Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

“Existencia de soluciones débiles de un sistema elíptico no local semilineal”

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

ASESOR

Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2018

Referencia bibliográfica

Barahona, W. (2018). *"Existencia de soluciones débiles de un sistema elíptico no local semilineal"*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas / Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

728 P.
710 P.

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las 11:30 horas del día miércoles 04 de julio del dos mil dieciocho, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro e integrado por los siguientes miembros, Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (Jurado Informante); Mg. Jorge Icaro Condado Jáuregui (Jurado Evaluador), Mg. Claudio Fernando Balcázar Huapaya (Jurado Informante) y el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES DE UN SISTEMA ELÍPTICO NO LOCAL SEMILINEAL» presentada por el Bachiller Willy David Barahona Martínez para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Willy David Barahona Martínez respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Willy David Barahona Martínez aprobado con el calificativo de ...Muy... ...Bueno (18)...............

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional** al Bachiller Willy David Barahona Martínez.

Siendo las 12:56 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
PRESIDENTE

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
MIEMBRO

Mg. Jorge Icaro Condado Jáuregui
MIEMBRO

Mg. Claudio Fernando Balcázar Huapaya
MIEMBRO

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
MIEMBRO ASESOR

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES DE UN SISTEMA ELÍPTICO NO LOCAL SEMILINEAL

Por

Willy David Barahona Martínez

Tesis sometida al Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos - UNMSM, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del grado de Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

Aprobado por:

....

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

Presidente del Jurado Evaluador de Tesis

....

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra

Miembro del Jurado Evaluador de Tesis

....

Mg. Jorge Icaro Condado Jáuregui

Miembro del Jurado Evaluador de Tesis

....

Mg. Claudio Fernando Balcazar Huapaya

Miembro del Jurado Evaluador de Tesis

....

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Miembro Asesor de Tesis

LIMA - PERÚ

Julio - 2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Willy David Barahona Martínez

Existencia de Soluciones Débiles de un Sistema Elíptico no Local Semilineal, (Lima) 2018.VIII.,79p.,29.7cm (UNMSM, Maestría en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional, 2018) Tesis de Maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. Matemática Aplicada, UNMSM/FCM II.

RESUMEN

Existencia de Soluciones Débiles de un Sistema Elíptico no Local Semilineal

Willy David Barahona Martínez

04 de Julio de 2018

Asesor : Dr. Eugenio Cabanillas Lapa.

Grado obtenido : Magister en Matemática Aplicada.

En esta tesis, consideramos un sistema elíptico no local semilineal en dominios acotados con una condición de frontera de Dirichlet homogénea. Mostramos la existencia y regularidad de soluciones débiles positivas utilizando el método de Galerkin, una variante bien conocida del Teorema del Punto Fijo de Brouwer, el principio de comparación y un argumento "Bootstrap ". Además se presenta un esquema numérico.

Palabras claves:

Sistemas elípticos no locales semilíneales, soluciones débiles, método de Galerkin, métodos numéricos.

ABSTRACT

Existence of Weak Solutions for a Semi-linear Non Local Elliptical System

Willy David Barahona Martínez

04 July 2018

Adviser	: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa.
Obtained	: Master in Applied Mathematics.

In this thesis, we consider a semi-linear non-local elliptic system in bounded domains with a homogeneous Dirichlet boundary condition. We show the existence and regularity of positive weak solutions using the Galerkin method, a well-known variant of Brouwer, Fixed-Point Theorem, the comparison principle and a “Bootstrap ” argument. In addition, a numerical scheme is presented.

Keywords:

Semilinear nonlocal elliptic systems, weak solutions, the Galerkin method, numerical methods.

AGRADECIMIENTOS

Al terminar esta etapa de mi vida, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todos que con su ayuda, apoyo, paciencia y comprensión me alentaron a lograr esta hermosa realidad.

Agradezco a Dios por ser mi fortaleza cada día, a mis padres *David Barahona*† y Bernardina Martínez, a mis suegros *Miguel De La Cruz*† y Saturnina Marcacuzco, a mis hermanos Mauro, Nelly, César, Dora y Esther, quienes contribuyeron activamente en mi desarrollo personal y académico.

También deseo expresar mi gratitud, a mi maestro y tutor Dr. Eugenio Cabanillas Lapa por su apoyo y sus consejos para culminar satisfactoriamente el objetivo trazado; a los docentes de la Facultad de Ciencias Matemáticas − UNMSM, especialmente al *Dr.Raúl Moisés Izaguirre Maguiña*† . Un millón de gracias a mis compañeros de carpeta Luís M, Leonardo D, Gabriel R, Pedro B, Rosa M, Edinson M, Emilio C, Maruja G, Teodoro S, Jesús L, Carlos M, Carlos B, Abraham A, Domingo O y *César P*†, por el compañerismo que aún siguen mostrando.

Así mismo agradezco al Vicerrectorado de Investigación y Posgrado (VRIP) de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, que a través del "Programa de Promoción de Tesis de Posgrado para Docentes de la UNMSM ", hizo posible culminar este trabajo de Tesis.

Finalmente agradezco eternamente y de manera muy especial a mi adorada y apreciada esposa, compañera de estudios y colega Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco, quien continúa compartiendo mis tristezas, alegrías y éxitos en mi vida, así como en los estudios de pre y posgrado, este logro también es tuyo.

DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico a mis padres, hermanos, suegros y de manera especial a mi esposa ROCÍO e hijos SOFÍA y DANIEL.

CONTENIDO

1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales son de vital importancia en el modelaje y la descripción de fenómenos físicos en la Dinámica de fluidos, mecánica de los medios continuos, teoría de la Relatividad, Química, Biología, etc. Una parte importante de estas ecuaciones son del tipo elíptico no lineal. La dificultad de obtener estimativas a priori así como la falta de una estructura variacional proporcionan un obstáculo natural a la aplicación de las principales técnicas utilizadas para hallar soluciones en problemas elípticos. Esta dificultad es aún mayor si la ecuación es íntegro-diferencial, constituyendo así un problema elíptico no local. Estos problemas en general no tienen estructura variacional, por lo que las técnicas variacionales usuales no son aplicables.

Un gran número de fenómenos pueden ser modelados por ecuaciones de la forma

$$u_t - \Delta u = f(x, u, Bu)$$

donde B es un operador no local que, en las aplicaciones puede escribirse en la forma

$$Bu = \int_\Omega b(x)[u(x)]^\beta dx$$

En particular, al considerar las soluciones estacionarias de los sistemas parabólicos asociados (como modelos para ignición de un gas comprensible), debemos estudiar un sistema elíptico no local del tipo

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u = f(x, u, B_1 v) \\ \\ -\Delta v = g(x, v, B_2 u) \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Un problema relevante consiste en determinar la existencia de soluciones positivas débiles de este sistema, así como su regularidad.

Los sistemas elípticos no locales del tipo (1.1) son importantes porque aparecen en las Ciencias Aplicadas, por ejemplo como modelos para ignición de gas comprensible o fenómenos físicos donde la temperatura tiene un rol central al desencadenar una reacción.

En efecto, su rango de estudio es desde la Física e Ingeniería a la Dinámica de Poblaciones. Estos problemas parabólicos son de especial interés en teoría de Reacción − Difusión.

En este trabajo de tesis estudiaremos el sistema elíptico no local

$$(P_\lambda) \qquad \left| \begin{array}{l} -\Delta u(x) + \lambda \displaystyle\int_\Omega v^p(y)\,dy = u^\alpha(x) + v^\beta(x), \quad x \in \Omega \\ -\Delta v(x) + \lambda \displaystyle\int_\Omega u^q(y)\,dy = u^\gamma(x) + v^\delta(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) > 0, v(x) > 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) = v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$ es un dominio acotado bien regular; $p, q > 0$; $\lambda \in \mathbb{R}^-$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes positivas ($\mathbb{R}^+$); basado en el paper de Cabada [5], y que corresponde al proceso estacionario asociado al Sistema de Reacción − Difusión.

$$\left| \begin{array}{l} u_t - \Delta u(x) + \lambda \displaystyle\int_\Omega v^p(y)\,dy = u^\alpha(x) + v^\beta(x), \quad x \in \Omega \\ v_t - \Delta v(x) + \lambda \displaystyle\int_\Omega u^q(y)\,dy = u^\gamma(x) + v^\delta(x), \quad x \in \Omega \end{array} \right.$$

Los sistemas de dos ecuaciones que incluyen términos no locales han sido recientemente considerados, por lo que una explicación didáctica del paper referencial [5] permitirá comprender la metodología usada por los autores en la resolución de estos problemas, sirviendo como un sólido peldaño de apoyo para el avance matemático actual en la comunidad científica de nuestro país.

2 Preliminares

Comencemos introduciendo las nociones topológicas básicas que son indispensable en el desarrollo de este trabajo.

Definición 1. *Dado un conjunto no vacío X una familia τ de subconjuntos de X se dice una* ***topología*** *en X si, y sólo si, satisface cada uno de los siguientes axiomas:*

T_1 : *El conjunto vacío y X pertenecen a τ.*

T_2 : *La intersección de cualquier par de miembros de τ esta en τ.*

T_3 : *La unión arbitraria de miembros de τ esta en τ.*

Si τ es una topología en X, al par (X, τ) se le conoce como ***espacio topológico.***

Definición 2. *Dados dos espacios topológicos (X, τ) y $(Y, \mathcal{U})$ una función $f : X \to Y$ se dice continua si, y sólo si, $f^{-1}(U) \in \tau$ para cada $U \in \mathcal{U}$.*

También es posible definir lo que significa que una función $f : X \to Y$ es continua en un punto $x_0 \in X$, de la siguiente manera:

Definición 3. *Sea X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua en un punto $x_0 \in X$ si para cada vecindad V de $f(x_0)$ en Y existe una vecindad U de x_0 en X talque $f(U) \subseteq V$.*

De estas dos últimas definiciones se concluye de manera inmediata que una función $f : X \to Y$ es continua si, y sólo si, f es continua en x para cada $x \in X$.

2.1. Espacios de Banach

Los Espacios de Banach, son objetos de estudio indispensable en el Análisis Funcional y reciben su nombre en honor a Stefan Banach $(1892 - 1945)$.
Salvo mención contraria, todos los espacios de este trabajo están definidos sobre el campo real.

Definición 4. *Un espacio vectorial V se dice* ***normado*** *si, y sólo si, existe una función* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *(denominada norma en V) tal que, para todo* $u, v \in V$ *satisface:*

(i) (Positividad) $\|u\| \geq 0$ *y* $\|u\| = 0$ *si, y sólo si,* $u = 0_V$.

(ii) (Cambio de escalar) $\|\alpha\, u\| = |\alpha|\, \|u\|$ *para cualquier escalar* α.

(iii) (Desigualdad triangular) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para todo* $u, v \in V$.

Al par (V, $\|\|$*) se le denomina* ***Espacio vectorial normado.***

Obs: Si en *(i)* no se exige la segunda parte, la función $\|.\|$ se llama seminorma.

Definición 5. *La distancia asociada a una norma* $\|\cdot\|$ *es d(x,y)=*$\|x - y\|$*. Se verifica que efectivamente d es una métrica. La topología asociada a una norma es la topología de espacio métrico inducida por la distancia asociada.*

Los límites de sucesiones en espacio normados y de funciones entre espacio normados, se suponen respecto a la topología asociada. Por ejemplo, la continuidad de una función f *entre dos espacio normados* X, Y *en un punto* $a \in X$ *se expresa como: Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$\|x - a\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Si el espacio métrico X *es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy en* X *converge*

$$\Big(\forall (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq X : \qquad \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in X : \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\Big)$$

decimos que el espacio vectorial normado X *es un* ***Espacio de Banach.***

Para continuar recordemos que, si X, Y son espacio vectoriales, ambos sobre el mismo campo, la función $T : X \to Y$ que satisface $T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z)$, para escalares α, β y $x, z \in X$, es llamado **operador lineal.**

Si X, Y son espacio normados podemos definir la noción de un operador lineal acotado, y como veremos la acotabilidad de un operador es equivalente a su continuidad.

Definición 6. *Sean* X, Y *dos espacios normados. Un operador lineal* $T : X \to Y$ *es acotado si existe una constante* $M \geq 0$ *tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, definimos la norma del operador T mediante

$$\|T\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|}; \qquad \|T\| := \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|; \qquad \|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Teorema 1. *Un operador lineal es acotado si, y sólo si, es continuo.*

Demostración. Ver [25]pag.64
El conjunto $L(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales que aplican de X en Y, y $B(X, Y)$ el conjunto de todos los operadores en $L(X, Y)$ que son acotados. Éste último es un espacio de Banach, si Y es un espacio de Banach.

Definición 7 (Inmersión). *Un espacio normado X se dice que está inmerso en un espacio normado Y, y se denota $X \hookrightarrow Y$, si:*

(i) X es subespacio vectorial de Y, y.

(ii) El operador identidad I definido sobre X es continuo, esto es

$$\exists C > 0 : \, |x|_Y \leq C|x|_X, \, \forall x \in X.$$

Una clase importante de espacios de Banach que permite generalizar propiedades algebraicas y geométricas del espacio Euclídeo es el espacio de Hilbert. El nombre es dado en honor al matemático David Hilbert quien lo utilizó en sus estudios sobre ecuaciones integrales en 1912.

Definición 8. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}(\mathbb{R}\, ó\, \mathbb{C})$. Un* ***producto escalar*** *o* ***producto interno*** *definido en X es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ que verifica:*

(i) (Aditiva) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ para todo $u, v, w \in X$.

(ii) (Homogénea) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

(iii) (Hermítica) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ para todo $u, v \in X$.

(iv) (Definida positiva) $\langle u, u\rangle \geq 0$ y $\langle u, u\rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

Toda aplicación que verifica (i), (ii) y (iii) se llama forma ***sesquilineal hermítica.*** *En este caso X es llamado espacio con* ***producto interno*** *o* ***Pre-Hilbert.***

Note que todo espacio Pre-Hilbert es normado, con la norma

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

y por tanto es también métrico, con la distancia

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Para cualquier $u, v \in V$, se cumple

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

Ver[25]pag.12

De donde es natural, estudiar el caso en que dicho espacio es completo.

Definición 9. *Un **espacio de Hilbert** es un espacio pre-Hilbert completo con respecto a la métrica asociada. Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interior.*

La noción de convergencia de sucesiones de números reales nos da la idea de la generalización de la convergencia de sucesiones en un espacio lineal normado.

Definición 10. *Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado es convergente a un elemento f del espacio sí, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ tenemos $\|f - f_n\| < \varepsilon$. Si f_n converge a f escribimos $f = \lim f_n$ o $f_n \to f$.*

Definición 11. *Un espacio normado es llamado completo si toda sucesión de Cauchy en el espacio es convergente; es decir, si para toda sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio normado, existe f en el espacio tal que, $f_n \to f$.*

Definición 12. *Una serie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado, es llamada convergente a la suma s, si s está en el espacio y la sucesión de sumas parciales de la serie converge, esto es,*

$$\left\| s - \sum_{i=1}^{n} f_i \right\| \to 0.$$

En este caso se escribe $s = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$. La serie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es llamada absolutamente convergente si $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\| < \infty$, $n \to +\infty$

Proposición 1. *Un espacio normado lineal X es completo si, y solo si, cada serie absolutamente convergente, es convergente en X.*

Demostración. Ver [24]pag.30

Definición 13. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; llamamos* ***espacio dual algebráico*** *de X, que denotamos por, X^*, al $\mathbb{R}$ espacio vectorial*

$$X^* = \{x^* : X \to \mathbb{R} / \, x^* \quad \textit{es lineal y continuo}\}.$$

En este espacio disponemos de una norma que se puede expresar de varias formas, como son

$$\begin{aligned} \|x^*\| &= \text{mín}\{K > 0 : \, |x^*(x)| \leq K \, \|x\| \quad \textit{para todo} \quad x \in X\} \\ &= \sup\{|x^*(x)| \, : \, x \in X, \, \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

para $x^* \in X^*$.

La completitud de $\mathbb{R}$ nos asegura que X^* es un espacio completo. El espacio de Banach X^* recibe el nombre de ***Espacio dual topológico*** *del espacio normado X, para diferenciarlo del dual algebráico.*

Teorema 2 (Teorema de representación de Riesz). *Sea X un espacio de Hilbert y un funcional lineal $x^* \in X^*$ entonces existe un único $y \in X$ tal que $x^*(x) = \langle x, y \rangle$, para todo $x \in X$ y en este caso $\|x^*\|_{X^*} = \|y\|_X$.*

Demostración. Ver [15] pag.81

Topologías débil y débil-*

En espacios infinitos dimensionales los conjuntos compactos y sucesiones convergentes son pocos. Como los conjuntos compactos son sumamente importantes en el Análisis Funcional y sus aplicaciones, no es conveniente en estos espacios, la topología inducida por la norma. Por lo que debemos considerar otro tipo de topologías (topologías débiles) de modo que podamos conseguir más conjuntos compactos y sucesiones convergentes.
Introducimos ahora la topología débil en un conjunto dado X, para lo cual necesitamos

ver primero algunas nociones generales de la topología.

