Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Computación Científica

Ecuaciones diferenciales parciales aplicado a finanzas: modelo de black-scholes

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica

Modalidad Examen de Suficiencia Profesional

AUTOR

Luis Zacarías HUARINGA MOSQUERA

ASESOR

Luis JAVIER SERPA

Lima, Perú

2018

Referencia bibliográfica

Huaringa, L. (2018). *Ecuaciones diferenciales parciales aplicado a finanzas: modelo de black-scholes*. [Tesina de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Computación Científica]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SANMARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMERICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

PROGRAMA DE ACTUALIZACIÓN PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL 2017-II
MODALIDAD EXAMEN DE SUFICIENCIA PROFESIONAL

(R.D. Nº 0681/FCM-D/2017)

ESCUELA PROFESIONAL DE COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

ACTA DE EXPOSICIÓN DE TESINA

En la Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:40 horas, del día 01 de marzo del 2018, se reunieron las docentes designadas como miembros del Jurado Evaluador:

- Dra. María Natividad Zegarra Garay	Presidenta
- Mg. Luis Javier Vásquez Serpa	Miembro

Para la exposición de Tesina titulada: **«Ecuaciones Diferenciales Parciales aplicado a Finanzas: Modelo de Black-Scholes»**, presentada por el Bachiller **Luis Zacarías Huaringa Mosquera**.

Luego de la exposición de la tesina, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, a las cuales el Bachiller **Luis Zacarías Huaringa Mosquera**, respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

Hecha la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, el Bachiller **Luis Zacarías Huaringa Mosquera** mereció la aprobación obteniendo como calificativo promedio y la nota de diecinueve (19) (letras y números).

A continuación los miembros del Jurado, dan manifiesto que el Bachiller **Luis Zacarías Huaringa Mosquera** APROBÓ la exposición de la tesina.

Siendo las 17:30 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente acta en dos (2) copias originales.

Mg. Luis Javier Vásquez Serpa	Dra. María Natividad Zegarra Garay
MIEMBRO	**PRESIDENTA**

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi familia en general por apoyarme incondicionalmente en mis estudios y en mi desarrollo profesional, por inculcarme el habito del estudio y de la superación ademas del cariño y afecto que siempre me han dado.

Índice General

Resumen

Asesor: Luis Javier Serpa

Titulo obtenido: Licenciado en computación científica

Desde su publicacion, el modelo Black – Scholes ha tenido un uso satisfactorio que ayuda en la toma de decisiones en sistemas financieros y empresas. Dicho modelo nos sirve para estimar el valor de las acciones a tiempo futuro, tanto en compra como venta, resolviendo una igualdad que sigue un movimiento browniano. El presente trabajo tiene como finalidad el resolver la ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes, reduciéndola a traves de un cambio de variables a la forma de una ecuación de calor la cual facilitará su desarrollo. Se pasará a resolver dicha ecuación usando transformada de Fourier obteniendo asi su solución. Por ultimo, la solución de la ecuación podrá pasar a ser estudiada y aplicada en un caso real en el cual se podría escoger cualquier acción que cotice la bolsa de valores como activo. Una vez resuelta la ecuación se plantearan formas en las cuales se pueden aplicar en la acciones de las principales empresas que coticen en Perú y a través de estos datos se calcularan los valores para la call europea. Se concluirá teniendo en cuenta el beneficio que nos otorga el modelo en la predicción de estas opciones, y que tan preciso es y a su vez se encontrara sus posibles aplicaciones y usos en la bolsa de valores.

Palabras clave: modelo, call europea, ecuación en derivadas parciales.

Abstract

Adviser: Luis Javier Serpa

Obtained tittle: Licentiate in Scientific Computing

Since its publication, the Black - Scholes model has had a satisfactory use that helps in making decisions in financial systems and companies. This model helps us to estimate the value of the shares in future time, both in purchase and sale, solving an equality that follows a Brownian movement. The purpose of this paper is to solve the equation in partial derivatives of Black-Scholes, reducing it through a change of variables to the form of a heat equation which will facilitate its development. We will solve that equation using Fourier transformed, thus obtaining its solution. Finally, the solution of the equation will be able to be studied and applied in a real case in which one could choose any action listed on the stock exchange as an asset. Once the equation is solved, ways will be considered in which they can be applied in the shares of the main companies listed in Peru and through these data the values for the European call will be calculated. It will be concluded taking into account the benefit that the model gives us in the prediction of these options, and how accurate it is and in turn we will find its possible applications and uses in the stock market.

Keywords: model, european call, partial derivative equation.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Enfoque del problema

Las opciones son parte de los denominados productos derivados, instrumentos financieros los cuales su rendimiento depende de otro activo subyacente.

Los contratos financieros dependen de elementos adicionales tales como, por ejemplo, el contrato forward que es un contrato que se usa para fijar un precio en el presente, para la compra/venta de un activo con *riesgo* a una fecha futura, denominada como fecha de entrega.

Al ser un contrato este esta conformado por dos partes, aquel que emite dicho contrato (suscriptor) y el poseedor del mismo. Dicho contrato es un acuerdo que obliga al tanto al poseedor de comprar/vender el activo en la fecha de entrega, y al suscriptor a vender/comprar el mismo.

Dado que el precio es fijado al inicio del contrato, es incierto saber si el contrato a futuro resultara ventajoso.

Por otro lado tenemos a las *opciones*, que a diferencia de los forwards, estas incluyen el derecho a elegir de dicho contrato.

Existen dos tipos de opciones llamados opción *call* y opción *put*. La opción call otorga a su poseedor el derecho de comprar un activo subyacente a un precio y fechas ya establecidas al momento de su emisión. Por su parte, la opción put, otorga a su poseedor el derecho de vender un activo subyacente a un precio y fechas ya establecidas al momento de su emisión.

Siendo asi el problema fundamental el determinar cuál vendria a ser el precio óptimo que se debe pagar por el privilegio de tener dicha opción, un problema conocido como *valuación de opciones.*

Este problema de valuación puede ser visto desde dos enfoques, tanto desde el punto de vista probabilístico asi como tambien desde el punto de vista de las ecuaciones en derivadas parciales. Este último planteado a través del sistema de ecuaciones en derivadas parciales a través de la ecuación de Black - Scholes.

