UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Construcción de espacios de recubrimiento sobre un espacio topológico

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Manuel Arturo CAPARACHÍN NUÑEZ

ASESOR

Alberto RIVERO ZAPATA

Lima - Perú

2017

CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE RECUBRIMIENTO SOBRE UN ESPACIO TOPOLÓGICO

MANUEL ARTURO CAPARACHÍN NUÑEZ

Tesina presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

....

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

Presidente

....

Mg. William Cesar Olano Díaz

Miembro

Lima – Perú

Julio 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

MANUEL ARTURO CAPARACHÍN NUÑEZ

Construcción de Espacios de Recubrimiento sobre un Espacio Topológico. (Lima) 2017.

32 p., 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2017)

Tesina. Universidad Nacional Mayor de San Marcos,

Facultad de Ciencias Matemáticas. Matemática.

UNMSM / FCM. Titulo (Serie).

A mi familia, por brindarme el apoyo necesario y suficiente para emprender el presente trabajo.

A la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos

A todos los compañeros de estudio y profesores que mediante sus aportes se esforzaron por transmitirme algo de lo mucho que saben en los diferentes cursos de pre grado; en especial a los profesores: Dr. Pedro Contreras Chamorro y al Dr. Alberto Rivero Zapata por la paciencia y esmero que tuvieron en guiarme en la elaboración de mi tesina, porque su entusiasmo, dedicación y compromiso han sabido contagiarme de las ganas necesarias para seguir aprendiendo más del fascinante mundo de las Matemáticas.

RESUMEN

CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE RECUBRIMIENTO SOBRE UN ESPACIO TOPOLÓGICO

MANUEL ARTURO CAPARACHÍN NUÑEZ

JULIO – 2017

Orientador: Dr. Alberto Rivero Zapata

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

En el presente trabajo estudiaremos al Grupo Fundamental como herramienta para estudiar la construcción de los espacios de Recubrimiento de un espacio topológico dado, la cual consiste en reducir al problema algebraico de clasificar los subgrupos del Grupo Fundamental del espacio topológico en estudio.

PALABRAS CLAVES. HOMOTOPÍA DE CAMINOS

GRUPO FUNDAMENTAL

ESPACIOS DE RECUBRIMIENTO

ESPACIO DE RECUBRIMIENTO UNIVERSAL

TRANSFORMACIÓN RECUBRIDORA.

ABSTRACT

CONSTRUCTION OF COATING SPACES OVER A TOPOLOGICAL SPACE

MANUEL ARTURO CAPARACHÍN NUÑEZ

JULY 2017

Advisor: Dr. Alberto Rivero Zapata

Degree Awarded: Bachelor of Mathematics

In the present work we will study the Fundamental Group as a tool to study the construction of the Coating spaces of a given topological space, which consists of reducing the algebraic problem of classifying the subgroups of the Fundamental Group of the topological space under study.

KEYWORDS. PATH HOMOTOPY

FUNDAMENTAL GROUP,

COATING SPACES

UNIVERSAL COATING SPACE

COATING TRANSFORMATION.

Índice General

Introducción

El **Grupo Fundamental** de un espacio topológico es una de las herramientas más importantes dentro del campo de la **Topología** para poder distinguir espacios topológicos y sus propiedades (tales como compacidad o conexión), así como para determinar si son homeomorfos o no. Otras aplicaciones del grupo fundamental incluyen teoremas concernientes a puntos fijos así como el conocido **Teorema Fundamental del Álgebra** y el **Teorema de la Curva de Jordan** el cual establece que toda curva cerrada simple C en el plano separa a éste en dos componentes, siendo **C**, la frontera común.

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar y construir los **Espacios de Recubrimiento** (o Espacio Recubridor) de un espacio topológico dado, teniendo al grupo fundamental como herramienta principal, el cual permitirá reducir este problema a uno de tipo algebraico consistente en clasificar los subgrupos del grupo fundamental del espacio topológico en estudio. El presente trabajo consta de dos capítulos, descritos de la siguiente manera:

En el **capítulo 1** se exponen definiciones y resultados importantes que serán útiles para el desarrollo del siguiente apartado, tales como la homotopía de caminos que está vinculado a la definición de grupo fundamental de un espacio topológico, así también se dará a conocer lo que es un espacio de recubrimiento y su aplicación como herramienta para calcular, a modo de ejemplo, el grupo fundamental (no trivial) del círculo.

En el **capítulo 2** se estudiará la construcción de los espacios recubridores de un espacio topológico dado teniendo ahora como herramienta al grupo fundamental. Para su comprensión se detallará el espacio recubridor universal y las transformaciones recubridoras.

Problema general

¿El grupo fundamental constituye una herramienta para construir los espacios de recubrimiento de un espacio topológico?

Problema específico

¿Cómo se efectúa la construcción de los espacios de recubrimiento del espacio topológico dado X mediante la determinación de todos los subgrupos del grupo fundamental de X?

Objetivo general

Reducir el problema de construir los espacios de recubrimiento de un espacio topológico dado X a la clasificación de los subgrupos del grupo fundamental de X.

Objetivo específico

Construir todos los espacios recubridores del espacio topológico X mediante la determinación de los subgrupos del grupo fundamental de X.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de definir el Grupo Fundamental de un espacio topológico X, consideraremos una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas definidas en un intervalo cerrado (llamadas *caminos*) sobre el espacio X, que será de suma importancia en los temas siguientes. En adelante, el intervalo [0, 1] será denotado por I. Los resultados y demostraciones presentados son de Munkres [2000], Kosniowski [1986] y Massey [2006].

1.1 Homotopía de caminos

Definición 1.1.1. Sean f y g aplicaciones continúas del espacio X en el espacio Y, decimos que f es **homotópica** a g si existe una aplicación continúa F: X × I→Y tal que:

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad F(x, 1) = g(x)$$

para cada x ϵ X. La aplicación F se conoce como **homotopía** entre f y g. Si f es homotópica a g, escribiremos $f \simeq g$.

Definición 1.1.2. Dos caminos f y g que aplican el intervalo I en X se dice que son **homotópicos por caminos** si tienen un mismo punto inicial x_0 y un mismo punto final x_1, y si existe una aplicación continua F: I × I → X tal que:

$$F(s, 0) = f(s) \quad \text{y} \quad F(s, 1) = g(s)$$

$$F(0, t) = x_0 \quad \text{y} \quad F(1, t) = x_1$$

para cada s, t ϵ I. La aplicación F toma el nombre de **homotopía de caminos** entre f y g y escribiremos $f \simeq_p g$.

Se puede pensar la homotopía como una familia de aplicaciones $f_t : X \to Y$ que produce una "deformación" continua de la aplicación f a g mientras "t" varía de 0 a 1. (Ver figura 1)

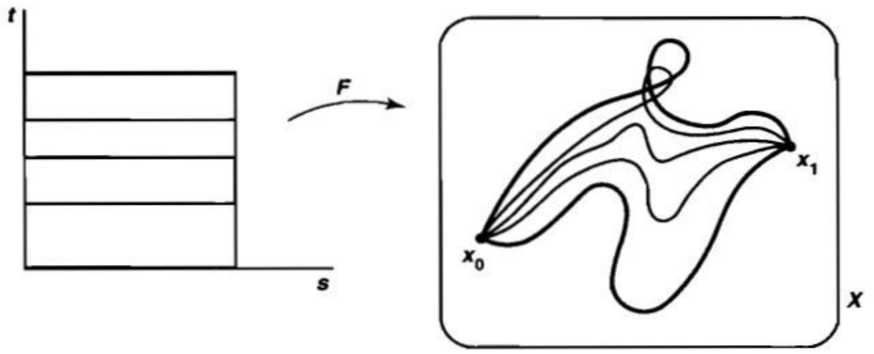

Figura 1

Lema 1.1.1. Las relaciones $\simeq$ y $\simeq_p$ son relaciones de equivalencia. Si *f* es un camino, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por [*f*].

Demostración. Para su demostración ver [1].

Definición 1.1.3. Si *f* es un camino en X de x_0 a x_1 y *g* es un camino en X de x_1 a x_2, definimos el **producto de los caminos** de *f* y *g* y lo denotamos por $f * g$ como el camino *h* dado por las ecuaciones:

$$h(s) = (f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & para\ s \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right] \\ g(2s-1) & para\ s \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

La aplicación *h* está bien definida y es continua; es un camino en X de x_0 a x_2. Podemos pensar en *h* como un camino en el que la primera mitad es el camino *f* y la segunda mitad es el camino *g*.

La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación: $[f]*[g]=[f*g]$.

La operación $*$ sobre clases de homotopía de caminos satisface propiedades similares a los axiomas de grupo. Una diferencia respecto de las propiedades de grupo es que $[f]*[g]$ no está definida para cualquier par de clases, sino únicamente para aquellos pares [*f*], [*g*] para los que $f(1) = g(0)$.

Teorema 1.1.1. La operación $*$ tiene las siguientes propiedades:

1. Asociatividad. Si $[f]*([g]*[h])$ está definida, también lo está $([f]*[g])*[h]$ y son iguales.

2. Neutro a izquierda y derecha. Dado x ϵ X, denotaremos por e_x el camino constante e_x: I → X que lleva todo punto de I al punto x. Si *f* es un camino en X desde x_0 hasta x_1, entonces

$$[f]*[e_{x_1}]=[f] \qquad \text{y} \qquad [e_{x_0}]*[f]=[f]$$

3. Inverso. Dado el camino f en X desde x_0 hasta x_1, sea $\bar{f}$ el camino definido por $\bar{f}(s) = f(1-s)$, el cual se conoce como el inverso de *f*. Entonces:

$$[f]*[\overline{f}]=[e_{x_0}] \qquad \text{y} \qquad [\overline{f}]*[f]=[e_{x_1}]$$

Demostración. Para su demostración Ver [2]

1.2 El grupo fundamental

Si a la operación $*$ la restringimos a aquellos caminos en el espacio X que comienzan y acaban en un "**punto base**" x_0, el conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación $*$.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio topológico y x_0 un punto de X. Un camino en X que comienza y acaba en x_0 se llama **lazo basado** en x_0. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociados a los lazos basados en x_0, con la operación $*$ se denomina **Grupo Fundamental** de X relativo al punto base x_0 y denotado por $\pi_1(X,x_0)$.

Dados dos lazos *f* y *g* basados en x_0, el producto $f * g$ está siempre definido y es un lazo basado en x_0.

