Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Existencia de soluciones débiles para una clase de sistemas elípticos semilineales

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Marlón Yván TINEO CONDEÑA

ASESOR

Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2017

Referencia bibliográfica

Tineo, M. (2017). *Existencia de soluciones débiles para una clase de sistemas elípticos semilineales*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas / Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

7388.
7388 A.

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 12:50 horas del día martes doce de diciembre del dos mil diecisiete, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro e integrado por los siguientes miembros, Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (Jurado Informante), Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (Jurado Informante), Dra. Nancy Rosa Moya Lázaro (Jurado Evaluador) y el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIAS DE SOLUCIONES PARA UNA CLASE DE SISTEMAS ELÍPTICOS SEMILINEALES» presentada por el Bachiller Marlón Yván Tineo Condeña, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Marlón Yván Tineo Condeña respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

Que, el Jurado Evaluador solicita modificar el título de la tesis con el propósito de definir el tipo de solución a emplear, quedando finalmente el título como se indica;

«EXISTENCIAS DE SOLUCIONES DÉBILES PARA UNA CLASE DE SISTEMAS ELÍPTICOS SEMILINEALES»

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Marlón Yván Tineo Condeña aprobado con el calificativo de ...Muy... ..Bueno...(17)....................

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del grado académico de **Magíster en Matemática Pura** al Bachiller Marlón Yván Tineo Condeña.

Siendo las 13:50 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro

Dr. Pedro Celso Conteras Chamorro
Presidente

Dra. Nancy Rosa Moya Lázaro
Miembro

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro Asesor

Existencia de soluciones débiles para una clase de sistemas elípticos semilineales

por

Marlón Yván Tineo Condeña

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Aprobada por el siguiente jurado:

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
Presidente

Dra. Nancy Rosa Moya Lázaro
Miembro

Dra. Yolanda Silvia Santiago Alaya
Miembro

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro Asesor

Dedicatoria

A mis hijos André y Kristell,
quienes son mi fortaleza y
razón de superación.

A mis padres Marando y Carmen,
por su cariño y apoyo incondicional.

Agradecimientos

- A Dios, por haber logrado mi objetivo y conducirme correctamente. A ti Virgen María, Madre bendita, gracias por tu protección.
- Al miembro asesor, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, por su dedicación en las rutinas de exposición y sus correcciones, las cuales han hecho posible la elaboración de este trabajo de Tesis, para él mi profundo agradecimiento.
- A los señores miembros del jurado calificador: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, Dr. Alfonso Pérez Salvatierra , Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala, Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro y Dra. Nancy Rosa Moya Lázaro.
- A cada uno de mis profesores: Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala, Dr.Luis Enrique Carrillo Díaz, Dr. Renato Benazic Tome, Dr. Pedro Contreras Chamorro, Dr. Erik Papa Quiroz, Mg. Mario Santiago Saldaña, Dr. José Luyo Sanchez y Dr. Ramos Chumpitaz, quienes han echo de los estudios de Maestría una bonita experiencia y son modelos a seguir de las nuevas generaciones de estudiantes.

Resumen

Existencia de soluciones débiles para una clase de sistemas elípticos semilineales

Marlón Yván Tineo Condeña

Diciembre, 2017

Asesor	:	Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Grado Obtenido	:	Magíster en Matemática Pura

En este trabajo se hará una exposición detallada sobre el artículo publicado por G.A. Afrouzi, M. Mirzapour y N.B. Zographopoulos [4], cuyo objetivo es probar la existencia de soluciones débiles para una clase de sistemas elípticos semilineales potenciales de la forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = \lambda F_u(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ -\operatorname{div}(b(x)\nabla v) = \lambda F_v(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ \text{u=v=0} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde el dominio Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ $(N > 2)$, de frontera bien regular, los pesos $a(x)$, $b(x)$ son pesos medibles no negativas sobre Ω, $(F_u, F_v) = \nabla F$ representa el gradiente de F en las variables $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y λ es un parámetro positivo.

El problema de existencia de soluciones débiles para el sistema será abordado mediante las herramientas de la teoría de puntos críticos de funcionales definidas en espacios de Banach, como el Teorema del paso de la montaña y el Principio del mínimo.

Palabras claves: Ecuación elíptica degenerada, sistema elíptico semilineal, Teorema del paso de la montaña.

Abstract

Existence of weak solutions for a class of semilinear elliptic systems

Marlón Yván Tineo Condeña

December, 2017

Adviser	:	Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Obtained Degree	:	Master in Pure Matematics

In this work a detailed exposition will be made about the article published by G.A. Afrouzi, M. Mirzapour and N.B. Zographopoulos [4], whose objective is to prove the existence of weak solutions to a class of semilinear potential elliptic systems of the form

$$\begin{cases} \text{- div}(a(x)\nabla u) = \lambda F_u(x,u,v) & \text{in } \Omega \\ \text{- div}(b(x)\nabla v) = \lambda F_v(x,u,v) & \text{in } \Omega \\ \text{u=v=0} & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where the domain Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ $(N > 2)$, regular border, the weights $a(x)$, $b(x)$ are measurable nonnegative weights on Ω, $(F_u, F_v) = \nabla F$ stands for the gradient of F in the variables $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ and λ is a positive parameter.

The problem of existence of weak solutions will be developed using the tools of the theory of critical points defined on Banach spaces, using the Mountain Pass Theorem and the minimum Principle.

Keywords: Degenerate elliptic equations, semilinear potential elliptic system, mountain pass Theorem.

Índice general

Introducción

El presente trabajo de tesis es una explicación didáctica del artículo publicado por G.A. Afrouzi, M. Mirzapour y N.B. Zographopoulos [4], el cual será expuesta en detalle. En este trabajo estudiamos la existencia de soluciones débiles para una clase de sistemas elípticos semilineales. Esta clase de sistemas modela varios fenómenos físicos relacionados con el equilibrio de medios continuos (ver [16]). Aparece en las ecuaciones acopladas de Schrödinger, el cual modela ciertos fenómenos físicos relacionados con la interacción de los componentes de un gas a temperaturas muy bajas y en los efectos de la Óptica no lineal (ver [8], [11], [22]). Por ello, el estudio de esta clase de sistemas es de gran importancia en la Matemática, Física, Ingeniería, Climatología,...etc.

En el desarrollo de la tesis se ilustra una aplicación del Principio del mínimo y el Teorema del paso de la montaña para probar la existencia de soluciones débiles para una clase de sistemas elípticos semilineales potenciales de la forma:

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla u) = \lambda F_u(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ -div(b(x)\nabla v) = \lambda F_v(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, de frontera bien regular , $N > 2$, los pesos $a(x)$, $b(x)$ son funciones medibles no negativos sobre Ω, $(F_u, F_v) = \nabla F$ representa el gradiente de F en las variables $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y λ es un parámetro positivo.

Actualmente, muchos autores han estudiado la existencia de soluciones débiles no triviales para tales problemas elípticos (ver [7], [9], [10],[14], [18], [32], [34]), en los fenómenos físicos relacionados al equilibrio de medios continuos, en [16, pp. 79], por Dautray y Lions. Caldiroli y Musina en [10] investigaron un problema elíptico degenerado variacional de la forma:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f(x,u) & x \text{ en } \Omega \\ u = 0 & x \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

Ellos permiten al peso $a(x)$ anularse en algún lugar o ser no acotada y prueban algunos resultados de existencia usando una aproximación variacional basado en el Lema del paso de la montaña. Zographopoulos [33] estudió una clase de sistemas elípticos semilineales de potencial degenerada de la forma:

$$\begin{cases} \text{- div}(a(x)\nabla u) = \lambda\mu(x)\,|u|^{\gamma-1}\,|v|^{\delta+1}\,u, & x \text{ en } \Omega \\ \text{- div}(b(x)\nabla v) = \lambda\mu(x)\,|u|^{\gamma+1}\,|v|^{\delta-1}\,v, & x \text{ en } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{u=v=0} & x \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$, $\gamma, \delta \geq 0$ y $\mu(x)$ puede cambiar de signo. Él probó, la existencia de al menos una solución débil para el sistema, bajo adecuadas hipótesis sobre el dato.

Para la elaboración del presente trabajo se adicionaron las proposiciones 7, 8, 9 y 10 como parte del estudio de los espacios de Sobolev con peso, los cuales juegan un rol muy importante para el desarrollo de la tesis, ya que sobre estos espacios se prueba la existencia de soluciones débiles del problema (1). Enunciamos y probamos la Proposición 11 necesaria para poder definir el concepto de solución débil del problema (1) y detallamos la prueba de los teoremas de existencia 33 y 34. Además como una aplicación, incluimos un ejemplo de tales sistemas verificando las condiciones dadas en el problema.

En el Capítulo 1, se enuncian y demuestran algunos resultados del análisis funcional y el cálculo variacional, como el Teorema del paso de la montaña y el Principio del mínimo que serán utilizados para probar la existencia de soluciones débiles del sistema (1).

Hacemos un estudio de una clase de funciones peso, de los espacios con peso $L^p(\Omega, \omega)$, $W^{1,p}(\Omega; \omega)$, $W_o^{1,p}(\Omega; \omega)$ y damos algunos ejemplos de funciones peso. En particular estudiamos algunas inmersiones entre los espacios de Sobolev con peso $W^{1,p}(\Omega; a)$ y los espacios de Sobolev usual. Finalmente mostramos la equivalencia entre las normas definidas en los espacios de sobolev conpeso $W^{1,p}(\Omega; a)$ y $W_o^{1,p}(\Omega; a)$.

En el Capítulo 2, se presenta el problema que consiste en probar la existencia de soluciones débiles del sistema (1), donde suponemos que, los pesos $a, b \in L^1_{Loc}(\Omega)$, satisfacen

$$a^{-s}, b^{-s} \in L^1(\Omega),\ s \in \left\langle \frac{N}{2}, \infty \right\rangle \bigcap [1, \infty\rangle\,.$$

Con s definimos

$$2_s = \frac{2s}{s+1}, 2_s^* = \frac{N2_s}{N-2_s} = \frac{N2s}{N(s+1)-2s} > 2.$$

Suponemos que F es un C^1 - Funcional sobre $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(F1) Existen constantes positivas c_1, c_2 tal que :

$$|F_t(x,t,s)| \leq c_1 |t|^{\gamma} |s|^{\delta+1}$$

$$|F_s(x,t,s)| \leq c_2 |t|^{\gamma+1} |s|^{\delta}$$

para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, en casi todo punto $x \in \Omega$ y algunos $\gamma, \delta > 1$ tales que $\frac{\gamma+1}{p} + \frac{\delta+1}{q} = 1$ y $\gamma + 1 < p < 2_s^*$, $\delta + 1 < q < 2_s^*$.

(F2) Existen constantes positivas c, α y β, con $2 < \alpha, \beta < 2_s^*$ tal que

$$|F(x,t,s)| \leq c(1 + |t|^\alpha + |s|^\beta)$$

para todo $x \in \Omega$ y $(t,s) \in \mathbb{R}^2$.

(F3) Existen $R > 0$, θ y θ' con $\frac{1}{2_s^*} < \theta,\, \theta' < \frac{1}{2}$ tal que

$$0 < F(x,t,s) \leq \theta \; tF_t(x,t,s) + \theta' s F_s(x,t,s)$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $|t|\,, |s| \geq R$

(F4) Existen $\overline{\alpha} > 2$, $\overline{\beta} > 2$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$|F(x,t,s)| \leq c(|t|^{\overline{\alpha}} + |s|^{\overline{\beta}})$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $|t| \leq \epsilon$, $|s| \leq \epsilon$

En esta parte empleamos los espacios de Sobolev con peso $W^{1,2}(\Omega; a)$, que se estudiarán en el Capítulo 1. Primero definimos sobre el espacio de funciones de prueba $D(\Omega)$, el funcional

$$\|u\|_a^2 = \int_\Omega a(x) \, |\nabla u(x)|^2 \, dx \; \forall u \in C_o^\infty(\Omega),$$

probamos que es una norma. Luego como $D(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega; a)$, podemos definir $W_o^{1,2}(\Omega; a)$ como la clausura de $D(\Omega)$ con respecto a esta norma $\|\cdot\|_a$, que además es equivalente a la norma de $W^{1,2}(\Omega, a)$,de esto tenemos:

$$W_o^{1,2}(\Omega; a) := \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_a} \subset W^{1,2}(\Omega; a).$$

Además, como $W^{1,2}(\Omega; a)$ es un espacio completo y $W_o^{1,2}(\Omega; a)$ es un subespacio cerrado, entonces $W_o^{1,2}(\Omega; a)$ es completo. También se probará que esta norma proviene de un producto interno en este espacio, por tanto $W_o^{1,2}(\Omega; a)$ es un espacio de Hilbert. Procediendo en forma análoga obtenemos el espacio de Hilbert $W_o^{1,2}(\Omega; b)$.
Finalmente se define el espacio de Hilbert

$$W = W_o^{1,2}(\Omega; a) \times W_o^{1,2}(\Omega; b).$$

A continuación enunciamos el concepto de solución débil del sistema (1)

Definición : Decimos que $(u,v) \in W$ es una solución débil del sistema (1) si y solo si satisface

$$\int_\Omega (a(x)\nabla u \nabla \varphi + b(x) \nabla v \nabla \psi) dx = \lambda \int_\Omega [F_u(x,u,v)\varphi + F_v(x,u,v)\psi] dx, \forall (\varphi, \psi) \in W.$$

Definimos el funcional correspondiente al problema (1)

$$\Im_\lambda(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (a(x)\,|\nabla u|^2 + b(x)\,|\nabla v|^2)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u,v) \tag{2}$$

probamos que tal funcional $\Im_\lambda(u,v)$ está bien definida y es de clase C^1 en W. Así, las soluciones débiles de (1) son exactamente los puntos críticos de $\Im_\lambda(u,v)$.

En el Capítulo 3, enunciamos y probamos los teoremas de existencia de soluciones débiles del sistema elíptico semilineal:

El primer Teorema de existencia es una aplicación del Principio del mínimo, que permitirá probar la existencia de al menos una solución débil del sistema (1) y es dada por:

Teorema 33. Suponga que la condición (F_1) es satisfecha. Entonces existe una constante $\underline{\lambda} > 0$ tal que para todo $0 < \lambda < \underline{\lambda}$, el sistema (1) tiene una solución débil.

Este teorema será demostrado mediante los siguientes lemas:

Lema 1. El funcional $\Im_\lambda$ dado por (2) es débilmente semicontinuo inferiormente en W.

Lema 2. El funcional $\Im_\lambda$ dado por (2) es coerciva y acotada inferiormente en W.

Exponemos en forma detallada los cálculos en la prueba del Lema 1 y Lema 2.

El segundo Teorema de Existencia es una aplicación del Teorema del paso de la montaña, que permitirá probar la existencia de otra solución débil no trivial del sistema (1) y es enunciada a continuación:

Teorema 34. En adición al primer Teorema de existencia, suponga que las condiciones $(F_1) - (F_4)$ son satisfechas. Entonces el problema (1) tiene una solución débil no trivial.

Este teorema será demostrado mediante los siguientes lemas:

Lema 3. El funcional $\Im_\lambda$ dado por (2) satisface la condición de Palais-Smale en W.

Lema 4. Bajo las hipótesis $(F1) - (F4)$ el funcional $\Im_\lambda$ dado por (2) satisface:

(i) Existen $\rho, \sigma > 0$ tal que $\|(u,v)\|_H = \rho$ implica $\Im(u,v) \geq \sigma > 0$.

(ii) Existe $(u_o, v_o) \in W$ con $\|(u_o,v_o)\|_H > \rho$ tal que $\Im(u_o,v_o) \leq 0$.

Exponemos en forma detallada los cálculos en la prueba del Lema 3 y Lema 4.

En el Capítulo 4, damos algunos ejemplos de tales problemas y realizamos dos observaciones complementarias sobre el trabajo:

En la Sección 4.1, tratamos un ejemplo de tales sistemas de ecuaciones para una elección de los pesos $a(x)$, $b(x)$ y del C^1- funcional $F(x,u,v)$.

En la Sección 4.2, hacemos un comentario sobre el Principio del mínimo y su aplicación a nuestro problema.

En la Sección 4.3, hacemos un comentario sobre el Teorema del paso de la montaña y su aplicación a nuestro problema.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan los espacios funcionales, operadores, así como algunos resultados de la Teoría de la medida, el Análisis Funcional y el Cálculo de Variaciones, tales como la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Sobolev, la desigualdad de Poincaré , el Teorema de Eberlein-Shmulyan, la derivada de Fréchet, entre otros. En esta primera parte trataremos con mayor detalle el Teorema del paso de la montaña , el Principio del mínimo y a los espacios de Sobolev con peso.

1.1. Espacios de Banach y la Teoría de Distribuciones

Dado Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$.

Definición 1 *Se define $C_o^\infty(\Omega)$, el espacio de las funciones infinitamente derivables con soporte compacto en Ω.*

Denotamos por

$$D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}$$

a la derivada de orden $|\alpha|$ donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ y $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$.
Cuando $\alpha = (0, 0, 0, ..., 0)$ se define $D^\alpha u := u$ para $u \in C_o^\infty(\Omega)$.

Definición 2 *En el espacio $C_o^\infty(\Omega)$ se define una topología dada a través de la siguiente noción de convergencia. Diremos que una sucesión de funciones $\phi_n \in C_o^\infty(\Omega)$ converge para ϕ si verifica las siguientes condiciones:*

(i) El soporte de ϕ_n está contenido en un compacto fijo K de Ω.

(ii) Para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, se verifica

$$D^\alpha \phi_n \longrightarrow D^\alpha \phi \textit{ uniformemente sobre } K.$$

El espacio $C_o^\infty(\Omega)$ dotado de esta convergencia definida anteriormente, será denominado espacio de funciones de prueba y será denotado como $D(\Omega)$.

Definición 3 *Una aplicación $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, es una distribución sobre Ω, si T es una aplicación lineal y continua en $D(\Omega)$. Esto es, si $\phi_n \longrightarrow \phi$ en $D(\Omega)$ entonces $T(\phi_n) \longrightarrow T(\phi)$ en $\mathbb{R}$.*

Definición 4 *Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal, diremos que T es continua en un vector $v \in X$, si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|Tu - Tv\|_Y < \epsilon, \text{ siempre que } \|u - v\|_X < \delta.$$

Diremos que T es continua en X, si T es continua en cada vector de X.

Definición 5 *Sea T una aplicación lineal definida sobre X. Diremos que T es acotada sobre X, si existe una constante positiva C tal que*

$$\|T(u)\| \leq C\,\|u\|\,, \forall u \in X.$$

Teorema 1 *Si $T : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal. Son equivalentes:*

(i) T es continua en X.

(ii) T es continua en un punto de X.

(iii) T es acotado en X.

Demostración.- Probaremos que (ii) implica (iii). Sea T continua en v, luego para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Tu - Tv\|_Y \leq 1 \text{ siempre que } \|u - v\|_X \leq \delta.$$

Haciendo $z = u - v$, se tiene

$$\|Tz\|_Y \leq 1 \text{ siempre que } \|z\|_X \leq \delta.$$

Ahora sea w un vector no nulo de X, entonces

$$\|Tw\|_Y = \left\| \frac{\|w\|_X}{\delta} T(\frac{\delta w}{\|w\|_X}) \right\|_Y \leq \frac{\|w\|_X}{\delta}.$$

Por otro lado, existe una constante $C = \frac{1}{\delta} > 0$, tal que $\|Tw\| \leq C\,\|w\|\,, \forall w \in X$.
Ahora probaremos que (iii) implica (i). De la hipótesis tenemos

$$\|Tu - Tv\|_Y \leq C\,\|u - v\|_X\,, \forall u, v \in X$$

luego bastará tomar $\delta = \frac{\epsilon}{C}$.
(i) implica (ii) es inmediato de la definición.

$\square$

Definición 6 *Sean X, Y espacios normados. El espacio vectorial formado por las aplicaciones lineales y continuas de X en Y es denotada por $L(X,Y)$; este es un espacio normado con la norma*

$$\|A\|_{L(X,Y)} := inf\left\{C \geq 0/ \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X\,,\ \forall x \in X\right\},$$

para $A \in L(X,Y)$. Además se verifica $\|Ax\|_Y \leq \|A\|_{L(X,Y)}\|x\|_X$, $\forall x \in X$.

Observación 1 *Las definiciones equivalentes de norma de un operador lineal son:*

(i) $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$.

(ii) $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_Y$.

(iii) $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_Y$.

Demostración .-

Como $\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \geq \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \forall x \neq 0$ entonces $\|Ax\|_Y \leq (\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X})\|x\|_X$. Esto implica,

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \geq \|A\|_{L(X,Y)}\,.$$

Recíprocamente, sea $C \geq 0$ tal que $C \geq \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \forall x \neq 0$, entonces $C \geq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$. Esto implica

$$\|A\|_{L(X,Y)} = inf\left\{C \geq 0/ \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X\,,\ \forall x \in X\right\} \geq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Así queda probado **(i)**. Para probar **(ii)**, tomemos $\|x\| \leq 1$. Luego

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \geq \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \geq \|Ax\|_Y\,,$$

implica

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \geq \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|Ax\|_Y\,.$$

Recíprocamente, si $x \neq 0$, entonces $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \left\|A(\frac{x}{\|x\|})\right\|_Y \leq \sup_{\|y\|\leq 1}\|Ay\|_Y$. Por tanto

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|Ay\|_Y\,.$$

Este resultado, junto con la transitividad de la igualdad y la parte (i), implican (ii).

La demostración de **(iii)** es análoga a (ii).

$\square$

Definición 7 *Sea X un espacio normado; llamamos espacio dual de X a*

$$X' = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal y acotado } \}.$$

El espacio X' será siempre completo por serlo el cuerpo de escalares de X.

Definición 8 *Sea Ω un conjunto abierto no vacio de $\mathbb{R}^n$.*

(a) Si $K \subset \Omega$ es un compacto, entonces D_K denota el conjunto de todas las $f \in C^\infty(\Omega)$ cuyo soporte esta contenido en K.

(b) Para todo compacto $K \subset \Omega$, τ_K denota la topología de espacio de Fréchet asociado a D_K (es decir, la topología τ_K es inducida por una métrica invariante y completa, además D_K es localmente convexo).

(c) β es la coleccón de todos los conjuntos $W \subset C^\infty(\Omega)$ que son convexos ($tW + (1-t)W \subset W$ para $0 \leq t \leq 1$) y equilibrados ($tW \subset W$ para $|t| \leq 1$) tales que $D_K \cap W \in \tau_K$ para todo compacto $K \subset \Omega$.

(d) τ es la colección de todas las uniones de conjuntos de la forma $\phi + W$ donde $\phi \in D(\Omega)$ y $W \in \beta$

Teorema 2 *Se cumplen las siguientes:*

(a) τ es una topología en $D(\Omega)$, y β es una base local de τ.

(b) $D(\Omega)$ dotado de la topología τ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Demostración.- Ver [25] página 143.

Teorema 3 *Se cumplen las siguientes:*

(a) Un conjunto convexo y equilibrado Γ de $D(\Omega)$ es abierto si y solamente si $\Gamma \in \beta$.

(b) La topología τ_K de todo $D_K \subset D(\Omega)$ coincide con la topología de subespacio que D_K hereda de $D(\Omega)$, conformada por todas las $D_K \cap V$, con $V \in \tau$.

(c) Si E es un subconjunto acotado de $D(\Omega)$ entonces para un cierto $K \subset \Omega$, se tiene $E \subset D(K)$ y además existe una sucesión de números $M_N < \infty$ tal que toda $\phi \in E$ verifica las desigualdades:

$$\|\phi\|_N \leq M_N \text{ donde } N = 0, 1, 2, 3, ...$$

(d) $D(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-borel.

