

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**E.A.P. DE MATEMÁTICA**

**Desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^n$**

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

**AUTOR**

Galindo TAZA CHAMBI

**ASESOR**

Edgar Diógenes VERA SARAVIA

Lima - Perú

2017

# Desigualdad Isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Galindo Taza Chambi

Asesor: Edgar Diógenes Vera Saravia

Tesis presentada a consideración del  
Cuerpo Docente de la Facultad de  
Ciencias Matemáticas, de la Universi-  
dad Nacional Mayor de San Marcos, co-  
mo parte de los requisitos para obtener  
el Título Profesional de Licenciado en  
Matemáticas.

Aprobada por:

---

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zanini

---

Mg. Tomás Alberto Núñez Lay

---

Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia

Lima - Perú  
Febrero, 2017

# FICHA CATALOGRÁFICA

Taza Chambi, Galindo

Desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^n$ , (Lima) 2017.

VIII, 61 p., 29.7cm, (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2017).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática

I. UNMSM-Facultad de Ciencias Matemáticas.

II. Desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^n$  (Geometría Diferencial).

A Sofía y Benedicto.

## Resumen

# Desigualdad Isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Galindo Taza Chambi

Asesor : Edgar Diógenes Vera Saravia  
Título Obtenido : Licenciado en Matemáticas

En esta tesis presentaremos la prueba de la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^n$ , basado en el trabajo *Isoperimetric Inequalities* del matemático Isaac Chavel [CHA01], publicado en el año 2001.

**Palabras-claves:** Espacio  $\mathbb{R}^n$ , geometría diferencial, Teorema Federer-Fleming, desigualdad isoperimétrica.

Lima - Perú  
Febrero, 2017

## Abstract

# Desigualdad Isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Galindo Taza Chambi

Adviser : Edgar Diógenes Vera Saravia  
Obtained Degree : Licenciado en Matemáticas

In this thesis we present the proof of the isoperimetric inequality in  $\mathbb{R}^n$ , based on the work *Isoperimetric Inequalities* of the mathematician Isaac Chavel [CHA01], published in 2001.

**Keywords:**  $\mathbb{R}^n$  space, differential geometry, Federer-Fleming Theorem, Isoperimetric inequalities.

Lima - Perú  
Febrero, 2017

## Agradecimientos

En primer lugar a mis queridos padres Sofía y Benedicto que junto a mis hermanos son y serán el principal motivo de mi esfuerzo.

A mi asesor Edgar Vera Saravia por su incentivo, apoyo académico, por su amistad, por las conversaciones que tenemos y sus enseñanzas en todo ámbito.

A mi orientador de la maestría Stefano Nardulli, por encaminarme en esta área de la matemática y saber que fue una buena decisión.

A Abraham Muñoz, amigo y hermano de tesis, por su apoyo académico en muchos de los resultados de esta tesis.

Agradecemos también a los profesores Tomás Núñez Lay y Rafael Cabanillas Zanini por aceptar y ser parte de la banca evaluadora de esta tesis.

A mis amigos de la universidad, compañeros de clase y profesores durante mi vida universitaria.

Al Dr. Alfredo Marín por su financiamiento indirecto de esta tesis, por las buenas conversas de la cual aprendo siempre algo nuevo no necesariamente de matemática.

A José y Dilcinha, amigos brasileros que nos hicieron conocer uno de los lados buenos de este país, su gente.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Presentación del problema isoperimétrico</b>	<b>3</b>
<b>2. Resultados preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. El espacio $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
2.2. La función Gamma . . . . .	9
2.3. Funciones Lipschitz . . . . .	13
2.4. Medida de Hausdorff . . . . .	17
2.5. Fórmula de la co-área . . . . .	19
2.6. Elementos de cálculo y geometría de curvas . . . . .	25
<b>3. Desigualdad isoperimétrica en el plano</b>	<b>27</b>
3.1. Prueba 1 . . . . .	28
3.2. Prueba 2 . . . . .	31
<b>4. Desigualdad isoperimétrica en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>34</b>
4.1. Federer - Fleming . . . . .	36
4.2. La desigualdad isoperimétrica . . . . .	40
4.3. Caso de la igualdad . . . . .	44
<b>5. Comentario final</b>	<b>52</b>
<b>Notaciones</b>	<b>54</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>



# Introducción

Este trabajo tiene como uno de sus objetivos ofrecer un tema de estudio que puede ser tratado en los diferentes Seminarios que ofrece la EP de Matemática de nuestra Facultad.

El problema isoperimétrico es antiquísimo y sus inicios están relacionado al plano, pero todavía estas generalizaciones del mismo y muchos objetos matemáticos que fueron desarrollándose en su estudio ahora son usados como herramientas en otras áreas como la Geometría diferencial, la Geometría discreta y convexa, la Probabilidad, las ecuaciones diferenciales parciales y la Teoría Geométrica de la Medida.

Aquí vamos a describir el *problema isoperimétrico* en el espacio euclidiano  $n$ -dimensional, este estudio lo hemos dividido en cinco capítulos.

En el primer capítulo trataremos sobre los orígenes del problema isoperimétrico.

En el segundo capítulo presentamos, en 6 secciones, los resultados y notaciones a ser usados en los capítulos siguientes. En la primera sección abordaremos conceptos y resultados del espacio  $\mathbb{R}^n$ , en la segunda sección la función Gamma, en la tercera sección las funciones Lipschitz, en la cuarta sección la medida de Hausdorff, en la quinta sección la fórmula de la co-área y en la última sección conceptos de geometría diferencial.

En el tercer capítulo daremos dos pruebas de la desigualdad isoperimétrica en el plano, una utilizando elementos de geometría diferencial y otra utilizando las series de Fourier, caracterizando la igualdad cuando el dominio  $\Omega$  es un disco.

En el cuarto capítulo presentaremos el resultado principal de este trabajo; es decir, el Teorema 4.2.1, la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^n$ :  
x

Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ , con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^1$ . Entonces

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{1-1/n}} \geq \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|\mathbb{B}^n|^{1-1/n}},$$

donde:  $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$  denota la bola unitaria  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ ,

$\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$  es la esfera unitaria determinada por  $\mathbb{B}^n$  y, finalmente  $|\mathbb{B}^n|$  y  $|\mathbb{S}^{n-1}|$  denotan la  $n$ -medida de Lebesgue y  $(n - 1)$ -medida de Lebesgue correspondiente.

La prueba está basada en el teorema de Federer-Fleming, el cual permite reescribir la desigualdad isoperimétrica como una desigualdad en el espacio de funciones  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Posteriormente, asumiendo algunas condiciones sobre el dominio  $\Omega$ , probaremos que la igualdad es alcanzada si y solamente si  $\Omega$  es una bola  $n$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$ .

En el quinto y último capítulo veremos algunas aplicaciones de la desigualdad isoperimétrica de la gran variedad que existe. Concluimos dando algunos comentarios de como esta desigualdad se generaliza para espacios más generales y enunciamos algunos resultados que pueden servir como tema para trabajos futuros.

## Capítulo 1

# Presentación del problema isoperimétrico

*De Dido el esposo era Siqueo, el hombre más rico en oro  
de los fenicios, y lo amo la infeliz sin medida,  
desde que su padre la entregara sin mancha y la uniera a él en  
primeros auspicios.*

*Pero el poder de Tiro lo ostentaba su hermano  
Pigmalión, terrible más que todos los otros por sus crímenes  
Y vino a ponerse entre ambos la locura. Éste a Siqueo,  
impío ante las aras y ciego de pasión por el oro,  
sorprende a escondidas con su espada, sin cuidarse  
del amor de su hermana (...)*

*(...) Pero en sueños se le apareció  
el propio fantasma de su insepulto esposo, (...)  
(...) La anima luego a disponer la huida y salir de su patria,  
y saca de la tierra antiguos tesoros escondidos (...)  
Se van por el mar las riquezas del avaro Pigmalión;  
una mujer dirige la empresa.*

*Llegaron a estos lugares, donde ahora ves enormes murallas  
y nace el alcázar de una joven Carthago,  
y compraron el suelo, que por esto llamaron Birsa,  
cuanto pudieron rodear con una piel de toro...*

*Virgilio. La Eneida, libro IV.*

En su poema épico *La Eneida*, Publio Virgilio Marón (70-19 a.C.) cuenta que hacia el año 814 a.C, la princesa fenicia Dido huyó de su hermano, el rey Pigmalión, que acababa de asesinar a su esposo. Acompañada de su séquito, llegó a Numidia, en el norte de África, e intentó comprar unas tierras al rey Jarbas con el fin de establecerse allí. El rey Jarbas accedió a venderle las tierras con una curiosa condición: Dido podría comprar únicamente las tierras que lograra cercar con la piel de un buey. En estas tierras Dido fundó una ciudad a la que llamó Qart Hadast, que significa Ciudad Nueva y que más tarde se convirtió en el reino de Cártago (hoy Túnez). La Eneida de Virgilio es la epopeya de Eneas de Troya que, después que su ciudad fue tomada por Agamenón, huyó en barco con sus seguidores viajando de Asia Menor a través del Mediterraneo hasta desembarcar en Italia y fundar Roma. En su viaje conoció Cártago y se enamoró de su reina Dido. Sin embargo, Júpiter intervino y ordenó a Eneas que abandonara a Dido, que, en su desesperación, se mató.

