UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

UNIDAD DE POSGRADO

Una interpretación algebraica de la lógica de primer orden

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Filosofía con mención en Epistemología

AUTOR

Miguel Angel MERMA MORA

ASESOR

Luis PISCOYA HERMOZA

Lima – Perú

2017

A Isaías e Hildaura, mis padres, porque sin ellos nada de esto habría sido posible

“Logic can (and perhaps should) be viewed from an algebraic perspective.”

PAUL HALMOS

AGRADECIMIENTOS

Tengo una enorme deuda intelectual con el Dr. Luis Piscoya Hermoza, quien en calidad de asesor de esta tesis me ha orientado en la tarea de darle precisión, rigor y generalidad a mi investigación. Con gran sutileza conceptual y amplio conocimiento de la materia, ha contribuido también a establecer conexiones entre los resultados de esta tesis y el conocimiento establecido. No tengo más que respeto por quien me ha forjado académicamente y a quien considero un auténtico maestro.

Le doy las gracias al Dr. Walter Carnielli de la Universidade Estadual de Campinas, Brasil, por haber leído esta tesis y por recomendarme fortalecer el aparato matemático empleado. Sus interesantes sugerencias me sirvieron para proyectar una futura tesis doctoral. Asimismo, agradezco a mi amigo y colega Luis Carrera Honores por haber revisado con curiosidad intelectual mi investigación desde su etapa inicial. Sus interrogantes y comentarios me han ayudado a precisar y reformular la exposición de algunos puntos centrales de mi investigación. Agradezco también a mi amigo Danilo Hernández Esquerre, colega interesado en la lógica matemática con quien conversé en más de una ocasión sobre esta tesis. Finalmente, agradezco a mi colega Luis Felipe Bartolo Alegre por las observaciones formuladas, las cuales sirvieron para expresar algunos conceptos con mayor claridad.

ÍNDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El pensamiento hipotético-deductivo es un aspecto fundamental de la investigación científica. Esta tesis surgió de una pregunta: ¿qué pasaría si en vez de valores de verdad como (V) y (F) utilizáramos los valores numéricos (0) y (1) respectivamente? Asumir tales correspondencias como parte de la hipótesis de trabajo permitió deducir la información contenida en los capítulos que conforman esta tesis.

La hipótesis de trabajo dio lugar a una interpretación algebraica de la lógica de primer orden, en la que en vez de operadores proposicionales se tiene operaciones matemáticas básicas y en lugar de cuantificadores se tiene productorias. La interpretación algebraica propuesta en esta tesis es un álgebra de Boole que satisface los seis axiomas del cálculo lógico de primer orden establecidos en Gödel (2006: 23-37), pues cada uno de estos axiomas es interpretable como una fórmula algebraica reductible a cero. Considerando que en esta interpretación se acepta que a la verdad (V) le corresponde el cero (0), se concluye que estamos trabajando con un modelo algebraico que hace verdaderos (reductibles a cero) los axiomas del cálculo lógico de primer orden.

Se sabe que los axiomas del cálculo lógico de primer orden son fórmulas que tienen la propiedad de ser lógicamente válidas. Los axiomas heredan dicha propiedad a los teoremas, de modo que los teoremas, deducidos por la aplicación de las reglas de inferencia permitidas, son también fórmulas lógicamente válidas. En nuestra interpretación algebraica, los axiomas del cálculo lógico de primer orden tienen la propiedad de ser interpretables como fórmulas algebraicas reductibles a cero. Por lo tanto, todo teorema del cálculo lógico de primer orden es interpretable también como una fórmula algebraica reductible a cero, puesto que tal propiedad es heredada de los axiomas del sistema.

Asimismo, tenemos la garantía de que toda fórmula lógicamente válida del lenguaje lógico de primer orden es interpretable como una fórmula algebraica reductible a cero, y viceversa, que toda fórmula algebraica reductible a cero en nuestro sistema puede expresarse como una fórmula lógicamente válida del lenguaje lógico de primer orden. Esta garantía se debe al teorema de completitud semántica[1] que Kurt Gödel publicó en 1930 y que afirma que todas las fórmulas lógicamente válidas del cálculo lógico de primer orden son deducibles, y por lo tanto constituyen teoremas del sistema.

Una consecuencia interesante de esta interpretación algebraica es que, dada una fórmula lógicamente válida o una formalmente contradictoria, se puede probar tales características mediante la reducción algebraica a cero (0) o a (1) respectivamente. Este mecanismo funciona al nivel de la lógica proposicional, pero también al nivel del lenguaje predicativo poliádico cuantificado. En el caso de las fórmulas inválidas que no son contradictorias, no es posible la reducción algebraica ni a cero (0) ni a (1).

El primer capítulo de esta tesis expone lo señalado líneas arriba y apela a la tesis de licenciatura Merma (2016) para establecer los fundamentos del sistema desarrollado. En la tesis de licenciatura se estableció una interpretación algebraica de la lógica proposicional y del lenguaje predicativo monádico en un nivel básicamente intuitivo, ya que en esa investigación no interpretamos algebraicamente los axiomas del cálculo lógico de primer orden. En esta tesis de maestría se interpreta algebraicamente cada uno de los seis axiomas de la lógica de primer orden, logrando con ello rigor y generalidad. También se establece que la interpretación funciona, tanto para la lógica proposicional, como para el lenguaje predicativo poliádico y se ofrece una buena cantidad de ejemplos ilustrativos.

[1] La completitud semántica es denominada suficiencia en (Gödel, 2006: 23-37). La traducción de la lengua original es obra de Jesús Mosterín.

En el segundo capítulo se establece un grupo de nueve reglas algebraicas de deducción que, junto con las propiedades convencionales de la aritmética relativas a la adición y el producto, constituyen el equivalente algebraico de las reglas de deducción natural para el lenguaje lógico proposicional. Mientras que la deducción natural en lógica proposicional transfiere la verdad de premisas a conclusión, la correspondiente versión algebraica transfiere de premisas a conclusión la propiedad que tiene una fórmula algebraica de admitir el valor cero.

Finalmente, en el tercer capítulo se establece un grupo de cuatro reglas de deducción que constituye el equivalente algebraico de las reglas de eliminación y reintroducción de cuantificadores para el lenguaje predicativo poliádico. Para el establecimiento de las trece reglas algebraicas de deducción de los dos capítulos finales de esta tesis usaremos como referente las reglas de deducción natural y de empleo de cuantificadores expuestas por Piscoya (2007).

CAPÍTULO I

LA INTERPRETACIÓN ALGEBRAICA DE LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

En este primer capítulo se asignará una semántica algebraica a los axiomas del cálculo lógico de primer orden. Para ello, se requiere representar algebraicamente el lenguaje lógico de primer de orden, de modo que podamos expresar sus axiomas en términos algebraicos. Los axiomas del cálculo lógico de primer orden son los siguientes[2]:

Axioma 1: $(\mathbf{X} \vee \mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$

Axioma 2: $\mathbf{X} \rightarrow (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})$

Axioma 3: $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \rightarrow (\mathbf{Y} \vee \mathbf{X})$

Axioma 4: $(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}) \rightarrow [(\mathbf{Z} \vee \mathbf{X}) \rightarrow (\mathbf{Z} \vee \mathbf{Y})]$

Axioma 5: $(\forall \mathbf{x})\mathbf{Px} \rightarrow \mathbf{Py}$

Axioma 6: $(\forall \mathbf{x})(\mathbf{X} \vee \mathbf{Px}) \rightarrow [\mathbf{X} \vee (\forall \mathbf{x})\mathbf{Px}]$

- **LÓGICA DE ORDEN CERO:** Los cuatro primeros axiomas corresponden a la denominada lógica proposicional o lógica de orden cero, la cual se caracteriza por carecer de cuantificación alguna. Este sistema lógico opera con proposiciones en las que no se ha hecho análisis de su estructura interna, por lo cual suele ser calificado como una herramienta analítica que resulta gruesa en sentido conceptual.

- **LÓGICA DE PRIMER ORDEN:** Se ha denominado lógica de primer orden al lenguaje lógico que incluye a la lógica de orden cero y a la lógica predicativa

[2] Estos axiomas del cálculo lógico de primer orden figuran en (Gödel, 2006: 24).

cuantificada. Los axiomas cinco y seis corresponden estrictamente a la lógica que emplea predicados y en la que sí es posible la cuantificación sobre variables de individuo. Se afirma que la lógica de primer orden, al incluir a la lógica de orden cero y a la lógica predicativa cuantificada, permite trabajar tanto con proposiciones sin analizar como con proposiciones cuya estructura interna sí es pasible de análisis, por lo que es calificada en términos conceptuales como una fina herramienta analítica que resulta superior a la lógica de orden cero.

Una vez establecido este cambio de lenguaje, se procederá a interpretar algebraicamente cada uno de los axiomas del cálculo lógico de primer orden. La prueba de completitud semántica de los axiomas del cálculo lógico de primer orden establecida en Gödel (2006: 23-37) será el sustento teórico de la generalidad de la interpretación algebraica propuesta en esta tesis. El teorema aludido señala que cada fórmula válida que no es axioma de la lógica de primer orden resulta deducible y por lo tanto es un teorema del sistema. Los teoremas heredan una propiedad de los axiomas del sistema; la de ser fórmulas lógicamente válidas.

En la interpretación algebraica, todas las fórmulas válidas son siempre reductibles a cero, ya que cada uno de los axiomas del cálculo lógico de primer orden es interpretable como una fórmula algebraica reductible a cero. Esto se debe a que los axiomas heredan a cualquier fórmula que se deduzca del sistema la propiedad de ser interpretables como fórmulas algebraicas reductibles a cero. Así; toda fórmula algebraica reductible a cero que no corresponda a ninguno de los axiomas del cálculo es una fórmula válida que resulta ser teorema del sistema. A su vez, cualquier fórmula válida de lógica de primer orden es necesariamente una fórmula reductible a cero en términos algebraicos, ya que al ser válida, es deducible y al ser deducible hereda la propiedad algebraica de ser reductible a cero.

I.1. LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE LÓGICO DE PRIMER ORDEN A UN LENGUAJE ALGEBRAICO

Para efectuar esta representación empezaremos por establecer la correspondencia entre la tabla de verdad de la proposición compuesta **¬p** y la tabla numérica de la expresión algebraica **(1 – p)**, siempre que **p** solo pueda asumir los valores 0 o 1.

La negación: $\neg p \equiv (1 - p)$

p	¬p
V	F
F	V

p	$(1 - p)$	$(1 - p)$
0	$1 - 0$	1
1	$1 - 1$	0

Si le asignamos el valor 0 a la variable **p**, entonces, el equivalente algebraico de su negación adopta el valor 1 y si la variable **p** asume el valor 1, el equivalente algebraico de su negación adopta el valor 0. De esto se desprende que la proposición compuesta **¬p** equivale, en la interpretación algebraica, a **(1 – p)**.

Por otra parte, estableceremos la correspondencia entre la tabla de verdad de la proposición compuesta **p∨q** y la tabla numérica de la expresión algebraica **pq**, considerando siempre que **p** y **q** solo pueden asumir los valores 0 o 1. [3]

La disyunción inclusiva: $(p \vee q) \equiv pq$

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	pq	pq
0	0	0x0	0
0	1	0x1	0
1	0	1x0	0
1	1	1x1	1

[3] La expresión algebraica **pq** debe entenderse como el producto de **p** por **q**.

En el primer arreglo del cuadro de la derecha tenemos que ambas variables numéricas asumen el 0 como valor y que, en ese caso, el producto de **p** y **q** arroja 0. En el segundo arreglo tenemos que cuando **p** asume el valor 0 y **q** asume el valor 1, el producto también arroja 0. En el tercer arreglo tenemos que cuando **p** asume el valor 1 y **q** asume el valor 0, el producto nuevamente arroja 0. Finalmente, en el cuarto arreglo tenemos que cuando **p** y **q** asumen el valor 1, el producto esta vez arroja 1. De esto se desprende que la proposición compuesta **p∨q** equivale en la interpretación algebraica que proponemos al producto **pq**.

Asimismo, necesitamos emplear algunas propiedades adicionales del lenguaje algebraico que estamos desarrollando. Como las variables numéricas **p**, **q**, **r**, **s**,… solo pueden asumir los valores 0 o 1, sin importar cuál de esos valores asuma una variable numérica, siempre se cumple que: [4]

$p^2 = p$	$q^2 = q$	$r^2 = r$	$s^2 = s$	….
$p^3 = p$	$q^3 = q$	$r^3 = r$	$s^3 = s$	….
$p^4 = p$	$q^4 = q$	$r^4 = r$	$s^4 = s$	….
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Estas propiedades adicionales se justifican debido a que una variable numérica cualquiera, elevada a cualquier exponente que sea un número natural mayor que cero, resulta igual a la variable original. En síntesis, tenemos la siguiente propiedad adicional:

$$\mathbf{p^n = p}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$$

[4] Esta información figura en la tesis de licenciatura (Merma, 2016: 12).

Sobre la base de la interpretación algebraica de estos dos operadores proposicionales fundamentales se puede interpretar cualquier otro operador en términos algebraicos. El procedimiento consiste en expresar los demás operadores en términos de disyunciones y negaciones. [5] En resumen, establecemos la representación algebraica de los operadores más conocidos de la lógica proposicional en el cuadro siguiente: [6]

OPERADORES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL	EXPRESIONES ALGEBRAICAS EQUIVALENTES
$\neg \mathbf{p}$	$(\mathbf{1-p})$
$\mathbf{p \vee q}$	$\mathbf{pq}$
$\mathbf{p \wedge q}$	$(\mathbf{p+q-pq})$
$\mathbf{p \rightarrow q}$	$(\mathbf{1-p})\mathbf{q}$
$\mathbf{p \leftrightarrow q}$	$(\mathbf{p+q-2pq})$
$\mathbf{p \nleftrightarrow q}$ [7]	$\mathbf{1-(p+q-2pq)}$
$\mathbf{p \,/\, q}$ [8]	$(\mathbf{1-p})(\mathbf{1-q})$
$\mathbf{p \downarrow q}$ [9]	$(\mathbf{1-pq})$

[5] Según (Copi, 1979/1994: 277), el par de operadores (¬ , ∨) provee una lógica funcional completa.
[6] Este cuadro sintetiza lo expuesto hasta ahora respecto del cálculo proposicional y ha sido tomado de la tesis de licenciatura (Merma, 2016: 15).
[7] Este es el operador que representa a la disyunción exclusiva.
[8] Este operador se denomina 'barra de Nicod'.
[9] El nombre de este operador es 'daga de Sheffer'.