Observación: Sean *f* y *g* dos aplicaciones cualesquiera de un espacio X en $\mathbb{R}^2$. Si *f* y *g* son homotópicas, la aplicación:

$$F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

es una homotopía entre ellos, llamada **homotopía por rectas** porque lleva el punto $f(x)$ al punto $g(x)$ a lo largo del segmento de recta que los une. Si *f* y *g* son caminos de x_0 a x_1, entonces *F* es una homotopía de caminos.

Ejemplo 1.2.1: Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclideo n – dimensional. Entonces $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ es el grupo trivial (consistente solo en el neutro), ya que si *f* es un lazo en R^n basado en x_0, la homotopía por rectas es una homotopía de caminos entre *f* y el camino constante x_0.

Definición 1.2.2. Sea α un camino en X de x_0 a x_1. Definimos la aplicación:

$$\alpha : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$$

por la ecuación: $\alpha([f]) = [\overline{\alpha}]*[f]*[\alpha]$

La aplicación α está bien definida. Si f es un lazo basado en x_0, entonces $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$ es un lazo basado en x_1. $\bar{\alpha}$ denota el inverso de α.

Teorema 1.2.1. La aplicación α es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Para su demostración ver [1].

Corolario 1.2.1. Si X es conexo por caminos, y x_0, x_1 son dos puntos de X, entonces $\pi_1(X,x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X,x_1)$

Como consecuencia, podemos asociar a cada espacio conexo por caminos un grupo que podemos denotar por el Grupo Fundamental $\pi_1(X,x_0)$.

Definición 1.2.3. Un espacio X es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y $\pi_1(X,x_0)$ es el grupo trivial (un elemento) para algún $x_0 \in X$ y, por tanto, para todo $x_0 \in X$. Expresaremos el hecho que $\pi_1(X,x_0)$ es el grupo trivial escribiendo $\pi_1(X,x_0) = 0$.

Lema 1.2.1. En un espacio simplemente conexo X, dos caminos cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicos por caminos.

Demostración. Para su demostración ver [1].

Ahora, sea h: X → Y una aplicación continua que lleva el punto x_0 de X al punto y_0 de Y. Denotaremos esta propiedad escribiendo:

$$h: (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

Si f es un lazo en X basado en x_0, entonces la composición $h \circ f$: I → Y es un lazo basado en y_0.

Definición 1.2.4. Sea h: (X, x_0) → (Y, y_0) una aplicación continua. Definimos la aplicación **homomorfismo inducido por *h*** relativo al punto base x_0:

$$h_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$$

por la ecuación: $h_*([f]) = [h \circ f]$.

El homomorfismo h_* no solo depende de la aplicación h: X → Y sino también de la elección del punto base x_0. Si x_0 y x_1 son dos puntos diferentes de X, no podemos usar el mismo símbolo h_* para denotar los dos homomorfismos diferentes, uno teniendo dominio $\pi_1(X,x_0)$ y el otro con dominio $\pi_1(X,x_1)$. En tal caso utilizaremos la notación:

$$h^*_{x_0} : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$$

para el primer homomorfismo y $h^*_{x_1}$ para el segundo.

Teorema 1.2.2. Si h: (X, x_0) → (Y, y_0) y k: (Y, y_0) → (Z, z_0) son continuas, entonces $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Si i: (X, x_0) → (X, x_0) es la aplicación identidad, entonces i_* es el homomorfismo identidad.

Demostración. Por definición:

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f] = [k \circ (h \circ f)] = k_*[h \circ f] = k_*[h_*([f])] = (k_* \circ h_*)([f]).$$

Similarmente $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$. ■

Corolario 1.2.2. Si h: (X, x_0) → (Y, y_0) es un homeomorfismo entre X e Y, entonces h_* es un isomorfismo entre $\pi_1(\mathrm{X}, \mathrm{x}_0)$ y $\pi_1(\mathrm{Y}, \mathrm{y}_0)$.

Demostración. Sea k: (Y, y_0) → (X, x_0), la inversa de h. Entonces se tiene: $k_* \circ h_* =$ $(k \circ h)_* = i_*$, donde i es la aplicación identidad de (X, x_0). Similarmente se obtiene: $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$, donde j es la aplicación identidad de (Y, y_0). Dado que i_* y j_* son los homomorfismos identidad de $\pi_1(\mathrm{X}, \mathrm{x}_0)$ y $\pi_1(\mathrm{Y}, \mathrm{y}_0)$ respectivamente, k_* es la inversa de h_*. ■

Esto nos proporciona un buen ejemplo de lo que es la **Topología Algebraica.** Reemplazamos topología por álgebra y entonces utilizamos conocimientos de álgebra para aprender algo de topología. Desde luego, si los grupos fundamentales de dos espacios son isomorfos, esto NO significa que los dos espacios sean homeomorfos. Sin embargo, si los grupos fundamentales no son isomorfos, los espacios no pueden ser homeomorfos.

1.3. Espacios de Recubrimiento

La noción de Espacio de Recubrimiento es una de las herramientas más usuales para el cálculo de algunos grupos fundamentales que no son triviales tales como el círculo o el toro o cualquier subconjunto no convexo de $\mathbb{R}^n$. Por simplicidad, supondremos que todos los espacios son conexos por caminos.

Definición 1.3.1. Una aplicación continua y sobreyectiva p: E → B es llamada **aplicación recubridora** (o simplemente un **recubrimiento**) cuando cada punto b ϵ B pertenece a un abierto $\mathrm{V} \subset \mathrm{B}$ tal que $p^{-1}(\mathrm{V}) = \bigcup_\alpha \mathrm{U}_\alpha$ es una reunión de abiertos U_α, dos a dos disjuntos, cada uno de los cuales se aplica por p homeomorficamente sobre V. El espacio E es llamado **espacio de recubrimiento** de B y para cada b ϵ B, el conjunto $p^{-1}(\mathrm{b})$ es llamado una **fibra** sobre b.

Intuitivamente, el conjunto p^{-1}(U) como una “pila de láminas”, cada uno de ellos con el mismo tamaño y forma que U, flotando en el aire sobre U. La aplicación p los “aplasta” hacia U. (Ver figura 2)

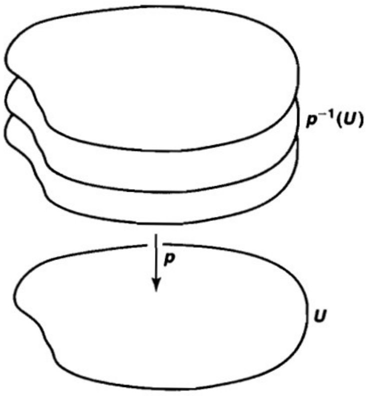

Figura 2

Teorema 1.3.1. Si p: E → B es una aplicación recubridora. p es abierta.

Demostración. Veamos que $\forall b \in p(A)$, existe W abierto de B tal que $b \in \mathrm{W} \subset p(A)$. Dado b, consideremos el entorno $\mathrm{U_b}$ tal que $p^{-1}(\mathrm{U_b}) = \bigcup V_\alpha$, para una colección de abiertos V_α de E. Como $\mathrm{b} \in p(A)$ entonces existe $\mathrm{a} \in A$ tal que $p(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$ ($\mathrm{a} \in p^{-1}(\mathrm{b})$) y existe un único V_α tal que $\mathrm{a} \in V_\alpha$. Ahora $\mathrm{a} \in V_\alpha \cap A$ que es un abierto en E y $V_\alpha \cap A \subset V_\alpha$. Sea el homeomorfismo $p\big|_{V_\alpha} : V_\alpha \to \mathrm{U_b}$; $p\big|_{V_\alpha}(V_\alpha \cap A) \subset \mathrm{U_b}$ es un abierto en $\mathrm{U_b}$ que a su vez es abierto en B. Por lo que $p(\mathrm{a}) \in p(V_\alpha \cap A) \subset p(A)$. ■

Ejemplo 1.3.1. La aplicación p: $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por la ecuación:

$$p(\mathrm{x}) = (\cos 2\pi \mathrm{x}, \operatorname{sen} 2\pi \mathrm{x})$$

es una aplicación recubridora.

En efecto, consideremos el subconjunto U de $\mathbb{S}^1$ consistente de aquellos puntos que tienen la primera coordenada positiva. El conjunto p^{-1}(U) consiste en aquellos puntos x tal que $\cos(2\pi x) \geq 0$, es decir, es la unión de los intervalos

$$V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right) \; con \; n \in \mathbb{Z}$$

La aplicación p, restringida a cualquier intervalo cerrado $\overline{V_n}$ es inyectiva, porque $sen(2\pi x)$ es estrictamente monótona en tales intervalos. Además, p lleva $\overline{V_n}$ sobreyectivamente sobre $\overline{\mathrm{U}}$ y V_n sobre U, por el teorema del valor intermedio. Dado que $\overline{V_n}$ es compacto, $p\big|_{\overline{V_n}}$ es un homeomorfismo entre $\overline{V_n}$ y $\overline{\mathrm{U}}$. En particular, $p\big|_{V_n}$ es un homeomorfismo entre V_n y U.

Podemos aplicar un razonamiento similar a las intersecciones de $\mathbb{S}^1$ con los semiplanos abiertos superior, inferior e izquierdo. Estos conjuntos abiertos recubren $\mathbb{S}^1$. Por tanto p: $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es una aplicación recubridora. (Ver Figura 3)

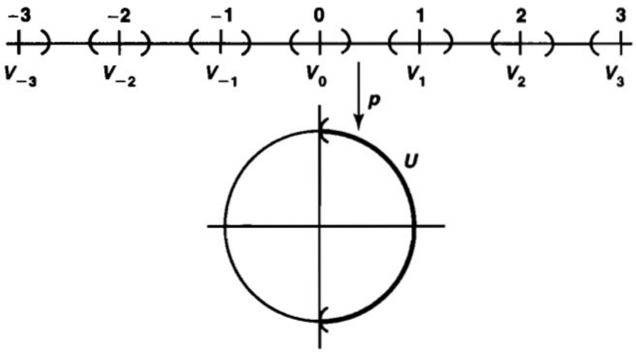

Figura 3

En una aplicación continua y sobreyectiva p: E → B, diremos que un abierto V de B está **regularmente cubierto** por p si $p^{-1}(\mathrm{V}) = \bigcup_{\alpha} \mathrm{U}_{\alpha}$ es una reunión de abiertos U_{α}, dos a dos disjuntos, cada uno de los cuales se aplica por p homeomorficamente sobre V. Llamaremos a la colección $\{\mathrm{U}_{\alpha}\}$ partición de $p^{-1}(\mathrm{V})$ en "rebanadas".

