el pago del jugador 2.

El conjunto de equilibrios es Ã(E) = {$(s_1, 1)$; $s_1 \in S_1$, en efecto:

Debemos probar que $C(s) \subset B(s)$, $\forall\, s = (s_1, 1)$; donde: $C(s) = C(s_1) x \{1\}$ y $B(s) = B_1(s) x B_2(s)$, entonces debemos probar que: $C(s_1) \subset B_1(s) \wedge \{1\} \subset B_2(s)$.

Si $k \in B_1(s)$ entonces:

$$R_1(s|k) \geq R_1(s|s_1) \quad \forall s_1 \in S_1$$
$$\text{i.e} \quad R_1(k,1) \geq R_1(s_1,1) \quad \forall s_1 \in S_1 \ , k = 1,2$$

$$R_1(s_1,1) = s_1^1.1^1.R_1(1,1) + s_1^2.1^1.R_1(2,1) = s_1^1 + s_1^2 = 1.$$

Tendríamos que si $k \in B_1(s)$, entonces:

$$R_1(k,1) \geq 1.$$

$$\therefore \quad B_1(s) = \{1,2\} = \Phi_1$$

$$\therefore \ C(s_1) \subset B_1(s) = \Phi_1$$

También: si $k \in B_2(s)$ entonces:

$$R_2(s_1,k) \geq R_2(s_1,s_2); \quad \forall s_2 \in S_2 \qquad \ldots\ldots\ldots.(*)$$

Si k = 1:

$$R_2(s_1,1) = s_1^1.1^1.R_2(1,1) + s_1^2.1^1.R_2(2,1) = s_1^1 + s_1^2 = 1 \quad \ldots.. (i)$$

$$R_2(s_1,s_2) = s_1^1.s_2^1.R_2(1,1) + s_1^1.s_2^2.R_2(1,2) + s_1^2.s_2^1.R_2(2,1) + s_1^2.s_2^2.R_2(2,2)$$
$$= (s_1^1 + s_1^2).s_2^1 = s_2^1 \quad \ldots\ldots..(ii)$$

Reemplazando (i) y (ii) en (*):

$$1 \geq s_2^1$$

$\therefore$ {1} $\subset$ B_2(s), más aún B_2(s) = {1}, pues si k = 2, $R_2(s_1,2) = 0$ y no satisface (*)

$$\therefore C(s) \subset B(s), \text{ donde } s = (s_1, 1), \quad \forall\ s_1 \in S_1.$$

Si $s_1 \neq$ 1,2, entonces B_1(s) $\subset$ C(s_1); por lo tanto (s_1, 1) es equilibrio cuasi estricto..

Si s_1 = 1ó 2, tenemos: $s_1 = 1 \Rightarrow C(s_1) = \{1\} \not\subset B_1(s)$

$$s_1 = 2 \Rightarrow C(s_1) = \{2\} \not\subset B_1(s)$$

Si s_1 = 1 ó 2, (s_1,1) no es cuasi es cuasi estricto.

DEFINICIÓN 1.4

Definimos un *equilibrio estricto* como una combinación estratégica ***s*** la cual es la única respuesta óptima acerca de si mismo i.e.

Sea $\Psi : S \to\to S$ (correspondencia)
$s \mapsto \Psi(s)$:= {s$\in$S; s es respuesta óptima a s}

Decimos que s es un equilibrio estricto si $\Psi(s) = \{s\}$

De aquí un equilibrio estricto es un equilibrio cuasi estricto en estrategias puras pues para $j \in \Phi$, C(j) = { j }.

Sea $J(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, el conjunto de todos los juegos $\tilde{A} = (\Phi_1, \ldots \Phi_n, R_1, \ldots, R_n)$ con espacios de estrategias puras $\Phi_1, \ldots \Phi_n$. Si $\tilde{A} \in J(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, denotamos con r_i al vector de pagos del jugador i asociado con sus estrategias puras i.e.

$$r_i := \langle R(j) \rangle_{j \in \Phi} \qquad \text{........(1.15)}$$

donde $r_i \in R^{m^*}$. Llamaremos a r_i el *vector pago del jugador i* en $\tilde{A}$. El vector pago del juego $\tilde{A}$ es el vector:

$$r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^{n.m^*} \qquad \ldots\ldots(1.16)$$

Imponiendo un orden fijado en Φ, obtenemos una correspondencia 1 a 1 entre $J(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ y $R^{n.m^*}$.

Denotamos con al juego $\tilde{A} \in J(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ al cual le corresponde $r \in R^{n.m^*}$ por $\tilde{A}(r)$. Así $J(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ puede verse como un espacio euclidiano $n.m^*$- dimensional, y podemos hablar de distancia euclidiana $d(\tilde{A}, \tilde{A}')$ entre dos juegos y de medida Lebesgue de un conjunto de juegos.

Sea L una afirmación acerca de juegos en forma normal. Decimos que L es verdadero para casi todo juego si para cualquier $n \in N$, y cualquier n-upla de conjuntos finitos no vacíos $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, tenemos que:

$$l\,(\mathrm{cl}\{\tilde{A} \in J(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)\ ;\ L \text{ es falso}\} = 0$$

i.e. si la clausura de el conjunto de juegos para el cual L es falso tiene medida Lesbesgue cero.

Observamos que si L es verdadero para casi todo juego, entonces para cualquier n-upla $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, el conjuntos de juegos en $J(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, para el cual L es verdadero contiene un abierto y casi en todas partes conjunto denso (y de aquí el subconjunto para el cual L es falso es en ninguna parte denso).

Un juego *infinito* en *forma normal,* es una 2n-upla $G = (S_1, \ldots, S_n, R_1, \ldots, R_n)$ donde S_i es un conjunto infinito y R_i es una función de S a R $\forall\ i \in N$, donde $S := \prod_{i=1}^{n} Si$. Sólo trataremos con juegos infinitos cóncavos, i.e. juegos infinitos que satisfacen las condiciones del teorema que a continuación se enuncia, en el cual Rosen prueba la generalización del teorema de existencia de equilibrios de Nash.

<u>TEOREMA 1.3</u> (Teorema de Rosen)

Sea G = (S_1, ..., S_n, R_1, ..., R_n), un juego infinito de n jugadores tal que las 3 condiciones siguientes son satisfechas para cada $i \in N$.

i. Si es un conjunto no vacío, compacto y convexo, subconjunto de algún espacio Euclidiano finito dimensional.
ii. La función R_i es continua.
iii. Para $s \in S$ fijo, la función $H : S_i \rightarrow R$

$$\overline{s_1} \mapsto R_i(s|\ \overline{s_i}) \text{ es cóncava.}$$

Entonces G poses al menos un equilibrio.

Prueba:

CAPÍTULO 2

EQUILIBRIO PERFECTO:

Ejemplo 1: veamos el siguiente juego:

	L_2	R_2
L_1	1, 1	0, 0
R_1	0, 0	0, 0

Figura 2.1

La figura 2.1 muestra un juego bi-personal en el que en cada celda la entrada superior izquierda es el pago del jugador 1 y la entrada inferior derecha es el pago del jugador 2. $\Phi_1 = \{L_1, R_1)$, $\Phi_2 = \{L_2, R_2\}$

El juego tiene 2 equilibrios: las combinaciones estratégicas (L_1, L_2) y (R_1, R_2). Sin embargo este último no es creíble, a pesar de satisfacer la condición de equilibrio de Nash (Ninguno mejora su pago cambiando la estrategia unilateralmente), puesto que reciben un pago inferior que con (L_1, L_2); como en la presente monografía estamos trabajando sólo con juegos *NO-COOPERATIVOS*, i.e. juegos en el cual no hay posibilidad a comunicación ó compromisos excepto para los cuales explícitamente las reglas lo admiten; entonces no podrían los jugadores acordar jugar (L_1, L_2).

Es por eso que para obtener soluciones creíbles para cada juego el concepto de equilibrio tiene que ser refinado. Dicho refinamiento será el concepto de *Equilibrio Perfecto*.

La idea de "perfección" es que cada jugador tenga la posibilidad de equivocarse con pequeñas probabilidades, consecuentemente cada estrategia pura es elegida con probabilidad positiva. Modelamos la idea vía *JUEGOS PERTURBADOS*, i.e juegos en los cuales cada jugador tiene permitido usar solo estrategias completamente mixtas.

DEFINICIÓN 2.1

Sea Ã = $(\Phi_1,...,\Phi_n, R_1,......,R_n)$ un juego n-personal en forma normal. Para i$\in$N, sean h_i y $S_i(h_i)$ definidas por:

$$h_i \in F(\Phi_i, \Re), \quad \text{con } h_i^k > 0 \qquad \forall k \in \Phi_i \text{ y } \sum_k h_i^k < 1 \qquad \text{....(2.1)}$$

$$S_i(h_i) := \{s_i \in S_i; \; s_i^k \ge h_i^k, \forall k \in \Phi_i\} \qquad \text{.......(2.2)}$$

Sea $h = (h_1,.....h_n)$ y $S(h) = \prod_{i=1}^{n} S_i(h_i)$. El *JUEGO PERTURBADO* (Ã, h) es el juego infinito en forma normal ($S_1(h_1)$,......$S_n(h_n)$, R_1,....R_n).

Veamos que el juego (Ã, h) satisface las condiciones del teorema 1.3, y así tal juego posee al menos un equilibrio de Nash.

i. El conjunto $S_i(h_i)$ es no vacío, compacto y convexo, subconjunto de algún espacio finito dimensional, en efecto:

- Veamos que $S_i(h_i)$ es subespacio de un espacio finito dimensional. En efecto:

  $S_i(h_i) \subset S_i \subset \Re^{m_i}$, donde $m_i := |\Phi_i|$

- Veamos que es no vacío. En efecto:

  Dado $h_i \in F(\Phi_i, \Re)$ con $h_i^k > 0$, $\forall k \in \Phi_i$ y $\sum_k h_i^k < 1$

$$\therefore \quad 1 - \sum_k h_i^k > 0$$

Definimos: $s_i \in F(\Phi_i, \Re)$ tal que

$$s_i^k = h_i^k \ge 0 \qquad \forall k \in \Phi_i \setminus \{\bar{k}\} \qquad \text{.......(*)}$$

$$\text{y} \qquad s_i^{\bar{k}} = 1 - \sum_{k \in \Phi - \{\bar{k}\}} h_i^k \ge 0$$

$$\text{Entonces: } \sum_k s_i^k = \sum_{k \in \Phi_i - \{\bar{k}\}} s_i^k + s_i^{\bar{k}}$$

$$= \sum_{k \in \Phi_i - \{\bar{k}\}} s_i^k + 1 - \sum_{k \in \Phi - \{\bar{k}\}} h_i^k \quad \text{(por (*))}$$

$= \quad 1$

Además como $\sum_k h_i^k < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k\in \Phi_i - \{\bar{k}\}_i} h_i^k + h_i^{\bar{k}} < 1$

$$\Rightarrow \quad h_i^{\bar{k}} < 1 - \sum_{k\in \Phi_i - \{\bar{k}\}} h_i^{\bar{k}}$$

$$\Rightarrow \quad h_i^{\bar{k}} < s_i^{\bar{k}} \qquad ....(**)$$

De (*) y (**) tenemos: $s_i^k \geq h_i^k, \ \forall k \in \Phi_i$

$$\therefore \quad s_i \in S_i(h_i)$$

- Veamos que $S_i(h_i)$ es cerrado. En efecto:

  Sea $(s_i^m) \subset$ S$_i(h_i)$, tal que:

  $$s_i^m \to s \quad \Rightarrow \quad (s_i^m)(k) \to (s)(k) \quad \forall k \in \Phi_i$$

  De $(s_i^m) \subset$ S$_i(h_i)$, tenemos $\forall k \in \Phi_i$: $(s_i^m)(k) \geq h_i^k$

  $$\Rightarrow \quad (s)(k) \geq h_i^k$$

  Por lo tanto $s(k) \in$ S$_i(h_i)$

  $$\therefore \ S_i(h_i) \text{ es cerrado.}$$

- Veamos que S$_i(h_i)$ es acotado. En efecto:

  Sea $s_i \in$ S$_i(h_i) \ \Rightarrow \ \|s_i\| = \sum_{j=1}^{m_i} |s_i^j| = \sum_{j=1}^{m_i} s_i^j = 1$

  $$\therefore \ S_i(h_i) \text{ es acotado}$$

$\therefore$ S$_i(h_i)$ es compacto.

- Veamos que es convexo. En efecto:

  Sea s_i y $\bar{s_i} \in$ S$_i(h_i)$, entonces:

  $$s_i^k \geq h_i^k$$

$$\forall k \in \Phi_i$$

$$\overline{s_i^k} \geq h_i^k$$

Sea $a \in [0, 1] \Rightarrow 1 - a \geq 0$. Entonces:

$$a \,.\, s_i^k \geq a \,.\, h_i^k \qquad .....(*)$$

$$(1-a).\overline{s_i^k} \geq (1-a)h_i^k \qquad ......(**)$$

De (*) y (**):

$$a \,.\, s_i^k + (1-a).\overline{s_i^k} \geq a \,.\, h_i^k + (1-a)h_i^k = h_i^k$$

$$\therefore \; a \,.\, s_i^k + (1-a).\overline{s_i^k} \in S_i(h_i)$$

$\therefore$ $S_i(h_i)$ es convexo

ii. La función R_i es continua, en efecto:

$$R_i : \prod_{i=1}^{n} S_i(h_i) \rightarrow \Re$$

$$s \mapsto R_i(s) = \sum_{j_i \in \Phi_i} (R_i(s \mid j_i))S_i(j_i)$$

i.e. $R_i(s) = R_i(s|j_i^1)S_i(j_i^1) + \ldots\ldots + R_i(s|j_i^{m_i})S_i(j_i^{m_i})$

$\therefore$ Es una combinación lineal de los $S_i(j_i)$

$\therefore$ Es continua, pues toda lineal es continua en espacios normados de dimensión finita, definiendo la norma de $\prod_{i=1}^{n} S_i(h_i)$ como :

$$s \in \prod_{i=1}^{n} S_i(h_i) \Rightarrow s = (s_1, s_2, \ldots., s_n)$$

$$\Rightarrow \|s\| = \|s_1\| + \ldots.. + \|s_n\|$$

$$\text{donde: } \|s_i\| = \sum_{j=1}^{m_i} | s_i^j |$$

iii. Para $s \in$ S fijo, la función: $H : S_i(h_i) \to \Re$

$$\bar{s}_i \mapsto R_i(s \mid \bar{s}_i) \text{ es cóncava.}$$

En efecto: decimos que una función f: $X \to \Re$ si X es convexo y $\forall\, x,y \in X$, y $\boldsymbol{a} \in [0, 1]$ entonces:

$$f(\boldsymbol{a}x + (1-\boldsymbol{a})y) \geq \boldsymbol{a}f(x) + (1-\boldsymbol{a})f(y)$$

Tenemos que $S_i(h_i)$ es convexo, entonces :

Sean s_i y $\bar{s}_i \in S_i(h_i)$ y $\boldsymbol{a} \in [0, 1]$:

$H(\boldsymbol{a}s_i + (1-\boldsymbol{a})\bar{s}_i) =$

$$= R_i(s \mid (\boldsymbol{a}s_i + (1-\boldsymbol{a})\bar{s}_i)$$

$$= \sum_{j_i \in \Phi_i} (s \mid \boldsymbol{j})\,[\boldsymbol{a}s_i + (1-\boldsymbol{a})\bar{s}_i](\boldsymbol{j}_i)$$

$$= R_i(s|\boldsymbol{j}_i^1)[\boldsymbol{a}s_i + (1-\boldsymbol{a})\bar{s}_i](\boldsymbol{j}_i^1) + \ldots + (1-\boldsymbol{a})R_i(s|\boldsymbol{j}_i^{m_i})\,[\boldsymbol{a}s_i + (1-\boldsymbol{a})\bar{s}_i](\boldsymbol{j}_i^{m_i})$$

$$= \boldsymbol{a}R_i(s|\boldsymbol{j}_i^1)s_i(\boldsymbol{j}_i^1) + \ldots + \boldsymbol{a}R_i(s|\boldsymbol{j}_i^{m_i})\bar{s}_i(\boldsymbol{j}_i^{m_i}) + (1-\boldsymbol{a})R_i(s|\boldsymbol{j}_i^1)s_i(\boldsymbol{j}_i^1) + \ldots + (1-\boldsymbol{a})R_i(s|\boldsymbol{j}_i^{m_i})\bar{s}_i(\boldsymbol{j}_i^{m_i})$$

$$= \boldsymbol{a}[R_i(s|\boldsymbol{j}_i^1)s_i(\boldsymbol{j}_i^1) + \ldots + R_i(s|\boldsymbol{j}_i^{m_i})\bar{s}_i(\boldsymbol{j}_i^{m_i})] + (1-\boldsymbol{a})[R_i(s|\boldsymbol{j}_i^1)s_i(\boldsymbol{j}_i^1) + \ldots + R_i(s|\boldsymbol{j}_i^{m_i})\bar{s}_i(\boldsymbol{j}_i^{m_i})]$$

$$= \boldsymbol{a}\sum_{j_i \in \Phi_i} R_i(s \mid \boldsymbol{j}_i)s_i(\boldsymbol{j}_i) + (1-\boldsymbol{a})\sum_{j_i \in \Phi_i} R_i(s \mid \boldsymbol{j}_i)\bar{s}_i(\boldsymbol{j}_i)$$

$$= \boldsymbol{a}R_i(s|s_i) + (1-\boldsymbol{a})R_i(s|\bar{s}_i)$$

$$= \boldsymbol{a}H(s_i) + (1-\boldsymbol{a})H(\bar{s}_i)$$

$\therefore$ H es cóncava.

$\therefore$ (Ã, h) satisface las condiciones del teorema 1.3, por lo que posee al manos un equilibrio.

Es claro que en tal equilibrio una estrategia para la cual no es respuesta óptima es elegida con una mínima probabilidad. Por lo tanto se sigue de 1.10 el siguiente lema:

LEMA 2.2

Una combinación estratégica s $\in$ S(h) es un equilibrio de (Ã, h) si y solo si se satisface la siguiente condición:

$$\forall k[\exists l\{R_i(s \mid k) < R_i(s \mid l)\} \Rightarrow s_i^k = h_i^k\,] \ \forall i \qquad .....(2.3)$$

Prueba.