El lenguaje algebraico desarrollado de esta manera resulta ser un álgebra de Boole y, con mayor especificidad, un álgebra de Lindenbaum cuyo sistema es de la forma < $\mathcal{L}/equiv, \sqcup, \sqcap, \complement, \mathbf{0}, \mathbf{1}$ >, donde 0 y 1 son los individuos, $\sqcup$ y $\sqcap$ son operaciones binarias y $\complement$ es una operación unaria. [10] En nuestra interpretación, $\sqcup$ es la conjunción, $\sqcap$ es la disyunción inclusiva y $\complement$ es la negación, debido a que asociamos la verdad con el **0** y la falsedad con el **1**. Nuestro sistema ha expandido el número de operadores binarios de dos a siete sobre la base de las operaciones binarias $\sqcup$ y $\sqcap$, sin embargo, sigue siendo un álgebra de Lindenbaum y por consiguiente un álgebra de Boole. El sistema cumple los axiomas que debe satisfacer todo álgebra de Boole [11]:

$$\mathbf{x \sqcup y = y \sqcup x} \qquad \mathbf{x \sqcap y = y \sqcap x} \qquad \mathbf{x \sqcup \complement x = 1} \qquad \mathbf{x \sqcap \complement x = 0}$$

$$\mathbf{x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z} \qquad \mathbf{x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z} \qquad \mathbf{x \sqcup 0 = x} \qquad \mathbf{x \sqcap 1 = x}$$

$$\mathbf{x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)} \qquad \mathbf{x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)}$$

La interpretación algebraica de los diez axiomas presentados líneas arriba convierte tales axiomas en afirmaciones verdaderas, por lo cual podemos afirmar que el sistema algebraico desarrollado en esta investigación constituye un álgebra de Boole.

Axioma 1: $\mathbf{x \sqcup y = y \sqcup x}$

$\mathbf{x \sqcup y}$

$x \wedge y$

$x + y - xy$

$x + y - yx$

$y + x - yx$

$y \wedge x$

$\mathbf{y \sqcup x}$

Axioma 2: $\mathbf{x \sqcap y = y \sqcap x}$

$\mathbf{x \sqcap y}$

$x \vee y$

xy

yx

$y \vee x$

$\mathbf{y \sqcap x}$

[10] El álgebra de Lindenbaum figura en (Mosterín, J. y Torretti, R., 2010: 32).

[11] Véase los axiomas que satisface todo álgebra de Boole en (Mosterín, J. y Torretti, R., 2010: 29-30).

Axioma 3: $\mathbf{x \sqcup \complement x = 1}$

$\mathbf{x \sqcup \complement x}$

$x \wedge \neg x$

$x \wedge (1 - x)$

$x + (1 - x) - x(1 - x)$

$x + 1 - x - (x - x^2)$

$1 - (x - x)$ [12]

$1 - (0)$

1

Axioma 4: $\mathbf{x \sqcap \complement x = 0}$

$\mathbf{x \sqcap \complement x}$

$x \vee \neg x$

$x \vee (1 - x)$

$x(1 - x)$

$x - x^2$

$x - x$

0

Axioma 5: $\mathbf{x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z}$

$\mathbf{x \sqcup (y \sqcup z)}$

$x \wedge (y \wedge z)$

$x \wedge (y + z - yz)$

$x + (y + z - yz) - x(y + z - yz)$

$x + y + z - yz - xy - xz + xyz$

$x + y - xy + z - yz - xz + xyz$

$(x + y - xy) + z - z(y + x - xy)$

$(x + y - xy) + z - z(x + y - xy)$

$(x + y - xy) + z - (x + y - xy)z$

$(x \wedge y) + z - (x \wedge y)z$

$(x \wedge y) \wedge z$

$\mathbf{(x \sqcup y) \sqcup z}$

Axioma 6: $\mathbf{x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z}$

$\mathbf{x \sqcap (y \sqcap z)}$

$x \vee (y \vee z)$

$x\,(yz)$

$(xy)\,z$

$(x \vee y) \vee z$

$\mathbf{(x \sqcap y) \sqcap z}$

[12] Esta línea está plenamente justificada ya que $\mathbf{p^n = p}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Axioma 7: $\mathbf{x \sqcup 0 = x}$

$\mathbf{x \sqcup 0}$

$x \wedge 0$

$x + 0 - x(0)$

$x + 0 - 0$

$\mathbf{x}$

Axioma 8: $\mathbf{x \sqcap 1 = x}$

$\mathbf{x \sqcap 1}$

$x \vee 1$

$x\,(1)$

$\mathbf{x}$

Axioma 9: $\mathbf{x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)}$

$\mathbf{x \sqcup (y \sqcap z)}$

$x \wedge (y \vee z)$

$x \wedge yz$

$x + yz - xyz$

$x + xz - xz + yx + yz - xyz - yx - xyz + xyz$

$x + xz - xz + yx + yz - xyz - xy - xyz + xyz$

$x^2 + xz - x^2 z + yx + yz - xyz - x^2 y - xyz + x^2 yz$ [13]

$(x + y - xy)\,(x + z - xz)$

$(x \wedge y)\,(x \wedge z)$

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$\mathbf{(x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)}$

Axiom. 10: $\mathbf{x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)}$

$\mathbf{x \sqcap (y \sqcup z)}$

$x \vee (y \wedge z)$

$x \vee (y + z - yz)$

$x\,(y + z - yz)$

$xy + xz - xyz$

$xy + xz - x^2 yz$

$xy + xz - xxyz$

$xy + xz - xyxz$

$xy \wedge xz$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\mathbf{(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)}$

---

[13] Esta línea está plenamente justificada ya que $\mathbf{p^n = p}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$.

La conversión del lenguaje lógico proposicional en un lenguaje algebraico hace posible, por extensión, la representación algebraica de fórmulas predicativas monádicas de primer orden cerradas con cuantificadores. Para esta representación es indispensable la definición básica del cuantificador existencial en términos algebraicos.

Considerando que el cuantificador existencial supone una cadena potencialmente infinita de disyunciones de constantes individuales que tienen una determinada propiedad y que la disyunción guarda correspondencia con el producto, podemos representar algebraicamente el cuantificador existencial como una cadena potencialmente infinita de factores, lo que puede expresarse abreviadamente empleando el concepto matemático de productoria denotado por el símbolo $\prod$. Tenemos como resultado que una fórmula predicativa monádica **Px** cerrada con el cuantificador existencial, puede representarse algebraicamente como una productoria de objetos de la forma $\mathbf{Pa_i}$, donde **i** tiene un recorrido que va desde el 1 hasta el infinito. Para que la productoria sea igual a cero, basta que un solo valor de **i** haga que la fórmula $\mathbf{Pa_i}$ sea igual a cero.

1. $(\exists_x)Px \equiv Pa_1 \vee Pa_2 \vee Pa_3 \vee ... \vee Pa_n \vee Pa_{n+1} \ldots$[14]
2. $(\exists_x)Px \equiv Pa_1\, Pa_2\, Pa_3 \ldots Pa_n\, Pa_{n+1} \ldots$ — Interpretación algebraica en 1
3. $(\exists_x)\mathbf{Px} \equiv \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{Pa_i}$ — Productoria en 2

Por otra parte, la representación algebraica de una fórmula predicativa monádica de primer orden cerrada con el cuantificador universal es posible en virtud del intercambio de cuantificadores, el cual permite expresar el cuantificador universal en términos del cuantificador existencial ya definido previamente como una productoria.

[14] Empleamos esta equivalencia tal como figura en (Piscoya, 2007: 268-269).

También es posible considerar que el cuantificador universal supone una cadena potencialmente infinita de conjunciones de constantes individuales que tienen una determinada propiedad, y que se puede aplicar la equivalencia de De Morgan a fórmulas con un número potencialmente infinito de conjunciones. De este modo, se puede representar algebraicamente una fórmula predicativa monádica **Px** cerrada con el cuantificador universal como la unidad menos una productoria de objetos de la forma $\mathbf{1 - P(a_i)}$, donde **i** tiene un recorrido que va desde el 1 hasta el infinito. Para que la diferencia entre la unidad y la productoria sea igual a uno, basta que un solo valor de **i** haga que la fórmula $\mathbf{Pa_i}$ sea igual a uno.

1.	$(\forall_x)Px \equiv Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge Pa_3 \wedge \ldots \wedge Pa_n \wedge Pa_{n+1} \ldots$ [15]	
2.	$(\forall_x)Px \equiv \neg[\neg Pa_1 \vee \neg Pa_2 \vee \neg Pa_3 \vee \ldots \ldots \vee \neg Pa_n \vee \neg Pa_{n+1} \ldots]$	De Morgan en 1
3.	$(\forall_x)Px \equiv 1 - [1 - Pa_1][1 - Pa_2][1 - Pa_3] \ldots [1 - Pa_n][1 - Pa_{n+1}] \ldots$	Interpr. algebr. en 2
4.	$(\forall_x)\mathbf{Px} \equiv \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1} - \mathbf{Pa_i}]$	Productoria en 3

Para resumir lo desarrollado hasta ahora, tenemos la versión algebraica de una fórmula predicativa monádica cuantificada existencial y universalmente en el cuadro siguiente: [16]

FÓRMULA PREDICATIVA MONÁDICA CUANTIFICADA	EXPRESIONES ALGEBRAICAS EQUIVALENTES
$(\exists_x)\mathbf{Px}$	$\prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{Pa_i}$
$(\forall_x)\mathbf{Px}$	$\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1} - \mathbf{Pa_i}]$

[15] Empleamos esta equivalencia tal como aparece en (Piscoya, 2007: 268-269).

[16] Estas equivalencias y su justificación figuran en la tesis de licenciatura (Merma, 2016: 31-32). Se omitieron algunos paréntesis innecesarios.

Asimismo, es posible representar de manera algebraica las ocho formas normales prenex que corresponden al cierre de una función proposicional diádica del modo siguiente: [17]

FORMAS NORMALES PRENEX	EQUIVALENTES ALGEBRAICOS
I. $(\forall_x)(\forall_y)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{1 - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\ 1 - P(a_i\,,a_j)]}$
II. $(\forall_y)(\forall_x)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{1 - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\ 1 - P(a_i\,,a_j)]}$
III. $(\exists_x)(\exists_y)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}\ P(a_i\,,a_j)}$
IV. $(\exists_y)(\exists_x)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}\ P(a_i\,,a_j)}$
V. $(\forall_x)(\exists_y)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - \prod_{j=1}^{\infty}\ P(a_i\,,a_j)\ ]}$
VI. $(\exists_y)(\forall_x)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{\prod_{j=1}^{\infty}\ [1 - \prod_{i=1}^{\infty}\ (1 - P(a_i\,,a_j))\ ]}$
VII. $(\forall_y)(\exists_x)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{1 - \prod_{j=1}^{\infty}\ [1 - \prod_{i=1}^{\infty}\ P(a_i\,,a_j)]}$
VIII. $(\exists_x)(\forall_y)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{\prod_{i=1}^{\infty}\ [1 - \prod_{j=1}^{\infty}\ (1 - P(a_i\,,a_j))\ ]}$

Por último, lo expuesto hasta el momento hace posible representar algebraicamente la fórmula predicativa triádica cuantificada $(\exists_x)(\exists_y)(\exists_z)\mathbf{P(x,y,z)}$ como $\mathbf{\prod_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{\infty}\ P(a_i\,,a_j\,,a_k\,)}$ y así sucesivamente para cualquier predicado poliádico.

$(\exists_x)(\exists_y)(\exists_z)\mathbf{P(x,y,z)}$	$\mathbf{\prod_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{\infty}\ P(a_i\,,a_j\,,a_k\,)}$
$(\exists_w)(\exists_x)(\exists_y)(\exists_z)\mathbf{P(w,\ x,\ y,\ z)}$	$\mathbf{\prod_{\substack{h=1\\i=1\\j=1\\k=1}}^{\infty}\ P(a_h\,,a_i\,,a_j\,,a_k\,)}$
$\vdots$	$\vdots$

[17] Se sustituyó $\mathbf{b_j}$ por $\mathbf{a_j}$ respecto del cuadro que figura en la tesis de licenciatura (Merma, 2016: 46). Esta modificación se hizo para poder referirnos al mismo universo de discurso. De este modo podemos representar, por ejemplo, la expresión matemática **1 < 1** como el predicado diádico $\mathbf{P(a_1\,,a_1)}$.

I.2. LA SEMÁNTICA ALGEBRAICA DE LOS AXIOMAS DEL CÁLCULO LÓGICO DE PRIMER ORDEN

Una vez establecida la representación en lenguaje algebraico de las fórmulas de la lógica proposicional y de la lógica predicativa cuantificada, se puede dotar de una semántica algebraica a los axiomas del cálculo lógico de primer orden. Emplearemos los siguientes seis axiomas [18]:

Axioma 1: $(\mathbf{X} \vee \mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$

Axioma 2: $\mathbf{X} \rightarrow (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})$

Axioma 3: $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \rightarrow (\mathbf{Y} \vee \mathbf{X})$

Axioma 4: $(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}) \rightarrow [(\mathbf{Z} \vee \mathbf{X}) \rightarrow (\mathbf{Z} \vee \mathbf{Y})]$

Axioma 5: $(\forall \mathbf{x})\mathbf{Px} \rightarrow \mathbf{Py}$

Axioma 6: $(\forall \mathbf{x})(\mathbf{X} \vee \mathbf{Px}) \rightarrow [\mathbf{X} \vee (\forall \mathbf{x})\mathbf{Px}]$

Procederemos ahora a interpretar algebraicamente cada uno de los axiomas presentados. Emplearemos para ello las equivalencias del subcapítulo anterior y hallaremos que cada uno de los axiomas del cálculo lógico de primer orden corresponde a una fórmula algebraica reductible a cero.

Axioma 1:

1.	$(\mathbf{X} \vee \mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$	
2.	$(\mathbf{XX}) \rightarrow \mathbf{X}$	Interpretación algebraica de la disyunción en 1
3.	$\mathbf{X}^2 \rightarrow \mathbf{X}$	Propiedad de exponentes en 2
4.	$\neg \mathbf{X}^2 \vee \mathbf{X}$	Definición de condicional en 3
5.	$(\mathbf{1} - \mathbf{X}^2) \vee \mathbf{X}$	Interpretación algebraica de la negación en 4

[18] Estos axiomas del cálculo lógico de primer orden figuran en (Gödel, 2006: 24).