En la Eneida, Virgilio no cuenta la manera en que Dido usó la piel del buey para cercar las tierras, ni la forma de esta cerca, tal vez porque dos siglos antes Marcus Junianus Justinus (siglo III a.C.) ya había mencionado en su libro *Historiæ Philippicæ* la manera como Dido dió solución a este problema. En dicho libro Marcus cuenta que Dido ordenó a sus súbditos cortar la piel del buey en tiras muy finas y que al unir las estas habrían alcanzado más de 1000 metros de longitud. Hecho esto, Dido había reducido el problema de las tierras a un problema de naturaleza matemática:

*entre todas las curvas de longitud dada, encontrar  
aquella que encierra el área máxima*

La solución que Dido dió a este problema de maximización fue, la curva que desde los albores de la matemática ha estado asociada a la perfección: la circunferencia. Es decir, según Dido:

*entre todas las curvas planas simples y cerradas, de longitud dada, la  
circunferencia es la que encierra el área máxima (Teorema  
Isoperimétrico).*

La historia de la princesa Dido fue inmortalizada por Dante en La Divina Comedia y por Henry Purcell en su ópera Dido y Eneas en 1689. En la figura se muestra un grabado de Mattahus Merian de 1630.



Figura 1.1: El problema de la princesa Dido.

Problemas como el de Dido son conocidos como problemas isoperimétricos (igual perímetro). La elección de Dido, de la circunferencia como la curva cerrada plana que maximiza el área encerrada fue una respuesta adelantada a lo que hoy en día conocemos como *Problema Isoperimétrico o Problema de Dido*.

En el caso 1-dimensional, *el problema isoperimétrico* se plantea del modo siguiente: Para un intervalo abierto  $I$  la medida discreta de su frontera,  $\partial I$ , es 2. A seguir, para el caso de un subconjunto abierto y acotado de la recta,  $\Omega$ , se considera que la medida discreta de su frontera,  $\partial\Omega$ , es mayor o igual a 2 y la igualdad se cumple si y solamente si  $\Omega$  es un intervalo abierto. Podemos escribir entonces:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R} \text{ es abierto y acotado} \implies m_d(\partial\Omega) \geq 2,$$

y la igualdad se cumple si y solamente si  $\Omega$  es un intervalo abierto y acotado. Esta es la desigualdad isoperimétrica en la recta.

En el caso del plano, se tienen hasta tres formulaciones del problema isoperimétrico:

- (i) Considerando todos los dominios acotados en  $\mathbb{R}^2$  con perímetro, la longitud de su frontera, prefijado, se requiere encontrar el dominio con mayor área. La respuesta, evidentemente, será un disco.

Debe tenerse en cuenta que el valor específico del perímetro en cuestión no es relevante ya que se cumple:

Si todos los dominios de perímetro  $L_1$  son aplicados por una semejanza de  $\mathbb{R}^2$  a todos los dominios con perímetro  $L_2$ , para valores cualesquiera  $L_1$  y  $L_2$ , entonces la imagen, bajo la semejanza considerada, de un área maximizadora para  $L_1$  es un área maximizadora para  $L_2$ .

- (ii) Considerando todos los dominios acotados con un área común se pregunta como minimizar el perímetro de dichos dominios.
- (iii) Por último, podemos expresar el problema como una desigualdad analítica; es decir, dado que sabemos exactamente los valores del área de un disco y la longitud de su frontera o perímetro, el problema isoperimétrico se expresa como sigue

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

donde  $A$  denota el área del dominio en consideración y  $L$  la longitud o perímetro de su frontera.

Esta desigualdad es extremadamente conveniente porque permanece invariante bajo semejanzas de  $\mathbb{R}^2$ , y se tiene la igualdad si el dominio es un disco.

Considerando esta última desigualdad analítica para el caso  $n$ -dimensional,  $n \geq 2$ , la desigualdad isoperimétrica se expresa:

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{1-1/n}} \geq \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|\mathbb{B}^n|^{1-1/n}}.$$

donde:

$\Omega$  es cualquier dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  y  $\partial\Omega$  su frontera.

$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ , denota la bola unitaria  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ ,

$\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$  es la esfera unitaria determinada por  $\mathbb{B}^n$  y, finalmente

$|\mathbb{B}^n|$  y  $|\mathbb{S}^{n-1}|$  denotan la  $n$ -medida de Lebesgue y  $(n - 1)$ -medida de Lebesgue correspondiente.

## Capítulo 2

# Resultados preliminares

En este capítulo vamos desarrollar temas como requisitos para los siguientes capítulos, algunos resultados serán probados, otros no, debido a la dificultad para el lector y a su importancia para la realización de este trabajo, es claro también que estarán con su referencia respectiva, los textos utilizados en este capítulo y que podemos consultar para más detalle son [EG92], [LL12], [DC79].

### 2.1. El espacio $\mathbb{R}^n$

Sea  $n$  un número natural. El **espacio euclidiano  $n$ -dimensional**  $\mathbb{R}^n$  es el producto cartesiano de  $n$  factores iguales a  $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Los elementos de  $\mathbb{R}^n$  son sucesiones de  $n$  términos reales  $x = (x_1, \cdots, x_n)$ . Para cada  $i = 1, \cdots, n$ , el término  $x_i$  se llama la  **$i$ -ésima coordenada** de  $x$ .

Si  $x = (x_1, \cdots, x_n)$  e  $y = (y_1, \cdots, y_n)$ , se tiene  $x = y$  si solamente si  $x_i = y_i$  para todo  $i = 1, \cdots, n$ . Los elementos de  $\mathbb{R}^n$  algunas veces son llamados **puntos** o **vectores**.

La **adición** en  $\mathbb{R}^n$  hace corresponder a cada par de vectores  $x = (x_1, \cdots, x_n)$  e  $y = (y_1, \cdots, y_n)$  la **suma**

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$

y la **multiplicación** de un número real  $\lambda$  por el vector  $x = (x_1, \cdots, x_n)$  tiene como resultado el **producto**

$$\lambda.x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n).$$

El vector  $0 = (0, \dots, 0)$ , cuyas coordenadas son todas nulas, se llama origen de  $\mathbb{R}^n$ . Para todo  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , el vector  $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$  se llama **opuesto** o **simétrico** de  $x$ .

Los vectores

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1),$$

que tienen una única coordenada no nula, igual a 1, constituyen la **base canónica** de  $\mathbb{R}^n$ . Luego  $x = (x_1, \dots, x_n)$  se expresa como  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ .

Se define la operación que asocia a cada par de vectores  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  el número real

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

llamado el **producto interno** de  $x$  por  $y$ . Decimos que los vectores  $x, y \in \mathbb{R}^n$  son **ortogonales** si y sólo si  $\langle x, y \rangle = 0$ , por ejemplo los vectores  $e_i, e_j$  son ortogonales si  $i \neq j$ . El número no negativo  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  se llama **norma euclidiana** del vector  $x$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  entonces

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Cuando  $\|x\| = 1$ , decimos que  $x$  es un vector **unitario**. Para todo  $x \neq 0$ , el vector  $u = \frac{x}{\|x\|}$  es unitario. La norma euclidiana tiene las siguientes propiedades: sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$

- (1)  $\|x\| \geq 0$ , para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$  y vale la igualdad si y sólo si  $x = 0$ ,
- (2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
- (3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Teorema 2.1.1. (Desigualdad de Schwarz).** Para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , se tiene

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

con igualdad si y sólo si un vector es múltiplo del otro.