Una forma bastante usual es describir las funciones continuas después que tenemos una topología en X, pero el procedimiento inverso es quizas más útil. En otras palabras dada una colección de funciones $\mathcal{F}$ de un conjunto X a un espacio topológico Y,

¿Podemos construir una topología en X, bajo la cual cada elemento de $\mathcal{F}$ sea continuo?

Si a X se le dota de la topología discreta entonces cada función de X a Y es continua, mientras que si a X se le dota de la topología trivial o indiscreta entonces solo las funciones constantes son continuas.

En general, requerimos de una situación intermedia. De hecho, queremos saber si existe topología "más pequeña" (ó más débil) que haga que cada elemento de $\mathcal{F}$ sea continuo; la respuesta es sí, y está basada en el siguiente

Lema 1 (De sub-bases). *Sea X un conjunto dado y S una colección de subconjuntos de X. Entonces, existe "la más pequeña "topología τ en X, que contiene a S. Más aún,*

$$S' = \{\emptyset; X\} \cup S$$

forma una sub-base para τ. En otras palabras los conjuntos de la forma $S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_l$, donde $S_i \in S'$ para $i = 1, 2, ..., l$ son una base para τ.

Consideramos un conjunto de funciones $\mathcal{F}$, de X en un espacio topológico Y, tomemos "la más pequeña "topología τ conteniendo los conjuntos

$$S = \{f^{-1}(U) : \quad f \in \mathcal{F},\, U\, es\, abierto\, en\, Y\}$$

(esta topología τ existe por el Lema).
Debido a que cada elemento de S será un abierto en la nueva topología τ, cada elemento de $\mathcal{F}$ será contínuo.
La topología τ se llama la topología débil (inducida por $\mathcal{F}$)en X.

Observación: Para la construcción de topologías débiles, no es necesario tener un espacio(de rango) fijo Y. Podemos darnos una colección $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$, con $f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$ (Y_α: espacio topológico), y considerar la topología generada por

$$S = \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha): \quad U_\alpha\, es\, abierto\, en\, Y_\alpha,\, para\, \alpha \in I\}$$

Teorema 3. *Sea X un espacio de Banach, $(u_\nu)_{\nu\geq 1} \subseteq X$, $u \in X$. La sucesión $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ converge a u según la topología débil τ si y sólo si*

$$f(u_\nu) \to f(u), \forall f \in X'$$

En este caso denotamos $u_\nu \rightharpoonup u$, y decimos que (u_ν) converge débil a u (en X).
Demostración. Ver [25]pag.266.

Corolario 1. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces*

$$u_\nu \rightharpoonup u \quad en \quad H \quad \Leftrightarrow \quad \langle u_\nu, v\rangle_H \to \langle u, v\rangle_H, \quad \forall v \in H.$$

Demostración. Ver [15]pag. 40

Teorema 4 (**Teorema de Hanh Banach, 1927**). *Sea Y un subespacio de un espacio normado X. Si $y^* \in Y^*$ entonces existe $x^* \in X^*$ tal que*

$$\|x^*\|_{X^*} = \|y^*\|_{Y^*} \quad y \quad x^*(y) = y^*(y)\, \forall y \in Y$$

Esto significa que, todo funcional continuo en un subespacio de X admite una extensión lineal y continua a todo X.
Demostración. Ver [25]pag.43

Espacios Reflexivos

Si X es un espacio normado, el espacio bidual, también llamado segundo dual de X, es el espacio de Banach $X^{**} := (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{K})$, con norma

$$\begin{aligned} \|x^{**}\| &:= \sup\{|x^{**}(x^*)| : x^* \in B_{X^*}\} \\ &= \text{mín}\{K > 0 : |x^{**}(x^*)| \leq K\,\|x^*\| \quad \text{para todo} \quad x^* \in X^*\}. \end{aligned}$$

Definición 14. *Sea X un espacio normado y consideremos el operador lineal*

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) \end{aligned}$$

definida por

$$J(x)(x^*) := x^*(x), \quad \text{para todo} \quad x^* \in X^*.$$

A J se le llama ***inyección canónica*** *del espacio X en su bidual por lo que J identifica a X con un subespacio de X^{**}, simbólicamente $J(X) \equiv X$.*

Definición 15. *Se dice que, un espacio de Banach es* ***reflexivo****, cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.*

En este caso J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, podemos escribir

$$X \equiv X^{**}.$$

Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y funciones medibles

Definición 16.

(a) Una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una $\sigma-$álgebra en X si $\mathcal{M}$ tiene las siguientes propiedades:

(i) $X \in \mathcal{M}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{M}$ entonces $A^C \in \mathcal{M}$.

(iii) Si $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, ..$ entonces $A \in \mathcal{M}$.

(b) Si $\mathcal{M}$ es un ***$\sigma-$álgebra en X****, entonces se dice que X es un espacio medible y a los elementos de $\mathcal{M}$ se les llama conjuntos medibles en X.*

(c) Se llama ***medida positiva*** *a una función, definida en un $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}$ con valores en $[0, +\infty]$ y que es* ***numerablemente aditiva****, esto significa que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección numerable disjunta de elementos de $\mathcal{M}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

*(d) Se llama **espacio de medida** a un espacio medible en el que, se tiene definida una medida positiva sobre la $\sigma-$álgebra de sus conjuntos medibles.*

La contribución de Henri Lebesgue (1875-1941) más importante a la matemática fue la teoría de integración desarrollada por Lebesgue donde extendió la teoría de Riemann a una clase más amplia de funciones.

Definición 17. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define la medida exterior de Lebesgue de Ω como*

$$m^*(\Omega) = \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} Vol(Q_n),\ \Omega \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\ Q_n \quad \textit{rectángulos cerrados}\right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las familias numerables de rectángulos que cubren a Ω.

La medida exterior m^* es la función de conjuntos, definida en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (conjunto de partes de $\mathbb{R}^n$), la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, y con valores en $[0, +\infty]$.

El siguiente teorema recoge las propiedades más importantes de la medida exterior de Lebesgue:

Teorema 5 (Propiedades de la medida exterior). *(i) $m^*(\emptyset) = 0$.*

(ii) (Monotonía) Si $A \subseteq B$, $m^*(A) \leq m^*(B)$.

(iii) (Subaditividad) Sea $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos; entonces

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\Omega_n).$$

(iv) (Regularidad)

$$m^*(\Omega) = \text{ínf}\left\{m^*(G) \,:\, G \quad \textit{abierto}, \quad \Omega \subseteq G\right\}.$$

(v) (Invariante por traslaciones) Para todo conjunto Ω y todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$m^*(x + \Omega) = m^*(\Omega).$$

Demostración. Ver [19]pag.32

Sin embargo la medida exterior falla, en una propiedad fundamental respecto al volumen: no es cierto en general que si A y B son conjuntos disjuntos, se tenga $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

Definición 18. *Un conjunto Ω se dice **Lebesgue medible**, que en lo que sigue llamaremos simplemente **medible**, si verifica la siguiente propiedad: Para todo E se verifica la igualdad*

$$m^*(E) = m^*(E \cap \Omega) + m^*(E - \Omega).$$

Denotaremos por $\mathfrak{M}$ a la familia de todos los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son medibles. Se llama medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ a la restricción de la medida exterior m^* a $\mathfrak{M}$, esto es,

$$\begin{aligned} m : \mathfrak{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto m(A) = m^*(A). \end{aligned}$$

Teorema 6. *En cada enunciado suponga que $A, B \in \mathfrak{M}$, entonces*

1) $A^C \in \mathfrak{M}$.

2) $A \cap B \in \mathfrak{M}$; y por tanto $A - B \in \mathfrak{M}$.

3) $A \cup B \in \mathfrak{M}$, y si además $A \cap B \in \mathfrak{M}$ tiene medida finita,

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Demostración. Ver [26]pag.10

Definición 19. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **Lebesgue medible** o simplemente **medible** si, para todo abierto G de $\mathbb{R}$, la imagen inversa $f^{-1}(G) := \{x \in \Omega : f(x) \in G\}$, es un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$.*

Observación.

1) En primer lugar, $\Omega = f^{-1}(\mathbb{R})$ debe ser medible. Sólo tiene sentido hablar de funciones medibles si están definidas en conjuntos medibles.

2) Son equivalentes:

   (a) f es medible.

   (b) Para todo conjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ cerrado, $f^{-1}(C) \in \mathfrak{M}$.

(c) Un conjunto A$\subseteq \mathbb{R}^n$ es medible si, y sólo si, la función característica

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

es medible.

Teorema 7. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible, y $g : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ continua en $f(\Omega)$. Entonces $g \circ f$ es medible.*

Demostración. Ver [26]pag.12

Teorema 8. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1) f es medible.

2) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \Omega : \ f(x) < a\}$ es medible.

3) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \Omega : \ f(x) \leq a\}$ es medible.

4) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \Omega : \ f(x) > a\}$ es medible.

5) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \Omega : \ f(x) \geq a\}$ es medible.

Demostración. Ver [19]pag.62.

Corolario. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces, si existen las funciones

$$g(x) := \sup_n f_n(x) \qquad j(x) := \liminf_n f_n(x) \qquad k(x) := \limsup_n f_n(x)$$
$$f(x) := \inf_n f_n(x) \qquad\qquad l(x) := \lim_n f_n(x)$$

son medibles

Proposición 2. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces:*

- *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que αf es medible.*
- *$f + g$ y $f - g$ son medibles.*
- *$f \cdot g$ es medible.*

- *Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, $\dfrac{f}{g}$ es medible.*
- *$|f|$ es medible.*
- *Si f es medible y $g = f$ en casi todas partes entonces g también es medible, esto es, si existe un conjunto $E \subseteq \Omega$ con $m(E) = 0$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \Omega - E$, entonces f es medible si, y sólo si, g es medible.*

Demostración. Ver [19]pag.61

Recordemos que el **soporte** de una función $f : X \to \mathbb{R}$, denotado por $Sop(f)$, es la clausura del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Así, el soporte de f es el complemento del conjunto abierto más grande donde f se anula.
Denotaremos por $C_0(X)$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de todas las funciones $f : X \to \mathbb{K}$ que tiene soporte compacto. Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones continuas sobre Ω. Y si k es un entero no negativo, hacemos

$$\begin{aligned} C^k(\Omega) &:= \{u/\, u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad D^\alpha u \in C^0(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq k\} \\ C_0^k(\Omega) &:= C^k(\Omega) \cap \{u/\, sop(u) \quad \text{es compacto} \quad sop(u) \subseteq \Omega\} \\ C^\infty(\Omega) &:= \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega). \end{aligned}$$

Sobre $C(\Omega)$ se define la norma de convergencia uniforme, como

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

con la cual es un espacio de Banach.

Proposición 3. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $C_0(\Omega)$, que converge puntualmente a una función $f \in C_0(\Omega)$. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.*

Demostración. Ver [26]pag.14

Teorema 9 (Teorema de Lusin). *Si f es una función medible, $f(x) = 0$ para $x \notin A$ donde $m(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una función $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad y \quad m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Demostración. Ver [20]pag.15

Definición 20. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$; se llama* ***función simple*** *en Ω a una función medible $s : \Omega \to \mathbb{R}$ que sólo toma un número finito de valores, es decir, tal que $s(\Omega) = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. En este caso s puede expresarse de la forma*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \chi_{A_i}(x)$$

donde $A_i = s^{-1}(\{a_i\}) = \{x \in \Omega : \; s(x) = a_i\}$ y χ_{A_i} es la función característica del conjunto A_i.

Para construir la integral, que es nuestro objetivo, necesitamos el siguiente resultado fundamental, que nos permite aproximar funciones medibles.

Teorema 10. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Existe una sucesión de funciones simples de Ω en $\mathbb{R}$ tales que*

1) $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ *para todo $x \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$.*

2) $\lim_n s_n(x) = f(x)$ *para todo $x \in \Omega$.*

Demostración. Ver [19]pag.63

Podemos ahora definir la integral de Lebesgue de funciones medibles.

La Integral de Lebesgue

En la teoría de los espacios funcionales hay problemas con la integral de Riemann, problemas que no permiten llegar a ciertos teoremas indispensables. Los problemas aparecen cuando tratamos de hacer interactuar a la integral de Riemann con otras operaciones, especiales como operaciones de límites (por ejemplo, el límite de una sucesión de funciones integrables puede no ser integrable). Es cuando surge la necesidad de ampliar nuestro concepto de integral. Los problemas de la integral de Riemann pueden solucionarse mediante la generalización conocida como la integral de Lebesgue.

Definición 21. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $s : \Omega \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa, $s = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \chi_{A_i}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$.*

Se define la integral de s en Ω por

$$\int_\Omega s := \sum_{i=1}^{k} a_i\, m(A_i)$$

con el convenio de que $0 \cdot \infty = 0$.

En este capítulo no haremos un estudio detallado de la integral de Lebesgue , pero mencionaremos algunos resultados importantes:

1) La integral es no negativa, y puede ser infinita:

$$0 \leq \int_\Omega s \leq \infty.$$

2) Geométricamente en $\mathbb{R}^3$, la integral de s es la suma de los volúmenes de los prismas de base A_i y altura a_i.

Proposición 4. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $s_1, s_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones simples no negativas. Entonces*

1) $\displaystyle\int_\Omega (s_1 + s_2) = \int_\Omega s_1 + \int_\Omega s_2.$

2) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\Omega \alpha s_1 = \alpha \int_\Omega s_1.$

3) Si existe $E \subseteq \Omega$ con $m(E) = 0$, tal que $s_1(x) \leq s_2(x)$ para todo $x \in \Omega - E$, entonces

$$\int_\Omega s_1 \leq \int_\Omega s_2.$$

Demostración. Ver [20]pag.16

Finalizamos esta sección definiendo la integral de Lebesgue para funciones no negativas.

Definición 22. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible, con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Se define la integral de f en Ω por*

$$\int_\Omega f := \sup\left\{\int_\Omega s : s \quad \textit{función simple,} \quad 0 \leq s \leq f\right\}$$

Definición 23. *Definimos la parte positiva f^+ y la parte negativa f^- de una función f por*

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}.$$

Así, $f = f^+ - f^-$, donde f^+ y f^- son funciones no negativas.

Podemos ahora definir la integral de Lebesgue para una función f arbitraria.

Definición 24. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible. Se define la integral de f en Ω por*

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-.$$

Una función u definida en casi todas partes (ctp) en Ω es llamada localmente integrable en Ω siempre que $u \in L^1(U)$ para cada abierto $U \Subset \Omega$, en este caso denotaremos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Observación. Si las integrales de f^+ y f^- son ambas ∞ no tiene sentido la expresión $\infty - \infty$. Decimos en este caso que la función f no es integrable.

Definición 25 (Integral en un subconjunto). *Sea $H \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, se define la integral de f en H por*

$$\int_H f(x)\,dx := \int_\Omega f\,\chi_H.$$

Teorema 11 (Propiedades básicas de la integral). *Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces*

(a) (Linealidad) Sea $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Omega c\,(f+g)\,(x)\,dx = c\int_\Omega f(x)\,dx + c\int_\Omega g(x)\,dx.$$

(b) (Monotonía) Sea $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \Omega$,

$$\int_\Omega f(x)\,dx \leq \int_\Omega g(x)\,dx.$$

(c) (Monotonía) Si E,F son conjuntos medibles y $E \subseteq F$, entonces

$$\int_E f(x)\,dx \leq \int_F f(x)\,dx.$$

(d) $|f|$ es integrable y

$$\left|\int_\Omega f(x)\,dx\right| \leq \int_\Omega |f|(x)\,dx.$$

(e) Si $\int_\Omega |f|(x)\,dx = 0$, entonces $f = 0$ en casi todas partes.

Demostración. Ver [20]pag.17

Hay una diferencia fundamental de enfoque que existen entre la integral de Riemann y la de Lebesgue. La de Lebesgue utiliza una aproximación por funciones constantes en conjuntos medibles susceptibles de causar dificultades; a diferencia de las integrales superiores e inferiores, que utilizan simplemente intervalos.

Teorema 12. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas (ampliadas), con lo que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es medibles y*

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx \tag{2.1}$$

para cualquier conjunto medible $E \subseteq \Omega$.

Demostración. Ver [20]pag.17

El teorema de convergencia monótona suele denominarse lema de Fatou.

Teorema 13 (Convergencia Monótona-Lema de Fatou). *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables no negativas, entonces*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dx.$$

Demostración. Ver [15]pag.55

Teorema 14 (Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables. Supongamos que:*

i) $f_n(x) \to f(x)$ *c.t.p. en* Ω.

ii) Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ *tal que, para todo n;* $|f(x)| \leq g(x)$ *c.t.p. en* Ω *entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

Demostración. Ver [20]pag.18

Teorema 15. *Sea $f : \mathbb{R}^{m+k} \to [0, +\infty]$ medible. Entonces:*

(i) La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k$, $f(x,\cdot) : y \longmapsto f(x,y)$, *es medible para casi todo* $x \in \mathbb{R}^m$.

(ii) La función g, definida para casi todo x por $g(x) = \int f(x,y)\,dy$ es medible.

(iii) $\int g\,dx = \int f$, es decir la integral de f coincide con sus integrales iteradas.