6. $(1 - X^2)\,X$ — Interpretación algebraica de la disyunción en 5

7. $X - X^3$ — Distribución del producto en 6

8. $X - X$ — Propiedad adicional del sistema algebraico en 7 [19]

9. 0 — Propiedad aritmética en 8

Axioma 2:

1. $X \rightarrow (X \vee Y)$

2. $X \rightarrow (XY)$ — Interpretación algebraica de la disyunción en 1

3. $\neg X \vee XY$ — Definición de condicional en 2

4. $(1 - X) \vee XY$ — Interpretación algebraica de la negación en 3

5. $(1 - X)\,XY$ — Interpretación algebraica de la disyunción en 4

6. $XY - X^2Y$ — Distribución del producto en 5

7. $XY - XY$ — Propiedad adicional del sistema algebraico en 6

8. 0 — Propiedad aritmética en 7

Axioma 3:

1. $(X \vee Y) \rightarrow (Y \vee X)$

2. $(XY) \rightarrow (YX)$ — Interpretación algebraica de la disyunción en 1

3. $\neg XY \vee YX$ — Definición de condicional en 2

4. $(1 - XY) \vee YX$ — Interpretación algebraica de la negación en 3

5. $(1 - XY)\,YX$ — Interpretación algebraica de la disyunción en 4

6. $(1 - XY)\,XY$ — Conmutatividad del producto en 5

7. $XY - X^2Y^2$ — Distribución del producto en 6

8. $XY - XY$ — Propiedad adicional del sistema algebraico en 7

9. 0 — Propiedad aritmética en 8

---

[19] Esta línea está plenamente justificada ya que $\mathbf{p}^n = \mathbf{p}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Axioma 4:

1.	$(\mathbf{X} \to \mathbf{Y}) \to [(\mathbf{Z} \vee \mathbf{X}) \to (\mathbf{Z} \vee \mathbf{Y})]$	
2.	$(\mathbf{X} \to \mathbf{Y}) \to [(\mathbf{ZX}) \to (\mathbf{ZY})]$	Interpretación algebraica de la disyunción en 1
3.	$(\neg \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \to (\neg \mathbf{ZX} \vee \mathbf{ZY})$	Definición de condicional en 2
4.	$[(\mathbf{1-X}) \vee \mathbf{Y}] \to [(\mathbf{1-ZX}) \vee \mathbf{ZY}]$	Interpretación algebraica de la negación en 3
5.	$(\mathbf{1-X})\mathbf{Y} \to (\mathbf{1-ZX})\mathbf{ZY}$	Interpretación algebraica de la disyunción en 4
6.	$\neg (\mathbf{1-X})\mathbf{Y} \vee (\mathbf{1-ZX})\mathbf{ZY}$	Definición de condicional en 5
7.	$[\mathbf{1-(1-X)Y}] \vee (\mathbf{1-ZX})\,\mathbf{ZY}$	Interpretación algebraica de la negación en 6
8.	$[\mathbf{1-(1-X)Y}]\,(\mathbf{1-ZX})\,\mathbf{ZY}$	Interpretación algebraica de la disyunción en 7
9.	$[\mathbf{1-(1-X)Y}]\,\mathbf{Y}\,(\mathbf{1-ZX})\,\mathbf{Z}$	Conmutatividad del producto en 8
10.	$[\mathbf{Y-(1-X)Y^2}]\,(\mathbf{Z-Z^2X})$	Distribución del producto en 9
11.	$[\mathbf{Y-(1-X)Y}]\,(\mathbf{Z-ZX})$	Propiedad adicional del sistema algebraico en 10
12.	$\mathbf{Y}[\mathbf{1-(1-X)}]\ \mathbf{Z}(\mathbf{1-X})$	Factorización en 11
13.	$\mathbf{Y}[\mathbf{1-1+X}]\ \mathbf{Z}(\mathbf{1-X})$	Propiedad aritmética en 12
14.	$\mathbf{Y\,X\,Z}(\mathbf{1-X})$	Propiedad aritmética en 13
15.	$\mathbf{Y\,Z\,X}(\mathbf{1-X})$	Conmutatividad del producto en 14
16.	$\mathbf{Y\,Z}\ (\mathbf{X-X^2})$	Distribución del producto en 15
17.	$\mathbf{Y\,Z}\ (\mathbf{X-X})$	Propiedad adicional del sistema algebraico en 16
18.	$\mathbf{Y\,Z}\ (\mathbf{0})$	Propiedad aritmética en 17
19.	$\mathbf{0}$	Propiedad aritmética en 18

Con la interpretación algebraica de estos cuatro primeros axiomas es suficiente para garantizar la generalidad de la interpretación algebraica del cálculo proposicional. Sin embargo, como nos proponemos una interpretación algebraica de la lógica de primer orden, es necesario interpretar algebraicamente los siguientes dos axiomas que incluyen el uso de predicados y cuantificadores. Será preciso también emplear algunas propiedades del operador matemático productoria denotado por Π.

Axioma 5:

1.	$(\forall x)Px \rightarrow Py$	
2.	$\{\ 1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \} \rightarrow Pa_j$	Interpret. algebr. del cuantificador universal en 1 [20]
3.	$\neg\{\ 1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \} \vee Pa_j$	Definición de condicional en 2
4.	$\{\ 1 - \{\ 1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \}\ \} \vee Pa_j$	Interpretación algebraica de la negación en 3
5.	$\{\ 1 - \{\ 1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \}\ \}\ Pa_j$	Interpretación algebraica de la disyunción en 4
6.	$\{\ 1 - 1 + \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \}\ Pa_j$	Propiedad aritmética en 5
7.	$\{\ \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \}\ \ Pa_j$	Propiedad aritmética en 6
8.	$\{\ [1 - Pa_1]\ [1 - Pa_2][1 - Pa_3]\ \ldots$	
	$\ldots [1 - Pa_{j-1}][1 - Pa_j][1 - Pa_{j+1}]\ \ldots \}\ Pa_j$	Desarrollo de Π en 7
9.	$\{\ \prod_{i=1}^{j-1}[1 - Pa_i]\ [1 - Pa_j]\ \ \prod_{i=j+1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \}\ Pa_j$	Propiedad de Π en 8
10.	$\{\ \prod_{i=1}^{j-1}[1 - Pa_i] \prod_{i=j+1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \}\ Pa_j[1 - Pa_j]$	Conmutatividad del producto en 9
11.	$\{\ \prod_{i=1}^{j-1}[1 - Pa_i] \prod_{i=j+1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \}\ [\ Pa_j - (Pa_j)^2\ ]$	Distribución del producto en 10
12.	$\{\ \prod_{i=1}^{j-1}[1 - Pa_i] \prod_{i=j+1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \}\ [\ Pa_j - Pa_j\ ]$	Propiedad adicional del sistema algebraico en 11
13.	$\{\ \prod_{i=1}^{j-1}[1 - Pa_i] \prod_{i=j+1}^{\infty}[1 - Pa_i]\ \}\ [\ 0\ ]$	Propiedad aritmética en 12
14.	0	Propiedad aritmética en 13

Axioma 6:

1. $(\forall x)(\ X \vee Px\ ) \rightarrow [\ X \vee (\forall x)Px\ ]$ [21]

---

[20] En la interpretación algebraica tenemos **Pa_i** en lugar de **Px**. Asimismo, tenemos **Pa_j** en lugar de **Py**.

[21] Si **X** aparece sola y tiene mayor tamaño, entonces no está afectada por el cuantificador y funciona como una constante. Por otra parte, si **x** se asocia a un predicado y tiene menor tamaño, entonces sí está afectada por el cuantificador y funciona como variable. Ejemplo: **Px**.

2. $(\forall x)(XPx) \rightarrow X(\forall x)Px$ — Interpret. algebr. de la disy. en 1

3. $\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - XPa_i]\} \rightarrow X\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Interp. algebr. del cuant. univ. en 2

4. $\neg\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - XPa_i]\} \vee X\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Definición de condicional en 3

5. $\{1 - \{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - XPa_i]\}\} \vee X\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Interp. algebr. de la negación en 4

6. $\{1 - \{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - XPa_i]\}\} X\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Interp. algebr. de la disy. en 5

7. $\{1 - 1 + \prod_{i=1}^{\infty}[1 - XPa_i]\} X\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Propiedad aritmética en 6

8. $\{\prod_{i=1}^{\infty}[1 - XPa_i]\} X\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Propiedad aritmética en 7

9. $\{[1 - XPa_1][1 - XPa_2][1 - XPa_3]\ldots\} X\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Desarrollo de Π en 8

10. $\{[1 - XPa_1][1 - XPa_2][1 - XPa_3]\ldots\} XXX\ldots\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Prop. adic. del sistema algeb. en 9

11. $\{[X - X^2Pa_1][X - X^2Pa_2][X - X^2Pa_3]\ldots\}\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Distribución del producto en 10

12. $\{[X - XPa_1][X - XPa_2][X - XPa_3]\ldots\}\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Prop. adic. del sistema algeb. en 11

13. $\{X[1 - Pa_1]\,X[1 - Pa_2]\,X[1 - Pa_3]\ldots\}\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Factorización en 12

14. $\{XXX\ldots[1 - Pa_1][1 - Pa_2][1 - Pa_3]\ldots\}\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Conmut. del producto en 13

15. $\{X[1 - Pa_1][1 - Pa_2][1 - Pa_3]\ldots\}\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Prop. adic. del sistema algeb. en 14

16. $X\prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Desarrollo de la productoria en 15

17. $X\{\prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i] - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Distribución del producto en 16

18. $X\{\prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i] - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i][1 - Pa_i]\}$ — Propiedad de Π en 17[22]

19. $X\{\prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i] - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i - Pa_i + (Pa_i)^2]\}$ — Producto de binomios en 18

20. $X\{\prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i] - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i - Pa_i + Pa_i]\}$ — Prop. adic. del sistema algeb. en 19

21. $X\{\prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i] - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Pa_i]\}$ — Propiedad aritmética en 20

22. $X\{0\}$ — Propiedad aritmética en 21

23. 0 — Propiedad aritmética en 22

[22] Usamos la propiedad de la productoria (Π), la cual sostiene que $\prod_{i=1}^{\infty}[A_i]\prod_{i=1}^{\infty}[B_i] = \prod_{i=1}^{\infty}[A_iB_i]$

I.3. LA REDUCCIÓN A CERO DE FÓRMULAS PREDICATIVAS DIÁDICAS CUANTIFICADAS VÁLIDAS

La completitud semántica del cálculo lógico de primer orden garantiza que, en nuestra interpretación algebraica, toda fórmula válida de la lógica de primer orden sea interpretable como una fórmula reductible a cero. Como ejemplos, representaremos algebraicamente y reduciremos a cero los siguientes razonamientos válidos que involucran fórmulas predicativas diádicas:

$(\forall_x)[\,\mathbf{x = x}\,] \qquad /\therefore\ (\exists_x)(\exists_y)[\,\mathbf{x = y}\,]$

a) $(\forall_x)[\,\mathbf{x = x}\,] \rightarrow (\exists_x)(\exists_y)[\,\mathbf{x = y}\,]$

1. $(\forall_x)[\,\mathbf{xIx}\,] \rightarrow (\exists_x)(\exists_y)[\,\mathbf{xIy}\,]$ [23]

2. $\{\, \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_i}\,]\,\} \rightarrow \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}]$ — Interpret. algebr. de los cuantificadores en 1

3. $\{\mathbf{1} - \{\, \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_i}\,]\,\}\} \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}]$ — Interpretación algebraica del condicional en 2 [24]

4. $\{\mathbf{1} - \mathbf{1} + \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_i}\,]\,\} \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}]$ — Propiedad aritmética en 3

5. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_i}\,] \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}]$ — Propiedad aritmética en 4

6. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_i}\,] \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i=j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,] \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$ — Propiedad de Π en 5

7. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_i}\,] \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_i}\,] \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$ — Propiedad de Π en 6

8. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_i}\,][\,\mathbf{a_i I a_i}\,] \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$ — Propiedad de Π en 7

---

[23] Usaremos la relación **xIx** en lugar de **x=x** para indicar que la identidad es una relación diádica. La interpretación algebraica funciona con la identidad, pero también con cualquier relación poliádica.
[24] Se utiliza la propiedad expuesta en la tesis de licenciatura (Merma, 2016: 15).

9. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_i} - (\mathbf{a_iIa_i})^2\,]\ \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]$ Distribución del producto en 8

10. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_i} - \mathbf{a_iIa_i}\,]\ \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]$ Propiedad adicional del sistema algebraico en 9

11. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ \mathbf{0}\ ]\ \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]$ Propiedad aritmética en 10

12. $[\ \mathbf{0}\ ]\prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]$ Propiedad de Π en 11

13. $\mathbf{0}$ Propiedad aritmética en 12

$(\forall_x)[\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\,] \qquad /\therefore\ (\forall_x)(\exists_y)[\,\mathbf{x} = \mathbf{y}\,]$ [25]

b) $(\forall_x)[\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\,] \rightarrow (\forall_x)(\exists_y)[\,\mathbf{x} = \mathbf{y}\,]$

1. $(\forall_x)[\,\mathbf{xIx}\,] \rightarrow (\forall_x)(\exists_y)[\,\mathbf{xIy}\,]$

2. $\{\,\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\,]\,\} \rightarrow \{\,\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]]\,\}$ Interp. alg. de los cuant. en 1 [26]

3. $\{\mathbf{1} - \{\,\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\,]\}\}\,\{\,\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]]\,\}$ Interp. alg. del condicional en 2

4. $\{\mathbf{1} - \mathbf{1} + \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\,]\,\}\,\{\,\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]]\,\}$ Propiedad aritmética en 3

5. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\,]\,\{\,\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]]\,\}$ Propiedad aritmética en 4

6. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\,] - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\,]\ \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]]$ Distribución del producto en 5

7. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\,] - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\,]\ [\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\,]]$ Propiedad de Π en 6

[25] Este razonamiento válido ha sido tomado de (Ferrater Mora, J. y Leblanc, H., 1962: 106).

[26] Para la interpretación algebraica del consecuente de la línea uno hemos recurrido a la tesis de licenciatura (Merma, 2016: 46).

8. $\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \mathbf{a_iIa_i}\ ]\ -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}] - \mathbf{a_iIa_i} + \mathbf{a_iIa_i}\prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\ ]\ ]$ Product. de binom. en 7

9. $\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \mathbf{a_iIa_i}\ ]\ -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}] - \mathbf{a_iIa_i} + \mathbf{a_iIa_i}\prod_{j=1}^{i-1}[\,\mathbf{a_iIa_j}\ ]\ \mathbf{a_iIa_i}\prod_{j=i+1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\ ]]$ Propiedad de Π en 8

10. $\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \mathbf{a_iIa_i}\ ]\ -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}] - \mathbf{a_iIa_i} +\ \prod_{j=1}^{i-1}[\,\mathbf{a_iIa_j}\ ]\ (\mathbf{a_iIa_i})^{\mathbf{2}}\prod_{j=i+1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\ ]]$ Prop. de exponent. en 9

11. $\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \mathbf{a_iIa_i}\ ]\ -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}] - \mathbf{a_iIa_i} +\ \prod_{j=1}^{i-1}[\,\mathbf{a_iIa_j}\ ]\ \mathbf{a_iIa_i}\prod_{j=i+1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\ ]]$ Prop. adicional en 10

12. $\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \mathbf{a_iIa_i}\ ]\ -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}] - \mathbf{a_iIa_i} +\ \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_iIa_j}\ ]]$ Propiedad de Π en 11

13. $\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\ \mathbf{a_iIa_i}\ ]\ -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}\ ]$ Prop. aritmética en 12

14. $\mathbf{0}$ Prop. aritmética en 13

Quienquiera que perdone a cualquiera es un santo

No hay santos

Luego, nadie perdona a nadie.[27]

$(\forall_x)(\forall_y)[\ \mathbf{F(x,y)} \rightarrow \mathbf{S(x)}\ ]$

$\neg(\exists_x)\mathbf{S(x)}$ $/\therefore\ \ (\forall_x)(\forall_y)\neg\mathbf{F(x,y)}$

[27] Tomado de (Piscoya, 2007: 273) .