Teorema 1.3.2. Sea p: E → B una aplicación recubridora. Si B_0 es un subespacio de B y si $E_0 = p^{-1}(B_0)$ entonces la aplicación p_0: $E_0 \to B_0$, obtenida al restringir p, es una aplicación recubridora.

Demostración. Sea $b_0 \in B_0$ y U, un conjunto abierto en B que contiene a b_0 y que esté regularmente cubierto por p; sea $\{V_\alpha\}$ una partición de $p^{-1}(\mathrm{U})$ en rebanadas. Entonces $\mathrm{U} \cap B_0$ es un entorno de b_0 en B_0 y los conjuntos $V_\alpha \cap E_0$ son abiertos y disjuntos en E_0 cuya unión es $p^{-1}(\mathrm{U} \cap B_0)$ y cada uno de ellos se aplica homeomorficamente sobre $\mathrm{U} \cap B_0$ mediante p. ■

Teorema 1.3.3. Si p: $\mathrm{E} \to \mathrm{B}$ y q: $\mathrm{E}^1 \to \mathrm{B}^1$ son aplicaciones recubridoras entonces

$$p \times q\colon\ \mathrm{E}\times\mathrm{E}^1 \to \mathrm{B}\times\mathrm{B}^1$$

es una aplicación recubridora.

Demostración. Dados $b \in \mathrm{B}$ y $b^1 \in \mathrm{B}^1$, sean M y N entornos de b y b^1 respectivamente, que estén regularmente cubiertos por p y q, respectivamente. Sean $\{V_\alpha\}$ y $\{V_\beta^1\}$ particiones en rebanadas de $p^{-1}(\mathrm{M})$ y $q^{-1}(\mathrm{N})$ respectivamente.

Entonces la imagen inversa mediante $p \times q$ del conjunto abierto M × N es la unión de todos los conjuntos $V_\alpha \times V_\beta^1$. Estos conjuntos son abiertos disjuntos de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}^1$ y cada uno de ellos se aplica homeomorficamente sobre M × N por $p \times q$. ■

Ejemplo 1.3.2. Consideremos el espacio T = $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, conocido como **toro**. La aplicación producto

$$p \times p\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

es un cubrimiento del toro por el plano $\mathbb{R}^2$, donde p es la aplicación recubridora p: $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por la ecuación: $p(x) = (\cos 2\pi x,\ \operatorname{sen} 2\pi x)$. Cada uno de los cuadrados unidad $[n, n + 1] \times [m, m + 1]$ se enrolla completamente alrededor del toro, por medio de $p \times p$. (Ver figura 4)

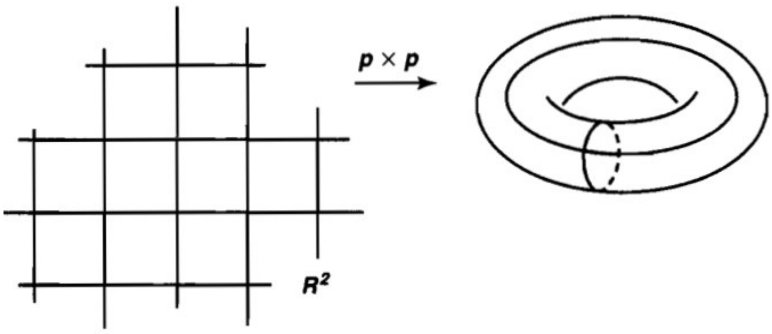

Figura 4

1.4 Aplicación: El grupo fundamental del círculo $\mathbb{S}^1$

Definición 1.4.1. Sea p: E → B una aplicación. Si f es una aplicación continua de algún espacio X en B, un **levantamiento** de f es una aplicación $\tilde{f}$: X → E tal que $p \circ \tilde{f} = f$. (Ver figura 5)

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Figura 5

Ejemplo 1.4.1. Consideremos el cubrimiento p: $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por: $p(x) = (\cos 2\pi x,\ \operatorname{sen} 2\pi x)$. El camino f: [0, 1] → $\mathbb{S}^1$ comenzando en $b_0 = (1, 0)$ y dado por $f(s) = (\cos \pi s,\ \operatorname{sen} \pi s)$ se levanta al camino $\tilde{f}(s) = s/2$ comenzando en 0 y acabando en 1/2. El camino $g(s) = (\cos \pi s,\ -\operatorname{sen} \pi s)$ se levanta al camino $\tilde{g}(s) = -s/2$, que comienza en 0 y acaba en $-1/2$. (Ver figura 6)

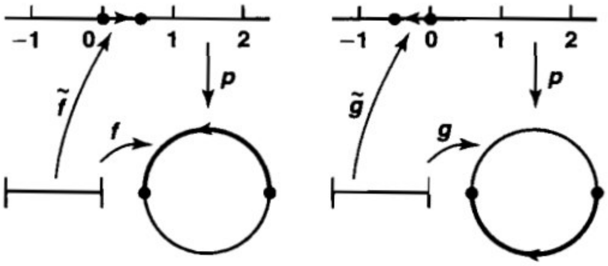

Figura 6

Lema 1.4.1. Sea p: E → B una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Cualquier camino f: [0,1] → B comenzando en b_0 tiene un único levantamiento a un camino $\tilde{f}$ en E que comienza en e_0.

Demostración. Para su demostración ver [1]

Lema 1.4.2. Sea p: E → B una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Sea F: I × I → B una aplicación continua con $F(0, 0) = b_0$. Existe un único levantamiento de F a una aplicación continua:

$$\tilde{F}: I \times I \to E$$

tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Si F es una homotopía de caminos, entonces $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos.

Demostración. Para su demostración ver [1]

Teorema 1.4.1. Sea p: E → B una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Sean f y g dos caminos en B de b_0 a b_1, y sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus respectivos levantamientos a caminos en E comenzando en e_0. Si f y g son homotópicos por caminos, entonces $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ terminan en el mismo punto de E y son homotópicos por caminos.

Demostración. Sea F: I × I → B la homotopía de caminos entre f y g, entonces $F(0, 0)= b_0$. Sea $\tilde{F}$: I × I → E un levantamiento de F a E tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Por el lema anterior, $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos, por lo que $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ y $\tilde{F}(1 \times I)$ es un conjunto unipuntual que denotaremos por $\{e_1\}$. La restricción $F\big|_{I\times 0}$ de $\tilde{F}$ es un camino en E que empieza en e_0 y es un levantamiento de $F\big|_{I\times 0}$.

Por la unicidad de levantamiento de caminos tenemos que $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$. De manera similar $F\big|_{I\times 1}$ es un camino de E que es levantamiento de $F\big|_{I\times 1}$ que empieza en e_0 porque $F(0 \times I) = \{e_0\}$. Por unicidad de levantamiento de caminos tenemos que $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$. Por tanto, tanto $\tilde{f}$ como $\tilde{g}$ acaban en e_1, y $\tilde{F}$ es la homotopía de caminos entre ellos. ■

Definición 1.4.2. Sea p: E → B una aplicación recubridora y $b_0 \in$ B. Elijamos e_0 de forma que $p(e_0) = b_0$. Dado un elemento [f] de $\pi_1(\mathrm{B,b_0})$, sea $\widetilde{f}$ el levantamiento de f a un camino en E que comience en e_0. Denotemos por Φ([f]) el punto final $\widetilde{f}$ (1) de $\widetilde{f}$. Entonces Φ es una aplicación bien definida

$$\Phi : \pi_1(\mathrm{B,b_0}) \to p^{-1}(\mathrm{b_0}).$$

Denominamos a Φ **correspondencia del levantamiento** derivada de la aplicación recubridora p. Evidentemente, depende de la elección del punto e_0.

Teorema 1.4.2. Sea p: E → B una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Si E es conexo por caminos, entonces la correspondencia del levantamiento

$$\Phi : \pi_1(\mathrm{B,b_0}) \to p^{-1}(\mathrm{b_0})$$

es sobreyectiva. Si E es simplemente conexo, entonces es biyectiva.

Demostración. Si E es conexo por caminos entonces, dado $e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe un camino $\widetilde{f}$ en E de e_0 a e_1. De modo que $f = p \circ \widetilde{f}$ es un lazo en B con base b_0 y Φ([f]) = e_1, por definición.

En el caso que E es simplemente conexo, sean [f] y [g] dos elementos de $\pi_1(\mathrm{B,b_0})$ tales que Φ([f]) = Φ([g]). Sean $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ los levantamientos de f y g, respectivamente, a caminos en E comenzando en e_0; entonces $\widetilde{f}$ (1) = $\widetilde{g}$ (1). Como E es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos $\tilde{F}$ en E entre $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$. Entonces $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de caminos en B entre f y g. ■

Teorema 1.4.3. El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.

Demostración. Sea p: $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora p(x) = (cos2πx, sen2πx), y sean e_0 = 0 y $p(e_0) = b_0$. Entonces $p^{-1}(b_0)$ es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros. Dado que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, la correspondencia del levantamiento

$$\Phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, \mathrm{b_0}) \to \mathbb{Z}$$

es biyectiva. Queda por probar que Φ es un homomorfismo.

Dados [f] y [g] en $\pi_1(\mathbb{S}^1, \mathrm{b_0})$ sean $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ sus respectivos levantamientos a caminos en $\mathbb{R}$ comenzando en 0. Sean n = $\widetilde{f}$ (1) y m = $\widetilde{g}$ (1), entonces Φ([f]) = n y Φ([g]) = m; por definición. Sea $\tilde{\tilde{g}}$ el camino

$$\tilde{\tilde{g}}(\mathrm{s}) = \mathrm{n} + \widetilde{g}\,(\mathrm{s})$$

en $\mathbb{R}$.