Demostración. Ver [26]pag. 18

Observación: La demostración de este teorema generalmente se reduce al caso en que $f = \chi_E$, la función característica de un conjunto medible E y se hace uso de los siguientes hechos:

(a) Si una función $f \geq 0$ satisface el teorema de Tonelli, entonces también lo satisface la función $cf \geq 0$, cualquiera que sea la constante $c \geq 0$.

(b) Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones no negativas que satisfacen el teorema de Tonelli, entonces también lo satisface la función $\sum f_k$.

Teorema 16 (**Teorema de Fubini**). *Sea $f : \mathbb{R}^{m+k} \to [0,+\infty]$ integrable. Entonces:*

(i) La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k$, $f(x,\cdot) : y \longmapsto f(x,y)$, es integrable para casi todo $x \in \mathbb{R}^m$.

(ii) La función g, definida para casi todo x por $g(x) = \int f(x,y)\,dy$ es integrable.

(iii) $\int g\,dx = \int f$.

Demostración. Ver [26]pag.19

2.2. Espacios $L^p(\Omega)$

Dado un número real $p > 1$ definimos su conjugado p^* mediante la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

y observamos que también $1 < p^* < \infty$, así la relación entre p y p^* es simétrica: $(p^*)^* = p$. Pues bien, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}^+$ es conocida la desigualdad de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}.$$

Su demostración es consecuencia de la convexidad de la función exponencial. Esta desigualdad sin gran dificultad se deduce la desigualdad de Hölder para integrales.

Otra desigualdad que también es de gran utilidad cuando trabajamos con los espacio $L^p(\Omega)$ es

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \tag{2.2}$$

que se cumple para $1 \leq p < \infty$ y $a, b \geq 0$. Ahora bien, recordando las clásicas desigualdades de Hölder y Minkowski,

Definición 26. *Si $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n$ son números reales arbitrarios y p, p^* son números reales mayores o iguales a 1, conjugados, la siguiente desigualdad es conocida como la* ***desigualdad de Hölder***

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\, y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p^*}\right)^{1/p^*} \tag{2.3}$$

Desigualdad de Hölder. *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; $p^* = q$ y $p > 1$ entonces*

(I) *$f \cdot g \in L^1(\Omega)$.*

(II) *$\displaystyle\int_\Omega |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\, \|g\|_{L^q(\Omega)}$.*

Mientras que la ***desigualdad de Minkowski*** *está dada por*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.4}$$

Definición 27 **(El espacio $L^p(\Omega)$).** *Sea Ω un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ no vacío y $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a la clase de funciones medibles u definidas en Ω para la cual*

$$\int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty. \tag{2.5}$$

Los elementos de $L^p(\Omega)$ son clases de equivalencia de funciones medibles satisfaciendo (2.5). Dos funciones son equivalentes si ellas son iguales en casi todas partes de Ω. A partir de la desigualdad de Young obtenemos la desigualdad de Hölder.

Teorema 17 **(Desigualdad de Hölder para integrales).** *Sea $1 < p < \infty$ y p^* el exponente conjugado de p. Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p^*}(\Omega)$ entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |u(x)\, v(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v(x)|^{p^*}\, dx\right)^{1/p^*}.$$

Demostración. Ver [21]pag.8

Además a partir de esta desigualdad de Hölder; obtenemos la desigualdad de Minkowski:

$$\int_{\Omega} |u(x)+v(x)|\,dx \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Si u satisface (2.5) y $\displaystyle\int_{\Omega} |u(x)|^p\,dx = 0$ en $L^p(\Omega)$ entonces $u(x)=0$ en casi todas partes de Ω.

Haciendo uso del teorema 11 puede verificarse que, para cualquier número real c, $cu \in L^p(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$. Así, si definimos las operaciones suma y producto por un escalar en $L^p(\Omega)$ por

$$(cf)(x) := cf(x), \quad \text{y} \quad (f+g)(x) := f(x)+g(x)$$

es conveniente verificar que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Para verificar que la suma de dos funciones en $L^p(\Omega)$, hacemos uso de la desigualdad (2.2) con la cual tendremos que si $u, v \in L^p(\Omega)$

$$|u(x)+v(x)|^p \leq (|u(x)|+|v(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p+|v(x)|^p). \tag{2.6}$$

Así de esta última desigualdad, conjuntamente con el teorema 11 se concluye que $u+v \in L^p(\Omega)$. De hecho $L^p(\Omega)$ es un espacio normado.

[**La norma en** $L^p(\Omega)$]. El funcional $\|\cdot\|_p$ definido por:

$$\|u\|_p := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

es una norma en $L^p(\Omega)$. En efecto, note que $|u(x)| \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, así como consecuencia del teorema 11 se sigue que

$$\begin{aligned}
\|u\|_p = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad |u(x)|^p = 0, \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega \\
&\Longleftrightarrow \quad |u(x)| = 0, \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega \\
&\Longleftrightarrow \quad u(x) = 0, \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Además para cualquier c se tiene

$$\|cu\|_p = \left(\int_{\Omega} |cu(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = |c|\left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

es decir, $\|cu\|_p = |c|\|u\|_p$.

Finalmente, en el siguiente teorema se garantiza el cumplimiento de la desigualdad triangular, con lo que se completa la verificación de que el funcional definido es una norma sobre $L^p(\Omega)$.

Teorema 18 (**Desigualdad de Minkowski para integrales**). *Si* $1 \leq p < \infty, u, v \in L^p(\Omega)$, *entonces*

$$u + v \in L^p(\Omega),$$

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

Demostración: Sean $u, v \in L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$. La medibilidad de $u + v$ es obvia.

La desigualdad es cierta para $p = 1$

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_1 &= \left(\int_\Omega |u(x) + v(x)|^1 \, dx \right)^{1/1} \\
&= \int_\Omega |u(x) + v(x)| \, dx \\
&\leq \int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|) \, dx \\
&= \int_\Omega |u(x)| \, dx + \int_\Omega |v(x)| \, dx \\
&= \|u\|_1 + \|v\|_1
\end{aligned}$$

Sea $1 < p < \infty$, $1 < p' < \infty$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Consideremos la función $w \in L^p(\Omega)$ tal que $w \geq 0$ y $\|w\|_{p'} \leq 1$. Por la desigualdad de Hölder tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x) + v(x)| \, w(x) \, dx &\leq \int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|) \; w(x) \, dx \\
&= \int_\Omega |u(x)| \, w(x) \, dx + \int_\Omega |v(x)| \, w(x) \, dx \\
&\leq \|u\|_p \, \|w\|_{p'} + \|v\|_p \, \|w\|_{p'} \\
&= \|u\|_p + \|v\|_p
\end{aligned}$$

$$\sup \left\{ \int_\Omega |u(x) + v(x)| \, w(x) \, dx : w(x) \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \; \|w\|_{p'} \leq 1 \right\} \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Por lo tanto

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

. $\blacksquare$

Definición 28 (**Espacios** $L^\infty(\Omega)$)**.** *Una función u medible en Ω es llamada esencialmente acotada en Ω si existe una constante $K > 0$ tal que $|u(x)| \leq K$ c.t.p en Ω. La mayor de las cotas inferiores K es llamada* ***supremo esencial*** *de $|u|$ en Ω y se denota por $ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$.*

Denotamos por $L^\infty(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones u que son esencialmente acotadas en Ω.

El funcional $\|u\|_\infty = ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$ define una norma en $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 19 (**Desigualdad de interpolación**)**.** *Sean $1 \leq p < q < r < \infty$ tales que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{r}$ para algún θ, $0 < \theta < 1$. Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ entonces $u \in L^q(\Omega)$ y*

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta}.$$

Demostración:

Sea p, q, r y θ con la hipótesis. Luego $1 = \dfrac{\theta q}{p} + \dfrac{(1-\theta)q}{r} = \dfrac{1}{\dfrac{p}{\theta q}} + \dfrac{1}{\dfrac{r}{q(1-\theta)}}$.

Hagamos $s = \dfrac{p}{\theta q}$. Note que $s > 1$, pues en caso contrario si $s \leq 1$, significa que $\dfrac{\theta q}{p} \geq 1$ por lo que $\dfrac{\theta q}{p} + \dfrac{(1-\theta)q}{r} \geq 1 + \dfrac{(1-\theta)q}{r} > 1$; lo cual es una contradicción ya que por hipótesis $\dfrac{\theta q}{p} + \dfrac{(1-\theta)q}{r} = 1$. Por lo tanto $s > 1$.

De manera análoga se define

$$s^* = \frac{r}{q(1-\theta)},$$

en cuyo caso podemos verificar que $1 < s < \infty$ y $1 < s^* < \infty$.

Luego, la desigualdad de Hölder nos garantiza que

$$\begin{aligned} \|u\|_q^q &= \int_\Omega |u(x)|^q \, dx \\ &= \int_\Omega |u(x)|^{\theta q} |u(x)|^{(1-\theta)q} \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |u(x)|^{\theta q s} \, dx\right)^{1/s} \left(\int_\Omega |u(x)|^{(1-\theta)q s^*} \, dx\right)^{1/s^*} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observe que $\theta q s = \theta q \dfrac{p}{\theta q} = p$ y $(1-\theta) q s^* = (1-\theta) q \dfrac{r}{(1-\theta)q} = r$. Luego al sustituir en (2.7) se tiene

$$\begin{aligned}
\|u\|_q^q &\leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{\theta q}{p}} \left(\int_\Omega |u(x)|^r\,dx\right)^{\frac{q}{(1-\theta)r}} \\
&\leq \left[\left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\theta q} \left[\left(\int_\Omega |u(x)|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\right]^{(1-\theta)q} \\
&\leq \|u\|_p^{\theta q}\,\|u\|_r^{(1-\theta)q}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\|u\|_q^q \leq \|u\|_p^\theta\,\|u\|_r^{1-\theta}$. ■

En lo que sigue si Θ es un conjunto medible, convenimos en escribir

$$Vol(\Theta) := \int_\Omega 1\,dx$$

cuando $\displaystyle\int_\Omega 1\,dx < \infty$.

Teorema 20 (Un teorema de inmersión para los espacio L^p). *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$ y $u \in L^q(\Omega)$, entonces $u \in L^p(\Omega)$ y*

$$\|u\|_p \leq Vol(\Omega)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,\|u\|_q. \tag{2.8}$$

Esto es,

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega). \tag{2.9}$$

Demostración. Ver [20]pag.28

Corolario. $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)\,\overline{v}(x)\,dx.$$

Demostración. Ver [20]pag.31

Aproximaciones por funciones continuas

Lema 2. *Sean $1 \leq p < \infty$ y S la clase de todas las funciones simples reales en Ω. S es denso en $L^p(\Omega)$.*

Demostración. Ver [26]pag. 27

Teorema 21. *Si $1 \leq p < \infty$ entonces $C_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.*

Demostración. Ver [25]pag.332

Teorema 22. *Sea $1 \leq p < \infty$ entonces $L^p(\Omega)$ es separable.*

Demostración. Ver [15]pag.62

La clausura de un conjunto G es denotado por $\overline{G}$.

Definición 29 (Continuamente compacto). *Si $G \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, diremos que $G \Subset \Omega$ si, y sólo si, $\overline{G} \subset \Omega$ y $\overline{G}$ es compacto.*

Definición 30. *La **convolución** de dos funciones u y v sobre $\mathbb{R}^n$ es la función*

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, v(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

La convolución tiene muchas aplicaciones interesantes y una de ellas es una demostración de que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

La convolución

$$J_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy, \tag{2.11}$$

definida para una función u para la cual (2.11) tenga sentido, es llamada **regularización de u**.

Observación. J_ε aproxima a la Delta de Dirac, por lo cual se espera que la convolución en (2.11) aproxime a u.

El siguiente teorema resume algunas propiedades de Regularización.

Teorema 23 (Propiedades de Regularización). *Sea u una función definida en $\mathbb{R}^n$ y nula en el exterior de Ω.*

1) Si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $Sopp(u) \Subset \Omega$, entonces $J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$; si $\varepsilon < dist(Sopp(u), \partial\Omega)$.

3) Si $u \in L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, entonces $J_\varepsilon * u \in L^p(\Omega)$. Además

$$\|J_\varepsilon * u\|_p \leq \|u\|_p \quad y \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \|J_\varepsilon * u - u\|_p = 0.$$

4) Si $u \in C(\Omega)$ y si $G \Subset \Omega$ entonces $\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * u(x) = u(x)$ uniformemente en G.

5) Si $u \in C(\overline{\Omega})$ entonces $\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * u(x) = u(x)$ uniformemente en Ω.

Demostración. Ver [20]pag.36

Corolario. $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
Demostración. Ver [26]pag. 30

2.3. Distribuciones

En el resto del trabajo reservamos el símbolo Ω para denotar un conjunto abierto en el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ se designa, como tradicionalmente, para designar el conjunto vacío. Un punto de $\mathbb{R}^n$ se denotará por $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, donde $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Definición 31. *A la n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ la llamaremos **multi-índice** si α es una n-upla de enteros no negativos. Además, denotaremos por X^α el monomio$x_1^{\alpha_1}, ..., x_n^{\alpha_n}$, de grado $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, la suma de dos multi-índices, α, β es $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n)$. Decimos que $\beta \leq \alpha$ si $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j = 1, 2, ..., n$. Para denotar la derivada parcial haremos*

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

conviniendo que $D^{(0,0,...,0)}\phi = \phi$.

Por otra parte, el gradiente de una función de valores reales ϕ es denotado por

$$D\phi(x) := (D_1\phi(x), D_2\phi(x), ..., D_n\phi(x)).$$

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$, una sucesión $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ es llamada convergente en el sentido del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ a la función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si satisface las siguientes propiedades:

(I) Existe $K \Subset \Omega$ tal que *Sopp*$(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j.

(II) $\lim\limits_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformemente en K para cada multi-índice α.

Las propiedades de la convergencia de $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ definen una topología τ localmente convexa en el espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, $C_0^\infty(\Omega)$ dotado de esta topología se convierte en el espacio vectorial topológico llamado $\mathcal{D}(\Omega)$,el espacio de funciones de prueba, así $\mathcal{D}(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega), \tau)$.

El espacio dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ es llamado el **espacio de (Schwartz) distribuciones** en Ω. Los elementos de este espacio son llamadas **distribuciones**. Este espacio es dotado con la topología débil estrella, así que una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si $T_n(\phi) \to T(\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En este caso, se dice que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a T **en el sentido distribucional.**

Para $S, T, \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces se define las operaciones

- $(S+T)(\phi) = S(\phi) + T(\phi)$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- $(cT)(\phi) = cT(\phi)$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ejemplo. Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. El funcional

$$T_u(\phi) := \int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{2.12}$$

es una distribución.
En efecto, sean $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T_u(\phi_1 + \beta\phi_2) &= \int_\Omega u(x)(\phi_1 + \beta\phi_2)(x)\,dx \\ &= \int_\Omega u(x)(\phi_1(x) + \beta\phi_2(x))\,dx \\ &= \int_\Omega u(x)\,\phi_1(x)\,dx + \beta\int_\Omega u(x)\,\phi_2(x)\,dx \\ &= T_u(\phi_1) + \beta T_u(\phi_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto se verifica que T_u es lineal.

Además, si $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $\mathcal{D}(\Omega)$, existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j y $D^\alpha\phi_j \to D^\alpha\phi$ uniformemente en K para cada multi-índice α.

Dado que $K \Subset \Omega$ se tiene que $\overline{K}$ es compacto. Si F es la colección de subconjuntos abiertos de Ω tal que $\overline{K} \subseteq \bigcup_{A\in F} A$, luego existen $A_1, A_2, ..., A_n \in F$ de manera que $\overline{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, además $K \subseteq \overline{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
Luego, para cada $j > 0$ se deduce que

$$
\begin{aligned}
|T_u(\phi_j) - T_u(\phi)| &= \left| \int_\Omega u(x)\phi_j(x)\,dx - \int_\Omega u(x)\phi(x)\,dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \left(u(x)\phi_j(x) - u(x)\phi(x)\right)\,dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega u(x)\left(\phi_j(x) - \phi(x)\right)\,dx \right| \\
&= \left| \int_K u(x)\left(\phi_j(x) - \phi(x)\right)\,dx \right|
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
|T_u(\phi_j) - T_u(\phi)| &\leq \int_K |u(x)|\,|\left(\phi_j(x) - \phi(x)\right)|\,dx \\
&\leq \int_K |u(x)| \sup_{x\in K} |\phi_j(x) - \phi(x)|\,dx \\
&= \sup_{x\in K} |\phi_j(x) - \phi(x)| \int_K |u(x)|\,dx \\
&\leq \sup_{x\in K} |\phi_j(x) - \phi(x)| \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |u(x)|\,dx \right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $|T_u(\phi_j) - T_u(\phi)| \leq \sup_{x\in K} |\phi_j(x) - \phi(x)| \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |u(x)|\,dx \right)$, y este último término del lado derecho tiende a cero, puesto que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $\mathcal{D}(\Omega)$. Así T_u es continua.