**Demostración:** Si  $x = 0$ , la desigualdad es trivial. Supongamos que  $x \neq 0$  y podemos escribir  $y = \alpha x + z$  con  $z$  ortogonal a  $x$  y  $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}$ , luego por el Teorema de Pitágoras,

$$\|y\|^2 = \alpha^2 \|x\|^2 + \|z\|^2,$$



así,  $\|y\|^2 \geq \alpha^2 \|x\|^2$  donde vale la igualdad si y sólo si  $y = \alpha x$ , reemplazando el valor de  $\alpha$ , tenemos

$$\|y\|^2 \geq \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2},$$

es decir,  $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$  y por lo tanto

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

valiendo la igualdad si y sólo si  $y = \alpha x$ . ■

## 2.2. La función Gamma

**Definición 1.** Para  $s > 0$  la función **Gamma** es definida por

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (2.1)$$

Donde la condición  $s > 0$  es para garantizar la convergencia de la integral.

**Proposición 2.2.1.** Si  $s > 0$ , entonces

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \quad (2.2)$$

Como consecuencia  $\Gamma(n+1) = n!$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Demostración:** Por integración por partes en las integrales finitas tenemos

$$\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{d}{dt}(e^{-t} t^s) dt = - \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-t} t^s dt + s \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-t} t^{s-1} dt,$$

haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}(e^{-t} t^s) dt &= - \int_0^{\infty} e^{-t} t^s dt + s \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= -\Gamma(s+1) + s\Gamma(s) \end{aligned}$$

Por otro lado la integral del lado izquierdo tiende 0 puesto que la función tiende a 0 cuando  $t \rightarrow 0$  o  $t \rightarrow \infty$ , por lo tanto (2.2) es válido. Ahora dado que

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1,$$

entonces  $\Gamma(n+1) = n!$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$  ■

**Observación 1.** Dado que  $\int_0^\infty e^{-u^2} = \sqrt{\pi}/2$ , no es difícil mostrar que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

Denotemos con  $\overline{\mathbb{B}}^n(a)$  la bola cerrada  $n$ -dimensional de radio  $a$  dada por

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{B}}^n(a) &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2\} \quad \text{y} \\ V_n(a) &= \int \cdots \int_{\mathbb{B}^n(a)} dx_1 \dots dx_n, \quad \text{el volumen de } \overline{\mathbb{B}}^n(a).\end{aligned}$$

**Teorema 2.2.1.**

$$V_n(a) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)} a^n, \quad (2.3)$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma.

**Demostración:** Para  $n = 1$ , usando la observación (1) anterior tenemos  $V_1(a) = 2a$  que es la longitud del intervalo  $[-a, a]$ .

Para  $n = 2$ , tenemos  $V_2(a) = \pi a^2$ , que evidentemente es el área de la bola cerrada 2-dimensional de radio  $a$ .

Mostraremos ahora para el caso  $n \geq 3$ .

**Afirmación 1.**  $V_n(a) = a^n V_n(1)$

En efecto, haciendo un cambio de variable  $x = au$  luego

$$\begin{aligned}V_n(a) &= \int \cdots \int_{\mathbb{B}^n(a)} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{B}^n(1)} a^n dx_1 \dots dx_n \\ &= a^n V_n(1).\end{aligned}$$

Ahora, para mostrar (2.3) bastará probar que

$$V_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)},$$

dado que  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$  tenemos

$$x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1 - x_{n-1}^2 - x_n^2 \quad \text{y} \quad x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1,$$

luego podemos escribir

$$V_n(1) = \iint_{x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1} \left\{ \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1 - x_{n-1}^2 - x_n^2} dx_1 \dots dx_{n-2} \right\} dx_{n-1} dx_n. \quad (2.4)$$

Observamos que la integral dentro de los corchetes se extiende a la bola cerrada  $(n-2)$ -dimensional  $\mathbb{B}^{n-2}(R)$ , siendo  $R = \sqrt{1 - x_{n-1}^2 - x_n^2}$ , luego

$$V_{n-2}(R) = R^{n-2} V_{n-2}(1) = (1 - x_{n-1}^2 - x_n^2)^{n/2} V_{n-2}(1).$$

denotando  $x$  en lugar de  $x_{n-1}$  y también  $y$  en lugar de  $x_n$ . Reescribiendo (2.4)

$$V_n(1) = V_{n-2}(1) \int \dots \int_{x^2 + y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2)^{n/2-1} dx dy.$$

Usando coordenadas polares obtenemos

$$V_n(1) = V_{n-2}(1) \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{n/2-1} r dr d\theta = V_{n-2}(1) \frac{2\pi}{n}.$$

por lo tanto,

$$V_n(1) = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1), \text{ si } n \geq 3,$$

denotando

$$f(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)}$$

y por la Proposición 2.2.1 tenemos que  $f(n) = V_n(1)$  para todo  $n \geq 1$ .

■

**Proposición 2.2.2.** (*Desigualdad geométrica-aritmética*) Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in ]0, +\infty[$ . Entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq n \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n}. \quad (2.5)$$

En particular vale la igualdad si solamente si  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ .

**Demostración:** Dada la convexidad de la función exponencial, tenemos

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} &= e^{\log \left[ \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \right]} \\ &= e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(\lambda_i)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\log(\lambda_i)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i. \end{aligned}$$

Luego la desigualdad (2.5) sigue inmediatamente.

Caso de la igualdad. Si los términos  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$  demostrar que vale la igualdad en (2.5) es trivial, ahora si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n}, \quad (2.6)$$

demostraremos por reducción al absurdo que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ . Supongamos que existen  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Tomando  $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\lambda_1 < A < \lambda_2. \quad (2.7)$$

Consideramos ahora

$$\tilde{\lambda}_i = \begin{cases} A, & \text{si } i = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - A, & \text{si } i = 2 \\ \lambda_i, & \text{si } 3 \leq i \leq n. \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i &= \frac{1}{n} (A + \lambda_1 + \lambda_2 - A + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = A. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i - \prod_{i=1}^n \lambda_i &= [A(\lambda_1 + \lambda_2 - A) - \lambda_1 \lambda_2] \lambda_3 \cdots \lambda_n \\ &= [A\lambda_1 + A\lambda_2 - A^2 - \lambda_1 \lambda_2] \lambda_3 \cdots \lambda_n \\ &= (A - \lambda_1)(\lambda_2 - A) \lambda_3 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

Usando (2.7) obtenemos que

$$\prod_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i - \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0,$$

luego, usando (2.5)

$$A \geq \left( \prod_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \right)^{1/n} > \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n}.$$

Es claro que es una contradicción con (2.6). ■

### 2.3. Funciones Lipschitz

**Definición 2.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ , una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es llamada **Lipschitziana** si existe un número no negativo  $C$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|, \quad \forall x, y \in U. \quad (2.8)$$

La menor constante  $C$  tal que la desigualdad (2.8) sea válida para todo  $x, y \in U$  es denotado por  $\text{Lip}(f)$  y definido

$$\text{Lip}(f) = \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}; x, y \in U, x \neq y \right\}$$

**Definición 3.** Una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es llamada **localmente Lipschitziana** si para cada compacto  $K \subset U$ , existe una constante  $C_K$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C_K \|x - y\|,$$

para todo  $x, y \in K$ .

**Teorema 2.3.1. (Extensión de funciones Lipschitz)** Sean  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función Lipschitz, entonces existe una función  $\bar{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz tal que  $\bar{f}|_U = f$  y además

$$\text{Lip}(\bar{f}) \leq \sqrt{m} \text{Lip}(f).$$

**Demostración:** Consideremos primero  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos

$$\bar{f}(x) = \inf_{a \in U} \{f(a) + \text{Lip}(f)\|x - a\|\}.$$

Si  $b \in U$  entonces  $\bar{f}(b) = f(b)$ , esto dado que  $f$  es Lipschitz, entonces para todo  $a \in U$ ,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \text{Lip}(f)\|b - a\|,$$

y así

$$f(b) \leq f(a) + \text{Lip}(f)\|b - a\|,$$

por tanto  $f(b) \leq \bar{f}(b)$ , y es claro también que  $\bar{f}(b) \leq f(b)$ .