(⇒)

Sea *s* un equilibrio de (Γ, η); entonces, de modo equivalente, se tiene que para todo i, R_i $(s|s_i)$ = max {R_i $(s|s'_i)$: s'_i de S_i (η_i)}. Luego, si no se cumpliera la tesis, debería haber algún i y algún k tales que para cierto l, se tuviese que R_i $(s|k) < R_i$ $(s|l) \wedge s_i^k > \eta_i^k$. Pero esto ha de contradecir a lo dicho tres líneas arriba, ya que para eso basta con definir una s^*_i mediante:

$$s^{*h}_i := \begin{cases} s_i^h; & \text{si h no es ni k ni l;} \\ \eta_i^k; & \text{si h = k} \\ s_i^l + (s_i^k - \eta_i^k); & \text{si h = l.} \end{cases}$$

(⇐)

Inspirándose en las demostraciones de ii ⇒ iii y iii ⇒ i, del teorema 1.1, se establece: que para todo i y todo φ_i de Φ_i, si $s_i(\varphi_i) > \eta_i(\varphi_i)$, entonces:

$$R_i(s|\,\varphi_i) \geq R_i\,(s|s_i) \quad \forall\, s_i \in S_i$$

$$\therefore \qquad \varphi_i \in B_i\,(s).$$

Desde que s, que ya cumple con 2.3, ha de ser tal que $\forall$i, s_i tiene que ser respuesta óptima para s en $S_i(\eta_i)$.

$$\therefore \ s \in S(h) \text{ es un equilibrio de } (\tilde{A}, h)$$

La asunción de que puedan ocurrir errores solo con pequeñas probabilidades conduce a Selten a definir “Equilibrio Perfecto”, como un equilibrio obtenido como el punto límite de una sucesión de equilibrios de juegos perturbados en los cuales los errores tienen probabilidad que tiende a cero. De aquí, un equilibrio es perfecto si la estrategia de equilibrio de cada jugador no solo es respuesta óptima para las estrategias equilibrios, de sus oponentes , sino también para algunas débiles perturbaciones de estas estrategias.

<u>DEFINICIÓN 2.3</u>:

Sea Ã un juego en forma normal. Un equilibrio ***s*** de Ã es *equilibrio perfecto* de Ã si ***s*** es punto límite de una sucesión $\{s(h)\}_{h \downarrow 0}$ con $s(h) \in E(\tilde{A}, h)$ $\forall h$, i.e. ***s*** es perfecto si existen $\langle s(t) \rangle_{t \in \aleph}$ y $\langle h(t) \rangle_{t \in \aleph}$ con $s(t) \in E(\tilde{A}, h(t))$ $\forall t \in$ □ y tal que:

$$s = \lim_{t \to \infty} s(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \to \infty} h(t) = 0$$

Observamos de esta definición que, para que un equilibrio s de Ã sea perfecto, es suficiente que para alguna familia de juegos perturbado (Ã, h) con h aproximándose a cero posean equilibrios que tiendan a s (tomaríamos a s como punto límite de la sucesión constante igual al equilibrio de dicho juego perturbado)¸ por tanto no es requerimiento que todo juego perturbado (Ã, h) con h aproximándose a cero, posea a tal equilibrio.

$\therefore$ El requerimiento de que un equilibrio sea perfecto es un débil requerimiento y consecuentemente si un equilibrio falla al ser perfecto, éste es muy inestable.

<u>TEOREMA 2.4</u>

Cada juego en forma normal posee al menos un equilibrio perfecto.

Prueba:

En efecto, sea $\{(\tilde{A},\ h(t))\}_{t\in\aleph}$ una sucesión de juegos perturbados para el cual $h(t)$ converge a cero cuando t tiende a infinito. Desde que cada $(\tilde{A},\ h(t))$ posee al menos un equilibrio s(t), que es un elemento del conjunto compacto S, se sigue que $\exists s \in S$ / $s = \lim_{t\to\infty} s(t)$ ($\exists$una sub sucesión de $\langle s(t)\rangle$ que puede denotarse también por $\langle s(t)\rangle$) y $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$; donde $s(t) \in E(\tilde{A},\ h(t))$

$\therefore$ s es equilibrio perfecto.

Ejemplo 2. Consideremos una pequeña modificación al juego de la figura 2.1(ejemplo 1), ilustrada a continuación.

	L_2	R_2
L_1	1 1	0 0
R_1	0 0.1	0 0

Figura 2.2

$(R_1,\ R_2)$ era equilibrio en el juego de la figura 2.1, sin embargo , $(R_1,\ R_2)$ ya no es equilibrio, por tanto no es equilibrio perfecto. El único equilibrio perfecto es $(L_1,\ L_2)$.

Ejemplo 3. Sea el juego de las monedas coincidentes:

Es un juego de dos jugadores. El primer jugador elige cara (C) o sello (S) de una moneda. El segundo jugador sin saber lo que eligió el primero, debe elegir también entre “C” o “S”, de tal manera que si logra coincidir con el primero su pago es de 1 y del primero de –1, si no logra coincidir, su pago es de –1 y del primero de 1.

	C	S
C	-1 / 1	1 / -1
S	1 / -1	-1 / 1

Es claro que no hay equilibrios de Nash en estrategias puras (por ejemplo si los jugadores eligen (C, C), el primer jugador quisiera cambiar su estrategia a "S"; pero que sí hay uno en mixtas, a saber, el *s** := ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2)), en efecto:

Debemos probar que: $C(s^*) \subset B(s^*)$, i.e. $C(s_i^*) \subset B_i(s^*)$, para i = 1,2

Si i = 1, tenemos: C, S $\in C(s_1^*)$ (a cada uno le asigna una probabilidad de ½), debemos probar que C, S $\in B_1(s^*)$. Es decir:

$$R_1(k, s_2) \geq R_1(s_1, s_2) \ \forall s_1, \ k = C, S \qquad \text{(I)}$$

$$R_1(s_1, s_2) = s_1^C s_2^C R_1(C,C) + s_1^C s_2^S R_1(C,S) + s_1^S s_2^C R_1(S,C) + s_1^S s_2^S R_1(S,S)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(1) = 0$$

Si k = C :

$$R_1(C, s_2) = C^C s_2^C R_1(C,C) + C^C s_2^S R_1(C,S)$$

$$= 1.\frac{1}{2}(-1) + 1.\frac{1}{2}(1) = 0$$

$\therefore$ C satisface la desigualdad (I),

Análogamente S también lo satisface. De igual manera para el jugador 2.

$\therefore$ s* es un equilibrio en estrategias mixtas.

Ahora bien, este equilibrio es también perfecto, pues hay una sucesión que tiende a 0, la $\langle 1/k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$, y hay una sucesión de equilibrios de los juegos *G(k)*, la sucesión constante $\langle s^* \rangle$, que tiende a *s**.

Que *s** sea un equilibrio de Nash para el juego *G(k)* se ve del hecho de que en este juego, una respuesta óptima del jugador 1 a la estrategia mixta del

jugador 2: *(q, 1-q)* es dada por *p*((q, 1-q))* = $\begin{cases} 1, \; si \; q \leq 1/2 \\ -1, \; si \; q \geq 1/2 \end{cases}$; cualquiera que sea el valor del natural *k*; y similarmente para una respuesta óptima del jugador 2 a la estrategia mixta *(p, 1-p)* del jugador 1. En efecto, en tal caso, el problema del jugador 1 es el de
max (-p/2 + p/2 + (1-p)/2 –(1-p)/2) sujeto a *p Î [1/k, 1-1/k],* de donde se sigue lo antedicho.

Ejemplo4: Veamos el siguiente juego:

	L_2	R_2
L_1	1, 1	10, 0
R_1	0, 10	10, 10

Figura 2.4

El juego presenta dos equilibrios (L_1, L_2) y (R_1, R_2). El equilibrio (R_1, R_2) produce a ambos un pago de 10, sin embargo este no es perfecto, desde que los errores esperados de cada jugador ocurren con pequeña probabilidad, por lo que ellos no pueden realmente esperar un pago de 10, solo obtienen ganancia jugando L. El único equilibrio perfecto es (L_1, L_2) aun cuando es superado en pago por (R_1, R_2).

<u>DEFINICIÓN 2.5</u>

Sea Ã = $(\Phi_1,.....,\Phi_n, R_1,.....,R_n)$ un juego en forma normal y sea e>0. Una combinación estratégica $s \in$ S es un "*e-equilibrio perfecto*" de Ã si este es completamente mixta y satisface:

$$\forall k[\exists l\{R_i(s \mid k) < R_i(s \mid l)\} \Rightarrow s_i^k \leq e\,] \;\forall i \qquad ....(2.4)$$

Un e- equilibrio perfecto de Ã no necesariamente es un equilibrio de Ã, sin embargo, si e es pequeño, entonces un e- equilibrio se aproxima a un equilibrio. Un e-equilibrio es otra manera de modelar la idea que jugadores racionales cometan errores (eligen estrategias no óptimas); solo con pequeñas probabilidades (una probabilidad a lo sumo de e) y por tanto uno espera que un equilibrio sea perfecto si y solo si este es punto límite de un e-equilibrio perfecto.

<u>TEOREMA 2.6</u>

Sea Ã = $(\Phi_1,......,\Phi_n, R_1,.....,R_n)$ un juego n-personal en forma normal y sea s$\in$S. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. s es un equilibrio perfecto de Ã.

ii. s es un punto límite de una sucesión $\{s(e)\}_{e \downarrow 0}$, donde s($e$) es un e-equilibrio perfecto de Ã, $\forall e$ y

iii. s es un punto límite de una sucesión $\{s(e)\}_{e \downarrow 0}$ de combinaciones estratégicas completamente mixtas con la propiedad que s es una respuesta óptima acerca de cada elemento s(e) de la sucesión.

Prueba.

i) $\rightarrow$ ii)

Supongamos que s es un equilibrio perfecto de Ã. Entonces $\exists\{s(h)\}$ con s(h)$\in$ E(Ã, h)$\forall h$ / s = $\lim\limits_{h \downarrow 0} s(h)$

Definimos:

$$e(h) := \max_{i,k} h_i^k > 0$$

Como s(h)$\in$ E(Ã,h) $\forall h$ entonces de (2.3) tenemos:

$$\forall k[\exists l / \{R_i(s(h) \mid k) < R_i(s(h) \mid l)\} \Rightarrow s_i^k(h) = h_i^k] \qquad \forall i$$

$$\Rightarrow s_i^k(h) \leq \max_{i,k} h_i^k = e(h)$$

$$\forall k[\exists l / \{R_i(s(h) \mid k) < R_i(s(h) \mid l)\} \Rightarrow s_i^k(h) \leq e(h)] \qquad \forall i$$

Además $s(h)$ es completamente mixta.

$\therefore$ $s(h)$ es un $e(h)$- equilibrio perfecto de Γ, $\forall h$

$\therefore$ $s = \lim\limits_{e \downarrow 0} s(e)$ donde $s(e)$ es un equilibrio perfecto $\forall e$

ii)$\rightarrow$iii)

Supongamos que $s = \lim_{e\downarrow 0} s(\boldsymbol{e})$ donde $s(\boldsymbol{e})$ es un $\boldsymbol{e}$-equilibrio perfecto.

Como $\quad s = \lim_{e\downarrow 0} s(\boldsymbol{e}) \quad \Leftrightarrow \quad s_i^k = \lim_{e\downarrow 0} s_i^k(\boldsymbol{e}) \qquad \forall k \forall i$

De 2.4

$$\forall k[\exists l/\{R_i(s(\boldsymbol{e})\,|\,k) < R_i(s(\boldsymbol{e})\,|\,l)\} \Rightarrow s_i^k(\boldsymbol{e}) \le \boldsymbol{e}] \qquad \forall i$$

entonces:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \le & s_i^k(\boldsymbol{e}) & \le & \boldsymbol{e} \\ \downarrow & & | & & \downarrow \\ 0 & & \downarrow & & 0 \\ & & 0 & & \end{array}$$

$$\therefore \quad s_i^k = 0$$

Por lo tanto si $\boldsymbol{e}$ es suficientemente pequeño:

$$\forall k[\exists l/\{R_i(s(\boldsymbol{e})\,|\,k) < R_i(s(\boldsymbol{e})\,|\,l)\} \Rightarrow s_i^k(\boldsymbol{e}) = 0] \qquad \forall i$$

de esto y además de (1.10) y (1.11) tenemos:

$$\mathrm{C}(s_i) \subset \mathrm{B}_i(s(\boldsymbol{e})) \qquad \forall i$$

i.e. s_i asigna probabilidad positiva sólo al conjunto de respuestas óptimas puras de i acerca de $s(\boldsymbol{e})$. $\forall i$
i.e. s_i es respuesta óptima acerca de $s(\boldsymbol{e})$ $\forall i$

i.e s es respuesta óptima acerca de $s(\boldsymbol{e})$, si $\boldsymbol{e}$ es suficientemente pequeño.

iii)$\rightarrow$i)

Sea $s = \lim_{e\downarrow 0} s(\boldsymbol{e})$, donde $s(\boldsymbol{e})$ es como en (iii).
Definimos $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{e}) \in \Re_{++}^m$ ("m" como en 1.1) por:

$$\boldsymbol{h}_i^k(\boldsymbol{e}) = \begin{cases} s_i^k(\boldsymbol{e}), & \text{si } k \notin C(s_i) \text{ para todo } i, k \\ \boldsymbol{e}, & \text{otro caso} \end{cases} \qquad (2.5)$$

Si k no esta en el soporte de s_i entonces no es respuesta óptima de i acerca de s(e), entonces es elegida con mínima probabilidad. Entonces $h(e)$ converge a cero cuando e tiende a cero.

De la definición $h_i(e) \in F(\Phi_i, \Re)$ y además:

Si $k \notin C(s_i)$ entonces: $h_i^k(e) = s_i^k(e) > 0$ y

Si $k \in C(s_i)$ entonces: $0 < h_i^k(e) = e < s_i^k(e)$, de donde se obtiene:

$$\sum_k h_i^k(e) < 1.$$

Para e suficientemente pequeño y $s_i^k(e) \geq h_i^k(e)$. Por tanto, el juego perturbado $(\Gamma, h(e))$ esta bien definido y además:

$$S_i(h(e)) = \{ s_i(e) \in S_i : s_i^k(e) \geq h_i^k(e) \ \forall k \in \Phi_i \},$$

de donde obtenemos: $s(e) \in S(h(e))$

Si dado k cualquiera en Φ_i existe un $l \in \Phi_i$ tal que:

$$R_i(s_i(e) \mid k) < R_i(s_i(e) \mid l) \quad \forall i$$

entonces k no es óptimo frente a $s_i(e)$, para e suficientemente pequeño $s_i(e)$ tiende a s_i, entonces k no es óptimo frente a s_i entonces $k \notin C(s_i)$.

$$\therefore \quad s_i^k(e) = h_i^k(e) \quad \forall i$$

$\therefore$ $s(e)$ es un equilibrio de $(\Gamma, h(e))$, pues:

$$s = = \lim_{e \downarrow 0} s(e) \text{ donde } s(e) \in E(\Gamma, h(e)) \text{ y } \lim_{e \downarrow 0} h(e) = 0$$

<u>DEFINICIÓN 2.7</u>

Sea un juego en forma normal Ã = $(\Phi_1, \ldots\ldots, \Phi_n, R_1, \ldots\ldots, R_n)$ decimos que la estrategia s_i del jugador **i** es *dominada* por la estrategia $\bar{s}_i$ si:

$$R_i(s \mid s_i) \le R_i(s \mid \overline{s_i}) \qquad \forall s \in S$$

y

$$\exists s / \quad R_i(s \mid s_i) < R_i(s \mid \overline{s_i}) \tag{2.6}$$

Para verificar que s_i es dominada s_i por $\overline{s_i}$ es suficiente verificar que (2.6) es satisfecha para todo $j \in \Phi$, en vez de $\forall s \in S$.

Decimos que s_i es *estrictamente dominada* por $\overline{s_i}$ si toda inecuación en 2.6 es estricta y decimos que s_i es *no dominada*, si no existe s_i que la domine. Finalmente una combinación estratégica $s \in$ S, es llamada *no dominada*, si cada componente s_i de s es no dominada.

Un jugador nunca elegirá una estrategia dominada.

Ejemplo 5: Veamos el siguiente juego:

	L	**M**	**R**
U	4, 3	5, 1	6, 2
M	2, 1	8, 4	3, 6
D	3, 0	9, 6	2, 8

Para el jugador 1, no existen estrategias dominadas; sin embargo para el jugador 2: "M es estrictamente dominada por R", como el jugador 2 es racional nunca jugara M. El jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, por lo que sabe que él nunca jugará M, por lo tanto, sin considerar esta estrategia tenemos, para el jugador 1: "U es mejor que M y D". Luego como el jugador 2 sabe que el jugador 1 es racional, sólo jugará L.

$\therefore$ El juego queda reducido sólo a: (U, L)

COROLARIO 2.7

Cada equilibrio perfecto es no dominado.

Prueba.

Lo que se quiere demostrar equivale a la siguiente implicación:

"Si s* es un equilibrio dominado, entonces no es perfecto".

Pero, que sea un equilibrio perfecto equivale (según (ii) del teorema) a que haya una sucesión $(s(\varepsilon))_{\varepsilon\downarrow 0}$, tendiente a s* y tal que para todo ε, $s(\varepsilon)$ sea un ε-equilibrio.

Así, asúmase que s* sea un equilibrio perfecto dominado, y debe obtenerse una contradicción. Para facilitar la escritura, supóngase que sólo hay dos jugadores. Sin pérdida de generalidad, sea el caso que s^*_1 es dominada por otra estrategia s'_1. Entonces, se tiene que:

$$(R_1(s^*_1, s_2) \leq R_1(s'_1, s_2), \forall s_2) \wedge (\exists \underline{s}_2, R_1(s^*_1, \underline{s}_2) < R_1(s'_1, \underline{s}_2)).$$

Como sin pérdida de generalidad puede suponerse que todos los valores de R_1 son positivos, ha de existir una estrategia pura, k, del primer jugador, tal que $s^*_1(k)$ sea positivo y que $R_1(k, s_2) < R_1(h, s_2)$, para cierta estrategia pura, h, del segundo jugador.

Pero, por lo tanto, para todo ε de la sucesión de arriba, ya que $s(\varepsilon)$ es un ε-equilibrio, ha de tenerse que $s(\varepsilon)(k) \leq \varepsilon$. De aquí se sigue que $s^*_1(k)$, siendo el límite de la sucesión $(s(\varepsilon)_1)_{\varepsilon\downarrow 0,}$ debe ser nulo, lo que contradice lo dicho tres líneas arriba.