Uno de los supuestos a considerar en el presente trabajo es el de no haber arbitraje, ya que dada la ausencia del mismo, la economia sigue que el valor de un derivado es el valor que un portafolio replica. Asímismo, se resolvera y expondra una solución para la validación de opciones, considerando únicamente las del tipo *call europea.* En el capítulo 2 daremos un enfoque contextual de este mismo problema teniendo en consideración trabajos similares realizados en otros países. En el capítulo 3 revisaremos las nociones teorícas usadas para resolver la ecuación en su forma de ecuacion con derivadas parciales. En el capítulo 3, resolveremos dicha ecuación y hallaremos una solución de la misma. A su vez se propondrá el método segun el cual calcularemos el precio de las opciones call europeas. En el capítulo 4, usaremos dicha solucion para describir un software capaz de recibir datos ingresados con el fin de poder asi calcular el valor de cualquier opcion. En el capítulo 5, analizaremos los resultados obtenidos. Y finalmente, en el capítulo 6, se postularan las conclusiones obtenidas como resultado del trabajo en general.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivos Generales

- Plantear la resolución de la ecuacion en derivadas parciales de la ecuacion de Black-Scholes dandole la forma de la ecuación del calor.
- Hallar la solución de dicha ecuación del calor obtenida.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Mostrar la utilidad de las opciones de divisas en el mercado peruano.

- Exponer condiciones necesarias para el desarrollo de un mercado de derivados y la arquitectura de desarrollo necesaria.
- Obtener un programa o aplicativo que logre calcular el valor óptimo de las call europeas.

Capítulo 2

Marco Contextual

2.1. Antecedentes

Existen trabajos de investigacion que realizaron el estudios acerca de la valuacion de opciones de divisas basandose, de igual manera, en el conocido modelo de Black-Scholes. Tenemos asi un trabajo en el cual se realizo el estudio dentro de La Banca Central [1] en el cual luego de introducirnos los conceptos necesarios, aborda algunas experiencias realizadas en bancos de otros paises tales como México, Colombia, Brasil, y finalmente, Perú, siendo este último caso de particular interés en el cual expone los elementos y condiciones necesarias para el desarrollo de un mercado de derivados, describe los elementos necesarios para la arquitectura de mercado adecuada. Seguidamente describe estas características y pasa a compararlos con los otros mercados a nivel internacional terminando asi detallando dichos elementos de la arquitectura para el mercado peruano. Por otra parte tenemos un trabajo que trata acerca del cálculo estocástico aplicado a las finanzas y el precio de las opciones segun el modelo Black-Scholes [2], en este trabajo se fundamentan las bases matemáticas que fueron usadas para dicho modelo, tanto del punto de vista estocástico como el de ecuaciones en derivadas parciales, nos basaremos entonces de este trabajo para fundamentos teoricos. Se tiene ademas una tesis [3] la cual trata tambien acerca de la valuación de una opción call europea, llegando incluso a aplicarla a las acciones de telefonos en Mexico mayor conocida como Telmex.

2.2. Contexto

2.2.1. Organismos involucrados

- **La Bolsa de Valores:** En Perú la Bolsa de Valores de Lima (BVL), es una organización privada que brinda las facilidades necesarias para que sus miembros, atendiendo los mandatos de sus clientes, introduzcan órdenes y realicen negociaciones de compra y venta de valores, tales como acciones de sociedades o compañías anónimas, bonos públicos y privados, certificados, títulos de participación y una amplia variedad de instrumentos de inversión.

- **Las Empresas:** Ya que al colocar sus acciones en el mercado y ser adquiridas por el público, obtiene de este el financiamiento necesario para cumplir sus fines y generar riqueza.

- **Ahorradores:** Porque estos se convierten en inversores y pueden obtener beneficios gracias a los dividendos que les reportan sus acciones.

- **El Estado:** De la misma manera, en la Bolsa el Estado dispone de un medio para financiarse y hacer frente al gasto público, así como adelantar nuevas obras y programas de alcance social.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Finanzas

Llamaremos activo a cualquier posesión que pueda producir beneficios económicos. Un portafolio es un conjunto de activos, que pueden ser acciones, derivados, bonos, etc. En la realidad existen costos para realizar operaciones financieras. Estos costos de transacción pueden depender de si se trata de una transacción de un activo subyacente o un derivado, de si se trata de una compra o de una venta, etc. También se usará la llamada tasa de interés libre de riesgo que es aquella de una inversión "segura", libre de riesgo. Esto en la práctica no es del todo errado, ya que si se analizan activos y derivados en cortos períodos de tiempo (por ejemplo trimestres), entonces un bono del Estado a veinte años resulta una inversión segura, y hasta es razonable suponer constante la tasa de ese bono en el corto plazo.

Se llama rentabilidad a la ganancia relativa de una inversión, es decir, si llamamos S0 a la inversión inicial, y ST a lo que se obtiene a un tiempo T, la rentabilidad R es:

$$R = \frac{S_T - S_0}{S_0}$$

Otro concepto es el arbitraje, que es el proceso de comprar un bien en un mercado a un precio bajo y venderlo en otro a un precio más alto, con el fin de beneficiarse con la diferencia de precios. En el caso que nos ocupa, utilizaremos el principio de no arbitraje, es decir, no existe la posibilidad de realizar una inversión sin riesgo y ganar dinero (o por lo menos no más que invirtiendo con la tasa libre de riesgo). De no ser así, existiría claramente una forma de hacer dinero infinito. Los hedgers, replicadores o cobertores son aquellos agentes que intentan reducir el riesgo al mínimo y tratan de no exponerse a los cambios adversos de los valores de los activos. En general conforman portafolios con activos en una posición (compra o venta) y algún derivado sobre éstos en la otra. Así, si el precio del activo se mueve de manera muy desfavorable, está la opción, por ejemplo, que amortigua la pérdida. Un derivado financiero o producto derivado, o simplemente derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende de otros activos, como por ejemplo una acción, una opción o hasta de otro derivado. Se llama payoff de un derivado, activo o portafolio al resultado final de la inversión. Una opción es un contrato que le da al dueño el derecho, pero no la obligación, de negociar un activo predeterminado, llamado también el activo subyacente por un precio determinado K llamado el strike price o precio de ejercicio en un tiempo en el futuro T, llamada fecha de expiración. Una opción call da al dueño el derecho a comprar y una put el derecho a vender. La opción se llama Europea si sólo puede ser ejercida a tiempo T. Se llama Americana si puede ser ejercida a cualquier tiempo hasta la fecha de expiración. El payoff, de una call es máxST - K,0 ya que si ST ¿K se ejerce a K y se vende a ST , lo que da una ganancia de ST - K. En el otro caso la opción no se ejerce y el payoff es 0. El de una put, análogamente es máx { K-ST, 0} . El hecho de que uno tenga el derecho y no la obligación es lo que hace difícil la valuación de una opción. La volatilidad del activo es la desviación estándar de la variación de crecimiento del precio.