Ahora sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , definimos

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &\leq \inf_{a \in U} \{f(a) + \text{Lip}(f)(\|y - a\| + \|x - y\|)\}, \\ &= \bar{f}(y) + \text{Lip}(f)\|x - y\|, \end{aligned}$$

entonces

$$\bar{f}(x) - \bar{f}(y) \leq \text{Lip}(f)\|x - y\|,$$

análogamente

$$\bar{f}(y) \leq \bar{f}(x) + \text{Lip}(f)\|x - y\|,$$

así  $\bar{f}$  es una función Lipschitziana en todo  $\mathbb{R}^n$  por tanto una extensión para  $f$ .

Para el caso general, sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ , y definimos  $\bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m)$ , donde  $\bar{f}_i$  es la extensión Lipschitziana para  $f_i$  entonces

$$\|g(x) - g(y)\|^2 = \sum_{i=1}^m \|g_i(x) - g_i(y)\|^2 \leq m(\text{Lip}(f))^2 \|x - y\|^2,$$

de esta última desigualdad obtenemos que

$$\text{Lip}(\bar{f}) \leq \sqrt{m} \text{Lip}(f).$$

■

**Definición 4.** Definimos una **suavizante** en  $\mathbb{R}^n$  como una función  $j : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$  con  $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y que satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} j(x) dv_n(x) = 1.$$

Definimos, para  $\epsilon \in ]0, 1[$ .

$$j_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} j(x/\epsilon);$$

y para cualquier función localmente compacto en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , esto es,  $f \in L^1_{loc}$ , definimos la **función suavizante** de  $f$  como

$$f_\epsilon(x) = (j_\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\epsilon(y-x) f(y) dv_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\epsilon(y) f(x+y) dv_n(y).$$

**Proposición 2.3.1.**

1. Si  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\text{sopp}(j_\epsilon * u) = [\text{sopp } u]$ .
2. Si  $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $j_\epsilon * u \rightarrow u$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .
3. Si  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $j_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , y

$$(D^\alpha(j_\epsilon * u))(x) = (-1)^{|\alpha|} \int (D^\alpha j_\epsilon)(y-x) u(y) dv_n(y)$$

para cualquier multi-índice  $\alpha$ . Sin embargo, si  $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ , entonces para todo  $|\alpha| \leq k$  se tiene

$$D^\alpha(j_\epsilon * u) = j_\epsilon * (D^\alpha u).$$

4. Si  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , entonces

(a)  $j_\epsilon * u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,

(b)  $\|j_\epsilon * u\| \leq \|u\|_p$  para todo  $p \in [1, \infty]$ , y

(c)  $\|j_\epsilon * u - u\|_p \rightarrow 0$  para todo  $p \in [1, \infty[$ , cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Demostración:** [Ver [MNR04] Pag. 109] ■

**Teorema 2.3.2.** Sean  $f$  una función Lipschitz en  $\mathbb{R}^n$  con soporte compacto y sea  $f_\epsilon = j_\epsilon * f$  la función suavizante de  $f$ , entonces

$$\|j_\epsilon * f - f\|_p \rightarrow 0, \quad \|\nabla j_\epsilon * f - \nabla f\|_p \rightarrow 0,$$

para todo  $p \in [1, \infty[$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Demostración:** Dado que  $f$  es Lipschitz, la restricción de  $f$  a cualquier línea es absolutamente continua, así toda derivada parcial existe en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$ , y son acotadas con soporte compacto. Luego cada derivada parcial es un elemento de  $L^p$  para todo  $p \in [1, \infty]$ . También, la continuidad absoluta a lo largo de las líneas y la compacidad del soporte de  $f$  implica el Teorema Fundamental del Cálculo para cada derivada parcial, por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) dv_n(x) = 0,$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Entonces podemos usar el argumento de la Proposición [2.3.1] ítem (3) para mostrar

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(j_\epsilon * f) = j_\epsilon * \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

facilmente podemos obtener la conclusión del teorema. ■



## 2.4. Medida de Hausdorff

En esta sección daremos la definición de la medida de Hausdorff y algunas propiedades importantes.

**Definición 5.** Dado un subconjunto no vacío  $U \subset \mathbb{R}^n$ , se define el **diámetro** de  $U$  denotado por  $\text{diam}(U)$

$$\text{diam}(U) = \sup\{|x - y|; x, y \in U\},$$

**Definición 6.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$ , una colección de subconjuntos  $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$  se denomina  **$\delta$ -cubrimiento** de  $U$  si

1.  $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_j$ ,
2.  $\text{diam}(C_j) \leq \delta$  para todo  $j = 1, 2, \dots$ .

**Definición 7.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,  $0 < \delta \leq \infty$  y  $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$  un  $\delta$ -cubrimiento de  $A$ . Definimos la **medida aproximada  $s$ -dimensional Hausdorff** del conjunto  $A$

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s ; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\}$$

donde

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}, \quad (2.9)$$

y

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, (0 < s < \infty),$$

es la función Gamma.

**Definición 8.** Para  $A$  y  $s$  como anteriormente, definimos

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(A),$$

denominamos  $\mathcal{H}^s$  la **medida  $s$ -dimensional de Hausdorff** en  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación 2.**  $\mathcal{L}^n(\mathbb{B}^n) = \alpha(n)r^n$ , donde  $\mathbb{B}^n$  es una bola  $n$ -dimensional de radio  $r$ .

**Teorema 2.4.1.**  $\mathcal{H}^s$  es una medida de Borel Regular para  $0 \leq s < \infty$

**Demostración:** [Ver [EG92] Pag. 61] ■

**Teorema 2.4.2.** *Propiedades elementales de la medida Hausdorff*

1.  $\mathcal{H}^0$  es la medida de conteo.
2.  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$  en  $\mathbb{R}^1$ .
3.  $\mathcal{H}^s = 0$  en  $\mathbb{R}^n$  para todo  $s > n$ .
4.  $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$  para todo  $\lambda > 0, A \subset \mathbb{R}^n$ .

**Demostración:** [Ver [EG92] Pag. 63] ■

**Teorema 2.4.3.** *Supongamos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{H}_\delta^s(A) = 0$  para algún  $0 < \delta \leq \infty$ . Entonces  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ .*

**Demostración:** [Ver [EG92] Pag. 64] ■

**Teorema 2.4.4.** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $0 \leq s < t < \infty$ .*

1. Si  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ , entonces  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ .
2. Si  $\mathcal{H}^t(A) > 0$ , entonces  $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ .

**Demostración:** [Ver [EG92] Pag. 65] ■

**Definición 9.** *La **dimension de Hausdorff** de un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es definida por*

$$\mathcal{H}_{dim}(A) = \inf\{0 \leq s < \infty; \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

**Teorema 2.4.5.**  $\mathcal{H}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  coincide con la medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ . Un conjunto es  $\mathcal{H}^n$  medible si y sólo si es Lebesgue medible y ambas medidas son iguales en la clase de conjuntos medibles.

**Demostración:** [Ver [EG92] Pag. 65] ■

## 2.5. Fórmula de la co-área

En esta sección asumiremos siempre que  $n \geq m$  y que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función Lipschitz.

**Definición 10.** Si  $n \leq m$ , definimos

$$\Lambda(m, n) = \{\lambda : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}; \lambda \text{ es creciente}\}.$$

**Definición 11.** Para cada  $\lambda \in \Lambda(m, n)$ , definimos la **proyección**  $P_\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_m) = (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(n)}).$$

**Lema 2.5.1.** Sean  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación lineal,  $n \geq m$ ,  $y A \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -medible. Entonces la aplicación  $y \rightarrow \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})$  es  $\mathcal{L}^n$ -medible y

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\}) dy = \det(L) \mathcal{L}^n(A).$$

**Demostración:** [Ver [EG92] Pag. 104] ■

**Lema 2.5.2.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -medible y  $n \geq m$ . Entonces

- (1)  $f(A)$  es  $\mathcal{L}^m$ -medible,
- (2)  $A \cap f^{-1}\{y\}$  es  $\mathcal{H}^{n-m}$  medible para casi todo punto,  $\mathcal{L}^n$ -medible.
- (3) La aplicación  $y \rightarrow \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$  es  $\mathcal{L}^m$ -medible.
- (4)  $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy \leq (\alpha(n-m)\alpha(m))/\alpha(n) (\text{Lip}f)^m \mathcal{L}^n(A)$ .  
Donde  $\alpha$  esta definido anteriormente.