DEFINICIÓN 2.8

Sea $\tilde{A} = (\Phi_1,.....,\Phi_n, R_1,.....,R_n)$ un juego n-personal en forma normal. Para $\bar{\boldsymbol{h}} \in \Re^m_{++}$ sea $U_{\bar{h}} := \{\boldsymbol{h} \in \Re^m_{++}; \boldsymbol{h} < \bar{\boldsymbol{h}}\}$, s es un *equilibrio estrictamente perfecto* de $\tilde{A}$ si existe algún $\bar{\boldsymbol{h}} \in \Re^m_{++}$ y para cada $\boldsymbol{h} \in U_{\bar{h}}$ algún $s(\boldsymbol{h}) \in E(\Gamma, \boldsymbol{h})$ tal que $\lim_{h\downarrow 0} s(\boldsymbol{h}) = s$.

CAPÍTULO 3

EQUILIBRIO PROPIO

Como se vio en la sección anterior un equilibrio Nash puede ser poco creíble, por eso refinamos este concepto con el de "Equilibrio Perfecto". Sin embargo, puede darse el caso como ya lo vimos, de que este mismo equilibrio perfecto puede no ser razonable. Para excluir estos equilibrios, Meyerson en 1978 introdujo un refinamiento al concepto de "perfección": El "Equilibrio Propio".

La idea básica del concepto de "propiedad" es que un jugador comete sus errores, de una manera más o menos racional, es decir queremos que los errores más costosos ocurran con una menor probabilidad que la probabilidad de los errores menos costosos.

Ejemplo3.1 Veamos el siguiente juego:

	L_2	R_2	A_2
L_1	1, 1	0, 0	-1, -2
R_1	0, 0	0, 0	0, -2
A_1	-2, -1	-2, 0	-2, -2

Figura 3.1

En el juego de la figura 2.1 teníamos sólo un equilibrio perfecto y era (L_1,L_2). En dicho juego hemos adicionado la estrategia dominada A (figura3.1) y ahora obtenemos dos equilibrios perfectos: (L_1,L_2) y (R_1, R_2). En efecto: si los jugadores acuerdan jugar (R_1, R_2) y ambos esperan que el error A ocurra con mayor probabilidad que el error L, entonces es verdaderamente óptimo para cada jugador jugar R.

Sin embargo (R_1, R_2) no es propio; en efecto, si los jugadores no esperan que el error A ocurra con mayor probabilidad que el error L(por ser A mas “costoso” que L, desde que A es estrictamente dominada por L), cada jugador tratará de prevenir el error A antes que el error L y así, A ocurre con menor probabilidad que L .Si verdaderamente el error L ocurre con mayor probabilidad que A entonces cada jugador preferiría jugar L antes que el mismo R, por lo tanto ($R_{1,}$ R_2) no es propio.

Ejemplo3.2 Veamos el siguiente juego:

	L_1	M_2	R_2
L_1	2, 2	1, 1	0, 0
M_1	1, 1	1, 1	1, 1
R_1	0, 0	1, 1	1, 1

Este juego muestra que no todo equilibrio muestra el mismo grado de “robustez”. En este juego se presentan 5 equilibrios de Nash, y son (L_1 L_2), (M_1, M_2), (R_1 M_2), (M_1 R_2) y (R_1 R_2). Los equilibrios: (R_1 M_2), (M_1 R_2) y (R_1 R_2), no son perfectos; en efecto si puede ocurrir errores cada jugador preferiría jugar M a R. Los equilibrios (L_1 L_2) y (M_1,M_2) son ambos perfectos y propios en efecto: Si ambos acuerdan jugar ($M_{1,}$ M_2), y también esperan que el error (A_1, A_2) ocurra con mayor probabilidad que el error (L_1, L_2), entonces para ambos seria óptimo jugar efectivamente M, por lo tanto es perfecto. También si esperan (ambos) que el error R ocurra con menor probabilidad que el error L (por ser R más“costoso” que L), igual para ambos es óptimo jugar M, por tanto es propio. Análogamente con (L_1,L_2).

Si los jugadores tienen el acuerdo de jugar (L_1,L_2) entonces mientras ocurran errores con una probabilidad menor que ½cada jugador permanecerá a gusto jugando L. Sin embargo si los jugadores tienen el acuerdo de jugar ($M_{1,}$ M_2), entonces cada jugador permanecerá a gusto en el acuerdo solo si espera que el error R ocurra con una mayor probabilidad que el error L Esto nos muestra que el equilibrio (L_1,L_2) es más “robusto”que el equilibrio ($M_{1,}$ M_2), siendo ambos equilibrios propios.

DEFINICIÓN 3.1

Sea Ã = (Ô$_1$,..... ,Ô$_n$, R$_1$, ..., R$_n$) un juego n-personal en forma normal, sea å∈ R$_{++}$; y s(å) ∈ S. Decimos que s(å) es un *å-equilibrio propio* de Ã si es completamente mixto y satisface:

$$\forall k \ \left[\exists l / \{R_i(s(\boldsymbol{e}) \mid k) < R_i(s(\boldsymbol{e}) \mid l)\} \Rightarrow s_i^k(\boldsymbol{e}) \leq \boldsymbol{e}.s_i^l(\boldsymbol{e})\right] \forall i \qquad ....(3.1)$$

s∈ S es un *equilibrio propio* de Ã , si **s** es punto límite de una sucesión $\langle s(\boldsymbol{e}_k)\rangle_{k\in \aleph}$ con $\langle \boldsymbol{e}_k\rangle \downarrow 0$, donde s(å) es un å-equilibrio propio de Ã.

—— ———

TEOREMA 3.2.

Si **s** es un equilibrio propio de Ã, entonces $\forall \boldsymbol{e}^* > 0$, $\exists$ algún å*-equilibrio propio de Ã tal que:

$$s = \lim_{e^* \downarrow 0} s(\boldsymbol{e}^*)$$

Prueba.

En efecto: si s es un equilibrio propio de Ã, entonces $\exists \ \langle s(\boldsymbol{e}_k)\rangle_{e_k \downarrow 0}$, tal que converge hacia s; sea k tal que å* ≥ å$_k$. Como s(å$_k$) es un å$_k$-equilibrio propio de Ã, satisface :

$$\forall k^* \ \left[\exists l / \{R_i(s(\boldsymbol{e}_k) \mid k^*) < R_i(s(\boldsymbol{e}_*) \mid l)\} \Rightarrow s_i^{\,k^*}(\boldsymbol{e}_k) \leq \boldsymbol{e}_k.s_i^l(\boldsymbol{e}_k)\right] \forall i$$

$$\Rightarrow s_i^{k^*}(\boldsymbol{e}_k) \leq \boldsymbol{e}_k.s_i^l(\boldsymbol{e}_k) \leq \boldsymbol{e}^*.s_i^l(\boldsymbol{e}_k) \ ] \forall i$$

$$\Rightarrow s_i^{k^*}(\boldsymbol{e}_k) \leq \boldsymbol{e}^*.s_i^l(\boldsymbol{e}_k)] \forall i$$

Por lo tanto s(å$_k$) es un å*-equilibrio propio. Además, haciendo

s(å*): = s(å$_k$); se tiene que

$$s = \lim_{e \downarrow 0} s(\boldsymbol{e}) .$$

TEOREMA 3.3

Todo equilibrio propio es perfecto.

Prueba.

Si **s** es un equilibrio propio de Ã, entonces es punto límite de una sucesión $\langle s(e_k)\rangle_{e_k \downarrow 0}$, donde s(å$_k$) es un å-equilibrio propio, es decir es completamente mixta y satisface (3.1). Como s(å$_k$) es completamente mixta satisface s_i^l (å$_k$) < 1 , $\forall l \forall i$, entonces tendríamos:

$$\forall \mathrm{k}^* \left[\exists l / \left\{R_i(s(\boldsymbol{e}) \mid k^*) < R_i(s(\boldsymbol{e}) \mid l)\right\} \Rightarrow s_i^{k^*}(\boldsymbol{e}_k) \leq \boldsymbol{e}_k . s_i^l(\boldsymbol{e}_k)\right] \forall i$$

$$\Rightarrow s_i^{k^*}(\boldsymbol{e}_k) \leq \boldsymbol{e}_k . s_i^l(\boldsymbol{e}_k) < \boldsymbol{e}_k$$

$$\Rightarrow s_i^{k^*}(\boldsymbol{e}_k) < \boldsymbol{e}_k, \qquad \forall i$$

Por lo tanto s(å$_k$) satisface (2.4) y además es completamente mixta entonces s(å$_k$)es un å$_k$-equilibrio perfecto. Luego **s** es un equilibrio perfecto.

LEMA 3.4

Si **s** es un equilibrio propio de un juego en forma normal Ã; y $\forall$ å> 0 s(å) es un å-equilibrio propio de Ã, tal que $\lim_{e \downarrow 0} s(\boldsymbol{e})$ =s. Entonces **s** es una respuesta óptima para de s(å), Si å es bastante pequeño el cual esta tendiendo a cero.
(La prueba de este lema no nos la brinda el autor)

Prueba:

Sea **s** es un equilibrio propio de Ã, tal que $\lim_{e \downarrow 0} s(\boldsymbol{e})$ =s ;
entonces:

$$\lim_{e \downarrow 0} s_i^k(\boldsymbol{e}) = s_i^k \ , \quad \forall i \forall k \in \Phi_i \qquad ....(*)$$

donde s(å) es un $\boldsymbol{e}$-equilibrio propio.

Luego:

$$\forall k\ \left[\exists l / \{R_i(s(e) \mid k) < R_i(s(e) \mid l)\} \Rightarrow s_i^k(e) \le e.s_i^l(e)\right] \forall i\ ,$$

y como å $\to$ 0, y $s_i^l(e)$ es acotado $\forall i \forall\ l \in \Phi_i$, entonces :

$$å.\ s_i^l(e) \quad \to 0$$

Luego s_i^k(å) $\to 0$, de (*) y por unicidad del límite se tiene que:

$$s_i^k \qquad = 0$$

Por lo tanto:

$$\forall k\left[\exists l / \{R_i(s(e) \mid k) < R_i(s(e) \mid l)\} \Rightarrow s_i^k = 0\right] \quad \forall i \qquad ....(**)$$

Quiere decir que si “l” supera a “k” en pago, entonces “s_i” le asigna probabilidad cero, para cada jugador (s_i “castiga a las malas”).

De (**) , (1.10) y (1.11), se tiene que:

$$C(s_i) \subset \ B_i(s(å))$$

Entonces s_i asigna probabilidad positiva al conjunto de respuestas óptimas puras de i para s(å), para todo i.

Por lo tanto s es una respuesta óptima acerca de s(å) , para todo å, tal que å $\to$0.

Al inicio de esta sección, en el ejemplo 3.1 mostramos que un equilibrio perfecto no necesariamente es propio, es decir el concepto de propiedad es un refinamiento del concepto de “perfección”. Lo que buscamos es refinar el concepto de equilibrio de Nash, de tal manera que nos genere un conjunto no vacío de soluciones, para cada juego en forma normal. Dicho conjunto es justamente el de los equilibrios propios como mostraremos a continuación.

<u>TEOREMA 3.5</u>

Cada juego en forma normal posee al menos un equilibrio propio.

Prueba.

Sea Ã = (Ô$_1$,..... ,Ô$_n$, R$_1$, ..., R$_n$) un juego en forma normal. Es suficiente mostrar que para todo å > 0 bastante pequeño, existe un å-equilibrio propio de Ã. Sea å ∈ (0,1). Para i ∈ N, definimos $h_i \in F(\Phi_i, R)$ por:

$$h_i^k \quad = \frac{e^{m_i}}{m_i} \quad \text{para todo } k \in \Phi_i \qquad .....(\text{ I })$$

Además, sean h, S$_i$(h_i) y S(h) como en la definición 2.1. ..(II)

Para cada i ∈ N, definimos la correspondencia F$_i$ de S(h) a S$_i$(h_i) por:

$$F_i(s) = \{ s_i \in S_i(h_i) : \forall k [\exists i / R_i(s \mid k) < R_i(s \mid l) \Rightarrow s_i^k \le e.s_i^l]\} \qquad ...(\text{ III })$$

Entonces F$_i$(s) ≠ ø para todo s ∈ S(h). En efecto, sea s∈ S(h) y supongamos que: R$_i$(s|k) < R$_i$(s|l); donde k, l ∈ Φ_i ....(IV)

definimos

v_i(s,k) = $|\{ l \in \Phi_i ; R_i(s \mid k) < R_i(s \mid l)\}|$ para k ∈ Φ_i, ...(V)
es el número de elementos del conjunto de estrategias puras del i-ésimo jugador que superan en pago a su estrategia pura k; y

$$s_i^k \quad = e^{v_i(s,k)} / \sum_{l \in \Phi_i} e^{v_i(s,l)} , \text{ para } k \in \Phi_i , \qquad .... \quad (\text{ VI })$$

Entonces $s_i^k > 0 \quad \forall k \in \Phi_i$, y además :

$$\sum_k s_i^k = \sum_k \left(e^{v_i(s,k)} / \sum_l e^{v_i(s,l)} \right) = 1 ,$$

Por lo tanto $s_i^k \in$ S$_i$

Por ser $e < 1$ tenemos: $e^{v_i(s,k)} > e^{m_i}$ ....(VII)

Y además $\sum_l e^{v_i(s,l)} < m_i$ (por ser $\Phi_i \neq \emptyset$ entonces $m_i \neq 0$)

Entonces tendríamos

$$\frac{1}{\sum_l e^{v_i(s,l)}} > \frac{1}{m_i} \qquad \text{......(VIII)}$$

De (VII) y (VIII): $$\frac{e^{v_i(s,k)}}{\sum_l e^{v_i(s,l)}} < \frac{e^{m_i}}{m_i} \qquad \text{.... (IX)}$$

Reemplazando en (IX), (I) y (VI), tenemos

$$s_i^k > h_i^k \qquad \forall\ k \in \Phi_i$$

Por lo tanto $s_i \in S_i(h_i)$

También de (IV) y (V): $v_i(s,l) < v_i(s,k)$

Entonces: $e^{v_i(s,k)} < e^{v_i(s,l)}$

Luego $e^{v_i(s,k)} \leq e\,.\,e^{v_i(s,l)}$ ......(X)

Dividiendo (X) entre: $\sum_l e^{v_i(s,l)}$, y de (VI)

obtendremos: $s_i^k \leq e.s_i^l$

Por lo tanto de la def. (III) tenemos:

$$s_i \in F_i(s)$$

También $F_i(s)$ es cerrado; en efecto:

Sea $(s_i^n)_n \subset F_i(s)$ / $s_i^n \to s_i$ entonces $(s_i^n)^k \to (s_i)^k$ $\forall k$

como $s_i^n \in F_i(s)$ $\forall n$ entonces:

$$\forall k \in \Phi_i \quad \text{tenemos} \quad (s_i^n)^k \leq e.(s_i^n)^l$$

$$(s_i)^k \qquad (s_i)^l$$

Entonces:

$$(s_i)^k \quad \leq e.\ (s_i)^l$$

Por lo tanto: $s_i \in F_i(s)$; por lo tanto $F_i(s)$ es cerrado.

También es acotado por ser subconjunto de $S_i(h_i)$ que es acotado por la definición (2.1), por lo tanto es compacto.

$F_i(s)$ es convexo; en efecto:

Sea s_i, $\overline{s_i} \in F_i(s)$, y $a \in [0,1]$; y supongamos que : $R_i(s|k) < R_i(s|l)$, ent por (III) tenemos:

$$(s_i)^k \leq e.(s_i)^l \quad \rightarrow \quad a.(s_i)^k \leq e.\, a(s_i)^l \qquad (*)$$

$$(\overline{s_i})^k \leq e.\ (\overline{s_i})^l \quad \rightarrow \quad (1-a).\ (\overline{s_i})^k \leq e.(1-a).(\overline{s_i})^l \qquad (**)$$

Sumando (*) y (**) obtenemos:

$$[\ a.(s_i) + (1-a).\ (\overline{s_i})]^k \leq \quad e\ [a.(s_i) + (1-a).(\overline{s_i})]^l$$

Por lo tanto: $[\ a.(s_i) + (1-a).\ (\overline{s_i})] \in F_i(s)$

Por lo tanto $F_i(s)$ es convexo.

La correspondencia F_i es superiormente semi continua ($\overline{sem}\, C^o$); en efecto:

Sea $(s_n) \subset S(h)$ / $s_n \rightarrow s$ y $(s_i^n) \subset S_i(h_i)$ tal que

$\forall$ n, $(s_i^n) \in F_i(s_n)$

si : $R_i(s_n|k) < R_i(s_n|l)$ entonces: $(s_i^n)^k \leq e.(s_i^n)^l$ ......(XI)

supongamos que $(s_i^n) \rightarrow (s_i)$, entonces $(s_i^n)^k \rightarrow (s_i)^k$, ...(XII)

de (XI), (XII) y por ser R_i continua (def. 2.1), tenemos que:

si $R_i(s_n|k) < R_i(s_n|l)$ entonces: $(s_i^n)^k \leq e.(s_i^n)^l$

$R_i(s|k) < R_i(s|l)$ entonces: $(s_i)^k \leq e.(s_i)^l$

Por lo tanto $(s_i) \in F_i(s)$; luego $F_i(s)$ es $\overline{sem}$ C^o .

También tenemos por def. 2.1 que el dominio de Fi , S(h) es cerrado y por ser F_i $\overline{sem}$ C^o entonces el gráfico de F_i es cerrado.

Sea F la n-upla (F_1, F_2, ..., F_n). Entonces F satisface la condición del Teorema de Kakutani para Punto Fijo, y por tanto F tiene un punto fijado.
Es decir $\exists$ s $\in$ S(h) tal que s $\in$ F(s), y por (III) s es un å-equilibrio propio de Ã, con lo cual la prueba se completa.

Como vimos en el juego de la figura 3.1 el concepto de "perfección" tiene el inconveniente de que añadiendo estrategias dominadas se puede agrandar el conjunto de equilibrios perfectos En el siguiente ejemplo vemos cómo el concepto de propiedad presenta el mismo inconveniente.

Ejemplo3.3 Veamos el siguiente juego:

	1	2
1	1, 1, 1	0, 0, 1
2	0, 0, 2	0, 0, 1

figura3.3.1

1

1 2

1	0 0 0	0 0 0
2	0 0 0	1 1 0

figura 3.3.2

2

En este juego intervienen tres jugadores, cada uno con dos estrategias puras para elegir (“1” y “2”). El jugador 1 elige la fila, el jugador 2 la columna y el jugador 3 la matriz, en cada celda la entrada superior izquierda es el pago del jugador 1, la entrada del medio es el pago del jugador 2 y la entrada inferior izquierda es el pago del tercer jugador.