(e) Si $\{\phi_i\}$ es una sucesión de Cauchy en $D(\Omega)$ entonces $\{\phi_i\} \subset D_K$ para un cierto compacto $K \subset \Omega$ y

$$\lim_{i,j \longrightarrow \infty} \|\phi_i - \phi_j\|_N = 0 \textit{ para } N = 0, 1, 2, 3, ...$$

(f) Si $\phi_i \longrightarrow 0$ en la topología de $D(\Omega)$ entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ que contiene a todos los soportes de todas las ϕ_i y para todos los multi-indices α la sucesión $D^\alpha \phi_i \longrightarrow 0$ uniformemente.

(g) Toda sucesión de Cauchy en $D(\Omega)$ es convergente.

Demostración.- Ver [25] página 144.

Teorema 4 *Sea T una aplicación lineal de $D(\Omega)$ en un espacio localmente convexo Y. Entonces, cada uno de las cuatro propiedades siguientes implica las otras tres:*

(a) T es continua.

(b) T es acotada.

(c) si $\phi_i \longrightarrow 0$ en $D(\Omega)$ entonces $T\phi_i \longrightarrow 0$ en Y.

(d) Las restricciones de T a cada $D_K \subset D(\Omega)$ son continuas.

Demostración.- Ver [25] página 145.

Corolario 1 *Todo operador diferencial D^α es una aplicación lineal continua de $D(\Omega)$ en $D(\Omega)$.*

Demostración.- Ver [25] página 145.

Definición 9 *Sea X un espacio normado, llamamos bidual de X y lo denotamos por X'' al espacio dual de X', esto es, al espacio $(X')'$ dotado con la norma*

$$\left\|x''\right\| = \sup\left\{\left|x''(x')\right| : x' \in X' \wedge \left\|x'\right\| \leq 1\right\}, \textit{ para } x'' \in X''.$$

Veamos algunos elementos distinguidos del bidual. Nótese que para cada $x \in X$, podemos definir la aplicación

$$J_X(x) : X' \longrightarrow \mathbb{K} \text{ dada por } J_X(x)(f) = f(x),\ \forall f \in X',$$

que es, claramente lineal, y puesto que,

$$|J_X(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|\,,\ \forall f \in X',$$

es también continua. Así pues $J_X(x) \in X''$.

Podemos ahora considerar la aplicación inyectiva $x \mapsto J_X(x)$ de X en X''. Dicha aplicación, recibe el nombre de **inyección canónica** de X en su bidual X'', es claramente lineal, y por tanto continua ya que, para cada $x \in X$, se tiene que $\|J_X(x)\| \leq \|x\|$.

Una propiedad importante del operador J_X es

$$\|J_X(x)\| = \|x\| \,.$$

Esto es, J_X es una isometría, lo que significa que la inyección canónica es siempre inyectiva. Diremos que un espacio normado X es **reflexivo** si la inyección canónica $J_X : X \longrightarrow X''$ es sobreyectiva.

Definición 10 *Sea E un espacio de Banach y E' su espacio dual correspondiente. La topología débil en E se define como la topología menos fina (Topología inicial) que hace continuas todas las aplicaciones lineales $f \in E'$. Es decir que se trata de la topología engendrada por la familia*

$$\aleph = \left\{ f^{-1}(U) : f \in E' \ \textit{y} \ U \ \textit{abierto de} \ \mathbb{R} \right\}$$

que no es otra cosa que la topología formada por abiertos que se obtienen al considerar

$$\bigcup_{arbitraria} \bigcap_{finita} f^{-1}(U) \tag{1.1}$$

donde U es un abierto de $\mathbb{R}$ y $f \in E'$. Esta topología la denotaremos por $\sigma(E, E')$. Así se cumple la siguiente inclusión:

$$\textit{Topología débil:=}\sigma(E, E') \subset \textit{Topología fuerte:=}\tau_{\|\cdot\|}$$

Notación.- Sea $x_n \in E$, denotamos por $x_n \rightharpoonup x$ a la convergencia de x_n a x en la topología débil $\sigma(E, E')$, además para la convergencia en la topología inducida por la norma denotamos $x_n \to x$, llamada también convergencia fuerte.

Proposición 1 *Sea (x_n) una sucesión en el espacio de Banach E.Se verifica:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *si y solo si* $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ $\forall f \in E'$.

(ii) Si $x_n \longrightarrow x$ *en* $\|\cdot\|$, *entonces* $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$, *entonces* $\|x_n\|$ *está acotada y* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ *y si* $f_n \longrightarrow f$ *fuertemente en* E', *entonces* $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Demostración.- Ver [5] página 36.

Proposición 2 *Sean X , Y espacios normados y $A \in L(X,Y)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X, si $x_n \rightharpoonup x$ entonces $Ax_n \rightharpoonup Ax$.*

Demostración.- Sea $\{x_n\}$ que converge débilmente a x en X. Probaremos que $Ax_n \rightharpoonup Ax$. Para todo $y' \in Y'$, se tiene que $y' \circ A \in X'$ y por tanto, por la Proposición 1, se tiene

$$\langle y', Ax_n \rangle_{Y',Y} = y'(Ax_n) = y' \circ A(x_n) = \langle y' \circ A, x_n \rangle_{X',X} \longrightarrow \langle y' \circ A, x \rangle_{X',X} = \langle y', Ax \rangle_{Y',Y}$$

$$\text{i.e. } \langle y', Ax_n \rangle_{Y',Y} \longrightarrow \langle y', Ax \rangle_{Y',Y}, \ \forall y' \in Y'.$$

Por lo tanto, Ax_n converge débilmente a Ax.

□

Definición 11 (Inmersión continua) *Sean X e Y dos espacios normados con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente, y supongamos que $X \subseteq Y$. Decimos que X está inmerso continuamente en Y y que denotaremos por $X \hookrightarrow Y$ si existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_Y \leq c\,\|u\|_X \ \textit{para todo } u \in X.$$

Definición 12 (Inmersión compacta) *Sean X e Y dos espacios normados con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente, y supongamos que $X \subseteq Y$. Decimos que $X \hookrightarrow Y$ es una inmersión compacta si:*

(i) X esta inmerso continuamente en Y.

(ii) La aplicación inclusión de X en Y es un operador compacto, es decir, para todo conjunto A acotado en X, el conjunto $\overline{i(A)}$ es un compacto en Y, o equivalentemente, por un resultado del Análisis Funcional, (Teorema 8.1-3 en[19]) cada sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en Y.

1.2. La integral de Lebesgue y los espacios $L^p(\Omega)$

Dado $1 \leq p < \infty$ definimos:

Definición 13

$$L^p(\Omega) := \left\{ f \ \textit{medible} \ / \ \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

espacio vectorial de las funciones medibles cuya potencia p es integrable dotado de la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Definición 14

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f \ medible \ / \ f\varphi \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega)\}$$

espacio de las funciones localmente integrables.

Para $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que v es la $\alpha-$ derivada débil de u si para todo $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi dx.$$

Teorema 5 (Lema de Fatou) *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible y sea f_n una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces*

$$\int_A \liminf_{n\longrightarrow\infty} f_n dx \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_A f_n dx.$$

Demostración.- Ver [26] página 258.

Teorema 6 (Teorema de convergencia dominada) *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ medible y sea f_n una sucesión de funciones medibles convergiendo puntualmente a un límite f sobre A ($f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in A$). Si existe una función $g \in L^1(A)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para cada n y todo $x \in A$, entonces*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_A f_n dx = \int_A (\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n) dx.$$

Demostración.- Ver [26] página 258.

Teorema 7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y sea u_k una sucesión en $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$ una sucesión tal que $u_k \longrightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Entonces existe una subsucesión $(u_{kj})_j$ y una función $v \in L^p(\Omega)$ tal que*

(a) $u_{kj}(x) \longrightarrow u(x)$ en c.t.p. de Ω, cuando $j \longrightarrow \infty$.

(b) $|u_{kj}(x)| \leq v(x)$ para todo j, en c.t.p. de Ω.

Demostración.- Ver [5] página 58.

Proposición 3 *Si $1 \leq p < \infty$ y $a \geq 0$, $b \geq 0$, entonces*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \qquad (1.2)$$

Demostración.-

Si $a = 0$, entonces se verifica de inmediato (1.2). Si $a > 0$ podemos escribir (1.2) en la forma

$$(1 + x)^p \leq 2^{p-1} (1 + x^p) \qquad (1.3)$$

donde $0 \leq x = \frac{b}{a}$. La función $f(x) = \frac{(1+x)^p}{(1+x^p)}$ satisface

$$f(0) = 1 = \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) \text{ y } f(x) > 1 \text{ si } 0 < x < \infty.$$

De esto, $f(x)$ tiene su máximo para $x \geq 0$ en su único punto crítico, $x = 1$. Como $f(1) = 2^{p-1}$, obtenemos (1.3) por la definición de máximo. Esto demuestra (1.2).

$\square$

Proposición 4 *Son válidas las siguientes desigualdades:*

(D1) Sean a_i $(i = 1, ..., m)$ números positivos,entonces la función

$$\begin{array}{rccl} R: & \langle 0, \infty \rangle & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & R(p) := \left\{\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right\}^{1/p}. \end{array}$$

es decreciente, es decir $q \leq p$ implica $R(p) \leq R(q)$.

De esto obtenemos, si $1 < p < 2$ y $a, b > 0$ entonces $(a^2 + b^2)^{1/2} \leq (a^p + b^p)^{1/p}$.

(D2) Si $2 < p$ y $a, b > 0$, entonces $(a^p + b^p) \leq (a^2 + b^2)^{p/2}$.

(D3) Como la función

$$\begin{array}{rccl} V: & \langle 0, \infty \rangle & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & V(s) := -|s|^{p/2} \end{array}$$

es convexa para $p/2 < 1$ entonces $(\frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2)^{p/2} \geq \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p$.

Demostración.- Ver [23] página $10, 11, 12$.

Teorema 8 (Desigualdad de Hölder y Young) *Para $a; b \geq 0$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se cumple:*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración.-

La función $f(t) = (\frac{t^p}{p}) + (\frac{1}{q}) - t$, para $t \geq 0$, tiene su valor mínimo cero, y este mínimo es alcanzado en $t = 1$. Haciendo $t = ab^{-\frac{q}{p}}$, obtenemos, para números no negativos a, b la Desigualdad de Holder y Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

valiendo la igualdad solo si $a^p = b^q$, esto es, $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = a^p \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right\} = a^p = b^q$.

$\square$

Teorema 9 (Desigualdad de Hölder) *Si* $1 < p < \infty$*,* $u \in L^p(\Omega)$ *y* $v \in L^q(\Omega)$*, entonces* $u \cdot v \in L^1(\Omega)$ *y*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \|u\|_p \|v\|_q ,$$

donde $1/p + 1/q = 1$.

Demostración.-

Si $\|u\|_p = 0$ o $\|v\|_q = 0$, entonces $u(x)v(x) = 0$ en casi todo punto de Ω por tanto es cierta la desigualdad de Hölder. En el otro caso haciendo $a = \frac{|u(x)|}{\|u\|_p}$ y $b = \frac{|v(x)|}{\|v\|_q}$ en la desigualdad de Hölder y Young, y pasando a integrar sobre Ω obtenemos la desigualdad de Holder, donde la igualdad ocurre si y solo si $|u(x)|^p$ y $|v(x)|^q$ son proporcionales en casi todo punto de Ω.

$\square$

Teorema 10 (Desigualdad de Hölder Generalizado) *Sean* $p_i \geq 1$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots m$ *tales que* $\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1$.
Si $w_i \in L^{p_i}(\Omega)$ *entonces*

$$w = w_1 \cdot w_2 \ldots w_m \in L^1(\Omega) \ \ y \ \ \|w\|_{L^1} \leq \prod_{i=1}^m \|w_i\|_{L^{p_i}} .$$

Demostración.-

Para la prueba haremos uso de la siguiente desigualdad generalizada de Hölder

$$\prod_{i=1}^m a_i \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} a_i$$

donde $a_i > 0$ para cada $i = 1, ..., m$. Esta desigualdad se prueba fácilmente ya que $t \longmapsto -\ln(t)$ es convexa por tanto de

$$-\ln(\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} a_i^{p_i} \leq -\left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \ln(a_i^{p_i})\right), \text{ deducimos que}$$

$$\ln(\prod_{i=1}^m a_i) = \sum_{i=1}^m \ln(a_i) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \ln(a_i^{p_i}) \leq \ln(\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} a_i^{p_i}.$$

Tomando la función exponencial a cada miembro de la desigualdad, conseguimos la desigualdad. Retornando a la prueba, tomemos

$$a_i := \frac{|w_i(x)|}{\left\{\int_\Omega |w_i(x)|^{p_i}\, dx\right\}^{1/p_i}}.$$

Aplicando la desigualdad generalizada de Hölder e integrando sobre Ω sigue el resultado.

$\square$

1.3. Los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, m un entero positivo y $p \in [1, \infty]$.

Definición 15 *Definimos el espacio de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega)\ \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq m\},$$

donde las derivadas se entienden en el sentido débil.
Claramente $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial al cual se le dota de la siguiente norma.

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p}^p\right)^{1/p},$$

para cada $f \in W^{m,p}(\Omega)$.

Observación 2 *El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ dotado de la norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ es un espacio de Banach (ver [2]). El caso $p = 2$ juega un rol especial. Estos espacios son denotados por*

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

y tienen un producto interno natural dado por

$$(f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha f D^\alpha g$$

para $f, g \in H^m(\Omega)$.

Definición 16 *Se define $H_o^1(\Omega)$ como la adherencia de $D(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, es decir, $H_o^1(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.*

Definición 17 *Si $F : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es un campo vectorial diferenciable de clase $C^1(\Omega)$ entonces se define el campo escalar divergencia*

$$div(F) = \nabla \bullet F = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Además, si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2, entonces se define el laplaciano de f como la divergencia del campo vectorial gradiente ∇f, esto es,

$$div(\nabla f) = \Delta f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Teorema 11 (Teorema del valor medio) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un subconjunto abierto y la función $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Suponga que Ω contiene a los puntos a, b y al segmento de línea S que los une y que f es diferenciable en todos los puntos de este segmento. Entonces, existe un punto c en S tal que*

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c) \bullet (b - a).$$

Demostración.- Ver [6] página 398.

Teorema 12 (Fórmula de Green) *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto, acotado y suave. Sea* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *y* $v \in C^1(\overline{\Omega})$. *Entonces*

$$\int_\Omega v(\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \bullet \nabla v dx$$

donde $\nu = \nu(x)$ *es la normal saliendo de* $\partial\Omega$ *en* x, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \bullet \nu(x)$ *y* σ *es la medida de superficie en* $\partial\Omega$.

Demostración.-

Utilizaremos el Teorema de la divergencia

$$\int_\Omega div(F) = \int_{\partial\Omega} \langle F, N \rangle$$

Primero, por un resultado de la diferenciación tenemos

$$div(v\nabla u) = \nabla \bullet (v\nabla u) = \nabla v \bullet \nabla u + v\nabla^2 u = v\Delta u + \nabla u \nabla v$$

Ahora aplicamos el Teorema de la divergencia al campo de vectores $F = v\nabla u$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega div(v\nabla u) &= \int_{\partial\Omega} \langle v\nabla u, \nu \rangle \\ \int_\Omega (v\Delta u + \nabla u \bullet \nabla v)dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma \\ \int_\Omega v(\Delta u)dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \bullet \nabla v dx \end{aligned}$$

donde ν es el vector unitario normal saliendo de la superficie $\partial\Omega$ que limita al volumen Ω y $\nu \bullet \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ es la derivada de u normal a $\partial\Omega$.

□

Teorema 13 (Fórmula de Green para funciones de $H^1_o(\Omega)$) *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto, acotado y suave. Para todo* $u, v \in H^1_o(\Omega)$ *se tiene*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx \text{ para todo } i = 1, ..., N$$

Demostración.-

La demostración se basa en la fórmula de Green para funciones de $D(\Omega)$ y la densidad de $D(\Omega)$ en $H^1_o(\Omega)$. Por la densidad de $D(\Omega)$ en $H^1_o(\Omega)$, existen dos sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ de $D(\Omega)$ que convergen respectivamente a u y v en la norma de $H^1(\Omega)$, por tanto , $\forall i = 1, ..., N$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ en } L^2(\Omega),$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ en } L^2(\Omega)$$

Aplicando la fórmula de Green clásica a las funciones de $D(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n dx + \int_{\partial\Omega} u_n v_n \nu_i d\sigma \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

Como estas funciones son de soporte compacto, la integral sobre la frontera es nula, y pasando al límite concluimos la prueba.

$\square$

Teorema 14 (Desigualdad de Sobolev) *Se satisface la inclusión*

$$H_o^1(\Omega) \subset L^s(\Omega) \ si\ 1 \leq s \leq \frac{2N}{N-2},$$

y dicha inclusión es continua.

Además, en $H_o^1(\Omega)$ la norma de $H^1(\Omega)$ es equivalente a la norma definida, para $u \in H_o^1(\Omega)$ por

$$\|u\|_{H_o^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Mejor aún para todo $u \in H_o^1(\Omega)$ vale la desiguladad de Poincaré

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

donde λ_1 es el menor autovalor del operador de laplace $-\Delta$.

Demostración.- Ver [5] páginas 168,173 y 174.

Teorema 15 (Desigualdad de Poincaré) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Para todo $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$.

Demostración.- Ver [21] página 70

Observación 3 (Consecuencias de la desigualdad de Poincaré) *Se deduce:*

(a) En particular la expresión $\|\nabla u\|_{L^p}$ es una norma en $W_o^{1,p}(\Omega)$, equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,p}}$.

(b) En $H_o^1(\Omega)$ la expresión $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ es un producto interno que induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ equivalente a la norma $\|u\|_{H^1}$.

Teorema 16 (Rellich-Kondrachov) *Se satisface la inyección*

$$H_o^1(\Omega) \subset L^s(\Omega), \;\; si \; s \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right)$$

y dicha inclusión es compacta.

Demostración.- Ver [5] páginas 169 a 173.

1.4. Las funciones peso y los espacios de Sobolev con peso

Iniciamos esta sección con el estudio de las funciones peso.

Definición 18 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto abierto. Denotamos con $\Lambda(\Omega)$ al conjunto de funciones peso y la definimos como:*

$$\Lambda(\Omega) := \{\omega : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \; / \; \omega \text{ es medible, } \omega \text{ es finito } \; y \; \omega > 0 \text{ en c.t.p. de } \Omega\}.$$

Definición 19 *Sea ω un peso y $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ abierto. Para $1 \leq p < \infty$ definimos $L^p(\Omega, \omega)$ como el espacio de funciones medibles u definidas sobre Ω tales que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega,\omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \omega(x) dx\right)^{1/p} < \infty. \tag{1.4}$$

Además (1.4) define una norma sobre este espacio. Para $\omega = 1$ obtenemos el espacio de Lebesgue usual $L^p(\Omega)$.
En estos espacios, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & L^p(\Omega, \omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega) \\ & g & \mapsto & g \cdot w^{1/p} \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico con inversa dada por

$$\begin{array}{rccc} \Psi^{-1} : & L^p(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega, \omega) \\ & f & \mapsto & f \cdot w^{-1/p} \end{array}$$

En efecto,

$$f = g \cdot \omega^{1/p} \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow g = f \cdot \omega^{-1/p} \in L^p(\Omega, \omega)$$

implica

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left\|g \cdot \omega^{1/p}\right\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^p(\Omega,\omega)}.$$

Teorema 17 *El espacio $L^p(\Omega, \omega)$ equipado con la norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega,\omega)}$ es un espacio de Banach.*

Demostración.- Ver [15], Teorema III. 6.6.

Definición 20 *Sea $1 < p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. definimos la clase de funciones de peso $B_p(\Omega)$ a las funciones de peso $\omega \in \Lambda(\Omega)$ que satisface la condición:*

$$w^{\frac{-1}{p-1}} \in L^1_{loc}(\Omega)$$

Teorema 18 *Sea $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto , $\omega \in B_p(\Omega)$ y $Q \subset \Omega$ un conjunto compacto. Entonces la siguiente inmersión es continua*

$$L^p(\Omega, \omega) \hookrightarrow L^1(Q). \tag{1.5}$$

Demostración.-

La prueba solo requiere de la desigualdad de Hölder. Sea $u \in L^p(\Omega, \omega)$ entonces

$$\begin{aligned}\int_Q |u(x)|\, dx &= \int_Q |u(x)|\, \omega^{1/p}\omega^{-1/p} dx \\ &\leq \|u\|_{L^p(Q,\omega)} \left(\int_Q \omega^{\frac{-1}{p-1}}(x) dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq c\, \|u\|_{L^p(Q,\omega)}\end{aligned}$$

con c independiente de u.

$\square$

Corolario 2 *Sea $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto y $\omega \in B_p(\Omega)$. Entonces*

$$L^p(\Omega, \omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega). \tag{1.6}$$

Además, usando la identificación usual de una distribución regular de $D'(\Omega)$ con una función de $L^1_{Loc}(\Omega)$ concluimos que

$$L^p(\Omega, \omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega) \subset D'(\Omega). \tag{1.7}$$

Por todo esto, para funciones $u \in L^p(\Omega, \omega)$ con $\omega \in B_p(\Omega)$, la derivada distribucional $D^\alpha u$ de u tiene sentido.

Demostración.-

La prueba de (1.6) es inmediato puesto que si $u \in L^p(\Omega, \omega)$ entonces para cada $Q \subset \Omega$ compacto el Teorema 18 implica $u \in L^1(Q)$ por tanto $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$. Para la prueba de (1.7) consideramos la aplicación lineal, inyectiva y continua de $L^1_{Loc}(\Omega)$ sobre el espacio de distribuciones $D'(\Omega)$, que nos permite identificar una función de $L^1_{Loc}(\Omega)$ con una districución regular, de esto y de (1.6) obtenemos el resultado.

$\square$

Observación 4 *Sea $\omega \in B_p(\Omega)$, $\phi \in C_o^\infty$ $(= D(\Omega))$ y sea $\gamma \in (\mathbb{N}_o)^N$ un multi-indice fijado. Entonces la fórmula*

$$L_\gamma(u) = \int_\Omega u D^\gamma \phi dx, u \in L^p(\Omega, \omega), \tag{1.8}$$

define un funcional lineal continuo L_γ sobre $L^p(\Omega, \omega)$. En efecto, si denotamos $Q = supp\phi$ entonces, $Q = \overline{Q} \subset \Omega$ y la desigualdad de Hölder implica

$$\begin{aligned} |L_\gamma(u)| &\leq \int_\Omega |u(x)|\, \omega^{1/p}\, |D^\gamma \phi|\, \omega^{-1/p} dx \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega,\omega)} \left(\int_Q |D^\gamma \phi|^{\frac{p}{p-1}}\, \omega^{\frac{-1}{p-1}}(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega,\omega)} \cdot max_Q\, |D^\gamma \phi| \cdot \left(\int_Q \omega^{\frac{-1}{p-1}}(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p}} ; \end{aligned}$$

donde la última integral es finita ya que $\omega^{\frac{-1}{p-1}} \in L^1_{Loc}(\Omega)$, entonces

$$|L_\gamma(u)| \leq c' \|u\|_{L^p(\Omega,\omega)} .$$

Definición 21 *Sea $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Sean Γ_1 el conjunto de multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^N$ de longitud 1 y $\Gamma_2 = \{\theta\} \cup \Gamma_1$ con $\theta = (0, 0, ..., 0)$. Denotemos por $\omega = \{\omega_\alpha \ / \ \omega_\alpha \in \Lambda(\Omega),$ para todo $\alpha \in \Gamma_2\}$ una familia de pesos y definamos el espacio de Sobolev con peso ω,*

$$W^{1,p}(\Omega, \omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega; \omega_\theta) \cap L^1_{Loc}(\Omega) \ / \ D^\alpha u \in L^p(\Omega; \omega_\alpha) \cap L^1_{Loc}(\Omega), \forall \alpha \in \Gamma_1 \right\} \tag{1.9}$$

donde $D^\alpha u$ representan distribuciones regulares. La expresión

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega,\omega)} = \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_2} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega,\omega_\alpha)} \right)^{1/p} = \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_2} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, \omega_\alpha dx \right)^{1/p} . \tag{1.10}$$

es una norma sobre el espacio $W^{1,p}(\Omega, \omega)$.