**Demostración:** [Ver [EG92] Pag. 105] ■

**Lema 2.5.3.** Sean  $t > 1$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función Lipschitz, y establecemos el conjunto

$$B = \{x; Dh(x) \text{ existe y } Jh(x) > 0\}.$$

Entonces existe una colección numerable  $\{D_k\}_{k=1}^\infty$  de subconjuntos Borel de  $\mathbb{R}^n$  tal que

- (1)  $\mathcal{L}^n(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k) = 0$ ;
- (2)  $h|_{D_k}$  es uno a uno para  $k = 1, 2, \dots$ ;  $y$
- (3) para cada  $k = 1, 2, \dots$ , existe un automorfismo simétrico  $S_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\begin{aligned} \text{Lip}(S_k^{-1} \circ (h|_{D_k})) &\leq t, & \text{Lip}((h|_{D_k})^{-1} \circ S_k) &\leq t \\ y \quad t^{-n} |\det S_k| &\leq Jh|_{D_k} t^n |\det S_k|. \end{aligned}$$

**Demostración:** [Ver [EG92] Pag. 110] ■

**Teorema 2.5.1. (Fórmula de la Co-área)** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lipschitz y  $n \geq m$ , entonces para cada  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  subconjunto  $\mathcal{L}^n$ -medible,

$$\int_A |Jf(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy,$$

donde  $|Jf(x)|$  denota el determinante del Jacobiano de la función  $f$ .

**Demostración:** Por el Lema [2.5.2], podemos asumir que  $Df(x)$ , y por tanto  $Jf(x)$  existe para todo  $x \in A$  y que  $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ .

**Caso 1.** Si  $A \subset \{Jf > 0\}$ : Para cada  $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$ , escribimos

$$f = q \circ h_\lambda,$$

donde

$$h_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, h_\lambda(x) \equiv (f(x), P_\lambda(x)) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

$$q : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m, q(y, z) \equiv y \quad (y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^{n-m}),$$

y  $P_\lambda$  es la proyección definida anteriormente. Sea

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \{x \in A; \det Dh_\lambda \neq 0\}, \\ &= \{x \in A; P_\lambda|_{[Df(x)]^{-1}(0)} \text{ es inyectiva}\}. \end{aligned}$$

Ahora,  $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(n, n-m)} A_\lambda$ ; por lo tanto podemos asumir por simplicidad  $A = A_\lambda$  para algunos  $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$ .

Fijando  $t > 1$  y aplicamos el Lema [2.5.3] a  $h = h_\lambda$  para obtener conjuntos de Borel disjuntos  $\{D_k\}_{k=1}^\infty$  y automorfismos simétricos  $\{S_k\}_{k=1}^\infty$  satisfaciendo los ítems (1)-(3).

Sea

$$G_k = A \cap D_k.$$

**Afirmación 2.**  $t^{-n} J_{q \circ S_k} \leq J_f|_{G_k} \leq t^n J_{q \circ S_k}.$

En efecto, dado que  $f = q \circ h$ , tenemos

$$\begin{aligned} Df &= q \circ Dh \\ &= q \circ S_k \circ S_k^{-1} \circ Dh \\ &= q \circ S_k \circ D(S_k^{-1} \circ h) \\ &= q \circ S_k \circ C, \end{aligned}$$

donde  $C = D(S_k^{-1} \circ h)$ .

Por el Lema [2.5.3],

$$t^{-1} \leq \text{Lip}(S_k^{-1} \circ h) = \text{Lip}(C) \leq t \text{ en } G_k. \quad (2.10)$$

Escribimos

$$\begin{aligned} Df &= S \circ O^*, \\ q \circ S_k &= T \circ P^*, \end{aligned}$$

para los automorfismos simétricos  $S, T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  y automorfismos ortogonales  $O, P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tenemos entonces

$$S \circ O^* = T \circ P^* \circ C. \quad (2.11)$$

Consecuentemente,  $S = T \circ P^* \circ C \circ O$ . Como  $G_k \subset A \subset \{Jf > 0\}$ ,  $\det S \neq 0$  y así  $\det T \neq 0$ .

Si  $v \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\begin{aligned} |T^{-1} \circ S_v| &= |P^* \circ C \circ Ov| \\ &\leq |C \circ Ov| \\ &\leq t|Ov|; \text{ por (2.10)} \\ &= t|v|. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(T^{-1} \circ S)(B(0, 1)) \subset B(0, t),$$

y así

$$Jf = |\det S| \leq t^n |\det T| = t^n J_{q \circ S_k}.$$

Análogamente, si  $v \in \mathbb{R}^m$ , tenemos de (2.11)

$$\begin{aligned} |S^{-1} \circ Tv| &= |O^* \circ C^{-1} \circ Pv| \\ &\leq |C^{-1} \circ Pv| \\ &\leq t|Pv|; \text{ por (2.10)} \\ &= t|v|, \end{aligned}$$

así

$$J_{g \circ S_k} = |\det T| \leq t^n |\det S| = t^n Jf.$$

Ahora usando el Lema [2.5.1] tenemos

$$t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy \leq t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy.$$

Puesto que

$$\mathcal{L}^n \left( A - \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \right) = 0,$$

podemos sumar en  $k$ , usando el Lema [2.5.2], y haciendo  $t \rightarrow 1^+$  concluimos

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy = \int_A Jf dx.$$

**Caso 2.**  $A \subset \{Jf = 0\}$ :

Fijando  $\epsilon > 0$  definimos

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, g(x, y) \equiv f(x) + \epsilon y,$$

$$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, p(x, y) \equiv y(x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m).$$

Entonces

$$Dg = (Df, \epsilon I)_{m \times (n+m)},$$

y

$$\epsilon^m \leq Jg = J_{Dg} = J_{Dg^*} \leq C\epsilon.$$

Observe que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \epsilon\omega\}) dy \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}^m \\ &= \frac{1}{\alpha(m)} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-1}(A \cap f^{-1}\{y - \epsilon\omega\}) dy d\omega. \end{aligned}$$

**Afirmación 3.** Fijando  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^m$  y sea  $B = A \times B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ . Entonces

$$B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{\omega\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \omega \notin B(0, 1), \\ (A \cap f^{-1}\{y - \epsilon\omega\}) \times \{\omega\}, & \text{si } \omega \in B(0, 1). \end{cases}$$

En efecto, tenemos  $(x, z) \in B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{\omega\}$  si y sólo si

$$x \in A, z \in B(0, 1), f(x) + \epsilon z = y, z = \omega,$$

si y sólo si

$$x \in A, z = \omega \in B(0, 1), f(x) = y - \epsilon\omega,$$

si y sólo si

$$\omega \in B(0, 1), (x, z) \in (A \cap f^{-1}\{y - \epsilon\omega\}) \times \{\omega\}.$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy \\ &= \frac{1}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{\omega\}) d\omega dy \\ &\leq \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^n(B \cap g^{-1}\{y\}) dy \\ &= \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_B J_g dx dz \\ &\leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} \mathcal{L}^n(A) \sup_B J_g \\ &\leq C \mathcal{L}^n(A) \epsilon. \end{aligned}$$

Haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$  obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy = 0 = \int_A |J_f| dx.$$

Para el caso general, escribimos  $A = A_1 \cup A_2$  donde  $A_1 \subset \{|J_f| > 0\}$ ,  $A_2 \subset \{|J_f| = 0\}$  y aplicamos los casos 1 y 2 anteriores. ■

Más aún podemos generalizar la fórmula de la Co-área para una función medible  $\Phi \geq 0$  definida en  $A$

$$\int_A \Phi(x) J_f \mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{f^{-1}(y)} \Phi(x) d\mathcal{H}^{n-m}(x) \right) d\mathcal{H}^m(y).$$

Veamos algunos ejemplos

**Ejemplo 1.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $Jf = |J_f(x)| = |\nabla f(x)|$ , tomando  $f(x) = |x|^2$ , tenemos que  $Jf(x) = 2|x|$  en todo punto de  $\mathbb{R}^n$  menos el origen, puesto que la imagen de  $f$  es  $[0, +\infty[$ , la fórmula de Co-área se escribe

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \mathcal{H}^n(x) = \int_0^\infty \left( \int_{\partial B(0,r)} \Phi(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dr.$$

Esto es la fórmula de integración en **coordenadas esféricas**.