3.2. Probabilidad

Se conoce como proceso estocástico a un conjunto de variables aleatorias que dependen de un parámetro, por ejemplo el tiempo, es decir, X(t) — t ¿0. Un proceso estocástico Z(·) se llama movimiento browniano o proceso de Wiener si:

1. $Z(0) = 0$
2. Para cualquier $t > 0$ y $a > 0$, $Z(t + a) - Z(t) \sim N(0, a)$
3. Para cualquier $t > 0$ y $a > 0$, $Z(t + a) - Z(t)$ son independientes de $Z(s)|0 < s < t$

Un proceso de Wiener describe la evolución de una variable con distribución normal. La deriva del proceso es 0 y la varianza es 1 por unidad de tiempo. Esto significa que, si el valor de la variable es x0 al tiempo 0, entonces al tiempo t es normalmente distribuida con media x0 y varianza t. Un proceso generalizado de Wiener describe la evolución de una variable normalmente distribuida con una deriva de a y varianza b2 por unidad de tiempo, donde a y b son constantes. Esto significa que si, como antes, el valor de la variable es x0 al tiempo 0 entonces es normalmente distribuida con media x0 + at y varianza bt al tiempo t. Puede ser definido para una variable X en términos de un proceso de Wiener Z como

$$dX = adt + bdZ$$

3.2.1. Lema de Ito

Supongamos que S cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS = S\mu dt + S\sigma dZ$$

donde $Z(t)$ es un movimiento browniano. Sea V una función de dos variables que toma reales de C^2 en su dominio, dada $V = V(S,t)$. Entonces se satisface lo siguiente:

$$dV = \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) \partial t$$

3.3. Ecuacion diferencial parabólica

Considere una ecuacion diferencial parcial de la forma

$$Au_{xx} + 2Bu_{xx} + Cu_{xx} + Du_x + Fu_x + E = 0, \quad u = u(x,y).$$

Se dice que esta ecuacion es parabolica si

$$det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = 0.$$

3.3.1. Solución ecuación del calor

Sea el Problema de Valor Inicial

$$u_t - ku_{xx} = 0 \quad \text{x } \in \mathbb{R}, \text{ t } > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad\qquad \text{x } \in \mathbb{R}$$

La transformada de Fourier de U:

$$U(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-isx}dx \tag{3.2}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(s,t)e^{isx}ds \tag{3.3}$$

Asi, si hallamos (3.2), luego la solución será dado por (3.3).

Para determinar U, derivamos (3.2) con respecto a "t" y usamos (3.1).

$$\frac{\partial U}{\partial t}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-isx}dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}e^{isx}ds \qquad (*)$$

Como U_t y U_{xx} son absolutamente integrables en $\mathbb{R}$, $\forall s > 0$ $\forall t > 0$

La derivación con respecto a t bajo el signo de la integral es válida.

Integrando por partes dos veces la última integral, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_{xx} e^{isx} ds = e^{isx} u_x \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - (-is) \int \frac{e^{-isx}}{-is} u_x dx$$

$$= is \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx} u_x dx = is \left[e^{-isx} u|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - (-is) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-isx}}{-is} dx \right]$$

$$= (is)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-isx} dx$$

$$= -s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-isx} dx$$

Luego

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx} e^{-isx} dx = \frac{-1}{s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-isx} dx}$$

de (*)

$$\frac{\partial U}{\partial t}(s,t) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \left((-s^2) \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-isx} dx \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(s,t) = (-s^2) k \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-isx} dx}_{u(s,t)}$$

así $\frac{\partial}{\partial t}(s,t) = -ks^2 U(s,t)$

Se supuso que u y u_x se anulan cuando $|x| \to +\infty$

Queremos que la función f dado en (3.1) sea suave a trozos y absolutamente integrable sobre $\mathbb{R}$, así su Transformada de Fourier existe, luego tenemos:

$$\begin{aligned}
U(s,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)e^{-isx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}dx = F(S)
\end{aligned}$$

$$F[f](s) = F(s)$$

Luego tendremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(s,t) + ks^2U(s,t) = 0 \\ U(s,0) = F(s) \end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t}(s,t) &= -ks^2U(s,t) \\
\underbrace{\frac{\partial U}{\partial t}}_{U(s,t)} &= -ks^2 \\
\frac{\partial}{\partial t}(ln[U(s,t)]) &= -ks^2 \\
ln[U(s,t)] &= -ks^2t + C \\
U(s,t) &= e^{-ks^2t}e^c
\end{aligned}$$

para $t = 0$

$$F(s) = U(s,0) = e^0.e^c = e^c$$

así

$$\boxed{U(s,t) = e^{-ks^2t}F(s)} \tag{3.4}$$

reemplazando en (3.4)

$$
\begin{aligned}
U(s,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ks^2}F(s)e^{isx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{-ks^2t+isx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-is\xi}d\xi\right]e^{-ks^2+isx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is(x-\xi)-ks^2t}f(\xi)d\xi\right]ds
\end{aligned}
$$

Esta integral doble correspondiente a la integral iterada es absolutamente convergente porque $f(x)$ y e^{-ks^2t} son absolutamente integrables.

Luego podemos cambiar el orden de integración así:

$$
\begin{aligned}
U(s,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is(x-\xi)-ks^2t}f(\xi)d\xi\right]d\xi \\
U(s,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is(x-\xi)-ks^2t}d\xi\right]}_{G(x-\xi,t)}f(\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\boxed{U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi,t)f(\xi)d\xi} \qquad (**)
$$

donde

$$
\boxed{G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx-ks^2t}ds}
$$

Como $e^{ix} = cosx + isenx$

así

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ks^2t}(cos(sx) + isen(sx))dx$$

donde las funciones $e^{-ks^2t}cos(sx)$ y $e^{-ks^2t}sen(sx)$ son absolutamente integrables en $s \in \mathbb{R}$ uniformemente en x, t para $t > 0$.

Como $e^{-ks^2t}cos(sx)$ es par y $e^{-ks^2t}sen(sx)$ es un par, así

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ks^2t}\underbrace{sen(sx)ds}_{impar} = 0$$

Luego

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ks^2t}cos(sx)ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-ks^2t}cos(sx)ds \end{aligned}$$

Introduciendo la nueva variable

$$\boxed{z = s\sqrt{kt}}$$

$$\begin{cases} z^2 = ks^2t \\ z = s\sqrt{kt} \to s = \frac{z}{\sqrt{kt}} \end{cases}$$

$$dz = \sqrt{ks}ds \leftarrow ds = \frac{dz}{\sqrt{kt}}$$

Obtenemos:

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{kt}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}cos\left(\frac{xz}{\sqrt{kt}}\right)dz \tag{3.5}$$

Usando

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} cos(xt)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{-x^2}{4}}}$$

Tendremos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} cos\left(\frac{xz}{\sqrt{kt}}\right) dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{-1}{4}(\frac{x}{\sqrt{kt}})^2} \\ &\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\end{aligned}$$

Luego reemplazando en (3.5):

$$G(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ks^2 t} cos(sx)ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{\frac{-x^2}{4kt}} \qquad (***)$$

de (***) en (**), así:

$$\therefore \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4kt}} f(\xi)d\xi}$$

Capítulo 4

Metodología

4.1. Formulación Matemática

4.1.1. Modelo Black - Scholes

Dar las conficiones a las funciones: V, S_t, f definidas en $t \in [0, T]$, para resolver:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma {S_t}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - rF_t = 0$$
$$F_T = F(S_T, T) = f(S_T) = max\{S_T - K, 0\} \quad \text{condición final}(t = T)$$
$$F(0, t) = 0$$