Observación. No todas las distribuciones $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tienen la forma T_u definida en (2.12) para algún $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

En efecto, sea $\delta : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ dada por $\delta(\phi) = \phi(0)$, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Si $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\delta(\phi_1 + \beta\phi_2) = (\phi_1 + \beta\phi_2)(0) = \phi_1(0) + \beta\phi_2(0) = \delta(\phi_1) + \beta\delta(\phi_2).$$

por lo tanto δ es lineal.

Además, si $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $\mathcal{D}(\Omega)$, existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j y $\lim_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformemente en K para cada multi-índice α. Por lo tanto

$$|\delta(\phi_j) - \delta(\phi)| = |\phi_j(0) - \phi(0)| \to 0, \quad \text{cuando} \quad j \to \infty$$

En consecuencia, $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Veamos que $\delta_{(0)}$ es una distribución que no satisface (2.12). En efecto, supongamos que $\delta_{(0)}$ satisface (2.12), entonces existe una función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ de manera que:

$$\phi(0) = \int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,dx, \quad \text{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.13}$$

Consideremos la función de prueba definida por:

$$\phi_a(x) = \begin{cases} e^{\frac{a^2}{\|x\|^2 - a^2}}, & \text{si} \quad \|x\| < a \\ 0, & \text{si} \quad \|x\| > a \end{cases}$$

con $a > 0$, notemos que

$$\phi_a(0) = e^{-1} > 0 \tag{2.14}$$

$$|\phi_a(x)| \leq e^{-1} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,\phi_a(x)\,dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\,|\phi_a(x)|\,dx \\ &= \int_{\|x\|<a} |u(x)|\,|\phi_a(x)|\,dx \\ &\leq \int_{\|x\|<a} |u(x)|\; e^{-1}\; dx \\ &= e^{-1} \int_{\|x\|<a} |u(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Si u es localmente integrable entonces $\lim_{a\to 0} \int_{\|x\|<a} |u(x)|\,dx = 0$ se sigue entonces que

$$\lim_{a\to 0} \int_\Omega |u(x)|\,\phi_a(x)\,dx = 0,$$

lo cual contradice nuestra suposición inicial (2.13)

Derivada de una distribución

Definición 32. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *una distribución. Dado un multi-índice* α *definimos la* $\alpha-$*ésima derivada de* T *como*

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \quad \textit{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposición 5. $D^\alpha T$ *es una distribución, para toda* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Demostración:

Sea $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} D^\alpha T(\phi_1 + \beta\phi_2) &= (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha(\phi_1 + \beta\phi_2)) \\ &= (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi_1 + \beta D^\alpha \phi_2) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \Big[T(D^\alpha \phi_1) + \beta T(D^\alpha \phi_2) \Big] \\ &= (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi_1) + \beta (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi_2) \\ &= D^\alpha T(\phi_1) + \beta D^\alpha T(\phi_2). \end{aligned}$$

Un vez verificada la linealidad, procedemos a comprobar la continuidad, para ello consideremos $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $\mathcal{D}(\Omega)$. Entonces $(\phi_j - \phi) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $D^\alpha(\phi_j - \phi) \in \mathcal{D}(\Omega)$ y existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para todo j y luego demostrar $D^\alpha T(\phi_j) \to D^\alpha T(\phi)$.

Ejemplo.

1) Si $0 \in \Omega$ y $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es la distribución de Dirac entonces, $D^\alpha \delta$ viene dada por:

$$D^\alpha \delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(0).$$

2) Si $\Omega = \mathbb{R}$ y $H \in L^1_{loc}(\Omega)$ es una función escalonada definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte compacto en $[-a, a]$ entonces

$$\begin{aligned}
(TH)'\phi &= (-1)^{|1|} TH(\phi') \\
&= -TH(\phi') \\
&= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{0} H(x)\,\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} \phi'(x)\,dx \\
&= -\phi(x)\Big|_0^a \\
&= -(\phi(a) - \phi(0)) \\
&= \phi(0) = \delta(\phi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(TH)'$ es la distribución de Dirac por lo que $(TH)'$ es una distribución.

Definición 33. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α un multi-índice. Si existe una función $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ de tal manera que*

$$T_{v_\alpha}(\phi) = D^\alpha T_u(\phi) \quad \textit{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

entonces v_α es llamada la $\alpha-$ésima derivada distribucional o débil de T_u.

2.4. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev (que fueron descubiertos en 1930) tiene una gran influencia sobre el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales, sobre el análisis, física matemática, geometría diferencial y otros campos de las matemáticas.

A continuación introducimos los espacio de Sobolev de orden entero y establecemos algunas de sus más importantes propiedades.

Definición 34. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $1 \leq p \leq \infty$. *Si* m *es un entero no negativo,* $u \in L^p(\Omega)$ *y existe la derivada distribucional* $D^\alpha u$ *para cualquier* α *con* $0 \leq |\alpha| \leq m$, *tal que*

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \textit{para todo} \quad |\alpha| \leq m.$$

Entonces se dice que $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

$W^{m,p}(\Omega)$ es llamado **Espacios de Sobolev sobre** $\mathbf{\Omega}$.
En este espacio definimos el funcional

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty. \tag{2.16}$$

que es una norma. En efecto :
Es evidente que $\|u\|_{m,p} \geq 0$, además si $\|u\|_{m,p} = 0$ implica que $\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$, y en consecuencia $\|D^\alpha u\|_p^p = 0$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$. En particular para $\alpha = 0$ se tiene que

$$\|D^\alpha u\|_p^p = \|D^0 u\|_p^p = \|u\|_p^p = 0,$$

de lo cual se obtiene $u = 0$.

La homogeneidad del funcional se verifica, dado que la derivada y de la norma satisfacen dicha propiedad:

$$\begin{aligned}
\|\beta u\|_{m,p} &= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha (\beta u)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\beta D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |\beta|^p \, \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\beta| \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

y para finalizar, la desigualdad de Hölder, nos garantiza que el funcional satisface la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{m,p} &= \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha(u+v)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{m,p} + \|v\|_{m,p}.
\end{aligned}$$

Teorema 24. *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Ver [15]pag.121

Proposición 6. *Sea α un multi-índice, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq L^p(\Omega)$ y $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ y $D^\alpha u_n \to v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$. Entonces $v_\alpha = D^\alpha u$.*

Demostración: Si $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, entonces $u_n \to u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y en consecuencia $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Pero, $D^\alpha u_n \to v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$ implica $D^\alpha u_n \to v_\alpha$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, así que $v_\alpha = D^\alpha u$. ■

Teorema 25. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $k \geq 1$ un entero y $p \in [1,\infty)$. Se tiene*

(a) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $p \in (1,\infty)$.

(b) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $p \in [1,\infty)$.

Demostración. Ver [20]pag.121

Observación. Los espacios $W^{k,1}(\Omega)$ y $W^{k,\infty}(\Omega)$ no son reflexivos.

Definición 35. *Sea $k \geq 1$ un entero y $p \in [1,\infty)$. Definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \equiv \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}.$$

Cuando $p = 2$, denotamos $H_0^k(\Omega) \equiv W_0^{k,2}(\Omega)$.

Observación.

1) Observe que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si, y solo si, existe una sucesión $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$, esto es, existe $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, tal que $D^\alpha\varphi_\nu \to D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$.

2) Utilizando la convolución con una sucesión regularizante, podemos comprobar que $C_0^k(\Omega) \subseteq W_0^{k,p}(\Omega)$, para todo $k \geq 1$, $p \in [1,\infty)$.

Teorema 26. *Sean $k \geq 1$, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ y $p \in [1,\infty)$. Definimos $\widetilde{u}$ como la extensión por 0 de u a $\mathbb{R}^n\backslash\Omega$, esto es*

$$\widetilde{u} := \begin{cases} u(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega. \end{cases}$$

Entonces

1) $\widetilde{u} \in W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$,

2) $D^\alpha\widetilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$, *para todo α con $|\alpha| \leq k$ y*

3) $\|\widetilde{u}\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\widetilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

En general $W^{k,p}(\Omega) \neq W_0^{k,p}(\Omega)$.

Demostración. Ver [26]pag. 49

Corolario 2. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces $|u|, u^+, u^-$ pertenecen a $H_0^1(\Omega)$ donde*

$$u^+(x) = \text{máx}\{u(x), 0\}$$
$$u^-(x) = \text{máx}\{-u(x), 0\} = \text{mín}\{u(x), 0\}$$

Además

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u^+ = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}u, & en \ \{x \in \Omega : u(x) > 0\} \\ 0, & en \quad \{x \in \Omega : u(x) \leq 0\} \end{cases}$$

Ver [15]■

3 El Resultado Principal

Consideremos el problema (P_λ), dado por el sistema elíptico no local:

$$(P_\lambda) \qquad \left| \begin{array}{l} -\Delta u(x) + \lambda \displaystyle\int_\Omega v^p(y)\, dy = u^\alpha(x) + v^\beta(x), \quad x \in \Omega \\ -\Delta v(x) + \lambda \displaystyle\int_\Omega u^q(y)\, dy = u^\gamma(x) + v^\delta(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) > 0, v(x) > 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) = v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, N \geq 2$ es un dominio acotado bien regular de forntera $\Gamma = \partial\Omega$. $p, q > 0$; $\lambda \in \mathbb{R}^-$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$ (constantes positivas).

Queremos probar la existencia de la solución débil del problema (P_λ) y determinar la regularidad de esta solución. Por lo que empezamos deduciendo formalmente el concepto de solución débil de (P_λ).

Consideremos dos funciones φ y ψ suficientemente regular en Ω, y multiplicamos e integramos sobre Ω en cada ecuación del problema (P_λ), así tenemos que:

$$\int_\Omega (-\Delta u)\varphi\, dx + \lambda \int_\Omega \left[\int_\Omega v^p(y)\, dy \right] \varphi\, dx = \int_\Omega u^\alpha(x)\varphi\, dx + \int_\Omega v^\beta(x)\varphi\, dx, \ x \in \Omega, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

$$\int_\Omega (-\Delta v)\psi\, dx + \lambda \int_\Omega \left[\int_\Omega u^q(y)\, dy \right] \psi\, dx = \int_\Omega u^\gamma(x)\psi\, dx + \int_\Omega v^\delta(x)\psi\, dx, \ x \in \Omega, \psi \in H_0^1(\Omega)$$

Usando el teorema de Green resulta:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi d\Gamma + \lambda \int_\Omega \left[\int_\Omega v^p(y)\, dy \right] \varphi\, dx = \int_\Omega u^\alpha(x)\varphi\, dx + \int_\Omega v^\beta(x)\varphi\, dx,$$

y

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} \psi d\Gamma + \lambda \int_\Omega \left[\int_\Omega u^q(y)\, dy \right] \psi\, dx = \int_\Omega u^\gamma(x)\psi\, dx + \int_\Omega v^\beta(x)\psi\, dx$$

Imponiendo $\varphi\Big|_{\Gamma} = 0$ y $\psi\Big|_{\Gamma} = 0$; se obtiene

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \lambda \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} v^p(y)\, dy\right] \varphi \, dx = \int_{\Omega} u^{\alpha}(x)\varphi \, dx + \int_{\Omega} v^{\beta}(x)\varphi \, dx, \\ \displaystyle\int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi \, dx + \lambda \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} u^q(y)\, dy\right] \psi \, dx = \int_{\Omega} u^{\gamma}(x)\psi \, dx + \int_{\Omega} v^{\delta}(x)\psi \, dx. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Este sistema de ecuaciones integrodiferenciales, nos permite realizar la siguiente definición.

Definición 36. *El par $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema (P_λ) si $\forall \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$ satisface*

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \lambda \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} v^p(y)\, dy\right] \varphi \, dx = \int_{\Omega} u^{\alpha}(x)\varphi \, dx + \int_{\Omega} v^{\beta}(x)\varphi \, dx, \\ \displaystyle\int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi \, dx + \lambda \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} u^q(y)\, dy\right] \psi \, dx = \int_{\Omega} u^{\gamma}(x)\psi \, dx + \int_{\Omega} v^{\delta}(x)\psi \, dx. \end{array}\right.$$

Note que para $u, v \in H_0^1(\Omega)$ todos los elementos en el anterior sistema están bien definidos.

Para probar la existencia de la solución débil de (P_λ), primero consideraremos el problema auxiliar

$$(P_\lambda)_\varepsilon \left|\begin{array}{l} \displaystyle -\Delta u(x) + \lambda \int_{\Omega} v^p(y)\, dy = u^{\alpha}(x) + v^{\beta}(x) + \varepsilon, \quad x \in \Omega \\ \displaystyle -\Delta v(x) + \lambda \int_{\Omega} u^q(y)\, dy = u^{\gamma}(x) + v^{\delta}(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) > 0, v(x) > 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) = v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right. \qquad \text{para } \varepsilon > 0.$$

Teorema 3.1 :

El problema $(P_\lambda)_\varepsilon$, admite una solución débil $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Además $u_\varepsilon > 0$ y $v_\varepsilon > 0$.

Demostración: Probaremos la existencia mediante el Método de Galerkin. La positividad será demostrada con un Lema técnico de Comparación (Lema 4).

Como $H_0^1(\Omega)$ es separable, podemos construir una base Hilbertiana

$$\mathbb{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$$

Aquí estamos dotando a $H_0^1(\Omega)$ de la norma, equivalente a la norma natural de $H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx; \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Sea $\mathbb{V}_m$ el subespacio finito dimensional,

$$\mathbb{V}_m = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m] \subset H_0^1(\Omega)$$

dotado con la norma inducida por $H_0^1(\Omega)$.

Entonces para $u \in \mathbb{V}_m$ existe un único $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \, \varphi_j \quad \text{y como consecuencia} \quad \|u\|^2 = |\xi|^2$$

En efecto, se establece un isomorfismo isométrico entre $\mathbb{V}_m$ y $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{V}_m \leftrightarrow \mathbb{R}^m$) mediante la correspondencia:

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \, \varphi_j \leftrightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m).$$

por lo que identificaremos $u \in \mathbb{V}_m$ con $\xi \in \mathbb{R}^m$.

Observe que

$$|u|_{H_0^1(\Omega)} = |\xi|_{\mathbb{R}^m}.$$

Probaremos que para cada m, existe $(u, v) \in \mathbb{V}_m \times \mathbb{V}_m$ una solución del sistema $(P^+_{\lambda_m})_\varepsilon$

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nabla(u_m) \nabla\varphi_i \, dx + \lambda \int_\Omega \left[\int_\Omega (v_m^+)^p(y) \, dy \right] \varphi_i \, dx = \int_\Omega (u_m^+)^\alpha \varphi_i \, dx + \int_\Omega (v_m^+)^\beta \varphi_i \, dx + \varepsilon \int_\Omega \varphi_i dx \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla(v_m) \nabla\varphi_i \, dx + \lambda \int_\Omega \left[\int_\Omega (u_m^+)^q \, dy \right] \varphi_i \, dx = \int_\Omega (u_m^+)^\gamma \varphi_i \, dx + \int_\Omega (v_m^+)^\delta \varphi_i \, dx \end{array} \right.$$

para $i = 1, 2, ..., m$.

Para probar que el sistema $(P^+_{\lambda_m})_\varepsilon$ admite solución, aplicaremos el teorema del ángulo agudo. En adelante prescindiremos del subindice m, si no hay lugar a confusión.

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} (F, G): &\quad \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\ (F, G) = &\quad (F_1, F_2, ..., F_m; G_1, G_2, ..., G_m), \end{aligned}$$

donde

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle F_i(\xi, \eta) = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi_i \, dx + \lambda \int_\Omega \left[\int_\Omega (v^+)^p \, dy \right] \varphi_i \, dx - \int_\Omega (u^+)^\alpha \varphi_i \, dx - \int_\Omega (v^+)^\beta \varphi_i \, dx - \\ \qquad\qquad \displaystyle - \varepsilon \int_\Omega \varphi_i dx \\ \displaystyle G_i(\xi, \eta) = \int_\Omega \nabla v \nabla\varphi_i \, dx + \lambda \int_\Omega \left[\int_\Omega (u^+)^q \, dy \right] \varphi_i \, dx - \int_\Omega (u^+)^\gamma \varphi_i \, dx - \int_\Omega (v^+)^\delta \varphi_i \, dx \end{array} \right. \tag{3.2}$$

$(u,v) \in \mathbb{V}_m \times \mathbb{V}_m$; $u = \sum_{j=1}^m \xi_j\, \varphi_j$; $v = \sum_{j=1}^m \eta_j\, \varphi_j$ con $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ donde $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ y $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m)$.

AFIRMACIÓN: (F,G) es una aplicación continua.

En efecto sea $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ y $(\xi_0,\eta_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ tal que

$$(\xi,\eta) \longrightarrow (\xi_0,\eta_0) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

Probaremos que para cada $\quad i = 1, 2, ..., m$

i) $F_i(\xi,\eta) \longrightarrow F_i(\xi_0,\eta_0) \quad$ en $\quad \mathbb{R}$

ii) $G_i(\xi,\eta) \longrightarrow G_i(\xi_0,\eta_0) \quad$ en $\quad \mathbb{R}$

Bastará probar i). La prueba de ii) similar.