Como $p(\mathrm{n} + \mathrm{x}) = p(\mathrm{x})$, para todo $\mathrm{x} \in \mathrm{R}$, el camino $\tilde{\tilde{g}}$ es un levantamiento de g que comienza en n. Entonces el producto $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ está definido y es el levantamiento de $f * g$ que comienza en 0. El punto final de este camino es $\tilde{\tilde{g}}(1) = \mathrm{n} + \mathrm{m}$. Entonces por definición,

$$\Phi([f] * [g]) = \mathrm{n} + \mathrm{m} = \Phi([f]) + \Phi([g]). \ ■$$

Teorema 1.4.4. Sea p: E → B una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$.

a) El homomorfismo $p_* : \pi_1(\mathrm{E}, e_0) \to \pi_1(\mathrm{B}, b_0)$ es un monomorfismo.

b) Sea H = $p_*(\pi_1(\mathrm{E}, e_0))$. La correspondencia del levantamiento Φ induce una aplicación inyectiva

$$\Phi : \pi_1(\mathrm{B}, b_0)\big|_{\mathrm{H}} \to p^{-1}(b_0)$$

de la colección de las clases por la derecha de H en $p^{-1}(b_0)$, la cual es biyectiva si E es conexo por caminos.

c) Si f es un lazo en B basado en b_0, entonces $[f] \in \mathrm{H}$ si y solo si f es un levantamiento a un lazo en E basado en e_0.

Demostración. Para su demostración ver [1].

Capítulo 2

Construcción de espacios de recubrimiento sobre un espacio topológico

En este capítulo, que consta del tema central del trabajo, usaremos el grupo fundamental como una herramienta para estudiar espacios de recubrimiento (o espacios recubridores). A partir de este capítulo *p*: E → B significará una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$, a su vez E y B son localmente conexos por caminos (es decir, para cada x ϵ E y cada entorno U de x, existe un entorno conexo por caminos V de x contenido en U) y conexos por caminos, a menos que se especifique lo contrario. También se tendrá por supuesto el teorema general de la correspondencia del levantamiento (teorema 1.4.4.).

Si *p*: E → B una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$, entonces el homomorfismo inducido p_* es inyectivo, por el teorema 1.4.4., de manera que $H_0 = p_*(\pi_1(E,e_0))$ es un subgrupo de $\pi_1(B,b_0)$ isomorfo a $\pi_1(E,e_0)$.

2.1. El espacio recubridor universal

Supongamos que *p*: E → B una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Si E es simplemente conexo, entonces E se denomina espacio recubridor universal de B. Dado que $\pi_1(E,e_0)$ es trivial, este espacio recubridor corresponde al subgrupo trivial de $\pi_1(B,b_0)$ bajo la correspondencia p_*. Por tal razón, con frecuencia hablamos de "el" espacio recubridor universal de un espacio dado B.

Antes se generalizará los lemas de levantamiento mencionados en la sección 1.4.

Lema 2.1.1. (Levantamiento general) Sea *p*: E → B una aplicación recubridora y $p(e_0) = b_0$. Sea *f*: Y → B una aplicación con $f(y_0) = b_0$. Supongamos que Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos.

La aplicación f se puede levantar a una aplicación $\widetilde{f}$: Y → E tal que $\widetilde{f}$ (y_0) = e_0 si y solo si

$$f_*(\pi_1(Y,y_0) \subset p_*(\pi_1(E,e_0))$$

Además, si tal levantamiento existe, es único.

Demostración. Si el levantamiento $\widetilde{f}$ existe, entonces

$$f_*(\pi_1(Y,y_0) = p_*(\widetilde{f}_*(\pi_1(Y,y_0))) \subset p_*(\pi_1(E,e_0))$$

Ahora probamos que si $\widetilde{f}$ existe, es única. Dado $y_1 \in Y$, se elige un camino α en Y desde y_0 hasta y_1.

Se toma el camino $f \circ \alpha$ en B y se levanta a un camino γ en E que comienza en e_0. Si un tal levantamiento $\widetilde{f}$ de f existe, entonces $\widetilde{f}(y_1)$ debe ser igual al punto final $\gamma(1)$ de γ, pues $\widetilde{f} \circ \alpha$ es un levantamiento de $f \circ \alpha$ que comienza en e_0, y los levantamientos de caminos son únicos.

Recíprocamente, dado $y_1 \in Y$, se elige un camino α en Y desde y_0 hasta y_1. Se levanta el camino $f \circ \alpha$ a un camino γ en E que comienza en e_0 y se define $\widetilde{f}(y_1) = \gamma(1)$ (Ver la figura 7). $\widetilde{f}$ está bien definida y es continua. Para probar la continuidad de $\widetilde{f}$ en el punto $y_1 \in Y$, veamos que, dado un entorno N de $\widetilde{f}(y_1)$, existe un entorno W de y_1 tal que $\widetilde{f}(W) \subset N$. Para comenzar, se elige un entorno conexo por caminos U de $f(y_1)$ que está regularmente recubierto por p. Descompongamos $p^{-1}(U)$ en rebanadas, y sea V_0 la rebanada que contiene al punto $\widetilde{f}(y_1)$. Sustituyendo U por un entorno más pequeño de $f(y_1)$, si fuera necesario, podemos suponer que $V_0 \subset N$. Sea p_0: $V_0 \to U$; como es una restricción de p, p_0 es un homeomorfismo. Dado que f es continua en y_1 e Y es localmente conexo por caminos, podemos encontrar un entorno conexo por caminos W de y_1 tal que $f(W) \subset U$. Queda por probar $\widetilde{f}(W) \subset V_0$.

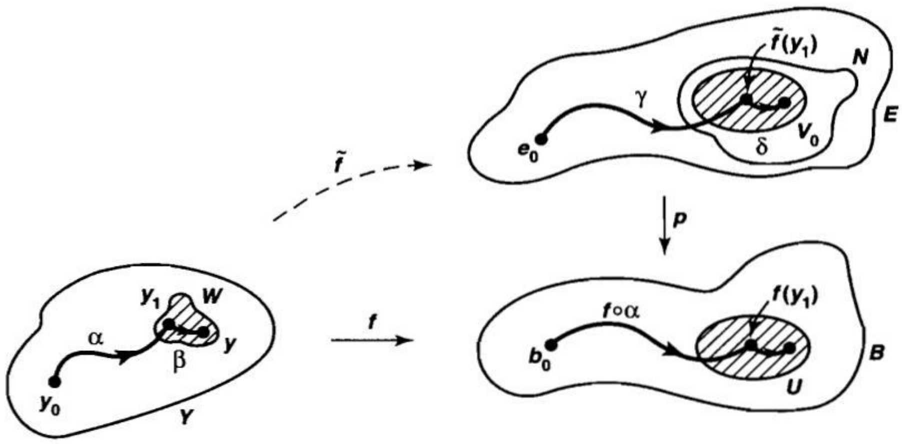

Figura 7

Dado y ϵ W, se elige un camino β en W desde y_1 hasta y. Como $\tilde{f}$ está bien definida, $\tilde{f}$ (y) se puede obtener tomando el camino $\alpha * \beta$ desde y_0 hasta y, levantando el camino $f \circ (\alpha * \beta)$ a un camino en E que empieza en e_0 y haciendo que $\tilde{f}$ (y) sea el punto final de este levantamiento. Tenemos que γ es un levantamiento de α que empieza en e_0.

Dado que $f \circ \beta$ está en U, el camino $\delta = p_0^{-1} \circ f \circ \beta$ es un levantamiento de $f \circ \beta$ que parte de $\tilde{f}$ (y_1). Entonces $\gamma * \delta$ es un levantamiento de $f \circ (\alpha * \beta)$ que parte de e_0 y acaba en $\delta(1) \epsilon V_0$. Por consiguiente, $\tilde{f}(W) \subset V_0$. ■

Lema 2.1.2. Sea B conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Sea p: E → B una aplicación recubridora. Si E_0 es una componente conexa por caminos de E, entonces la aplicación $p_0 = p\big|_{E_0} : E_0 \to B$ es una aplicación recubridora.

Demostración. Primero probemos que p_0 es sobreyectiva. Como E es localmente homeomorfo a B, es localmente conexo por caminos. Por tanto, E_0 es abierto en E. Se sigue que $p(E_0)$ es abierto es B. Como $p(E_0)$ es cerrado en B. se tiene $p(E_0) = B$.

Probemos que $p(E_0)$ es cerrado en B. Sea el punto x ϵ B que pertenezca a la clausura de $p(E_0)$. Sea U un entorno conexo por caminos de x que está regularmente cubierto por p. Dado que U contiene un punto de $p(E_0)$, alguna rebanada V_α de $p^{-1}(U)$ debe cortar a E_0. Como V_α es homeomorfo a U, es conexo por caminos; por tanto, debe estar contenido en E_0. Entonces $p(V_\alpha) = U$ está contenido en $p(E_0)$, en particular, x ϵ $p(E_0)$.

Ahora probemos que p_0: $E_0 \to B$ es una aplicación recubridora. Dado x ϵ B, escojamos un camino U de x. Si V_α es una rebanada de $p^{-1}(U)$, entonces V_α es conexo por caminos; si corta a E_0, está en E_0. Por tanto $p^{-1}(U)$ es igual a la unión de las rebanadas V_α de $p^{-1}(U)$ que cortan a E_0, cada una de ellas es abierta en E_0 y se aplica homeomorficamente por p_0 en U. Por tanto, U está regularmente cubierto por p_0. ■

Lema 2.1.3. Sean p: X → Z, q: X → Y, r: Y → Z aplicaciones continuas con $p = r \circ q$.

a) Si p y r son aplicaciones recubridoras, también lo es q.

b) Si p y q son aplicaciones recubridoras, también lo es r.

Demostración. Asumiendo lo establecido al inicio del capítulo, X, Y y Z son conexos por caminos y localmente conexos por caminos. Sea $x_0 \in X$, además $y_0 = q(x_0)$ y $z_0 = p(x_0)$.

a) Sean p y r aplicaciones recubridoras. Probemos primero que q es sobreyectiva. Dado y ϵ Y, escojamos un camino $\tilde{\alpha}$ en Y de y_0 a y. Entonces $\alpha = r \circ \tilde{\alpha}$ es un camino en Z partiendo de z_0; sea $\approx\!\!\alpha$ un levantamiento de α a un camino en X partiendo de x_0. Entonces $q \circ \approx\!\!\alpha$ es un levantamiento de α a Y partiendo de y_0. Por la unicidad de levantamientos de caminos, $\tilde{\alpha} = q \circ \approx\!\!\alpha$. Entonces q aplica el punto final de $\approx\!\!\alpha$ en el punto final y de $\tilde{\alpha}$. Por tanto, q es sobreyectiva.