Resolviendo se obtiene:

$$F(S_t, t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

donde

$$\begin{aligned} S \quad : \quad & [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R} \\ & (t, \omega) \mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

tal que para cada $t \in [0, T]$, la función

$$\begin{aligned} S(t) = S_t : \Omega & \to \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Además $\sigma, r, T, K \in \mathbb{R}$ σ es la volatilidad

r es la tasa libre de riesgo

T es el vencimiento

K es el precio de ejercicio (el valor al que se va a comercializar en tiempo T el activo S)

4.1.2. Caso de una Opción Europea

En el caso de una Opción Call Europea

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma {S_t}^2 \frac{\partial^2 C}{\partial {S_t}^2} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - rC = 0$$

$$C_T = C(S_T, T) = f(S_T) = max\{S_T - K, 0\} \quad \text{condición final}(t = T)$$

$$C(0, T) = 0$$

$$\lim_{S\to\infty} C(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)} \quad \text{(condición en el infinito)}$$

σ es la volatilidad

r es la tasa libre de riesgo

T es el tiempo vencimiento de la opción

K es el precio de ejercicio (valor que se va a comercializar en tiempo T el activo S)

La solución de la EDP anterior es :

$$C(S, t) = S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{s^2}{2}} \partial s \right) - Ke^{-r(T-t)} \left(\int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{s^2}{2}} \partial s \right)$$

$$C(S, t) = S_T N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_1 = \frac{ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_1 + d_2 = \sigma\sqrt{T - t}$$

4.2. Desarrollo Matemático

4.2.1. Modelo Black - Scholes

Para resolver la ecuación se hará el siguiente cambio de variable:

$$S = Ke^x, \qquad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2},$$

$$F(S,t) = KV(x,\tau) = KV(x(S,t),\tau(S,t)), \qquad S = S_t$$

Derivando parcialmente:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = K\frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}K\frac{\partial V}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = K\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = K\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right) = \frac{K}{S^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

Para la condición final se tiene:

$$S - K = F(S,T) = KV(x,0)$$

entonces

$$Ke^x - K = KV(x,0)$$
$$V(x,0) = e^x - 1$$

La EDP queda definida

$$\begin{cases} \frac{-1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial x} + rK\frac{\partial V}{\partial x} - rKV \\ \\ V(x,0) = e^x - 1 \end{cases}$$

Ordenando los términos y tomando $\lambda = \frac{2r}{\sigma^2} - 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda - 1)\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda V = \frac{\partial V}{\partial \tau} \quad , \quad x \in R, \quad , \quad \tau \in [0, \frac{t\sigma^2}{2}] \\ \\ V(x,0) = e^x - 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

Para eliminar términos de menor orden se hará un nuevo cambio de variable

$$V(x,\tau) = u(x,\tau)e^{\alpha x + \beta \tau}$$

Derivando parcialmente

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \beta u e^{\alpha x + \beta \tau} + \frac{\partial u}{\partial \tau} e^{\alpha x + \beta \tau}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha u e^{\alpha x + \beta \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \alpha^2 u e^{\alpha x + \beta \tau} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial \tau} e^{\alpha x + \beta \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{\alpha x + \beta \tau}$$

Reemplazando en (1)

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda - 1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) - \lambda u$$

Agrupando

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \underbrace{(\beta + \lambda - \alpha^2 - 1)}_{0} u = \underbrace{(2\alpha + \lambda - 1)}_{0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

De α y β:

$$(\beta + \lambda - \alpha^2 - 1) = 0 \quad (2\alpha + \lambda - 1) = 0$$

$$\beta = -\frac{(\lambda + 1)^2}{4} \quad y \quad \alpha = -\frac{\lambda - 1}{2}$$

Luego

$$V(x,\tau) = u(x,\tau)e^{-\frac{(\lambda-1)}{2}x - \frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau} \qquad ... \qquad (\theta)$$

$$u(x,\tau) = V(x,\tau)e^{\frac{(\lambda-1)}{2}x + \frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau}$$

Para la condición dada se tiene:

$u(x,0) = u_0(x) = V(x,0)e^{\frac{(\lambda-1)}{2}x}$

$u_0(x) = (e^x - 1)e^{\frac{(\lambda-1)}{2}x}$

$u_0(x) = e^{\frac{(\lambda+1)}{2}x} - e^{\frac{(\lambda-1)}{2}x}$

Luego se obtiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u_0(x) = e^{\frac{(\lambda+1)}{2}x} - e^{\frac{(\lambda-1)}{2}x} \end{cases} \tag{4.2}$$

La ecuación del calor tiene solución dada por:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(w) e^{-\frac{(x-w)^2}{4\tau}} dw = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)w} - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)w}) e^{-\frac{(x-w)^2}{4\tau}} dw$$

Haciendo un cambio de variable para la solución: $y = \frac{w-x}{\sqrt{2\tau}} \qquad dw = \sqrt{2\tau} dy$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)w} - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)w}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$u(x,\tau) = \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}y - \frac{y^2}{2}} dy}_{\mathrm{A}_1} - \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)\sqrt{2\tau}y - \frac{y^2}{2}} dy}_{\mathrm{A}_2}$$

Sumando y restando $(\lambda+1)^2\frac{\tau}{4}$ en la 1ra y 2da exponencial respectivamente de A_1 se tiene:

$$A_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x + (\lambda+1)^2\frac{\tau}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[y - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy$$

Para resolver A_1 se hará el siguiente cambio de variable:

$$s = y - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau} \rightarrow ds = dy$$

$$A_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x + (\lambda+1)^2\frac{\tau}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

De la función gaussiana se sabe que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}dx = a|c|\sqrt{2\pi}$$

Así se tiene:

$$A_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+(\lambda+1)^2\frac{\tau}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}$$

$A_1 = e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+(\lambda+1)^2\frac{\tau}{4}}$

Del mismo modo para A_2 se tendrá que:

$$A_2 = e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x+(\lambda-1)^2\frac{\tau}{4}}$$

$$\therefore u(x,\tau) = A_1 - A_2$$

Reemplazando en (θ)

$$V(x,\tau) = u(x,\tau)e^{-\frac{(\lambda-1)}{2}x-\frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau}$$

$$V(x,\tau) = (A_1 - A_2)e^{-\frac{(\lambda-1)}{2}x-\frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau} = e^x - e^{-\lambda\tau}$$

Retomando a las variables iniciales:

$$\frac{F(S,t)}{K} = e^{ln(\frac{S}{K})} - e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \quad , \quad \lambda = \frac{2r}{\sigma^2}$$

$$F(S,t) = \frac{S}{K} - e^{-r(T-t)} \quad , \quad S = S_t$$

$$\therefore F(S_t,t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

4.2.2. Caso de una Opción Europea

En el caso de una Opción Europea

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - rC_t = 0 \qquad \ldots (I)$$

$S_t = C(S_t, T) = f(S_t) = max\,(S_t - K, 0)$ condición final

<u>Resolución</u>

Para transformar la ecuación Black-Scholes a su forma de la ecuación del calor consideraremos los siguientes cambios de variables:

$$S_t = Ke^{x_t} \Longrightarrow x_t = ln(\frac{S_t}{K})$$

$$t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \Longrightarrow \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t) \qquad \ldots (*)$$

$$k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Donde las nuevas variables x_t y τ representan la diferencia logaritmica entre los precios S_t y K, y el tiempo invertido respectivamente.