Si las funciones de peso $\omega_\alpha \in B_p(\Omega)$ para $1 < p$ entonces

$$L^p(\Omega, \omega_\alpha) \subset L^1_{Loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$$

por tanto en (1.9) podemos reemplazar $D^\alpha u \in L^p(\Omega; \omega_\alpha) \cap L^1_{Loc}(\Omega)$ por $D^\alpha u \in L^p(\Omega; \omega_\alpha)$. Además considerando la familia de pesos ω como una $(N+1)$-upla

$$\omega = \{\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

la norma (1.10) puede ser expresado en la forma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega,\omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \omega_o(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^p \omega_i(x) dx \right)^{1/p} . \tag{1.11}$$

Teorema 19 *Sea $\omega_\alpha \in B_p(\Omega)$ para todo $\alpha \in \Gamma_2$. entonces $W^{1,p}(\Omega, \omega)$ es un espacio de Banach equipado con la norma (1.10)*

Demostración.-

Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega, \omega)$ entonces $D^\alpha u$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega; \omega_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Gamma_2$ y por el Teorema 17 existen funciones $u_\alpha \in L^p(\Omega; \omega_\alpha)$ tales que $u_\alpha = \lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n$ en $L^p(\Omega; \omega_\alpha)$.

Para $\alpha \in \Gamma_1$ fijado y $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$ consideremos el funcional L_α de (1.8). Este es un funcional lineal continuo sobre $L^p(\Omega; \omega_\theta)$, consecuentemente,

$$L_\alpha(u_n) \longrightarrow L_\alpha(u_\theta) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

De la misma forma, L_θ define un funcional lineal continuo sobre $L^p(\Omega; \omega_\alpha)$, consecuentemente,

$$L_\theta(D^\alpha u_n) \longrightarrow L_\theta(u_\alpha) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Por la definición de la derivada distribucional con $|\alpha| = 1$ tenemos $L_\alpha(u_n) = -L_\theta(D^\alpha u_n)$ y por un proceso de límite esta fórmula proporciona

$$L_\alpha(u_\theta) = -L_\theta(u_\alpha).$$

Esta relación vale para cada $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$ y por tanto, u_α es la derivada distribucional de u_θ

$$u_\alpha = D^\alpha u_\theta.$$

Ya que $D^\alpha u_\theta \in L^p(\Omega; \omega_\alpha)$, tenemos $u_\theta \in W^{1,p}(\Omega; \omega)$ y

$$\begin{aligned} \|u_n - u_\theta\|^p_{L^p(\Omega;\omega)} &= \sum_{\alpha\in\Gamma_2} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_\theta\|^p_{L^p(\Omega;\omega_\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha\in\Gamma_2} \|D^\alpha u_n - u_\alpha\|^p_{L^p(\Omega;\omega_\alpha)} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

para $n \longrightarrow \infty$. De aquí la sucesión de Cauchy (u_n) converge a u_θ en $W^{1,p}(\Omega; \omega)$, esto es, $W^{1,p}(\Omega; \omega)$ es completo.

□

Las condiciones impuestas en el Teorema 19 pueden debilitarse, omitiendo la hipótesis $\omega_\theta \in B_p(\Omega)$.

Teorema 20 *Sea $p > 1$, $\omega_\alpha \in B_p(\Omega)$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$, $\omega_\theta \in \Lambda(\Omega)$. entonces $W^{1,p}(\Omega, \omega)$ es un espacio de Banach equipado con la norma (1.10)*

Demostración.- Ver [20].

En varias aplicaciones, en particular, para la investigación del problema de Dirichlet para ecuaciones diferenciales parciales elípticas, necesitamos de los espacios $W_o^{1,p}(\Omega; a)$ definidos como la clausura de $C_o^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma (1.10). Para poder introducir este espacio es necesaria la inclusión

$$C_o^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega;\omega) \tag{1.12}$$

el cual es satisfecha si

$$\omega_\alpha \in L^1_{Loc}(\Omega) \text{ para todo } \alpha \in \Gamma_2. \tag{1.13}$$

Por esto, es posible introducir la siguiente definición:

Definición 22 *Sea $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Γ_1 ,Γ_2 y la familia de funciones de peso ω tal como en la Definición 21. Sea $\omega_\alpha \in B_p(\Omega)$ para $\alpha \in \Gamma_1$ y $\omega_\alpha \in L^1_{Loc}(\Omega)$ para todo $\alpha \in \Gamma_2$. Entonces definimos*

$$W_o^{1,p}(\Omega;\omega) = \overline{C_o^\infty(\Omega)}, \tag{1.14}$$

donde la clausura es tomada con respecto a la norma (1.10).

Proposición 5 *La inclusión (1.12) es satisfecha si y solo si (1.13) es válido.*

Demostración.-
Si la condición (1.13) vale entonces evidentemente (1.12) es satisfecha. Recíprocamente, supongamos que (1.12) vale. Luego, **probaremos que:** si $\alpha \in \Gamma_2$ y $Q \subset \Omega$ es un conjunto compacto, entonces existe una función $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$ tal que $D^\alpha\phi(x) \equiv 1$ para $x \in Q$. En efecto, consideremos $\phi = \phi_o\phi_1$ con $\phi_o \in C_o^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_o \equiv 1$ sobre Q y $\phi_1(x) = x_i$, esto es, $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$ y $D^\alpha\phi(x) \equiv 1$ para $x \in Q$. Luego, de esta identidad y de (1.12) conseguimos

$$\begin{aligned} 0 \le \int_Q \omega_\alpha dx &= \int_Q |D^\alpha \phi|^p \,\omega_\alpha dx \\ &\le \int_\Omega |D^\alpha \phi|^p \,\omega_\alpha dx \\ &\le \|\phi\|_W < \infty \end{aligned}$$

consecuentemente $\omega_\alpha \in L^1_{Loc}(\Omega)$.

$\square$

Resumiendo, considere $1 < p < \infty$ y suponga que las funciones de peso ω_α satisfacen,

$$\omega_\alpha^{\frac{-1}{p-1}} \in L^1_{Loc}(\Omega),\ |\alpha| \leq 1, \tag{1.15}$$

entonces, $W^{1,p}(\Omega;\omega)$ es un espacio de Banach uniformemente convexo (ver [17]).
Si adicionalmente suponemos que

$$\omega_\alpha \in L^1_{Loc}(\Omega),\ |\alpha| \leq 1, \tag{1.16}$$

entonces $C_o^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega;\omega)$, y podemos introducir el espacio

$$W_o^{1,p}(\Omega;\omega) \tag{1.17}$$

como la clausura de $C_o^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma dada en (1.10)

$\square$

Algunos ejemplos de funciones peso son dadas por:

(i) Sea la función $\omega(x) = x^2+1$, definida sobre $x \in \Omega = (-1;1)$, conjunto abierto y acotado. Esta función es claramente una función peso, puesto que es finito, medible y positiva. La continuidad de la función implica $\omega(x) \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y también $\omega^{\frac{-1}{2-1}} = \frac{1}{x^2+1} \in L^1_{Loc}(\Omega)$, es decir, $\omega(x) \in B_2(\Omega)$.

(ii) Sea la función $\omega_1(x,y,z) = 1 + x^2$, definida sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, subconjunto abierto y acotado. Esta función es claramente una función peso, puesto que es finito, medible y positiva. La continuidad de la función implica $\omega_1(x,y,z) \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y también $\omega^{\frac{-1}{2-1}} = \left|1+x^2\right|^{-1} \in L^1_{Loc}(\Omega)$, es decir, $\omega_1(x,y,z) \in B_2(\Omega)$. Aun más $\omega_1^{-s} \in L^1(\Omega)$, donde $s \in \left\langle \frac{3}{2}, \infty \right\rangle \bigcap \left[\frac{1}{2-1}, \infty \right\rangle$.

(iii) Sea la función $\omega(x) = e^{\|x\|}$, definida sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, subconjunto abierto y acotado. Esta función es claramente una función peso, con $\omega(x) \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y también $\omega^{-s} \in L^1(\Omega)$, donde $s \in \left\langle \frac{N}{2}, \infty \right\rangle \bigcap \left[\frac{1}{p-1}, \infty \right\rangle$.

(iv) Sea la función $\omega(x) = (\|x\| - r)^{-1}$, definida sobre $x \in \Omega = B_r(0) \subset \mathbb{R}^N$, subconjunto abierto y acotado. Esta función es claramente una función peso, con $\omega(x) \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y $\omega^{-s} \in L^1(\Omega)$, donde $s \in \left\langle \frac{N}{2}, \infty \right\rangle \bigcap \left[\frac{1}{p-1}, \infty \right\rangle$.

En [13] podemos encontrar otros ejemplos de funciones peso. Hasta aquí hemos considerado por simplicidad el caso de espacios de orden 1. Sin embargo nuestro estudio puede ser extendido a espacios de orden $k > 1$.

Definición 23 *Sea $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ y S una familia de funciones de peso en $B_p(\Omega)$. Denotamos por $W^{k,p}(\Omega, S)$ al conjunto de todas las funciones $f \in L^p(\Omega, \omega_o)$ para el cual las derivadas débiles $D^\alpha f \in L^p(\Omega, \omega_\alpha)$ para todo $|\alpha| \leq k$.*

El espacio de Sobolev con peso *$W^{k,p}(\Omega, S)$ es un espacio vectorial lineal y normado con la norma*

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega,S)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f|^p \, \omega_\alpha dx \right)^{1/p} .$$

En estos espacios, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & W^{k,p}(\Omega, \omega) & \longrightarrow & W^{k,p}(\Omega) \\ & u & \mapsto & u \cdot w^{1/p} \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico con inversa dada por

$$\begin{array}{rccc} \Phi^{-1} : & W^{k,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{k,p}(\Omega, \omega) \\ & v & \mapsto & v \cdot w^{-1/p} \end{array}$$

Observación 5 ***Inclusiones de Sobolev para espacios con Peso***

A continuación establecemos inclusiones de Sobolev para espacios con peso entre los espacios $W^{k,p}(\Omega, \omega)$ y $L^q(\Omega, \omega^{q/p})$ con función de peso ω. Estos resultados se utilizan para controlar los teoremas de existencia. Su buena definición es consecuencia del isomorfismo Φ, que permite bajar al espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ y hacer uso de las inclusiones de Sobolev sin peso $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\ q \in [p, p^*]$ para luego nuevamente usar el isomorfismo isométrico Φ con el fin de volver a los espacios con peso. Enunciamos de modo explicito, la inclusión

$$W^{k,p}(\Omega, \omega) \hookrightarrow L^q(\Omega, \omega^{q/p}) \text{ si } p \leq q \leq p^* = \frac{Np}{N - kp}, \text{ y } kp < N$$

y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} W^{k,p}(\Omega, \omega) & \overset{i}{\hookrightarrow} & L^q(\Omega, \omega^{q/p}) \\ \Phi \downarrow & & \uparrow \Phi^{-1} \\ W^{k,p}(\Omega) & \overset{i}{\hookrightarrow} & L^q(\Omega) \end{array}$$

$\square$

1.5. Inmersiones de Sobolev con peso y la equivalencia de normas en los espacios de Sobolev con peso $W^{1,p}(\Omega; a)$ y $W_o^{1,p}(\Omega; a)$

Aquí complementaremos los resultados vistos en la sección anterior a través de las siguientes observaciones:

Observación 6 *Consideremos ahora el espacio de Sobolev con peso $W^{1,p}(\Omega;\omega)$ con una especial elección de la familia ω:*

$$\omega_o = 1,\ \omega_1(x) = \omega_2(x) = \ldots = \omega_N = a(x).$$

En este caso, usamos para el espacio $W^{1,p}(\Omega;\omega)$ la notación especial $W^{1,p}(\Omega;a)$. Este espacio es normado por

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega,a)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, a(x) dx \right)^{1/p}. \tag{1.18}$$

Supongamos que la función de peso $a(x)$ satisface:

$$a^{\frac{-1}{p-1}} \in L^1_{Loc}(\Omega), \tag{1.19}$$

$$a \in L^1_{Loc}(\Omega), \tag{1.20}$$

y la condición

$$a^{-s} \in L^1(\Omega) \tag{1.21}$$

con un cierto $s > 0$ el cual será especificado después.

Introducimos el parámetro p_s por

$$p_s = \frac{ps}{s+1} < p.$$

Afirmación 1: $W^{1,p}(\Omega;a) \hookrightarrow W^{1,p_s}(\Omega)$

En efecto, usando la desigualdad de Hölder con el parámetro $r = \frac{s+1}{s} = \frac{p}{p_s}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_s} dx &= \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_s} a^{\frac{p_s}{p}} a^{\frac{-p_s}{p}} dx \\
&\leq \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p} a dx \right)^{\frac{p_s}{p}} \left(\int_\Omega a^{-s} dx \right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&\leq c' \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{p_s}_{L^p(\Omega;a)}
\end{aligned}$$

Y considerando, Ω un dominio acotado vemos que una función $u \in W^{1,p}(\Omega;a)$ también pertenece al espacio sin peso $W^{1,p_s}(\Omega)$, esto es,

$$\|u\|_{W^{1,p_s}(\Omega)} \leq c' \|u\|_{W^{1,p}(\Omega;a)}$$

para $p_s < p$.

Afirmación 2: $W^{1,p}(\Omega;a) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *donde $1 \leq r \leq p_s^* = \frac{Np_s}{N-p_s} = \frac{Nps}{N(s+1)-ps}$ para $ps < N(s+1)$.*

En efecto, usando el resultado anterior $W^{1,p}(\Omega;a) \hookrightarrow W^{1,p_s}(\Omega)$ y la inmersión de Sobolev usual $W^{1,p_s}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ obtenemos el resultado.

Afirmación 3: *La inmersión* $W^{1,p}(\Omega;a) \overset{c}{\hookrightarrow} L^r(\Omega)$ *es compacta para* $1 \leq r < p_s^*$.

En efecto, usando el resultado de la Afirmación 1 $W^{1,p}(\Omega;a) \hookrightarrow W^{1,p_s}(\Omega)$ *y la inmersión compacta de Sobolev usual* $W^{1,p_s}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^r(\Omega)$ *obtenemos el resultado.*

$\square$

Ahora observe que $p_s^* > p$ *si* $s > \frac{N}{p}$, *y consecuentemente,*

$$W^{1,p}(\Omega;a) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega) \text{ para } s > \frac{N}{p}. \tag{1.22}$$

Afirmamos que (1.22) vale si

$$a^{-s} \in L^1(\Omega) \text{ con } s \in \left(\frac{N}{p}, \infty\right) \cap \left[\frac{1}{p-1}, \infty\right) \tag{1.23}$$

ya que, para estar de acuerdo con la Definición 20, debemos suponer también que $s \geq \frac{1}{p-1}$.

Observación 7 *Consideremos el espacio* $W^{1,p}(\Omega;a)$ *y su subespacio* $W_o^{1,p}(\Omega;a)$ *con* Ω *un dominio acotado. Las inmersiones derivadas para* $W^{1,p}(\Omega;a)$, *también valen para* $W_o^{1,p}(\Omega;a)$. *Para* $p_s^* > p$ *tenemos, en virtud de la inmersión de Sobolev usual(Teorema Sobolev-Gagliardo-Niremberg)* $W_o^{1,p_s}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_s^*}$, *que:*

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq c_1 \left(\int_\Omega |u(x)|^{p_s^*} \, dx\right)^{\frac{1}{p_s^*}} \\ &\leq c_2 \left(\int_\Omega (|u(x)|^{p_s} + |\nabla u(x)|^{p_s}) dx\right)^{\frac{1}{p_s}}.\end{aligned}$$

La siguiente desigualdad en $W_o^{1,q}(\Omega)$

$$\int_\Omega |u|^q dx \leq c \int_\Omega |\nabla u|^q dx \text{ (Desigualdad de Friedrichs)} \tag{1.24}$$

nos proporciona para $q = p_s$

$$\left(\int_\Omega (|u(x)|^{p_s} + |\nabla u(x)|^{p_s}) dx\right)^{\frac{1}{p_s}} \leq c_3 \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p_s} \, dx\right)^{\frac{1}{p_s}},$$

procediendo como en la Afirmación 1, *mostramos que:*

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p_s} \, dx\right)^{\frac{1}{p_s}} &\leq \left[\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p_s} \, a^{\frac{p_s}{p}} a^{\frac{-p_s}{p}} \, dx\right]^{\frac{1}{p_s}} \\ &\leq \left[\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, a(x) dx\right)^{\frac{p_s}{p}} \left(\int_\Omega a^{-s}(x) dx\right)^{\frac{1}{s+1}}\right]^{\frac{1}{p_s}} \\ &= \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, a(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega a^{-s}(x) dx\right)^{\frac{1}{p \cdot s}}\end{aligned}$$

inmediatamente conseguimos la desigualdad de Friedrichs con peso

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \leq c_4 \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, a(x) dx. \tag{1.25}$$

Finalmente obtenemos la expresión

$$\|u\|_{W_o^{1,p}(\Omega;a)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, a(x) dx \right)^{1/p} \tag{1.26}$$

que es una norma sobre el espacio $W_o^{1,p}(\Omega; a)$ equivalente con la norma (1.18).

1.6. Resultados del cálculo variacional

Continuamos con algunas definiciones y teoremas del cálculo variacional.

Definición 24 (Derivada de Fréchet) *Sean $(X; \|\cdot\|_X)$, $(Y; \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach, U un conjunto abierto en X. Una aplicación $f : U \longmapsto Y$ es diferenciable según Fréchet o F-diferenciable en $x \in U$ si existe un operador lineal $A_x \in L(X; Y)$ tal que*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - A_x h\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Equivalentemente
$f(x+h) - f(x) = A_x h + \varphi(x,h)$ tal que $\lim_{\|h\| \longrightarrow 0} \frac{\|\varphi(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$
Luego se define la aplicación derivada de Fréchet de f en U

$$\begin{array}{rccl} f' : & U \subset X & \longmapsto & L(X; Y) \\ & x & \longmapsto & f'(x) = A_x \end{array}$$

Definición 25 (Derivada de Gateaux) *Sean $(X; \|\cdot\|_X)$, $(Y; \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y U un conjunto abierto en X. Una aplicación $f : U \longmapsto Y$ es diferenciable según Gateaux o G-diferenciable en el punto $x \in U$ si existe un operador lineal $B_x \in L(X; Y)$ tal que*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \left\| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - B_x v \right\|_Y = 0, \ \forall v \in X$$

Luego se define la aplicación derivada de Gateaux en x, que denotaremos $Df(x) \equiv B_x$, donde

$$\begin{array}{rccl} Df(x) : & X & \longmapsto & Y \\ & v & \longmapsto & Df(x)v = \langle Df(x), v \rangle \end{array}$$

En particular la aplicación derivada de Gateaux de f en U

$$\begin{array}{rccl} Df : & U \subset X & \longmapsto & L(X; Y) \\ & x & \longmapsto & Df(x) = B_x \end{array}$$

Observación 8 *De la definición anterior, decimos que f es Gateaux diferenciable en $x \in U$ si la aplicación*

$$Df(x)h := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ f(x+th) - f(x) \right\}$$

existe para todo $h \in X$ y $Df(x) \in L(X, Y)$.

Definición 26 *Sea $U \subseteq X$ abierto y $f : U \longmapsto \mathbb{R}$. Si la derivada según Fréchet $f' : U \longmapsto X'$ es continua, diremos que $f \in C^1(U)$.*

Teorema 21 *Sea $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ con derivada de Gateaux continua en U. Entonces f es diferenciable según Fréchet en U y las derivadas según Fréchet y Gateaux coinciden. De esto resulta que $f \in C^1(U)$.*

Demostración.- Ver [31], Proposición 4.8, página 137.

Teorema 22 *Si f es derivable según Fréchet en x entonces f es continua en x.*

Demostración.- Ver [31], Proposición 4.8, página 137.

Teorema 23 Sean $(X, \| \|_X)$ e $(Y, \| \|_Y)$ dos espacios normados, $U \subseteq X$ un subconjunto abierto no vacío y $f : U \longrightarrow Y$ una aplicación. Si f es Fréchet diferenciable en $u \in U$, entonces f es Gateaux diferenciable en u y las derivadas de Gateaux y Fréchet coinciden.

Demostración.- Supongamos que f es Fréchet diferenciable en $u \in U$; luego por definición tenemos:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(u+th) - f(u) - f'(u)(th)\|_Y}{\|th\|_X} = 0 \quad \text{para todo } h \in X \setminus \{0\}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{1}{|t|} \left\| f(u+th) - f(u) - f'(u)(th) \right\|_Y = 0 \quad \text{para todo } h \in X \setminus \{0\} \\ \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ f(u+th) - f(u) - f'(u)(th) \right\} = 0 \quad \text{para todo } h \in X \setminus \{0\}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Como $f'(u)$ es lineal, del resultado anterior tenemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{f(u+th) - f(u)\} = f'(u)h \quad \text{para todo } h \in X \setminus \{0\} \tag{1.28}$$

Por otra parte, como $f'(u)0_X = 0_Y$ concluimos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{f(u+th) - f(u)\} = f'(u)h \quad \text{para todo } h \in X$$

Por lo tanto f es Gateaux diferenciable en u y $Df(u)h = f'(u)h$ para todo $h \in X$.

□

Definición 27 *Sean X, Y espacios de Banach, $f : U \times V \subseteq X \times Y \longmapsto \mathbb{R}$. Sea $v_o \in V$ fijado, luego $f(\cdot, v_o)$ es una función cuya derivada según Gateaux (o Fréchet) en $u_o \in U$,si existe, es llamada la derivada parcial según Gateaux (o Fréchet) de f en (u_o, v_o), con respecto a la primera variable y que será denotada por $D_u f(u_o, v_o)$ o $(f_u(u_o, v_o))$. Similarmente se define*

la derivada parcial con respecto a la segunda variable $D_v f(u_o, v_o)$ *(o* $f_v(u_o, v_o)$*).*
Además, si $Df(u_o, v_o)$ *existe, entonces también existen* $D_u f(u_o, v_o)$, $D_v f(u_o, v_o)$ *y*

$$Df(u_o, v_o)(h, k) = D_u f(u_o, v_o)h + D_v f(u_o, v_o)k$$

Teorema 24 (Fréchet-Gateaux) *Si f es Fréchet diferenciable en* (u_o, v_o)*, entonces las derivadas parciales* $f_u(u_o, v_o)$*,* $f_v(u_o, v_o)$ *existen y*

$$\left\langle f'(u_o, v_o), (h, k) \right\rangle = \langle f_u(u_o, v_o), h\rangle + \langle f_v(u_o, v_o), k\rangle \ , \ (h, k) \in X \times Y$$

consecuentemente

$$\langle f_u(u_o, v_o), h\rangle = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(u_o + th, v_o) - f(u_o, v_o)}{t} = \left\langle f'(u_o, v_o)(h, 0) \right\rangle$$
$$\langle f_v(u_o, v_o), k\rangle = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(u_o, v_o + tk) - f(u_o, v_o)}{t} = \left\langle f'(u_o, v_o)(0, k) \right\rangle$$

donde f' *es la derivada de Fréchet (o Gateaux), en particular derivada de Gateaux gracias al teorema anterior.*
Recíprocamente, si $f_u(u_o, v_o)$ *y* $f_v(u_o, v_o)$ *existen en una vecindad de* (u_o, v_o) *y son continuas en* (u_o, v_o) *entonces f es Fréchet diferenciable en* (u_o, v_o) *y*

$$\left\langle f'(u_o, v_o), (h, k) \right\rangle = \langle f_u(u_o, v_o), h\rangle + \langle f_v(u_o, v_o), k\rangle$$

Demostración.- Ver [3], proposición 5.3.15, página 231.