Dado y ϵ Y, encontramos un entorno de y que está regularmente cubierto por q. Sea z = r(y). Como p y r son aplicaciones recubridoras, podemos encontrar un entorno conexo por caminos U de z que está regularmente cubierto por p y r. Sea V la rebanada de $r^{-1}(U)$ que contiene al punto y; probemos que V está regularmente cubierto por q. Sea $\{U_\alpha\}$ la colección de rebanadas de $p^{-1}(U)$. Se observa que q aplica cada conjunto U_α en el conjunto $r^{-1}(U)$; como U_α es conexo, debe ser aplicado por q en una de las rebanadas de $r^{-1}(U)$.

Por tanto $q^{-1}(V)$ es la unión de aquellas rebanadas U_α que se aplican por q en V. Es claro que cada uno de los U_α se aplica homeomorficamente sobre V por q; pues sean p_0, q_0 y r_0 las restricciones de p, q y r respectivamente como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[d, "p_0"'] \arrow[dr, "q_0"] & \\ U & V \arrow[l, "r_0"] \end{tikzcd}$$

Dado que p_0 y r_0 son homeomorfismos, se tiene $q_0 = r_0^{-1} \circ p_0$.

b) Su prueba es análoga a la parte a). ■

Teorema 2.1.1. Sea p: E → B una aplicación recubridora con E simplemente conexo. Dada cualquier aplicación recubridora r: Y → B, existe una aplicación recubridora q: E → B tal que $p = r \circ q$.

Este teorema demuestra por qué E se denomina RECUBRIDOR UNIVERSAL de B: recubre cualquier otro espacio recubridor de B.

Demostración. Sea $b_0 \in$ B, escojamos e_0 e y_0 tales que $p(e_0) = b_0$ y $r(y_0) = b_0$. Se aplica el lema 2.1.1. para construir q.

La aplicación r es una aplicación recubridora, y la condición

$$p_*(\pi_1(\mathrm{E},\mathrm{e}_0)) \subset r_*(\pi_1(\mathrm{Y},\mathrm{y}_0))$$

se satisface trivialmente, ya que E es simplemente conexo. Por tanto, existe una aplicación q: E → Y tal que $r \circ q = p$ y $q(e_0) = y_0$. Se sigue del lema anterior que q es una aplicación recubridora. ■

No todo espacio cuenta con un espacio recubridor universal. A continuación daremos un ejemplo de un espacio con esta característica; para ello se necesita el siguiente lema.

Lema 2.1.4. Sean p: E → B una aplicación recubridora y $p(e_0) = b_0$. Si E es simplemente conexo, entonces b_0 tiene un entorno U tal que la inclusión i: U → B induce el homomorfismo trivial: $i_* : \pi_1(\mathrm{U},\mathrm{b}_0) \to \pi_1(\mathrm{B},\mathrm{b}_0)$

Demostración. Sea U un entorno de b_0 regularmente cubierto por p. Se particiona p^{-1}(U) en rebanadas y sea U, la rebanada que contiene a e_0. Sea f, un lazo en U basado en b_0. Como p define un homeomorfismo de U_α con U, el lazo f se levanta a un lazo $\tilde{f}$ en U_α basado en e_0. Como E es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos $\tilde{F}$ en E entre $\tilde{f}$ y un lazo constante. Entonces $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de caminos en B entre f y un lazo constante. ■

2.2. Transformaciones recubridoras

Dada una aplicación recubridora p: E → B, consideremos el conjunto de todos los homeomorfismos h: E → E tal que $p = p \circ h$. A esta aplicación se le denomina **Transformación Recubridora**. Denotaremos al grupo de transformaciones recubridoras como C(E, p, B).

Definición 2.2.1. Dos subgrupos H_1 y H_2 de un grupo G se dice que son **conjugados** si $H_2 = \alpha.\ H_1.\ \alpha^{-1}$, para algún elemento α de G. Es decir, los subgrupos son conjugados si el isomorfismo de G en sí mismo que aplica x en $\alpha.\ x.\ \alpha^{-1}$ aplica H_1 en H_2.

Dado H, subgrupo de G, entonces el **normalizador** de H en G es el subgrupo de G definido por

$$N(H) = \{g/\ gHg^{-1} = H\}$$

Definición 2.2.2. Dada p: E → B con $p(e_0) = b_0$, sea F el conjunto $F = p^{-1}(e_0)$. Sea

$$\Phi : \pi_1(B,b_0)/H_0 \to F$$

la correspondencia de levantamientos del teorema 1.4.4; es una biyección. Se define también una correspondencia

$$\mathbf{\Psi: C(E}, \boldsymbol{p}, \mathbf{B)} \to \mathbf{F}$$

Poniendo $\Psi(h) = h(e_0)$ para cada transformación recubridora h: E → E. Como h queda unívocamente determinada una vez que se conoce su valor en e_0, Ψ es inyectiva.

Lema 2.2.1. La imagen de la aplicación Ψ es igual a la imagen por Φ del subgrupo $N(H_0)/H_0$ de $\pi_1(B, b_0)/H_0$

Demostración. La correspondencia del levantamiento $\Phi : \pi_1(B,b_0) \to F$ se definía de la siguiente manera: dado un lazo α en B basado en b_0, sea γ su levantamiento a E partiendo de e_0. Pongamos $e_1 = \gamma(1)$. Se define Φ por $\Phi([\alpha]) = e_1$.

Para probar el lema es necesario demostrar que existe una transformación recubridora h: E → E con $h(e_0) = e_1$ si y solo si $[\alpha] \in N(H_0)$.

El lema del levantamiento general afirma que h existe si y solo si $H_0 = H_1$, donde $H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$. Afirmamos $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$.

En efecto, dado $[h] \in H_1$, se tiene $[h] = p_*([h])$, para algún lazo $[h]$ en E basado en e_1.

Sea k el camino $k = (\gamma * h) * \alpha$ con $\alpha = p \circ \gamma$. k es un lazo en E basado en e_0 y

$$p_*([k]) = [(\alpha * h) * \overline{\alpha}] = [\alpha] * [h] * [\alpha]^{-1}$$

Así, el último elemento está en $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$. Por tanto $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0$. Tomando $\bar{\gamma}$ el camino inverso de γ, es decir, de e_1 a e_0 y $\bar{\alpha} = p \circ \bar{\gamma}$ se verifica: $H_0 \subset [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$.

Por consiguiente, h existe si y solo si $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$, que es equivalente a decir que $[\alpha] \in N(H_0)$. ■

Teorema 2.2.1. La biyección

$$\Phi^{-1} \circ \Psi: C(E, p, B) \to N(H_0)/H_0$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Solo es necesario probar que $\Phi^{-1} \circ \Psi$ es un homomorfismo. Sean h, k: $E \to E$ transformaciones recubridoras con $h(e_0) = e_1$ y $k(e_0) = e_2$. Entonces:

$$\Psi(h) = e_1 \qquad \text{y} \qquad \Psi(k) = e_2$$

por definición. Escojamos caminos γ y δ en E de e_0 a e_1 y e_2, respectivamente. Si $\alpha = p \circ \gamma$ y $\beta = p \circ \delta$, entonces

$$\Phi([\alpha]H_0) = e_1 \qquad \text{y} \qquad \Phi([\beta]H_0) = e_2$$

por definición. Sea $e_3 = h(k(e_0))$; entonces $\Psi(h \circ k) = e_3$. Probando que $\Phi([\alpha * \beta]H_0) = e_3$, la demostración quedará terminada.

Como δ es un camino de e_0 a e_2, el camino $h \circ \delta$ va de $h(e_0) = e_1$ a $h(e_2) = h(k(e_0)) = e_3$ (Ver figura 8). Entonces el producto $\gamma * (h \circ \delta)$ está definido y es un camino de e_0 a e_3. Además, es un levantamiento de $\alpha * \beta$ ya que $p \circ \gamma = \alpha$ y $p \circ h \circ \delta = p \circ \delta = \beta$. Por tanto $\Phi([\alpha * \beta]H_0) = e_3$, lo que se deseaba probar. ■

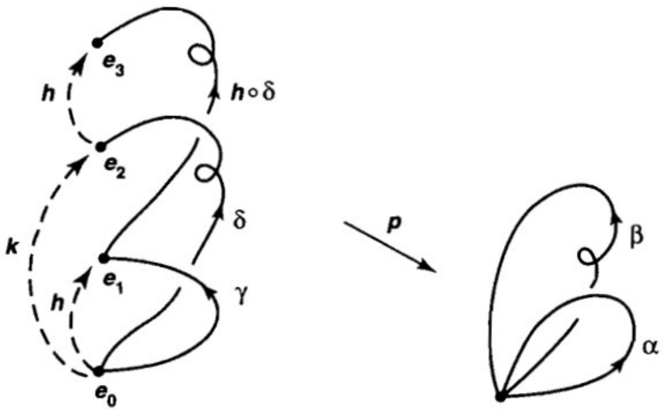

Figura 8

Corolario 2.2.1. El grupo H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$ si y solo si, para cada par de puntos e_1 y e_2 de $p^{-1}(b_0)$, existe una transformación recubridora h: E → E con $h(e_1) = e_2$. En este caso, existe un isomorfismo

$$\Phi^{-1} \circ \Psi: C(E, p, B) \to \pi_1(B, b_0)/H_0$$

En efecto, dado que H_0 es subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$, es claro de la definición de normalizador que $N(H_0) = \pi_1(B, b_0)$.

Corolario 2.2.2. Sea p: E → B una aplicación recubridora. Si E es simplemente conexo, entonces existe un isomorfismo entre C(E, p, B) y $\pi_1(B, b_0)$. Si H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$, entonces p: E → B se denomina aplicación recubridora regular.

Ejemplo 2.2.1. Dado que el grupo fundamental del círculo $\mathbb{S}^1$ es abeliano, cada recubridor es regular. En efecto, si p: $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es la aplicación recubridora estándar, por ejemplo, las transformaciones recubridoras son los homeomorfismos $x \to x + n$. El grupo de tales transformaciones es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos el espacio recubridor de la figura "ocho" (Ver figura 9), consistente en la unión de dos círculos tangentes A y B, que se origina envolviendo el eje X alrededor del circulo A y el eje Y alrededor del B. Los círculos A_i y B_i que se encargan de envolver a los círculos A y B se aplican homeomorficamente a ellos. Probemos que el grupo C(E, p, B) es trivial.