El precio de la acción se denotara como:

$$C(S_t, t) = Kv(x_t, \tau)$$

Que satisface:

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= \max(S_t - K, 0) \\ &= \max(Ke^{x_t} - K, 0) \\ &= \max(K(e^{x_t} - 1), 0) \\ &= K\max(e^{x_t} - 1, 0) \\ &= Kv(x_t, 0) \end{aligned}$$

donde

$$v(x_t, 0) = \max(e^{x_t} - 1, 0)$$

4.2.3. Cálculo de derivadas parciales

Recordemos que por (*) se tiene que:

$$x_t = \ln\frac{S_t}{K} \qquad \text{y} \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$$

Derivadas parciales C con respecto a t y S_t

- $$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}Kv(x_t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t}Kv\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right)$$

  $$= K\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}$$

  $$= K\frac{\partial v}{\partial \tau}\left(\frac{-\sigma^2}{2}\right) \qquad \ldots(1)$$

- $$\frac{\partial C}{\partial S_t} = \frac{\partial}{\partial S_t} Kv(x_t, \tau) = \frac{\partial}{\partial S_t} Kv\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)$$

$$= K\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S_t}$$

$$= K\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{1}{S_t}\right)$$

$$= \frac{K}{S_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}$$

$$= e^{-x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t} \qquad \ldots(2)$$

Finalmente hallaremos la segunda derivada parcial de C con respecto a S_t, dada por:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t}\left(e^{-x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}\right)$$

$$= \frac{\partial x_t}{\partial S_t}\frac{\partial}{\partial x_t}\left(e^{-x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}\right)$$

$$= \frac{1}{S_t}\left(e^{-x_t}\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - e^{-x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}\right)$$

$$= \frac{1}{Ke^{x_t}}\left(e^{-x_t}\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - e^{-x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}\right)$$

$$= \frac{1}{K}\left(e^{-2x_t}\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}\right) \qquad \ldots(3)$$

4.2.4. Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en terminos de un primer cambio de variable

Ahora, reemplazaremos las ecuaciones obtenidas en (1),(2) y (3) en la ecuación original (I), obteniendo asi el siguiente resultado:

Sustituyendo las derivadas (1),(2) y (3) en (I)

$$-\frac{1}{2}K\sigma^2\frac{\partial v}{\partial \tau}+\frac{1}{2}K^2e^{2x_t}\sigma^2\left(e^{-2x_t}\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2}-e^{-2x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}\right)\frac{1}{K}+rKe^{x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}e^{-x_t}-rKv=0$$

Simplificando tenemos:

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau}+\left(\frac{r}{\sigma^2/2}-1\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{r}{\sigma^2/2}v=0$$

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}}\frac{\partial v}{\partial x_t}-\frac{\partial v}{\partial x_t}-\frac{r}{\sigma^2/2}v=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x_t}-\frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}}\frac{\partial v}{\partial x_t}+\frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}}v=0$$

Haciendo uso de la definicion de k dada en (*) tenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2}+(k-1)\frac{\partial v}{\partial x_t}-kv \qquad (**)$$

Sin embargo esta ecuacion puede simplificarse aun mas como veremos a continuación

4.2.5. Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en terminos de un segundo cambio de variable

Siguiendo con el desarrollo, para transformar la ecuación de Black-Scholes en la ecuación de difusión del calor se requiere un segundo cambio de variable. Definamos:

$$v(x,\tau)=e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) \qquad \ldots(4)$$

Las derivadas parciales de v con respecto a r y x_t se calculan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial v}{\partial x_t}=\frac{\partial}{\partial x_t}e^{\alpha x+\beta\tau}u$$

$$=e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x_t}+\alpha u\right) \qquad \ldots(5)$$

Análogamente:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_t} = \frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{\partial}{\partial x_t}\right)$$

$$= e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha^2 u\right) \qquad \ldots(6)$$

Además:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x_t} + ue^{\alpha x+\beta\tau}\beta$$

$$= e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u\right) \qquad \ldots(7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5), (6) y (7) en (**) se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + (k-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u\right) - kv$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u[\beta - \alpha^2 - (k-1)\alpha + k] = \frac{\partial u}{\partial x_t}(2\alpha + k - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} \qquad \ldots(8)$$

4.2.6. Forma de ecuación de difusión de calor

A continuación eligiremos parametros convenientes en (8) de tal manera que tomados α y β queden de la siguiente manera:

$$2\alpha + k - 1 = 0$$

y

$$\beta - \alpha^2 - (k-1)\alpha + k = 0$$

entonces

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$$

$$\beta = -k - \alpha^2 = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

Sustituyendo los valores de α y β en (8):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}. \qquad -\infty < x_t < \infty, \qquad \tau > 0$$

con la condición

$$u(x_t, 0) = u_0(x_t) = max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t}, 0\right) \qquad \ldots(9)$$

ya que

$$v(x_t, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x_t, \tau)$$

Esto se debe a que, por (4), se tiene que:

$$v(x_t, 0) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t} u(x_t, 0)$$

en consecuencia

$$u(x_t, 0) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t} v(x_t, 0)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t} max(e^{x_t} - 1, 0)$$

$$= max(e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t + x_t} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t}, 0)$$

$$= max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t}, 0)$$

Así, la varilla de longitud infinita queda representada por $-\infty < x_t < \infty$, la cantidad de calor que se aplica en el punto x_t en el tiempo $\tau = 0$ está dad por $u_0(x_t)$ y la cantidad de calor en $\tau > 0$ en cada punto x_t es descrita por $u(x_t, \tau)$. Así, u está asociada con el valor intrínseco de la opción x_t con el rendimiento del activo ajustado por precio de ejercicio y r con el tiempo invertido yendo de la fecha de vencimiento hacia atrás.