Teorema 25 (Regla de la cadena) *Dados* X, Y, Z *espacios de Banach,* $f : U(x) \subseteq X \longmapsto Y$*,* (x, y) *fijo donde* $y = f(x)$ *y* $g : V(y) \subseteq Y \longmapsto Z$ *con* $f(U(x)) \subseteq V(y)$*, donde* $U(x)$ *y* $V(y)$ *son vecindades de x e y respectivamente. Se define la composición* $g \circ f : U(x) \longmapsto Z$*.*
Supongamos que $f'(x)$ *y* $g'(f(x))$ *existen como F-derivadas. Entonces*
a) La función composición $H = g \circ f$ *es F-diferenciable en x y se tiene que*

$$H'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

b) Si $f'(x)$ *existe solo como G-derivada en x, luego H es G-diferenciable en x y se obtiene*

$$H'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

Demostración.- Ver [31], Proposición 4.10, página 138.

Definición 28 *Dado X un espacio de Hilbert y un funcional* $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$*. Decimos que J es débilmente semicontinua inferior en* u_o *si y solo si J es semicontinua inferior en* u_o *considerando X con su topología débil. Es decir:*

$$J(u_o) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} J(u_n) \text{ siempre que } u_n \rightharpoonup u_o.$$

Definición 29 *Un funcional $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre un espacio de Banach X, es llamado coerciva si, para cada sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$,*

$$\|u_k\| \longrightarrow +\infty \text{ implica } J(u_k) \longrightarrow +\infty.$$

Teorema 26 *Sea E espacio de Banach reflexivo. Las normas en E son funcionales débilmente semicontinuas inferiormente.*

Demostración.-
Sea $u_k \subset E$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ en E, esto es,

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \langle f, u_k\rangle = \langle f, u\rangle \,,\, \forall f \in E'$$

Por otro lado del Teorema de Han Banach se consigue $(u_k)_{k\geq 1}$ acotada en E luego

$$|\langle f, u\rangle| = |\lim_{k\longrightarrow\infty} \langle f, u_k\rangle| = \lim_{k\longrightarrow\infty} |\langle f, u_k\rangle|$$

la propiedad de norma de un funcional lineal implica

$$|\langle f, u\rangle| = \lim_{k\longrightarrow\infty} |\langle f, u_k\rangle| \leq |f|_{E'} |u|_E \leq |f|_{E'} \liminf_{k\longrightarrow\infty} |u_k|_E \,,$$

esto es,

$$|\langle f, u\rangle| \leq |f|_{E'} \liminf_{k\longrightarrow\infty} |u_k|_E$$

Finalmente tomando supremo sobre todo f con $|f|_{E'} = 1$, se tiene

$$\sup_{|f|_{E'}=1} |\langle f, u\rangle| \leq \liminf_{k\longrightarrow\infty} |u_k|_E$$

De este modo conseguimos el resultado

$$|u|_E \leq \liminf_{k\longrightarrow\infty} |u_k|_E \,.$$

□

Teorema 27 *Sean E, F espacios de Banach. Si $T \in L(E, F)$ es un operador lineal compacto y si $u_n \rightharpoonup u$ en E entonces $Tu_n \longrightarrow Tu$ fuertemente en F.*

Demostración.- Ver [19] página 410.

Proposición 6 *Todo espacio de Hilbert H es uniformemente convexo, y por tanto reflexivo.*

Demostración.- Ver [5] página 79.

Teorema 28 (Espacios uniformementes convexos) *Sea E un espacio de Banach y uniformemente convexo, (x_n) una sucesión en E tal que $x_n \rightharpoonup x$ en E y*

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$$

entonces $x_n \longrightarrow x$ fuertemente.

Demostración.- Ver [5] página 52.

Teorema 29 (Teorema de Eberlein-Shmulyan) *Sea E un espacio de Banach. Se satisface:*
E es reflexivo $\Leftrightarrow$ Toda sucesión acotada, posee una subsucesión débilmente convergente a un elemento de E.

Demostración.- Ver [30], página 141.

Teorema 30 *Sea X un espacio topológico compacto y $J : X \longmapsto \mathbb{R}$ un funcional semicontinuo inferiormente. Entonces J es acotado inferiormente y existe un $u_o \in X$ tal que $J(u_o) = \inf_{x\in X} J(x)$.*

Demostración.-
Por la semicontinuidad inferior de J tenemos que $J^{-1}(-n, \infty)$ es abierto para cada n.Tomemos el siguiente cubrimiento abierto de X,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} J^{-1}(-n, \infty).$$

Luego siendo X compacto, podemos extraer un subcubrimiento finito

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_o} J^{-1}(-n, \infty) \text{ para algún } n_o \in \mathbb{N},$$

de aquí $J(u) > -n_o$ para todo $u \in X$, así que J es acotada inferiormente.
Ahora sea $-\infty < c = \inf_{x\in X} J(x)$ y supongamos por contradicción que $c < J(u)$ para todo $u \in X$. Entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} J^{-1}(c + \frac{1}{n}, \infty)$$

y además, por la compacidad de X, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $c + \frac{1}{k} < J(u)$ para todo $u \in X$, de aquí tomando el ínfimo, tenemos $c + \frac{1}{k} \leq c$, el cual es un absurdo.
Por tanto el ínfimo debe ser alcanzado en algún $u_o \in X$.

$\square$

Teorema 31 (Principio del Mínimo) *Sea E un espacio de Hilbert (o mas general, considere un espacio de Banach reflexivo) y supongamos que un funcional $J : E \longmapsto \mathbb{R}$, verifica:*

(M1) J es débilmente semicontinuo inferiormente.

(M2) J es coercivo (esto es, $J(u) \to +\infty$ cuando $\|u\| \to \infty$),

entonces

$$J \textit{es acotado inferiormente y existe } u_o \in E \textit{ tal que } J(u_o) = \inf_{x\in E} J(x).$$

Demostración.-

Por la hipótesis (M2) de coercitividad, podemos elegir $R > 0$ tal que $J(u) \geq J(0)$ para todo $u \in E$ con $R \leq \|u\|$. Ya que la bola cerrada de radio R y centro 0, $\overline{B_R(0)}$ es compacto en la topología débil y por (M1), $J : \overline{B_R(0)} \longmapsto \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente en la topología débil, luego el Teorema 30 implica la existencia de $u_o \in \overline{B_R(0)}$ tal que $J(u_o) = \inf_{x\in\overline{B_R(0)}} J(x)$, de aquí $J(u_o) = \inf_{x\in E} J(x)$ por la elección de R y en particular J es acotado inferiormente sobre E.

□

Ejemplos sobre la aplicación del Principio del Mínimo, se puede encontrar en [12].

Observación 9 *Sea E un espacio de Banach reflexivo y $J : E \longmapsto \mathbb{R}$ un funcional coercivo y débilmente semicontinuo inferiormente. Entonces se concluye en particular que J es un funcional acotado inferiormente sobre E.*

Definición 30 (Condición de Palais-Smale) *Sean E un espacio de Banach real y $J \in C^1(E,\mathbb{R})$. Se dice que J satisface la condición de Palais-Smale (en adelante lo consideraremos condición (PS)), si cualquier sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ en E tal que $\{J(u_n)\}$ es acotada y $\lim_{m\to\infty} J'(u_m) = 0$, admite una subsucesión convergente.*

Definición 31 *Sean E un espacio de Banach y $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase $C^1(E,\mathbb{R})$ sobre E. Se dice que $u \in E$ es un punto crítico de J si $J'(u) \equiv 0$, es decir, si $J'(u)\varphi = 0$ para todo $\varphi \in E$.*

Observación 10 *Sea E un espacio de Banach. Si u_o es un punto de mínimo para un funcional $J : E \longmapsto \mathbb{R}$ y J es diferenciable en u_o, entonces u_o es un punto crítico de J.*
En efecto, si u_o es un punto de mínimo, para $h \in E$, existe un $\delta > 0$ tal que,

$$J(u_o) \leq J(u_o + th), \textit{ para todo } |t| < \delta.$$

Como J es $F-$ diferenciable en u_o entonces J es $G-$ diferenciable en u_o, por tanto conseguimos

$$0 \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left\{ J(u_o + th) - J(u_o) \right\} = DJ(u_o)h = \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t} \left\{ J(u_o + th) - J(u_o) \right\} \leq 0.$$

De esto $DJ(u_o)h = 0$, por tanto la derivada de Fréchet es cero en u_o y así es punto crítico.

Definición 32 *Un número c es llamado valor crítico de J si $J(u) = c$ para algún punto crítico $u \in E$, (esto es $K_c \neq \phi$). El conjunto de todos los puntos críticos en el nivel c , se define por*

$$K_c = \left\{ u \in E \ / \ J(u) = c, J'(u) = 0 \right\}.$$

También definimos

$$A_s = \left\{ u \in E \ / \ J(u) \leq s \right\}.$$

A continuación encunciamos una versión del Lema de deformación con el fin de probar el Teorema del paso de la montaña.

Lema de deformación : Sea E un espacio de Banach Real. Suponga que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ y satisface la condición (PS). Si c no es un valor crítico de J entonces dado cualquier $\epsilon > 0$, existen $\delta > 0 \in \langle 0, \epsilon \rangle$ y $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tales que :

(LD0) $\eta(0, u) = u$ para todo $u \in E$.

(LD1) $\eta(1, u) = u$ si $J(u) \notin [c - \epsilon; c + \epsilon]$.

(LD2) $\eta(1, A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

Demostración.- Ver [28].

Teorema 32 (Teorema del paso de la montaña) *Sea E un espacio de Banach real y sea $J \in C^1(E, \mathbb{R})$, un operador que satisface la condición (PS). Suponga que $J(0) = 0$ y que se satisfacen:*

(PM1) Existen constantes positivas ρ y σ tales que $J|_{\partial B_\rho(0)} \geq \sigma$.

(PM2) Existe un $w \in E - \overline{B_\rho(0)}$ tal que $J(w) \leq 0$.

Entonces J posee un valor crítico $c \geq \sigma$. Además c puede ser caracterizado como :

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u) \tag{1.29}$$

donde $\Gamma = \{ g \in C([0,1], E) / g(0) = 0, g(1) = w \}$.

Demostración.-

Iniciamos la prueba con la existencia de c dada por (1.29) tal que $\sigma \leq c < \infty$. Como para cada $g \in \Gamma$, $\max_{u \in g([0,1])} J(u)$ existe porque $J \circ g$ es una función escalar continua definida en el compacto $[0,1]$. Luego $c < \infty$ es un número finito. Además, si $g \in \Gamma$, la función $\|g(t)\|_E$ es continua sobre $[0,1]$, pues es la composición de funciones continuas. Como $\|g(0)\|_E = 0$ y $\|g(1)\|_E = \|w\|_E$ y $\|w\|_E > \rho > 0$ (por hipótesis $(PM2)$), el Teorema del valor intermedio garantiza la existencia de un $t_o \in \langle 0,1 \rangle$ tal que $\|g(to)\|_E = \rho$. Es decir, $g(t_o) \in \partial B_\rho(0)$. Por tanto, de (PM1) conseguimos:

$$max_{u \in g([0,1])} J(u) \geq J(g(t_o)) \geq \sigma.$$

Como $g \in \Gamma$ es arbitraria, tomamos el ínfimo a la anterior desigualdad, obteniendo $c \geq \sigma$.
Ahora razonando por el absurdo, suponga que c no es valor crítico de J. Sea $\epsilon = \frac{\sigma}{2}$ entonces por el Lema de deformación, existe un $\delta \in \langle 0, \epsilon \rangle$ y una función $\eta \in C([0,1] \times E, F)$ que satisface $(LD0)$, $(LD1)$ y $(LD2)$. Por (1.29) y la definición de ínfimo, existe $\bar{g} \in \Gamma$ tal que

$$c < \max_{u \in \bar{g}([0,1])} J(u) \leq c + \delta. \tag{1.30}$$

Definamos $h(t) := \eta(1, \bar{g}(t))$, para todo $t \in [0,1]$. Como $\eta(1, \cdot) \in C(E, E)$ y $\bar{g}$ es continua en $[0,1]$, la función compuesta $h = \eta(1, \cdot) \circ \bar{g} \in C([0,1], E)$. Como $\bar{g}(0) = 0$, también $J(\bar{g}(0)) = J(0) = 0 < \frac{\sigma}{2} \leq c - \epsilon$, (pues $\sigma \leq c$). Luego por $(LD1)$ se sigue que $J(\bar{g}(0)) = 0 \notin [c - \epsilon, c + \epsilon]$ implica $h(0) = \eta(1, 0) = 0$.
De manera similar Como $\bar{g}(1) = w$, también de (PM2) $J(\bar{g}(1)) = J(w) \leq 0$ luego por $(LD1)$, $J(\bar{g}(1)) = J(w) \notin [c - \epsilon, c + \epsilon]$ implica $h(1) = \eta(1, w) = w$. De estos resultados $h \in \Gamma$ y por definición de ínfimo en (1.29)

$$c \leq \max_{u \in h([0,1])} J(u).$$

Por (1.30)

$$\bar{g}([0,1]) = \{\bar{g}(t) \in E \ / \ t \in [0,1], J(\bar{g}(t)) \leq c + \delta\} \subset \{u \in E \ / \ J(u) \leq c + \delta\} = A_{c+\delta}$$

luego por $(LD2)$ se tiene

$$h([0,1]) = \eta(1, \bar{g}([0,1])) \subset \eta(1, A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}.$$

Esto es $h([0,1]) \subset A_{c-\delta}$ implica $J(h(t)) \leq c - \delta$ para todo $t \in [0,1]$ por tanto

$$\max_{u \in h([0,1])} J(u) \leq c - \delta < c.$$

Esto es absurdo. Luego c es un valor crítico de J.

$\square$

Observación 11 *En el Teorema del paso de la montaña tenemos $z \in E$ tal que $J'(z) = 0$ y $J(z) = c \geq \sigma$, donde se observa que $c \geq \sigma$, puesto que cada camino g conectando 0 a w tendrá que cruzar la esfera $\{u \ / \ \|u\| = \rho\}$, ya que w permanece fuera de la bola de centro 0 y radio ρ. Sobre esta esfera el valor de J es al menos σ, de aquí el máximo valor de $J(g(t))$ para cualquier g es al menos σ y así $c \geq \sigma$. Además el punto crítico $z \neq 0$ y $z \neq w$.*

Observación 12 *En el cálculo variacional se desarrollan los métodos variacionales para resolver ecuaciones de la forma*

$$F(u) = 0 \tag{1.31}$$

en un espacio de Hilbert E, para esto se tomará un funcional

$$J : E \longmapsto \mathbb{R}$$

tal que su derivada de Fréchet sea $J' = F$, es decir

$$\left\langle J'(u), v \right\rangle = \langle F(u), v \rangle \,, \ \textit{para cada } u, v \in E. \tag{1.32}$$

Entonces las soluciones de la ecuación $F(u) = 0$ serán los puntos críticos de J.
Algunos ejemplos sobre la aplicación del Teorema del paso de la montaña, se puede encontrar en [24] ,[8] y una generalización del mismo en [29].

Capítulo 2

Definición y condiciones del problema

En este capítulo presentamos el problema, damos las condiciones sobre los datos e introducimos la definición de solución débil del problema.

2.1. Una clase de sistemas elípticos semilineales

En este trabajo abordamos una clase de sistemas elípticos semilineales de la forma:

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla u) = \lambda F_u(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ -div(b(x)\nabla v) = \lambda F_v(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con $N > 2$ y de frontera bien regular. Los pesos $a(x)$, $b(x)$ son funciones medibles no negativos sobre Ω, F un funcional de clase C^1 donde $(F_u, F_v) = \nabla F$ representa el gradiente de F en las variables $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y λ es un parámetro positivo.

2.2. Condiciones sobre el problema y definición de solución débil

En este trabajo, consideramos el sistema (2.1) y probamos bajo adecuadas condiciones de no linealidad sobre F_u y F_v, usando el Principio del Mínimo (ver [27] página 4 Teorema 2) y el Teorema del paso de la montaña de A. Ambroseti y Rabinowitz (ver [1]), que el sistema

(2.1) tiene al menos dos soluciones débiles no triviales.

Asumimos en este trabajo que los pesos $a, b \in L^1_{Loc}(\Omega)$, satisfacen

$$a^{-s}, b^{-s} \in L^1(\Omega),\ s \in \left(\frac{N}{2}, \infty\right) \bigcap [1, \infty\rangle\,. \tag{2.2}$$

Con los números s definimos:

$$2_s = \frac{2s}{s+1},\ 2_s^* = \frac{N2_s}{N-2_s} = \frac{N2s}{N(s+1)-2s} > 2.$$

Proposición 7 *Dados los pesos $a, b \in L^1_{Loc}(\Omega)$ satisfaciendo (2.2), entonces los funcionales*

$$\|u\|_a^2 = \int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2\,dx,\ \forall u \in C_o^\infty(\Omega)\ y$$

$$\|v\|_b^2 = \int_\Omega b(x)\,|\nabla v|^2\,dx,\ \forall v \in C_o^\infty(\Omega).$$

son normas que provienen de un producto interno. Además los espacios $W_o^{1,2}(\Omega, a)$ y $W_o^{1,2}(\Omega, b)$ definidos como la clausura de $C_o^\infty(\Omega)$ con respecto estas normas respectivamente son espacios de Hilbert.

Demostración.-

Demostraremos que $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son normas y que provienen de un producto interno, para ello bastará realizar la prueba para $\|\cdot\|_a$. Primero veamos la buena definición de esta norma:

Como todo operador diferencial D^α es una aplicación lineal continua de $D(\Omega)$ en $D(\Omega)$, tenemos que si $u \in C_o^\infty(\Omega)$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C_o^\infty(\Omega)$, con $sopp(\frac{\partial u}{\partial x_i}) \subset sopp(u)$ por tanto

$$sopp(|\nabla u|^2) \subset sopp(u) \tag{2.3}$$

Usando (2.3) tenemos

$$\|u\|_a^2 = \int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2\,dx \le max_{x\in K}\,|\nabla u|^2 \int_K a(x)dx < \infty,$$

donde $K = sopp(|\nabla u|^2)$, $a \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y $u \in C_o^\infty(\Omega)$. Así $\|\cdot\|_a$ está bien definida. Análogamente se prueba que $\|\cdot\|_b$ está bien definida.

Ahora probemos que $\|\cdot\|_a$ es una norma:

(i) $\|u\|_a^2 = \int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2\,dx \ge 0$ ya que $a(x) > 0$ y $|\nabla u|^2 \ge 0$.

(ii) $\|u\|_a^2 = 0$ implica $u = 0$ en c. t. p. de Ω.

En efecto, para $p = 2$ la desigualdad de Friedrichs con peso, es dada por:

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2\,dx \le c_4 \int_\Omega a(x)\,|\nabla u(x)|^2\,dx = c_4\,\|u\|_a^2\,,$$

ver la ecuación (1.25) de la Observación 7 en el Capítulo 1. Si $\|u\|_a = 0$, la desigualdad anterior implica $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$, luego $u = 0$ en c.t.p. de Ω.

(iii) $\|\alpha u\|_a^2 = \int_\Omega a(x)\,|\alpha\nabla u|^2 = \alpha^2 \int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2\,dx = \alpha^2\,\|u\|_a^2.$
(iv) $\|u+v\|_a = \left[\int_\Omega a(x)\,|\nabla(u+v)|^2\,dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_\Omega a\,|\nabla u|^2 + \int_\Omega a\,|\nabla v|^2 + 2\int_\Omega a\,|\nabla u|\,|\nabla v|\right]^{1/2}.$
Luego por la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega a\,|\nabla u|\,|\nabla v|\,dx = \int_\Omega a^{1/2}\,|\nabla u|\,a^{1/2}\,|\nabla v|\,dx \leq \|u\|_a\,\|v\|_a\,,$$

de lo anterior

$$\|u+v\|_a \leq \left[\|u\|_a^2 + \|v\|_a^2 + 2\,\|u\|_a\,\|v\|_a\right]^{1/2} = \|u\|_a + \|v\|_a\,.$$

Así $\|\cdot\|_a$ es una norma. De la misma forma se prueba que $\|\cdot\|_b$ es una norma.
Veamos ahora para $u \in W_o^{1,2}(\Omega,a)$, esto es, si $u \in \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_a}$ entonces $\exists\ (\varphi_n) \subset C_o^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \longrightarrow u$ luego definimos

$$\|u\|_a = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|\varphi_n\|_a\,.$$

La buena definición se verifica debido a la equivalencia de las normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega,a)}$ en

$$C_o^\infty(\Omega) \subset W_o^{1,2}(\Omega,a) \subset W^{1,2}(\Omega,a),$$

esto es,

$$c_1\,\|\varphi_n\|_{W^{1,2}(\Omega,a)} \leq \|\varphi_n\|_a \leq c_2\,\|\varphi_n\|_{W^{1,2}(\Omega,a)}\,.$$

De esto y los resultados anteriores, se verifica las condiciones de la norma para $\|\cdot\|_a$.
Se demuestra de manera similar que estas normas $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ provienen de un producto interno $(\cdot,\cdot)_a$, $(\cdot,\cdot)_b$ respectivamente, definidos por

$$(f_1,g_1)_a = \int_\Omega a(x)\nabla f_1 \bullet \nabla g_1 dx,\ \forall f_1,g_1 \in C_o^\infty \text{ y}$$

$$(f_2,g_2)_b = \int_\Omega b(x)\nabla f_2 \bullet \nabla g_2 dx,\ \forall f_2,g_2 \in C_o^\infty.$$

Además $W_o^{1,2}(\Omega,a)$ y $W_o^{1,2}(\Omega,b)$ son espacios Hilbert.En efecto, para probar que $W_o^{1,2}(\Omega,a)$ es un espacio de Hilbert, recordemos que por definición

$$W_o^{1,2}(\Omega,a) := \overline{C_o^\infty(\Omega)} \subset W^{1,2}(\Omega,a).$$

Ahora como $W^{1,2}(\Omega;a)$ es un espacio completo y $W_o^{1,2}(\Omega;a)$ es un subespacio cerrado, entonces $W_o^{1,2}(\Omega;a)$ es completo. También se tiene que esta norma $\|\cdot\|_a$ proviene de un producto interno en este espacio, por tanto $W_o^{1,2}(\Omega;a)$ es un espacio de Hilbert. Procediendo en forma análoga obtenemos el espacio de Hilbert $W_o^{1,2}(\Omega;b)$.

$\square$

Ahora definimos:

$$W := W_o^{1,2}(\Omega, a) \times W_o^{1,2}(\Omega, b).$$

Es claro que W es un espacio de Hilbert bajo la norma :

$$\|(u,v)\|_W = \|u\|_a + \|v\|_b$$

y con producto escalar:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega (a(x)\nabla f_1 \nabla g_1 + b(x)\nabla f_2 \nabla g_2)\ \forall f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2) \in W$$

esto es, debido a que el producto cartesiano de espacios de Hilbert es un espacio de Hilbert. Entonces W es un espacio uniformemente convexo ya que en W se cumple la identidad del paralelogramo por ser un espacio de Hilbert (ver Proposición 6).