$\boldsymbol{c})\quad \{\, (\forall_x)(\forall_y)[\, \mathbf{F(x,y)} \rightarrow \mathbf{S(x)}\,] \ \wedge \neg(\exists_x)\mathbf{S(x)}\,\} \ \rightarrow \ (\forall_x)(\forall_y)\neg\mathbf{F(x,y)}$

1. $\left\{ \{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \ \mathbf{a_iFa_j})\mathbf{Sa_i}\,]\,\} \wedge \{\, \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i}\,]\,\}\right\} \rightarrow \{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\}$ [28]

2. $\left\{\mathbf{1} - \{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \ \mathbf{a_iFa_j})\mathbf{Sa_i}\,]\,\}\right\}\left\{\mathbf{1} - \{\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i}\,]\,\}\right\}\left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

3. $\left\{\mathbf{1} - \mathbf{1} + \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \ \mathbf{a_iFa_j})\mathbf{Sa_i}\,]\right\}\left\{\mathbf{1} - \mathbf{1} + \prod_{i=1}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i}\,]\right\}\left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

4. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \ \mathbf{a_iFa_j})\mathbf{Sa_i}\,] \ \prod_{i=1}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i}\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

5. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \ \mathbf{a_iFa_j})\mathbf{Sa_i}\,] \ \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty} \ [\, \mathbf{Sa_i}\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$ [29]

6. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \ \mathbf{a_iFa_j})\mathbf{Sa_i}\,][\, \mathbf{Sa_i}\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

7. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i} - (\mathbf{1} - \ \mathbf{a_iFa_j})(\mathbf{Sa_i})^2\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

8. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i} - (\mathbf{1} - \ \mathbf{a_iFa_j})\mathbf{Sa_i}\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

9. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i} - (\mathbf{Sa_i} - \mathbf{Sa_i}\ \mathbf{a_iFa_j})\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

10. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i} - \mathbf{Sa_i} + \mathbf{Sa_i}\ \mathbf{a_iFa_j}\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

11. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i}\ \mathbf{a_iFa_j}\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

12. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i}\,] \ \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{a_iFa_j}\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iFa_j})]\right\}$

13. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i}\,] \ \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{a_iFa_j}\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{1} - \mathbf{1} + \mathbf{a_iFa_j}\,]\right\}$

14. $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{Sa_i}\,] \ \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{a_iFa_j}\,] \left\{\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\, \mathbf{a_iFa_j}\,]\right\}$

15. $\mathbf{0}$ [30]

---

[28] En la interpretación algebraica, la relación **F(x,y)** se expresará bajo la forma de $\mathbf{a_iFa_j}$.

[29] El paso de la línea cuatro a la cinco opera un cambio en la productoria de la parte central. En la línea cuatro, la productoria solo tiene un argumento, pero en la línea cinco tiene dos.

[30] La línea catorce tiene al segundo y tercer factor bajo la forma $\mathbf{x\ (1 - x)}$, por lo que se reduce a cero.

Procederemos ahora a representar algebraicamente un sistema compuesto por cuatro premisas y ocho conclusiones. Este sistema formal puede interpretarse como el principio de buena ordenación si es que asignamos una semántica matemática a las premisas. [31] Como ejemplo, probaremos algebraicamente que la primera conclusión se deduce de las premisas reduciendo a cero la fórmula que expresa tal deducción.

PREMISAS SISTEMA <Q, I, P>	**PREMISAS ALGEBRAICAS <Q, I, P>**
$(\forall_x)(\forall_y)(\forall_z)[(\mathbf{xQy} \wedge \mathbf{yQz}) \rightarrow \mathbf{xQz}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iQa_j})(\mathbf{1} - \mathbf{a_jQa_k})\ \mathbf{a_iQa_k}\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xQy} \vee \mathbf{yQx}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \ \mathbf{a_iQa_j}\ \mathbf{a_jQa_i}\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xIy} \leftrightarrow (\mathbf{xQy} \wedge \mathbf{yQx})]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}\{\mathbf{1} - [\mathbf{a_iIa_j} + (\mathbf{1} - \mathbf{2a_iIa_j})(\mathbf{a_iQa_j} + \mathbf{a_jQa_i} - \mathbf{a_iQa_ja_jQa_i})]\}$
$(\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xPy} \leftrightarrow \neg\mathbf{yQx}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}\ [\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_jQa_i} - \mathbf{a_iPa_j} + \mathbf{2a_iPa_j}\ \mathbf{a_jQa_i})]$
CONCLUSIONES DE <Q, I, P>	**CONCLUSIONES ALGEBRAICAS <Q, I, P>**
$(\forall_x)[\mathbf{xIx}]$	$\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xIy} \rightarrow \mathbf{yIx}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_j})\mathbf{a_jIa_i}\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)(\forall_z)[(\mathbf{xIy} \wedge \mathbf{yIz}) \rightarrow \mathbf{xIz}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_j})(\mathbf{1} - \mathbf{a_jIa_k})\ \mathbf{a_iIa_k}\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xPy} \rightarrow \neg\mathbf{yPx}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iPa_j})(\mathbf{1} - \mathbf{a_jPa_i})\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)(\forall_z)[(\mathbf{xPy} \wedge \mathbf{yPz}) \rightarrow \mathbf{xPz}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iPa_j})(\mathbf{1} - \mathbf{a_jPa_k})\mathbf{a_iPa_k}\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xIy} \rightarrow \neg(\mathbf{xPy} \vee \mathbf{yPx})]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_j})(\mathbf{1} - \mathbf{a_iPa_j}\ \mathbf{a_jPa_i})\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)(\forall_z)[(\mathbf{xIy} \wedge \mathbf{yPz}) \rightarrow \mathbf{xPz}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_j})(\mathbf{1} - \mathbf{a_jPa_k})\ \mathbf{a_iPa_k}\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)(\forall_z)[(\mathbf{xIy} \wedge \mathbf{zPx}) \rightarrow \mathbf{zPy}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_j})(\mathbf{1} - \mathbf{a_kPa_i})\ \mathbf{a_kPa_j}\ ]$

[31] Se extrajo este sistema deductivo de (Suppes, 1974: 97). También es posible interpretar este sistema en el ámbito del comportamiento racional, tal como lo hace Suppes al introducir las nociones de preferencia débil, preferencia estricta e indiferencia que corresponden a Q, P e I respectivamente.

d) $\{ (\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xQy} \vee \mathbf{yQx}] \wedge (\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xIy} \leftrightarrow (\mathbf{xQy} \wedge \mathbf{yQx})] \} \rightarrow (\forall_x)[\mathbf{xIx}]$ [32]

1. $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\mathbf{1 - a_iQa_ja_jQa_i}] \prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}\{\mathbf{1 - [a_iIa_j+(1 - 2a_iIa_j)(a_iQa_j+a_jQa_i-a_iQa_ja_jQa_i)]}\}$

$\{\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1 - a_iIa_i}]\}$

* $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\mathbf{1 - a_iQa_ja_jQa_i}] = \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i=j}}^{\infty}[\mathbf{1 - a_iQa_ja_jQa_i}] \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\mathbf{1 - a_iQa_ja_jQa_i}]$

* $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1 - a_iQa_ia_iQa_i}$

* $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha}] = \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i=j}}^{\infty}[\mathbf{1 - a_iQa_ja_jQa_i}] \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha}]$

* $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha}] = \prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1 - a_iQa_ia_iQa_i}] \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha}]$

* $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha}] = \prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1 - a_iQa_i}] \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha}]$

- $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty} \{\mathbf{1 - [a_iIa_j+(1 - 2a_iIa_j)(a_iQa_j+a_jQa_i - a_iQa_j\, a_jQa_i)]}\}$
- $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1 - [a_iIa_j+(1 - 2a_iIa_j)(a_iQa_j+a_jQa_i - a_iQa_j\, a_jQa_i)]}$
- $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}] = \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i=j}}^{\infty}\{\mathbf{1 - [a_iIa_j+(1 - 2a_iIa_j)(a_iQa_j+a_jQa_i - a_iQa_j\, a_jQa_i)]}\} \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]$
- $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}] = \prod_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{1 - [a_iIa_i+(1 - 2a_iIa_i)(a_iQa_i+a_iQa_i - a_iQa_i\, a_iQa_i)]}\} \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]$
- $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}] = \prod_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{1 - [a_iIa_i+(1 - 2a_iIa_i)(2a_iQa_i - a_iQa_i)]}\} \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]$
- $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}] = \prod_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{1 - [a_iIa_i+(1 - 2a_iIa_i)(a_iQa_i)]}\} \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]$
- $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}] = \prod_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{1 - [a_iIa_i+(a_iQa_i - 2a_iIa_i\, a_iQa_i)]}\} \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]$
- $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}] = \prod_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{1 - [a_iIa_i+a_iQa_i - 2a_iIa_i\, a_iQa_i]}\} \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]$
- $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}] = \prod_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{1 - a_iIa_i - a_iQa_i + 2a_iIa_i\, a_iQa_i}\} \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]$

[32] La primera conclusión depende únicamente de la segunda y de la tercera premisa del sistema.

2. $\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iQa_i}]\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha}]\prod_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}-\mathbf{a_iQa_i}+\mathbf{2a_iIa_ia_iQa_i}\}\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]$

$\{\mathbf{1}-\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}]\}$

3. $\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha}]\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iQa_i}]\prod_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}-\mathbf{a_iQa_i}+\mathbf{2a_iIa_ia_iQa_i}\}$

$\{\mathbf{1}-\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}]\}$

4. $\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha}]\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\beta}]\prod_{i=1}^{\infty}[(\mathbf{1}-\mathbf{a_iQa_i})(\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}-\mathbf{a_iQa_i}+\mathbf{2a_iIa_ia_iQa_i})]$

$\{\mathbf{1}-\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}]\}$

5. $\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha\beta}]\prod_{i=1}^{\infty}[(\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}-\mathbf{a_iQa_i}+\mathbf{2a_iIa_ia_iQa_i}-\mathbf{a_iQa_i}+\mathbf{a_iIa_ia_iQa_i}+\mathbf{a_iQa_i}-\mathbf{2a_iIa_ia_iQa_i})]$

$\{\mathbf{1}-\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}]\}$

6. $\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha\beta}]\prod_{i=1}^{\infty}[(\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}-\mathbf{a_iQa_i}+\mathbf{a_iIa_ia_iQa_i})]\{\mathbf{1}-\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}]\}$

7. $\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha\beta}]\prod_{i=1}^{\infty}[(\mathbf{1}-\mathbf{a_iQa_i})(\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i})]\{\mathbf{1}-\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}]\}$

8. $\prod_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{\infty}[\boldsymbol{\alpha\beta}]\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iQa_i}]\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}]\{\mathbf{1}-\prod_{i=1}^{\infty}[\mathbf{1}-\mathbf{a_iIa_i}]\}$

9. $\mathbf{0}$ [33]

[33] La línea ocho tiene al tercer y cuarto factor bajo la forma **x (1 − x)**, razón por la que se reduce a cero.

CAPÍTULO II

LA VERSIÓN ALGEBRAICA DE LA DEDUCCIÓN NATURAL EN LÓGICA PROPOSICIONAL

En esta sección presentaremos un equivalente algebraico de las reglas de deducción natural del cálculo proposicional propuestas por el investigador alemán Gerhard Gentzen, de las cuales se han formulado variantes que son empleadas a menudo en los manuales de lógica para transferir la verdad de premisas a conclusión. En nuestra interpretación algebraica la verdad se asocia con el cero, de modo que lo que se transfiere de premisas a conclusión es la propiedad de algunas fórmulas de admitir el valor cero.

II.1. UN CONJUNTO DE REGLAS ALGEBRAICAS DE DEDUCCIÓN

Propondremos siete reglas algebraicas de deducción, las cuales deben usarse junto con las propiedades convencionales de la aritmética como la distribución del producto, la conmutatividad del producto, la conmutatividad de la adición, etc.

REGLA DE DEDUCCIÓN NATURAL	**REGLA ALGEBRAICA DE DEDUCCIÓN**	**NOMBRE DE LA REGLA ALGEBRAICA**
$(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$	$(A \rightarrow B) \equiv (1 - A)\, B$	**Definición algebraica del condicional**
$(A \vee A) \equiv A$	$A^2 = A$	**Reducción**
$(A \vee \neg A) \equiv T$	$A(1 - A) = 0$	**Deleción**
$A \vdash (A \vee B)$	$A \vdash AB$	**Producto**
$(A \wedge B) \vdash A$ $(A \wedge B) \vdash B$	$(A + B - AB) \vdash A$ $(A + B - AB) \vdash B$	**Análisis**
$(A, B) \vdash (A \wedge B)$	$(A, B) \vdash A + B - AB$	**Síntesis**
________	$(A, B, AB = 0) \vdash A + B$	**Suma**

El procedimiento llevado a cabo para establecer las siete reglas algebraicas de deducción consiste en interpretar algebraicamente algunas reglas conocidas de la deducción natural. La **Definición algebraica del condicional** es la interpretación algebraica del operador condicional. La regla algebraica que hemos denominado **Reducción** es el equivalente algebraico de la regla de **Idempotencia.**[34] La regla algebraica llamada **Deleción** es el equivalente algebraico de la regla adicional de abreviación que afirma que una fórmula siempre verdadera tiene la forma $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$ o es reductible a $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$.[35] La regla algebraica denominada **Producto** resulta de interpretar algebraicamente la regla de **Adición**[36]. La regla algebraica de **Análisis** corresponde a la regla de **Simplificación**[37]. Asimismo, la regla algebraica de **Síntesis** es el equivalente algebraico de la regla de **Conjunción**[38]. Finalmente, la regla algebraica que hemos llamado **Suma**[39] es un caso particular de la regla de **Síntesis**.

Sostenemos que estas siete reglas algebraicas de deducción, junto con las propiedades aritméticas convencionales, bastan para efectuar cualquier deducción en lógica proposicional que no involucre ni el uso de la prueba condicional (PC) ni de la prueba por reducción al absurdo (PRA). Esto ocurre porque para efectuar pruebas que no requieran de la (PC) ni de la (PRA) hay solo dos reglas no omisibles de deducción: la definición de condicional y el modus ponens.[40]

Analicemos algebraicamente la estructura de la regla no omisible de deducción conocida como modus ponens:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \qquad /\therefore \mathbf{B}$$

[34] Figura como la regla diecinueve en (Piscoya, 2007: 158).
[35] Aparece como la regla **ra4** en (Piscoya, 2007: 142).
[36] Figura como la regla nueve en (Piscoya, 2007: 157).
[37] Aparece como la regla siete en (Piscoya, 2007: 157).
[38] Figura como la regla ocho en (Piscoya, 2007: 157).
[39] Esta regla solo debe usarse cuando el producto **AB** sea igual a cero.
[40] Esta información fue tomada de (Piscoya, 2007: 161-162).

Para poder efectuar la interpretación algebraica del modus ponens es necesario emplear la regla conocida como definición de condicional. La aplicación de esta regla se aprecia en la columna del medio que figura a continuación y se emplea como paso intermedio para la interpretación algebraica que figura en la columna de la derecha.