4.2.7. Obtención de la solución de la ecuación de Black-Scholes resolviendo la ecuación de calor

Finalmente, obtendremos la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes mediante la solución de la ecuación de difusión de calor deshaciendo los cambios de variables realizados. Observemos primero, que la solución de la ecuación del calor, dada la condición (9), está dada por:

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x_t)^2}{4\tau}} ds$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{s - x_t}{\sqrt{2\tau}}$$

En este caso, se cumple que

$$ds = \sqrt{2\tau} dy$$

En consecuencia,

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_t + \sqrt{2\tau} y) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_t + \sqrt{2\tau} y) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Por otro lado, a partir de (8) tenemos que:

$$u_0(s) = max\left\{ e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}, 0 \right\}$$

entonces

$$u(x_t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_t + \sqrt{2\tau}y)e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}\right\} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$= \Psi(k+1) - \Psi(k-1)$$

En la segunda integral de la ecuación anterior se ha utilizado el hecho de que:

$$e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t+y\sqrt{2\tau}} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t+y\sqrt{2\tau}} > 0$$

implica

$$y > -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}$$

Las cantidades $\Psi(k+1)$ y $\Psi(k-1)$ se calcularán en forma separada. Note que

$$\Psi(k+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t} e^{-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}y} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t} e^{-\frac{1}{2}[y^2-(k+1)\sqrt{2\tau}y]} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}[y^2-(k+1)\sqrt{2\tau}y+\frac{1}{2}(k+1)^2\tau]} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}[y-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable:

$$\epsilon = y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

en cuyo caso

$$d\epsilon = dy$$

Observe que cuando $y = -x_t/\sqrt{2\tau}$, entonces

$$\epsilon = -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2} = -\frac{x_t+(k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

En tal caso, se tiene que:

$$\Psi(k+1) = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{\left\{\epsilon > -\frac{x_t+(k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{\left\{-\infty < \epsilon < \frac{x_t+(k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1),$$

donde

$$d_1 = \frac{x_t + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

y

$$\Phi(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon$$

es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. El cálculo de $\Psi(k-1)$ es similar al de $\Psi(k+1)$, sólo que en lugar del argumento $k+1$ se tiene $k-1$. Es decir,

$$\Psi(k-1) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \int_{\left\{-\infty < \epsilon < \frac{x_t+(k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(d_2),$$

donde

$$d_2 = \frac{x_t + (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

Ahora bien, dado anteriormente tenemos que:

$$x_t = ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Reemplazando en las ecuaciones de d_1 y d_2, se tiene que:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)(r+\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

y

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Por último, dado que:

$$c = Kv(x_t, \tau)$$

con

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x_t, \tau)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} (\Psi(k+1) - \Psi(k-1))$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
C &= K\left(e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\right)(\Psi(k+1) - \Psi(k-1)) \\
&= K\left(e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\right)\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\Phi(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau}\Phi(d_2)\right) \\
&= K(e^{x_t}\Phi(d_1) - e^{k\tau}\Phi(d_2)) \\
&= S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)
\end{aligned}$$

Esta expresión coincide plenamente con la fórmula de la valuación teórica de Black-Scholes

Capítulo 5

Implementación

5.1. Excel

Es un software informático, desarrollado y distribuido por Microsoft Corp, que permite realizar tareas contables y financieras gracias a sus funciones, desarrolladas específicamente para ayudar a crear y trabajar con hojas de cálculo.

Entre sus usos mas importantes, aprovecharemos la posilidad que da a sus usuarios de personalizar sus hojas de cálculo mediante la programación de funciones propias, que realicen tareas específicas, ajustadas a las necesidades de cada uno, y que no vengan incluidas dentro del software en si.

Teniendo asi en Excel una herramienta que nos permita organizar los datos que descarguemos, especificamente los valores de acciones de empresas, luego de analizarlos empezaremos a procesarlos en caso sea necesario (datos faltantes, erroneos, etc). De igual manera nos ayudara para calcular los demás datos necesarios en funcion de los ingresados.

Por último aclaramos que excel es un programa comercial, lo cual implica que hay que pagar una licencia para poder instalarlo. Si bien existen otras opciones de código abierto (“open source“), que puedan realizar tareas de forma similar al Excel y que también permiten administrar hojas de cálculo, tales como OpenOffice.org Calc y Google Docs, se trabajará con Microsoft Excel dado a los problemas de compatibilidad que los demas programas tienen (no pueden ser leidos en Excel u otras aplicaciones a excepción del mismo)

5.2. Matlab

Es un entorno de computación y desarrollo de aplicaciones totalmente integrado orientado para llevar a cabo proyectos en donde se encuentren implicados elevados cálculos matemáticos y la visualización gráfica de los mismos. MATLAB integra análisis numérico, cálculo matricial, proceso de señal y visualización gráfica en un entorno completo donde los problemas y sus soluciones son expresados del mismo modo en que se escribirian radicionalmente, sin necesidad de hacer uso de la programación tradicional.

MATLAB dispone también en la actualidad de un amplio abanico de programas de apoyo especializados, denominados Toolboxes, que extienden significativamente el número de funciones incorporadas en el programa principal. Estos Toolboxes cubren en la actualidad prácticamente casi todas las áreas principales en el mundo de la ingeniería y la simulación, destacando entre ellos el 'toolbox' de proceso de imágenes, señal, control robusto, estadística, análisis financiero, matemáticas simbólicas, redes neurales, lógica difusa, identificación de sistemas, simulación de sistemas dinámicos, etc. es un entorno de cálculo técnico, que se ha convertido en estándar de la industria, con capacidades no superadas en computación y visualización numérica.

Capítulo 6

Resultados

A continuacion mostraremos en el presente capítulo las simulaciones realizadas usando el Modelo Black-Scholes en su forma de ecuaciones en derivadas parciales.

Presentaremos algunas aplicaciones de la fórmula de Black-Scholes usando datos reales, para lo cual tomaremos el precio de una acción y usaremos los datos registrados en la Bolsa de Valores de Lima (BVL).

Para hacer dicha comparativa del modelo con una situación real, hemos obtenido los precios de las acciones.