**Ejemplo 2.** Consideremos ahora la proyección en las primeras  $m$  coordenadas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m < n$ .  $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ . Entonces  $Jf(x) = 1$ , y obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \Phi(x_1, \dots, x_n) d\mathcal{H}^{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n) \right) d\mathcal{H}^m(x_1, \dots, x_m).$$

Y esto es el **Teorema de Fubini**.

**Ejemplo 3.** Por último consideremos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  función Lipschitz y  $\Phi = 1$ , luego  $Jf = |\nabla f(x)|$ , y escribimos la fórmula de la Co-área

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\}) dt.$$



## 2.6. Elementos de cálculo y geometría de curvas

**Definición 12.** Llamamos *curva parametrizada* a una aplicación continua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $I$  es un intervalo cerrado, por ejemplo  $I = [a, b]$ .

Dada una partición

$$\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b\},$$

del intervalo  $[a, b]$ , denotemos con  $\ell_m(\alpha)$  la línea poligonal obtenida al unir los puntos  $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)$ .

La longitud de  $\ell_m(\alpha)$  es  $L_m = \sum_{i=1}^m \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$ , donde  $\|\cdot\|$

denota la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ .

La curva  $\alpha$  se dice que es **rectificable** cuando es finito el supremo de las longitudes de todas la líneas poligonales obtenidas de particiones del intervalo  $[a, b]$ . En este caso, este supremo es llamado la longitud de la curva  $\alpha$  y es denotado por  $L(\alpha)$ .

Si escribimos la curva  $\alpha$  en coordenadas de  $\mathbb{R}^2$ , existen funciones continuas tales que  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  para todo  $t \in [a, b]$ , si las funciones  $x$  e  $y$  son de clase  $C^1$ (por partes), diremos que la curva  $\alpha$  es de clase  $C^1$ (por partes). Curvas de clase  $C^1$  por partes admiten en los puntos diferenciables un vector velocidad

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Una curva de clase  $C^1$  por partes tiene como longitud la siguiente expresión

$$\ell(\alpha) = \int_0^l \|\alpha'(t)\| dt,$$

y la gráfica de la curva  $\alpha$  es un conjunto en el plano

$$\alpha([a, b]) = \{\alpha(t); t \in [a, b]\}.$$

**Proposición 2.6.1.** Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular. Existe  $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curva regular tal que  $\beta$  y  $\alpha$  tiene la misma gráfica en  $\mathbb{R}^2$  y  $\beta$  satisface  $\|\beta'(s)\| = 1$ , para cualquier  $s \in [0, l]$ .

Las curvas regulares  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con vector tangente que satisface  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , para cualquier  $t \in I$  son llamadas **parametrizadas por**

**longitud de arco**, la proposición anterior nos dice que todas las curvas regulares admiten una parametrización por longitud de arco.

Las curvas tienen una dirección normal bien definida a lo largo de ellas, de hecho en la dirección perpendicular a  $\alpha'(t)$ . Si  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , entonces un vector normal apunta en la dirección ortogonal a  $(x'(t), y'(t))$ , que es la dirección dada por  $(-y'(t), x'(t))$ , cuando  $\alpha$  es una curva parametrizada por longitud de arco, el campo vectorial

$$N(t) = N(\alpha(t)) = (-y'(t), x'(t)),$$

es unitario y normal a  $\alpha$  en  $\alpha(t)$ . Cuando  $\alpha$  es una curva parametrizada por longitud de arco de clase  $C^2$ , la derivada del campo normal  $N$  es dada por  $N'(t) = (-y''(t), x''(t))$ . Derivando con respecto a  $t$  la igualdad  $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$  obtenemos

$$x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) = 0,$$

y por tanto  $N'(t)$  es ortogonal a  $N(t)$ . Como  $N(t)$  es ortogonal tanto a  $\alpha'(t)$  como a  $N'(t)$  entonces  $N'(t)$  es paralelo a  $\alpha'(t)$ . Así, existe una constante (que depende de  $t$ )  $k(t)$ , llamada **curvatura** de  $\alpha$  en  $t$  tal que

$$N'(t) = -k(t)\alpha'(t).$$

**Definición 13.** Una curva  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es llamada **cerrada y simple**, o simplemente de **Jordan**, si  $\alpha(0) = \alpha(l)$  y  $\alpha$  es inyectiva en  $[0, l]$ . Una curva de Jordan delimita una región  $D$  del plano.

Al parametrizar una curva, acostumbramos orientarla en sentido antihorario, de modo que  $D$  quede a la izquierda de quien recorre la curva cuando  $t$  va creciendo. Es fácil mostrar que si  $\alpha$  es regular con esta orientación, entonces se tiene que  $-N(t) = (y', x')$  es normal exterior a  $D$ . Estas son orientaciones utilizadas en el Teorema de la divergencia.

## Capítulo 3

# Desigualdad isoperimétrica en el plano

En el plano consideraremos la desigualdad isoperimétrica donde el dominio tiene frontera de clase  $C^1$ , esto quiere decir que la frontera es una curva diferenciable. Pero en el plano también podemos considerar el problema isoperimétrico para otro tipo de dominios, de fronteras, más específicamente para polígonos, por ejemplo:

*Entre todos los triángulos de un mismo perímetro, encontrar aquel que encierre mayor área.*

Es claro que la respuesta es el triángulo equilátero, de la misma manera podemos formular el mismo problema para rectángulos, y podemos afirmar entonces

*Entre todos los rectángulos de un mismo perímetro, el cuadrado es el que encierra mayor área.*

Más aún, se generaliza este problema para polígonos de  $n$ -lados, con respuesta evidente un  $n$ -ágono regular, este resultado es debido a Zenodoro (200-140 a.C.) que podemos consultarla también en [CZ08].

Volviendo a nuestro problema original, para dominios de frontera suave, la primera prueba que daremos fue elaborada por E. Schmidt [SCH39] donde utiliza la teoría de curvas, esta prueba también puede verse en el libro del matemático brasileiro Manfredo Do Carmo [DC12], la segunda prueba que presentaremos es debido a A. Hurwitz [HUR01] que usa el análisis de Fourier, también podemos encontrar esta prueba en [TK16].

Para el caso del plano existen otras pruebas, para enunciar algunas, por Karl Weierstrass, H.A. Schwarz y P. Lax.

### 3.1. Prueba 1

**Lema 3.1.1.** *El área  $A$  de una región limitada por una curva cerrada, simple y orientada positivamente,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , está dada por*

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt.$$

**Demostración:** Usaremos el Teorema de Green en el plano que es un caso particular del Teorema de Stokes: Si  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial de clase  $C^1$ , definido por  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ , entonces

$$\int_{C^+} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

donde  $D$  es una región limitada por la curva  $C$ , orientada positivamente.

Dado que  $F(x, y) = (-y, x) \in C^1$ , se tiene

$$\int_{C^+} (-ydx + xdy) = \iint_D (1 - (-1))dxdy = \iint_D 2dxdy = 2\text{Área}(D)$$

Utilizando las hipótesis dadas, resulta

$$A = \text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_a^b (-yx' + xy')dt$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_a^b xy'dt &= \int_a^b [(xy)' - x'y]dt \\ &= \int_a^b (xy)'dt - \int_a^b x'ydt \\ &= [x(b)y(b) - x(a)y(a)] - \int_a^b x'ydt \\ &= - \int_a^b x'ydt, \end{aligned}$$

pues  $y(a) = y(b)$  y  $x(b) = x(a)$ . Lo que completa la demostración. ■

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $C$  una curva plana cerrada simple de longitud  $L$ , y  $A$  el área de la región que encierra  $C$ . Entonces*

$$L^2 \geq 4\pi A, \quad (3.1)$$

*y se verifica la igualdad si y solamente si  $C$  es un círculo.*

**Demostración:** Fijamos un sistema de coordenadas  $XY$ , consideremos  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas paralelas al eje  $Y$  que tocan de forma tangente por primera vez a la curva cerrada  $C$ , obtenemos dos rectas paralelas tangentes a la curva  $C$ , de modo que la curva está totalmente contenida en la región limitada por las rectas paralelas  $L_1$  y  $L_2$ .