$\mathbf{A \rightarrow B}$	$\mathbf{\neg A \vee B}$	$\mathbf{(1 - A)B}$
$\mathbf{A \quad / \therefore B}$	$\mathbf{A \quad / \therefore B}$	$\mathbf{A \quad / \therefore B}$

Una vez efectuada la interpretación algebraica, procederemos a probar algebraicamente el equivalente del modus ponens valiéndonos de algunas reglas algebraicas de deducción incluso más elementales. Tales reglas más elementales serán destacadas mediante el subrayado en la justificación que figura a lado derecho de la deducción. Las reglas no subrayadas son las propiedades aritméticas convencionales. Todo esto significa que, en lugar de las reglas no omisibles de definición de condicional y modus ponens, en la versión algebraica de la deducción natural que no requiere de la (PC) ni de la (PRA) tenemos cuatro reglas no omisibles: la **Definición algebraica del condicional**[41]**, Reducción, Producto** y **Síntesis**[42].

1.	$\mathbf{(1 - A)B}$	
2.	$\mathbf{A \quad / \therefore B}$	
3.	$\mathbf{AB}$	<u>Producto en 2</u>
4.	$\mathbf{(1 - A)B + AB - (1 - A)BAB}$	<u>Síntesis en 1 y 3</u>
5.	$\mathbf{(1 - A)B + AB - (1 - A)ABB}$	Conmutatividad del producto en 4
6.	$\mathbf{(1 - A)B + AB - (A - A^2)BB}$	Distribución del producto en 5
7.	$\mathbf{(1 - A)B + AB - (A - A)BB}$	<u>Reducción en 6</u>
8.	$\mathbf{(1 - A)B + AB - (\ 0\ )BB}$	Propiedad aritmética en 7
9.	$\mathbf{(1 - A)B + AB}$	Propiedad aritmética en 8
10.	$\mathbf{B - AB + AB}$	Distribución del producto en 9
11.	$\mathbf{B}$	Propiedad aritmética en 10

[41] Esta regla se expresa simbólicamente de la siguiente manera: $\mathbf{(A \rightarrow B) \equiv (1 - A)B}$.

[42] **Deleción** es una consecuencia de **Reducción**, **Análisis** es consecuencia de **Producto** y **Suma** es consecuencia de **Síntesis**.

Ahora proporcionaremos ejemplos de deducciones en las que usaremos las siete reglas algebraicas de deducción junto con las propiedades convencionales de la aritmética. El primer ejemplo es una deducción muy conocida que recibe el nombre de dilema constructivo y que puede probarse algebraicamente. Los demás ejemplos no son deducciones que tengan nombre propio pero también pueden probarse de manera algebraica.

Ejemplo 1

DILEMA CONSTRUCTIVO

$\mathbf{A \rightarrow B}$	$\mathbf{(1-A)B}$
$\mathbf{C \rightarrow D}$	$\mathbf{(1-C)D}$
$\mathbf{A \vee C} \quad /\therefore \mathbf{B \vee D}$	$\mathbf{AC} \quad /\therefore \mathbf{BD}$

1.	$\mathbf{(1-A)B}$	
2.	$\mathbf{(1-C)D}$	
3.	$\mathbf{AC} \quad /\therefore \mathbf{BD}$	
4.	$\mathbf{(1-A)BC}$	Producto en 1
5.	$\mathbf{ACB}$	Producto en 3
6.	$\mathbf{ABC}$	Conmutatividad del producto en 5
7.	$\mathbf{BC\,(1-A+A)}$	Suma en 4 y 6
8.	$\mathbf{BC}$	Propiedad aritmética en 7
9.	$\mathbf{(1-C)DB}$	Producto en 2
10.	$\mathbf{BCD}$	Producto en 8
11.	$\mathbf{CDB}$	Conmutatividad del producto en 10
12.	$\mathbf{DB\,(1-C+C)}$	Suma en 9 y en 11
13.	$\mathbf{DB}$	Propiedad aritmética en 12
14.	$\mathbf{BD}$	Conmutatividad del producto en 13

Ejemplo 2

$\mathbf{C \rightarrow (D \rightarrow \neg C)}$ $\mathbf{(1-C)(1-D)(1-C)}$

$\mathbf{C \leftrightarrow D \quad /\therefore\ \neg C \wedge \neg D}$ $\mathbf{C + D - 2CD \ /\therefore (1-C)+(1-D)-(1-C)(1-D)}$

1.	$\mathbf{(1-C)(1-D)(1-C)}$	
2.	$\mathbf{C + D - 2CD}$ $\quad \mathbf{/\therefore (1-C)+(1-D)-(1-C)(1-D)}$	
3.	$\mathbf{(1-C)(1-D)}$	Reducción en 1
4.	$\mathbf{(C + D - 2CD)\ C}$	Producto en 2
5.	$\mathbf{C^2 + CD - 2C^2D}$	Distribución del producto en 4
6.	$\mathbf{C + CD - 2\ CD}$	Reducción en 5
7.	$\mathbf{C - CD}$	Propiedad aritmética en 6
8.	$\mathbf{C(1-\ D)}$	Factorización en 7
9.	$\mathbf{(1-\ D)(1-C+C)}$	Suma en 3 y 8
10.	$\mathbf{(1-\ D)}$	Propiedad aritmética en 9
11.	$\mathbf{(C + D - 2CD)\ D}$	Producto en 2
12.	$\mathbf{CD + D^2 - 2CD^2}$	Distribución del producto en 11
13.	$\mathbf{CD + D - 2CD}$	Reducción en 12
14.	$\mathbf{D - CD}$	Propiedad aritmética en 13
15.	$\mathbf{D(1-C)}$	Factorización en 14
16.	$\mathbf{(1-\ D)(1-C)}$	Producto en 10
17.	$\mathbf{(1-C)(D + 1-\ D)}$	Suma en 15 y 16
18.	$\mathbf{(1-C)}$	Propiedad aritmética en 17
19.	$\mathbf{(1-C)+(1-D)-(1-C)(1-D)}$	Síntesis en 18 y 10

Ejemplo 3

$E \to (F \wedge \neg G)$	$(1 - E)[\, F + (1 - G) - F(1 - G)\,]$
$(F \vee G) \to H$	$(1 - FG)H$
$E \quad /\therefore H$	$E \quad /\therefore H$

1. $(1 - E)[\, F + (1 - G) - F(1 - G)\,]$
2. $(1 - FG)H$
3. $E \quad /\therefore H$
4. $E[\, F + (1 - G) - F(1 - G)\,]$ Producto en 3
5. $[\, F + (1 - G) - F(1 - G)\,]\,(1 - E + E)$ Suma en 1 y 4
6. $F + (1 - G) - F(1 - G)$ Propiedad aritmética en 5
7. F Análisis en 6
8. FGH Producto en 7
9. $H(1 - FG + FG)$ Suma en 2 y 8
10. H Propiedad aritmética en 9

Ejemplo 4

$A \to B \;\; /\therefore\; A \;\to\; (A \wedge B)$ $\qquad$ $(1 - A)B \;\; /\therefore\; (1 - A)\,(\, A + B - AB\,)$

1. $(1 - A)B \;\; /\therefore\; (1 - A)\,(\, A + B - AB\,)$
2. $(1 - A)B + 0$ Propiedad aritmética en 1
3. $(1 - A)B + (1 - A)A$ Deleción en 2
4. $(1 - A)B + (1 - A)A - 0$ Propiedad aritmética en 3
5. $(1 - A)B + (1 - A)A - (1 - A)A$ Deleción en 4
6. $(1 - A)B + (1 - A)A - (1 - A)AB$ Propiedad aritmética en 5
7. $(1 - A)(\, B + A - AB\,)$ Factorización en 6
8. $(1 - A)(\, A + B - AB\,)$ Conmutatividad de la adición en 7

Ejemplo 5

$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$		$(1 - AB)\,(\,C + D - CD\,)$	
$(D \vee E) \rightarrow F$	$/\therefore\; A \rightarrow F$	$(1 - DE)F$	$/\therefore (1 - A)\,F$

1. $(1 - AB)\,(\,C + D - CD\,)$
2. $(1 - DE)F$ $\qquad /\therefore (1 - A)\,F$
3. $(1 - AB)\,(\,C + D - CD\,)\,D$ — Producto en 1
4. $(1 - AB)\,(\,CD + D^2 - CD^2\,)$ — Distribución del producto en 3
5. $(1 - AB)\,(\,CD + D - CD\,)$ — Reducción en 4
6. $(1 - AB)\,D$ — Propiedad aritmética en 5
7. $(1 - AB)\,DEF$ — Producto en 6
8. $DE(1 - AB)\,F$ — Conmutatividad del producto en 7
9. $(1 - DE)F(1 - AB)$ — Producto en 2
10. $(1 - DE)(1 - AB)\,F$ — Conmutatividad del producto en 9
11. $(1 - AB)\,F\,(1 - DE + DE)$ — Suma en 10 y 8
12. $(1 - AB)\,F$ — Propiedad aritmética en 11
13. $(1 - AB)\,F\,(1 - A)$ — Producto en 12
14. $[\,(1 - A) - (1 - A)AB\,]\,F$ — Distribución del producto en 13
15. $(1 - A)F$ — Deleción en 14

II.2. LA VERSIÓN ALGEBRAICA DE LA PRUEBA CONDICIONAL

Estableceremos una octava regla de deducción algebraica. Se trata del equivalente algebraico de la regla de deducción natural conocida como prueba condicional.

PRUEBA CONDICIONAL (PC)	**VERSIÓN ALGEBRAICA DE LA (PC)**
1. A ⋮ **n. B** **n+1.** $\mathbf{A \to B}$ [43]	**1. A** ⋮ **n. B** **n+1.** $\mathbf{(1 - A)B}$

Esta regla aplica para las deducciones en las que la conclusión tiene la forma de un producto. La aplicación de la regla consiste en tomar el factor izquierdo de la conclusión, restarlo de la unidad y añadirlo como premisa adicional.[44] Considerando las premisas dadas y la premisa adicional, aplicamos las reglas algebraicas de deducción para obtener la fórmula que figura como factor derecho de la conclusión. En la siguiente línea debe haber dos factores: el primero es la premisa adicional restada de uno y el segundo es el factor derecho de la conclusión.

Ejemplo 1

$\mathbf{A \to B \;/\therefore\; A \to (A \wedge B)}$ $\qquad$ $\mathbf{(1 - A)B \;/\therefore\; (1 - A)(A + B - AB)}$

1. $\mathbf{(1 - A)B \;/\therefore\; (1 - A)(A + B - AB)}$
2. $\mathbf{A}$ — Premisa adicional
3. $\mathbf{AB}$ — Producto en 2
4. $\mathbf{B(1 - A + A)}$ — Suma en 1 y 3
5. $\mathbf{B}$ — Propiedad aritmética en 4
6. $\mathbf{A + B - AB}$ — Síntesis en 2 y 5
7. $\mathbf{(1 - A)(A + B - AB)}$ — Prueba Condicional en 2 y 6

[43] Tomado de (Piscoya, 2007: 158).
[44] También podría tomarse el factor derecho de la conclusión, puesto que el producto es conmutativo.

Ejemplo 2

$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$ $\qquad$ $(1 - AB)(C + D - CD)$

$(D \vee E) \rightarrow F \quad /\therefore\ A \rightarrow F$ $\qquad$ $(1 - DE)F \quad /\therefore (1 - A)F$

1.	$(1 - AB)(C + D - CD)$	
2.	$(1 - DE)F \qquad /\therefore (1 - A)F$	
3.	A	Premisa adicional
4.	$AB(C + D - CD)$	Producto en 3
5.	$(C + D - CD)(1 - AB + AB)$	Suma en 1 y 4
6.	$C + D - CD$	Propiedad aritmética en 5
7.	D	Análisis en 6
8.	DEF	Producto en 7
9.	$F(1 - DE + DE)$	Suma en 2 y 8
10.	F	Propiedad aritmética en 9
11.	$(1 - A)F$	Prueba Condicional en 3 y 10

II.3. LA VERSIÓN ALGEBRAICA DE LA PRUEBA POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

Finalmente, propondremos la novena regla de deducción algebraica. En este caso, se trata del equivalente algebraico de la regla de deducción natural conocida como prueba por reducción al absurdo.

PRUEBA POR REDUCCIÓN AL ABSURDO (PRA)	VERSIÓN ALGEBRAICA DE LA (PRA)
$[A \rightarrow (B \wedge \neg B)] \vdash \neg A$ [45]	$(1 - A)1 \vdash (1 - A)$

[45] Tomado de (Piscoya, 2007: 158) con una ligera variación expresiva que no altera el sentido de la regla.

Esta regla se aplica añadiendo como premisa adicional la conclusión restada de uno. Considerando las premisas ofrecidas y la premisa adicional, aplicamos las reglas algebraicas de deducción para obtener en alguna línea el valor uno[46]. En la siguiente línea aplicamos la versión algebraica de la prueba condicional de modo que tengamos dos factores: el primero es la premisa adicional restada de uno y el segundo es el valor uno obtenido en la deducción. Aplicando las propiedades convencionales de la aritmética obtendremos finalmente la conclusión deseada.

Ejemplo 1

$\mathbf{E \rightarrow (F \wedge \neg G)}$	$\mathbf{(1 - E)[\, F + (1 - G) - F(1 - G)\,]}$
$\mathbf{(F \vee G) \rightarrow H}$	$\mathbf{(1 - FG)H}$
$\mathbf{E \quad /\therefore H}$	$\mathbf{E \quad /\therefore H}$

1.	$\mathbf{(1 - E)[\, F + (1 - G) - F(1 - G)\,]}$	
2.	$\mathbf{(1 - FG)H}$	
3.	$\mathbf{E \quad /\therefore H}$	
4.	$\mathbf{(1 - H)}$	Premisa adicional
5.	$\mathbf{(1 - H)(1 - FG)}$	Producto en 4
6.	$\mathbf{H\,(1 - FG)}$	Conmutatividad del producto en 2
7.	$\mathbf{(1 - FG)\,(1 - H + H)}$	Suma en 5 y 6
8.	$\mathbf{(1 - FG)}$	Propiedad aritmética en 7
9.	$\mathbf{E[\, F + (1 - G) - F(1 - G)\,]}$	Producto en 3
10.	$\mathbf{[\, F + (1 - G) - F(1 - G)\,]\,(1 - E + E)}$	Suma en 1 y 9
11.	$\mathbf{F + (1 - G) - F(1 - G)}$	Propiedad aritmética en 10
12.	$\mathbf{F}$	Análisis en 11

[46] Obtener en alguna línea de la deducción el valor numérico uno equivale a obtener una fórmula contradictoria. Se debe tener presente que en esta interpretación algebraica la verdad se asocia con el cero y la falsedad con el uno.