$\square$

Proposición 8 *Tenemos la inmersión continua*

$$W \hookrightarrow (W^{1,2_s}(\Omega))^2 \ \text{para } 2_s = \frac{2s}{s+1}$$

Demostración.-

Probaremos que:

$$W_o^{1,2}(\Omega, a) \hookrightarrow W^{1,2_s}(\Omega),$$

es decir

$$\|u\|_{W^{1,2_s}(\Omega)} \leq k \|u\|_a \ \text{ para todo } u \in W_o^{1,2}(\Omega, a).$$

Partimos de la igualdad

$$\|u\|_{W^{1,2_s}(\Omega)}^{2_s} = \|u\|_{L^{2_s}}^{2_s} + \|\nabla u\|_{L^{2_s}}^{2_s}$$

y por la desigualdad de Poincaré

$$\|u\|_{L^{2_s}} \leq c \|\nabla u\|_{L^{2_s}}\ \forall u \in W_o^{1,2_s}.$$

Luego

$$\|u\|_{W^{1,2_s}(\Omega)}^{2_s} \leq (k'+1) \|\nabla u\|_{L^{2_s}}^{2_s},$$

equivalentemente

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{1,2_s}(\Omega)} &\leq (k'+1)^{1/2_s} \|\nabla u\|_{L^{2_s}} \\
&= (k'+1)^{1/2_s} \left[\int_\Omega |\nabla u|^{2s/(s+1)}\right]^{(s+1)/2s} \\
&= (k'+1)^{1/2_s} \left[\int_\Omega a^{-s/(s+1)} a^{s/(s+1)} |\nabla u|^{2s/(s+1)}\right]^{(s+1)/2s}.
\end{aligned}$$

De la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{1,2_s}} &\leq (k'+1)^{1/2_s}\left[\left\|a^{-s/(s+1)}\right\|_{L^{s+1}}\left\|a^{s/(s+1)}\,|\nabla u|^{2s/(s+1)}\right\|_{L^{(s+1)/s}}\right]^{(s+1)/2s}\\ &= (k'+1)^{1/2_s}\left[\int_\Omega a^{-s}\right]^{1/2s}\left[\int_\Omega a\,|\nabla u|^2\right]^{1/2}\\ &= k\,\|u\|_a\,,\end{aligned}$$

y así queda probado el resultado.

Análogamente se prueba que $W_o^{1,2}(\Omega,b)\hookrightarrow W^{1,2_s}(\Omega)$ es decir

$$\|v\|_{W^{1,2_s}(\Omega)}\leq k\,\|v\|_b \text{ para todo } v\in W_o^{1,2}(\Omega,b).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|(u,v)\|_{W^{1,2_s}\times W^{1,2_s}} &= \|u\|_{W^{1,2_s}}+\|v\|_{W^{1,2_s}}\\ &\leq c(\|u\|_a+\|v\|_b)\\ &= c\,\|(u,v)\|_W\,,\end{aligned}$$

es decir

$$\|(u,v)\|_{W^{1,2_s}\times W^{1,2_s}}\leq c\,\|(u,v)\|_W \text{ para todo } (u,v)\in W$$

□

Proposición 9 *Se tiene la inmersión de Sobolev*

$$W\hookrightarrow (L^{2_s^*}(\Omega))^2.$$

Demostración.-

La prueba sigue del diagrama

$$W\hookrightarrow \left(W^{1,2_s}(\Omega)\right)^2\hookrightarrow\left(L^{2_s^*}(\Omega)\right)^2$$

y de la inmersión continua,(ver [23] Corolario 4.8.2 página 104)

$$p<N,\ W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ donde } \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{N}$$

□

Proposición 10 *Tenemos la inmersión compacta*

$$W\hookrightarrow L^r(\Omega)\times L^t(\Omega) \textit{ donde } 1\leq r,t<2_s^*.$$

Demostración.-

La prueba sigue del Diagrama

$$W \hookrightarrow \left(W^{1,2_s}(\Omega)\right)^2 \hookrightarrow \left(L^r(\Omega) \times L^t(\Omega)\right) \text{ para } 1 \leq r, t < 2_s^*$$

y de la inmersión compacta, (ver [23] Teorema 4.8.2 página 104)

$$p < N,\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall 1 \leq q < p^* \text{ donde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

□

Retornando a las condiciones del problema. Suponga que $F(x, t, s)$ es un C^1-funcional sobre $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ satisface :

(F1) Existen constantes positivas c_1, c_2 tal que :

$$|F_t(x, t, s)| \leq c_1 |t|^\gamma |s|^{\delta+1}$$

$$|F_s(x, t, s)| \leq c_2 |t|^{\gamma+1} |s|^\delta$$

para todo $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, casi todo punto $x \in \Omega$ y algunos $\gamma, \delta > 1$ tales que $\frac{\gamma+1}{p} + \frac{\delta+1}{q} = 1$ y $\gamma + 1 < p < 2_s^*$,$\delta + 1 < q < 2_s^*$.

(F2) Existen constantes positivas c y $2 < \alpha, \beta < 2_s^*$ tal que

$$|F(x, t, s)| \leq c(1 + |t|^\alpha + |s|^\beta)$$

para todo $x \in \Omega$ y $|t|, |s| \in [0, \infty\rangle$

(F3) Existen $R > 0$, θ y θ' con $\frac{1}{2_s^*} < \theta,\ \theta' < \frac{1}{2}$ tal que

$$0 < F(x, t, s) \leq \theta t F_t(x, t, s) + \theta' s F_s(x, t, s)$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $|t|, |s| \geq R$

(F4) Existe $\overline{\alpha} > 2$, $\overline{\beta} > 2$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$|F(x, t, s)| \leq c(|t|^{\overline{\alpha}} + |s|^{\overline{\beta}})$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $|t|, |s| \leq \epsilon$

Ahora enunciaremos el concepto de solución débil para el sistema (2.1).

Del sistema elíptico semilineal (2.1), consideremos

$$-div(a\nabla u) = \lambda F_u(x, u, v) \text{ en } \Omega \text{ con } u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

De las propiedades de la divergencia se consigue

$$-div(a(x)\nabla u) = -\nabla \bullet (a\nabla u) \tag{2.4}$$

y multiplicamos por φ a la igualdad (2.4). Luego integrando sobre Ω tenemos

$$-\int_\Omega div(a(x)\nabla u)\varphi dx = -\int_\Omega [\nabla \bullet (a\nabla u)]\varphi dx.$$

Aplicando el Teorema de Green al término de la derecha, en la igualdad anterior

$$-\int_\Omega [\nabla \bullet (a\nabla u)]\varphi dx = \int_\Omega [a(x)(\nabla u)]\nabla\varphi dx.$$

Entonces

$$-\int_\Omega div(a\nabla u)\varphi dx = \int_\Omega a\nabla u\nabla\varphi dx.$$

De manera similar obtenemos que

$$-\int_\Omega div(b\nabla v)\psi dx = \int_\Omega b\nabla v\nabla\psi dx.$$

Luego

$$\int_\Omega a\nabla u\nabla\varphi dx = \lambda\int_\Omega F_u(x,u,v)\varphi dx \text{ y}$$
$$\int_\Omega b\nabla v\nabla\psi dx = \lambda\int_\Omega F_v(x,u,v)\psi dx,$$

entonces sumando los resultados anteriores

$$\int_\Omega (a\nabla u\nabla\varphi + b\nabla v\nabla\psi)dx = \lambda\int_\Omega [F_u(x,u,v)\varphi + F_v(x,u,v)\psi]dx \ \forall(\varphi,\psi)\in W \tag{2.5}$$

Definición 33 *Decimos que $(u,v)\in W$ es una solución débil del sistema (2.1) si y solo si satisface (2.5), esto es:*

$$\int_\Omega (a(x)\nabla u\nabla\varphi + b(x)\nabla v\nabla\psi)dx = \lambda\int_\Omega [F_u(x,u,v)\varphi + F_v(x,u,v)\psi]dx, \forall(\varphi,\psi)\in W.$$

Así, hallar soluciones débiles del problema (2.1) consiste en hallar las soluciones de la ecuación integral (2.5).

Definimos el funcional correspondiente asociado al problema (2.1) como:

$$\Im_\lambda(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (a(x)\left|\nabla u\right|^2 + b(x)\left|\nabla v\right|^2)dx - \lambda\int_\Omega F(x,u,v). \tag{2.6}$$

A continuación probaremos que este funcional $\Im_\lambda(u,v)$ es de clase C^1 en W y mas adelante probaremos que las soluciones débiles de (2.1) son exactamente los puntos críticos de $\Im_\lambda(u,v)$.

Proposición 11 *El funcional $\Im_\lambda$ dado por (2.6) está bien definida y es de clase C^1 en W.*

Demostración.-

Primero probaremos que el funcional está bien definido. Se verifica que los dos primeros términos del Funcional son normas bien definidas

$$\Im_\lambda(u,v) = \frac{1}{2}[\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2] - \lambda \int_\Omega F(x,u,v). \tag{2.7}$$

Por los cálculos realizados en la prueba del Lema 2, tenemos

$$\int_\Omega F(x,u,v)dx \le \frac{\gamma+1}{p} c \int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2\,dx + \frac{\delta+1}{q} c \int_\Omega b(x)\,|\nabla v|^2\,dx < \infty.$$

Así, $\Im_\lambda$ está bien definida. Ahora probaremos que el funcional $\Im_\lambda$ es de clase C^1 y lo haremos en dos partes:

Parte (I) : El funcional $\Im_\lambda$ es Fréchet diferenciable.

Parte (II): La Derivada de Fréchet de $\Im_\lambda$ es Continua.

Iniciamos la prueba de la Parte I: $\Im_\lambda$ es Fréchet diferenciable con derivada

$$\left\langle \Im'_\lambda(u,v),(\varphi,\psi)\right\rangle = \int_\Omega (a(x)\nabla u\nabla\varphi + b(x)\nabla v\nabla\psi)dx - \lambda\int_\Omega [F_u(x,u,v)\varphi - F_v(x,u,v)\psi]dx. \tag{2.8}$$

Para probar esto procederemos probando que $J_u(u,v)$ y $J_v(u,v)$ están bien definidas, existen y son continuas para luego aplicar el Teorema 24 y concluir que $\Im_\lambda(u,v)$ es F-diferenciable. Para $(\varphi,\psi)\in W$ se definen:

$$\langle J_u(u,v);\varphi\rangle = \int_\Omega a(x)\nabla u\nabla\varphi dx - \lambda\int_\Omega F_u(x,u,v)\varphi dx$$

$$\langle J_v(u,v);\psi\rangle = \int_\Omega b(x)\nabla v\nabla\psi dx - \lambda\int_\Omega F_v(x,u,v)\psi dx$$

Afirmación (I-a): $J_u(u,v)$ y $J_v(u,v)$ están bien definidas.

De la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x)\,|\nabla u|\,|\nabla\varphi|\,dx &= \int_\Omega a^{1/2}(x)\,|\nabla u|\,a^{1/2}\,|\nabla\varphi|\,dx\\ &\le \int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2\,dx\int_\Omega a\,|\nabla\varphi|^2\,dx,\end{aligned}$$

donde la última expresión de la desigualdad es finita, debido a que la norma $\|\cdot\|_a$ está bien definida. Ahora como $F(x,u,v)$ verifica la condición $(F1)$:

$$|F_u(x,u,v)\varphi| \le c_1|u|^\gamma|v|^{\delta+1}|\varphi|.$$

Luego la desigualdad de Hölder Generalizada y la inmersión de Sobolev $W_o^{1,2}(\Omega,a)\hookrightarrow L^r(\Omega)$, para $2<r<2_s^*$ implican que

$$\int_\Omega |F_u(x,u,v)\varphi|\,dx \le c_1\int_\Omega |u|^\gamma|v|^{\delta+1}\,|\varphi|\,dx \le \||u|^\gamma\|_{L^{\frac{p}{\gamma}}}\left\||v|^{\delta+1}\right\|_{L^{\frac{q}{\delta+1}}}\|\varphi\|_{L^p}\ \text{ es finito,}$$

donde $|u|^{\gamma} \in L^{\frac{p}{\gamma}}$; $|v|^{\delta+1} \in L^{\frac{q}{\delta+1}}$ y $|\varphi| \in L^{p}$. Por tanto, de estos resultados conseguimos

$$|\langle J_u(u,v);\varphi\rangle| \leq \int_{\Omega} a(x)\,|\nabla u|\,|\nabla\varphi|\,dx + \lambda\int_{\Omega} F_u(x,u,v)\varphi dx < +\infty$$

es decir $|\langle J_u(u,v);\varphi\rangle|$ está bien definido.

Procediendo en forma análoga, se prueba que $|\langle J_v(u,v);\psi\rangle|$ está bien definida.

Afirmación (I-b): $J_u(u,v)$, $J_v(u,v)$ existen en $W_o^{1,2}(\Omega,a)$, $W_o^{1,2}(\Omega,b)$ respectivamente y son dadas por

$$\langle J_u(u,v);w\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{\Im_{\lambda}(u+tw,v)-\Im_{\lambda}(u,v)}{t} \text{ para todo } w\in W_o^{1,2}(\Omega,a)$$

$$\langle J_v(u,v);w\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{\Im_{\lambda}(u,v+tw)-\Im_{\lambda}(u,v)}{t} \text{ para todo } w\in W_o^{1,2}(\Omega,b),$$

esto es, la definición de derivada parcial de Fréchet (o Gateaux).

$$\begin{aligned}
&\langle J_u(u,v);w\rangle \\
&\quad = \lim_{t\to 0}\frac{\Im_{\lambda}(u+tw,v)-\Im_{\lambda}(u,v)}{t} \\
&\quad = \lim_{t\to 0}\frac{1/2\int_{\Omega} a\,|\nabla(u+tw)|^2 - 1/2\int_{\Omega} a\,|\nabla u|^2\,dx - \lambda\int_{\Omega}F(x,u+tw,v)dx + \lambda\int_{\Omega}F(x,u,v)dx}{t} \\
&\quad = \lim_{t\to 0}\frac{1/2\int_{\Omega} a[|\nabla(u+tw)|^2-|\nabla u|^2]dx}{t} - \lambda\lim_{t\to 0}\frac{\int_{\Omega}[F(x,u+tw,v)-F(x,u,v)]dx}{t}.
\end{aligned}$$

Así, basta verificar la igualdad

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} 1/2\int_{\Omega}\frac{a[|\nabla(u+tw)|^2-|\nabla u|^2]dx}{t} &- \lambda\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}\frac{[F(x,u+tw,v)-F(x,u,v)]dx}{t} \\
&= \int_{\Omega} a(x)\nabla u\nabla w dx - \lambda\int_{\Omega}F_u(x,u,v)dx.
\end{aligned}$$

Este resultado se conseguirá mediante las afirmaciones $(J1)$ y $(J2)$ enunciadas a continuación:

Afirmación (J1): $I(u) = 1/2\int_{\Omega} a(x)\,|\nabla u|^2\,dx$ es Gateaux diferenciable con derivada

$$\left\langle I'(u),w\right\rangle = \int_{\Omega} a(x)\nabla u\nabla w dx$$

Primero veamos que para $u=0$ ($u = \textit{constante}$) en $W_o^{1,2}(\Omega,a)$ y todo $w\in W_o^{1,2}(\Omega,a)$,

$$\begin{aligned}
\left\langle I'(0),w\right\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{I(0+tw)-I(0)}{t} \\
&= 1/2\lim_{t\to 0}\frac{\int_{\Omega} a(x)\,|\nabla(tw)|^2}{t}dx \\
&= 1/2\lim_{t\to 0}\frac{t^2\int_{\Omega} a(x)\,|\nabla(w)|^2}{t}dx \\
&= 1/2\lim_{t\to 0} t\int_{\Omega} a\,|\nabla w|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto I es G-diferenciable en el origen.

Ahora sea $u \neq 0$ no constante en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$ definimos la composición $I = Q \circ P$ donde

$$\begin{array}{rccc} P: & W_o^{1,2}(\Omega, a) & \longmapsto & L^2(\Omega) \\ & w & \longmapsto & a^{1/2}\,|\nabla w| \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{rccc} Q: & L^2(\Omega) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & 1/2\int_\Omega |v|^2\,dx \end{array}$$

De esta forma para probar que $I = Q \circ P$ es Gateaux diferenciable bastará probar que Q es F-diferenciable y que P es G-diferenciable en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$ para utilizar el teorema 25.

Afirmación: Q es F-diferenciable; para esto se probará que Q es G-diferenciable y Q' es continua para aplicar el Teorema 21.

Q **es G-diferenciable,** en efecto Sea $u, v \in L^2(\Omega)$ y $t \in [0,1]$

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1/2\,|u+tv|^2 \end{array}$$

donde h es continua en $[0,t]$ con $t \in \langle 0,1\rangle$, además diferenciable.

Por el Teorema del valor medio, existe $\delta \in \langle 0,1\rangle$ con $t\delta \in \langle 0,t\rangle$ tal que

$$h(t) - h(0) = h'(t\delta)(t-0).$$

Con esto conseguimos

$$1/2\,|u+tv|^2 - 1/2\,|u|^2 = [|u+t\delta v| \cdot sign(u+t\delta v) \cdot v](t-0) = [(u+t\delta v)v]t \tag{2.9}$$

entonces

$$\left|\frac{h(t)-h(0)}{t}\right| = |u+t\delta v|\,|v| \leq (|u|+|v|)\,|v|\,. \tag{2.10}$$

Luego utilizando la desigualdad de Hölder obtenemos que $(|u|+|v|)|v| \in L^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \left|\frac{h(t)-h(0)}{t}\right| dx \leq \int_\Omega (|u|+|v|)\,|v|\,dx \leq \||u|+|v|\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2}\,. \tag{2.11}$$

Ahora, de (2.10) , (2.11) y el Teorema 6, (Teorema de convergencia dominada)

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{h(t)-h(0)}{t} dx = \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t} dx$$

Luego Q es G-diferenciable, puesto que

$$\begin{aligned} \langle Q'(u); v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{Q(u+tv)-Q(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1/2\int_\Omega |u+tv|^2 dx - 1/2\int_\Omega |u|^2 dx}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\int_\Omega 1/2(|u+tv|^2 - |u|^2)] \end{aligned}$$

por (2.9) se obtiene

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega t\,[|u+t\delta v| sign(u+t\delta v)v]\,dx \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega [|u+t\delta v| sign(u+t\delta v)v]\,dx
\end{aligned}
$$

nuevamente por el Teorema 6

$$
= \int_\Omega |u| sign(u) v dx = \int_\Omega uv dx.
$$

Así existe Q' según Gateaux, mas aún

$$
\begin{array}{rccl}
Q': & L^2(\Omega) & \longmapsto & \left[L^2(\Omega)\right]' = L^2(\Omega) \\
 & u & \mapsto & Q'(u)
\end{array}
$$

tal que

$$
\langle Q'(u); v\rangle = \int_\Omega uv dx.
$$

Q' **es continua en** $L^2(\Omega)$, en efecto, considere $\alpha(t) = t$ continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Así para $u \in L^2$ se tiene $\alpha(u) = u \in L^2(\Omega)$ entonces el operador

$$
\begin{array}{rccl}
T: & L^2 & \longmapsto & L^2 \\
 & u & \to & \alpha(u) = u
\end{array}
$$

es continuo en $L^2(\Omega)$. En efecto, sean $(u_k) \subset L^2$ y $u \in L^2$ tal que $u_k \to u$ en $L^2(\Omega)$, luego por Teorema 7, existe una subsucesión $(u_{kn}) \subset L^2(\Omega)$ y $H \in L^2(\Omega)$ tal que $u_{kn} \to u$ en c. t. p. de Ω y $|u_{kn}(x)| \leq H(x)$ en c. t. p. de Ω y todo $kn \geq 1$ entonces $k \to \infty$ implica $|u(x)| \leq H(x)$ en casi todo punto , luego de la continuidad de α tenemos $\alpha(u_{kn}(x)) \to \alpha(u(x))$ en casi todo punto de Ω. Además

$$
|\alpha(u_{kn}(x)) - \alpha(u(x))| \leq |\alpha(u_{kn}(x))| - |\alpha(u(x))| \leq |H(x)| + |H(x)| = 2|H(x)|
$$

entonces

$$
|\alpha(u_{kn}(x)) - \alpha(u(x))|^2 \leq 4|H(x)|^2
$$

y por el teorema 6 de la convergencia dominada con (u_{kn}) subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$

$$
\alpha(u_{kn}(x)) = T(u_{kn}) \to \alpha(u(x)) = T(u) \text{ en } L^2(\Omega). \tag{2.12}
$$

Luego del inicio $(u_k) \subset L^2(\Omega)$ con $u \in L^2(\Omega)$ es tal que $u_k \to u$ en L^2.
Suponga que T no es continua en u, luego existe $\epsilon > 0$ tal que $|T(u_k) - T(u)|_{L^2} \geq \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$, esto contradice (2.12) y por tanto la existencia de (u_{kn}). Así T es continuo.

Para probar que Q' es continuo, tomemos $u_k \to u$ en L^2 y $v \in L^2$ luego

$$\begin{aligned}
|\left\langle Q'(u_k); v\right\rangle - \left\langle Q'(u); v\right\rangle| &= |\int_\Omega u_k v dx - \int_\Omega uv dx| \\
&= |\int_\Omega (u_k - u) v dx| \\
&\leq \int_\Omega |u_k - u||v| dx \\
&\leq \|u_k - u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
&= \|T(u_k) - T(u)\|_{L^2} \|v\|_{L^2}
\end{aligned}$$

y como T es continua $u_k \to u$ en $L^2(\Omega)$ implica $\|T(u_k) - T(u)\|_{L^2} \to 0$, esto es,

$$\left\langle Q'(u_k); v\right\rangle - \left\langle Q'(u); v\right\rangle | \to 0.$$

Así Q' es continua en L^2. Ahora como Q es G-diferenciable y Q'continua entonces por el Teorema 21, obtenemos que Q es Fréchet diferenciable.

$P : W_o^{1,2}(\Omega, a) \longmapsto L^2(\Omega)$ **es G-diferenciable,** en efecto, suponga que u es una función no constante en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$ por tanto no nula de $W_o^{1,2}(\Omega, a)$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{P(u+hv) - P(u)}{h} &= a^{1/2}[\frac{|\nabla u + h\nabla v| - |\nabla u|}{h}] \\
&= a^{1/2}\frac{|\nabla u + h\nabla v|^2 - |\nabla u|^2}{h[|\nabla u + h\nabla v| + |\nabla u|]} \\
&= a^{1/2}[\frac{2\nabla u \nabla v + h|\nabla v|^2}{|\nabla u + h\nabla v| + |\nabla u|}]
\end{aligned}$$

de donde puntualmente

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(u+hv) - P(u)}{h} = a^{1/2}\frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}. \tag{2.13}$$

De otro lado de la desigualdad triangular

$$|\frac{|\nabla u + h\nabla v| - |\nabla u|}{h}| \leq \frac{|\nabla u + h\nabla v - \nabla u|}{|h|} = |\nabla v| \tag{2.14}$$

y por la desigualdad de Cauchy Schwartz

$$|\frac{|\nabla u + h\nabla v| - |\nabla u|}{h} - \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}| \leq |\frac{|\nabla u + h\nabla v| - |\nabla u|}{h}| + |\frac{\nabla u \nabla v}{\nabla u}| \leq 2|\nabla v|.$$

Luego, elevando al cuadrado

$$\left\{a^{1/2}|\frac{|\nabla u + h\nabla v| - |\nabla u|}{h}| - a^{1/2}\frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}\right\}^2 \leq 4a|\nabla v|^2. \tag{2.15}$$

Como $a|\nabla v|^2 \in L^1$ pues $v \in W_o^{1,2}(\Omega, a)$, luego de las ecuaciones (2.13) y (2.15), aplicamos el Teorema de convergencia dominada

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\int_\Omega \left| \frac{P(u+hv)-P(u)}{h} - a^{1/2}\frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}\right|^2 dx \\
=&\int_\Omega \lim_{h\to 0}\left| a^{1/2}\frac{|\nabla (u+h)\nabla v| - |\nabla u|}{h}| - a^{1/2}\frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}\right|^2 dx \\
=&0.
\end{aligned}
$$

De esta forma

$$
\frac{P(u+hv)-P(u)}{h} \longrightarrow a^{1/2}\frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|} \text{ en } L^2 \text{ cuando } h \to 0
$$

y así, $\langle P'(u), v\rangle = a^{1/2}\frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}$. Es decir, P es G-diferenciable para todo $v \in W_o^{1,2}(\Omega, a)$. Ahora como Q es F-diferenciable y P es G-diferenciable entonces $I = Q \circ P$ es G-diferenciable para todo $u \in W_o^{1,2}(\Omega, a)$, mas aún por la regla de la cadena

$$
\begin{aligned}
\big\langle I'(u); w\big\rangle &= \big\langle Q'(P(u)); P'(u)w\big\rangle \\
&= \left\langle Q'(P(u)); a^{1/2}\frac{\nabla u \nabla w}{|\nabla u|}\right\rangle \\
&= \int_\Omega a^{1/2}|\nabla u| \cdot a^{1/2}\frac{\nabla u \nabla w}{|\nabla u|} \\
&= \int_\Omega a \nabla u \nabla w.
\end{aligned}
$$

De este modo $I(u) = Q \circ P(u) = 1/2\int_\Omega a|\nabla u|^2$ es G-diferenciable con derivada

$$
\big\langle I'(u); w\big\rangle = \int_\Omega a\nabla u \nabla w \text{ para todo } w, v \in W_o^{1,2}(\Omega, a),
$$

así queda probado la afirmación(J1).