6.1. Descripción del Activo Subyacente

Escogeremos una acción que cotice en la bolsa de valores como activo subyacente, de modo que podamos aplicar la fórmula de Black-Scholes. Para el presente trabajos se escogió las acciones del Banco de Credito del Perú (BCP) que cotiza en la BVL.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1–2	Fecha cotización	Apertura	Cierre	Máxima	Mínima	Promedio	Cantidad Negociada	Monto Negociado (S/.)	Fecha anterior	Cierre anterior
3	1/02/2018	6.35	6.3	6.35	6.3	6.3	21,248.00	133,919.80	31/01/2018	6.35
4	31/01/2018	6.28	6.35	6.35	6.28	6.31	85,231.00	537,424.75	30/01/2018	6.28
5	30/01/2018	6.28	6.28	6.29	6.28	6.28	20,550.00	129,091.35	29/01/2018	6.26
6	29/01/2018	6.3	6.26	6.3	6.26	6.27	18,600.00	116,533.56	26/01/2018	6.3
7	26/01/2018	6.25	6.3	6.3	6.25	6.3	76,253.00	480,041.25	25/01/2018	6.25
8	25/01/2018	6.25	6.25	6.25	6.25	6.25	6,072.00	37,924.25	24/01/2018	6.22
9	24/01/2018	6.22	6.22	6.22	6.22	6.22	2,000.00	12,440.00	23/01/2018	6.21
10	23/01/2018	6.25	6.21	6.25	6.21	6.22	11,633.00	72,304.93	22/01/2018	6.25
11	22/01/2018	6.26	6.25	6.26	6.25	6.25	35,432.00	221,473.77	19/01/2018	6.25
12	19/01/2018	6.2	6.25	6.25	6.2	6.22	10,136.00	63,042.75	18/01/2018	6.2
13	18/01/2018	6.24	6.2	6.24	6.2	6.21	12,836.00	79,762.02	17/01/2018	6.2
14	17/01/2018	6.25	6.2	6.25	6.2	6.23	20,184.00	125,823.94	16/01/2018	6.25
15	16/01/2018	6.2	6.25	6.25	6.2	6.21	26,020.00	161,487.35	15/01/2018	6.2
16	12/01/2018	6.2	6.3	6.3	6.2	6.24	25,267.00	157,765.40	11/01/2018	6.2
17	11/01/2018	6.2	6.2	6.2	6.2	6.2	8,332.00	51,658.40	10/01/2018	6.2
18	10/01/2018	6.2	6.2	6.2	6.2	6.2	29,033.00	180,004.55	8/01/2018	6.17
19	9/01/2018								8/01/2018	6.17
20	8/01/2018	6.25	6.17	6.25	6.17	6.19	33,960.00	210,353.20	5/01/2018	6.16
21	5/01/2018	6.3	6.16	6.3	6.16	6.22	41,246.00	256,421.36	4/01/2018	6.17
22	4/01/2018	6.15	6.17	6.18	6.15	6.17	40,130.00	247,662.46	3/01/2018	6.1
23	3/01/2018	6.06	6.1	6.1	6.06	6.08	26,000.00	158,200.00	29/12/2017	6
24	2/01/2018								29/12/2017	6
25	1/01/2018									6

En la recopilación de datos se obtuvieron un total de 20 observaciones del precio de cierre de la acción estudiada, datos que se obtuvieron de los dias habiles en la BVL.

6.2. Construcción del Producto Derivado

Ahora se construira el producto derivado o call europea que dependerá del precio de la acción del BCP. Para dicha construcción tendremos que determinar los parametros usados en la formula de Black-Scholes. A continuacion se mostrarán dichos valores para la construcción de nuestra call europea:

1. s: es el precio de la acción al tiempo inicial ($t = 0$), el cual se tomará como el promedio aritmético de los precios observados de las acciones del BCP, siendo asi $s = S/$,6,231
2. T: la fecha de vencimiento de la opción a considerar, se tomara T=1 (un año)
3. r: la tasa de interés libre de riesgo, al no tener los datos asignados para la acción a la cual se esta estudiando se tomará el valor fijo de r=0.15 (osea 15
4. σ: la volatilidad del activo subyacente, se toma como la desviación estandar de la utilidad logarítmica de los precios observados

5. X: el precio strike o de ejercicio , se tomara simplemente como X = s + 2 para diferentes ejemplos.

Aplicaremos los valores obtenidos en nuestro programa de Matlab para calcular el precio de la opción call.

BROWNIANO.m ACCION.m CALL_EUROPEA.m

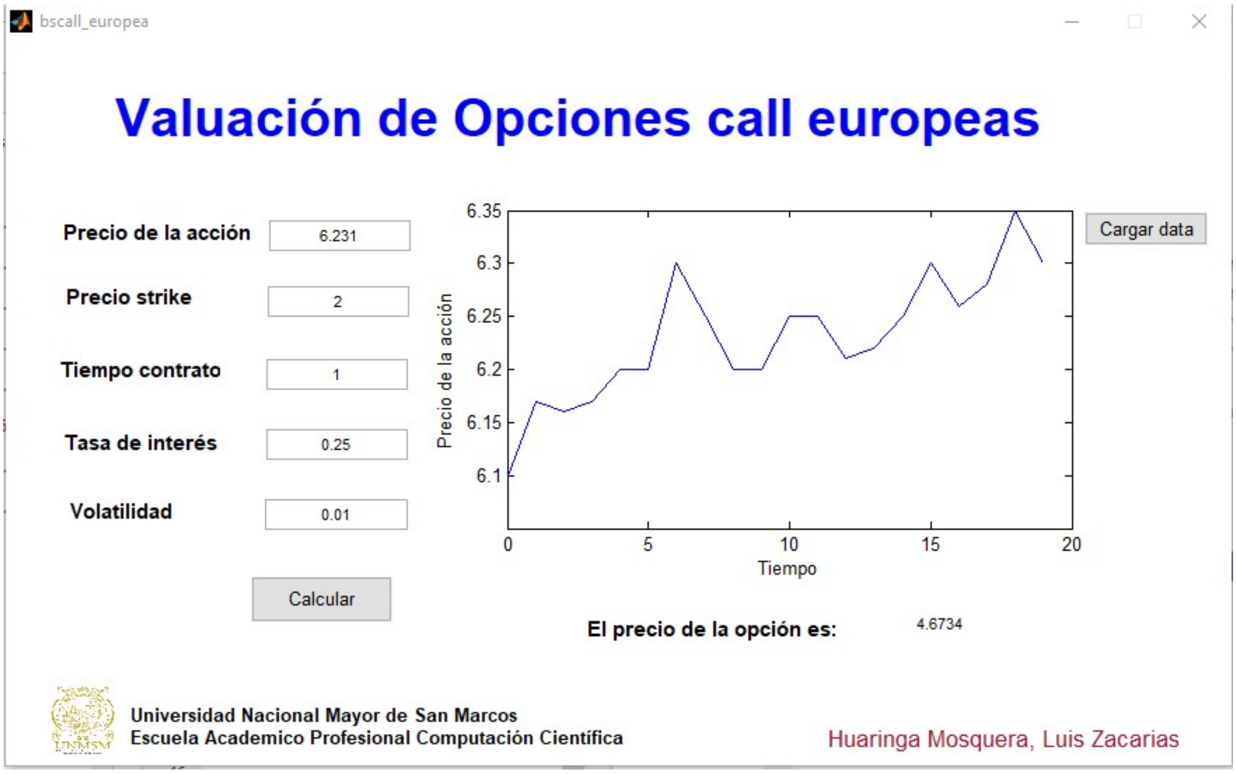
```
clc;
clear;
S0=6.231; %precio de la acción al inicio (t=0)
X=2; %precio de strike
T=1; %tiempo del contrato
r=.25; %tasa de interes
sigma=.01; %volatilidad
syms t
d1=(log(S0/X)+(r+(1/2)*(sigma)^2)*(T))/(sigma*sqrt(T));
d2=(log(S0/X)+(r-(1/2)*(sigma)^2)*(T))/(sigma*sqrt(T));
N1=1/sqrt(2*pi)*int(exp(-(t^2)/2),-inf,d1);
N2=1/sqrt(2*pi)*int(exp(-(t^2)/2),-inf,d2);
C=eval(S0*N1-X*exp(-r*T)*N2); %Precio de la opción call hallado
disp('El precio de la opción es:');
disp(C);
```

Obteniendo asi como resultado el precio de la opción

Command Window

```
El precio de la opción es:
    4.6734

>>
```

Finalmente, podremos resumir este procedimiento en un único programa de matlab el cual recoja la data desde una hoja de cálculo en excel (Anexo, programa en Matlab).