13.	$\mathbf{FG}$	Producto en 12
14.	$\mathbf{(1 - FG) + FG}$	Suma en 8 y 13
15.	$\mathbf{1}$	Propiedad aritmética en 14
16.	$[\,\mathbf{1 - (1 - H)}\,]\,\mathbf{1}$	Prueba Condicional en 4 y 15
17.	$[\,\mathbf{1 - 1 + H}\,]\,\mathbf{1}$	Propiedad aritmética en 16
18.	$\mathbf{H}$	Propiedad aritmética en 17

Ejemplo 2

$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$ $\qquad$ $\mathbf{(1 - AB)\,(\,C + D - CD\,)}$

$(\mathbf{D} \vee \mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{F}$ $\quad /\therefore\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}$ $\qquad$ $\mathbf{(1 - DE)F}$ $\quad /\therefore \mathbf{(1 - A)\,F}$

1.	$\mathbf{(1 - AB)\,(\,C + D - CD\,)}$	
2.	$\mathbf{(1 - DE)F}$ $\qquad /\therefore \mathbf{(1 - A)\,F}$	
3.	$\mathbf{1 - (1 - A)\,F}$	Premisa adicional
4.	$\mathbf{(1 - DE)\,F\,(1 - A)}$	Producto en 2
5.	$[\,\mathbf{1 - (1 - A)\,F}\,]\,\mathbf{(1 - DE)}$	Producto en 3
6.	$\mathbf{(1 - A)\,F\,(1 - DE)}$	Conmutatividad del producto en 4
7.	$\mathbf{(1 - DE)}\,[\,\mathbf{1 - (1 - A)\,F + (1 - A)\,F}\,]$	Suma en 5 y 6
8.	$\mathbf{(1 - DE)}$	Propiedad aritmética en 7
9.	$\mathbf{(1 - AB)\,(\,C + D - CD\,)\,D}$	Producto en 1
10.	$\mathbf{(1 - AB)\,(\,CD + D^2 - CD^2\,)}$	Distribución del producto en 9
11.	$\mathbf{(1 - AB)\,(\,CD + D - CD\,)}$	Reducción en 10
12.	$\mathbf{(1 - AB)\,D}$	Propiedad aritmética en 11
13.	$\mathbf{(1 - AB)\,DE}$	Producto en 12
14.	$\mathbf{(1 - DE)\,(1 - AB)}$	Producto en 8
15.	$\mathbf{DE\,(1 - AB)}$	Conmutatividad del producto en 13

16.	$\mathbf{(1 - AB)\,(1 - DE + DE)}$	Suma en 14 y 15
17.	$\mathbf{1 - AB}$	Propiedad aritmética en 16
18.	$\mathbf{[\,1 - (1 - A)\,F\,]\,A}$	Producto en 3
19.	$\mathbf{A - A\,(1 - A)\,F}$	Distribución del producto en 18
20.	$\mathbf{A}$	Deleción en 19
21.	$\mathbf{AB}$	Producto en 20
22.	$\mathbf{1 - AB + AB}$	Suma en 17 y 21
23.	$\mathbf{1}$	Propiedad aritmética en 22
24.	$\mathbf{\{\,1 - [\,1 - (1 - A)\,F\,]\,\}\,1}$	Prueba Condicional en 3 y 23
25.	$\mathbf{\{\,1 - 1 + (1 - A)\,F\,\}\,1}$	Propiedad aritmética en 24
26.	$\mathbf{(1 - A)\,F}$	Propiedad aritmética en 25

CAPÍTULO III

LA VERSIÓN ALGEBRAICA DE LA DEDUCCIÓN NATURAL PARA FÓRMULAS CUANTIFICADAS

En este capítulo final propondremos unas reglas que permitirán efectuar deducciones con el equivalente algebraico de un lenguaje predicativo. Tales reglas son la versión algebraica de las reglas de eliminación y reintroducción de cuantificadores. Para ello, es necesario usar la productoria con un argumento para representar algebraicamente un predicado monádico cuantificado, la productoria con dos argumentos para representar un predicado diádico cuantificado, la productoria con tres argumentos para los predicados triádicos cuantificados, y así sucesivamente.

REGLAS PARA EL EMPLEO DE CUANTIFICADORES (REC)	EQUIVALENTES ALGEBRAICOS DE LAS (REC)
EJEMPLIFICACIÓN UNIVERSAL (EU) $\dfrac{(\forall_x)\mathbf{Px}}{\mathbf{Pa} \ / \ \mathbf{Px}}$	**(EU algebraica)** $\dfrac{\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{Pa_i}\,]}{\mathbf{Pa_1} \ / \ \mathbf{Pa_2} \ldots / \ \mathbf{Pa_\alpha} \ \ldots \ / \ \mathbf{Pa_i}}$
GENERALIZACIÓN UNIVERSAL (GU) $\dfrac{\mathbf{Px}}{(\forall_x)\mathbf{Px}}$	**(GU algebraica)** $\dfrac{\mathbf{Pa_i}}{\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \mathbf{Pa_i}\,]}$ [47]
EJEMPLIFICACIÓN EXISTENCIAL (EE) $\dfrac{(\exists_x)\mathbf{Px}}{\mathbf{P\alpha}}$	**(EE algebraica)** $\dfrac{\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_i}\,]}{\mathbf{Pa_\alpha}}$ [48]
GENERALIZACIÓN EXISTENCIAL (GE) $\dfrac{\mathbf{Pa} \ / \ \mathbf{Px}}{(\exists_x)\mathbf{Px}}$	**(GE algebraica)** $\dfrac{\mathbf{Pa_1} \ / \ \mathbf{Pa_2} \ldots / \ \mathbf{Pa_\alpha} \ \ldots \ / \ \mathbf{Pa_i}}{\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_i}\,]}$

[47] Siempre que $\mathbf{a_i}$ no esté libre de la productoria en ninguna de las premisas utilizadas.

[48] Usaremos la constante individual $\mathbf{a_\alpha}$ con la condición de no haber aparecido antes en la deducción.

1. LA REGLA DE (EU algebraica)

Esta regla es el equivalente algebraico de la ejemplificación universal, la cual afirma que desde una fórmula cuantificada universalmente $(\forall_x)\mathbf{Px}$ podemos derivar o un ejemplo concreto, denotado por **Pa** o un ejemplo arbitrario, denotado por **Px**.[49] En la versión algebraica que proponemos, una fórmula cuantificada universalmente tiene la forma $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - Pa_i \,]}$ y de ella podemos derivar o un ejemplo concreto, denotado por $\mathbf{Pa_1}$ o un ejemplo arbitrario, denotado por $\mathbf{Pa_i}$.

La **(EU algebraica)** se justifica por el empleo de las reglas algebraicas de deducción establecidas en el capítulo anterior y por las propiedades convencionales de la aritmética. Veamos el siguiente razonamiento para ilustrar este asunto.

1.	$\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - Pa_i \,]}$	
2.	$\mathbf{\{\, 1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - Pa_i \,] \,\} Pa_1}$	Producto en 1
3.	$\mathbf{Pa_1 - Pa_1 \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - Pa_i \,]}$	Distribución del producto en 2
4.	$\mathbf{Pa_1 - Pa_1\,(1 - Pa_1) \prod_{i=2}^{\infty}[\, 1 - Pa_i \,]}$	Propiedad de Π en 3
5.	$\mathbf{Pa_1 - [\, Pa_1 - (Pa_1)^2 \,] \prod_{i=2}^{\infty}[\, 1 - Pa_i \,]}$	Distribución del producto en 4
6.	$\mathbf{Pa_1 - [\, Pa_1 - Pa_1 \,] \prod_{i=2}^{\infty}[\, 1 - Pa_i \,]}$	Reducción en 5
7.	$\mathbf{Pa_1 - [\, 0 \,] \prod_{i=2}^{\infty}[\, 1 - Pa_i \,]}$	Propiedad aritmética en 6
8.	$\mathbf{Pa_1 - [\, 0 \,]}$	Propiedad aritmética en 7
9.	$\mathbf{Pa_1}$	Propiedad aritmética en 8

A partir de $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - Pa_i \,]}$ se pudo derivar un ejemplo concreto, denotado por $\mathbf{Pa_1}$. Siguiendo el mismo razonamiento podríamos derivar $\mathbf{Pa_2}$, $\mathbf{Pa_3}$, $\mathbf{Pa_4}$ y así sucesivamente. Esto significa que así como es posible derivar un ejemplo concreto, también es posible derivar un ejemplo arbitrario, denotado por $\mathbf{Pa_i}$.

[49] Tomado de (Piscoya, 2007: 269-270) con ligeras variantes que no alteran el sentido de la regla de ejemplificación universal.

2. LA REGLA DE (GU algebraica)

Esta regla es el equivalente algebraico de la generalización universal, la cual permite reintroducir el cuantificador universal bajo la presuposición de que la propiedad que es verdadera para un individuo arbitrariamente tomado de un dominio, es verdadera para todo el dominio. Vale decir, si en una línea de deducción tenemos el ejemplo arbitrario **Px** y sabemos que la variable **x** no está libre en ninguna de las premisas utilizadas, entonces podemos deducir $(\forall_x)\mathbf{Px}$.[50] En nuestra versión algebraica, del ejemplo arbitrario $\mathbf{Pa_i}$ es posible deducir $\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \mathbf{Pa_i}\ ]$ siempre que $\mathbf{a_i}$ no esté libre de la productoria en ninguna de las premisas utilizadas.[51]

3. LA REGLA DE (EE algebraica)

Esta regla es el equivalente algebraico de la ejemplificación existencial, la cual sostiene que la fórmula $(\exists_x)\mathbf{Px}$ es verdadera en un dominio determinado, si existe al menos un objeto del dominio que permita construir un ejemplo verdadero. Este objeto será designado con la constante individual $\boldsymbol{\alpha}$ que debe satisfacer la condición de no haber aparecido antes en la deducción para evitar la presuposición innecesaria de que se trata del mismo objeto al que hacen referencia otras proposiciones. Es decir, si en una línea de deducción tenemos $(\exists_x)\mathbf{Px}$, a partir de ello se puede deducir $\mathbf{P\alpha}$ siempre que $\boldsymbol{\alpha}$ no haya aparecido antes en la deducción.[52]

---

[50] Tomado de (Piscoya, 2007: 270-271) con ligeras variantes que no alteran el sentido de la regla de generalización universal.

[51] La restricción de que $\mathbf{a_i}$ no esté libre de la productoria en ninguna de las premisas utilizadas es el equivalente algebraico de la restricción que exige que la variable **x** no esté libre en ninguna de las premisas utilizadas.

[52] Tomado de (Piscoya, 2007: 271) con ligeras variantes que no alteran el sentido de la regla de ejemplificación existencial.

En nuestra interpretación algebraica, $(\exists_x)\mathbf{Px}$ tiene la forma $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_i}\,]$ de donde podemos derivar un ejemplo concreto, denotado por $\mathbf{Pa_\alpha}$, siempre que $\mathbf{a_\alpha}$ no haya aparecido antes en la deducción. [53]

4. LA REGLA DE (GE algebraica)

Esta regla es el equivalente algebraico de la generalización existencial, la cual sostiene que si en una línea de deducción tenemos un ejemplo concreto, denotado por **Pa** o un ejemplo arbitrario, denotado por **Px**, entonces podemos deducir $(\exists_x)\mathbf{Px}$.[54] En nuestra versión algebraica, si en una línea de deducción tenemos un ejemplo concreto, denotado por $\mathbf{Pa_1}$ o un ejemplo arbitrario, denotado por $\mathbf{Pa_i}$, entonces podemos deducir $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_i}\,]$.

La **(GE algebraica)** se justifica por el empleo de las reglas algebraicas de deducción establecidas en el capítulo anterior y por las propiedades convencionales de la aritmética. Veamos los siguientes razonamientos para ilustrar este asunto.

1. $\mathbf{Pa_1}$
2. $\mathbf{Pa_1}\prod_{i=2}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_i}\,]$ Producto en 1
3. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_i}\,]$ Propiedad de Π en 2

1. $\mathbf{Pa_i}$
2. $\mathbf{Pa_i}\prod_{j=1}^{i-1}[\,\mathbf{Pa_j}\,]$ Producto en 1
3. $\prod_{j=1}^{i-1}[\,\mathbf{Pa_j}\,]\,\mathbf{Pa_i}$ Conmut. del producto en 2
4. $\prod_{j=1}^{i-1}[\,\mathbf{Pa_j}\,]\,\mathbf{Pa_i}\prod_{j=i+1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_j}\,]$ Producto en 3
5. $\prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_j}\,]$ [55] Propiedad de Π en 4

Queda probado que, tanto a partir de $\mathbf{Pa_1}$ como de $\mathbf{Pa_i}$, se pudo deducir $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_i}\,]$.

[53] La restricción de que $\mathbf{a_\alpha}$ no haya aparecido antes en la deducción es el equivalente algebraico de la restricción que exige que la constante individual $\boldsymbol{\alpha}$ no haya aparecido antes en la deducción.

[54] Tomado de (Piscoya, 2007: 272) con ligeras variantes que no alteran el sentido de la regla de generalización existencial.

[55] La fórmula $\prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_j}\,]$ equivale a $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{Pa_i}\,]$.

A continuación, proporcionaremos algunos ejemplos en los que haremos uso de las reglas propuestas en este capítulo para efectuar deducciones con el equivalente algebraico de un lenguaje predicativo que emplea cuantificadores.

Ejemplo 1

Todos los hombres son mortales

Sócrates es hombre

Luego, Sócrates es mortal.

$(\forall_x)[\,\mathbf{Hx} \rightarrow \mathbf{Mx}\,]$ $\qquad$ $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\; 1 - (1 - Ha_i)\, Ma_i\,]}$

$\mathbf{Ha} \qquad /\therefore\ \mathbf{Ma}$ $\qquad$ $\mathbf{Ha_1} \qquad /\therefore\ \mathbf{Ma_1}$

1. $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\; 1 - (1 - Ha_i)\, Ma_i\,]}$
2. $\mathbf{Ha_1}$ $\qquad /\therefore\ \mathbf{Ma_1}$ [56]
3. $\mathbf{(1 - Ha_1)\, Ma_1}$ $\qquad$ EU algebraica en 1
4. $\mathbf{Ha_1\, Ma_1}$ $\qquad$ Producto en 2
5. $\mathbf{Ma_1\,(1 - Ha_1 + Ha_1)}$ $\qquad$ Suma en 3 y 4
6. $\mathbf{Ma_1}$ $\qquad$ Propiedad aritmética en 5

Ejemplo 2

$(\forall_x)[\mathbf{Px} \rightarrow \mathbf{Qx}]$ $\qquad$ $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\,1 - (1 - Pa_i)Qa_i\,]}$

$(\forall_x)[\mathbf{Qx} \rightarrow \mathbf{Rx}]\ /\therefore\ (\forall_x)[\mathbf{Px} \rightarrow \mathbf{Rx}]$ $\qquad$ $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\,1 - (1 - Qa_i)Ra_i\,]}\ /\therefore\ \mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\,1 - (1 - Pa_i)Ra_i\,]}$

1. $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\,1 - (1 - Pa_i)\, Qa_i\,]}$
2. $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\,1 - (1 - Qa_i)\, Ra_i\,]}$ $\qquad /\therefore\ \mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\,1 - (1 - Pa_i)\, Ra_i\,]}$

---

[56] En el lenguaje algebraico, el nombre propio 'Sócrates' será representado por la constante individual $\mathbf{a_1}$.