Afirmación (J2): $\lambda \lim_{t\to 0}\frac{F(x,u+tw,v)-F(x,u,v)}{t} = \lambda\int_\Omega F_u(x,u,v)w dx$.

Probemos que

$$
\lim_{t\to 0}\frac{F(x,u+tw,v)-F(x,u,v)}{t}dx = \int_\Omega F_u(x,u,v)w.
$$

Sabemos que F_u es continua y

$$
F_u(x,u,v) = \lim_{t\to 0}\frac{F(x,u+t,v)-F(x,u,v)}{t} \text{ para } (u,v)\in \mathbb{R}^2.
$$

Ahora, sean u, v, w en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$ en particular $(x, u(x), v(x)) \in \mathbb{R}^{N+2}$ y como $t \to 0$ en particular $tw \to 0$, reemplazando tenemos

$$
F_u(x,u(x),v(x)) = \lim_{tw\to 0}\frac{F(x,u(x)+tw(x),v(x)) - F(x,u(x),v(x))}{tw} \text{ en c.t.p. } x \in \Omega
$$

luego

$$
\lim_{t\to 0}\frac{F(x,u(x)+tw(x),v(x)) - F(x,u(x),v(x))}{t} = wF_u(x,u(x),v(x)).
$$

Definimos $L(t) = F(x, u(x) + tw(x), v(x)) - F(x, u(x), v(x))$ para todo $t \in [0, \delta]$, tenemos L continua en $[0, \delta]$ y derivable en $\langle 0, \delta\rangle$ por hipótesis.

Luego aplicando el Teorema del valor medio para derivadas, existe $\xi_t \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(t) - L(0) = L'(\xi_t)(t - 0) \text{ para } 0 < |\xi_t| \leq |t|, \tag{2.16}$$

donde

$$L'(t) = F_u(x, u(x) + tw(x), v(x)) \cdot w(x)$$

luego por la condición de diferenciabilidad de F y de (2.16) obtenemos

$$\left|\frac{F(x, u(x) + tw(x), v(x)) - F(x, u(x), v(x))}{t}\right| = |F_u(x, u(x) + \xi_t w(x), v(x))||w(x)|$$

de donde por los cálculos realizados en la prueba del Lema 1 obtenemos

$$\left|\frac{F(x, u(x) + tw(x), v(x)) - F(x, u(x), v(x))}{t}\right| \leq c_1 |u(x) + \xi_t w(x)|^{\gamma} |v(x)|^{\delta+1} |w(x)|$$

es integrable. Ahora podemos aplicar el Teorema de convergencia Dominada :

$$\int_\Omega F_u(x, u(x), v(x))w(x)dx = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(x, u(x) + tw(x), v(x)) - F(x, u(x), v(x))}{t} dx.$$

Así, de las afirmaciones (J1) y (J2) tenemos

$$\begin{aligned}\langle J_u(u, v); w\rangle &= \lim_{t\longrightarrow 0}[1/2 \int_\Omega \frac{a|\nabla(u + tw)|^2 - a|\nabla u|^2}{t} dx - \lambda \int_\Omega \frac{F(x, u + tw, v) - F(x, u, v)}{t}] \\ &= \int_\Omega a(x)\nabla u \nabla w dx - \lambda \int_\Omega F_u(x, u, v)w dx \text{ para todo } w \in W_o^{1,2}(\Omega, a).\end{aligned}$$

Afirmación (I-c): El funcional $J_u = G + \lambda A$ es continuo.

Se define

$$\begin{array}{rccc} G: & W_o^{1,2}(\Omega, a) & \longmapsto & \left(W_o^{1,2}(\Omega, a)\right)' \\ & u & \longmapsto & G(u) \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rccc} G(u): & W_o^{1,2}(\Omega, a) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \langle G(u); \varphi\rangle \end{array}$$

$$\text{donde } \langle G(u); \varphi\rangle = \int_\Omega a\nabla u \nabla\varphi dx \text{ para todo } u, \varphi \in W_o^{1,2}(\Omega, a).$$

De la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega a^{1/2}\nabla u a^{1/2}\nabla\varphi \leq \int_\Omega a|\nabla u|^2 \int_\Omega a|\nabla\varphi|^2 < \infty,$$

esto es, G está bien definida.

Sea (u_k) en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$ tal que $u_k \to u$ en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$, luego por la definición de la norma del funcional

$$\begin{aligned}\|G(u_k) - G(u)\|_{W_o^{1,2}(\Omega,a)'} &= \sup_{|\varphi|=1, \varphi\in W_o^{1,2}(\Omega,a)} |\langle G(u_k); \varphi\rangle - \langle G(u); \varphi\rangle| \\ &= \sup_{|\varphi|=1} \left|\int_\Omega a\nabla u_k \nabla\varphi - a\nabla u\nabla\varphi dx\right| \\ &= \sup_{|\varphi|=1} \left|\int_\Omega a[\nabla u_k - \nabla\varphi]\nabla\varphi\right|\end{aligned}$$

y de la desigualdad de Hölder

$$\leq \sup_{|\varphi|=1} [\int_\Omega a|\nabla u_k - \nabla u|^2 \int_\Omega a|\nabla \varphi|^2]^{1/2}.$$

Esto es

$$\|G(u_k) - G(u)\|_{W_o^{1,2}(\Omega,a)'} \leq \sup_{|\varphi|=1} (\|u_k - u\|_a \|\varphi\|_a).$$

Ahora si $u_k \to u$ en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$ entonces $\|u_k - u\|_a \to 0$ y por tanto

$$\|G(u_k) - G(u)\|_{W_o^{1,2}(\Omega,a)'} \to 0.$$

Así G es continua en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$.

Ahora probemos la continuidad del funcional

$$\begin{array}{rcll} A: & W_o^{1,2}(\Omega,a) & \longmapsto & \left(W_o^{1,2}(\Omega,a)\right)' \\ & u & \longmapsto & A(u) \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{rcll} A(u): & W_o^{1,2}(\Omega,a) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \langle A(u);\varphi\rangle \end{array}$$

para ello fijamos $v \in W_o^{1,2}(\Omega, a)$ y definimos

$$\langle A(u);\varphi\rangle = \int_\Omega F_u(x,u,v)\varphi \text{ para todo } u, \varphi \in W_o^{1,2}(\Omega,a).$$

Sea la sucesión $(u_k)_k \subset W_o^{1,2}(\Omega, a)$ tal que $u_k \to u$ en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$. La inmersión $W_o^{1,2}(\Omega, a) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < 2_s^*$, nos permite asumir que existe una subsucesión (u_{kn}) y una función $h \in L^r(\Omega)$ tal que:

(i) $u_{kn} \longrightarrow u$ en $L^r(\Omega)$ cuando $kn \longrightarrow \infty$.

(ii) $u_{kn}(x) \longrightarrow u(x)$ casi siempre en Ω cuando $kn \longrightarrow \infty$.

(iii) $|u_{kn}(x)| \leq h(x)$ casi siempre en Ω y para todo $kn \in \mathbb{N}$.

De la definición del operador A y la desigualdad de Hölder, para $1 < r' = r/(r-1)$, obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle A(u_k) - A(u);\varphi\rangle| &= |\int_\Omega [F_u(x,u_k,v)\varphi - F_u(x,u,v)\varphi]dx| \\ &\leq \int_\Omega |F_u(x,u_k,v) - F_u(x,u,v)||\varphi|dx \\ &\leq (\int_\Omega |F_u(x,u_k,v) - F_u(x,u,v)|^{r'})^{1/r'}dx(\int_\Omega |\varphi|^r)^{1/r}dx. \end{aligned}$$

Aplicaremos la condición $(F1)$ y el Teorema de convergencia dominada para probar que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega |F_u(x,u_k,v) - F_u(x,u,v)|^{r'} = 0. \text{ (*)}$$

Como F es de clase C^1 entonces F_u es continua, por tanto

$$F_u(x,u_{kn}(x),v(x)) - F_u(x,u(x),v(x)) \to 0 \text{ en c.t.p. de } \Omega.$$

Luego de la condición $(F1)$, $|F_u(x,u_{kn},v)| \leq c_1|u_{kn}|^\gamma|v|^{\delta+1}$ y por la desigualdad de Hölder generalizada, conseguimos

$$\begin{aligned}|F_u(x,u_{kn},v)-F_u(x,u,v)|^{r'} &\leq (|u_{kn}|^\gamma|v|^{\delta+1}|c_1|+|u|^\gamma|v|^{\delta+1}|c_1|)^{r'}\\ &\leq c(|h|^{r'\gamma}|v|^{r'(\delta+1)}|c_1|^{r'}+|u|^{r'\gamma}|v|^{r'(\delta+1)}|c_1|^{r'})\in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Entonces por el Teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{kn\longrightarrow\infty}\int_\Omega(|F_u(x,u_{kn},v)-F_u(x,u,v)|)^{r'}dx=0.$$

En realidad hemos probado que, para cada sucesión convergente $u_k \longrightarrow u$, existe una subsucesión $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\int_\Omega(|F_u(x,u_{kn},v)-F_u(x,u,v)|)^{r'}dx \longrightarrow 0$.
Con este resultado probemos $(*)$ por el absurdo. Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset W_o^{1,2}(\Omega,a) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega)$ una sucesión convergente, entonces $u_k \longrightarrow u$ en $L^{r'}(\Omega)$ y suponga que para $\epsilon>0$,

$$\int_\Omega(|F_u(x,u_k,v)-F_u(x,u,v)|)^{r'}dx \geq \epsilon,$$

entonces de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no es posible extraer ninguna subsucesión $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}} \subset (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\int_\Omega(|F_u(x,u_k,v)-F_u(x,u,v)|)^{r'}dx \longrightarrow 0$, lo que contradice el resultado anterior.
De esta manera, si $k\to\infty$, entonces

$$|\langle A(u_k)-A(u);\varphi\rangle| \leq (\int_\Omega |F_u(x,u_k,v)-F_u(x,u,v)|^{r'})^{1/r'}dx(\int_\Omega|\varphi|^r)^{1/r}dx \longrightarrow 0.$$

Luego, si $k\to\infty$,

$$\|A(u_k)-A(u)\|_{W(\Omega,a)'}=\sup\{|\langle A(u_k)-A(u);\varphi\rangle| \ / \ \varphi\in W(\Omega,a)\ ,\ \|\varphi\|=1\}\to 0$$

y así A es continua en $W_o^{1,2}(\Omega,a)$. De estos resultados tenemos que J_u es continua para todo $\varphi\in W_o^{1,2}(\Omega,a)$ ya que G y A son continuas. De la misma forma se prueba que J_v es continua.
Luego de las afirmaciones (I-a), (I-b), (I-c) y del Teorema 24 tenemos que J_u y J_v existen y son continuas, implican que $\Im_\lambda(u,v)$ es F-diferenciable en $W_o^{1,2}(\Omega,a)\times W_o^{1,2}(\Omega,b)$.
Mejor aún para $(\varphi,\psi)\in W_o^{1,2}(\Omega,a)\times W_o^{1,2}(\Omega,b)$,

$$\left\langle \Im'_\lambda(u,v)(\varphi,\psi)\right\rangle=\langle J_u(u,v);\varphi\rangle+\langle J_v(u,v);\psi\rangle.$$

Parte II: Probemos ahora que $\Im'_\lambda(u,v)$ es continua en W y con esto concluimos que $\Im_\lambda(u,v)\in C^1(W)$. Sabemos que

$$\begin{array}{rccc} \Im'_\lambda: & W & \longmapsto & W' \\ & (u,v) & \longmapsto & \Im'_\lambda(u,v)\end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{rccc} \Im'_\lambda(u,v): & W & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & (\varphi,\psi) & \longmapsto & \langle\Im'_\lambda(u,v);(\varphi,\psi)\rangle\end{array}$$

donde $\langle \Im'_\lambda(u,v);(\varphi,\psi)\rangle = \langle J_u(u,v);\varphi\rangle + \langle J_v(u,v),\psi\rangle$ para todo $(\varphi,\psi)\in W$.

Sea $(u_k;v_k)\subset W$ tal que $(u_k;v_k)\to(u,v)$ en W y $(\varphi,\psi)\in W$ entonces

$$\begin{aligned}
&|\langle \Im'_\lambda(u_k,v_k);(\varphi,\psi)\rangle - \langle \Im'_\lambda(u,v);(\varphi,\psi)\rangle|\\
&= |\textstyle\int_\Omega [a(x)\nabla u_k\nabla\varphi + b(x)\nabla v_k\nabla\psi]dx - \lambda\int_\Omega [F_u(x,u_k,v_k)\varphi + F_v(x,u_k,v_k)\psi]dx \quad -\\
&\big(\textstyle\int_\Omega [a(x)\nabla u\nabla\varphi + b(x)\nabla v\nabla\psi]dx - \lambda\int_\Omega [F_u(x,u,v)\varphi + F_v(x,u,v)\psi]dx\big)\,|\\
&\le \textstyle\int_\Omega a(x)|\nabla u_k - \nabla u||\nabla\varphi| + \int_\Omega b(x)|\nabla v_k - \nabla v||\nabla\psi|dx \quad +\\
&\lambda\textstyle\int_\Omega |F_u(x,u_k,v_k) - F_u(x,u,v)||\varphi|dx + \lambda\int_\Omega |F_v(x,u_k,v_k) - F_v(x,u,v)||\psi|dx.
\end{aligned}$$

El primer término se identifica con

$$\langle G(u,v);(\varphi,\psi)\rangle = \langle G(u);\varphi\rangle = \int_\Omega a\nabla u\nabla\varphi dx$$

que es continua como se mostró en la afirmación(I-c), de la misma forma el segundo término

$$\langle g(u,v);(\varphi,\psi)\rangle = \langle g(v);\psi\rangle = \int_\Omega b\nabla v\nabla\psi dx$$

es continua.

El tercer término lo definimos como

$$\langle A(u,v);(\varphi,\psi)\rangle = \int_\Omega F_u(x,u,v)\varphi dx + \int_\Omega F_v(x,u,v)\psi dx \ \forall\ (\varphi,\psi)\in W_o^{1,2}(\Omega,a)\times W_o^{1,2}(\Omega,b),$$

el cual también es continua. En efecto, sea $(u_k,v_k)\to(u,v)$ en W entonces

$$\begin{aligned}
\langle A(u_k,v_k) - A(u,v);(\varphi,\psi)\rangle &= \int_\Omega (F_u(x,u_k,v_k) - F_u(x,u,v))\varphi dx + \int_\Omega (F_v(x,u_k,v_k) - F_v(x,u,v))\psi dx\\
&\le \int_\Omega |F_u(x,u_k,v_k) - F_u(x,u,v)||\varphi|dx + \int_\Omega |F_v(x,u_k,v_k) - F_v(x,u,v)||\psi|dx.
\end{aligned}$$

Por condición F es de clase C^1, luego $F_u(x,u,v) + F_v(x,u,v)$ es continua en c.t.p. de Ω entonces

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} |F_u(x,u_k,v_k) - F_u(x,u,v)| = 0 \text{ en c. t. p. de } \Omega,\\
&\lim_{k\to\infty} |F_v(x,u_k,v_k) - F_v(x,u,v)| = 0 \text{ en c. t. p. de } \Omega.
\end{aligned}$$

Además, la condición $(F1)$ y la desigualdad de Hölder generalizada, implican

$$|F_u(x,u_k,v_k) - F_u(x,u,v)|^{r'} \le |u_k|^{r'\gamma}|v_k|^{r'(\delta+1)}|c_1|^{r'} + |u|^{r'\gamma}|v|^{r'(\delta+1)} + |c_1|^{r'} \in L^1(\Omega),$$

$$|F_v(x,u_k,v_k) - F_v(x,u,v)|^{r'} \le |u_k|^{r'(\gamma+1)}|v_k|^{r'\delta}|c_1|^{r'} + |u|^{r'(\gamma+1)}|v|^{r'\delta} + |c_1|^{r'} \in L^1(\Omega).$$

Finalmente, por el Teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\int_\Omega |F_u(x,u_k,v_k) - F_u(x,u,v)|^{r'}dx = 0 \text{ en } L^1(\Omega)$$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\int_\Omega |F_v(x,u_k,v_k) - F_v(x,u,v)|^{r'}dx = 0 \text{ en } L^1(\Omega)$$

cuando $u_k \to u$ en $W_o^{1,2}(\Omega, a) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega)$ y $v_k \to v$ en $W_o^{1,2}(\Omega, b) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega)$.

De la inmersión $W_o^{1,2}(\Omega, a) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $1 < r < 2^*$, conseguimos $|\varphi|, |\psi| \in L^r(\Omega)$ y por la desigualdad de Hölder,

$$
\begin{aligned}
&|\langle A(u_k, v_k) - A(u, v); (\varphi, \psi)\rangle| \\
&\leq \int_\Omega |F_u(x, u_k, v_k) - F_u(x, u, v)||\varphi| dx + \int_\Omega |F_v(x, u_k, v_k) - F_v(x, u, v)||\psi| dx \\
&\leq \|F_u(x, u_k, v_k) - F_u(x, u, v)\|_{L^{r'}} \|\varphi\|_{L^r} + \|F_v(x, u_k, v_k) - F_v(x, u, v)\|_{L^{r'}(\Omega)} \|\psi\|_{L^r(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, si $k \to \infty$,

$$|\langle A(u_k, v_k) - A(u, v); (\varphi, \psi)\rangle|_{W'} \to 0.$$

Así, A es continua para todo $(u, v) \in W = W_o^{1,2}(\Omega, a) \times W_o^{1,2}(\Omega, b)$. De estos resultados $\Im'_\lambda(u, v)$ es continua en W y podemos concluir que el funcional $\Im_\lambda$ es de clase C^1 en W.

□

Capítulo 3

Teoremas de existencia de soluciones débiles para una clase de sistemas elípticos semilineales

En este capítulo estudiaremos la existencia de soluciones débiles para el sistema (2.1).

3.1. Teoremas de existencia de soluciones débiles para el sistema elíptico semilineal (2.1)

Teorema 33 *Suponga que la condición* (F_1) *es satisfecha. Entonces existe una constante* $\underline{\lambda} > 0$ *tal que para todo* $0 < \lambda < \underline{\lambda}$*, el sistema (2.1) tiene una solución débil.*

Teorema 34 *En adición suponga que las condiciones* $(F_1) - (F_4)$ *son satisfechas. Entonces el problema (2.1) tiene al menos una solución débil no trivial.*

3.2. Demostración de los Teoremas 33 y 34

Probaremos los teoremas de existencia 33 y 34, en el primero haremos uso del Principio del Mínimo y en el segundo el Teorema del paso de la montaña.

3.2.1. Prueba del Teorema 33

En esta subsección, aplicamos el Principio del Mínimo (Teorema 31) para la demostración de nuestro primer resultado de existencia de soluciones débiles, el cual se realizará mediante los siguientes lemas:

Lema 1 *El funcional $\Im_\lambda$ dado por (2.6) es débilmente semicontinuo inferiormente en W.*

Demostración.-

Probaremos que

$$\liminf_{m\longrightarrow\infty} \Im_\lambda(u_m; v_m) \geq \Im_\lambda(u,v)$$

para toda sucesión $\{(u_m, v_m)\} \subset W$ tal que $\{(u_m, v_m)\} \rightharpoonup (u,v)$.

Sea $\{(u_m, v_m)\}$ una sucesión que converge débilmente a (u,v) en W entonces la convergencia débil implica que $(\|(u_m, v_m)\|_W)_m$ está acotado.

Como las normas en un espacio de Banach son débilmente semicontinuas inferiormente; entonces para las normas en los espacios $W_o^{1,2}(\Omega, a)$ y $W_o^{1,2}(\Omega, b)$ se cumple:

$$\liminf_{m\longrightarrow\infty} \|u_m\|_a^2 \geq \|u\|_a^2$$

$$\liminf_{m\longrightarrow\infty} \|v_m\|_b^2 \geq \|v\|_b^2$$

de donde:

$$\liminf_{m\longrightarrow\infty} [\|u_m\|_a^2 + \|v_m\|_b^2] \geq [\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2]$$

esto es

$$\liminf_{m\longrightarrow\infty} \int_\Omega [a(x)\left|\nabla u_m\right|^2 + b(x)\left|\nabla v_m\right|^2]dx \geq \int_\Omega [a(x)\left|\nabla u\right|^2 + b(x)\left|\nabla v\right|^2]dx. \tag{3.1}$$

Ahora probemos que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \int_\Omega F(x, u_m, v_m)dx = \int_\Omega F(x,u,v)dx \tag{3.2}$$

por el Teorema del valor medio (con x fijo), para cada m existe

$(u + \theta_{1m}(u_m - u), v + \theta_{2m}(v_m - v))$ en el segmento $[(u,v); (u_m, v_m)]$ tal que

$$\left|\int_\Omega [F(x, u_m, v_m) - F(x,u,v)]dx\right| =$$

$$\left|\int_\Omega [\nabla F(x; u + \theta_{1m}(u_m - u); v + \theta_{2m}(v_m - v))((u_m; v_m) - (u,v))]dx\right|$$

esto es

$$\left|\int_\Omega [F(x, u_m, v_m) - F(x,u,v)]dx\right|$$

$$\leq \int_\Omega \left|F_u(x; u + \theta_{1m}(u_m - u); v + \theta_{2m}(v_m - v))\right| \left|u_m - u\right| dx +$$

$$\int_\Omega \left|F_v(x; u + \theta_{1m}(u_m - u); v + \theta_{2m}(v_m - v))\right| \left|v_m - v\right|$$

entonces por la condición $(F1)$

$$\leq c_1 \int_\Omega \left|u + \theta_{1m}(u_m - u)\right|^\gamma \left|v + \theta_{2m}(v_m - v))\right|^{\delta+1} \left|u_m - u\right| dx +$$

$$c_2 \int_\Omega |u+\theta_{1m}(u_m-u)|^{\gamma+1} |v+\theta_{2m}(v_m-v)|^{\delta} |v_m-v|\, dx$$

tomemos

$$w_1 = [u+\theta_{1m}(u_m-u)]^\gamma \in L^{\frac{p}{\gamma}};$$
$$w_2 = [v+\theta_{2m}(v_m-v)]^{\delta+1} \in L^{\frac{q}{\delta+1}};$$
$$w_3 = |u_m-u| \in L^p;$$

donde $\frac{\gamma}{p}+\frac{\delta+1}{q}+\frac{1}{p}=1$, entonces aplicando la desigualdad de Hölder Generalizada obtenemos:

$$c_1 \int_\Omega w_1 w_2 w_3 dx \leq c_1 \left\|(u+\theta_{1m}(u_m-u))^\gamma\right\|_{L^{\frac{p}{\gamma}}} \left\|[v+\theta_{2m}(v_m-v)]^{\delta+1}\right\|_{L^{\frac{q}{\delta+1}}} \|u_m-u\|_{L^p}$$

análogamente para el segundo término

$$c_2 \int_\Omega w_1' w_2' w_3' dx \leq \ c_2 \left\|[u+\theta_{1m}(u_m-u)]^{\gamma+1}\right\|_{L^{\frac{p}{\gamma+1}}} \left\|[v+\theta_{2m}(v_m-v)]^{\delta}\right\|_{L^{\frac{q}{\delta}}} \|u_m-u\|_{L^q}.$$

De estos resultados obtenemos:

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega [F(x,u_m,v_m)-F(x,u,v)]dx\right| \\ &\leq c_1 \|u+\theta_{1m}(u_m-u)\|_{L^p}^\gamma \|v+\theta_{2m}(v_m-v)\|_{L^q}^{\delta+1} \|u_m-u\|_{L^p} \\ &+c_2 \|u+\theta_{1m}(u_m-u)\|_{L^p}^{\gamma+1} \|v+\theta_{2m}(v_m-v)\|_{L^q}^{\delta} \|v_m-v\|_{L^q}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Puesto que $2<\gamma+1<p<2_s^*$ y $2<\delta+1<q<2_s^*$ entonces la inmersión

$$W \hookrightarrow L^p(\Omega)\times L^q(\Omega) \text{ es compacta.}$$

Ahora, la convergencia débil $\{(u_m;v_m)\} \rightharpoonup (u;v)$ en W implica la convergencia fuerte $\{(u_m,v_m)\} \longrightarrow (u,v)$ en $L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)$. Luego

$$\|u_m-u\|_{L^p} \leq k_1 \|(u_m;v_m)-(u,v)\|_{L^p\times L^q} \text{ implica } u_m \longrightarrow u \text{ en } L^p$$

$$\|v_m-v\|_{L^q} \leq k_2 \|(u_m;v_m)-(u,v)\|_{L^p\times L^q} \text{ implica } v_m \longrightarrow v \text{ en } L^q$$

y también

$$\|\theta_{1m}(u_m-u)\|_{L^p} \leq \|u_m-u\|_{L^p} \text{ implica } |\theta_{1m}|\, \|(u_m-u)\|_{L^p} \leq \|u_m-u\|_{L^p}$$

por tanto $|\theta_{1,m}|\leq 1$ y de la misma forma $|\theta_{2,m}|\leq 1$.