Consideremos también un círculo  $S^1$  que sea tangente a  $L_1$  y  $L_2$  y no interseca a la curva  $C$ . Denotemos con  $O$  el centro de  $S^1$  y consideremos el sistema de coordenadas cartesianas con origen en  $O$  y eje  $OX$  perpendicular a  $L_1$  y  $L_2$  (Ver figura [3.1]).

Parametrizando la curva  $C$  por longitud de arco,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , de modo que  $C$  tenga orientación positiva y los puntos de tangencia con  $L_1$  y  $L_2$  sean respectivamente,  $s = 0$  y  $s = s_1$ .

Podemos suponer que la ecuación de  $S^1$  es

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), s \in [0, l].$$

usando el Lema [3.1.1] y denotando por  $\bar{A}$  el área de la región limitada por  $S^1$ , tenemos

$$A = \int_0^l xy' ds, \quad \bar{A} = \pi R^2 = - \int_0^l \bar{y}x' ds.$$

Sea  $2r$  la distancia entre  $L_1$  y  $L_2$ , así

$$\begin{aligned} A + \pi R^2 &= \int_0^l (xy' - \bar{y}x') ds, \\ &= \int_0^l [(x', y') \cdot (-\bar{y}, x)] ds, \\ &\leq \int_0^l |\alpha'| |\bar{\alpha}| ds, \\ &= \int_0^l |\bar{\alpha}| ds = lr, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y la igualdad se verifica si y sólo si  $\alpha'$  es múltiplo de  $\bar{\alpha}$ , es decir,

$$\alpha' = \frac{1}{r}(-\bar{y}, x),$$

en particular, la igualdad implica que  $y' = \frac{1}{r}x$ .

Usando la desigualdad geométrica-aritmética (Proposición [2.2.2]) para dos números junto con (3.2), tenemos

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi R^2) \leq \frac{1}{2}lr. \quad (3.3)$$

luego

$$4\pi AR^2 \leq l^2 R^2,$$

es decir la desigualdad isoperimétrica (3.1).

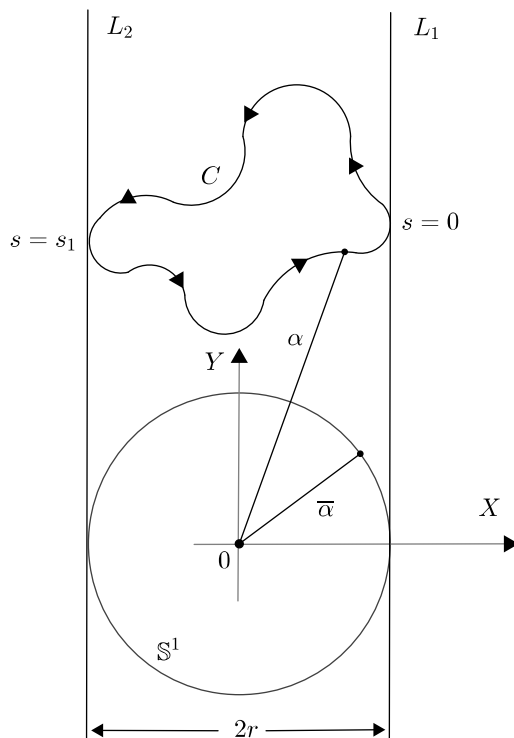


Figura 3.1: Construcción de E. Schmidt.

Claramente si  $C$  es un círculo tenemos la igualdad en (3.1), supongamos ahora que es válida la igualdad en (3.1), por tanto tenemos

las igualdades en (3.2) y (3.3), de esta última igualdad tenemos que  $A = \pi R^2$  y así  $l = 2\pi r^2$  y  $r$  no depende de la elección de la dirección de  $L_1$ .

Por otro lado de la igualdad en (3.2) tenemos  $y' = \frac{1}{r}x$ , nuevamente como  $r$  no depende de la elección de la dirección de  $L_1$  podemos efectuar la misma construcción con rectas perpendiculares a  $L_1$ , luego  $x' = \frac{1}{r}y$ .

Por lo tanto

$$1 = (x')^2 + (y')^2 = \frac{1}{R^2}(x^2 + y^2),$$

y así la curva  $C$  es un círculo. ■

## 3.2. Prueba 2

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $C$  una curva cerrada simple rectificable de longitud  $L$  que limita una región de área  $A$ , entonces*

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

*Además la igualdad es alcanzada si y solamente si la curva  $C$  es un círculo.*

**Demostración:** Sea  $C$  una curva cerrada simple de clase  $C^1$  por partes de longitud  $L$  que limita una región de área  $A$ , consideremos una parametrización por longitud de arco  $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  podemos reparametrizar nuevamente la curva  $C$  de tal manera que esté definida en el intervalo  $[0, 1]$  y así  $x'^2(t) + y'^2(t) = L^2$  para todo  $t \in [0, 1]$  excepto en un número finito de puntos.

Tomando la expansión en series de Fourier para cada una de las funciones  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \operatorname{sen} 2n\pi t), \\ y(t) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos 2n\pi t + d_n \operatorname{sen} 2n\pi t). \end{aligned}$$

Analogamente, las derivadas de estas funciones escritas en series de Fourier.

$$\begin{aligned}x'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi(-a_n \operatorname{sen} 2n\pi t + b_n \operatorname{cos} 2n\pi t), \\y'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi(-c_n \operatorname{sen} 2n\pi t + d_n \operatorname{cos} 2n\pi t).\end{aligned}$$

Aplicamos la identidad de Parseval a las funciones  $x'$  y  $y'$ , obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\pi^2(a_n^2 + b_n^2) &= 2 \int_0^1 |x'(t)|^2 dt, \\ \sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\pi^2(c_n^2 + d_n^2) &= 2 \int_0^1 |y'(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

sumando estas últimas igualdades tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2\pi^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = \int_0^1 |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 dt = L^2.$$

Por otro lado, del Lema [3.1.1] el área está dado por  $A = \frac{1}{2} \int_0^1 x(t)y'(t)dt$ , esto implica que

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi(a_n d_n - b_n c_n).$$

luego,

$$\begin{aligned}&L^2 - 4\pi A \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ((na_n)^2 + (nb_n)^2 + (nc_n)^2 + (nd_n)^2 - 2na_n d_n + 2nb_n c_n) \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ((na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + c_n^2(n^2 - 1) + d_n^2(n^2 - 1)) \geq 0,\end{aligned}$$

que es la desigualdad isoperimétrica.

Además, si la igualdad es alcanzada, es decir  $L^2 = 4\pi A$  si y solamente si  $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$  para  $n > 1$ , esto por la desigualdad precedente.



Por tanto la sumatoria es de la forma  $(a_1 - d_1)^2 + (b_1 + c_1)^2 = 0$ , luego denotando con  $p = a_1 = d_1$  y  $-q = b_1 = -c_1$ , las funciones  $x$  e  $y$ , toman la forma

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{a_0}{2} + p \cos(2\pi t) - q \operatorname{sen}(2\pi t), \\y(t) &= \frac{c_0}{2} + q \cos(2\pi t) + p \operatorname{sen}(2\pi t).\end{aligned}$$

así

$$\left(x(t) - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y(t) - \frac{c_0}{2}\right)^2 = p^2 + q^2.$$

que corresponde a un círculo centrado en  $(a_0/2, c_0/2)$  de radio  $\sqrt{p^2 + q^2}$ .

■

## Capítulo 4

# Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Las pruebas dadas en el capítulo anterior debido a que utilizamos propiedades del plano, no pueden extenderse al espacio euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$ , en estos espacios necesitaremos de otras herramientas ya que el problema se complica por ejemplo en la unicidad, como cita M. Telichevesky y P. Klaser en [TK16] a M. Berguer [BER03].