3.	$\mathbf{(1 - Pa_i)\, Qa_i}$	EU algebraica en 1
4.	$\mathbf{(1 - Qa_i)\, Ra_i}$	EU algebraica en 2
5.	$\mathbf{(1 - Qa_i)\, Ra_i\, (1 - Pa_i)}$	Producto en 4
6.	$\mathbf{(1 - Qa_i)\, (1 - Pa_i)\, Ra_i}$	Conmutatividad del producto en 5
7.	$\mathbf{Qa_i\, (1 - Pa_i)}$	Conmutatividad del producto en 3
8.	$\mathbf{Qa_i\, (1 - Pa_i)\, Ra_i}$	Producto en 7
9.	$\mathbf{(1 - Pa_i)\, Ra_i\, (1 - Qa_i + Qa_i)}$	Suma en 6 y 8
10.	$\mathbf{(1 - Pa_i)\, Ra_i}$	Propiedad aritmética en 9
11.	$\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - (1 - Pa_i)\, Ra_i\,]}$	GU algebraica en 10

Ejemplo 3

$(\forall_x)[\mathbf{Bx} \rightarrow \neg\mathbf{Tx}]$ $\quad$ $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - (1 - Ba_i)\, (1 - Ta_i)\,]}$

$(\exists_x)[\mathbf{Sx} \wedge \mathbf{Tx}]\ /\!\therefore\ (\exists_x)[\mathbf{Sx} \wedge \neg\mathbf{Bx}]$ $\quad$ $\mathbf{\prod_{i=1}^{\infty}[Sa_i + Ta_i - Sa_iTa_i]}\ /\!\therefore\ \mathbf{\prod_{i=1}^{\infty}[Sa_i + (1 - Ba_i) - Sa_i(1 - Ba_i)]}$

1.	$\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - (1 - Ba_i)\, (1 - Ta_i)\,]}$	
2.	$\mathbf{\prod_{i=1}^{\infty}[\, Sa_i + Ta_i - Sa_iTa_i\,]}\ /\!\therefore\ \mathbf{\prod_{i=1}^{\infty}[\, Sa_i + (1 - Ba_i) - Sa_i(1 - Ba_i)\,]}$	
3.	$\mathbf{Sa_\alpha + Ta_\alpha - Sa_\alpha Ta_\alpha}$	EE algebraica en 2
4.	$\mathbf{(1 - Ba_\alpha)\, (1 - Ta_\alpha)}$	EU algebraica en 1
5.	$\mathbf{Ta_\alpha}$	Análisis en 3
6.	$\mathbf{(1 - Ta_\alpha)\, (1 - Ba_\alpha)}$	Conmutatividad del producto en 4
7.	$\mathbf{Ta_\alpha\, (1 - Ba_\alpha)}$	Producto en 5
8.	$\mathbf{(1 - Ba_\alpha)\, (1 - Ta_\alpha + Ta_\alpha)}$	Suma en 6 y 7
9.	$\mathbf{(1 - Ba_\alpha)}$	Propiedad aritmética en 8
10.	$\mathbf{Sa_\alpha}$	Análisis en 3
11.	$\mathbf{Sa_\alpha + (1 - Ba_\alpha) - Sa_\alpha\, (1 - Ba_\alpha)}$	Síntesis en 10 y 9
12.	$\mathbf{\prod_{i=1}^{\infty}[\, Sa_i + (1 - Ba_i) - Sa_i(1 - Ba_i)\,]}$	GE algebraica en 11

Ejemplo 4

Quienquiera que perdone a cualquiera es un santo

No hay santos

Luego, nadie perdona a nadie.

$(\forall_x)(\forall_y)[\,\mathbf{F(x,y) \to Sx}\,]$ [57] $\qquad \mathbf{1 - \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\;1 - (1 - a_iFa_j)Sa_i\;]}$ [58]

$\neg(\exists_x)\mathbf{S(x)} \quad /\therefore\ (\forall_x)(\forall_y)\neg\mathbf{F(x,y)} \qquad \mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\,Sa_i\,]} \quad /\therefore\ \mathbf{1 - \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\;1 - (1 - a_iFa_j)]}$

1.	$\mathbf{1 - \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\;1 - (1 - a_iFa_j)Sa_i\;]}$	
2.	$\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\,Sa_i\,]}$	$/\therefore\ \mathbf{1 - \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\;1 - (1 - a_iFa_j)]}$
3.	$\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\;1 - (1 - Sa_i)\,]}$	Propiedad aritmética en 2
4.	$\mathbf{(1 - Sa_i)}$	EU algebraica en 3
5.	$\mathbf{(1 - a_iFa_j)\,Sa_i}$	EU algebraica en 1
6.	$\mathbf{(1 - Sa_i)\,(1 - a_iFa_j)}$	Producto en 4
7.	$\mathbf{Sa_i\,(1 - a_iFa_j)}$	Conmutatividad del producto en 5
8.	$\mathbf{(1 - a_iFa_j)\,(1 - Sa_i + Sa_i)}$	Suma en 6 y 7
9.	$\mathbf{(1 - a_iFa_j)}$	Propiedad aritmética en 8
10.	$\mathbf{1 - \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\;1 - (1 - a_iFa_j)]}$	GU algebraica en 9

Ejemplo 5

$(\forall_x)[\,\mathbf{x = x}\,]$	$(\forall_x)[\,\mathbf{xIx}\,]$	$\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\,1 - a_iIa_i\,]}$
———	———	———
$(\exists_x)(\exists_y)[\,\mathbf{x = y}\,]$	$(\exists_x)(\exists_y)[\,\mathbf{xIy}\,]$	$\mathbf{\prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,a_iIa_j\,]}$

---

[57] En lógica de primer orden, la acción de perdonar se representa como un predicado diádico. Usaremos el predicado diádico **F(x,y)** haciendo alusión a la palabra inglesa ‘forgive’ que significa perdonar.

[58] Usaremos la forma $\mathbf{a_iFa_j}$ en lugar de $\mathbf{F(a_i,\,a_j)}$ solo por comodidad expresiva.

1. $\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \ \mathbf{a_i I a_i}\,]$ $\quad /\therefore\ \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$

2. $\mathbf{a_1 I a_1}$ EU algebraica en 1

3. $\prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_i}\,]$ GE algebraica en 2

4. $\prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i=j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$ Propiedad de Π en 3

5. $\prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i=j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]\ \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$ Producto en 4

6. $\prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$ Propiedad de Π en 5

Probaremos nuevamente el ejemplo 5, pero esta vez emplearemos la versión algebraica de la prueba por reducción al absurdo (PRA).

1. $\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - \ \mathbf{a_i I a_i}\,]$ $\quad /\therefore\ \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$

2. $\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$ Premisa adicional

3. $\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_j}\,)\,]$ Propiedad aritmética en 2

4. $\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_j}\,)\,]$ EU algebraica en 3

5. $\mathbf{1} - \mathbf{a_i I a_i}$ EU algebraica en 4

6. $\mathbf{a_i I a_i}$ EU algebraica en 1

7. $\mathbf{1} - \ \mathbf{a_i I a_i} + \mathbf{a_i I a_i}$ Suma en 5 y 6

8. $\mathbf{1}$ Propiedad aritmética en 7

9. $\left[\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]\,\right)\right]\mathbf{1}$ Prueba Condicional en 2 y 8

10. $\left[\mathbf{1} - \ \mathbf{1} + \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]\,\right]\mathbf{1}$ Propiedad aritmética en 9

11. $\prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty}[\,\mathbf{a_i I a_j}\,]$ Propiedad aritmética en 10

Ejemplo 6

$(\forall_x)[\, x = x \,]$	$(\forall_x)[\, xIx \,]$	$1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - a_iIa_i \,]$
$(\forall_x)(\exists_y)[\, x = y \,]$	$(\forall_x)(\exists_y)[\, xIy \,]$	$1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, a_iIa_j \,]]$

1. $1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - a_iIa_i \,] \quad /\therefore \; 1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, a_iIa_j \,]]$
2. a_iIa_i — EU algebraica en 1
3. $a_iIa_i \; \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\infty}[\, a_iIa_j \,]$ — Producto en 2
4. $\prod_{j=1}^{\infty}[\, a_iIa_j \,]$ — Propiedad de Π en 3
5. $1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, a_iIa_j \,]]$ — GU algebraica en 4

Probaremos nuevamente el ejemplo 6, pero esta vez emplearemos la versión algebraica de la prueba por reducción al absurdo (PRA).

1. $1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - a_iIa_i \,] \qquad /\therefore \; 1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, a_iIa_j \,]]$
2. $\prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, a_iIa_j \,]]$ — Premisa adicional
3. $1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, a_\alpha Ia_j \,]$ — EE algebraica en 2
4. $1 - \prod_{j=1}^{\infty}[1 - (1 - a_\alpha Ia_j)\,]$ — Propiedad aritmética en 3
5. $1 - a_\alpha Ia_\alpha$ — EU algebraica en 4
6. $a_\alpha Ia_\alpha$ — EU algebraica en 1
7. $1 - a_\alpha Ia_\alpha + a_\alpha Ia_\alpha$ — Suma en 5 y 6
8. 1 — Propiedad aritmética en 7
9. $\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, a_iIa_j \,]]\}\, 1$ — Prueba Condicional en 2 y 8
10. $1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\, 1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, a_iIa_j \,]]$ — Propiedad aritmética en 9

Ejemplo 7

Según Wengert (1974), fue Augustus De Morgan quien retó a la comunidad académica decimonónica a deducir silogísticamente que 'todas las cabezas de caballo son cabezas de animales' a partir de 'todos los caballos son animales'. El propósito era mostrar que la silogística aristotélica era insuficiente para probar la validez de un razonamiento que empleara predicados diádicos o poliádicos en general. Mientras la lógica aristotélica, que solo emplea predicados monádicos, no tiene la potencia para probar la validez de este razonamiento, la lógica moderna sí permite probar tal validez. En lo que sigue, probaremos la validez de este razonamiento por medios algebraicos.

Todos los caballos son animales

Luego, todas las cabezas de caballo son cabezas de animales.

$$\frac{(\forall_x)[\, Cx \rightarrow Ax \,]}{(\forall_x)\big[(\exists_y)\big(Cy \wedge Hxy\big) \rightarrow (\exists_y)\big(Ay \wedge Hxy\big)\big]}$$ [59]

$$\frac{\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{Ca_i})\mathbf{Aa_i} \,]}{\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}\big[\, \mathbf{1} - \big(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\big)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}] \,\big]}$$ [60]

1. $\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{Ca_i})\mathbf{Aa_i} \,] \;/\therefore\; \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}\big[\, \mathbf{1} - \big(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\big)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}] \,\big]$
2. $(\mathbf{1} - \mathbf{Ca_j})\mathbf{Aa_j}$ — EU algebraica en 1
3. $(\mathbf{1} - \mathbf{Ca_j})\, \mathbf{Aa_j}\, (\mathbf{1} - \mathbf{a_iHa_j})$ — Producto en 2
4. $(\mathbf{1} - \mathbf{Ca_j})\, (\mathbf{1} - \mathbf{a_iHa_j})\, \mathbf{Aa_j}$ — Conmutatividad del producto en 3
5. $(\mathbf{1} - \mathbf{Ca_j})\, (\mathbf{1} - \mathbf{a_iHa_j})\, (\mathbf{Aa_j} + \mathbf{a_iHa_j})$ — Deleción y propiedad aritmética en 4
6. $(\mathbf{1} - \mathbf{Ca_j})\, (\mathbf{1} - \mathbf{a_iHa_j})\, (\mathbf{Aa_j} + \mathbf{a_iHa_j} - \mathbf{Aa_j}\, \mathbf{a_iHa_j})$ — Deleción y propiedad aritmética en 5
7. $(\mathbf{1} - \mathbf{Ca_j})\, (\mathbf{1} - \mathbf{a_iHa_j})\, (\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j})$ — Propiedad de Δ en 6

[59] Se extrajo este ejemplo de (Suppes, 1974: 131) con ligeras variantes que no alteran su sentido.

[60] En este ejemplo usaremos el operador algebraico Δ solo por comodidad expresiva. Su definición será la siguiente: $(p\Delta q) \equiv p + q - pq$.

8. $1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, 1 - (1 - Ca_j)\,(1 - a_iHa_j)\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)\,]$ GU algebraica en 7

9. $\left[\, 1 - \prod_{j=1}^{\infty}[\, 1 - (1 - Ca_j)\,(1 - a_iHa_j)\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)\,]\,\right]$

$\prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j]$ Producto en 8

10. $\prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j]$

$- \prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j]\, \prod_{j=1}^{\infty}[\, 1 - (1 - Ca_j)\,(1 - a_iHa_j)\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)\,]$ Distrib. del producto en 9

11. $\prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j]$

$- \prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j][1 - (1 - Ca_j)\,(1 - a_iHa_j)\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)\,]$ Propiedad de Π en 10

12. $\prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j]$

$- \prod_{j=1}^{\infty}[(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j) - (1 - Ca_j)\,(1 - a_iHa_j)\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)^2\,]$ Distrib. del producto en 11

13. $\prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j]$

$- \prod_{j=1}^{\infty}[(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j) - (1 - Ca_j)\,(1 - a_iHa_j)\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)\,]$ Reducción en 12

14. $\prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j]$

$- \prod_{j=1}^{\infty}\left[\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)\,[\,1 - (1 - Ca_j)\,(1 - a_iHa_j)]\,\right]$ Factorización en 13

15. $\prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j]$

$- \prod_{j=1}^{\infty}\left[\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)\,[\,1 - (1 - a_iHa_j - Ca_j + Ca_j\, a_iHa_j)]\,\right]$ Producto de binomios en 14

16. $\prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j]$

$- \prod_{j=1}^{\infty}\left[\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)\,[\,1 - 1 + a_iHa_j + Ca_j - Ca_j\, a_iHa_j]\,\right]$ Propiedad aritmética en 15

17. $\prod_{j=1}^{\infty}[Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j] - \prod_{j=1}^{\infty}\left[\,(Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j)\,(\,a_iHa_j + Ca_j - Ca_j\, a_iHa_j)\,\right]$ Propiedad aritmética en 16

18. $\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}] - \prod_{j=1}^{\infty}\big[\, (\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j})(\, \mathbf{Ca_j} + \mathbf{a_iHa_j} - \mathbf{Ca_j}\, \mathbf{a_iHa_j})\, \big]$ Conmut. de la suma en 17

19. $\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}] - \prod_{j=1}^{\infty}\big[\, (\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j})\, (\mathbf{Ca_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j})\, \big]$ Propiedad de Δ en 18

20. $\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}] - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\, \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]$ Propiedad de Π en 19

21. $\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\, \big(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\big)$ Factorización en 20

22. $\big(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\big)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]$ Conmut. del prod. en 21

23. $\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}\big[\, \mathbf{1} - \big(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\big)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\, \big]$ GU algebraica en 22

Ahora probaremos el ejemplo 7 empleando la versión algebraica de la prueba condicional (PC).