Prueba de (i): Se tiene

$$\Big|F_i(\xi,\eta) - F_i(\xi_0,\eta_0)\Big| \leq \Big|\int_\Omega (\nabla u - \nabla u_0)\nabla\varphi_i\, dx\Big| + |\lambda| \Big|\int_\Omega \Big[\, (v^+)^p - (v_0^+)^p\,\Big]\, dy\Big| \Big|\int_\Omega \xi_i\, \varphi_i\, dx\Big| +$$

$$+ \Big|\int_\Omega \Big[\, (u^+)^\alpha\, \xi_i - (u_0^+)^\alpha\, \xi_{i_0}\Big]\varphi_i\, dx\Big| + \Big|\int_\Omega \Big[\, (v^+)^\beta\, \xi_i - (v_0^+)^\beta\, \xi_{i_0}\Big]\varphi_i\, dx\Big| + \varepsilon \Big|\int_\Omega (\xi_i - \xi_{i_0})\, \varphi_i dx\Big|$$

$$\leq \quad \Big|\nabla u - \nabla u_0\Big|_2 + |\lambda| C_p \sum_{i=1}^m |\eta_i - \eta_{i_0}|^p |\xi| \qquad +$$

$$+ \int_\Omega \Big[\, (u^+)^\alpha - (u_0^+)^\alpha\,\Big]\xi_i\varphi_i\, dx\Big| + \int_\Omega \Big[\, (u_0^+)^\alpha\, (\xi_i - \xi_{i0}) dx\Big] +$$

$$+ \int_\Omega \Big[\, (v^+)^\beta - (v_0^+)^\beta\,\Big]\xi_i\varphi_i\, dx\Big| + \int_\Omega \Big[\, (v_0^+)^\beta\, (\xi_i - \xi_{i0}) dx\Big] +$$

$$+ \varepsilon \int_\Omega \Big|\xi_i - \xi_0\Big|\, \varphi_i dx$$

$$\leq \quad \Big|\xi - \xi_0\Big| + C\Big(\sum_{i=1}^m |\eta_i - \eta_{i0}|^p |\xi| + \sum_{i=1}^m |\xi_i - \xi_{i0}|^\alpha |\xi| + \sum_{i=1}^m |\xi_{i_0}|^\alpha |\xi_i - \xi_{i0}| +$$

$$+ \sum_{i=1}^m |\eta_i - \eta_{i0}|^\beta |\xi| + \sum_{i=1}^m |\eta_{i0}|^\beta |\xi - \xi_0| + \varepsilon|\xi - \xi_0|\Big)$$

$$\leq \quad \Big|\xi-\xi_0\Big| + C\Big(\sum_{i=1}^{m}|\eta_i-\eta_{i0}|^p|\xi| + \sum_{i=1}^{m}|\xi_i-\xi_{i0}|^\alpha|\xi| + \sum_{i=1}^{m}|\xi_{i0}|^\alpha|\xi-\xi_0| +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}|\eta_i-\eta_{i0}|^\beta|\xi| + \sum_{i=1}^{m}|\eta_0|^\beta|\xi-\xi_0| + \varepsilon|\xi-\xi_0|\Big)$$

tomando limite cuando

$$\xi \longrightarrow \xi_0 \quad \text{y} \quad \eta \longrightarrow \eta_0$$

tenemos que

$$\Big|F_i(\xi,\eta)-F_i(\xi_0,\eta_0)\Big| \longrightarrow 0; \quad i=1,2,...,m$$

Es decir cada $F_i; \quad i=1,2,...,m$ es continua.

Ahora, para cada $i=1,2,..,m$, tenemos:

$$\left| \begin{aligned} F_i(\xi,\eta)\cdot\xi_i = \int_\Omega \nabla u\nabla(\xi_i\,\varphi_i)\,dx + \lambda\int_\Omega \left(v^+\right)^p\,dy\int_\Omega \xi_i\,\varphi_i\,dx - \int_\Omega \left(u^+\right)^\alpha(\xi_i\,\varphi_i)\,dx- \\ -\int_\Omega \left(v^+\right)^\beta\xi_i\,\varphi_i\,dx - \varepsilon\int_\Omega \xi_i\,\varphi_i dx \end{aligned} \right. \tag{3.3}$$

y

$$\left| \begin{aligned} G_i(\xi,\eta)\cdot\eta_i = \int_\Omega \nabla v\nabla(\eta_i\,\varphi_i)\,dx + \lambda\int_\Omega \left(u^+\right)^q\,dy\int_\Omega \eta_i\,\varphi_i\,dx - \int_\Omega \left(u^+\right)^\gamma(\eta_i\,\varphi_i)\,dx- \\ -\int_\Omega \left(v^+\right)^\delta(\eta_i\,\varphi_i)\,dx \end{aligned} \right. \tag{3.4}$$

luego se tiene:

$$\Big\langle (F,G)(\xi,\eta);(\xi,\eta)\Big\rangle = \sum_{i=1}^{m}\Big(F_i(\xi,\eta)\cdot\xi_i + G_i(\xi,\eta)\cdot\eta_i\Big)$$

$$\Big\langle (F,G)(\xi,\eta);(\xi,\eta)\Big\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}F_i(\xi,\eta)\cdot\xi_i}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m}G_i(\xi,\eta)\cdot\eta_i}_{\mathrm{II}}.$$

Explicitemos las expresiones I y II:

Cálculo de (I):

$$
\text{(I)} = \sum_{i=1}^{m} F_i(\xi,\eta)\cdot\xi_i = \sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \nabla u\nabla(\xi_i\,\varphi_i)\,dx + \lambda\sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \left(v^+\right)^p\,dx\int_\Omega \xi_i\,\varphi_i\,dx -
$$

$$
-\sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \left(u^+\right)^\alpha(\xi_i\,\varphi_i)\,dx - \sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \left(v^+\right)^\beta\xi_i\,\varphi_i\,dx - \varepsilon\sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \xi_i\,\varphi_i dx
$$

$$
= \int_\Omega \nabla u\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\,\varphi_i\right)\,dx + \lambda\int_\Omega \left(v^+\right)^p\,dx\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\,\varphi_i\right)\,dx -
$$

$$
-\int_\Omega \left(u^+\right)^\alpha\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\,\varphi_i\right)\,dx - \int_\Omega \left(v^+\right)^\beta\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\,\varphi_i\right)\,dx - \varepsilon\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\,\varphi_i\right)dx
$$

$$
= \int_\Omega \nabla u\nabla u\,dx + \lambda\int_\Omega \left(v^+\right)^p\,dx\int_\Omega u\,dx - \int_\Omega \left(u^+\right)^\alpha u\,dx - \int_\Omega \left(v^+\right)^\beta u\,dx - \varepsilon\int_\Omega udx
$$

Cálculo de (II):

$$
\text{(II)} = \sum_{i=1}^{m} G_i(\xi,\eta)\cdot\eta_i = \sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \nabla v\nabla(\eta_i\,\varphi_i)\,dx + \lambda\sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \left(u^+\right)^q\,dx\int_\Omega \eta_i\,\varphi_i\,dx -
$$

$$
-\sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \left(u^+\right)^\gamma(\eta_i\,\varphi_i)\,dx - \sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \left(u^+\right)^\delta(\eta_i\,\varphi_i)\,dx
$$

$$
= \int_\Omega \nabla v\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i\varphi_i\right)\,dx + \lambda\int_\Omega \left(u^+\right)^q\,dx\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i\varphi_i\right)\,dx -
$$

$$
-\int_\Omega \left(u^+\right)^\gamma\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i\varphi_i\right)\,dx - \int_\Omega \left(u^+\right)^\delta\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i\varphi_i\right)\,dx.
$$

Por lo tanto

$$
\text{(II)} = \int_\Omega \nabla v\nabla v\,dx + \lambda\int_\Omega \left(u^+\right)^q\,dx\int_\Omega v\,dx - \int_\Omega \left(u^+\right)^\gamma v\,dx - \int_\Omega \left(u^+\right)^\delta v\,dx.
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle (F,G)(\xi,\eta);(\xi,\eta)\Big\rangle = \\
&= \left[\int_\Omega \nabla u \nabla u\, dx + \lambda \int_\Omega \left(v^+\right)^p\, dx \int_\Omega u\, dx - \int_\Omega \left(u^+\right)^\alpha u\, dx - \int_\Omega \left(v^+\right)^\beta u\, dx - \varepsilon \int_\Omega u dx\right] + \\
&\quad + \left[\int_\Omega \nabla v \nabla v\, dx + \lambda \int_\Omega \left(u^+\right)^q\, dx \int_\Omega v\, dx - \int_\Omega \left(u^+\right)^\gamma v\, dx - \int_\Omega \left(u^+\right)^\delta v\, dx\right] \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \lambda \underbrace{\int_\Omega \left(v^+\right)^p\, dx \int_\Omega u\, dx}_{1} - \underbrace{\int_\Omega \left(u^+\right)^\alpha u\, dx}_{2} - \underbrace{\int_\Omega \left(v^+\right)^\beta u\, dx}_{3} - \\
&\quad - \varepsilon \underbrace{\int_\Omega u dx}_{4} + \lambda \underbrace{\int_\Omega \left(u^+\right)^q\, dx \int_\Omega v\, dx}_{5} - \underbrace{\int_\Omega \left(u^+\right)^\gamma v\, dx}_{6} - \underbrace{\int_\Omega \left(v^+\right)^\delta v\, dx}_{7}
\end{aligned}
$$

Que expresaremos simplemente:

$$
\Big\langle (F,G)(\xi,\eta);(\xi,\eta)\Big\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \lambda 1 - 2 - 3 - \varepsilon 4 + \lambda 5 - 6 - 7 \tag{3.5}
$$

Para acotar el miembro derecho de (3.5), procedemos a acotar cada uno de sus términos:

1 $\displaystyle\int_\Omega \left(v^+\right)^p\, dx \int_\Omega u\, dx \leq C_1 \|(u,v)\|^{p+1}.$

En efecto: Tenemos, $0 < p < 1 \Rightarrow 1 < p+1 < 2$, $\frac{1}{p} > 1 \Rightarrow \frac{2}{p} > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{\frac{2}{p}}$
luego
$\dfrac{1}{\frac{2}{p}} < 1 \Rightarrow \dfrac{p}{2} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{\frac{2}{p}} = 1 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{q} + \dfrac{p}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{p}{2} = \dfrac{2-p}{2} \Rightarrow q = \dfrac{2}{2-p}.$
Por lo tanto $\dfrac{1}{q} = \dfrac{2-p}{2}$ ó $q = \frac{2}{2-p}$

(*a*) Usando la desigualdad de Hölder

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(v^+\right)^p\, dx &\leq \left|\int_\Omega \left(v^+\right)^p\, dx\right| = \left|\int_\Omega \left(v^+\right)^p \cdot 1\, dx\right| \leq \left(\int_\Omega \left(|v|^p\right)^{\frac{2}{p}} dx\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{2}{2-p}} dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&= |\Omega|^{\frac{2-p}{2}} \left[\int_\Omega \left(|v|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx\right]^p = |\Omega|^{\frac{2-p}{2}} \|v\|^p_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ tenemos

$$
\int_\Omega (v^+)^p dx \leq |\Omega|^{\frac{2}{2-p}} . |v|^p_{L^2(\Omega)}
$$

entonces

$$\int_\Omega (v^+)^p dx \leq C_1 |\Omega|^{\frac{2}{2-p}} . |v|^p_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.6}$$

Por otro lado

$$(b) \int_\Omega u dx \leq \left(\int_\Omega u.1 dx \right) \leq \int_\Omega |u|.1 dx \leq \left(\int_\Omega |u|\ ^2 dx \right)^{1/2} . \left(\int_\Omega 1\ ^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\leq |u|_{L^2(\Omega)} . |\Omega|^{1/2}$$

entonces

$$\int_\Omega u dx \leq |\Omega|^{1/2} . |u|_{L^2(\Omega)}$$

Por lo tanto:

$$\int_\Omega u dx \leq C_2 |\Omega|^{1/2} . |u|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.7}$$

De (3.6) y (3.7) tenemos

$$\left(\int_\Omega (v^+)^p dx \right) \left(\int_\Omega u dx \right) \leq |\Omega|^{\frac{2}{2-p}} . |\Omega|^{\frac{1}{2}} . |v|^p_{L^2(\Omega)} . |u|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C_1 C_2 |\Omega|^{\frac{2}{2-p} + \frac{1}{2}} . |v|^p_{H_0^1(\Omega)} . |u|_{H_0^1(\Omega)}$$

Entonces

$$\left(\int_\Omega (v^+)^p dx \right) \left(\int_\Omega u dx \right) \leq \widetilde{C} \, \|v\|^p_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.8}$$

Como $p < 1 \Rightarrow 1 < p+1 < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{p}{p+1}$

$\Leftrightarrow q = \dfrac{p+1}{p} \quad o \quad \dfrac{1}{q} = \dfrac{p}{p+1}$

Aplicando la desigualdad de D.Young y para $0 < p < 1$

$$\|v\|^p_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\frac{(\|v\|^p)^{\frac{p+1}{p}}}{\frac{p+1}{p}} + \frac{\|u\|^{p+1}}{p+1} \right) = \frac{1}{p+1} \left(p \, \|v\|^{p+1} + \|u\|^{p+1} \right)$$

$$\leq \frac{1}{p+1} \left(\|v\|^{p+1} + \|u\|^{p+1} \right) \leq \widetilde{C} \left(\|v\| + \|u\| \right)^{p+1}$$

$$\leq \widetilde{C} \left(\sqrt{\|v\|^2 + \|u\|^2} \right)^{p+1} = \widetilde{C} \, \|(u,v)\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}.$$

Reemplazando en (3.8) tenemos:

$$\left(\int_\Omega (v^+)^p dx\right)\left(\int_\Omega u dx\right) \leq \widetilde{C}\left(\|v\|^2 + \|u\|^2\right)^{\frac{p+1}{2}} \leq C_1(\Omega,p)\,\|(u,v)\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

Donde $C_1 = C_1(\Omega, p)$ es constante.

Es decir

$$\left(\int_\Omega (v^+)^p dx\right)\left(\int_\Omega u dx\right) \leq C_1(\Omega,p)\,\|(u,v)\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \tag{3.9}$$

② $\left(\int_\Omega (u^+)^\alpha u dx\right) \leq C_2\,\|(u,v)\|^{\alpha+1}$, pues

$$\Big|\int_\Omega (u^+)^\alpha u dx\Big| \leq \|(u^+)^\alpha\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|(u)^\alpha\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$= \Big[\left(\int_\Omega |u|^{2\alpha} dx\right)^{\frac{1}{2\alpha}}\Big]^\alpha \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^\alpha_{L^{2\alpha}(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Como $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 2 > 2\alpha$ entonces

$$\|u\|^\alpha_{L^{2\alpha}(\Omega)} \leq c^\alpha \|u\|^\alpha_{L^{2\alpha}(\Omega)} \leq \widetilde{c}\|u\|^\alpha_{H_0^1(\Omega)}$$

además

$$\|u\|_{L^\alpha(\Omega)} \leq \widetilde{\widetilde{c}}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

entonces

$$\Big|\int_\Omega (u^+)^\alpha u dx\Big| \leq \overline{C}\|u\|^\alpha_{H_0^1(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \overline{C}\|u\|^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\leq C\Big(\|u\|^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)}\Big) = C_2(\Omega,\alpha)\,\|(u,v)\|^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

Por lo tanto

$$\Big|\int_\Omega (u^+)^\alpha u dx\Big| \leq C_2(\Omega,\alpha)\,\|(u,v)\|^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\,. \tag{3.10}$$

③ $\left(\int_\Omega (v^+)^\beta u dx\right) \leq C_3\,\|(u,v)\|^{\beta+1}$, ya que:

$$\Big|\int_\Omega (v^+)^\beta u dx\Big| \leq \int_\Omega |v^+|^\beta |u| dx \leq \int_\Omega |v|^\beta |u| dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega (|v|^\beta)^{\frac{\beta+1}{\beta}} dx\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\left(\int_\Omega |u|^{\beta+1} dx\right)^{\frac{1}{\beta+1}}$$

$$= \|v\|^\beta_{L^{\beta+1}(\Omega)}\|u\|_{L^{\beta+1}(\Omega)} \leq \widetilde{C_3}\|v\|^\beta_{H_0^1(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.11}$$

Considerando $0 < \beta < 1$, la desigualdad de D Young y análogo a lo procedido en (3.8) para obtener (3.9) y (3.11) tenemos

$$\left(\int_\Omega (v^+)^\beta u dx\right) \leq C_3(\Omega,\beta)\,\|(u,v)\|^{\beta+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \tag{3.12}$$

④ $\displaystyle\int_\Omega u dx \leq C_4\,\|(u,v)\|$

$$\int_\Omega u dx \leq \int_\Omega |u|\,.1 dx \leq \int_\Omega |u|.1 dx \leq \left(\int_\Omega |u|\ ^2 dx\right)^{1/2}.\left(\int_\Omega 1\ ^2 dx\right)^{1/2} = \|u\|_{L^2(\Omega)}\,.|\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_4(\Omega)\,\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4(\Omega)\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_4(\Omega)\left(\sqrt{\|u\|^2+\|v\|^2}\right)$$