Capítulo 7

Conclusiones

Del trabajo se concluye que el modelo Black-Scholes representa una herramienta importante para la valuacion de cualquier porducto derivado, en este caso el de una call europea. Este modelo presenta un buen uso aplicado a situaciones reales como se vio, sin embargo y almenos aplicado en empresas peruanas, el problema principal radica en la carencia de datos que se pueden obtener de estas empresas o instituciones ya que no todos estos son de conocimiento publico. En conclusión, se infiere que la aplicación de este modelo presenta una amplia gama de opciones de las cuales las opciones call europeas representan una de las mas importantes para la valuación de opciones.

Capítulo 8

Anexos

8.1. Codigo en Matlab

1. bscalleuropea.m

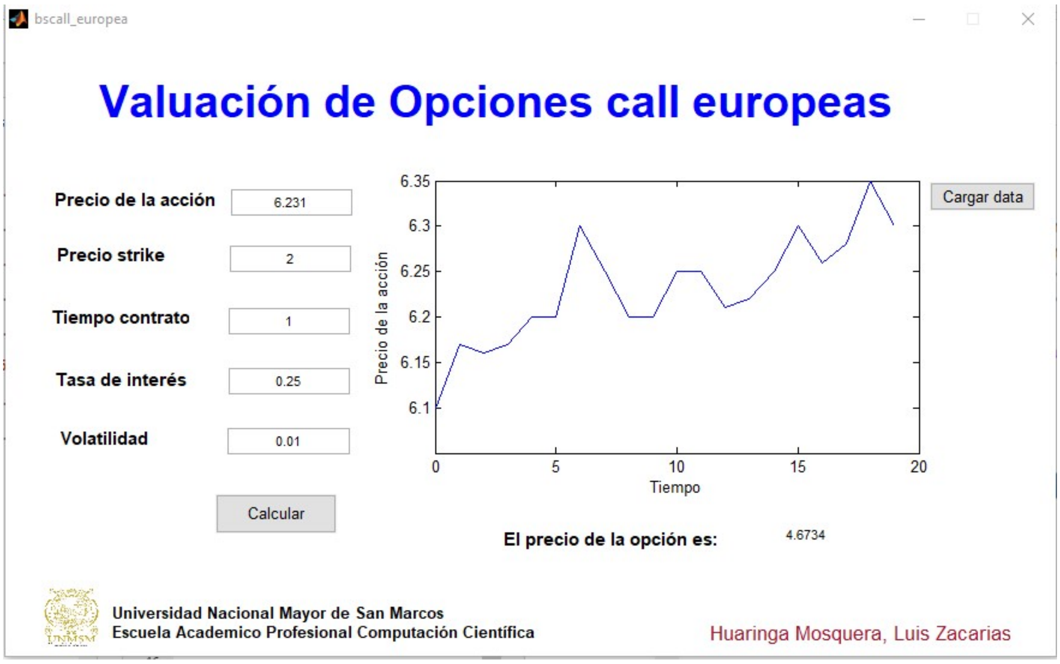
```
function varargout = bscall_europea(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @bscall_europea_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @bscall_europea_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                   'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
```

```
% --- Executes just before bscall_europea is made visible.
function bscall_europea_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
img=imread('escudosm.png');
image(img)
axis off

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);

function varargout = bscall_europea_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)

varargout{1} = handles.output;

function input1_Callback(hObject, eventdata, handles)

function input1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function input2_Callback(hObject, eventdata, handles)

function input2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function input3_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

```
function input3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function input4_Callback(hObject, eventdata, handles)

function input4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function input5_Callback(hObject, eventdata, handles)

function input5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
S0=str2double(get(handles.input1, 'string'));
X=str2double(get(handles.input2, 'string'));
T=str2double(get(handles.input3, 'string'));
r=str2double(get(handles.input4, 'string'));
sigma=str2double(get(handles.input5, 'string'));
syms t
d1=(log(S0/X)+(r+(1/2)*(sigma)^2)*(T))/(sigma*sqrt(T));
```

```
d2=(log(S0/X)+(r-(1/2)*(sigma)^2)*(T))/(sigma*sqrt(T));
N1=1/sqrt(2*pi)*int(exp(-(t^2)/2),-inf,d1);
N2=1/sqrt(2*pi)*int(exp(-(t^2)/2),-inf,d2);
C=eval(S0*N1-X*exp(-r*T)*N2); %Precio de la opción call hallado
set(handles.result,'string',C);



function loadxls_Callback(hObject, eventdata, handles)
handles.fileName=uigetfile('*.xlsx');
guidata(hObject,handles);
fileName=handles.fileName;
YY=xlsread(fileName)
TT=length(YY);
XX=[0:TT-1]
axes(handles.axes1);
plot(XX,YY)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Precio de la acción')
```

2. bscalleuropea.fig



8.2. Datos en Excel

6.1000

6.1700

6.1600

6.1700

6.2000

6.2000

6.3000

6.2500

6.2000

6.2000

6.2500

6.2500

6.2100

6.2200

6.2500

6.3000

6.2600

6.2800

6.3500

6.3000

Bibliografía

[1] Maria del Rosario Bernedo Málaga, José Manuel Azañero Saona *La Banca Central y los derivados financieros: El caso de las Opciones de divisas.*

[2] Juan MARGALEF–ROIG y Salvador MIRET–ARTES *Cálculo estocástico aplicado a las finanzas: Precio de las opciones según el modelo Black–Scholes–Merton y algunas generalizaciones.* Instituto de Matemáticas y Física Fundamental (IMAFF), Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) Serrano 123, 28006 Madrid, España

[3] Adrián Vázquez Ávila *Valuación de una Opción Call Europea: Modelo de Black-Scholes y una aplicación.* Pachuca, Hidalgo, Febrero de 2008

[4] Ernesto Mordecki *Modelos matemáticos en finanzas: Valuación de opciones.* Centro de Matemática. Facultad de Ciencias Montevideo, Uruguay.

[5] M. E. Danae Duana Ávila. Profesor en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Lic. César Gabriel Millán Díaz. Licenciado en Matemáticas Aplicadas, con especialidad en Economía, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. *Modelo Black-Scholes-Merton, para la toma de decisiones financieras..*

[6] Franciso Venegas Martinez *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*