Si consideramos un juego sólo con la matriz de la figura 3.3.1, el jugador 3 estaría restringido solo a su primera estrategia, entonces el único equilibrio perfecto y propio de este juego sería (1,1,1); sin embargo en el juego completo es decir, el de las dos matrices a la vez, donde el jugador 3 tiene 2 elecciones posibles, la estrategia (1,1,1) no es el único equilibrio propio, también lo es (2,2,1). En efecto, si consideramos que el jugador pueda cometer el error “2” , entonces sería óptimo para los jugadores 1 y 2 seguir jugando “2”, análogamente sucede si consideramos que el jugador “1” ó “2” pueda cometer un error.

DEFINICIÓN 3.6

Sea Ã = ($Ô_1$,..... ,$Ô_n$, R_1, ..., R_n) un juego n-personal en forma normal y sea $s \in S$. Decimos que s es un *equilibrio débilmente propio* de Ã, si existe una sucesión $\langle s(e) \rangle_{\in \downarrow 0}$ de combinaciones estratégicas completamente mixtas con límite s, tal que s es respuesta óptima para de cada elemento de esta sucesión y además satisface:

$$\forall k \left[\exists l / \{ R_i(s(e) \mid k) < R_i(s(e) \mid l) \} \Rightarrow s_i^k(e) \le e.s_i^l(e) \right] \forall i \qquad \text{......} \ (3.2)$$

Este concepto requiere que sólo un error considerablemente más costoso podría ser elegido con una probabilidad la cual es de menor orden.

Ejemplo 3.4

	1	2	3
1	2, 2	1, 1	1, 1
2	2, 2	0, 1	3, 1
3	0, 1	0, 1	0, 0

El único equilibrio propio del juego es (1,1) desde que el concepto de propiedad requiere que el jugador 2 elija su tercera estrategia con una probabilidad de menor orden que de la segunda estrategia, sabiendo esto el para el jugador 1 sería óptimo elegir su primera estrategia. Supongamos que ambos jugadores tiene el acuerdo de jugar(2,1), sin embargo por el concepto de equilibrio débilmente propio el jugador 2 no tiene que elegir su tercera estrategia con una probabilidad mucho menor que su segunda estrategia desde que la tercera es sólo un poco peor que la segunda (jugador 1 elige su tercera estrategia con una muy pequeña probabilidad), para el jugador 1 seguiría siendo óptimo elegir 2, así como para el jugador 2 lo es la elección1.

<u>TEOREMA 3.7</u>

Cada equilibrio propio es débilmente propio y cada equilibrio débilmente propio es perfecto. El recíproco de ambos enunciados es falso.

Prueba.

Sea s un equilibrio débilmente propio, s = $\lim_{e \downarrow 0} s(e)$; donde $\langle s(e) \rangle_{e \downarrow 0}$ es una sucesión de combinaciones estratégicas completamente mixtas tal que s es la respuesta óptima para cada s(e) de la sucesión; entonces, por el teorema 2.6-(iii), tenemos que s es un equilibrio perfecto. En el juego del ejemplo 3.1, (R_1, R_2) es un equilibrio perfecto pero no es propio, pues si consideramos que el error A pueda ocurrir con una pequeña probabilidad, entonces sería verdaderamente óptimo para cada uno de los jugadores jugar L.

Supongamos que s es un equilibrio propio del juego n-personal en forma normal, Ã. s = $\lim_{e \downarrow 0} s(e)$ ......(*) donde s(e) es un e-equilibrio propio , es decir es completamente mixta y satisface (3.2); de (*) y por la continuidad de R_i se tiene:

$$\forall \text{k } \left[\exists l / \{R_i(s(e) \mid k) < R_i(s(e) \mid l)\} \Rightarrow s_i^k(e) \leq e.s_i^l(e)\right] \forall i \qquad \text{...... (3.2)}$$

$$R_i(s \mid k) \leq R_i(s \mid l) \quad \Rightarrow \quad s_i^k \leq e.s_i^l(e)$$

Por el lema 3.2 tenemos que s es respuesta óptima para todo elemento de la sucesión, por lo tanto s es equilibro débilmente propio.

Sin embargo no todo equilibrio débilmente propio es necesariamente propio, como vimos en el ejemplo 3.4.

TEOREMA 3.8

Cada equilibrio estrictamente perfecto es débilmente propio.

Prueba.

Supongamos que s es un equilibrio estrictamente perfecto de un juego en forma normal Ã = ($Ô_1$,..... ,$Ô_n$, R_1, ..., R_n). Por la definición de equilibrio estrictamente perfecto $\exists \bar{h} \in \mathrm{R}^m_{++}$, y tal que para cada $h \in U_{\bar{h}}$ $\exists$ algún s(h) $\in$ E(Ã, h) tal que $\lim_{h \downarrow o} s(h)$ = s, donde $U_{\bar{h}} = \{ h \in R^m_{++}, h < \bar{h} \}$

Para $e > 0$, definimos $h(e)$ mediante:

-(i) $v_i(k) := \left| \{ l \in \Phi_i ; R_i(s \mid k) \leq R_i(s \mid l) \} \right|$ para $i \in$ N, k$\in \Phi_i$ .....(I)

es el número de estrategias puras del i-ésimo jugador que no son superadas en pago por la estrategia pura k;

-(ii) $h_i^k(e) := e^{v_i(k)}$ ....(II)

Primero verifiquemos que h_i es como en la definición 2.1 para todo i.

En efecto $\boldsymbol{h}_i \in \mathsf{F}(\Phi_i, R)$ y como $e > 0$ entonces $\boldsymbol{h}_i^k(e) > 0$ $\forall k \in \Phi_i$, y para e suficientemente pequeño tenemos que $\sum_k \boldsymbol{h}_i^k = \sum_k e^{v_i(k)} < 1$, con lo que $\boldsymbol{h}_i$ es como en la definición 2.1.

Si e es pequeño, $\boldsymbol{h}(e)$ se aproxima a cero, lo cual implica que $\boldsymbol{h}(e) \in U_{\bar{h}}$, por lo tanto $\exists s(n(e)) \in$ E(Ã, $\boldsymbol{h}(e)$) tal que $\lim_{h(e)\downarrow 0} s(\boldsymbol{h}(e)) = s$.
Por ser s($\boldsymbol{h}(e)$) un equilibrio del juego perturbado (Ã, $\boldsymbol{h}(e)$) y de (2.3) tenemos que:
Si dado un k $\in \Phi_i$ $\exists l \in \Phi_i$ tal que

$$R_i(s(\boldsymbol{h}(e))\,|k) < R_i\,(s(\boldsymbol{h}(e))\,|l) \qquad \text{.....(III)}$$

Entonces $\qquad s_i^k(\boldsymbol{h}_i^k(e)) = \boldsymbol{h}_i^k(e) \quad \forall i \qquad$ ……(IV)

De (I) y (III) tenemos: $v_i(k) > v_i(l)$

Luego: $e^{\,v_i(k)} < e^{\,v_i(l)}$ (e es pequeño)

Entonces tendríamos: $e^{\,v_i(k)} \leq e\,.\,e^{\,v_i(l)}$ ......(V)

De (IV) y (V), y por definición (II), tenemos:

$$s_i^k(\boldsymbol{h}_i^k(e)) = \boldsymbol{h}_i^k(e) = e^{\,v_i(k)} \leq e\,.\,e^{\,v_i(l)} = e\,.\boldsymbol{h}_i^l(e) \qquad \text{......(VI)}$$

Como $\qquad$ s($\boldsymbol{h}(e)$) $\in$ S($\boldsymbol{h}(e)$), y l$\in \Phi_i$ entonces:

$$s_i^l(\boldsymbol{h}_i^l(e)) \geq \boldsymbol{h}_i^l(e)$$

y además $\forall i \forall l$, $\boldsymbol{h}_i^l(e) > 0$ de esto y por la definición (II) tenemos que : s($\boldsymbol{h}(e)$) es una combinación estratégica completamente mixta.

Luego por ser e>0 tenemos:

$$e\,.\,s_i^l(\boldsymbol{h}_i^l(e)) \geq e\,.\boldsymbol{h}_i^l(e) \qquad \text{....(VII)}$$

De (VI) y (VII) obtenemos:

$$s_i^k(\boldsymbol{h}_i^k(e)) \leq e\,.\; s_i^l(\boldsymbol{h}_i^l(e)) \qquad \text{.....(VIII)}$$

es decir s($\boldsymbol{h}(e)$) satisface (3.2) y también es completamente mixta.

Como $\lim\limits_{h(e)\downarrow 0} s(h(e)) = s$, entonces $\lim\limits_{h(e)\downarrow 0} s_i^k(h_i^k(e)) = s_i^k$. $\forall i \forall k$, y de manera análoga que en la demostración del lema 3.2, obtenemos que s es respuesta óptima para s$(h(e))$, si e es suficientemente pequeña. De aquí s es un equilibrio débilmente propio.

TEOREMA 3.9

Cada equilibrio estrictamente perfecto es propio.

Prueba.

Con todos los argumentos de la demostración anterior tenemos que (III) implica (VIII), luego s$(h(e))$, que es una combinación estratégica completamente mixta, es un e-equilibrio propio de Γ tal que $\lim\limits_{h(e)\downarrow 0} s(h(e)) = s$, por tanto s es un equilibrio propio del juego.

DEFINICIÓN 3.10:

Sea Ã = ($Ô_1$,..... ,$Ô_n$, R_1, ..., R_n) un juego n-personal en forma normal, Para $\bar{h} \in R_{++}^m$ sea $U_{\bar{h}}$ como en la definición 2.2.7. s es un *equilibrio estrictamente propio* de Γ si $\exists \bar{h} \in R_{++}^m$ y una correspondencia continua $h \to s(h)$ de $U_{\bar{h}}$ a S tal que $s(h) \in E(\Gamma, h)$ para todo h y $\lim\limits_{h \downarrow 0} s(h) = s$.

CAPÍTULO 4.

EQUILIBRIO ESENCIAL:

En las secciones previas consideramos refinamientos del concepto de equilibrio de Nash, basados en la idea de que un equilibrio razonable puede ser estable cuando se dan ligeras modificaciones en las estrategias del equilibrio. Ahora consideramos dos refinamientos basados en la idea de que un equilibrio razonable debería ser estable si se producen ligeras modificaciones en los pagos del juego. Estos son el equilibrio esencial y el equilibrio fuertemente estable. Un equilibrio *s* de Γ , se dice ser esencial si cada juego con pagos próximos a los de Γ , tiene un equilibrio próximo a *s*. También tenemos que no todo juego posee un equilibrio esencial como veremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Veamos el siguiente juego:

	L_2	M_2	R_2
L_1	1, 1	1, 0	0, 0
R_1	1, 1	0, 0	1, 0

El juego presenta dos equilibrios (L_1, L_2) y (R_1, L_2). Sin embargo ninguno es esencial. En efecto: Veamos que (L_1, L_2) no es esencial: que el pago para el jugador 1, cuando este juega R_1, sufra una ligera modificación cuando el jugador 2 juega L_2: en vez de 1, que sea 1,1, entonces el jugador 1 tendrá el incentivo de desviarse a R_1 de esta manera (L_1, L_2) , ya no sería equilibrio. Análogamente sucede con el equilibrio (R_1, L_2).

DEFINICIÓN 4.1

Sea Ã = ($Ô_1$,..... ,$Ô_n$, R_1, ..., R_n) un juego n-personal en forma normal. Un equilibrio *s* de Ã es un *equilibrio esencial* de Ã si para cada ***e*** > 0 existe algún ***d*** > 0 tal que para cada Ã´ con d(Ã, Ã´) < ***d*** , existe algún *s*´∈ E(Ã´) con d(*s*, *s*´)< ***e***.

Al ser s, s' distribuciones probabilísticas de los n jugadores, pueden verse como elementos de $\Re^m$, donde m es como en (1.1), se esta manera S puede ser vista como m espacio dimensional y se puede hablar de distancia euclidiana entre s y s' . Por otro lado, explicamos en la primera sección, que la distancia entre dos juegos, es solo para aquellos juegos que pertenezcan al mismo espacio J(Φ_1, ..., Φ_n), es decir que tengan, las mismas estrategias puras; debido a la correspondencia 1 a 1, entre J (Φ_1, ..., Φ_n) y $R^{n.m^*}$ al juego Γ le corresponde un vector de pago r$\in R^{n.m^*}$, y al juego Γ le corresponde un vector de pago r´$\in R^{n.m^*}$, donde r y r´ son como en (1.16), entonces podemos ver a los juegos Γ y Γ' como elementos de $R^{n.m^*}$ y la distancia euclidiana entre ellos como d(Γ, Γ') = d(r,r´).

Ejemplo 2: Sea un juego para 2 jugadores $\Gamma = (\Phi_1, \Phi_2, R_1, R_2)$ donde $|\Phi_1| = 2$ y $|\Phi_2| = 3$. Luego m* = 6, por tanto R_1 y R_2 son elementos de $\Re^6$, y los vectores de pago r_1, r_2 asociado a cada jugador son elementos también $\Re^6$, por tanto su vector de pago r = (r_1, r_2) es un elemento de $\Re^{12}$. Análogamente para otro juego $\Gamma' \in$ J (Φ_1, Φ_2), su vector de pago asociado r´ también es un elemento de $\Re^{12}$, entonces la distancia entre los juegos Γ, Γ', será la distancia euclidiana para $\Re^{12}$.

Ejemplo 3:

	L_2	M_2	R_2
L_1	1 1	0 0	0 0
M_1	0 0	2 2	2 2
R_1	0 0	2 2	2 2

Figura 4.3.1

El juego presenta 5 equilibrios y son (L_1, L_2), (M_1, M_2), (M_1, R_2), (R_1, M_2) y (R_1, R_2).

Sin embargo, el único equilibrio esencial del juego es s = (L_1, L_2), en efecto: la idea es que al modificar ligeramente los pagos del juego, originando un nuevo juego, este nuevo juego también tenga un equilibrio muy próximo al del juego original. Dado un $e > 0$, tal que para juego $\Gamma´$,juego que es una ligera modificación de la figura 4.3.1, como que se muestra en el siguiente cuadro:

	L_2	M_2	R_2
L_1	$1 \pm d_1$; $1 \pm d_2$	$\pm d_3$; $\pm d_4$	$\pm d_5$; $\pm d_6$
M_1	$\pm d_7$; $\pm d_8$	$2 \pm d_9$; $2 \pm d_{10}$	$2 \pm d_{11}$; $2 \pm d_{12}$
R_1	$\pm d_{13}$; $\pm d_{14}$	$2 \pm d_{15}$; $2 \pm d_{16}$	$2 \pm d_{17}$; $2 \pm d_{18}$

Figura 4.3.2

Se tiene que $d(\Gamma, \Gamma´) = d(r, r´)$ donde r y r´ son elementos de $\Re^{18}$, utilizando la métrica del máximo tenemos que $d(r, r´) = \max_{1 \le i \le 18} |d_i|$. Sea $d > \max_{1 \le i \le 18} |d_i|$, se tiene que $d(\Gamma, \Gamma´) < d$. Para $d > ½$, $s´ = s = (L_1, L_2) \in E(\Gamma´)$ también, luego $d(s, s´) = 0 < e$. Por lo tanto $\forall\, e > 0$. $\exists d > 1/2$, tal que para cada juego $\Gamma´$, con $d(\Gamma, \Gamma´) < d$ $\exists s´ = s \in E(\Gamma´)$ con $d(s, s´) < e$. Luego $s = (L_1, L_2)$ es un equilibrio esencial.

Sin embargo los demás equilibrios no son esenciales, en efecto, veamos el caso del equilibrio $M = (M_1, M_2)$: Consideremos un juego $\Gamma´$, que es una ligera modificación al juego de la figura 4.3.1, como se muestra en la figura 4.3.3 que a continuación mostramos:

	L_2	M_2	R_2
L_1	1, 1	0, 0	0, 0
M_1	0, 0	2, 2	2, 2
R_1	0, 0	$2+d/2$, 2	2, 2

Figura 4.3.3

Se tiene que para cualquier $d>0$, $d(\Gamma,\Gamma')<d$, Considerando un e suficientemente pequeño, se tiene que no existe ningún equilibrio s´ de Γ' tal que d(M, s´) < e, pues el jugador 1 tiene ahora el incentivo de desviarse a R_1. De ahí (M_1, M_2) no es equilibrio esencial. Análogamente los demás equilibrios tampoco son esenciales. Sin embargo, tanto M como R duplican el pago a los jugadores en relación a L; de ahí, si ellos tienen el acuerdo de jugar M ó R, ninguno tendría incentivo a desviarse. Por tanto un equilibrio esencial no necesariamente es preferible a uno no esencial, utilizando la palabra "preferible" en el sentido que maximice su pago.

TEOREMA 4.2

Cada equilibrio esencial es estrictamente perfecto.

Prueba.

Sea Ã = ($Ô_1$,..... ,$Ô_n$, R_1, ..., R_n) un juego n-personal en forma normal y asumimos que $\hat{s}$ es un equilibrio esencial de Ã. Sea $h = (h_1, ..., h_n)$ tal que 2.1 es satisfecho. Construimos un juego en forma normal Γ^h cuyos equilibrios inducen equilibrios en (Γ, h). Si h es pequeño, Γ^h estará próximo a Γ y por tanto Γ^h tiene un equilibrio próxima a $\tilde{s}$. En este caso el equilibrio inducido en (Γ, h) está próximo también a $\tilde{s}$ y esto establece la prueba.

Denotamos convenientemente un elemento genérico de Φ_i por j_i en vez de k. Si $s_i \in S_i$, entonces escribimos $s_i(j_i)$ para la probabilidad que asigna s_i a j_i. Denotamos con $h_i(j_i)$ a la mínima probabilidad de j_i en el juego perturbado (Γ, h), así h_i es como en (2.1) y (2.2) . Para i$\in$ N y $s_i \in$ S_i, definimos $l_i \in (0,1)$ y $s_i * h_i$ por:

$$l_i := \sum_{j_i} h_i(j_i) \qquad \text{y} \qquad s_i * h_i := (1- l_i)s_i + h_i$$

Notamos que $s_i * h_i$ puede ser vista como una mezcla de estrategias mixtas: s_i es elegida con probabilidad (1-l_i) y h_i / l_i es elegida con probabilidad l_i. Donde h_i / l_i esta definida por:

$$\frac{h_i}{l_i} := \frac{1}{l_i}(h_i^1,....,h_i^{m_i}) \equiv \frac{1}{l_i}(h_i(j_1),....,h_i(j_{m_i}))$$

que es una distribución probabilística pues todos sus elementos son no negativos y además tenemos que $\frac{1}{l_i}\sum_{j=1}^{m_i} h_i(j_i) = \frac{l_i}{l_i}$ = 1.