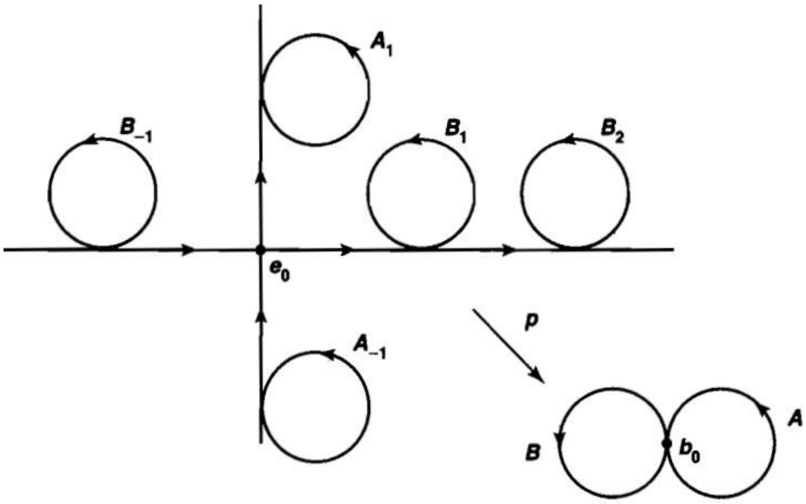

Figura 9

En general, si h: E → E es una transformación recubridora, entonces cualquier lazo en el espacio base que se levanta a un lazo en E en e_0 también se levanta a un lazo cuando el levantamiento empieza de $h(e_0)$.

En este caso, un lazo que genera el grupo fundamental de A se levanta a un no-lazo cuando el levantamiento está basado en e_0 y se levanta a un lazo cuando está basado en cualquier otro punto de $p^{-1}(b_0)$ en el eje Y. De manera análoga, un lazo que genera el grupo fundamental de B se levanta a un no-lazo partiendo de e_0 y a un lazo partiendo de cualquier otro punto de $p^{-1}(b_0)$ en el eje X. Se sigue que $h(e_0) = e_0$, de este modo, h es la aplicación identidad.

Definición 2.2.3. Sean X un espacio y G un grupo. Una **acción de G sobre X** es una aplicación continua α: G × X → X tal que, denotando α(g, x) = g . x, se tiene:

i. e . x = x, para todo x ϵ X

ii. $g_1 . (g_2 . x) = (g_1g_2) . x$, para todo x ϵ X, g_1 y g_2 ϵ G.

Sean X un espacio y G un subgrupo del grupo de homeomorfismos de X consigo mismo. El **espacio de órbitas** X/G se define como el espacio cociente obtenido de X por medio de la relación de equivalencia x ~ g(x) para todo x ϵ X y todo g ϵ G. La clase de equivalencia de x se denomina **órbita** de x.

Definición 2.2.4. Si G es un grupo de homeomorfismos de X, la acción de G sobre X se dice que **es propiamente discontinua** si para cada $x \in X$ existe un entorno U de x tal que g(U) es disjunto con U siempre que $g \neq e$ (con e, elemento neutro de G). Se sigue que $g_0(U)$ y $g_1(U)$ son disjuntos siempre que $g_0 \neq g_1$, pues de lo contrario U y $g_0^{-1}g_1(U)$ no serian disjuntos.

Teorema 2.2.2. Sean X conexo por caminos y localmente conexo por caminos y G un grupo de homeomorfismos de X. La aplicación cociente π: $X \rightarrow X/G$ es una aplicación recubridora si y solo si la acción de G es propiamente discontinua. En este caso, la aplicación recubridora π es regular y G es su grupo de transformaciones recubridoras.

Demostración. Primero probemos que π es una aplicación abierta. Si U es un abierto en X, entonces π^{-1} $\pi(U)$ es la unión de los conjuntos abiertos g(U) de X, para cada $g \in G$. Por tanto, π^{-1} $\pi(U)$ es abierto en X y $\pi(U)$ es abierto en X/G por definición. Así, π es abierta.

Ahora supongamos que la acción de G es propiamente discontinua y probemos que π es una aplicación recubridora. Dado $x \in X$, sea U, un entorno de x tal que $g_0(U)$ y $g_1(U)$ son disjuntos siempre que $g_0 \neq g_1$. Entonces $\pi(U)$ está regularmente cubierto por π.

En efecto, π^{-1} $\pi(U)$ es igual a la unión de abiertos disjuntos g(U), con $g \in G$, cada uno de los cuales contiene a lo sumo un punto de cada órbita. Por tanto, la aplicación $g(U) \rightarrow \pi(U)$ obtenida por la restricción de π es una biyección, además es continua y abierta; por tanto es un homeomorfismo. Los conjuntos g(U), para $g \in G$, forman una partición de π^{-1} $\pi(U)$ en rebanadas.

Recíprocamente, sea π es una aplicación recubridora. Dado $x \in X$, sea V un entorno de $\pi(x)$ que está regularmente cubierto por π. De la partición de $\pi^{-1}(V)$ en rebanadas, sea U_α la que contiene a x. Dado $g \in G$, con $g \neq e$, el conjunto $g(U_\alpha)$ debe ser disjunto con U_α, pues de lo contrario, dos puntos de U_α deberían pertenecer a la misma órbita y la restricción de π a U_α no sería inyectiva. Se sigue que la acción de G es propiamente discontinua.

Por otro lado, probemos que si π es una aplicación recubridora, entonces G es su grupo de transformaciones recubridoras. En efecto, cualquier $g \in G$ es una transformación recubridora, pues $\pi \circ g = \pi$ ya que la órbita de g(x) es igual a la de x.

También, sea h una transformación recubridora con $h(x_1) = x_2$, por ejemplo. Como $\pi \circ h = \pi$, los puntos x_1 y x_2 se aplican por π en el mismo punto; por tanto, existe $g \in G$ tal que $g(x_1) = x_2$. La unicidad del teorema 2.1.1. implica entonces que $h = g$.

Para probar que π es regular, se observa que para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 en la misma orbita, existe $g \in G$ tal que $g(x_1) = x_2$. Por último se aplicaría el corolario 2.2.1.para terminar la prueba. ■

Teorema 2.2.3. Si p: E → B una aplicación recubridora y G es su grupo de transformaciones recubridoras, entonces existe un homeomorfismo k: X/G → B tal que $p = k \circ \pi$ donde π: X → X/G es la aplicación proyección.

Demostración. Si g es una transformación recubridora, entonces $p(g(x)) = p(x)$ por definición. Por tanto, p es constante sobre cada órbita, lo que induce una aplicación continua k del espacio cociente X/G en B. Por otro lado, p es una aplicación cociente porque es continua, sobreyectiva y abierta. Como p es regular, dos puntos cualesquiera de $p^{-1}(b)$ están en la misma órbita bajo la acción de G. Por consiguiente, π induce una aplicación continua B → X/G, que es la inversa de k. ■

Ejemplo 2.2.3. Sea X el cilindro $\mathbb{S}^1 \times I$. Sean h, k: X → X los homeomorfismos definidos por $h(x, t) = (-x, t)$ y $k(x, t) = (-x, 1 - t)$. Los grupos $G_1 = \{e, h\}$ y $G_2 = \{e, k\}$ son isomorfos a $\mathbb{Z}_2$ (conjunto de los enteros módulo 2) y ambos actúan propiamente discontinuamente sobre X. Además se puede comprobar que X/G_1 es homeomorfo a X, mientras que X/G_2 es homeomorfo a la cinta de Möbius. (Ver figura 10)

Figura 10

2.3. Existencia de espacios recubridores

Definición 2.3.1. Un espacio B se dice **semilocalmente simplemente conexo** si para cada $b \in B$, existe un entorno U de b tal que el homomorfismo $i_* : \pi_1(U,b) \to \pi_1(B,b)$ inducido por la inclusión es trivial.

Observemos que si U satisface esta condición, también la satisface cualquier entorno más pequeño de b; por tanto, b posee entornos arbitrariamente pequeños satisfaciendo esta condición.

El hecho que B sea semilocalmente simplemente conexo es condición necesaria y suficiente para que exista, para cada clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B,b)$, un correspondiente espacio recubridor de B. La condición necesaria se probó en el lema 2.1.4.; la suficiencia se verá en esta sección.

Teorema 2.3.1. Sea B, conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Sea $b_0 \in B$. Dado un subgrupo H de $\pi_1(B,b_0)$ existen una aplicación recubridora $p: E \to B$ y un punto $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ tales que

$$p_*(\pi_1(E,e_0)) = H$$

Demostración.

PASO 1: Construcción de *E*. Sea P el conjunto de todos los caminos en B que parten de b_0. Se define una relación de equivalencia en P colocando $\alpha \sim \beta$ si α y β acaban en el mismo punto de B y $[\alpha * \overline{\beta}] \in H$. La clase de equivalencia del camino α se indicará por $\alpha^{\#}$.

Sea E la colección de las clases de equivalencia y definamos $p: E \to B$ por la ecuación $p(\alpha^{\#}) = \alpha(1)$. Como B es conexo por caminos, p es sobreyectiva. Dotaremos a E de una topología de manera que p sea una aplicación recubridora.

Por otro lado, observemos que se cumple lo siguiente:

1) Si $[\alpha] = [\beta]$, entonces $\alpha^{\#} = \beta^{\#}$. Pues de la igualdad $[\alpha] = [\beta]$, se sigue que $[\alpha * \overline{\beta}]$ es el elemento neutro, el cual pertenece a H.

2) Si $\alpha^{\#} = \beta^{\#}$, entonces $(\alpha * \delta)^{\#} = (\beta * \delta)^{\#}$, para cualquier camino δ en B partiendo de $\alpha(1)$. En efecto, basta con observar que $\alpha * \delta$ y $\beta * \delta$ acaban en el mismo punto de B y

$$[(\alpha * \delta) * \overline{(\beta * \delta)}] = [(\alpha * \delta) * (\overline{\delta} * \overline{\beta})] = [\alpha * \overline{\beta}]$$

que pertenece a H por hipótesis.