Luego:

$$\int_\Omega u dx \leq C_4(\Omega)\,\|(u,v)\|_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \tag{3.13}$$

⑤ $\displaystyle\left(\int_\Omega (u^+)^q dx\right)\left(\int_\Omega v dx\right) \leq C_5\,\|(u,v)\|^{q+1}$, ya que

$\displaystyle\left(\int_\Omega (u^+)^q dx\right)\left(\int_\Omega v dx\right) \leq |\Omega|^{\frac{2}{2-q}}.|\Omega|^{\frac{1}{2}}.\,|u|^q_{L^2(\Omega)}\cdot|v|_{L^2(\Omega)}$ pués $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$

Entonces:

$$\left(\int_\Omega (u^+)^q dx\right)\left(\int_\Omega v dx\right) \leq C_5(\Omega)\,\|u\|^q_{H_0^1(\Omega)}\cdot\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.14}$$

Considerando, $0 < q < 1$ y análogo a lo hecho para obtener (3.9) y (3.11) obtenemos que:

$$\left(\int_\Omega (u^+)^q dx\right)\left(\int_\Omega v dx\right) \leq C_5(\Omega,q)\,\|(u,v)\|^{q+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \tag{3.15}$$

⑥ $\displaystyle\left(\int_\Omega (u^+)^\gamma v dx\right) \leq C_6\,\|(u,v)\|^{\gamma+1}$, en efecto:

$$\left(\int_\Omega (u^+)^\gamma v dx\right) = \left(\int_\Omega (u^+)^\gamma dx\right)\left(\int_\Omega v dx\right) \leq |\Omega|^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}.\,\|u\|^\gamma_{L^2(\Omega)}\cdot\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C_6(\Omega).\,\|u\|^\gamma_{L^2(\Omega)}\cdot\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_6(\Omega)\,\|u\|^\gamma_{H_0^1(\Omega)}\cdot\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

pués $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, así

$$\left(\int_\Omega (u^+)^\gamma v dx\right) \leq C_6(\Omega)\,\|u\|^\gamma_{H_0^1(\Omega)}\cdot\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.16}$$

Considerando, $0<\gamma<1$ y análogo a lo realizado para obtener (3.9) , (3.11), (3.15) y (3.16) obtenemos que:

$$\left(\int_{\Omega}(u^{+})^{\gamma}vdx\right)\leq C_6(\Omega,\gamma)\left\|(u,v)\right\|^{\gamma+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \tag{3.17}$$

7 $\left(\int_{\Omega}(v^{+})^{\delta}vdx\right)\leq C_7\left\|(u,v)\right\|^{\delta+1}$, pues

$$\left(\int_{\Omega}(v^{+})^{\delta}vdx\right)\leq |\Omega|^{\frac{\delta}{2-\delta}}.\left\|v\right\|^{\delta}_{L^2(\Omega)}.\left\|v\right\|_{L^2(\Omega)}\leq C_7(\Omega)\left\|u\right\|^{\delta+1}_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.18}$$

Considerando, $0<\delta<1$ y análogo a lo realizado para obtener (3.10) y de (3.18) obtenemos que:

$$\left(\int_{\Omega}(v^{+})^{\delta}vdx\right)\leq C_7(\Omega,\delta)\left\|(u,v)\right\|^{\delta+1}_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.19}$$

Retornando a (3.5) y de acuerdo a lo obtenido en (3.9), (3.10), (3.12), (3.13), (3.15), (3.17) y (3.19), tomando constantes $C_i, i=1,2,...,7$ adecuadas tenemos:

$$\begin{aligned}\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle \geq{}& \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\lambda C_1\|(u,v)\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-C_2\|(u,v)\|^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\\ &-C_3\|(u,v)\|^{\beta+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\varepsilon C_4\|u\|_{H_0^1(\Omega)}+\lambda C_5\|(u,v)\|^{q+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\\ &-C_6\|(u,v)\|^{\gamma+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-C_7\|(u,v)\|^{\delta+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Haciendo $\|(u,v)\|=\|(u,v)\|_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}=r>0$, $\|(u,v)\|=|(\xi,\eta)|$

$$\begin{aligned}\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle \geq{}& \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}+\lambda_1 C_1\|(u,v)\|^{p+1}+C_2\|(u,v)\|^{\alpha+1}-C_3\|(u,v)\|^{\beta+1}-\\ &-\varepsilon C_4\|u\|_{H_0^1(\Omega)}+\lambda C_5\|(u,v)\|^{q+1}-C_6\|(u,v)\|^{\gamma+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\\ &-C_7\|(u,v)\|^{\delta+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Entonces para $\lambda<0$ obtenemos

$$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle\geq r^2+C_1\lambda r^{p+1}+C_5\lambda r^{q+1}-C_3r^{\beta+1}-C_6r^{\gamma+1}-C_2r^{\alpha+1}-C_7r^{\delta+1}-\varepsilon C_4 r. \tag{3.20}$$

Luego

$$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle\geq r^2\left(1-\frac{a_1}{r^{1-p}}-\frac{a_2}{r^{1-q}}-\frac{a_3}{r^{1-\beta}}-\frac{a_4}{r^{1-\gamma}}-\frac{a_5}{r^{1-\alpha}}-\frac{a_6}{r^{1-\delta}}\right)-\varepsilon C_4 r$$

Así para $\alpha_i \in]0,1[$, $a_i \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1,2,...,6$ tenemos

$$\langle \,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle \geq r^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{6} \frac{a_i}{r^{1-\alpha_i}}\right) - \varepsilon C_4 r \tag{3.21}$$

Hacemos

$$p(r) = \sum_{i=1}^{6} \frac{a_i}{r^{1-\alpha_i}}; \alpha_i \in]0,1[$$

AFIRMACIÓN: Si $r > 0$ entonces $\lim\limits_{r\to+\infty} p(r) = 0$

En efecto:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists M_{\varepsilon'} > 0 / r \geq M_{\varepsilon'} \Rightarrow |p(r)| < \varepsilon'$$

Luego

$$-\varepsilon' < p(r) < \varepsilon'.$$

Si $r \geq M_{\varepsilon'}$

$$1 + \varepsilon' < 1 - p(r) < 1 - \varepsilon', r \geq M_{\varepsilon'}$$

Tomando $0 < \varepsilon_0 < 1$, donde $\alpha_0 = 1 - \varepsilon_0$ entonces, para $r = M_{\varepsilon'} + 1 = r_0$ tenemos

$$1 - p(r) \geq \alpha_0$$

Por lo tanto para

$$\rho_0 > máx\,\{1, r_0\} \quad \text{y} \quad r < M_{\varepsilon'} + 2$$

se cumple

$$\langle \,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle \geq r^2(1-\varepsilon_0) - \varepsilon C_4 r = \rho_0^2(\alpha_0) - \varepsilon C_4 r > \rho_0^2(\alpha_0) - \varepsilon C_4 M_{\varepsilon'} \tag{3.22}$$

Selecionando $\varepsilon > 0$ tal que

$$\rho_0^2(\alpha_0) - \varepsilon C_4 M_{\varepsilon'} > 0$$

entonces

$$\frac{\rho_0^2(\alpha_0)}{C_4 M_{\varepsilon'}} > \varepsilon > 0$$

De modo que para

$$p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0;1[, \quad \exists\, r_\varepsilon \,>\, 0$$

que no depende de m, tal que

$$\langle\, (F,G)(\xi,\eta)\,;\,(\xi,\eta)\,\rangle > 0, \text{si}\, \|(u,v)\| = |(\xi,\eta)| = r_\varepsilon \tag{3.23}$$

Luego por el teorema del Ángulo Agudo. Ver A.4

Existe

$$(\xi_0, \eta_0) \quad \text{tal que} \quad |(\xi_0, \eta_0)| \leq r$$

con

$$(F, G)(\xi_0, \eta_0) = (0, 0)$$

Entonces:

$$(u_m, v_m) \in \mathbb{V}_m \times \mathbb{V}_m$$

tal que

$$\|(u_m, v_m)\|_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = |(\xi_0, \eta_0)| \leq r_\varepsilon$$

De donde obtenemos

$$r_\varepsilon \geq \|(u_m, v_m)\|_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \geq \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$r_\varepsilon \geq \|(u_m, v_m)\|_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \geq \|v_m\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Lo que implíca:

$$\|u_{\varepsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq r_\varepsilon$$

$$\|v_{\varepsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq r_\varepsilon$$

entonces

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon m} \quad &\rightharpoonup \quad u_\varepsilon \text{ , en } H_0^1(\Omega) \\ v_{\varepsilon m} \quad &\rightharpoonup \quad v_\varepsilon \text{ , en } H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Pasaje al limite:

Fijando $k_0 < m, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{V}_{k_0} \subseteq H_0^1(\Omega)$, asi tenemos que:

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nabla u_{\varepsilon m} \nabla \varphi dx + \lambda \int_\Omega (v^+_{\varepsilon m})^p dx \int_\Omega \varphi dx - \int_\Omega (u^+_{\varepsilon m})^\alpha \varphi dx - \int_\Omega (v^+_{\varepsilon m})^\beta \varphi dx - \varepsilon \int_\Omega \varphi dx = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla v_{\varepsilon m} \nabla \psi dx + \lambda \int_\Omega (u^+_{\varepsilon m})^q dx \int_\Omega \psi dx - \int_\Omega (u^+_{\varepsilon m})^\gamma \psi dx - \int_\Omega (v^+_{\varepsilon m})^\delta \psi dx = 0 \end{array} \right. \tag{3.24}$$

Para pasar al limite cuando $m \to +\infty$, en (3.24), verifiquemos las siguientes convergencias:

(i) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_{\varepsilon m} \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi dx$

Por definición de convergencia débil;

$$u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_\varepsilon \Rightarrow f(u_{\varepsilon m}) \rightharpoonup f(u_\varepsilon),\ \forall f \in H^{-1}(\Omega)$$

donde

$$\begin{aligned} f : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u_\varepsilon &\longmapsto f(u_\varepsilon) = \langle u_\varepsilon; \varphi\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla\varphi dx \end{aligned}$$

como f es lineal y continua por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_\varepsilon \Rightarrow \int_\Omega \nabla u_{\varepsilon m}\nabla\varphi dx \to \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla\varphi dx$$

(ii) $\lambda \int_\Omega (v_{\varepsilon m}^+)^p dx \int_\Omega \varphi dx \to \lambda \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^p dx \int_\Omega \varphi dx$

Como

$$v_{\varepsilon m} \rightharpoonup v_\varepsilon \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega$$

de las inmersiones compactas de Sobolev (ver A.11)

$$v_{\varepsilon m} \rightharpoonup v_\varepsilon \quad \text{en} \quad L^{\overline{q}}(\Omega); \quad \overline{q} \in [1, 2^*[.$$

Luego existe una subsucesión para todo $\overline{q} \in [1, 2^* = \frac{2N}{N-2}[$ talque

$$v_{\varepsilon m}(x) \rightharpoonup v_\varepsilon(x) \quad ctp \text{ en } \Omega$$

$$|v_{\varepsilon m}(x)| \leq h(x), \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \forall m, \quad h \in \quad L^{\overline{q}}(\Omega) \tag{3.25}$$

además como

$$u_{\varepsilon\ m}^+(x) = máx\{u_{\varepsilon m}(x); 0\} = u_{\varepsilon m}(x)\ ;\ v_{\varepsilon\ m}^+(x) = máx\{v_{\varepsilon m}(x); 0\} = v_{\varepsilon m}(x)$$

tenemos que

$$(v_{\varepsilon\ m}^+)^p(x) \to (v_\varepsilon^+)^p(x), \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega$$

y por (3.25)

$$|(v_{\varepsilon\ m}^+)^p(x)| \leq |v_{\varepsilon\ m}^+(x)|^p \leq |v_{\varepsilon m}(x)|^p \leq h^p(x) \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega$$

donde $h \in L^{\overline{q}}(\Omega)$. Como $L^{\overline{q}}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ y por el Teorema de la Convergencia Dominada

$$\lambda \int_\Omega (v_{\varepsilon m}^+)^p dx \int_\Omega \varphi dx \to \lambda \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^p dx \int_\Omega \varphi dx$$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega (u_{\varepsilon m}^{+})^\alpha \varphi dx \to \int_\Omega (u_\varepsilon^+)^\alpha \varphi dx.$

Como

$$u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega$$

de las inmersiones compactas de Sobolev

$$u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{en} \quad L^{\overline{q}}(\Omega); \quad \overline{q} \in [1, 2^*[.$$

además existe al menos una subsucesión para todo $\overline{q} \in [1, 2^*[$ talque

$$u_{\varepsilon m}(x) \rightharpoonup u_\varepsilon(x) \quad \textit{ctp} \text{ en } \Omega \text{ y}$$

$|u_{\varepsilon m}(x)| \leq h(x), \quad \text{ctp} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \forall m, \quad h \in \quad L^{\overline{q}}(\Omega).$
Así mismo

$$(u_{\varepsilon}^+{}_m(x))^\alpha \varphi(x) \to (u_\varepsilon^+(x))^\alpha \varphi(x), \quad \textit{ctp} \quad \text{en} \quad \Omega$$

Para $h \in L^{\overline{q}}(\Omega)$ y por(3.25)tenemos

$$|(u_{\varepsilon}^+{}_m(x))^\alpha \varphi(x)| \leq |u_{\varepsilon}^+{}_m(x)|^\alpha |\varphi(x)| \leq |u_{\varepsilon m}(x)|^\alpha |\varphi(x)| \leq h^\alpha(x)|\varphi(x)| \quad \textit{ctp} \quad \text{en} \quad \Omega$$

Si demostramos que $h^\alpha.\varphi \in L^1(\Omega)$, luego usamos el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue obtenemos lo deseado.

En efecto, para esto tomamos

$$\overline{p} \in [1; 2^*[\quad / \quad \overline{p} > \frac{2N}{N+2}(\alpha)$$

como $1 \leq \overline{p} < 2^*$ entonces $\frac{\alpha}{\overline{p}} + \frac{1}{\overline{q}} \Leftrightarrow \overline{q} = \frac{\overline{p}}{\overline{p}-\alpha}$,
luego

$$\int_\Omega |h|^\alpha |\varphi| dx \leq \Big(\int_\Omega (|h|^\alpha)^{\frac{\overline{p}}{\alpha}} dx \Big)^{\frac{\alpha}{\overline{p}}} . \Big(\int_\Omega |\varphi|^{\frac{\overline{p}}{\overline{p}-\alpha}} dx \Big)^{\frac{\overline{p}-\alpha}{\overline{p}}} = \|h\|^\alpha_{L^{\overline{p}}(\Omega)} . |\varphi|_{L^{\frac{\overline{p}}{\overline{p}-\alpha}}(\Omega)}$$

Así tenemos que

$$\overline{p} \geq \overline{p} - \alpha$$

por lo tanto $\overline{p}$ está bien definido, y por las inmersiones continuas de Sobolev

$$\|h\|_{L^{\overline{p}}(\Omega)} < \infty \quad \text{y} \quad |\varphi|_{L^{\frac{\overline{p}}{\overline{p}-\alpha}}(\Omega)} < \infty$$

se muestra que

$$h^{\alpha}.\varphi \in L^1(\Omega).$$

(iv) $\displaystyle\int_\Omega (v_{\varepsilon m}^+)^\beta \varphi dx \to \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^\beta \varphi dx$

Como

$$v_{\varepsilon m} \rightharpoonup v_\varepsilon \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega$$

de las inmersiones compactas de Sobolev

$$v_{\varepsilon m} \rightharpoonup v_\varepsilon \quad \text{en} \quad L^{\overline{q}}(\Omega); \quad \overline{q} \in [1, 2^*[\,.$$

Además existe una subsucesión de $(v_{\varepsilon m})$ que denotamos con $(v_{\varepsilon m})$, tal que

$$v_{\varepsilon m}(x) \rightharpoonup v_\varepsilon(x) \quad \textit{ctp} \text{ en } \Omega$$

además
$|v_{\varepsilon m}(x)| \leq h(x)$, ctp en Ω, $\forall m$, $h \in L^{\overline{q}}(\Omega)$
así mismo

$$(v_{\varepsilon\ m}^+(x))^\beta \varphi(x) \to (v_\varepsilon^+(x))^\beta \varphi(x), \quad \textit{ctp} \quad \text{en} \quad \Omega$$

y por (3.25)

$$|(v_{\varepsilon\ m}^+(x))^\beta \varphi(x)| \leq |v_{\varepsilon\ m}^+(x)|^\beta |\varphi(x)| \leq |v_{\varepsilon m}(x)|^\beta |\varphi(x)| \leq h^\beta(x)|\varphi(x)| \quad \textit{ctp} \quad \text{en} \quad \Omega$$

donde $h \in L^{\overline{q}}(\Omega)$.

Siguiendo los pasos de la convergencia iii) tenemos que $h^\beta.\varphi \in L^1(\Omega)$ y usando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue obtenemos lo deseado.