Luego $s_i * h_i$ puede verse como la distribución probabilística ((1-l_i), l_i)sobre el par $(s_i, \frac{1}{l_i}h_i)$. La interpretación de $s_i * h_i$ es: si las probabilidades de errores del jugador i están determinadas por h_i entonces el jugador i jugará realmente $s_i * h_i$ cuando intente jugar s_i. Para $s \in S$, sea $s * h$ definido por:

$$(s * h)_i := \quad s_i * h_i \qquad \text{para i} \in \text{N}$$

y sea el juego Γ^h = (Ô$_1$,..... ,Ô$_n$, R_1^h , ..., R_n^h) definido por:

$$R_i^h(j) = R_i(j * h) \qquad \text{para i} \in \text{N},\ j \in \Phi \qquad ....(4.1)$$

De aquí, $R_i^h(j)$ es el pago esperado del jugador i si los jugadores intentan jugar j y cometen errores acordes con h.

Afirmamos que:

$$R_i^h(s) = R_i(s * h) \qquad \text{para todo i} \in \text{N},\ s \in S \qquad ....(4.2)$$

En efecto:

$$R_i^h(s) = \sum_j s(j) R_i^h(j) \qquad \text{por (1.7)}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{j}} s(\boldsymbol{j}) R_i(\boldsymbol{j} * \boldsymbol{h}) \qquad \text{por (4.1)}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{j}} s(\boldsymbol{j}) \sum_{\hat{\boldsymbol{j}}} (\boldsymbol{j} * \boldsymbol{h})(\hat{\boldsymbol{j}}) R_i(\hat{\boldsymbol{j}}) \qquad \text{por (1.7)}$$

$$= \sum_{\hat{\boldsymbol{j}}} \left(\sum_{\boldsymbol{j}} s(\boldsymbol{j})(\boldsymbol{j} * \boldsymbol{h})(\hat{\boldsymbol{j}}) \right) R_i(\hat{\boldsymbol{j}})$$

$$= \sum_{\hat{\boldsymbol{j}}} (s * \boldsymbol{h})(\hat{\boldsymbol{j}}) R_i(\hat{\boldsymbol{j}}) \qquad (*)$$

$$= R_i(s * \boldsymbol{h}) \qquad \text{por (1.7)}$$

donde (*) se obtiene del hecho de que para todo $i \in N$

$$(s_i * \boldsymbol{h}_i)(\hat{\boldsymbol{j}}_i) = \sum_{\boldsymbol{j}_i} s_i(\boldsymbol{j}_i)(\boldsymbol{j}_i * \boldsymbol{h}_i)(\hat{\boldsymbol{j}}_i) \qquad \text{para todo } s_i \in S_i,\ \hat{\boldsymbol{j}}_i \in \Phi_i,$$

En efecto:

$$s_i * \boldsymbol{h}_i \quad = (1- \boldsymbol{l}_i) s_i + (\boldsymbol{l}_i) \frac{1}{\boldsymbol{l}_i} \boldsymbol{h}_i .$$

Por tanto:

$$(s_i * \boldsymbol{h}_i)(\hat{\boldsymbol{j}}_i) = (1- \boldsymbol{l}_i) s_i(\hat{\boldsymbol{j}}_i) + (\boldsymbol{l}_i) \frac{1}{\boldsymbol{l}_i} \boldsymbol{h}_i^{\hat{\boldsymbol{j}}_i} . \qquad .....(**)$$

Luego:

$$(\boldsymbol{j}_i * \boldsymbol{h}_i)(\hat{\boldsymbol{j}}_i) = (1- \boldsymbol{l}_i) \boldsymbol{j}_i(\hat{\boldsymbol{j}}_i) + (\boldsymbol{l}_i) \frac{1}{\boldsymbol{l}_i} \boldsymbol{h}_i^{\hat{\boldsymbol{j}}_i} .$$

Entonces:

$$\sum_{\boldsymbol{j}_i} s_i(\boldsymbol{j}_i)(\boldsymbol{j}_i * \boldsymbol{h}_i)(\hat{\boldsymbol{j}}_i) = \sum_{\boldsymbol{j}_i} s_i(\boldsymbol{j}_i)(1- \boldsymbol{l}_i) \boldsymbol{j}_i(\hat{\boldsymbol{j}}_i) + \sum_{\boldsymbol{j}_i} s_i(\boldsymbol{j}_i)(\boldsymbol{l}_i) \frac{1}{\boldsymbol{l}_i} \boldsymbol{h}_i^{\hat{\boldsymbol{j}}_i}$$

$$= (1- \boldsymbol{l}_i) \underbrace{\sum_{\boldsymbol{j}_i} s_i(\boldsymbol{j}_i)\, \boldsymbol{j}_i(\hat{\boldsymbol{j}}_i)}_{s_i(\hat{\boldsymbol{j}}_i)} + \boldsymbol{h}_i^{\hat{\boldsymbol{j}}_i} \underbrace{\sum_{\boldsymbol{j}_i} s_i(\boldsymbol{j}_i)}_{1}$$

$$= (1-\lambda_i)\, s_i(\hat{\varphi}_i) + \eta_i^{\hat{\varphi}_i}$$

$$= (s_i * \eta_i)(\hat{\varphi}_i) \qquad \text{por (**)}$$

y del hecho de que los jugadores eligen sus estrategias (y cometen sus errores) independientemente. Como una consecuencia de (4.2), tenemos que para todo i∈ N, $s \in S$, $\varphi_i \in \Phi_i$:

$$R_i^{\eta}(s \mid \hat{\varphi}_i) = (1-\lambda_i) R_i(s*\eta \mid \hat{\varphi}_i) + \sum_{\varphi_i} \eta_i(\varphi_i) R_i(s*\eta \mid \varphi_i)$$

lo cual implica que:

$$R_i^{\eta}(s \mid \varphi_i) < R_i^{\eta}(s \mid \hat{\varphi}_i) \text{ si } R_i(s*\eta \mid \varphi_i) < R_i(s*\eta \mid \varphi_i) \text{ para todo i, s, } \varphi_i,\ \hat{\varphi}_i \qquad .....(4.3)$$

Sea $\eta \to 0$, entonces $\eta_i \to 0$. Para $\varphi \in \Phi$, tenemos que:

$$(\varphi * \eta)_i = \varphi_i * \eta_i \text{, luego}$$

$$\varphi_i * \eta_i = (1-\underbrace{\lambda_i)\varphi_i}_{\downarrow\ 0} + \underbrace{\eta_i}_{\downarrow\ 0} \quad \text{cuando } \eta_i \to 0$$

entonces $\varphi_i * \eta_i \to \varphi_i$; luego $\varphi * \eta \to \varphi$. Esto implica, desde que R_i es continua y por (4.1), que $R_i^{\eta}(\varphi) \to R_i(\varphi)$. De aquí, y por el hecho de que el juego $\Gamma^{\eta} \in$ J (Φ_1, ..., Φ_n), si $\eta \to 0$, entonces $\Gamma^{\eta} \to \Gamma$. Por tanto, al ser $\hat{s}$ equilibrio esencial de Γ, Γ^{η} tiene un equilibrio $s^{\eta} = (s_1^{\eta}, s_2^{\eta}, ..., s_n^{\eta})$, el cual se aproxima a $\hat{s}$. Al ser s^{η} equilibrio tenemos del teorema 1.1 que:

si $R_i^{\eta}(s^{\eta} \mid \varphi_i) < R_i^{\eta}(s^{\eta} \mid \hat{\varphi}_i)$, entonces $s_i^{\eta}(\varphi_i) = 0$, para todo $i \in \aleph, \varphi_i, \hat{\varphi}_i \in \Phi_i$,

de el cual sigue usando 4.3, que para todo $i \in \aleph, \varphi_i, \hat{\varphi}_i \in \Phi_i$,

si $R_i(s^{\eta} * \eta \mid \varphi_i) < R_i(s^{\eta} * \eta \mid \hat{\varphi}_i)$, entonces $R_i(s^{\eta} \mid \varphi_i) < R_i(s^{\eta} \mid \hat{\varphi}_i)$, en Γ, y en el juego perturbado (Γ, η) se tendría que:

$$(s^{\eta} * \eta)_i(\varphi_i) = \eta_i(\varphi_i)$$

Esto implica que $s^{h} * h$ es un equilibrio de (Γ, h). Desde que $s^{h} * h$ converge a $\hat{s}$ cuando $h \rightarrow 0$, nosotros tenemos que $\hat{s}$ es un equilibrio estrictamente perfecto de Γ.

Ahora introducimos un refinamiento al concepto de equilibrio esencial, realizado por Okada y Shindoh , que es el concepto de equilibrio fuertemente estable.

Recordemos que de (1.15) y (1.16) , nosotros identificamos un juego Ã $\in$ J (Φ_1, ..., Φ_n) con un vector r = (r_1, r_2, ..., r_n) $\in$ $\Re^{n.m^*}$, donde m* esta dado por (1.1), así vemos a J (Φ_1, ..., Φ_n) como un espacio euclidiano n.m*- dimensional.

DEFINICIÓN 4.3

Sea $\tilde{\Gamma} = (\Phi_1, ..., \Phi_n, \tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_n)$ un juego n-personal en forma normal. Un equilibrio $\tilde{s}$ es un *equilibrio fuertemente estable* de $\tilde{\Gamma}$ si existen vecindades: U de $\tilde{\Gamma}$ en $\Re^{n.m^*}$ y V de $\tilde{s}$ en $\Re^{m}$, tal que:

i. |E(Γ)$\cap$V| = 1, para todo $\Gamma \in U$, y
ii. La correspondencia s : U $\rightarrow$ V definida por {s(Γ)} = E(Γ)$\cap$V es continua.

COROLARIO 4.4

Cada equilibrio fuertemente estable es esencial.

Prueba.

Sea s un equilibrio fuertemente estable del juego n-personal en forma normal Γ entonces existen vecindades: U de Γ y V de s tal que |E(Γ)$\cap$V| = 1. Entonces sea e>0 , $\exists d$>0, tal que $\hat{\Gamma} \in$ U si d(Γ,$\hat{\Gamma}$) < d y $\hat{s} \in$ V, si d$(s, \hat{s}) < e$.

Supongamos que d(Γ,$\hat{\Gamma}$) < d, entonces $\hat{\Gamma} \in$ U, entonces:
|E($\hat{\Gamma}$)$\cap$V| = 1, luego $\exists \hat{s}$ tal que $\hat{s}$ $\in$ E($\hat{\Gamma}$)$\cap$V, luego $\hat{s} \in$ E($\hat{\Gamma}$) y $\hat{s} \in$ V, entonces d$(s, \hat{s}) < e$. Por lo tanto s es equilibrio esencial.

DEFINICIÓN 4.5

Sea $\tilde{A} = (\hat{O}_1,\ldots\ldots,\hat{O}_n,\ R_1,\ \ldots\ldots,\ R_n)$ un juego n-personal en forma normal. Un equilibrio *s* de Γ es un *equilibrio aislado* si existe una vecindad V de *s* tal que $V \cap E(\Gamma) = \{s\}$.

COROLARIO 4.6

Cada equilibrio fuertemente estable es aislado.

Prueba.

Si *s* es un equilibrio fuertemente estable de Γ entonces existe una vecindad : U de Γ en $\Re^{n.m^*}$ y V de *s* en $\Re^m$, tal que $|E(\hat{\Gamma})\cap V| = 1$, para todo $\hat{\Gamma} \in U$, en particular como $\Gamma \in U$ tenemos que:

$$|E(\Gamma)\cap V| = 1, \qquad \text{(I)}$$

ahora como $s \in V$ y además s es un equilibrio de Γ tenemos que:

$$s \in E(\Gamma)\cap V, \qquad \text{(II)}$$

luego de (I) y (II) tenemos que:

$$V \cap E(\Gamma) = \{s\}.$$

Por lo tanto *s* es un equilibrio aislado de Γ.

CAPÍTULO 5

EQUILIBRIO REGULAR

En esta sección introducimos el refinamiento más estricto del concepto de equilibrio de Nash: el concepto de *equilibrio regular*.

Sea $\Gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n)$ un juego n-personal en forma normal. Para $i \in N$, escribimos X_i de $F(\Phi_i, \Re)$, para denotar al conjunto de operaciones de Φ_i a $\Re$. Tenemos que $S_i \subset X_i$. Un elemento de X_i, es denotado como x_i y x_i^k denota la evaluación de x_i en k. Identificamos X_i con $\Re^{m_i}$, donde m_i es como en (1.1). X denota el $\prod_{i=1}^{n} X_i$ y un elemento genérico de X es denotado por x. El conjunto X puede ser identificado con $\Re^m$, donde m esta dada por (1.1). Si $x \in X$ y $x_i \in X_i$, entonces

$$x|x_i' := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

De las ecuaciones (1.5) y (1.7), extendemos R_i de S a X por la siguiente definición:

$$R_i(x) := \sum_{j \in \Phi} x(j) . R_i(j) \ ;$$

$$x(j) := \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i} \qquad \text{si } j = (k_1, \ldots, k_n) \qquad (5.1)$$

Notemos que como R_i es polinomial, entonces es de clase C^∞.

TEOREMA 5.1

Una combinación estratégica $s \in S$ es un equilibrio de Γ si y solo si se cumple: Si $s_i^k > 0$, entonces $R_i(s|k) = \max_{l \in \Phi_i} R_i(s|l) \quad \forall i \in N, k \in \Phi_i$

Prueba.

$(\Rightarrow)$ Sea s $\in$ S un equilibrio de Γ

$\rightarrow$ s es respuesta óptima de si mismo.

$\rightarrow$ s_i es respuesta óptima a s $\quad \forall i$

$\rightarrow$ $C(s_i) \subset B_i(s) \qquad \forall i \qquad$ (por teorema 1.1)

Dado $k \in \Phi_i$. Si $\qquad s_i^k > 0$

$\rightarrow \qquad k \in C(s_i) \qquad \forall i$

$\rightarrow \qquad k \in B_i(s) \qquad \forall i$

$\rightarrow \qquad R_i(s|k) = \max\limits_{s_i' \in S_i} R_i(s|s_i') \qquad \forall i$

$\rightarrow \qquad R_i(s|k) = \max\limits_{l \in \Phi_i} R_i(s|l) \qquad \forall i$

($\Leftarrow$) Sea $s \in S$ tal que $\forall i \in N$, $\forall k \in \Phi_i$

Sea $k \in \Phi_i$. Si $k \in C(s_i) \Rightarrow s_i^k > 0$

Entonces por hipótesis: $\quad R_i(s \mid k) = \max\limits_{l \in \Phi_i} R_i(s \mid l)$

Entonces $\quad R_i(s \mid k) \geq R_i(s \mid s_i') \qquad \forall s_i' \in S_i$

En efecto:

Supongamos que $\exists s_i' \in S_i$ tal que

$$R_i(s \mid k) < R_i(s \mid s_i') \qquad (**)$$

Por ser s_i' combinación convexa de las j_i (estrategias puras del jugador i), entonces $\exists j_i'$ tal que:

$$R_i(s \mid s_i') \leq R_i(s \mid j_i') \qquad (***)$$

Luego de: (**) y (***), tenemos:

$R_i(s \mid k) < R_i(s \mid j_i')$ lo que se contradice con (*).

$\therefore \quad R_i(s \mid k) = \max_{s_i' \in S_i} R_i(s \mid s_i') \quad \forall i$

$\therefore \quad k \in B_i(s)$

Luego, $C(s_i) \subset B_i(s) \quad \forall i$,

de donde s_i es respuesta óptima a s.

$\therefore$ s es un equilibrio de Γ.

COROLARIO 5.2

Sea $s \in \Re_+^m$; s es un equilibrio de Γ si y solo si s es solución del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x_i^k \left[R_i(x \mid k) - \max_{l \in \Phi_i} R_i(x \mid l) \right] = 0 \; ; \quad \forall i \in N, k \in \Phi_i \qquad \text{y} \qquad (5.2)$$

$$\sum_k x_i^k - 1 = 0 \qquad \forall i \in N \qquad (5.3)$$

Prueba.

($\Rightarrow$) Sea s equilibrio de Γ.

Si $s_i^k > 0$, entonces $R_i(s \mid k) = \max_{l \in \Phi_i} R_i(s \mid l) \quad \forall i \in N, k \in \Phi_i$ (por teo.5.1)

$$\rightarrow \quad s_i^k \left[R_i(s \mid k) - \max_{l \in \Phi_i} R_i(s \mid l) \right] = 0 \; ; \quad \forall i \in N, k \in \Phi_i$$

Si $s_i^k = 0$ entonces $s_i^k \left[R_i(s \mid k) - \max_{l \in \Phi_i} R_i(s \mid l) \right] = 0$. $\forall i \in N, k \in \Phi_i$

Además de (1.2): $\sum_k s_i^k = 1 \qquad \forall i$

($\Leftarrow$) Por hipótesis: $\sum_k s_i^k - 1 = 0$ y además $s \in \Re_+^m$; entonces $s \in S$.

También tenemos de hipótesis:

$$s_i^k\left[R_i(s \mid k) - \max_{l\in\Phi_i} R_i(s \mid l)\right] = 0 \;; \quad \forall i \in N, k \in \Phi_i \qquad \ldots(*)$$

Si $\quad k \in C(s_i)$

$\rightarrow \qquad s_i^k > 0$

$\rightarrow \qquad R_i(s \mid k) = \max_{l\in\Phi_i} R_i(s \mid l) \qquad \forall i \in N, k \in \Phi_i \quad$ (por *)

$\rightarrow \qquad R_i(s \mid k) = \max_{s_i' \in S_i} R_i(s \mid s_i') \qquad \forall i$

$\rightarrow \qquad k \in B_i(s) \qquad \forall i$

$\therefore \qquad C(s_i) \subset B_i(s) \qquad \forall i$

$\therefore \qquad$ s es equilibrio de Γ

En (5.2) y (5.3) tenemos m + n ecuaciones, en m variables; sin embargo desde que para cada i al menos una ecuación en (5.2) es trivialmente cumplida (por el teorema de Nash todo juego tiene al menos un equilibrio, para cada componente del este equilibrio, 5.2 es trivialmente satisfecha), realmente tenemos m ecuaciones en m variables. Sin embargo, el sistema posee la indeseable propiedad de que la aplicación de la izquierda de (5.2) y (5.3) no es diferenciable.

Por tanto, consideramos un sistema de ecuaciones ligeramente diferentes. Sea $j = (k_1, \ldots\ldots, k_n) \in \Phi$ fijo, y consideremos el sistema:

$$x_i^k\left[R_i(x \mid k) - R_i(x \mid k_i)\right] = 0 \qquad \forall i \in N, k \in \Phi_i, k \neq k_i \qquad (5.4)$$

$$\sum_k x_i^k - 1 = 0 \qquad \forall i \in N \qquad (5.5)$$

TEOREMA 5.3

Si s es un equilibrio de Γ y $j \in C(s)$, entonces s es solución del sistema (5.4) y (5.5).