PASO 2. Definir una topología sobre *E*. Sean α un elemento cualquiera de P y U, un entorno conexo por caminos de $\alpha(1)$. Se define:

$$B(U, \alpha) = \{(\alpha * \delta)^{\#} \,/\, \delta \text{ es un camino en } U \text{ partiendo de } \alpha(1)\}$$

Observemos que $\alpha^{\#}$ es un elemento de $B(U, \alpha)$, ya que si $b = \alpha(1)$ entonces $\alpha^{\#} = (\alpha * e_b)^{\#}$; por definición, este elemento pertenece a $B(U, \alpha)$. Afirmamos que los conjuntos $B(U, \alpha)$ forman una base para la topología sobre E.

Primero probemos que si $\beta^{\#} \in B(U, \alpha)$, se tiene que $\alpha^{\#} \in B(U, \beta)$ y $B(U, \alpha) = B(U, \beta)$.

Si $\beta^{\#} \in B(U, \alpha)$, entonces $\beta^{\#} = (\alpha * \delta)^{\#}$ para algún camino δ en U. Entonces

$$(\beta * \overline{\delta})^{\#} = ((\alpha * \delta) * \overline{\delta})^{\#} \qquad \text{por 2)}$$

$$= \alpha^{\#} \qquad \text{por 1)}$$

de manera que $\alpha^{\#} \in B(U, \beta)$ por definición (Ver figura 11). En primer lugar, demostremos que $B(U, \beta) \subset B(U, \alpha)$. Nótese que el elemento general de $B(U, \beta)$ es de la forma $(\beta * \gamma)^{\#}$, donde γ es un camino en U. Entonces se tiene que:

$$(\beta * \gamma)^{\#} = ((\alpha * \delta) * \gamma)^{\#} = (\alpha * (\delta * \gamma))^{\#}$$

que pertenece a $B(U, \alpha)$ por definición. Por simetría se tiene la inclusión $B(U, \alpha) \subset B(U, \beta)$.

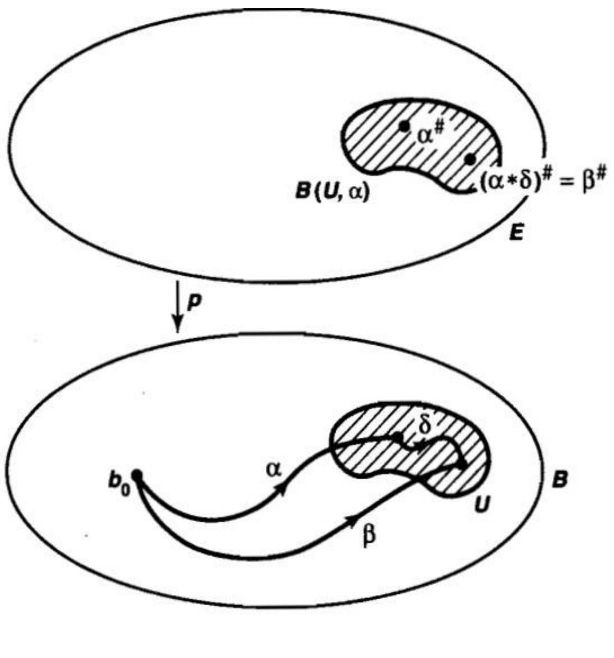

Figura 11

Ahora demostremos que los conjuntos B(U, α) forman una base. Si $\beta^{\#}$ pertenece a la intersección B(U_1, α_1) ∩ B(U_2, α_2), solo necesitamos conocer un entorno conexo por caminos V de $\beta(1)$ contenido en $U_1 \cap U_2$. La inclusión: B(V, β) ⊂ B(U_1, β) ∩ B(U_2, β), se sigue de la definición de estos conjuntos, entonces se tiene: B(U_1, β) ∩ B(U_2, β) = B(U_1, α_1) ∩ B(U_2, α_2) por el resultado que acabamos de probar.

Por lo tanto los conjuntos B(U, α) forma una base de una topología en E.

PASO 3. La aplicación *p* es continua y abierta. La imagen del elemento básico B(U, α) es el subconjunto abierto U de B: dado x ϵ U, elegimos un camino δ en U desde $\alpha(1)$ hasta x, entonces $(\alpha*\delta)^{\#}$ está en B(U, α) y $p((\alpha*\delta)^{\#})$ = x. Por tanto, p es abierta.

Para ver que p es continua, tomemos un elemento $\alpha^{\#}$ de E y un entorno V de $p(\alpha^{\#})$. Elijamos un entorno conexo por caminos U del punto $p(\alpha^{\#}) = \alpha(1)$ tal que $U \subset V$. Entonces B(U, α) es un entorno de $\alpha^{\#}$ tal que $p(\mathrm{B}(U,\alpha)) \subset V$. De este modo. p es continua en $\alpha^{\#}$.

PASO 4. Cada punto de *B* tiene un entorno que está regularmente cubierto por *p*. Dado b_1 ϵ B, tomemos U un entorno conexo por caminos de b_1 que satisface la condición adicional de que el homomorfismo $\pi_1(U,b_1) \to \pi_1(B,b_1)$ inducido por la inclusión es trivial. Afirmamos que U está regularmente cubierto por p.

Primero, probemos que $p^{-1}(U)$ es igual a la unión de los conjuntos B(U, α), cuando α recorre todos los caminos en B de b_0 a b_1. Como p aplica cada conjunto B(U, α) sobre U, está claro que $p^{-1}(U)$ contiene la unión. Por otro lado, si $\beta^{\#}$ ϵ $p^{-1}(U)$, entonces $\beta(1)$ ϵ U. Escojamos un camino δ en U desde b_1 hasta $\beta(1)$ y sea α el camino $\beta*\overline{\delta}$ de b_0 a b_1. Entonces $[\beta] = [\alpha*\delta]$, de manera que $\beta^{\#} = (\alpha*\delta)^{\#}$, que pertenece a B($U$, α). Así $p^{-1}(U)$ está contenido en la unión de los conjuntos B(U, α).

Segundo. Observemos que los distintos conjuntos B(U, α) son disjuntos. Pues si $\beta^{\#}$ ϵ B(U_1, α_1) ∩ B(U_2, α_2), entonces B(U_1, α_1) = B(U, β) = B(U_2, α_2), por el paso 2.

Tercero. Probemos que p define una aplicación biyectiva entre B(U, α) y U. Se sigue que $p\big|_{\mathrm{B}(U,\alpha)}$ es un homeomorfismo, siendo biyectiva, continua y abierta. Sabiendo que p aplica B(U, α) sobre U, para probar la inyectividad, supongamos que

$$p((\alpha*\delta_1)^{\#}) = p((\alpha*\delta_2)^{\#}), \quad \delta_1 \; y \; \delta_2 \in U$$

Entonces $\delta_1(1) = \delta_2(1)$. Como el homomorfismo $\pi_1(U,b_1) \to \pi_1(B,b_1)$ inducido por la inclusión es trivial, $\delta_1 * \overline{\delta}_2$ es un camino homotópico en B al lazo constante. Entonces $[\alpha * \delta_1] = [\alpha * \delta_2]$, de modo que $(\alpha * \delta_1)^\# = (\alpha * \delta_2)^\#$, como se deseaba probar.

PASO 5. Levantamiento de un camino en *B*. Sea e_0 la clase de equivalencia del camino constante en b_0, entonces $p(e_0) = b_0$ por definición. Dado un camino α en B partiendo de b_0, calculamos su levantamiento a un camino en E partiendo de e_0 y probamos que este levantamiento acaba en $\alpha^\#$.

Dado c ∊ [0, 1], sea α_c: I → B el camino definido por la ecuación

$$\alpha_c(t) = \alpha(tc), \quad \text{para } 0 \le t \le 1.$$

Entonces α_c es la "porción" de α que va de $\alpha(0)$ a $\alpha(c)$. En particular, α_0 es el camino constante en b_0 y α_1 es el propio camino α. Definimos $\tilde{\alpha}$: I → E por la ecuación

$$\tilde{\alpha}(c) = (\alpha_c)^\#$$

y probamos que $\tilde{\alpha}$ es continua. Entonces $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento, puesto que $p(\tilde{\alpha}(c)) = \alpha_c(1) = \alpha(c)$; además, $\tilde{\alpha}$ comienza en $(\alpha_0)^\# = e_0$ y acaba en $(\alpha_1)^\# = \alpha^\#$.

Para estudiar la continuidad de $\tilde{\alpha}$, introducimos la siguiente definición. Si [a, b] y [c, d] son dos intervalos en $\mathbb{R}$, existe una única aplicación f: [a, b] → [c, d] de la forma $f(x) = mx - k$ que lleva "a" a "c" y "b" a "d", denominada **aplicación lineal positiva** de [a, b] a [c, d], porque su gráfica es una línea recta con pendiente positiva. La inversa y composición de aplicaciones lineales positivas es también una aplicación de este tipo.

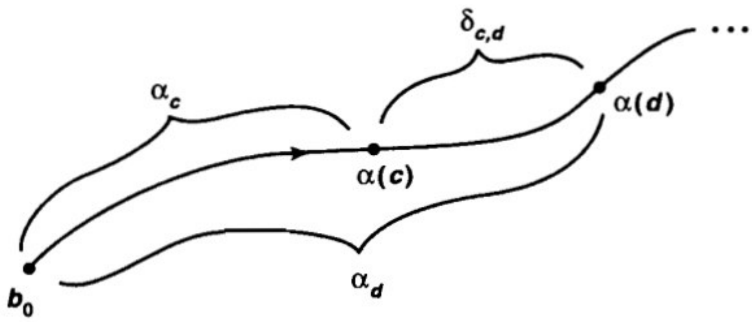

Figura 12

Ahora introducimos la siguiente notación: Dados $0 \leq c < d \leq 1$, sea $\delta_{c,d}$ el camino que es igual a la aplicación lineal positiva de I sobre [c, d] compuesta con α. Se observa que los caminos α_d y $\alpha_c * \delta_{c,d}$ son homotópicos porque uno es justamente una reparametrización del otro. (Ver figura 12)

Verifiquemos ahora la continuidad de $\tilde{\alpha}$ en el punto c de [0, 1]. Sea W un elemento básico en E alrededor del punto $\tilde{\alpha}(c)$. Entonces W = B(U, α_c) para algún entorno conexo por caminos U de $\alpha(c)$. Elijamos $\varepsilon > 0$ tal que para $|c - t| < \varepsilon$, el punto $\alpha(t)$ esté en U. Por tanto necesitamos probar que si d es un punto de [0, 1] que satisface $|c - d| < \varepsilon$, entonces $\tilde{\alpha}(d) \in W$.