De lo anterior se tiene que :

$$\|u+\theta_{1m}(u_m-u)\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + |\theta_{1m}|\, \|u_m-u\|_{L^p} \leq M_1$$

$$\|v+\theta_{2m}(v_m-v)\|_{L^q} \leq \|v\|_{L^q} + |\theta_{2m}|\, \|v_m-v\|_{L^q} \leq M_2,$$

esto es, $(\|u+\theta_{1m}(u_m-u)\|_{L^p})_m$ y $(\|v+\theta_{2m}(v_m-v)\|_{L^q})_m$ están acotados.

Por tanto de (3.3) obtenemos:

$$\int_\Omega [F(x;u_m;v_m)-F(x,u,v)]\,dx \leq c_1 M_1^{\gamma} M_2^{\delta+1}\|u_m-u\|_{L^p}+c_2 M_1^{\gamma+1}M_2^{\delta}\|v_m-v\|_{L^q}$$

El cual converge a cero cuando $m\longrightarrow\infty$, esto prueba (3.2).

Ahora de (3.1) tenemos:

$$\int_\Omega (a|\nabla u|^2+b|\nabla v|^2)dx \leq \lim_{m\longrightarrow\infty} inf\int_\Omega \left[a|\nabla u_m|^2+b|\nabla v_m|^2\right]dx$$

de (3.2)

$$-\lambda\int_\Omega F(x;u;v)dx=\lim_{m\longrightarrow\infty}-\lambda\int_\Omega F(x;u_m;v_m)dx$$

conseguimos

$$\begin{aligned}
&1/2\int_\Omega (a|\nabla u|^2+b|\nabla v|^2)dx-\lambda\int_\Omega F(x;u;v)dx\\
&\leq \liminf_{m\longrightarrow\infty}\int_\Omega [\frac{a|\nabla u_m|^2+b|\nabla v_m|^2}{2}]dx+\liminf_{m\longrightarrow\infty}[-\lambda\int_\Omega F(x;u_m;v_m)dx]\\
&\leq \liminf_{m\longrightarrow\infty}[1/2\int_\Omega [a|\nabla u_m|^2+b|\nabla v_m|^2]dx-\lambda\int_\Omega F(x;u_m;v_m)dx]
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$\Im_\lambda(u,v)\leq\liminf_{m\longrightarrow\infty}\Im_\lambda(u_m;v_m),$$

es decir, $\Im_\lambda$ es débilmente semicontinua inferiormente en W.

□

Lema 2 *El funcional $\Im_\lambda$ dado por (2.6) es coerciva y acotada inferiormente en W.*

Demostración.-

Probaremos que $\Im_\lambda$ es acotada inferiormente, esto es, existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $\Im_\lambda(u,v)\geq M$ y que es coerciva, esto es,

$$\Im_\lambda(u,v)\longrightarrow+\infty \text{ cuando } \|(u,v)\|_W\longrightarrow+\infty.$$

Para cada x fijado, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tenemos

$$F(x,u,v)=\int_0^u F_t(x,t,v)dt+\int_0^v F_s(x,0,s)ds+F(x,0,0)$$

y por (F1) :

$$\begin{aligned}
|F(x,u,v)| &\leq \int_0^u |F_t(x,t,v)|dt+\int_0^v |F_s(x,0,s)|ds\\
&\leq c_3'|u|^{\gamma+1}|v|^{\delta+1},
\end{aligned}$$

luego

$$|F(x,u,v)| \leq c_3'|u|^{\gamma+1}|v|^{\delta+1}.$$

Así, por (F1), existe un $c_3 > 0$ tal que para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y casi todo $x \in \Omega$ tenemos

$$|F(x;u;v)| \leq c_3 \left|u\right|^{\gamma+1} \left|v\right|^{\delta+1}.$$

De esto y la desigualdad de Hölder y Young para $A = |u|^{\gamma+1}$ y $B = |v|^{\delta+1}$ con $p' = \frac{p}{\gamma+1}$; $q' = \frac{q}{\delta+1}$ obtenemos:

$$\int_\Omega F(x,u,v)dx \leq c_3 \int_\Omega \left|u\right|^{\gamma+1} \left|v\right|^{\delta+1} dx \leq c_3 \left[\frac{\gamma+1}{p}\int_\Omega |u|^p + \frac{\delta+1}{q}\int_\Omega |v|^q\right].$$

Luego de las inmersiones

$$W_o^{1,2}(\Omega,a) \hookrightarrow L^p \text{ y } W_o^{1,2}(\Omega,b) \hookrightarrow L^q$$

se deduce

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,u,v)dx &\leq c_3 \left[\frac{\gamma+1}{p} s \int_\Omega a(x)\left|\nabla u\right|^2 dx + \frac{\delta+1}{q} s' \int_\Omega b(x)\left|\nabla v\right|^2 dx\right] \\ &\leq \frac{\gamma+1}{p} c \int_\Omega a(x)\left|\nabla u\right|^2 dx + \frac{\delta+1}{q} c \int_\Omega b(x)\left|\nabla v\right|^2 dx\end{aligned}$$

donde $c = max\left\{sc_3; s'c_3\right\}$. Luego

$$-\lambda \int_\Omega F(x,u,v) \geq -\lambda c \frac{\gamma+1}{p} \int_\Omega a(x)\left|\nabla u\right|^2 dx - \lambda c \frac{\delta+1}{q} \int_\Omega b(x)\left|\nabla v\right|^2 dx$$

sumandole $1/2\left[\int_\Omega a(x)\left|\nabla u\right|^2 dx + \int_\Omega b(x)\left|\nabla v\right|^2 dx\right]$ obtenemos

$$\Im_\lambda(u,v) \geq (1/2 - \lambda c\frac{\gamma+1}{p}) \left\|u\right\|_a^2 + (1/2 - \lambda c\frac{\delta+1}{q}) \left\|v\right\|_b^2$$

buscamos valores adecuados para λ resolviendo simultaneamente

$$1/2 - \lambda c\frac{\gamma+1}{p} > 0 \text{ y}$$

$$1/2 - \lambda c\frac{\delta+1}{q} > 0$$

de donde $\lambda < \frac{p}{2c(\gamma+1)}$ y $\lambda < \frac{q}{2c(\delta+1)}$. Ahora tomando

$$\underline{\lambda} = \text{mín}\left\{\frac{p}{2c(\gamma+1)}; \frac{q}{2c(\delta+1)}\right\},$$

conseguimos:

$$\Im_\lambda(u,v) \geq (1/2 - \lambda c\frac{\gamma+1}{p}) \left\|u\right\|_a^2 + (1/2 - \lambda c\frac{\delta+1}{q}) \left\|v\right\|_b^2 > 0, \ \forall\ 0 \leq \lambda < \underline{\lambda}.$$

Para probar la coercividad tomemos

$$\lambda_1 = \min_{0\leq\lambda<\underline{\lambda}} \left\{ 1/2 - \lambda c \frac{\gamma+1}{p} \right\} \text{ y}$$

$$\lambda_2 = \min_{0\leq\lambda<\underline{\lambda}} \left\{ 1/2 - \lambda c \frac{\delta+1}{q} \right\},$$

por tanto:

$$\Im_\lambda(u,v) \geq \lambda_1 \|u\|_a^2 + \lambda_2 \|v\|_b^2 \geq \min\{\lambda_1;\lambda_2\} (\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2)$$

ahora usando la desigualdad (1.1) de la Proposición 3, obtenemos

$$\Im_\lambda(u,v) \geq \frac{1}{2} \min\{\lambda_1;\lambda_2\} (\|u\|_a + \|v\|_b)^2$$

lo que implica $\Im_\lambda(u,v) \longrightarrow +\infty$ siempre que $\|(u;v)\|_W = \|u\|_a + \|v\|_b \longrightarrow \infty$. Así $\Im_\lambda$ es coerciva y en particular es acotada inferiormente.

$\square$

Retornando a la demostración del Teorema 33, de los lemas (1) y (2), conseguimos mediante el Principio del Mínimo, demostrar que el funcional $\Im_\lambda$ alcanza su mínimo en W. Así el sistema (2.1) admite al menos una solución débil.

3.2.2. Prueba del Teorema 34

En esta subsección, aplicaremos el teorema del paso de la montaña (Teorema 32) para la demostración de nuestro segundo resultado de existencia de soluciones débiles, el cual se realizará mediante los siguientes lemas:

Lema 3 *El funcional $\Im_\lambda$ dado por (2.6) satisface la condición de Palais-Smale en W.*

Demostración.-

Sea $\{(u_m;v_m)\} \subset W$ una sucesión de Palais-Smale (PS) para el funcional $\Im_\lambda$, esto es $\Im_\lambda(u_m;v_m)$ es acotada en $\mathbb{R}$ y $\Im'_\lambda(u_m;v_m) \longrightarrow 0$ en W' si $m \longrightarrow \infty$.

Probaremos que $\{(u_m;v_m)\}$ admite una subsucesión convergente en W.

Como $\Im_\lambda(u_m;v_m)$ es acotado, tenemos que

$$\exists\ c_4 > 0 \text{ tal que } |\Im_\lambda(u_m;v_m)| \leq c_4 \text{ para cualquier } m \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

Luego como $\lim_{m\longrightarrow\infty} \Im'_\lambda(u_m;v_m) = 0$ en W' entonces

Para $\epsilon_1 = \frac{1}{1}$ existe m_1 tal que $\left| \left\langle \Im'_\lambda(u_m;v_m); \frac{(\xi;\eta)}{\|(\xi;\eta)\|} \right\rangle \right| < 1$ para $m \geq m_1$

Para $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$ existe m_2 tal que $\left| \left\langle \Im'_\lambda(u_m;v_m); \frac{(\xi;\eta)}{\|(\xi;\eta)\|} \right\rangle \right| < 1/2$ para $m \geq m_2$

Para $\epsilon_3 = \frac{1}{3}$ existe m_3 tal que $\left|\left\langle \Im'_\lambda(u_m; v_m); \frac{(\xi;\eta)}{\|(\xi;\eta)\|}\right\rangle\right| < 1/3$ para $m \geq m_3$

$\vdots$

Para $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ existe m_n tal que $\left|\left\langle \Im'_\lambda(u_m; v_m); \frac{(\xi;\eta)}{\|(\xi;\eta)\|}\right\rangle\right| < 1/n$ para $m \geq m_n$

de donde $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq ... \leq m_n$ por tanto

$$\left|\left\langle \Im'_\lambda(u_{m_n}; v_{m_n}); \frac{(\xi;\eta)}{\|(\xi;\eta)\|}\right\rangle\right| \leq \sup_{\substack{\|(\varphi;\psi)\|=1 \\ (\varphi;\psi)\in W}} \left|\left\langle \Im'_\lambda(u_m; v_m); (\varphi;\psi)\right\rangle\right| \leq \epsilon_n.$$

Esto es, existe una sucesión estrictamente decreciente $\{\epsilon_m\}_1^\infty$ con

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \epsilon_m = 0,$$

tal que para cada m y $(\xi, \eta) \in W$ se tiene

$$\left|\left\langle \Im'_\lambda(u_m; v_m); (\xi;\eta)\right\rangle\right| \leq \epsilon_m \|(\xi;\eta)\|. \tag{3.5}$$

Como $\Im_\lambda$ es coerciva y por la relación (3.4) tenemos:

$$c_4 \geq |\Im_\lambda(u_m; u_m)| \geq \alpha_1 \|u_m\|^2$$

$$c_4 \geq |\Im_\lambda(v_m; v_m)| \geq \alpha_1 \|v_m\|^2,$$

y esto implica, $\|(u_m; v_m)\| = \|u_m\|_a + \|v_m\|_b \leq (c_4/\alpha)^{1/2} + (c_4/\alpha)^{1/2}$. Así obtenemos, que la sucesión $\|(u_m; v_m)\| \leq 2(c_4/\alpha)^{1/2}$, es acotada en W.

Dado que W es un espacio de Hilbert, de la Proposición 6, W es uniformemente convexo y por tanto reflexivo, luego por el Teorema de Eberlein-Shmulyan, la sucesión $\{(u_m; v_m)\}$ posee una subsucesión débilmente convergente $\left\{(u_{m_k}; v_{m_k})\right\}$ tal que

$$(u_{m_k}; v_{m_k}) \rightharpoonup (u, v) \text{ en } W.$$

Además debido a que

$$P : W_o^{1,2}(\Omega, a) \times W_o^{1,2}(\Omega, b) \longmapsto W_o^{1,2}(\Omega, a) \text{ dado por } P(u, v) = u,$$

es una aplicación lineal y continua, la Proposición 2 implica $\{u_{m_k}\} \rightharpoonup u$ en $W_o^{1,2}(\Omega, a)$.

De manera similar se tiene que $\{v_{m_k}\} \rightharpoonup v$ en $W_o^{1,2}(\Omega, b)$.

En lo que sigue denotaremos la subsucesión hallada por $\{(u_m; v_m)\}$ con el fin de no recargar la notación. Ahora, debido a la inmersión compacta $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$ y al Teorema 27, la subsucesión $\{(u_m; v_m)\}$ converge fuertemente en $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$, esto es,

$$\|(u_m; v_m) - (u, v)\|_{L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \longrightarrow \infty$$

Tomando $(\xi;\eta)=(u_m-u;0)$ en la derivada de Fréchet (2.8) obtenemos

$\langle \Im'_\lambda(u_m;v_m);(\xi;\eta)\rangle = \int_\Omega a\nabla u_m\nabla\xi dx + \int_\Omega b\nabla v_m\nabla\eta dx - \lambda\int_\Omega F_u(x,u_m,v_m)\xi dx - \lambda\int_\Omega F_v(x,u_m,v_m)\eta dx$

esto es,

$$\left\langle \Im'_\lambda(u_m;v_m);(\xi;\eta)\right\rangle = \int_\Omega a\nabla u_m\nabla\xi dx - \lambda\int_\Omega F_u(x,u_m,v_m)\xi dx$$

y por (3.5) obtenemos

$$\left|\int_\Omega a(x)\nabla u_m\nabla(u_m-u)dx - \lambda\int_\Omega F_u(x,u_m,v_m)(u_m-u)dx\right| \leq \epsilon_m \left\|u_m-u\right\|_a \tag{3.6}$$

Usando la condición (F1)

$$\int_\Omega F_u(x,u_m,v_m)\left|u_m-u\right|dx \leq c_1\int_\Omega \left|u_m\right|^\gamma \left|v_m\right|^{\delta+1}\left|u_m-u\right|dx$$

y luego por la desigualdad de Hölder para

$$w_1=\left|u_m\right|^\gamma \in L^{p/\gamma}\ ,\ w_2=\left|v_m\right|^{\delta+1}\in L^{\frac{q}{\delta+1}}\ \text{y}\ \left|u_m-u\right|\in L^p$$

conseguimos:

$$\int_\Omega F_u(x,u_m,v_m)\left|u_m-u\right|dx \leq c_1\left\|u_m\right\|_{L^p}^\gamma \left\|v_m\right\|_{L^q}^{\delta+1}\left\|u_m-u\right\|_{L^p} \tag{3.7}$$

sigue de $|a|-|b|\leq|a-b|\leq\epsilon$ y las relaciones (3.6) y (3.7) que:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega a(x)\nabla u_m\nabla(u_m-u)dx\right| &\leq \left|\lambda\int_\Omega F_u(x,u_m,v_m)(u_m-u)dx\right| + \epsilon_m\left\|u_m-u\right\| \\ &\leq c_1\left\|u_m\right\|_{L^p}^\gamma\left\|v_m\right\|_{L^q}^{\delta+1}\left\|u_m-u\right\|_{L^p} + \epsilon_m\left\|u_m-u\right\|_a\end{aligned}$$

por tanto, como $\{(u_m;v_m)\}$ converge fuertemente en $L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)$, también

$$\left\|(u_m-u)\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|(u_{m_k};v_{m_k})-(u,v)\right\|_{L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)} \longrightarrow 0$$

y siendo $\left\|u_m-u\right\|_a$ acotada obtenemos:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_\Omega a(x)\nabla u_m\nabla(u_m-u)dx = 0. \tag{3.8}$$

Además por la convergencia débil $u_m \rightharpoonup u$ en $\left(W_o^{1,2}\right)$ conseguimos

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_\Omega a(x)\nabla u\nabla(u_m-u)dx = 0. \tag{3.9}$$

Para demostrar (3.9) definimos la aplicación lineal y continua $\langle G;w\rangle = \int_\Omega a(x)\nabla u\nabla w$.

Es lineal, puesto que, $\langle G;\kappa w_1+w_2\rangle = \kappa\langle G;w_1\rangle + \langle G;w_2\rangle$

La continuidad resulta de la desigualdad de Hölder:

$$\left|\int_\Omega a(x)\nabla u\nabla w dx\right| \leq \int_\Omega a^{1/2}(x)|\nabla u|a^{1/2}(x)|\nabla w|dx \leq \left\|u\right\|_a\left\|w\right\|_a$$

entonces

$$\|G\|_{(W_o^{1,2})'} = \sup_{\|w\|_a \in W_o^{1,2}(\Omega)} |\frac{\langle G; w\rangle}{\|w\|_a}| \leq \|u\|_a \, .$$

Por tanto, como $G \in \left(W_o^{1,2}\right)'$, la convergencia débil implica

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_\Omega a(x) \nabla u \nabla (u_m - u) dx| = \lim_{m \longrightarrow \infty} \langle G; (u_m - u)\rangle \, | = 0.$$

Retornando a la prueba del lema, restamos las integrales en (3.8) y (3.9)

$$\int_\Omega a(x)(\nabla u_m - \nabla u) \bullet (\nabla u_m - \nabla u) dx = \int_\Omega a(x)[\nabla u_m \bullet \nabla u_m - 2\nabla u \bullet \nabla u_m + \nabla u \bullet \nabla u)]dx$$

y de la desigualdad

$$\int_\Omega a(x) \nabla u_m \nabla u dx \leq \int_\Omega a^{1/2} |\nabla u_m| a^{1/2} |\nabla u| dx \leq \|u_m\|_a \|u\|_a$$

conseguimos

$$\int_\Omega a(x)(\nabla u_m - \nabla u) \bullet (\nabla u_m - \nabla u) dx \geq \|u_m\|_a^2 - 2\|u_m\|_a \|u\|_a + \|u\|_a^2$$

entonces haciendo que $m \longrightarrow \infty$ como en (3.8) y (3.9) obtenemos

$$0 = \lim_{m \longrightarrow \infty} \int_\Omega a(x)(\nabla u_m - \nabla u) \bullet (\nabla u_m - \nabla u) dx \geq \lim_{m \longrightarrow \infty} (\|u_m\|_a - \|u\|_a)^2 \geq 0.$$

Del Teorema del Sandwich tenemos

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} (\|u_m\|_a - \|u\|_a)^2 = 0,$$

esto implica $\lim_{m \longrightarrow \infty} (\|u_m\|_a - \|u\|_a) = 0$ pues de suponer lo contrario :

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} (\|u_m\|_a - \|u\|_a)^2 = (\lim_{m \longrightarrow \infty} (\|u_m\|_a - \|u\|_a))(\lim_{m \longrightarrow \infty} (\|u_m\|_a - \|u\|_a)) > 0$$

que es una contradicción. Por tanto $\|u_m\|_a \longrightarrow \|u\|_a$.
Ahora como $W_o^{1,2}(\Omega; a)$ es uniformemente convexo y desde que $u_n \rightharpoonup u \wedge \|u_m\|_a \longrightarrow \|u\|_a$, entonces en aplicacíon del Teorema 28 resulta $u_n \longrightarrow u$ en $W_o^{1,2}(\Omega; a)$. Similarmente obtenemos $v_m \longrightarrow v$ en $W_o^{1,2}(\Omega; b)$. Así (u_m, v_m) admite una subsucesión convergente en W.

□

El Lema 3 nos dice que el funcional $\Im_\lambda$ satisface la condición de Palais-Smale (condición de compacidad). Ahora verificaremos que el funcional $\Im_\lambda$ tiene la geometría del Teorema del paso de la montaña.

Lema 4 *Bajo las hipótesis $(F1) - (F4)$ el funcional $\Im_\lambda$ dado por (2.6) satisface:*

(i) Existen $\rho, \sigma > 0$ *tal que* $\|(u,v)\|_H = \rho$ *implica* $\Im(u,v) \geq \sigma > 0$.

(ii) Existe $(u_o, v_o) \in W$ *tal que* $\|(u_o,v_o)\|_H > \rho$ *y* $\Im(u_o,v_o) \leq 0$.

Demostración.-

Primero probamos (i).

De (F2) y (F4) obtenemos $|F(x,u,v)| \leq c(|u|^{\alpha} + |v|^{\beta} + |u|^{\bar{\alpha}} + |v|^{\bar{\beta}})$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ y $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ donde $2 < \alpha; \bar{\alpha}; \beta; \bar{\beta} < 2_s^*$.