Prueba.

Sea s es un equilibrio de Γ con $j \in C(s)$

$\rightarrow \quad k_i \in$ C(s_i) $\quad \forall i$

$\rightarrow \quad k_i \in$ B_i(s) $\quad \forall i$

$\rightarrow \quad R_i(s \mid k_i) \geq R_i(s \mid l) \quad \forall l \in \Phi_i$

Dado $k \in \Phi_i$, tal que $k \neq k_i$, entonces

$$R_i(s \mid k_i) > R_i(s \mid k) \quad \text{ó} \quad R_i(s \mid k_i) = R_i(s \mid k)$$

Si $\quad R_i(s \mid k_i) > R_i(s \mid k)$ entonces $s_i^k = 0$ (por 1.10)

$$\therefore \quad s_i^k\left[R_i(s \mid k) - R_i(s \mid k_i)\right] = 0 \qquad \forall i \in N, k \in \Phi_i, k \neq k_i$$

Si $\quad R_i(s \mid k_i) = R_i(s \mid k)$ entonces $R_i(s \mid k_i) - R_i(s \mid l) = 0$

$$\therefore \quad s_i^k\left[R_i(s \mid k) - R_i(s \mid k_i)\right] = 0 \qquad \forall i \in N, k \in \Phi_i, k \neq k_i$$

El precio que tenemos que pagar para ganar esta diferenciabilidad en la aplicación del lado izquierdo del nuevo sistema, es que no toda solución no negativa del sistema es un equilibrio y que no cada equilibrio de Γ es solución del sistema.

Sea $F(.|j): \Re^m \rightarrow \Re^m$ la función definida por (5.4) y (5.5), es decir:

$$F_i^k(x \mid j) = x_i^k\left[R_i(x \mid k) - R_i(x \mid k_i)\right] = 0 \qquad \forall i \in N, k \in \Phi_i, k \neq k_i \tag{5.6}$$

$$F_i^{k_i}(x \mid j) = \sum_k x_i^k - 1 = 0 \qquad \forall i \in N \tag{5.7}$$

Sea J(s | j) el Jacobiano (i.e. la matriz de las primeras derivadas parciales) de F(s | j) evaluado en s, .i.e

$$J(s \mid j) = \frac{\partial F(s \mid j)}{\partial x}\Big|_{x=s} \tag{5.8}$$

Si s es un equilibrio de Γ con $j \in$ C(s), entonces s es solución del sistema (5.6) y (5.7), entonces F(s | j) = 0

DEFINICIÓN 5.4

Un equilibrio s de Γ es un *equilibrio regular* si J(s|j) es no singular para algún $j \in C(s)$. Un equilibrio es *irregular* si no es regular.

Ejemplo 1: Veamos el siguiente juego:

	A_2	B_2
A_1	0, 0	0, 0
B_1	0, 0	1, 1

El juego presenta dos equilibrios que son (A_1, A_2) y (B_1, B_2). En vista de que el segundo equilibrio supera en pago al primero, éste no es razonable. Por tanto el equilibrio (B_1, B_2) es regular, mientras que el equilibrio (A_1, A_2) no lo es. En efecto:

I = {1,2}. Sea s = (B_1, B_2) = ((0,1),(0,1)) = (0,1,0,1), entonces C(s) = {(B_1, B_2)}, en efecto, si por ejemplo (B_1, A_2) $\in$ C(s), entonces tendríamos que $A_2 \in$ C(s_2), es decir $A_2 \in$ C(B_2) lo cual se contradice con el hecho que B_2 es la estrategia mixta que asigna probabilidad 1 a B_2, y por tanto probabilidad 0 a A_2.

Sea j = (B_1, B_2) = ((0,1),(0,1) = (0,1,0,1) $\in$ C(s).
De la definición (5.6) y (5.7) tenemos que:

$$F:\Re^4 \to \Re^4, \qquad F = (F_1^{A_1}, F_1^{B_1}, F_2^{A_2}, F_2^{B_2}) \text{ donde:}$$

$$F_1^{A_1}(x \mid j) = x_1^{A_1}\left[R_1(A_1,x_2) - R_1(B_1,x_2)\right] = x_1^{A_1}[-\ x_2^{B_2}], \text{ debido a:}$$

$$\begin{aligned} R_1(A_1, x_2) &= R_1(0,\ 1,\ x_2^{A_2}, x_2^{B_2}) \\ &= x_2^{A_1}\,\underbrace{R_1(A_1, A_2)}_{0} + x_2^{B_2}\,\underbrace{R_1(A_1, B_2)}_{0} = 0 \end{aligned}$$

$$R_1(B_1, x_2) = R_1(0,\ 1,\ x_2^{A_2}, x_2^{B_2})$$

$$= x_2^{A_2}\underbrace{R_1(B_1,A_2)}_{0}+x_2^{B_2}\underbrace{R_1(B_1,B_2)}_{1} = x_2^{B_2}$$

$$F_1^{B_1}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_1^{A_1} + x_1^{B_1} - 1$$

$F_2^{A_2}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_2^{A_2}\left[R_2(x_1,A_2) - R_2(x_1,B_2)\right] = x_2^{A_2}\left[-x_1^{B_1}\right]$, debido a:

$$R_2(x_1, A_2) = R_2(x_1^{A_1}, x_1^{B_1}, 1, 0)$$

$$= x_1^{A_1}\underbrace{R_2(A_1,A_2)}_{0}+x_1^{B_1}\underbrace{R_2(B_1,A_2)}_{0} = 0$$

$$R_2(x_1, B_2) = R_2(x_1^{A_1}, x_1^{B_1}, 0, 1)$$

$$= x_1^{A_1}\underbrace{R_2(A_1,B_2)}_{0}+x_1^{B_1}\underbrace{R_2(B_1,B_2)}_{1} = x_1^{B_1}$$

$$F_2^{B_2}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_2^{A_2} + x_2^{B_2} - 1$$

Donde $x = (x_1, x_2) = (x_1^{A_1}, x_1^{B_1}, x_2^{A_2}, x_2^{B_2})$

Luego:

$$\frac{\partial F(x\,|\,\boldsymbol{j})}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1^{A_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{A_1}} & \frac{\partial F_1^{A_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{B_1}} & \frac{\partial F_1^{A_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{A_2}} & \frac{\partial F_1^{A_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{B_2}} \\ \frac{\partial F_1^{B_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{A_1}} & \frac{\partial F_1^{B_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{B_1}} & \frac{\partial F_1^{B_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{A_2}} & \frac{\partial F_1^{B_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{B_2}} \\ \frac{\partial F_2^{A_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{A_1}} & \frac{\partial F_2^{A_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{B_1}} & \frac{\partial F_2^{A_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{A_2}} & \frac{\partial F_2^{A_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{B_2}} \\ \frac{\partial F_2^{B_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{A_1}} & \frac{\partial F_2^{B_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{B_1}} & \frac{\partial F_2^{B_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{A_2}} & \frac{\partial F_2^{B_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{B_2}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -x_2^{B_2} & 0 & 0 & -x_1^{A_1} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2^{A_2} & -x_1^{B_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x_2^{B_2}\cdot x_1^{B_1}$$

Luego, evaluando el jacobiano en s, tenemos:

$$J(s|\boldsymbol{j}) \;=\; J\big((B_1,B_2)|(B_1,B_2)\big)$$

$$= \frac{\partial F(s\,|\,\boldsymbol{j})}{\partial x}\Big|_{x=s}$$

$$= s_2^{B_2}\cdot s_1^{B_1} \;=\; 1\cdot 1 \;=\; 1 \;\neq\; 0$$

Por tanto $J(s|\boldsymbol{j})$ es no singular para $\boldsymbol{j}\in C(s)$.

$\therefore$ s es un equilibrio regular de Γ.

Ahora veamos que (A_1, A_2) no es un equilibrio regular:

Sea $s = (A_1, A_2)$. $C(s) = \{(A_1, A_2)\}$. Sea $\boldsymbol{j} = (A_1, A_2) \in C(s)$

$$F_1^{A_1}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_1^{A_1} + x_1^{B_1} - 1$$

$$F_1^{B_1}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_1^{B_1}\left[\mathrm{R}_1(B_1, x_2) - \mathrm{R}_1(A_1, x_2)\right] \;=\; x_1^{B_1}\left[x_2^{B_2}\right],$$ debido a:

$$\mathrm{R}_1(B_1, x_2) \;=\; \mathrm{R}(0, 1, x_2^{A_2}, x_2^{B_2})$$
$$= x_2^{A_2}\underbrace{R_1(B_1, A_2)}_{0} + x_2^{B_2}\underbrace{R_1(B_1, B_2)}_{1} \;=\; x_2^{B_2}$$

$$\mathrm{R}_1(A_1, x_2) = \mathrm{R}_1(1, 0, x_2^{A_2}, x_2^{B_2})$$
$$= x_2^{A_2}\underbrace{\mathrm{R}_1(A_1, A_2)}_{0} + x_2^{B_2}\underbrace{\mathrm{R}_1(A_1, B_2)}_{0} \;=\; 0$$

$$F_2^{A_2}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_2^{A_2} + x_2^{B_2} - 1$$

$$F_2^{B_2}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_2^{B_2}\left[\mathrm{R}_2(x_1, B_2) - \mathrm{R}_2(x_1, A_2)\right]$$

$$\mathrm{R}_2(x_1, B_2) = \mathrm{R}_2(x_1^{A_1}, x_1^{B_1}, 0, 1)$$
$$= x_1^{A_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(A_1, B_2)}_{0} + x_1^{B_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(B_1, B_2)}_{1} \;=\; x_1^{B_1}$$

$$\mathrm{R}_2(x_1, A_2) = \mathrm{R}_2(x_1^{A_1}, x_1^{B_1}, 1, 0)$$
$$= x_1^{A_1}\underbrace{\mathrm{R}_1(A_1, A_2)}_{0} + x_1^{B_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(B_1, A_2)}_{0} \;=\; 0$$

Donde $x = (x_1, x_2) = (x_1^{A_1}, x_1^{B_1}, x_2^{A_2}, x_2^{B_2})$

Luego:

$$\frac{\partial F(x\,|\,\boldsymbol{j}\,)}{\partial x} \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^{B_2} & 0 & x_1^{B_1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_2^{B_2} & 0 & x_1^{B_1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2^{B_2} & 0 & x_1^{B_1} \\ 0 & 1 & 1 \\ x_2^{B_2} & 0 & x_1^{B_1} \end{vmatrix}$$

$$= x_2^{B_2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x_1^{B_1} \end{vmatrix} + x_1^{B_1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_2^{B_2} & 0 \end{vmatrix} = x_2^{B_2} \cdot x_1^{B_1} + (-x_1^{B_1} \cdot x_2^{B_2}) = 0$$

$$\mathrm{J}(\mathrm{s}|\,j\,) \quad = \quad \mathrm{J}\big((A_1,\mathrm{A}_2)\,|\,(A_1,\mathrm{A}_2)\big)$$

$$= \quad \frac{\partial F(s\,|\,\boldsymbol{j}\,)}{\partial x}\Big|_{x=s} = 0$$

Por tanto s no es un equilibrio regular de Γ .

A pesar de considerar al equilibrio regular como el mas estricto refinamiento del concepto de equilibrio de Nash, existen juegos que no poseen equilibrio regular, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. No todos los juegos poseen equilibrios regulares.

	A_2	M_2	B_2
A_1	1, 1	1, 0	0, 0
B_1	1, 1	0, 0	1, 0

Los equilibrios del juego son de la forma: s = {(s_1,A_2); $s_1 \in S_1$ }.
El soporte de s esta dado por: C(s) = {(A_1,A_2), (B_1,A_2)}; sea j = (A_1, A_2)

$$F_1^{A_1}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_1^{A_1} + x_1^{B_1} - 1$$

$$F_1^{B_1}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_1^{B_1}\left[R_1(B_1,x_2) - R_1(A_1,x_2)\right] = \; x_1^{B_1}\left[x_2^{B_2}\right]$$

$$\mathrm{R}_1(B_1,\, x_2) = x_2^{A_2}\underbrace{\mathrm{R}_1(B_1,A_2)}_{1} + x_2^{B_2}\underbrace{\mathrm{R}_1(B_1,B_2)}_{1} = \; x_2^{A_2} + x_2^{B_2}$$

$$\mathrm{R}_1(A_1,x_2) = x_2^{A_2}\underbrace{\mathrm{R}_1(A_1,A_2)}_{1} + x_2^{B_2}\underbrace{\mathrm{R}_1(A_1,B_2)}_{0} = \; x_2^{A_2}$$

$$F_2^{A_2}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_2^{A_2} + x_2^{M_2} + x_2^{B_2} - 1$$

$$F_2^{M_2}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_2^{M_2}\left[R_2(x_1,M_2) - R_2(x_1,A_2)\right]$$

$$\mathrm{R}_2(x_1,\, M_2) = x_1^{A_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(A_1,M_2)}_{0} + x_1^{B_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(B_1,M_2)}_{0}$$

$$\mathrm{R}_2(x_1,\, A_2) = x_1^{A_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(A_1,A_2)}_{1} + x_1^{B_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(B_1,A_2)}_{1}$$

$$F_2^{B_2}(x\,|\,\boldsymbol{j}) = x_2^{B_2}\left[R_2(x_1,B_2) - R_2(x_1,A_2)\right]$$

$$\mathrm{R}_2(x_1,\, B_2) = x_1^{A_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(A_1,B_2)}_{0} + x_1^{B_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(B_1,B_2)}_{0}$$

$$\mathrm{R}_2(x_1,\, \mathrm{A}_2) = x_1^{A_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(A_1,A_2)}_{1} + x_1^{B_1}\underbrace{\mathrm{R}_2(B_1,A_2)}_{1}$$

Luego:

$$\frac{\partial F(x\,|\,\boldsymbol{j})}{\partial x} = \begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1^{A_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{A_1}} & \frac{\partial F_1^{A_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{B_1}} & \frac{\partial F_1^{A_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{A_2}} & \frac{\partial F_1^{A_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{M_2}} & \frac{\partial F_1^{A_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{B_2}} \\
\frac{\partial F_1^{B_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{A_1}} & \frac{\partial F_1^{B_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{B_1}} & \frac{\partial F_1^{B_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{A_2}} & \frac{\partial F_1^{B_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{M_2}} & \frac{\partial F_1^{B_1}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{B_2}} \\
\frac{\partial F_2^{A_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{A_1}} & \frac{\partial F_2^{A_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{B_1}} & \frac{\partial F_2^{A_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{A_2}} & \frac{\partial F_2^{A_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{M_2}} & \frac{\partial F_2^{A_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{B_2}} \\
\frac{\partial F_2^{M_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{A_1}} & \frac{\partial F_2^{M_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{B_1}} & \frac{\partial F_2^{M_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{A_2}} & \frac{\partial F_2^{M_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{M_2}} & \frac{\partial F_2^{M_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{B_2}} \\
\frac{\partial F_2^{B_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{A_1}} & \frac{\partial F_2^{B_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_1^{B_1}} & \frac{\partial F_2^{B_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{A_2}} & \frac{\partial F_2^{B_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{M_2}} & \frac{\partial F_2^{B_2}(x|\boldsymbol{j})}{\partial x_2^{B_2}}
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^{B_2} - x_2^{M_2} & 0 & -x_1^{B_1} & x_1^{B_1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -x_2^{M_2} & -x_2^{M_2} & 0 & -x_1^{A_1} - x_1^{B_1} & 0 \\ 0 & -x_2^{B_2} & -x_2^{B_2} & 0 & -x_1^{A_1} - x_1^{B_1} \end{vmatrix} = 0$$

Evaluando en s tenemos:

$$J(s|j) = J((s_1,A_2)|(A_1,A_2)) = \frac{\partial F_1^{B_1}(x\,|\,j)}{\partial x}\Big|_{x=s} = 0$$

Por lo tanto: s no es equilibrio regular de Γ. Análogamente si tomamos el otro elemento del soporte de s, es decir (B_1, A_2).

$\therefore$ El juego no tiene equilibrios regulares.

SEGUNDA PARTE

CAPÍTULO 6

JUEGOS MATRICIALES Y BIMATRICIALES

Un juego en forma normal para 2 personas $\Gamma = (\Phi_1, \Phi_2, R_1, R_2)$,también es llamado *juego bimatricial.* Usaremos la notación y terminología como usamos para juegos en forma normal para n personas. Así S_i denota el conjunto de estrategias mixtas del jugador i en Γ y $S = S_1 x\ S_2$. Para $s \in S$, el pago esperado $R_i(s)$ del jugador i si s es jugado es definido como en (1.7). Además en esta sección escribimos X_i por $F(\Phi_i, \Re)$, (el conjunto de funciones de Φ_i a $\Re$) y $X = X_1 x\ X_2$. R_i es la extensión de S a X como en (5.1). Note que R_i es bilineal. En efecto: sea que $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, y para todo $j \in \Phi$, tenemos:

$$(a x_1 + b y_1, x_2)(j) = (a x_1 + b y_1)^{j_1} (x_2)^{j_2}$$

$$= (a x_1^{j_1} + b y_1^{j_1})(x_2)^{j_2}$$

$$= a x_1^{j_1} . x_2^{j_2} + b y_1^{j_1} . x_2^{j_2}$$

$$= a(x_1, x_2)(j) + b(y_1, x_2)(j)$$

$$\therefore \quad R_i(a x_1 + b y_1, x_2) = \sum_{j \in \Phi} (a x_1 + b y_1, x_2)(j).R_i(j)$$

$$= \sum_{j \in \Phi} [a(x_1, x_2)(j) + b(y_1, x_2)(j)] .R_i(j)$$

$$= a \sum_{j \in \Phi} (x_1, x_2)(j) R_i(j) + b \sum_{j \in \Phi} (y_1, x_2)(j) R_i(j)$$

$$= a R_i(x_1, x_2) + b R_i(y_1, x_2)$$

De aquí, si $x_1 \in X_1$, entonces R_i y x_1 determinan una función lineal de X_2 a $\Re$, que denotamos por $R_i(x_1)$. De aquí nosotros tenemos que:

$(R_i(x_1))(x_2) = R_i(x_1, x_2)$ para $x_2 \in X_2$.

Similarmente , R_i y x_2 determinan una función lineal $R_i(x_2)$ de X_1 a $\Re$. Decimos que R_i es *fila – regular*, si $R_i(x_1) \neq 0$ para todo $x_1 \neq 0$. R_i es *columna – regular* si $R_i(x_2) \neq 0$, para todo $x_2 \neq 0$, y es *regular* (ó no singular), si R_i es ambos, es decir, es columna-regular y fila-regular.