Supongamos pues que $|c - d| < \varepsilon$. Tomemos en primer lugar el caso que d > c. Sea $\delta = \delta_{c,d}$; entonces como $[\alpha_d] = [\alpha_c * \delta]$, se tiene:

$$\tilde{\alpha}(d) = (\alpha_d)^{\#} = (\alpha_c * \delta)^{\#}.$$

Como δ está en U, tenemos que $\tilde{\alpha}(d) \in B(U, \alpha_c) = W$, como deseábamos. Si d < c, denotemos $\delta = \delta_{d,c}$ y procedemos de forma análoga.

PASO 6. La aplicación *p*: *E* → *B* una aplicación recubridora. Solo es necesario verificar que E es conexo por caminos. Si $\alpha^{\#}$ es un punto cualquiera de E, entonces el levantamiento $\tilde{\alpha}$ del camino α es un camino en E de e_0 a $\alpha^{\#}$.

PASO 7. Por último, $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$. Sea α un lazo en B basado en b_0. Sea $\tilde{\alpha}$ su levantamiento a E partiendo de e_0. El teorema 1.4.4. asegura que $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$ si y solo si $\tilde{\alpha}$ es un lazo en E. El punto final de $\tilde{\alpha}$ es el punto $\alpha^{\#}$; $\alpha^{\#} = e_0$ si y solo si es equivalente al lazo constante en b_0, es decir, si y solo si $[\alpha * \bar{e}_{b_0}] \in H$. Esto sucederá precisamente cuando $[\alpha] \in H$. ■

2.4 Equivalencia de espacios recubridores

En esta sección probaremos que el subgrupo H_0 de $\pi_1(B, b_0)$ determina completamente el recubridor p: $E \to B$, salvo una adecuada noción de equivalencia de recubridores.

Definición 2.4.1. Sean p: $E \rightarrow B$ y q: $E^{'} \rightarrow B$ aplicaciones recubridoras. Diremos que son **equivalentes** si existe un homeomorfismo h: $E \rightarrow E^{'}$ tal que $p = q \circ h$. El homeomorfismo h se denomina **equivalencia de aplicaciones recubridoras** o equivalencia de espacios recubridores.

Teorema 2.4.1. Sean p: $E \rightarrow B$ y q: $E^{'} \rightarrow B$ aplicaciones recubridoras; sea $p(e_0) = q(e_0^{'})$ $= b_0$. Existe una equivalencia h: $E \rightarrow E^{'}$ tal que $h(e_0) = e_0^{'}$ si y solo si, los grupos

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) \qquad \text{y} \qquad H_0^{'} = q_*(\pi_1(E^{'}, e_0^{'}))$$

son iguales. Si h existe, es única.

Demostración. El hecho de que h sea un homeomorfismo implica que

$$h_*(\pi_1(E, e_0)) = \pi_1(E^{'}, e_0^{'})$$

Como $q \circ h = p$, se tiene que $H_0 = H_0^{'}$.

Recíprocamente, suponemos $H_0 = H_0^{'}$ y probemos que h existe. Aplicaremos el lema 2.1.1. Se consideran las aplicaciones: p: $E \rightarrow B$ y q: $E^{'} \rightarrow B$. Como q es una aplicación recubridora y E es conexo por caminos y localmente conexo por caminos, existe una aplicación h: $E \rightarrow E^{'}$ con $h(e_0) = e_0^{'}$, que es un levantamiento de p. Análogamente, vemos que existe una aplicación k: $E^{'} \rightarrow E$ con $k(e_0^{'}) = e_0$, tal que $p \circ k = q$.

La aplicación $k \circ h$: $E \rightarrow E$ es un levantamiento de p, con $p(e_0) = e_0$. La aplicación identidad i_E de E es otro de tales levantamientos. De la unicidad del lema 2.1.1. se tiene que $k \circ h = i_E$. De manera análoga se obtiene $h \circ k = i_{E'}$. ■

Lema 2.4.1. Sea p: $E \rightarrow B$ una aplicación recubridora. Sean e_0 y e_1 puntos de $p^{-1}(b_0)$ y $H_i = p_*(\pi_1(E, e_i))$.

a) Si γ es un camino en E de e_0 a e_1 y α es el lazo $p \circ \gamma$ en B, entonces se satisface la ecuación $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$; por consiguiente, H_0 y H_1 son conjugados.

b) Recíprocamente, dados e_0 y un subgrupo H de $\pi_1(B, b_0)$ conjugado de H_0, existe un punto e_1 de $p^{-1}(b_0)$ tal que $H_1 = H$.

Demostración. De a), probemos $[\alpha]*H_1*[\alpha]^{-1}\subset H_0$. Dado un elemento $[h]$ de H_1, se tiene que $[h]$ = $p_*([h])$ para algún lazo h en E basado en e_1. Sea k el camino $(\gamma \circ h) \circ \tilde{\alpha}$, el cual es un lazo en E basado en e_0 y

$$p_*([k])=[(\alpha*h)*\overline{\alpha}]=[\alpha]*[h]*[\alpha]^{-1}.$$

Así, el último elemento pertenece a $H_0=p_*(\pi_1(E,e_0))$. (Ver figura 13)

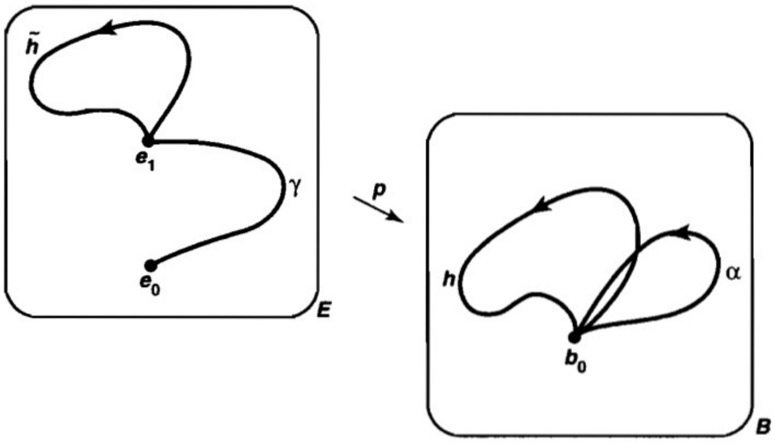

Figura 13

Ahora probaremos que $H_0\subset[\alpha]*H_1*[\alpha]^{-1}$. $\overline{\gamma}$ es un camino de e_1 a e_0 y $\overline{\alpha}$ es igual al lazo $p \circ \overline{\gamma}$. Por el resultado que se acaba de probar se tiene $[\overline{\alpha}]*H_0*[\overline{\alpha}]^{-1}\subset H_1$, que era lo que queríamos demostrar.

Para probar b), sean e_0 un punto dado y H, conjugado de H_0. Entonces $[\alpha]*H*[\alpha]^{-1}=H_0$, para algún lazo α en B basado en b_0.

Sea γ el levantamiento de α a un camino en E partiendo de e_0 y sea $e_1 = \gamma(1)$. Entonces a) implica que $[\alpha]*H_1*[\alpha]^{-1}=H_0$. Se concluye que $H = H_1$. ■

Teorema 2.4.2. Sean p: $E \rightarrow B$ y q: $E' \rightarrow B$ aplicaciones recubridoras; sea $p(e_0) = q(e_0')$ = b_0. Las aplicaciones recubridoras p y q son equivalentes si y solo si, los subgrupos

$$H_0=p_*(\pi_1(E,e_0)) \qquad \text{y} \qquad H_0'=q_*(\pi_1(E',e_0'))$$

de $\pi_1(B,b_0)$ son conjugados.

Demostración. Si h: $E \to E'$ es una equivalencia, sean $e_1' = h(e_0)$ y $H_1' = p_*(\pi_1(E', e_1'))$.

El teorema 2.4.1. implica que $H_0 = H_1'$, mientras que el lema anterior nos dice que H_1' es el conjugado de H_0'.

Recíprocamente, si los grupos H_0 y H_1' son conjugados, el lema anterior implica la existencia de un punto e_1' de E' tal que $H_1' = H_0$. El teorema 2.4.1. nos brinda entonces, una equivalencia h: $E \to E'$ tal que $e_1' = h(e_0)$. ■

Teorema 2.4.3. El espacio B tiene un espacio recubridor universal si y solo si, B es conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo.

Demostración. Si p: $(E, e_0) \to (B, b_0)$ es una aplicación recubridora universal de B, entonces el grupo $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es el subgrupo trivial de $\pi_1(B, b_0)$. Por el teorema 2.4.2. se tiene además que B es semilocalmente simplemente conexo.

Recíprocamente, aplicamos el teorema 2.3.1. para construir una aplicación recubridora p: $(E, e_0) \to (B, b_0)$ tal que $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es el subgrupo trivial de $\pi_1(B, b_0)$. Como p_* es inyectiva, tenemos que E es simplemente conexo y por tanto, p es una aplicación recubridora universal de B. ■

Conclusiones

Con el presente trabajo se pudo comprobar la importancia del Grupo Fundamental en el estudio de un espacio topológico dado en cuanto a sus propiedades y relación con otros espacios. En particular, en el estudio de sus Espacios de Recubrimiento que, a través del Grupo Fundamental, da respuestas a preguntas como: ¿Bajo qué condiciones para un espacio dado, se puede garantizar la existencia de un espacio recubridor? O ¿Cuántos espacios recubridores puede tener? Las Clases de Conjugación del Grupo Fundamental de un espacio determinan las clases de equivalencia de los recubridores.

El estudio de los Espacios de Recubrimiento aparece en el marco que, para estudiar un espacio dado, en ocasiones no resulta fácil, pero se puede conocer algunas de sus propiedades estudiando el espacio que lo recubre. El concepto de Espacio Recubridor formaliza la idea de un espacio topológico que envuelve una o varias veces a otro espacio.

Bibliografía

[1] MUNKRES. J. R. *Topología.* Segunda edición. Prentice Hall. Madrid, 2000.

[2] KOSNIOWSKI. C. *Topología Algebraica.* Editorial Reverté. Barcelona, 1986

[3] MASSEY. W. S. *Introducción a la topología algebraica*. Editorial Reverté. Barcelona, 2006.

[4] SPANIER. E. H. *Algebraic Topology,* McGraw-Hill. Nueva York, 1966.

[5] LIMA. E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento.* IMPA. Río de Janeiro, 1993.