(v) $\displaystyle\int_\Omega \nabla v_{\varepsilon m} \nabla \psi dx \to \int_\Omega \nabla v_\varepsilon \nabla \psi dx.$

Por la definición de convergencia débil

$$v_{\varepsilon m} \rightharpoonup v_\varepsilon \Rightarrow g(v_{\varepsilon m}) \rightharpoonup g(v_\varepsilon),\ \forall g \in H^{-1}(\Omega)$$

donde

$$\begin{aligned} g : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_\varepsilon &\longmapsto g(v_\varepsilon) = \langle v_\varepsilon; \psi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla v_\varepsilon \nabla \psi dx \end{aligned}$$

como g es lineal y continua por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$v_{\varepsilon m} \rightharpoonup v_{\varepsilon} \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla v_{\varepsilon m} \nabla \psi dx \to \int_{\Omega} \nabla v_{\varepsilon} \nabla \psi dx$$

(vi) $\lambda \int_{\Omega} (u_{\varepsilon m}^{+})^{q} dx \int_{\Omega} \varphi dx \to \lambda \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^{+})^{q} dx \int_{\Omega} \varphi dx.$

Como

$$u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_{\varepsilon} \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega)$$

de las inmersiones compactas de Sobolev

$$u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_{\varepsilon} \quad \text{en} \quad L^{\overline{p}}(\Omega); \quad \overline{p} \in [1, 2^{*}[.$$

Luego existe una subsucesión talque

$$u_{\varepsilon m}(x) \rightharpoonup u_{\varepsilon}(x) \quad ctp \text{ en } \Omega$$

$$|u_{\varepsilon m}(x)| \leq h(x), \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \forall m, \quad h \in \quad L^{\overline{p}}(\Omega)$$

además como

$$u_{\varepsilon m}^{+}(x) = máx\{u_{\varepsilon m}(x); 0\} = u_{\varepsilon m}(x) \ ; \ u_{\varepsilon}^{+}(x) = máx\{u_{\varepsilon}(x); 0\} = u_{\varepsilon}(x)$$

tenemos que

$$(u_{\varepsilon m}^{+})^{q}(x) \to (u_{\varepsilon}^{+})^{q}(x), \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega$$

y por (3.25)

$$|(u_{\varepsilon m}^{+})^{q}(x)| \leq |u_{\varepsilon m}^{+}(x)|^{q} \leq |u_{\varepsilon m}(x)|^{q} \leq h^{q}(x) \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega$$

donde $h \in L^{\overline{p}}(\Omega)$. Como $L^{\overline{p}}(\Omega) \subseteq L^{1}(\Omega)$ y por el Teorema de la Convergencia Dominada

$$\lambda \int_{\Omega} (u_{\varepsilon m}^{+})^{q} dx \int_{\Omega} \varphi dx \to \lambda \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^{+})^{q} dx \int_{\Omega} \varphi dx.$$

(vii) $\int_{\Omega} (u_{\varepsilon m}^{+})^{\gamma} \varphi dx \to \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^{+})^{\gamma} \varphi dx.$

Como

$$u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_{\varepsilon} \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega$$

de las inmersiones compactas de Sobolev

$$u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_{\varepsilon} \quad \text{en} \quad L^{\overline{p}}(\Omega); \quad \overline{p} \in [1, 2^{*}[.$$

además existe una subsucesión talque

$$u_{\varepsilon m}(x) \to u_{\varepsilon}(x) \quad ctp \text{ en } \Omega$$

además

$$|u_{\varepsilon m}(x)| \leq h(x), \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \forall m, \quad h \in \quad L^{\overline{p}}(\Omega)$$

así mismo

$$(u_{\varepsilon\ m}^{+}(x))^{\gamma}\varphi(x) \to (u_{\varepsilon}^{+}(x))^{\gamma}\varphi(x), \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega$$

y por (3.25) tenemos

$$|(u_{\varepsilon\ m}^{+}(x))^{\gamma}\varphi(x)| \leq |u_{\varepsilon\ m}^{+}(x)|^{\gamma}|\varphi(x)| \leq |u_{\varepsilon m}(x)|^{\alpha}|\varphi(x)| \leq h^{\alpha}(x)|\varphi(x)| \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega$$

donde $h \in L^{\overline{p}}(\Omega)$.

Como en la convergencia iii) basta probar que $h^{\gamma}.\varphi \in L^{1}(\Omega)$.
En efecto, tomamos

$$\overline{q} \in [1; 2^{*}[\quad \text{tal que} \quad \overline{q} > \frac{2N}{N+2}(\gamma)$$

como $1 \leq \overline{q} < 2^{*}$ entonces

$$\frac{\gamma}{\overline{q}} + \frac{1}{\overline{p}} \Leftrightarrow \overline{p} = \frac{\overline{q}}{\overline{q} - \gamma}$$

luego

$$\int_{\Omega} |h|^{\gamma}|\varphi|dx \leq \Big(\int_{\Omega} (|h|^{\gamma})^{\frac{\overline{q}}{\gamma}} dx\Big)^{\frac{\gamma}{\overline{q}}}.\Big(\int_{\Omega} |\varphi|^{\frac{\overline{q}}{\overline{q}-\gamma}} dx\Big)^{\frac{\overline{q}-\gamma}{\overline{q}}} = \|h\|_{L^{\overline{q}}(\Omega)}^{\gamma}.|\varphi|_{L^{\frac{\overline{q}}{\overline{q}-\gamma}}(\Omega)}$$

Así tenemos que

$$\overline{q} \geq \overline{q} - \gamma$$

por lo tanto $\overline{q}$ está bien definido, y por las inmersiones continuas de Sobolev

$$\|h\|_{L^{\overline{q}}(\Omega)} < \infty \quad \text{y} \quad |\varphi|_{L^{\frac{\overline{q}}{\overline{q}-\gamma}}(\Omega)} < \infty$$

se muestra que

$$h^{\gamma}.\varphi \in L^{1}(\Omega).$$

(viii) $\displaystyle\int_\Omega (v_{\varepsilon m}^+)^\delta \varphi dx \to \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^\delta \varphi dx.$

Como

$$v_{\varepsilon m} \rightharpoonup v_\varepsilon \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega$$

de las inmersiones compactas de Sobolev

$$v_{\varepsilon m} \rightharpoonup v_\varepsilon \quad \text{en} \quad L^{\overline{q}}(\Omega); \quad \overline{q} \in [1, 2^*[.$$

además existe una subsucesión talque

$$v_{\varepsilon m}(x) \rightharpoonup v_\varepsilon(x) \quad ctp \text{ en } \Omega$$

y

$|v_{\varepsilon m}(x)| \leq h(x), \quad \text{ctp} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \forall m, \quad h \in \quad L^{\overline{q}}(\Omega)$

así mismo

$$(v_{\varepsilon\ m}^+(x))^\delta \varphi(x) \to (v_\varepsilon^+(x))^\delta \varphi(x), \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega$$

y por (3.25)

$$|(v_{\varepsilon\ m}^+(x))^\delta \varphi(x)| \leq |v_{\varepsilon\ m}^+(x)|^\delta |\varphi(x)| \leq |v_{\varepsilon m}(x)|^\delta |\varphi(x)| \leq h^\delta(x)|\varphi(x)| \quad ctp \quad \text{en} \quad \Omega$$

donde $h \in L^{\overline{q}}(\Omega)$.

Siguiendo los pasos de la convergencia iii) tenemos que $h^\delta.\varphi \in L^1(\Omega)$ y usando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue obtenemos lo deseado.

De las anteriores convergencias se obtiene

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi dx + \lambda \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^p dx \int_\Omega \varphi dx - \int_\Omega (u_\varepsilon^+)^\alpha \varphi dx - \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^\beta \varphi dx - \varepsilon \int_\Omega \varphi dx = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla v_\varepsilon \nabla \psi dx + \lambda \int_\Omega (u_\varepsilon^+)^q dx \int_\Omega \psi dx - \int_\Omega (u_\varepsilon^+)^\gamma \psi dx - \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^\delta \psi dx = 0 \end{array} \right. \tag{3.26}$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathbb{V}_{k_0} \subseteq \bigcup_{m=1}^{+\infty} \mathbb{V}_m$. Luego, por densidad y continuidad se obtiene

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi dx + \lambda \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^p dx \int_\Omega \varphi dx - \int_\Omega (u_\varepsilon^+)^\alpha \varphi dx - \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^\beta \varphi dx - \varepsilon \int_\Omega \varphi dx = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla v_\varepsilon \nabla \psi dx + \lambda \int_\Omega (u_\varepsilon^+)^q dx \int_\Omega \psi dx - \int_\Omega (u_\varepsilon^+)^\gamma \psi dx - \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^\delta \psi dx = 0 \end{array} \right.$$

para todo $\varphi, \psi \in \overline{\bigcup_{m=1}^{+\infty} \mathbb{V}_m} = \mathrm{H}_0^1(\Omega). Es decir (\mathrm{u}_\varepsilon, v_\varepsilon)$ es una solución débil de $(P_\lambda)_\varepsilon$.

Ahora probaremos la positividad de u_ε y v_ε.

En efecto tenemos

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon^\alpha(x) + v_\varepsilon^\beta(x) + \varepsilon - \lambda \displaystyle\int_\Omega v_\varepsilon^p(y)dy \geq u_\varepsilon^\alpha(x), \quad x \in \Omega. \\ u_\varepsilon(x) > 0, \quad x \in \Omega. \\ u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.27}$$

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon^\gamma(x) + v_\varepsilon^\delta(x) - \lambda \displaystyle\int_\Omega u_\varepsilon^q(y)dy \geq u_\varepsilon^\delta(x), \quad x \in \Omega. \\ v_\varepsilon(x) > 0, \quad x \in \Omega. \\ v_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.28}$$

En particular

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u_\varepsilon(x) \geq u_\varepsilon^\alpha(x), \quad x \in \Omega. \\ u_\varepsilon(x) > 0, \quad x \in \Omega. \\ u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.29}$$

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v_\varepsilon(x) \geq v_\varepsilon^\delta(x), \quad x \in \Omega. \\ v_\varepsilon(x) > 0, \quad x \in \Omega. \\ v_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.30}$$

Sabemos que existe la solución y es única de los problemas dados a continuación

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u(x) = u^\alpha(x),\ x \in \Omega. & -\Delta v(x) = v^\delta(x).\ x \in \Omega \\ u(x) > 0,\ x \in \Omega. & v(x) > 0,\ x \in \Omega. \\ u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. & v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.31}$$

Sean $u_\alpha > 0$ la única solución del problema $(\alpha - r)$ dado a izquierda de (3.31) y $v_\delta > 0$ la única solución del problema $(\delta - r)$ dado a derecha de (3.31).

La existencía y unicidad de las soluciones de cada una de las ecuaciones de (3.31) están garantizadas por los resultados obtenidos para $0 < \alpha < 1$ y $0 < \delta < 1$.

Observación. En lo que sigue se usa resultados de comparación debido a Ambrosetti, Brezis y Cerami ; ver [18].

Lema 3. *Supongamos que $f(t)$ es una función continua tal que $t^{-1}f(t)$ es decreciente para $t > 0$. Si v y w satisfacen:*

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta v(x) \leq f(v(x)) \;\; ; \;\; x \in \Omega \\ \\ v(x) > 0 \;\; ; \;\; x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 \;\; ; \;\; x \in \partial\Omega \end{array}\right. \tag{3.32}$$

y

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta w(x) \geq f(w(x)) \;\; ; \;\; x \in \Omega \\ \\ w(x) > 0 \;\; ; \;\; x \in \Omega \\ \\ w(x) = 0 \;\; ; \;\; x \in \partial\Omega \end{array}\right. \tag{3.33}$$

entonces,

$$w(x) \geq v(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Demostración. Ver [18] Lema (3.3) de Ambrosetti-Brezis-Cerami. □

Tomando una función $f(t) = t^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$ tal que

$$h(t) = t^{-1}f(t) = t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

es decreciente; para(3.29)y(3.30) tenemos:

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_{\varepsilon}(x) \geq f(u_{\varepsilon}(x)),\, x \in \Omega. & -\Delta u_{\alpha}(x) \leq f(u_{\alpha}(x)).\, x \in \Omega \\ \\ u_{\varepsilon}(x) > 0,\, x \in \Omega. & u_{\alpha}(x) > 0,\, x \in \Omega. \\ \\ u_{\varepsilon}(x) = 0,\, x \in \partial\Omega. & u_{\alpha}(x) = 0,\, x \in \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.34}$$

Entonces por el lema 4 concluimos

$$u_{\varepsilon}(x) \geq u_{\alpha}(x) > 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.35}$$

así mismo

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta v_{\varepsilon}(x) \geq f(v_{\varepsilon}(x)),\, x \in \Omega. & -\Delta v_{\delta}(x) \leq f(v_{\delta}(x)).\, x \in \Omega \\ \\ v_{\varepsilon}(x) > 0,\, x \in \Omega. & v_{\delta}(x) > 0,\, x \in \Omega. \\ \\ u_{\varepsilon}(x) = 0,\, x \in \partial\Omega. & v_{\delta}(x) = 0,\, x \in \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.36}$$

Nuevamente por el lema 4 deducimos que

$$v_\varepsilon(x) \geq v_\delta(x) > 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.37}$$

Esto concluye la prueba del **teorema 3.1**.■

El siguiente teorema es el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3.2. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0,1[$, $p, q > 0$, y $\lambda < 0$. Existe una única solución débil (u, v) de (P_λ). Además $u, v > 0$ y

$$u, v \in \Big(C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\Big) \times \Big(C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\Big)$$

Demostración:

Realizaremos esta demostración, tomando limite cuando $\varepsilon \to 0^+$ en $(P_\lambda)_\varepsilon$; para esto nos apoyamos en el teorema (3.1).

Bastará considerar $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, ...$ y tomando $\varphi = u_{\varepsilon\nu}$ y $\psi = v_{\varepsilon\nu}$ en (3.16), sumando ambos resultados y después de algunos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned}\|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\|^2 \leq C\Big(&\|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\|^{p+1} + \|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\|^{\alpha+1} + \|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\|^{\beta+1} + \|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\| + \\ &+\|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\|^{q+1} + \|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\|^{\gamma+1} + \|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\|^{\delta+1}\Big).\end{aligned} \tag{3.38}$$

Ahora, como $0 < p+1, \alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q+1, \delta+1 < 2,$ resulta

$$\|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\| \leq C \tag{3.39}$$

independiente de ε.

En consecuencia, existe $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ talque

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightharpoonup (u, v), \text{ en } H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

Luego razonando como en la demostración del pasaje al limite en el teorema 3.1, obtenemos que $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ satisface

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \lambda \int_\Omega v^p dx \int_\Omega \varphi dx = \int_\Omega u^\alpha \varphi dx + \int_\Omega v^\beta \varphi dx + \varepsilon \int_\Omega \varphi dx \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla \psi dx + \lambda \int_\Omega u^q dx \int_\Omega \psi dx = \int_\Omega u^\gamma \psi dx + \int_\Omega v^\delta \psi dx \end{array}\right.$$

para todo $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$.
Lo que prueba la existencia de la solución débil de (P_λ).

Aplicando nuevamente el Lema 4, razonando similarmente como en la demostración del teorema (3.1), obtenemos

$$u > 0, \text{ y } v > 0$$

Para probar la regularidad usaremos reiteradamente el teorema ADN dado en A.15,(Agmon-Douglis-Niremberg)y el teorema A.16 (Schauder), a este procedimiento se le denomina argumento "**Bootstrap**", consideramos

$$\widehat{f}(x) = \widehat{f}\Big(u(x), v(x)\Big) = u^\alpha(x) + v^\beta(x) - \lambda \int_\Omega v^p(y)\, dy$$

$$\widehat{g}(x) = \widehat{g}\Big(u(x), v(x)\Big) = u^\gamma(x) + v^\delta(x) - \lambda \int_\Omega u^q(y)\, dy$$

Se tiene así el sistema

$$-\Delta u = \widehat{f}(x) \qquad x \quad \in \quad \Omega \tag{3.40}$$

$$-\Delta v = \widehat{g}(x) \qquad x \quad \in \quad \Omega \tag{3.41}$$

Sea $r \in]1; 2^* - 1[$, $\theta \in]1; 2^* - 1[$. Luego

$$|\widehat{f}(x)| \leq c_1\Big(|u|^r + |v|^r\Big) + c_2; \qquad c_1, c_2 > 0. \tag{3.42}$$

$$|\widehat{g}(x)| \leq c_3\Big(|u|^\theta + |v|^\theta\Big) + c_4; \qquad c_3, c_4 > 0. \tag{3.43}$$

En consecuencia $\widehat{f} \in L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)$ y $\widehat{g} \in L^{\frac{2^*}{\theta}}(\Omega)$, y por la regularidad de los problemas elípticos (Teorema ADN), se tiene que

$$u \in W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega) \quad y \quad v \in W^{2,\frac{2^*}{\theta}}(\Omega) \tag{3.44}$$

Analicemos la regularidad de u, la regularidad de v es similar.

Si, $\frac{2^*}{r} \geq \frac{N}{2}$, entonces

$$W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^\varepsilon(\Omega), \forall \varepsilon \in [1; +\infty[$$

Ahora, fijando $\varepsilon > Nr > 1$, resulta en particular

$$W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^\varepsilon(\Omega)$$

en consecuencia $u \in L^{\varepsilon}(\Omega)$. Similarmente, encontramos $v \in L^{\varepsilon}(\Omega)$.