1. $\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\, \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{Ca_i})\mathbf{Aa_i}\,]\ /\!\therefore\ \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}\big[\, \mathbf{1} - \big(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\big)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]\, \big]$

2. $\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_j}]$ Premisa adicional

3. $\mathbf{Ca_\alpha} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_\alpha}$ EE algebraica en 2

4. $\mathbf{Ca_\alpha} + \mathbf{a_iHa_\alpha} - \mathbf{Ca_\alpha}\, \mathbf{a_iHa_\alpha}$ Propiedad de Δ en 3

5. $(\mathbf{1} - \mathbf{Ca_\alpha})\mathbf{Aa_\alpha}$ EU algebraica en 1

6. $\mathbf{Ca_\alpha}$ Análisis en 4

7. $\mathbf{Ca_\alpha}\, \mathbf{Aa_\alpha}$ Producto en 6

8. $\mathbf{Aa_\alpha}\, (\mathbf{1} - \mathbf{Ca_\alpha} + \mathbf{Ca_\alpha})$ Suma en 5 y 7

9. $\mathbf{Aa_\alpha}$ Propiedad aritmética en 8

10. $\mathbf{a_iHa_\alpha}$ Análisis en 4

11. $\mathbf{Aa_\alpha} + \mathbf{a_iHa_\alpha} - \mathbf{Aa_\alpha}\, \mathbf{a_iHa_\alpha}$ Síntesis en 9 y 10

12. $\mathbf{Aa_\alpha} \,\Delta\, \mathbf{a_iHa_\alpha}$ Propiedad de Δ en 11

13. $\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j}]$ GE algebraica en 12

14. $\left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_iHa_j}]\right) \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j}]$ Prueba Condicional en 2 y 13

15. $\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}\left[\,\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_iHa_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j}]\,\right]$ GU algebraica en 14

Finalmente, probaremos el ejemplo 7 con la versión algebraica de la prueba por reducción al absurdo (PRA).

1. $\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\,\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{Ca_i})\mathbf{Aa_i}\,] \;/\!\therefore\; \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}\left[\,\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_iHa_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j}]\,\right]$

2. $\prod_{i=1}^{\infty}\left[\,\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_iHa_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_iHa_j}]\,\right]$ Premisa adicional

3. $\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]$ EE algebraica en 2

4. $\left[\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\,\right]$

   $\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]$ Producto en 3

5. $\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]$

   $-\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]$ Distrib. del producto en 4

6. $\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]$ Deleción en 5

7. $\mathbf{Ca_\beta \,\Delta\, a_\alpha Ha_\beta}$ EE algebraica en 6

8. $\left[\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\,\right]$

   $\left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\right)$ Producto en 3

9. $\left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\right)$

   $-\left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\right)\left(\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Ca_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathbf{Aa_j \,\Delta\, a_\alpha Ha_j}]$ Distrib. del producto en 8

10. $\left(1-\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Aa_j} \,\Delta\, \mathrm{a_\alpha Ha_j}]\right)$

$-\left(1-\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Aa_j} \,\Delta\, \mathrm{a_\alpha Ha_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Aa_j} \,\Delta\, \mathrm{a_\alpha Ha_j}]\left(1-\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Ca_j} \,\Delta\, \mathrm{a_\alpha Ha_j}]\right)$ Conmut. del producto en 9

11. $\left(1-\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Aa_j} \,\Delta\, \mathrm{a_\alpha Ha_j}]\right)$ Deleción en 10

12. $\left(1-\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Aa_j} + \mathrm{a_\alpha Ha_j} - \mathrm{Aa_j}\, \mathrm{a_\alpha Ha_j}]\ \right)$ Propiedad de Δ en 11

13. $1-\prod_{j=1}^{\infty}[\ 1-(1-\mathrm{Aa_j})\,(1-\mathrm{a_\alpha Ha_j})]$ Propiedad aritmética en 12

14. $(1-\mathrm{Aa_\beta})\,(1-\mathrm{a_\alpha Ha_\beta})$ EU algebraica en 13

15. $\mathrm{Ca_\beta} + \mathrm{a_\alpha Ha_\beta} - \mathrm{Ca_\beta}\, \mathrm{a_\alpha Ha_\beta}$ Propiedad de Δ en 7

16. $(1-\mathrm{Ca_\beta})\mathrm{Aa_\beta}$ EU algebraica en 1

17. $\mathrm{Ca_\beta}$ Análisis en 15

18. $\mathrm{Ca_\beta}\ \mathrm{Aa_\beta}$ Producto en 17

19. $\mathrm{Aa_\beta}\,(1-\mathrm{Ca_\beta}+\mathrm{Ca_\beta})$ Suma en 16 y 18

20. $\mathrm{Aa_\beta}$ Propiedad aritmética en 19

21. $\mathrm{Aa_\beta}\,(1-\mathrm{a_\alpha Ha_\beta})$ Producto en 20

22. $(1-\mathrm{a_\alpha Ha_\beta})\,(1-\mathrm{Aa_\beta}+\mathrm{Aa_\beta})$ Suma en 14 y 21

23. $1-\mathrm{a_\alpha Ha_\beta}$ Propiedad aritmética en 22

24. $\mathrm{a_\alpha Ha_\beta}$ Análisis en 15

25. $1-\ \mathrm{a_\alpha Ha_\beta}+\mathrm{a_\alpha Ha_\beta}$ Suma en 23 y 24

26. 1 Propiedad aritmética en 25

27. $\left\{1-\prod_{i=1}^{\infty}\left[\ 1-\left(1-\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Ca_j} \,\Delta\, \mathrm{a_i Ha_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Aa_j} \,\Delta\, \mathrm{a_i Ha_j}]\ \right]\right\}1$ Prueba Condicional en 2 y 26

28. $1-\prod_{i=1}^{\infty}\left[\ 1-\left(1-\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Ca_j} \,\Delta\, \mathrm{a_i Ha_j}]\right)\prod_{j=1}^{\infty}[\mathrm{Aa_j} \,\Delta\, \mathrm{a_i Ha_j}]\ \right]$ Propiedad aritmética en 27

Ejemplo 8

$(\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xQy} \vee \mathbf{yQx}]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \mathbf{a_iQa_j\, a_jQa_i}\ ]$
$(\forall_x)(\forall_y)[\mathbf{xIy} \leftrightarrow (\mathbf{xQy} \wedge \mathbf{yQx})]$	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}\{\mathbf{1} - [\mathbf{a_iIa_j} + (\mathbf{1} - \mathbf{2a_iIa_j})(\mathbf{a_iQa_j} + \mathbf{a_jQa_i} - \mathbf{a_iQa_ja_jQa_i})]\}$
$(\forall_x)[\mathbf{xIx}]$ [61]	$\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\ ]$

1.	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \mathbf{a_iQa_j\, a_jQa_i}\ ]$	
2.	$\mathbf{1} - \prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}\{\mathbf{1} - [\mathbf{a_iIa_j} + (\mathbf{1} - \mathbf{2a_iIa_j})(\mathbf{a_iQa_j} + \mathbf{a_jQa_i} - \mathbf{a_iQa_j\, a_jQa_i})]\}$ $/\therefore\ \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\ ]$	
3.	$\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \mathbf{a_iQa_j\, a_jQa_i}\ ]$	EU algebraica en 1
4.	$\mathbf{a_iQa_i\, a_iQa_i}$	EU algebraica en 3
5.	$\mathbf{1} - \prod_{j=1}^{\infty}\{\mathbf{1} - [\mathbf{a_iIa_j} + (\mathbf{1} - \mathbf{2a_iIa_j})(\mathbf{a_iQa_j} + \mathbf{a_jQa_i} - \mathbf{a_iQa_j\, a_jQa_i})]\}$	EU algebraica en 2
6.	$\mathbf{a_iIa_i} + (\mathbf{1} - \mathbf{2a_iIa_i})(\mathbf{a_iQa_i} + \mathbf{a_iQa_i} - \mathbf{a_iQa_i\, a_iQa_i})$	EU algebraica en 5
7.	$\mathbf{a_iQa_i}$	Reducción en 4
8.	$\mathbf{a_iIa_i} + (\mathbf{1} - \mathbf{2a_iIa_i})(\mathbf{a_iQa_i} + \mathbf{a_iQa_i} - \mathbf{a_iQa_i})$	Reducción en 6
9.	$\mathbf{a_iIa_i} + (\mathbf{1} - \mathbf{2a_iIa_i})\mathbf{a_iQa_i}$	Propiedad aritmética en 8
10.	$[\ \mathbf{a_iIa_i} + (\mathbf{1} - \mathbf{2a_iIa_i})\mathbf{a_iQa_i}\ ]\ (\mathbf{1} - \mathbf{a_iQa_i})$	Producto en 9
11.	$(\mathbf{1} - \mathbf{a_iQa_i})\ \mathbf{a_iIa_i} + (\mathbf{1} - \mathbf{2a_iIa_i})\ \mathbf{a_iQa_i}\ (\mathbf{1} - \mathbf{a_iQa_i})$	Distribución del producto en 10
12.	$(\mathbf{1} - \mathbf{a_iQa_i})\ \mathbf{a_iIa_i}$	Deleción en 11
13.	$\mathbf{a_iQa_i\, a_iIa_i}$	Producto en 7
14.	$\mathbf{a_iIa_i}\ (\mathbf{1} - \mathbf{a_iQa_i} + \mathbf{a_iQa_i})$	Suma en 12 y 13
15.	$\mathbf{a_iIa_i}$	Propiedad aritmética en 14
16.	$\mathbf{1} - \prod_{i=1}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \mathbf{a_iIa_i}\ ]$	GU algebraica en 15

[61] Se extrajo este ejemplo de (Suppes, 1974: 96-97). Constituye la primera conclusión del ejercicio número once.

CONCLUSIONES

1. Es posible formular una interpretación algebraica de la lógica de primer orden asignándole a los axiomas de este sistema una semántica algebraica cuyas bases fundamentales son dos correspondencias: la que existe entre la verdad (V) y el cero (0) y la que relaciona la falsedad (F) con el uno (1).

2. El sistema presentado en esta tesis es una estructura algebraica, debido a que cumple los axiomas que debe satisfacer todo álgebra de Boole. Cada uno de los diez axiomas que debe satisfacer todo álgebra de Boole es expresable en el lenguaje del sistema como una afirmación que resulta verdadera.

3. La generalidad de esta interpretación algebraica descansa en que cada uno de los axiomas de la lógica de primer orden es interpretable como una fórmula reductible a cero. En nuestra interpretación, a la verdad (V) le corresponde el cero (0), de manera que tenemos un modelo algebraico que hace verdaderos (reductibles a cero) cada uno de los axiomas de la lógica de primer orden.

4. Apoyándonos en la completitud semántica de los axiomas del cálculo lógico de primer orden, establecida por Kurt Gödel en su tesis doctoral, podemos garantizar que toda fórmula lógicamente válida del lenguaje lógico de primer orden es representable algebraicamente como una fórmula reductible a cero. Recíprocamente, a toda expresión que se reduzca a cero dentro de los límites del lenguaje algebraico desarrollado, le corresponde una fórmula lógicamente válida del lenguaje lógico de primer orden.

5. Es posible establecer un conjunto de reglas de deducción que sea el equivalente algebraico de las reglas de deducción natural para el cálculo lógico de orden cero. Incluso las reglas de prueba condicional y prueba por reducción al absurdo tienen su respectivo equivalente algebraico.

6. Es posible establecer un conjunto de reglas algebraicas de deducción que sea el equivalente de las reglas de eliminación y reintroducción de cuantificadores. De este modo, tenemos un equivalente algebraico de la deducción natural para el cálculo lógico de primer orden.

BIBLIOGRAFÍA

Ackermann, W. (1968). *Solvable cases of the decision problem*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Ayer, A. (1971). *Lenguaje, verdad y lógica*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

Bernays, P. (1926). Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der 'Principia Mathematica'. *Mathematische Zeitschrift, 25,* 305-20.

Boole, G. (1847) *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Cambridge: Macmillan, Barclay & Macmillan.

Boole, G. (1848) The Calculus of Logic. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 3, 183-98.

Boole, G. (1958) *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. New York: Dover Publications.

Bunge, M. (2001/2007). *Diccionario de filosofía*. México DF: Siglo veintiuno editores.

Bunge, M. (2008). *Semántica I: Sentido y referencia*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Carnielli, W., Mariano, H. L., y Matulovic, M. (2015). Reconciling first-order logic to algebra. *CLE e-Prints, Volume 15, 1*.

Cassini, A. (2006). *El juego de los principios: una introducción al método axiomático*. Buenos Aires: AZ ediciones.

Copi, I. M. (1979/1994). *Lógica simbólica* (12ª reimpresión). México DF: Compañía editorial continental.

Ferrater Mora, J. y Leblanc, H. (1962). *Lógica matemática* (2ª ed.). México DF: Fondo de Cultura Económica.

Gödel, K. (2006). “La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden” publicado en sus *Obras Completas*. Madrid, Alianza Editorial, 23-37.

Hamilton, A. G. (1982). *Numbers, sets and axioms*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hilbert, D. y Bernays, P. (2011). *Foundations of mathematics I.* London: College publications.

Katz, J. (1971). *Filosofía del lenguaje*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

Lightstone, A. (1964). *The axiomatic method: an introduction to mathematical logic*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, INC.

Mendelson, E. (1963/1968). *Introduction to mathematical logic.* Princeton, New Jersey: D. van Nostrand Company, INC.

Merma, M. (2016). *Una interpretación algebraica de la lógica proposicional y de sus implicancias en fórmulas predicativas cerradas con cuantificadores*. Tesis de licenciatura. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Mosterín, J. (2003). *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid: Alianza Editorial.

Mosterín, J. y Torretti, R. (2010). *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia.* Madrid: Alianza Editorial.

Piscoya, L. (2007). *Lógica general* (3ª ed.). Lima: Fondo editorial Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Piscoya, L. (2009). *Tópicos en epistemología* (2ª ed.). Lima: Fondo editorial de la UIGV.

Quine, W. V. O. (1998). *Filosofía de la lógica*. Madrid: Alianza Editorial.

Russell, B. (1988). *Introducción a la filosofía matemática*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S. A.

Suppes, P. (1970). *A probabilistic theory of causality*. Amsterdam: North-Holland publishing Company.

Suppes, P. (1974). *Introducción a la lógica simbólica*. México DF: Compañía editorial continental, S. A.

Suppes, P. (1988). *Estudios de filosofía y metodología de la ciencia*. Madrid: Alianza Universidad.

Tarski, A. (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics*. London: Oxford University Press.

Wengert, R. G. (1974). Schematizing De Morgan's Argument. *Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume XV, 1,* 165-166.

Wittgenstein, L. (2002). *Tractatus logico-philosophicus*. Madrid: Alianza Editorial.

Wussing, H. (1984/2007). *The genesis of the abstract group concept*. New York: Dover Publications, INC.