Esto se debe a que para $2 < \alpha; \bar{\alpha}; \beta; \bar{\beta} < 2_s^*$ se tiene

$$|F(x,u,v)| \leq \begin{cases} c\left[|u|^{\bar{\alpha}} + |v|^{\bar{\beta}}\right] & \text{si } |u|;|v| \leq \epsilon \text{ y } x \in \Omega \text{ esto es por (F4)} \\ c\left[1 + |u|^{\alpha} + |v|^{\beta}\right] & \text{si } |u|;|v| > \epsilon \text{ y } x \in \Omega \text{ esto es por (F2)} \end{cases},$$

de donde para $\epsilon \geq 1$ [o $\epsilon < 1$] podemos conseguir:

$$|F(x,u,v)| \leq \begin{cases} c\left[|u|^{\alpha} + |v|^{\beta} + |u|^{\bar{\alpha}} + |v|^{\bar{\beta}}\right] & \text{para } |u|;|v| \leq \epsilon \text{ y } x \in \Omega \\ c\left[|u|^{\alpha} + |v|^{\beta} + |u|^{\bar{\alpha}} + |v|^{\bar{\beta}}\right] & \text{para } |u|;|v| > \epsilon \text{ y } x \in \Omega \end{cases}$$

Así,

$$|F(x,u,v)| \leq c\left[|u|^{\alpha} + |v|^{\beta} + |u|^{\bar{\alpha}} + |v|^{\bar{\beta}}\right].$$

Ahora, por las inmersiones de Sobolev

$$W_o^{1,2}(\Omega, a) \hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ y } W_o^{1,2}(\Omega, b) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para } 2 < p; q < 2_s^*$$

tenemos $\|u\|_{L^{\alpha}}^{\alpha} \leq c\,\|u\|_a^{\alpha}$ y $\|v\|_{L^{\beta}}^{\beta} \leq c\,\|v\|_b^{\beta}$, y de estos resultados sigue

$$\int_{\omega} F(x,u,v)dx \leq c(\|u\|_a^{\alpha} + \|v\|_b^{\beta} + \|u\|_a^{\bar{\alpha}} + \|v\|_b^{\bar{\beta}}).$$

Esto nos permite acotar inferiormente el funcional $\Im_{\lambda}$,

$$\Im_{\lambda}(u,v) \geq 1/2(\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2) - c(\|u\|_a^{\alpha} + \|v\|_b^{\beta} + \|u\|_a^{\bar{\alpha}} + \|v\|_b^{\bar{\beta}}). \tag{3.10}$$

Por otro lado tenemos, que para $\|u\|_a < 1$, $\|v\|_b < 1$ y tomando $p = min\left\{\alpha; \beta; \bar{\alpha}; \bar{\beta}\right\}$ de (3.10) y las desigualdades enunciadas en las proposiciones 3 y 4 conseguimos

$$\begin{aligned} \Im_{\lambda}(u,v) &\geq 1/2(\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2) - c(\|u\|_a^{\alpha} + \|v\|_b^{\beta} + \|u\|_a^{\bar{\alpha}} + \|v\|_b^{\bar{\beta}}) \\ &\geq 1/2(\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2) - c(\|u\|_a^{p} + \|v\|_b^{p} + \|u\|_a^{p} + \|v\|_b^{p}) \\ &= 1/2(\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2) - 2c(\|u\|_a^{p} + \|v\|_b^{p}) \\ &\geq 1/2(\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2) - 2c(\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2)^{p/2} \\ &= (\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2)[1/2 - 2c(\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2)^{(p-2)/2}] > 0 \end{aligned}$$

siempre que $1/2 - 2c(\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2)^{(p-2)/2} > 0$. Esto implica

$$\frac{1}{4c} > (\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2)^{\frac{p-2}{2}}$$

luego

$$\frac{1}{(4c)^{\frac{2}{p-2}}} > (\|u\|_a^2 + \|v\|_b^2) \geq \frac{1}{2}(\|u\|_a + \|v\|_b)^2$$

obtenemos de este modo

$$\frac{\sqrt{2}}{(4c)^{\frac{1}{p-2}}} > \|(u;v)\|_W = \frac{1}{(4c)^{\frac{1}{p-2}}} = \rho$$

Así, tomando $\rho = \frac{1}{(4c)^{\frac{1}{p-2}}} > 0$ y σ tenemos que

$$\Im_\lambda(u,v) \geq \sigma > 0 \text{ para } \|u\|_a + \|v\|_b = \rho \tag{3.11}$$

Esto concluye la prueba de (i).

Ahora probaremos (ii). Como la función F es de clase C^1 efectuamos la siguiente derivación

$$\frac{d}{dt}F(x;t^\theta u;t^{\theta'}v) = \theta u F_u(x;t^\theta u;t^{\theta'}v)t^{\theta-1} + \theta' v F_v(x;t^\theta u;t^{\theta'}v)t^{\theta'-1}$$

luego por la condición (F3) existe $R > 0$ y $1/2_s^* < \theta;\theta' < 1/2$ tal que

$$\frac{d}{dt}F(x;t^\theta u;t^{\theta'}v) \geq \frac{1}{t}F(x;t^\theta u;t^{\theta'}v) > 0 \;\forall x \in \bar{\Omega} \text{ y } |t^\theta u|;|t^{\theta'}v| > R.$$

Multiplicamos por $\frac{1}{t}$ para conseguir una derivada exacta

$$\frac{1}{t}\frac{d}{dt}F(x;t^\theta u;t^{\theta'}v) - \frac{1}{t^2}F(x;t^\theta u;t^{\theta'}v) \geq 0$$

esto es,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t}F(x;t^\theta u;t^{\theta'}v)\right] \geq 0.$$

Ahora integrando en $[t_o,t]$ con t_o fijado tal que $|t_o^\theta u|;|t_o^{\theta'}v| > R$

$$\int_{t_o}^{t}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}F(x;s^\theta u;s^{\theta'}v)\right]ds \geq 0$$

y por el segundo Teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\frac{1}{t}F(x;t^\theta u;t^{\theta'}v) - \frac{1}{t_o}F(x;t_o^\theta u;t_o^{\theta'}v) > 0$$

Es decir existe $k(x,u,v) = \frac{1}{t_o}F(x;t_o^\theta u;t_o^{\theta'}v) > 0$ tal que

$$F(x;t^\theta u;t^{\theta'}v) \geq tK(x,u,v). \tag{3.12}$$

De (3.12) obtenemos:

$$\Im_\lambda(t^\theta u;t^{\theta'}v) = \frac{1}{2}(t^{2\theta}\|u\|_a^2 + t^{2\theta'}\|v\|_b^2) - \lambda\int_\Omega F(x;t^\theta u;t^{\theta'}v)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}(t^{2\theta}\left\|u\right\|_a^2 + t^{2\theta'}\left\|v\right\|_b^2) - t\lambda \int_\Omega K(x,u,v)dx,$$

esto es,

$$\Im_\lambda(t^\theta u; t^{\theta'} v) \leq t[\frac{1}{2}(t^{2\theta-1}\left\|u\right\|_a^2 + t^{2\theta'-1}\left\|v\right\|_b^2) - \lambda \int_\Omega K(x,u,v)dx]$$

ya que 2θ y $2\theta' < 1$ entonces $2\theta - 1$ y $2\theta' - 1 < 0$ por lo tanto

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}[\frac{1}{2}(t^{2\theta-1}\left\|u\right\|_a^2 + t^{2\theta'-1}\left\|v\right\|_b^2) - \int_\Omega K(x,u,v)dx] = -\int_\Omega K(x,u,v)dx < 0$$

y

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t = +\infty.$$

De estos resultados concluimos que

$$\Im_\lambda(t^\theta u; t^{\theta'} v) \longrightarrow -\infty \text{ cuando } t \longrightarrow +\infty.$$

Para $-M < 0$ existe un t_M tal que $t \geq t_M$ implica $\Im_\lambda(t^\theta u; t^{\theta'} v) < -M < 0$.
Así existen una constante t_M tal que $\Im_\lambda(t_M^\theta u; t_M^{\theta'} v) < 0$, es decir, existe

$$u_o = t_M^\theta u,\ v_o = t_M^{\theta'} v \text{ tal que } \Im_\lambda(u_o; v_o) < 0$$

y por (3.11)

$$\left\|(u_o, v_o)\right\|_W > \rho \text{ para } \left\|u_o\right\|_a^2 = t_M^{2\theta}\left\|u\right\|_a^2;\ \left\|v_o\right\|_b^2 = t_M^{2\theta'}\left\|v\right\|_b^2$$

y

$$\Im_\lambda(t_M^\theta u; t_M^{\theta'} v) = \frac{1}{2}(t_M^{2\theta}\left\|u\right\|_a^2 + t_M^{2\theta'}\left\|v\right\|_b^2) - \lambda \int_\Omega F(x; t_M^\theta u; t_M^{\theta'} v)dx < 0.$$

$\square$

Retornando a la prueba del Teorema 34, el funcional $\Im_\lambda$ satisface las hipótesis del Teorema del paso de la montaña, por tanto tiene un punto crítico no cero y el punto crítico no cero de $\Im_\lambda$ es precisamente la solución débil no trivial del problema (2.1).

Capítulo 4

Ejemplos de aplicación y observaciones complementarias

4.1. Un ejemplo de un sistema elíptico semilineal potencial dentro de esta clase de problemas

Consideremos el siguiente ejemplo de un sistema elíptico semilineal potencial :

$$\text{Sea } N = 3, \ , \ s \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right) \text{ y } 1{,}2 < 2_s < 2 \ , \ 2 < 2_s^* < 6.$$

Con una elección particular de los pesos (funciones medibles no negativos sobre Ω)

$$a(x, y, z) = 1 + x^2,$$

$$b(x, y, z) = 1 + y^2$$

y el funcional

$$F((x, y, z), u, v) = u^{2,2} \cdot v^{2,5}.$$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \text{- div}(\left|1 + x^2\right| \nabla u(x, y, z)) = 2{,}2 \cdot u^{1,2} \cdot v^{2,5}, & (x, y, z) \text{ en } \Omega \\ \text{- div}(\left|1 + y^2\right| \nabla v(x, y, z)) = 2{,}5 \cdot u^{2,2} \cdot v^{1,5}, & (x, y, z) \text{ en } \Omega \\ \text{u=v=0} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$, de frontera bien regular,

$$(2, 2u^{1,2} \cdot v^{2,5}; 2, 5u^{2,2} \cdot v^{1,5}) = (F_u((x, y, z), u, v); F_v((x, y, z), u, v)) = \nabla F((x, y, z), u, v)$$

representa el gradiente de $F((x, y, z), u, v) = u^{2,2} \cdot v^{2,5}$ en las variables $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Se probará la existencia de almenos una solución débil para el sistema, bajo adecuadas hipótesis sobre el dato:

$$\begin{array}{rccc} F: & \Omega \times [0,\infty\rangle \times [0,\infty\rangle & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x,y,z),u,v) & \mapsto & F((x,y,z),u,v) = u^{2,2}\cdot v^{2,5} \end{array}$$

es un C^1- funcional que satisface :

(F1) Existen constantes positivas $c_1 = 2,2$, $c_2 = 2,5$ tal que :

$$|F_u((x,y,z),u,v)| \leq c_1|u|^{1,2}|v|^{2,5}$$

$$|F_v((x,y,z),u,v)| \leq c_2|u|^{2,2}|v|^{1,5}$$

$\forall(u,v) \in \mathbb{R}^2$, en casi todo punto de Ω y algún $\gamma = 1,2 > 1$, $\delta = 1,5 > 1$ tales que $\frac{1,2+1}{p} + \frac{1,5+1}{q} = 1$ y $1,2+1 < p < 2^*_s \leq 6$, $1,5+1 < q < 2^*_s \leq 6$; podemos tomar $p = \frac{2,2\cdot q}{q-2,5}$ y hacer $q = 4$ y $p = 5,86$.

(F2) Existen constantes positivas $c = \frac{1}{1,8}$, $\alpha = 2,2 \cdot 1,8 = 3,96$ y $\beta = 2,25 \cdot 2,25 = 5{,}0625$, con $2 < \alpha, \beta < 2^*_s$ tal que

$$|F((x,y,z),u,v)| \leq c(1 + |u|^\alpha + |v|^\beta)$$

para todo $(x,y,z) \in \Omega$ y u, v en $\mathbb{R}$.

(Para este resultado se utilizó la desigualdad de Young: $u^{2,2}v^{2,5} \leq \frac{1}{A}u^{2,2A} + \frac{1}{B}v^{2,5B}$ con $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 1$ para $A = 1,8$ y $B = 2,25$).

(F3) Existen $R = 1/2 > 0$, $\theta = 0,3280$ y $\theta' = 0,2127$ con $1/6 \leq \frac{1}{2^*_s} < \theta$, $\theta' < \frac{1}{2}$ tal que

$$0 < F(x,u,v) \leq \theta\ uF_u(x,u,v) + \theta' vF_v(x,u,v)$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $|u|, |v| \geq R$.

(Esto resulta del Teorema del valor medio: $u^{2,2}v^{2,5} = uF_u(x,ru,rv) + vF(x,ru,rv) = 2,2r^{3,7}F(x,u,v) + 2,5r^{3,7}F(x,u,v) \leq 0,3280u \cdot F_u(x,u,v) + 0,2127v \cdot F_v(x,u,v)$).

(F4) Existe $c = 1/1,8$, $\overline{\alpha} = 3,96 > 2$, $\overline{\beta} = 5,0625 > 2$ y $\epsilon = 1/2 > 0$ tal que

$$|F(x,u,v)| \leq c(|u|^{\overline{\alpha}} + |v|^{\overline{\beta}})$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $|u| \leq \epsilon$, $|v| \leq \epsilon$.

El sistema elíptico semilineal, mostrado satisface las condiciones enunciadas y está dentro de la clase de sistemas elípticos semilineales tratados en el capítulo 3, por tanto concluimos que en aplicación a los teoremas de existencia de soluciones, que existe solución débil no trivial al problema (4.1).

Como segundo ejemplo consideremos:

$$\text{Sea } N = 3, \ , s \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right) \text{ y } 1,2 < 2_s < 2 \ , \ 2 < 2_s^* < 6.$$

Con una elección particular de los pesos (funciones medibles no negativos sobre Ω)

$$a(x, y, z) = [1 + |x|]^{-1},$$

$$b(x, y, z) = [1 + |y|]^{-1}$$

y el funcional

$$F((x, y, z), u, v) = 1/2u^2 \cdot v^3.$$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \text{- div}(|1 + |x|\,|^{-1}\nabla u(x, y, z)) = u^1 \cdot v^3, & (x, y, z) \text{ en } \Omega \\ \text{- div}(|1 + |y|\,|^{-1}\nabla v(x, y, z)) = 3/2 \cdot u^2 \cdot v^2, & (x, y, z) \text{ en } \Omega \\ \text{u=v=0} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$, de frontera bien regular,

$$(u^1 \cdot v^3; 3/2 \cdot u^2 \cdot v^2) = (F_u((x, y, z), u, v); F_v((x, y, z), u, v)) = \nabla F((x, y, z), u, v)$$

representa el gradiente de $F((x, y, z), u, v) = 1/2u^2 \cdot v^3$ en las variables $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. De manera análoga se verifica que el sistema esta dentro de esta clase de problemas y por tanto podemos afirmar que existe solución débil no trivial del problema (4.2).

4.2. Observaciones sobre la aplicación del Principio del Mínimo para probar la existencia de soluciones débiles de una clase de sistemas elípticos semilineales

En un problema de minimización para el caso de dimensión finita, se plantea lo siguiente: Suponga que $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ es una función acotada inferiormente y $\alpha = \inf_{x\in\Omega} J(x)$. Para resolver el problema de hallar un $x \in \Omega$ tal que $J(x) = \alpha$ seguimos los pasos:

(i) Construimos una sucesión minimizante, esto es, una sucesión

$$\{x_k\}_{k\in N} \text{ tal que } \lim_{k\longrightarrow\infty} J(x_k) = \alpha.$$

(ii) Probamos que existe un $c > 0$ verificando $\|x_k\| < c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces por el Teorema de Bolzano-Weierstrass se obtiene que existe una subsucesión convergente.

(iii) Si J es una función continua, obtenemos:

$$J(x_o) = \lim_{k \longrightarrow \infty} J(x_k) = \alpha.$$

Pero bastará suponer la semicontinuidad inferior de J, es decir,

$$x_k \longrightarrow x_o \text{ implica } \liminf_{k \longrightarrow \infty} J(x_k) \geq J(x_o).$$

Así, la idea fundamental para el Principio del Mínimo es la extensión del Teorema de Weierstrass a funciones definidas en espacios de dimensión infinita.

Sea $J : W \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional definido en un espacio de funciones W dotado de cierta noción de convergencia para la que W es compacto y J es semicontinuo inferiormente. entonces existe un mínimo de J en W.

Del planteamiento anterior, notamos que, se requieren de hipótesis para que J sea acotada inferiormente, para que la sucesión minimizante sea acotada y para poder pasar al límite.

En el problema abordado en este trabajo, planteamos un funcional $J : W \longmapsto \mathbb{R}$ definido sobre un espacio de dimensión infinita, para el cual la idea descrita es generalizada por:

Sea W un espacio de Banach reflexivo y sea $J : W \longmapsto \mathbb{R}$ un funcional, en general no lineal. Supongamos que J está acotado inferiormente. Necesitamos sucesiones convergentes, o bien, acotadas más algún argumento de compacidad, y alguna propiedad de semicontinuidad inferior en la topología adecuada que permita realizar el mínimo.

Para superar esta dificultad se toma W espacio de Banach reflexivo dotado con la toplogía débil para que todo acotado sea relativamente compacto (no con la topología fuerte porque con esta topología son muy pocos los compactos). Para poder pasar al límite supondremos que J es débilmente semicontinuo inferiormente (semicontinuo inferiormente en la topología débil). También supondremos que J es coercivo para que sea acotado inferiormente y toda sucesión minimizante sea acotada.

El Principio del Mínimo generaliza esta idea y nos permite resolver el problema de la existencia de soluciones para esta clase de sistemas elípticos semilineales, necesitando para esto además de la condición $(F1)$ sobre la función F, que el funcional $\Im_\lambda$ sea diferenciable en W y recordar que un punto $(u_1, v_1) \in W$ de mínimo es un punto crítico de $\Im_\lambda$, esto es $\Im'_\lambda(u_1, v_1) = 0$. Pero el Principio del Mínimo no garantiza que esta solución sea no trivial.

Adicionando el resultado del Lema 4(ii), existe $(u_0, v_0) \in W$ tal que $\|(u_0, v_0)\|_W > \rho$ y

$\Im_\lambda(u_0, v_0) < 0$ para $0 < \lambda < \underline{\lambda}$, podemos concluir que (u_1, v_1) es una solución débil no trivial del problema (2.1).

4.3. Observaciones sobre la aplicación del Teorema del paso de la montaña para probar la existencia de soluciones débiles de una clase de sistemas elípticos semilineales

El Teorema del Paso de la Montaña fue publicado en 1973 por Antonio Ambrosetti y Paul Rabinowitz [1], forma parte de la teoría de puntos críticos de funcionales definidos en espacios de Banach y se sitúa dentro de los resultados minimax. Su nombre se debe a la siguiente interpretación geométrica:
Si $u = 0$ es un lugar rodeado de un anillo de montañas y $u = w$ es un lugar fuera, y J representa la cumbre o altura en cada punto, entonces una persona busca aquel camino de $u = 0$ a $u = w$, a través de las montańas en el cual la subida es menor. Aquí cada $g([0, 1])$ representa un camino, entonces si existiera uno de estos caminos con altura mínima, tal altura mínima seria c.
Con la aplicación de este Teorema logramos probar la existencia de al menos una solución no trivial para esta clase de sistemas elípticos semilineales, necesitando para esto que se verifiquen las condiciones $(F1)$ a $(F4)$, condiciones sobre la no linealidades de F_u y F_v.
Además podemos observar que la existencia de este nivel minimax (o valor crítico) c :

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{(u,v) \in g([0,1])} \Im_\lambda(u, v) \geq \sigma > 0$$

donde

$$\Gamma = \{g \in C([0, 1], W)/g(0) = (0, 0), g(1) = (u_0, v_0)\},$$

implica la existencia de un punto crítico $(u_2, v_2) \in W$, el cual será la segunda solución débil no trivial del problema (2.1).

Bibliografía

[1] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications, J Funct. Anal.* Ed 14 (1973).

[2] R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, INC, (1975).

[3] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis.* third edition, springer, (2009).

[4] G.A. Afrouzi, M. Mirzapour and N. B. Zographopoulos*, Existence results for a class of semilinear elliptic systems.* Theor. Math. Appl., (2012), vol. 2, p. 77-86.

[5] H. Brezis, *Análisis Funcional Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial,S.A. Madrid (1984).

[6] Bartle, Roberth G., *Introducción al análisis matemático.* Editorial Limusa, (1989).

[7] L. Boccardo and D.G. De Figueiredo, *Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations,* Nonlinear Diff. Equ. Appl., 7, (2000), 187-199.

[8] Belmonte Beitia, J. G., *Ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad espacialmente inhomogenea.* (2008).

[9] D. G. Costa, *On a class of elliptic system in* $\mathbb{R}^N$*,* Electron. J. Differential Equations, 07, (1994), 1-14.

[10] P. Caldiroli, R. Musina, *On a variational degenerate elliptic problem, Nonlinear Diff. Equ. Appl.* 7 (2000) 187-199.

[11] Claudianor O. Alves, *Local mountain pass for a class of elliptic system.* J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 135-150.

[12] D. G. Costa, *An Invitation to Variational Methods in Differential equations* . Birkhauser, Boston, (2007).

[13] Cavalheiro, Albo Carlos, *Weighted sobolev spaces and degenerate elliptic equations*-doi: 10.5269/bspm. v26i1-2.7415. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, (2008), vol. 26, no 1-2, p. 117-132.

[14] N.T.Chung and H. Q. Toan, *On a class of degenerate and singular elliptic systems in bounded domain,* J. Math. Anal. Appl., 360, (2009), 422-431.

[15] Dunford, N.; Schwartz, J. T. ,*Linear Operators. Part I : General Theory.* Interscience Publishers, New York, London (1958).

[16] R. Dautray, J. L. Lions , *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology I: Physical Origins and Classical Methods.* Ed. springer-Verlag, Berlin, (1985).

[17] P. Drabek, A. Kufner and F. Nicolosi , *Quasilinear elliptic equations with degenerate and singularities, vol.5 of the Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Aplications, Walter de Gruyter and Co.*, Berlin,(1997).

[18] A. Djellit and S. Tas, *Existence of solutions for a class of elliptic systems in* $\mathbb{R}^N$ *involving the p-Laplacian, Electron J. Differential Equations,* 56, (2003), 1-8.

[19] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications.* Ed. Jhon Wiley & Sons. (1978).

[20] A.Kufner and B. Opic, *How to define reasonably weighted Sobolev spaces*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 23 (3), (1984), 537-554.

[21] S. Kesavan, *Topics in Analysis Functional and Applications.* Jhon Wiley & Sons, New Delhi, India, (1989).

[22] Kivshar, Y., & Agrawal, G. P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic crystals.* Academic Press.(2003).

[23] J. E. Muñoz Rivera, *Teoria das distribuições e equações Diferenciais Parciais.* Laboratório Nacional de Computação Científica, Rua Getulio Vargas 333 Rio de Janeiro, Petropolis (1999).

[24] Marino Badiale & Enrico Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners. Existence Results via the Variational Approach.* Springer-Verlag London (2011).

[25] W. Rudin, *Análisis funcional.* Ed. Reverte, S.A. España, (1979).

[26] W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*. Ediciones del Castillo,S.A.,Madrid-España (1996).

[27] M. Struwe, *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Diferential Equations and Hamiltonian System*. Fourth Edition, springer Verlag, Derlin, (2008).

[28] Vélez Lopez, C.A. *El teorema del paso de la montaña y aplicaciones a problemas elípticos semilineales.* Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia, (1999).

[29] Vélez Lopez, C.A. *El Teorema del Paso de la Montaña: aplicación y generalización.* Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia, (2001).

[30] K. Yosida, *Functional Analysis*. First Edition, Springer-Verlag. New York (1978).

[31] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its applications. Vol. 1 Fixed-Point Theorems*. Springer-Verlag (1985).

[32] N. B. Zographopoulos, *p-Laplacian systems on resonance,* Appl. Anal., 83, (2004), 509-519.

[33] N.B. Zographopoulos , *On a class of degenerate potential elliptic system, Nonlinear Diff. Equ. Appl.* 11 (2004) 191-199.

[34] G. Zhang and Y. Wang, *Some existence results for a class of degenerate semilinear elliptic system,* J. Math. Anal. Appl., 333, (2007), 904-918.