Sea $s = (s_1, s_2) \in S$. Si el jugador 1 conoce que el jugador 2 jugará s_2, entonces asigna probabilidad positiva solo a las estrategias puras pertenecientes a $B_1(s)$y similarmente se aplica para el jugador 2. Por tanto si s es jugado, los pagos más relevantes son los pagos $R_i(\boldsymbol{j})$, con $\boldsymbol{j} \in B(s)$. Por tanto definimos la *s-restricción* de Γ, como el juego: $\Gamma^s = (\Phi_1^s, \Phi_2^s, R_1^s, R_2^s)$, donde $\Phi_i^s := B_i(s)$ y R_i^s es la restricción de la matriz de R_i a $\Phi^s = \Phi_1^s x \Phi_2^s$. R_i^s es llamado la *s-restricción* de la matriz de pago R_i. Escribimos X_i^s para denotar al conjunto $\mathsf{F}(\Phi_i^s, \Re)$ y extendemos la forma bilineal R_i^s de Φ^s a $X^s := X_1^s x X_2^s$. Un elemento genérico de X_i^s es denotado por x_i^s y la *extensión* de x_i^s a Φ_i es el elemento $x_i \in \mathsf{F}(\Phi_i, \Re)$, definido

$$x_i(\boldsymbol{j}_i) = \begin{cases} x_i^s(\boldsymbol{j}_i), & \text{si } \boldsymbol{j}_i \in \Phi_i^s \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sean s y s´, equilibrios del juego bimatricial Γ, entonces decimos que s y s´ son *intercambiables* si (s_1, s_2') y (s_1', s_2) son también equilibrios de Γ. Un conjunto de equilibrios es llamado *subconjunto maximal de Nash*, si es un conjunto maximal para la propiedad de que todos sus elementos son intercambiables.

TEOREMA 6.1

I. Cada subconjunto maximal de Nash es cerrado y es un poliedro convexo. (i.e. cápsula convexa de un conjunto finito de puntos)
II. El conjunto de equilibrios de Nash es la unión (no necesariamente disjunta) de todos los subconjuntos maximales de Nash.
III. Existen subconjuntos maximales de Nash, sólo en cantidad finita.

Prueba.

Ver [4]

COROLARIO 6.2

Un equilibrio s de un juego bimatricial es aislado si y sólo si {s} es un subconjunto maximal de Nash.

Prueba.

($\rightarrow$) Sea s un equilibrio aislado de Γ, entonces $\exists$V vecindad de s, tal que A:= V$\cap E(\Gamma)$ = {s}. También tenemos que en el conjunto unitario {s}, su único elemento es intercambiable. Veamos que es maximal, en efecto: Supongamos que $\exists$B$\supseteq$A, que contenga estrictamente a A y que sea , subconjunto maximal de Nash. Entonces existe un s´, equilibrio de Nash, tal que s´$\in$B y s´$\notin$A. Sin embargo, por el teorema 6.1, B es un poliedro convexo, entonces, todas las combinaciones convexas de sus elementos pertenecen también a B. Esto se contradice con el hecho que s es aislado. Luego {s} es subconjunto maximal de Nash.

($\leftarrow$) Sea {s} un subconjunto maximal de Nash con s no aislado. Entonces tan cerca de s como se quiera hay otro equilibrio. Pero el conjunto de equilibrios de Nash es la unión de los subconjuntos maximales de Nash: M_1,......, M_h, $\exists h\in\mathbb{N}$. Entonces sin perdida de generalidad, suponemos que {s} = M_1. El conjunto $\bigcup_{j=2}^{h} M_j$ es cerrado y además s$\notin \bigcup_{j=2}^{h} M_j$, pero $\exists$ un equilibrio $\bar{s}$, entre {s} y $\bigcup_{j=2}^{h} M_j$, ($\Rightarrow\Leftarrow$).

$\therefore$ s es aislado.

En juegos bimatriciales podemos asumir que todos los pagos son positivos. En efecto: sea $\Gamma = (\Phi_1, \Phi_2, R_1, R_2)$ un juego bimatricial arbitrario, y sea Γ' el juego que resulta por adicionar un monto fijo a todos los pagos en Γ, de tal manera que en Γ' todos son positivos. Entonces las situaciones estratégicas de Γ' son las misma que en Γ, y así los equilibrios de ambos juegos son los mismos , luego el análisis del juego Γ, es el mismo que del juego Γ'.

Decimos que un juego es *matricial*, cuando es un juego bimatricial $(\Phi_1, \Phi_2, R_1, R_2)$ con R_1 = -R_2 (también son llamados juegos de suma cero). Denotamos el juego matricial en el cual la función de pagos del jugador 1 es R por (Φ_1, Φ_2, R).

PROPOSICIÓN 6.3

Para un juego $\Gamma = (\Phi_1, \Phi_2, R)$, todos sus equilibrios son intercambiables.

Prueba.

Sean $s = (s_1, s_2)$ y $s' = (s_1', s_2')$ elementos de $E(\Gamma)$. Como s y s´ son equilibrios entonces s_1 y s_1' no son superados en pago por ninguna otra estrategia manteniendo a su respectiva estrategia del jugador 2 fija, es decir:

$R(s_1, s_2) \geq R(s_1^*, s_2) \quad \forall s_1^* \in S_1$ .....(I)

$R(s_1', s_2') \geq R(s_1^*, s_2') \quad \forall s_1^* \in S_1$ ...(II)

Análogamente para el jugador 2 tenemos que:

$-R(s_1, s_2) \geq -R(s_1, s_2^*) \quad \forall s_2^* \in S_2 \rightarrow R(s_1, s_2^*) \geq R(s_1, s_2), \forall s_2^* \in S_2$ ....(III)

$-R(s_1', s_2') \geq -R(s_1', s_2^*) \quad \forall s_2^* \in S_2 \rightarrow R(s_1', s_2^*) \geq R(s_1', s_2'), \forall s_2^* \in S_2$ ....(IV)

De la ecuación (I) , para la estrategia s_1', tenemos:

$$R(s_1, s_2) \geq R(s_1', s_2) \quad \text{......(V)}$$

De la ecuación (IV), para la estrategia s_2, tenemos:

$$R(s_1', s_2) \geq R(s_1', s_2') \quad \text{.......(VI)}$$

De (V) y (VI) tenemos que :

$$R(s_1, s_2) \geq R(s_1', s_2) \geq R(s_1', s_2') \quad \text{.....(VII)}$$

Análogamente de las ecuaciones (II) y (III), tenemos :

$$R(s_1', s_2') \geq R(s_1, s_2') \geq R(s_1, s_2) \quad \text{.......(VIII)}$$

De (VII) y (VIII) obtenemos :

$$R(s_1, s_2) = R(s_1', s_2) = R(s_1, s_2') = R(s_1', s_2') \quad \text{....(IX)}$$

Es decir las estrategias (s_1,s_2') y (s_1',s_2) son respuestas óptimas a si mismas, y por tanto son también equilibrios de Nash.

Luego $E(\Gamma)$ es un subconjunto maximal de Nash, y de (IX) todos sus equilibrios producen el mismo pago para el jugador 1. A este pago le llamamos el *valor del juego* Γ y lo denotamos como $v(\Gamma)$.

Definimos los conjuntos:

$$O_1(\Gamma) = \{ s_1 \in S_1;\ R(s_1, l) \geq v(\Gamma), \text{ para todo } l \in \Phi_2 \}, \text{ y} \tag{6.1}$$

$$O_2(\Gamma) = \{ s_2 \in S_2;\ R(k, s_2) \geq v(\Gamma), \text{ para todo } k \in \Phi_1 \} \tag{6.2}$$

A los elementos de $O_i(\Gamma)$ los llamamos *estrategias óptimas* del jugador i en el juego Γ.

PROPOSICIÓN 6.4

El conjunto de todos los equilibrios de Γ, es igual al el producto cartesiano de los conjuntos $O_1(\Gamma)$ y $O_2(\Gamma)$ es decir:

$$E(\Gamma) = O_1(\Gamma) \text{ x } O_2(\Gamma)$$

Prueba.

Sea $(s_1, s_2) \in E(\Gamma)$; entonces esto equivale a:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2 \text{ y además:} \\ R(s_1, s_2) \geq R(s_1', s_2) \quad \forall s_1' \in S_1 \\ -R(s_1, s_2) \geq -R(s_1, s_2') \quad \forall s_2' \in S_2 \end{array} \right.$$

si y sólo si

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2 \text{ y además:} \\ R(s_1, s_2) \geq R(s_1', s_2) \quad \forall s_1' \in S_1 \\ R(s_1, s_2') \geq R(s_1, s_2) \quad \forall s_2' \in S_2 \end{array} \right.$$

si y sólo si

$$\begin{cases} s_1 \in S_1 , s_2 \in S_2 \text{ y además:} \\ v(\Gamma) \geq R(s_1', s_2) \quad \forall s_1' \in S_1 \\ R(s_1, s_2') \geq v(\Gamma) \quad \forall s_2' \in S_2 \end{cases}$$

si y sólo si

$$\begin{cases} s_1 \in S_1 , s_2 \in S_2 \text{ y además:} \\ v(\Gamma) \geq R(k, s_2) \quad \forall k \in \Phi_1 \\ R(s_1, l) \geq v(\Gamma) \quad \forall l \in \Phi_2 \end{cases}$$

si y sólo si $s_1 \in O_1(\Gamma)$ y $s_2 \in O_2(\Gamma)$

Por otro lado tenemos que $O_i(\Gamma)$ es cerrado.

PROPOSICIÓN 6.5

El conjunto $O_i(\Gamma)$ es cerrado.

Prueba.

Para i = 1, tenemos $O_1(\Gamma) = \{ s_1 \in S_1 ; R(s_1, l) \geq v(\Gamma)$, para todo $l \in \Phi_2 \}$, probaremos que:

$$A = \{ s_1 \in S_1 ;\ R(s, l) < v(\Gamma) \text{ para algún } l \in \Phi_2 \}, \text{ es abierto en } \Re^{m_1} .$$

En efecto:

De la continuidad de la función de pago R, definimos las funciones continuas:

$$H_j : S_1 \to \Re$$

$$s_1 \mapsto H_j(s_1) = v(\Gamma) - R(s_1, l_j), \text{ donde } l_j \in \Phi_2, \ \forall j=1,\ldots,m_2$$

Luego el conjunto A queda definido como:

$$A = \{s_1 \in S_1;\ H_j(s_1) > 0, \text{ para algún j de } \{1, \ldots.., m_2\}\}$$

$$= \bigcup_{j=1}^{m_2} \{\ s_1 \in S_1;\ H_j(s_1) > 0\}$$

$$= \bigcup_{j=1}^{m_2} H_j^{-1}(\ ]0, \infty^{+}[\ )$$

Por ser H continua, su imagen inversa lleva abiertos en abiertos, por tanto A es igual a la unión finita de conjuntos abiertos. Luego A es abierta.

$$\therefore \quad O_1(\Gamma) \text{ es cerrada.}$$

Análogamente $O_2(\Gamma)$ es cerrada.

Una *celda convexa* C en $\Re^n$ esta determinado por r puntos z^k , k = 1,.....,r ; este es el conjunto:

$$C = \{z /\ z = \sum_{k=1}^{r} x_k z^k \ ,\ \ x_k \geq 0, \text{ para k = 1, ...,r, } \sum_{k=1}^{r} x_k = 1\}$$

Decimos que un conjunto es un *poliedro convexo*, si es la unión finita de celdas convexas.

Los conjuntos $O_i\ (\Gamma)$ son poliedros convexos; en efecto:

Para cada i = 1,2; el conjunto $O_i(\Gamma)$ esta determinado por los m_i puntos de $\Re^{m_i}$; $j_1,\ldots., j_{m_i} \in \Phi_i$ de la siguiente forma:

Si $s_i \in O_i(\Gamma)$, entonces s_i es la combinación convexa de los j_i es decir $s_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_j j_j$, donde las $j_i \in \Phi_i, \forall$ i = 1, ..., m_i; y además $x_j = s_i^{j_j} \geq 0$, son las probabilidades que s_i asigna a cada estrategia pura del jugador i, y se tiene que $\sum_{j=1}^{m_i} x_j = \sum_{j=1}^{m_i} s_i^{j_j} = 1$.

TEOREMA 6.6.

$s_1 \in O_1(\Gamma)$ si y sólo si $\min\limits_{s_2 \in S_2} R(s_1, s_2) = \max\limits_{s_1' \in S_1} \min\limits_{s_2 \in S_2} R(s_1', s_2)$

Prueba.

$(\rightarrow)$

Supongamos que $s_1 \in O_1(\Gamma)$ entonces $R(s_1, l) \geq v(\Gamma) \quad \forall l \in \Phi_2$, luego para cualquier s_2 combinación convexa de los elementos de Φ_2, se tiene que:

$$R(s_1, s_2) \geq v(\Gamma) \qquad \forall s_2 \in S_2 \qquad \text{.........(I)}$$

Afirmamos que:

$$\min_{s_2 \in S_2} R(s_1, s_2) \geq \min_{s_2 \in S_2} R(s_1', s_2) \qquad \forall s_1' \in S_1 \qquad \text{............(II)}$$

En efecto , supongamos que $\exists s_1' \in S_1 /$

$$\min_{s_2 \in S_2} R(s_1, s_2) < \min_{s_2 \in S_2} R(s_1', s_2)$$

Luego por la definición de mínimo tenemos que:

$$\min_{s_2 \in S_2} R(s_1, s_2) < R(s_1', s_2) \qquad \forall\ s_2 \in S_2$$

Y además, también por la definición de mínimo $\exists s_2' \in S_2$ tal que:

$$R(s_1, s_2') < R(s_1', s_2) \qquad \forall\ s_2 \in S_2$$

Entonces: $v(\Gamma) \leq R(s_1, s_2') < R(s_1', s_2) \qquad \forall\ s_2 \in S_2$

$$\therefore \quad \exists \overline{s_2} \in \operatorname{argmin} R(s_1', s_2)$$

y por lo tanto $(s_1', \overline{s_2}) \in E(\Gamma)$,

pero:

$$v(\Gamma) < R(s_1', \overline{s_2}) \qquad (\rightarrow\leftarrow) \quad s_2 \in O_2(\Gamma)$$

Por otra parte, el lado izquierdo de (II) es una cota superior de los $\min\limits_{s_2 \in S_2} R(s_1', s_2)$, cuando s_1 varia en todo S_1, por tanto:

$$\min_{s_2\in S_2} R(s_1,s_2) \geq \max_{s_1'\in S_1} \min_{s_2\in S_2} R(s_1',s_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{III})$$

Se sigue:

$$\max_{s_1'\in S_1} \min_{s_2\in S_2} R(s_1',s_2) = \min_{s_2\in S_2} R(s_1,s_2),$$

pues con $\boldsymbol{r}\left(\overline{s_1}\right) := \min_{s_2\in S_2} R(s_1,s_2)$ y de (III) ella equivale a:

$$\max_{s_1'\in S_1} \boldsymbol{r}(s_1') \leq \boldsymbol{r}(s_1)$$

de donde se obtiene la igualdad.

Análogamente para el jugador 2 se cumple:

$s_2 \in O_2(\Gamma)$ si y sólo si $\max_{s_1\in S_1} R(s_1,s_2) = \min_{s_2'\in S_2} \max_{s_1\in S_1} R(s_1,s_2')$

Su prueba es análoga a la del teorema 6.3

De (6.1) y (6.2) se sigue que $O_1(\Gamma)$ y $v(\Gamma)$ pueden ser determinados resolviendo el problema de programación lineal (6.3):

Maximizar v

Sujeto a $R(s_1, l) \geq v$ para todo $l\in \Phi_2$, $s_1\in S_1$. (6.3)

O más precisamente: $s_1 \in O_1(\Gamma)$ y $v = v(\Gamma)$ si y sólo si (s_1, v) es una solución de (6.3). En un juego matricial, tenemos la propiedad que una estrategia pura es usada por alguna estrategia optima con probabilidad positiva si y sólo si esta estrategia es una respuesta óptima a de todas las estrategias óptimas de sus oponentes. De aquí.

TEOREMA 6.7

Para un juego matricial Γ, se tiene que:

$$\bigcup_{s_i\in O_i(\Gamma)} C(s_i) = \bigcap_{s_j\in O_j(\Gamma)} B_i(s) \qquad i,j\in\{1,2\},\ i\neq j. \qquad 6.4$$

$$\bigcup_{s \in E(\Gamma)} C(s) = \bigcap_{s \in E(\Gamma)} B(s) \qquad 6.5$$

Prueba.

Ver [3].

Denotamos, el conjunto de estrategias puras los cuales están en el soporte de algún estrategia equilibrio del jugador i en el juego Γ, por $C_i(\Gamma)$, (de aquí $C_i(\Gamma)$ es el conjunto 6.4) y $C(\Gamma)$ denota al conjunto $C_1(\Gamma)xC_2(\Gamma)$.

Así como en los juegos bimatriciales podemos asumir que todos los pagos son positivos, en los juegos matriciales, asumiremos que todos los pagos del jugador 1 son positivos, y los del jugador 2, consecuentemente, negativos.

CAPÍTULO 7

EQUILIBRIOS PERFECTOS EN JUEGOS MATRICIALES Y BIMATRICIALES

En la sección 2 vimos que un equilibrio perfecto siempre es "no dominado", sin embargo no todo equilibrio "no dominado" era necesariamente perfecto.

En esta sección mostraremos que en un juego bimatricial cada equilibrio "no dominado" es perfecto.

LEMA 7.1:

Sea $\Gamma = (\Phi_1, \Phi_2, R_1, R_2)$ un juego bimatricial y sea $s_1 \in S_1$. Definimos el juego matricial $\Gamma(s_1) = (\Phi_1, \Phi_2, R)$, por
$R(k, l) = R_1(k, l) - R_1(s_1, l)$
Entonces s_1 es no dominado si y solo si $v(\Gamma(s_1)) = 0$ y $C_2(\Gamma(s_1)) = \Phi_2$

Prueba.