Luego de (3.42), resulta que $\widehat{f} \in L^{\frac{\varepsilon}{r}}(\Omega)$. Aplicando nuevamente (ADN) obtenemos

$$u \in W^{2,\frac{\varepsilon}{r}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1}(\overline{\Omega})$$

De (3.42), repitiendo el análisis anterior, resulta $\widehat{f} \in C(\overline{\Omega})$ y por el teorema de Schauder $u \in C^{0}(\overline{\Omega}) \cap C^{2}(\Omega)$. Similar cálculo permite obtener $v \in C^{0}(\overline{\Omega}) \cap C^{2}(\Omega)$.

Así el teorema 3.2 está completamente demostrado.$\blacksquare$

4 Implementación del Método Numérico

Consideremos el problema unidimensional

$$\left| \begin{array}{l} -u'' + \lambda \displaystyle\int_0^1 u^p(y)\,dy = f, \quad en \quad]0,1[\\ u(0) \; = \; u(1) \; = \; 0. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

con $f \in L^2(0,1)$.

Se trata de hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(P) \qquad \int_0^1 u'(x)\varphi'(x)\,dx + \lambda \int_0^1 u^p(y)\,dy \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

A fin de construir la aproximación por elementos finitos, subdividimos $\overline{\Omega} = [0;1]$ en N subintertvalos $[x_i; x_{i+1}]$, $\quad i = 0,1,2,...,N-1$; por los puntos $x_i = ih$, $i = 0,1,...,N$, donde $h = \frac{1}{N}$, $N \geq 2$.

Es conveniente expresar nuestra aproximación como una combinación lineal de las funciones base elemento finito

$$\varphi_i(x) \; = \; \Big(1 - |\frac{x - x_i}{h}|\Big)_+, \qquad i = 1,2,...,N-1.$$

resulta que $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$, $Sop(\varphi_i) = [x_{i-1}; x_{i+1}]$, $i = 0,1,2,...,N-1$. y que $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N-1}$ es linealmente independiente. Por tanto

$$V_h \; = \; [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N-1}] \subseteq H_0^1(\Omega)$$

y $dim(V_h) = N - 1$.

La aproximación de elemento finito de (P) es: hallar $u_h \in V_h$, tal que

$$(P_h) \qquad \int_0^1 u_h'(x)\varphi_h'(x)\,dx + \lambda\Big(\int_0^1 u_h^p(x)\,dx\Big)\Big(\int_0^1 \varphi_h(x)\,dx\Big) = \int_0^1 f\varphi_h(x)\,dx, \quad \forall \varphi_h \in V_h$$

como $u_h \in V_h$, es obvio que

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \varphi_i(x)$$

que sustituida en (P_h) obtenemos el problema equivalente.

Hallar $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$ tal que

$$(P_h)' \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \lambda\Big(\int_0^1 (\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i\varphi_i(x))^p(x)\,dx\Big)\Big(\int_0^1 \varphi_j(x)\,dx\Big) = \int_0^1 f\varphi_j(x)\,dx$$

para $j = 0, 1, 2, ..., N-1$.

Haciendo

$$a_{ji} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \lambda\Big(\int_0^1 (\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i\varphi_i(x))^p(x)\,dx\Big)\Big(\int_0^1 \varphi_j(x)\,dx\Big)$$

$$F_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)\,dx;\ j = 0, 1, 2, ..., N-1.$$

podemos escribir $(P_h)'$ como el sistema matricial

$$(*)\ AU = F \tag{4.2}$$

donde $A = [a_{ji}]_{1,j\leq N-1}$, $F = (F_1, F_2, ..., F_{N-1})^t$. Resolviendo el sistema (4.2) sustituimos los valores $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N-1}$ en la expresión

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i\varphi_i(x)$$

y así obtenemos u_h.

Observación. En la práctica los a_{ji} y F_j son calculados aproximadamente usando reglas de integración numérica.

5 Conclusiones y/o Sugerencias

1. Se concluye que el Método de Galerkin es de gran aplicabilidad para resolver problemas no locales, en particular para encontrar soluciones débiles para sistemas no lineales, como el estudiado en este trabajo. Es evidente que la metodología empleada puede aplicarse a otro tipo de ecuaciones diferenciales parciales y/o ordinarias, o ecuaciones integrodiferenciales, con diferente condición de frontera. Por ejemplo

$$\left|\begin{array}{l} -M\Big(\displaystyle\int_\Omega u_x^2 dx\Big)u_{xx} + g(x,u)|u|_p^p = 0. \ \ ; \ en\ ]0;1[\\ M\Big(\displaystyle\int_\Omega u_x^2 dx\Big)u_x(1) = h(1) \\ u(1) = 0 = u(0) \end{array}\right.$$

   puede resolverse con la técnica empleada aquí, pero esto se escapa de nuestro objetivo.

2. Se pueden estudiar diversos casos relacionados con nuestro sistema (P_λ). Por ejemplo cuando el operador laplaciano Δ es cambiado por el p-laplaciano Δ_p para $1 < p < +\infty$, o cuando hay condiciones de frontera no homogéneas.
   También se puede investigar (P_λ) en el contexto de los espacios de Sobolev con exponente variable. Así mismo se puede investigar la unicidad de la solución.

3. Nuestro trabajo también mostró una estrecha relación con otros métodos de aproximación numérica, los elementos finitos.

4. Como cualquier otro método matemático, el método de Galerkin también, tiene sus limitaciones. En nuestro caso aplicar el método se torna muy difícil(sino es inaplicable) cuando $\lambda > 0$.

6 Apéndice de Resultados Utilizados

En este apéndice enunciaremos los principales resultados utilizados durante las demostraciones en este trabajo.

Teorema (A.1)(Lax-Milgram) Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal verificando:

(*i*) $a(\cdot,\cdot)$ es continua, esto es, existe $M > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall \ u, v \in H;$$

(*ii*) $a(\cdot,\cdot)$ es coercivo, osea, existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall \ u \in H;$$

Sea $T : H \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo, existe un único $u \in H$ satisfaciendo:

$$a(u,v) = T(v), \quad \forall \ v \in H.$$

Demostración: Ver [11] pag.89

Teorema (A.2)(Principio del Máximo Fuerte) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u \leq 0$ $(\Delta u \geq 0)$ en Ω y suponga que existe un punto $y \in \Omega$ tal que $u(y) = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\partial\Omega} u \right)$. Entonces, u es constante.
Demostración: Ver [14] pag.15

Teorema (A.3)(Principio del Máximo Débil) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u \leq 0$ $(\Delta u \geq 0)$ en Ω. Entonces

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Demostración: Ver [14] pag.15

Teorema (A.4) (**Del Ángulo Agudo**.)Sea $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua. Si existe $R > 0$ tal que $\langle F(x), x\rangle \geq 0$, $\forall\, |x|_{\mathbb{R}^m} = R$, entonces existe $x_0 \in \overline{B}(0, R)$ tal que $F(x_0) = 0$.

Demostración: Ver [16] [5]

Teorema (A.5)(Desigualdad de Poincaré) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe una constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Demostración: Ver [20] pag.183

Teorema (A.6) Sea E un espacio de Banach reflexivo y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)_{n_j\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \quad \text{en} \quad E.$$

Demostración: Ver [11] pag.50.

Teorema (A.7) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subseteq (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(*i*) $f_{n_k} \to f(x)$ c.t.p en Ω.

(*ii*) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ c.t.p en Ω, para todo k, con $h \in L^p(\Omega)$.

Demostración: Ver [11] pag.58.

Teorema (A.8) Sea L un operador Elíptico estrícto en Ω con $a^{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $b^i, c^i \in L^\infty(\Omega)$. Si $\partial\Omega \in C^{k+2}$ y existe $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$ con $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Entonces $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ y:

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)}\Big).$$

Demostración: Ver [14] pag.177.

Teorema (A.9) Sean $m \geq 1$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces:

(i) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$.

(ii) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para $q \in [p, \infty)$.

(iii) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

Demostración: Ver [12] pag.79

Teorema (A.10)(Teorema de Inmersión continua de Sobolev) Sea Ω un dominio regular en $\mathbb{R}^n$, $m > 0$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces, para cualquier $j \geq 0$ las inmersiones de abajo son continuas:

(i) Si $m < \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq p \leq \dfrac{np}{n - mp} = p^*$.

(ii) Si $m = \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \infty$.

(iii) Si $m > \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_\beta(\Omega)$.

(iv) Si $m - 1 < \dfrac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq m - \dfrac{n}{p}$.

donde denotamos por $C^j_\beta(\Omega)$ al espacio de Banach de funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^j tales que u y todas sus derivadas de orden j son acotadas con la norma:

$$\|u\|_{C^j_\beta(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Así mismo, $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \leq 1$, es el espacio de Banach de las funciones $u \in C^k_\beta(\mathbb{R}^n)$ tales que u y todas sus derivadas de orden k son Hölder continuas (Holderiana) con exponente λ ($\lambda-$Hölder continuas), esto es:

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda} < \infty.$$

La norma de $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ es dada por

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Demostración: Ver [13] pag.102

Teorema (A.11)(Teorema de Inmersión Compacta de Rellich-Kondrachov) Sea Ω un dominio acotado con frontera regular en $\mathbb{R}^n$, $j \geq 0$, $m \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces para cualquier $j \geq 0$, las inmersiones de abajo son compactas:

(i) Si $m < \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq p \leq \dfrac{np}{n-mp} = p^*$.

(ii) Si $m = \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \infty$.

(iii) Si $m > \dfrac{n}{p}$;

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ 1 \leq q \leq \infty;\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega);\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j}(\overline{\Omega}).$$

(iv) Si $m - 1 < \dfrac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\mu}(\Omega)$, $0 < \mu < m - \dfrac{n}{p}$.

Demostración: Ver [13] pag.103

Teorema (A.12) Sea H un espacio de Banach $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$. Entonces:
Si $u_n \rightharpoonup u$ en H, entonces $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$. Demostración: Ver [11] pag.50

Teorema (A.13) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo. Para toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, con

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad X$$
$$\limsup \|u_n\| \leq \|u\|.$$

Se sigue que

$$u_n \to u \quad \text{en} \quad X.$$

Demostración: Ver [11] pag.52

Teorema (A.14)(Teorema de la Divergencia) Sea Ω un dominio acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una Hiperficie de clase C^1 y ν es el vector unitario normal a $\partial\Omega$. Para cualquier función $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $F \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ tenemos que:

$$\int_\Omega div\, F\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle\, dS.$$

Demostración: Ver [22] pag.17

Teorema (A.15)(Agmon-Douglis-Nirenberg.) Sea $0 < \alpha < 1$ y Ω un abierto acotado de clase $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Supongamos que los coeficientes de

$$L = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\big) + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

$a_{i,j}, b_j$ y c pertenecen a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ y que Λ es el limite superior de sus normas en este espacio.

Sea $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ y $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Sea $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ una función talque

$$\left| \begin{array}{l} Lu = f \quad ; \quad en\, \Omega \\ \\ u = g \quad ; \quad sobre\, \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right.$$

entonces $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ con la estimativa

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\Big(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}\Big)$$

donde C solo depende de α, Λ y Ω.

Demostración: Ver [23]pag.103

Teorema (A.16)(Schauder.) Sea $0 < \alpha < 1$ y Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, de clase $C^{2,\alpha}(\Omega)$ y el operador

$$Lu = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u\big) + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x, u(x))$$

con $a_{i,j} \in C(\overline{\Omega}), \quad 1 \leq i,j \leq n$, $b \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), b = (b_i)_{i=1}^n$ y $c \in C(\overline{\Omega}), c(x), \forall x \in \overline{\Omega}$,

$$\exists \lambda > 0; \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Si $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ y $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, el problema

$$\left| \begin{array}{l} Lu = f \quad ; \quad en\, \Omega \\ \\ u = g \quad ; \quad sobre\, \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right.$$

admite una única solución (débil) $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Demostración: Ver [23] Pag. 104

Observación.

1) Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dada. En general, $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, pero $\widetilde{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

2) Si $\psi \in C_0^1(\Omega)$, entonces $u\,\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ con

$$D_i(u\,\psi) = \psi\,D_i u + u\,D_i\psi,$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Además, $\widetilde{u\,\psi}$ pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y se satisface

$$D_i(\widetilde{u\,\psi}) = \widetilde{\psi\,D_i u} + \widetilde{u\,D_i\psi}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

3) Sean E_i, $i = 1, 2, ..., m$ espacios de Banach, con normas $|.|_{E_i}$ respectivamente. Entonces

$$E = \prod_{i=1}^{m} E_i$$

es un espacio de Banach, con la norma

$$|\xi|_E = \left(\sum_{1 \leq i \leq m} |\xi_i|_{E_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in E$$

En particular $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y

$$|(u, v)|_E = \left(|u|_{H_0^1(\Omega)}^2 + |v|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema (A.17)(Stampacchia.) Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua tal que $G(0) = 0$. Para $1 < p < +\infty$, si Ω es acotado y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces tenemos $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ Demostración. Ver [25]Pag. 154

Bibliografía

[1] Agmon,S., Douglis, A. and Nirenberg,L."Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfyng general boundaty conditions I".*Comm. Pure Appl. Math.*, 12(1959) pp. 623-727.

[2] Brezis,H. and Kamin, S., "Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ ". *Manuscripta Mathematica*. Vol. 74 ; n_0.1, pp.87-106, 1992.

[3] Brezis,H. and Oswald, L., "Remarks on sublinear elliptic equations ". *Nonlineal Analysis*. Vol. 10 ; n_0.1, pp.55-64, 1986.

[4] Cabada,A., Cid, J.A., and Sanchez, L., "Existence of solutions for elliptic systems with nonlocal terms in one dimension ".*Boundary value problems*, vol.2011, Article ID 518431, 12 pages, 2011.

[5] Cabada,A., F.J.S.A. and Correa. "Existence of solutions of a Nonlocal Elliptic System via Galerkin Method ".*Applied Analysis*. Vol. 2012, Article ID 137379, 16 pages, 2012.

[6] De Figuereiredo, D.G, and Mitidieri,E., "A maximum principle for an elliptic system and applications to semilinear problems".*SIAM Journal on Mathematical Analysis*. Vol. 17, no. 4, pp. 836-849, 1986.

[7] Correa, F.J.S.A. and Lopes, F.P.M.,"Positive solutions for a class of nonlocal elliptic systems".*Comm. Appl. Nonlinear Anal* . 14(2007),67-77.

[8] De Figueiredo, D.G., "Nonlinear elliptic systems ".*An. Acad. Brasil. Cinc.* 72(2000), 453-469.

[9] Dunninger, D.R., and Wang, H., "Multiplicity of positive radial solutions for an elliptic system on an annulus ".*Nonlinear Anal.* 14(2000), 803-811.

[10] Lee, Y.H., "Multiplicity of positive radial solutions for multiparameter semilinear elliptic systems on an annulus ".*J. Differential Equations* 174(2001), 420-441.

[11] Brezis, H.,"Analyse Fonntionelle Theorie et Aplications". Dunod (1999)

[12] Kesavan,I.,"Topics in Functional Analysis and applications". John Wiley & Sons (1989)

[13] De Figueiredo, D.G, "Equações Elípticas não lineares", 11° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas (1977).

[14] Gilbarg, D., Trudinger, N.,"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order". Springer-Verlag.(2001)

[15] Brezis, H.,"Analisis Funcional teoria y Aplicaciones". Alianza Editorial.S.A. Madrid.(2001)

[16] Lions,J.L., "Quelques méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires", Gauthier-Villars, Paris, France, 1969.

[17] Stampacchia, G., "Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes". *En Comptes rendus hebdomadaires des séances de Académie des sciences*, vol.258, pág. 44134416. Académie des Sciences de Paris, Paris, 1964.

[18] Ambrosetti, A., Brezis, H,. and Cerami, G., "Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems".*Journal of Functional Analysis.* Vol. 122, no. 2, pp. 519-543, 1994.

[19] De Guzman, Rubio.,"Integración: Teoría y Técnicas". Editorial Alhambra. S.A., Madrid(1979)

[20] Adams, R., Fournier, J.,"Sobolev Space". Elsevier.Second edition.(2003)

[21] Botelho,G., Pellegrino,D.,and Texeira, E.,"Fundamentos de Análise Funcional". Textos Universitarios. SBM. 2° edicao (2015)

[22] Giglioli,A.,"Equações Diferenciais Parciais Elípticas". 10° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas (1975).

[23] Le Dret, H.,"Notes de cours. equations aux dérivées partielles elliptiques".(2010)

[24] Rosas Cruz, J.C., "Una aplicación del análisis funcional a las ecuaciones diferenciales ". Tesis de Maestria. Facultad de Matemáticas. Universidad del Valle de Mexico(2005).

[25] Gatica, Gabriel.,"Introducción al Análisis Funcional: teoría y Aplicaciones". Editorial Reverté., España(2014)

[26] Gatica, Massiel., "Espacios de funciones: una introducción a los espacios de Sobolev". Tesis para obtener el Título de Licenciado en Ciencias Matemáticas. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquesimeto, Venezuela.(2011)