De la definición de R, observamos que el jugador 1 se garantiza un pago mínimo de 0 por jugar s_1 en el juego $\Gamma(s_1)$, cualquiera que sea la estrategia elegida por el jugador 2, por lo tanto $v(\Gamma(s_1)) \geq 0$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes: (7.1), (7.2), (7.3) y (7.4)

(s_1 es dominada por s_1' en Γ), para algún s_1' (7.1)

$\Leftrightarrow$ $(R_1(s_1', s_2) \geq R_1(s_1, s_2),\ \forall s_2$, y $R_1(s_1', s_2) > R_1(s_1, s_2),\ \exists s_2)\ \exists s_1'$
(Por definición de estrategia dominada)

$\Leftrightarrow$ $(R_1(s_1', l) \geq R_1(s_1, l),\ \forall\, l \in \Phi_2$, y $R(s_1', l) > R_1(s_1, l),\ \exists\, l \in \Phi_2), \exists s_1'$. (7.2)
(Por ser s_2 combinación convexa de los elementos de Φ_2)

$\Leftrightarrow$
$R_1(s_1', l) - R_1(s_1, l) \geq 0$, $\forall\ l \in \Phi_2$, y $R_1(s_1', l) - R_1(s_1, l) > 0$, $\exists\, l \in \Phi_2, \exists s_1'$

$\Leftrightarrow$

$R(s_1', l) \geq 0 \quad \forall\ l \in \Phi_2\ \exists s_1', y \quad R(s_1', l) > 0,\ \exists l \in \Phi_2,\ \exists s_1'$ (7.3)

(por definición de R)

Ahora:

si $v(\Gamma(s_1)) = 0$, tendríamos que:

si $s_2 \in O_2(\Gamma(s_1))$ entonces $R(k, s_2) \leq 0 \quad \forall k \in \Phi_1$

luego debe existir un $l' \in \Phi_2$, tal que $R(k, l') \leq 0 \quad \forall k \in \Phi_1$, (*)

De 7.3 tenemos que: $R(s_1', l) > 0,\ \exists l \in \Phi_2,\ \exists s_1'$

Luego debe existir un k´ tal que $R(k', l) > 0,\ \exists l \in \Phi_2$, (**)

(*) se cumple $\forall k \in \Phi_1$, en particular para k´, de aquí y por (**) tenemos:

$$R(k', l) > 0 \geq R(k, l')$$

Se sigue que: $-R(k', l) < -R(k', l')$, entonces $s_2^l = 0$.

Entonces $l \notin C(s_2)$, luego $l \notin \bigcup_{s_2 \in O_2(\Gamma(s_1))} C(s_2) = C_2(\Gamma(s_1))$

Por lo tanto: $C_2(\Gamma(s_1)) \neq \Phi_2$

Es decir:

Si $v(\Gamma(s_1)) = 0$, entonces $C_2(\Gamma(s_1)) \neq \Phi_2$ (7.4)

También (7.4) implica (7.3), en efecto:

por su definición $O_i(\Gamma(s_1))$ es diferente del vació, luego $\exists s_1' \in O_1(\Gamma)$, entonces:

$$R(s_1', l) \geq v(\Gamma(s_1)) \geq 0 \quad \forall l \in \Phi_2,$$

ahora nos falta verificar que $\exists\ s_1'$ tal que $R(s_1', l) > 0$.

En efecto: Si $v(\Gamma(s_1)) > 0$, acaba la prueba.
Si $v(\Gamma(s_1)) = 0$ entonces por hipótesis: $C_2(\Gamma(s_1)) \neq \Phi_2$, entonces $\exists l \in \Phi_2$ tal que $l \notin C_2(\Gamma(s_1))$

Luego $l \notin \bigcup_{s_2 \in O_2(\Gamma(s_1))} C(s_2)$, entonces $\exists s_2 \in O_2(\Gamma(s_1))$, tal que $l \notin C(s_2)$

De ahí tenemos: $R(k, s_2) \leq 0, \; \forall k$,

Luego tenemos que (7.1) es equivalente a (7.4).

<u>TEOREMA 7.2</u>

Un equilibrio de un juego bimatricial es perfecto si y solo si es no dominado.

Prueba.

Sea $s = (s_1, s_2)$ un equilibrio de un bimatricial $\Gamma = (\Phi_1, \Phi_2, R_1, R_2)$. Como vimos en el corolario 2.7, todo equilibrio perfecto es no dominado, por tanto solo nos faltaría ver que todo equilibrio no dominado es perfecto.

Supongamos que s es no dominado y sea el juego matricial $\Gamma(s_1)$ como en el lema 7.1. Como s_1 es no dominada entonces por ese lema tenemos que $v(\Gamma(s_1)) = 0$ y $C_2(\Gamma(s_1)) = \Phi_2$. De aquí: $s_1 \in O_1(\Gamma(s_1))$, en efecto:

Por la definición de R tenemos que:

$R(s_1, l) = R_1(s_1, l) - R_1(s_1, l) = 0 = v(\Gamma(s_1)) \quad \forall l \in \Phi_2$

Entonces por (6.1): $s_1 \in O_1(\Gamma(s_1))$.

Como $C_2(\Gamma(s_1)) = \Phi_2$ y también $C_2(\Gamma(s_1)) = \bigcup_{s_2 \in O_2(\Gamma(s_1))} C(s_2)$

Tenemos que $\exists s_2' \in O_2(\Gamma(s_1))$, completamente mixta **(¿?)**

Entonces s_1 es respuesta óptima de s_2' en el juego $\Gamma(s_1)$, en efecto:

Supongamos que $\exists s_1' \in S_1$, tal que $R(s_1, s_2') < R(s_1', s_2')$.......(*)

Como $s_1 \in O_1(\Gamma(s_1))$ y $s_2' \in O_2(\Gamma(s_1))$, tenemos que :

$R(s_1, l) \geq v(\Gamma(s_1)) \quad \forall l \in \Phi_2 \;\; \rightarrow \; R(s_1, s_2'') \geq v(\Gamma(s_1)) \;\; \forall s_2'' \in S_2$ ....(**)

$R(k, s_2') \leq v(\Gamma(s_1)) \;\; \forall k \in \Phi_1 \;\; \rightarrow \; R(s_1'', s_2') \leq v(\Gamma(s_1)) \;\; \forall s_1'' \in S_1$.............(***)

En (**) tomando el caso particular para s_2' y en (***) el caso particular para s_1', y reemplazando ambos en (*) tenemos:

$$v(\Gamma(s_1)) \leq R(s_1, s_2') < R(s_1', s_2') \leq v(\Gamma(s_1)) \quad (\rightarrow\leftarrow)$$

Luego: $\forall s_1'' \in S_1$:

$$R(s_1, s_2') \geq R(s_1'', s_2') \qquad \text{..........}(\oplus)$$

$\therefore$ s_1 es respuesta óptima a s_2' en $\Gamma(s_1)$.

Utilizando la definición de R en $(\oplus)$ tenemos:

$$R_1(s_1, s_2') - R_1(s_1, s_2') \geq R_1(s_1'', s_2') - R_1(s_1, s_2) \qquad \forall s_1'' \in S_1$$

$$R_1(s_1, s_2') \geq R_1(s_1'', s_2') \qquad \forall s_1'' \in S_1$$

$\therefore$ s_1 es respuesta óptima de a s_2' en Γ.

Dado $e > 0$ definimos: $s_2(e) = (1 - e)s_2 + e s_2'$, es una estrategia completamente mixta, en efecto:

Para $l \in \Phi_2$ tenemos:

$$s_2^l(e) = (1 - e)\, s_2^l + e.s_2^{l\,\prime}$$

Desde que s_2 es estrategia equilibrio del jugador 2 y s_2' es completamente mixta tenemos que $s_2^l > 0$, $\forall l \in \Phi_2$. De ahí que:

$$(1 - e)\, s_2^l > 0 \qquad \forall l \in \Phi_2$$

$$e\,.\,s_2^{l\,\prime} > 0 \qquad \forall l \in \Phi_2$$

Luego: $s_2^l(e) > 0$, $\forall l \in \Phi_2$

$\therefore$ $s_2(e)$ es completamente mixta.

Del hecho que s_1 es repuesta óptima a s_2', tenemos que s_1 es respuesta óptima a $s_2(e)$; en efecto:

$$(1 - e)\, R_1(s_1, s_2) \geq (1 - e) R_1(s_1', s_2) \qquad \forall s_1' \in S_1$$

$$e\,.\, R_1(s_1, s_2') \geq e.R_1(s_1', s_2') \qquad \forall s_1' \in S_1$$

Por ser R bilineal y por la definición de $s_2(e)$ tenemos:

$\therefore \qquad R_1(s_1, s_2(e)) \;\geq\; R_1(s_1{}',s_2(e)) \qquad \forall s_1{}' \in S_1$

Por lo tanto s_1 es respuesta óptima a $s_2(e)$.

Finalmente tenemos cuando $e \to 0$.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ s_2}}{s_2(e)} \;=\; \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{(1 - e)}s_2 \;+\; \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e}\,s_2{}',$$

Es decir $s_2(e)$ converge a s_2, cuando $e \to 0$.

Análogamente procedemos para el jugador 1 y obtenemos una estrategia completamente mixta $s_1(e) \in S_1$ que converge a s_1 cuando $e \to 0$,tal que s_2 es respuesta óptima a $s_1\,(e)$.

Sea $s(e) = (\,s_1(e), s_2(e))$, tal que $s(e)$ converge a s cuando e tiende a cero, y s es respuesta óptima a $s(e)$.

Luego por el teorema 2.6-iii, tenemos que s es un equilibrio perfecto de Γ.

Este teorema lo utilizamos al momento de verificar que un equilibrio es perfecto, en un juego bimatricial. Solamente verificamos que ambas estrategias son no dominadas. Nos limitamos a la estrategia del jugador 1 (paea el jugador 2 es análogo). Por el lema 7.1 podemos verificar que el valor del juego matricial $\Gamma = (\Phi_1, \Phi_2, R)$ está determinado y que $C_2(\Gamma) = \Phi_2$; además sin perdida de generalidad nos restringimos al caso donde $R(j) > 0$, $\forall j \in \Phi$.

El valor del juego lo determinamos desarrollando el problema de programación lineal (6.3), para esto es conveniente realizar el siguiente cambio de variables: $x_1 = s_1/v$ (Desde que $R(j) > 0$, $\forall j \in \Phi$, tenemos que $v(\Gamma) > 0$. Con este cambio de variables el sistema 6.3, quedará , como a continuación mostramos:

Minimizar $x_1(\Phi_1)$
Sujeto a $R(x_1, l) \geq 1$ para todo $l \in \Phi_2 \; x_1 \in X_1, \; x_1 \geq 0$ (7.5)

Donde $x_1(\Phi_1) = \sum_k x_1^k$

TEOREMA 7.3:

i. Si (s_1, v) resuelve (6.3) entonces s_1/v resuelve (7.5); y
ii. Si x_1 resuelve (7.5) entonces $(x_1(\Phi_1))^{-1}(x_1,1)$ resuelve (6.3).

Prueba.
(i.)
Supongamos que (s_1, v) resuelve (6.3).

Como: $x_1 = \dfrac{s_1}{v}$ entonces $x_i^k = \dfrac{s_1^k}{v}$,

Luego $x_1(\Phi_1) = \sum_k x_i^k = \dfrac{\sum_k s_1^k}{v} = \dfrac{1}{v}$ ....(*)

Por hipótesis v es el máximo posible entonces $x_1(\Phi_1)$ es el mínimo posible.

Por otro lado, por hipótesis $R(s_1, l) \geq v \;\; \forall l \in \Phi_2, \;\; s_1 \in S_1$.

De la bilinealidad de R y por ser $v > 0$ se obtiene:

$$R\left(\frac{s_1}{v}, l\right) \geq 1. \qquad \forall l \in \Phi_2, \;\; s_1 \in S_1$$

Por ser $v > 0$ entonces $\dfrac{s_1}{v} \geq 0$

Luego $R(x_1, l) \geq 1 \quad \forall l \in \Phi_2, x_1 \in X_1. \; x_1 \geq 0$

$\therefore \; x_1$ resuelve 7.5

(ii.)

Supongamos que x_1 resuelve 7.5

De (*): $x_1(\Phi_1) = \frac{1}{v}$. Como $x_1(\Phi_1)$ es mínimo entonces v es máximo, y además $v = (x_1(\Phi_1))^{-1}$. Por hipótesis:

$$R(x_1, l) \geq 1 \qquad \forall l \in \Phi_2,\ x_1 \in X_1, x_1 \geq 0$$

Como $v > 0$:

$$R(x_1 . v, l) \geq v \qquad \forall l \in \Phi_2,\ x_1 \in X_1, x_1 \geq 0$$

Luego:

$$R(s_1, l) \geq v \qquad \forall l \in \Phi_2,\ s_1 \in S_1.$$

COROLARIO 7.4.

$l \in C_2(\Gamma)$ si y solo si $R(x_1, l) = 1$, para todo x_1 que resuelve (7.5)

.......(7.6)

Prueba.

$(\Rightarrow)$

Sea $l \in C_2(\Gamma) \Rightarrow \exists s_2 \in O_2(\Gamma) /\ l \in C(s_2)$

$$\Rightarrow l \in B_2(s) \text{ i.e. } R(s_1, l) \geq R(s_1, s_2'), \quad \forall s_2' \in S_2$$

Como $v > 0$ tenemos: $R(\frac{s_1}{v}, l) \geq R(\frac{s_1}{v}, s_2'), \quad \forall s_2' \in S_2$

Entonces: $R(x_1, l) \geq R(x_1, s_2'), \quad \forall s_2' \in S_2$

En particular para s_2: $R(x_1, l) \geq R(x_1, s_2), \quad s_2 \in S_2$ ....(**)

Por otra parte como $s_2 \in O_2(\Gamma)$ entonces:

$$R(k, s_2) \leq v, \quad \forall k \in \Phi_1$$

Luego: $R(s_1', s_2) \leq v, \quad \forall s_1' \in S_1,$

Por ser R bilineal, y $v > 0$, se tiene:

$$R\left(\frac{s_1'}{v}, s_2\right) \leq 1. , \quad \forall s_1' \quad \text{(1 es cota superior)}$$

Luego para el caso particular de s_1, tenemos:

$$R(x_1, s_2) \leq 1, \quad \text{donde } x_1 \in X_1 \quad ....(***)$$

De (**) , (***) y por ser el máximo la menor de las cotas inferiores, se tiene:

$$R(x_1, s_2) \leq R(x_1, l) \leq 1, \qquad (\text{I})$$

Sea $x_1 \in X_1$, el cual resuelve (7.5), entonces:

$$R(x_1, l') \geq 1 \text{ para todo } l' \in \Phi_2 \; x_1 \in X_1, \; x_1 \geq 0 \qquad (\text{II})$$

En particular para l en (II) y de (I) tenemos:

$$1 \leq R(x_1, l) \leq 1,$$

$$\therefore R(x_1, l) = 1$$

$(\Leftarrow)$

Sea $R(x_1, l) = 1$, para todo x_1 el cual resuelve (7.5)

$$R\left(\frac{s_1}{v}, l\right) = 1, \qquad \forall s_1 \in \mathbf{S_1}$$

Por ser R bilineal: $\quad R(s_1, l) = v \quad \forall s_1 \in S_1$

Entonces: $\quad R(k, l) = v \quad \forall k \in \Phi_1$

Luego $s_2 = l \in O_2(\Gamma)$, donde $l \in C(l)$

$$\therefore l \in C_2(\Gamma)$$

De manera análoga a (7.5) tenemos (7.7) en el cual realizamos el siguiente cambio de variable: $x_2 = \frac{s_2}{v}$:

Minimizar $x_2(\Phi_2)$
Sujeto a: $R(k, x_2) \leq 1, \quad \forall k \in \Phi_1 \quad x_2 \in X_2, x_2 \geq 0$ (7.7)

Donde $x_2(\Phi_2) = \sum_l x_2^l$

Consideremos (7.5) y (7.7) a la vez. Tenemos que x_1 resuelve (7.5) y x_2 resuelve (7.7) si y sólo si (x_1, x_2) es una solución al siguiente sistema de inecuaciones:

$$x_1(\Phi_1) = x_2(\Phi_2) = \frac{1}{v}$$

$R(x_1, l) \geq 1$, para todo $l \in \Phi_2$
$R(k, x_2) \leq 1$, para todo $k \in \Phi_1$
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (7.8)

(7.6) nos conduce al siguiente problema de programación lineal, en el cual $R(x_1, \Phi_2) = \sum_{l \in \Phi_2} R(x_1, l)$:

maximizar $R(x_1, \Phi_2)$
sujeto a $x_1(\Phi_1) = x_2(\Phi_2)$,
$R(x_1, l) \geq 1$ para todo $l \in \Phi_2$
$R(k, x_2) \leq 1$ para todo $k \in \Phi_1$
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (7.9)

TEOREMA 7.5

Sea $\Gamma = (\Phi_1, \Phi_2, R)$ un juego matricial con $R(j) > 0$, $\forall j \in \Phi$. Entonces:

i. $v(\Gamma) = (x_1(\Phi_1))^{-1}$, donde x_1 es tal que (x_1, x_2) resuelve (7.9)
ii. $C_2(\Gamma) = \Phi_2$ si y sólo si el valor del problema de programación lineal (7.9) es m_2. (El número de elementos de Φ_2).

Prueba.

(i.) (*) de la demostración del teorema (7.3), completa la prueba.

(ii.) $(\Rightarrow)$

Sea $C_2(\Gamma) = \Phi_2$, tenemos:

$$l \in \Phi_2 \quad \Leftrightarrow \quad l \in C_2(\Gamma)$$

$\Leftrightarrow$ $R(x_1, l) = 1$, para todo x_1 que resuelva (7.5)

Entonces: $\sum_{l \in \Phi_2} R(x_1, l) = 1 + 1 + \ldots\ldots.$ (m_2 veces)

Por lo tanto: $R(x_1, \Phi_2) = m_2$

$(\Leftarrow)$ Análogo.

Asi se puede verificar en un juego bimatricial, si una estrategia para el jugador 1 es dominada. Análogamente para el jugador 2 y por tanto se verifica si un equilibrio del juego es perfecto.

BIBLIOGRAFÍA

[1] DAMM E, ERIC VAN - Stability and Perfection o*f Nash Equilibria.* Springer and Verlang. Second Edition. Berlin, 1996.

[2] FUDEMNBERG AND TIROLE - Game *Theory*. The MIT Press. Cambriage, Masachusetts. Second Edition. London England, 1992.

[3]GALE AND SHERMAN- Solutions of Finite Two-person Games pp 3749. Princeton University Press, Princeton. 1950.

[4] JANSEN, M. J. M. Maximal *Nash Subsets for Bimatrix* Games. Naval Res. Logist. Quart 28, 147-152. 1981

[5] NAS.H, *J..F. - Equilibirum Points in n-person g*ames. Proc. Nat. Acad. U. S.A.. 36, 48-49. 1950.

[6] ROSEN, J B. *Existence and Uniqueness of Equilibrios Points for Concave n - Person* Games. Econometria 33, 520 - 534. 1965

RELACIONES ENTRE LOS REFINAMIENTOS DEL CONCEPTO DE EQUILIBRIO DE NASH PARA JUEGOS EN FORMA NORMAL