*El plano es la única superficie donde la unicidad de la solución del problema isoperimétrico es fácil de probar. Existe una buena razón para esperar esto: Solo en dimensión 3, la unicidad puede ser falsa. Imagine una esfera en el espacio, y adicione a ella “cabellos”, osea, curvas (para adentro o para fuera, da igual). El área de la superficie no se altera, tampoco el volumen encerrado por ella, y por tanto la esfera “cabelluda” también es solución! Entonces la unicidad solo puede ser esperada si adicionamos algunas hipótesis, como por ejemplo pedir la regularidad o convexidad (ambas no son satisfechas por la esfera cabelluda).*

M. Berguer concluye diciendo que *de esta simple observación podemos entender las interrogantes que envuelven problemas isoperimétricos están usualmente fuera de los currículos matemáticos.*

La prueba que daremos en esta sección es debido al Teorema Federer-Fleming y para el caso de la igualdad la hipótesis a considerar será que el dominio sea convexo con frontera de clase  $C^1$ .

Es claro también que existen muchas otras pruebas para el caso  $n$ -dimensional donde se usan diferentes herramientas. Nuestro resultado principal a probar en este trabajo es el siguiente.

**Teorema 4.0.2.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ , con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^1$ . Entonces*

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{1-1/n}} \geq \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|\mathbb{B}^n|^{1-1/n}},$$

donde  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$  y  $\mathbb{B}^n$  denota la bola unitaria  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ .

Denotemos con  $\omega_n = |\mathbb{B}^n|$  y  $c_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}|$ , tenemos la siguiente relación

$$c_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad \omega_n = \frac{c_{n-1}}{n},$$

donde  $\Gamma(x)$  denota la función gamma, reescribiendo la desigualdad isoperimétrica en términos de estas constantes obtenemos

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{1-1/n}} \geq n\omega_n^{1/n}.$$

En este capítulo daremos una prueba de esta desigualdad y mostraremos también que bajo ciertas condiciones adicionales para el dominio  $\Omega$  la igualdad es alcanzada si y solamente si  $\Omega$  es una bola  $n$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$ .

A lo largo de este capítulo, un dominio se referirá a un conjunto abierto y conexo, también hemos restringido el problema isoperimétrico a dominios en  $\mathbb{R}^n$ ; pero si pudieramos resolver este problema, para un número finito de dominios acotados seguirá fácilmente de la solución para los dominios individuales. De hecho, asumiendo que uno tiene la desigualdad para dominios en  $\mathbb{R}^n$ . Si

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_m,$$

donde cada  $\Omega_j$  es un dominio relativamente compacto (es decir, la cerradura de  $\Omega_j$  es compacto) en  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$\overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_k} = \emptyset, \quad \text{para cualesquiera } j \neq k,$$

entonces la desigualdad de Minkowski implica

$$|\Omega|^{1-1/n} \leq \sum_{j=1}^m |\Omega_j|^{1-1/n} \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \sum_{j=1}^m |\partial\Omega_j| = \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} |\partial\Omega|.$$

Así, la desigualdad isoperimétrica se extiende a una unión finita de dominios, observe que la igualdad implica que  $\Omega$  sea un dominio. Debemos

tener en cuenta también que para cualquier dominio  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^n$ , su volumen es la  $n$ -medida dimensional de Lebesgue, y si  $\partial\Omega \in C^1$ , entonces el área de  $\partial\Omega$  está dada por la superficie de una hipersuperficie diferenciable en  $\mathbb{R}^n$ .

Daremos algunas definiciones y resultados previos que utilizaremos más adelante.

## 4.1. Federer - Fleming

**Definición 14.** Se define la *constante isoperimétrica*  $\mathcal{J}$  de  $\mathbb{R}^n$  como

$$\mathcal{J} = \inf_{\Omega} \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{1-1/n}},$$

donde  $\Omega$  varía sobre los dominios acotados en  $\mathbb{R}^n$  con frontera de clase  $C^1$ .

**Definición 15.** Se define la *constante Sóbolev*  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{R}^n$  como

$$\mathcal{G} = \inf_f \frac{\|\nabla f\|_1}{\|f\|_{n/(n-1)}},$$

donde  $f$  varía sobre  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 4.1.1. (Federer-Fleming)** Las constantes, isoperimétrica y Sóbolev son iguales, es decir.

$$\mathcal{J} = \mathcal{G}.$$

**Demostración:** Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  con frontera de clase  $C^1$ . Para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño consideramos la función (Ver figura [4.1]).

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega, \\ 1 - \frac{1}{\epsilon}d(x, \partial\Omega), & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \quad d(x, \partial\Omega) < \epsilon, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \quad d(x, \partial\Omega) \geq \epsilon. \end{cases}$$

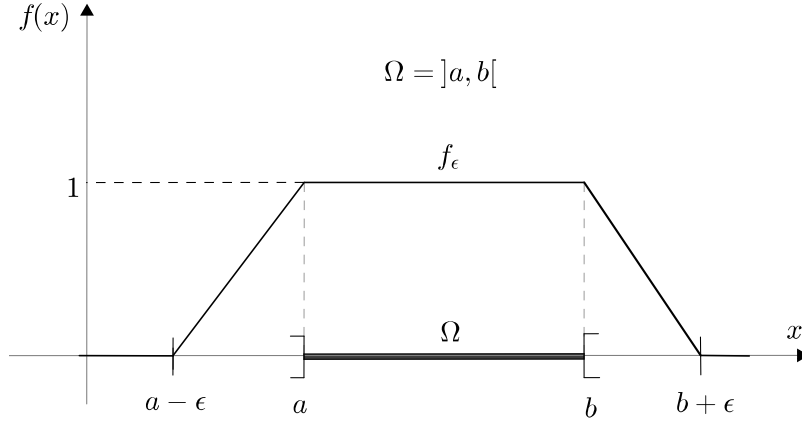


Figura 4.1: La función  $f_\epsilon$  para  $\Omega = ]a, b[$

Claramente  $f_\epsilon$  es Lipschitz para cada  $\epsilon > 0$ , y por Teorema [2.3.2] podemos aproximar  $f_\epsilon$ , por funciones  $\phi_{\epsilon,j} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|\phi_{\epsilon,j} - f_\epsilon\|_{n/(n-1)} \rightarrow 0, \quad \|\nabla\phi_{\epsilon,j} - \nabla f_\epsilon\|_1 \rightarrow 0,$$

cuando  $j \rightarrow \infty$ . Por otro lado, por definición de  $\mathcal{G}$ , tenemos

$$\mathcal{G} \leq \frac{\|\nabla f_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_{n/(n-1)}},$$

y uno puede comprobar

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\epsilon|^{n/(n-1)} dV = |\Omega|, \quad (4.1)$$

también, como  $\partial\Omega$  es cerrado, existe  $\bar{x} \in \partial\Omega$  tal que  $d(x, \partial\Omega) = d(x, \bar{x})$ , donde  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  luego dado  $j = 1, \dots, n$  tenemos

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial x_j}(x) = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{(x_j - \bar{x}_j)}{d(x, \bar{x})},$$

por tanto,

$$|\nabla f_\epsilon| = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \quad d(x, \partial\Omega) < \epsilon, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

integrando y tomando límite, tenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\epsilon| dV = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\{x \notin \Omega : d(x, \partial\Omega) < \epsilon\}|}{\epsilon} = |\partial\Omega|, \quad (4.2)$$

observe que la última igualdad es debido a la definición de área Minkowski, para más detalles ver [CHA93], así de (4.1) y (4.2) tenemos

$$\mathcal{G} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|\nabla f_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_{n/(n-1)}} = \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{1-1/n}},$$

con respecto a todos los dominios  $\Omega$ , del cual concluimos

$$\mathcal{G} \leq \mathcal{J},$$

resta probar la desigualdad contraria, es decir  $\mathcal{J} \leq \mathcal{G}$  o equivalentemente

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dV \geq \mathcal{J} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{n/(n-1)} dV \right\}^{1-1/n}, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Para ello, sea  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y definimos los siguientes conjuntos

$$\Omega_t = \{x : |f|(x) > t\},$$

denotamos con  $|\Omega_t|$  el volumen de  $\Omega_t$ . Ahora utilizando la fórmula de la co-área, implica

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dV = \int_0^\infty \||f|^{-1}(t)| dt \geq \mathcal{J} \int_0^\infty |\Omega_t|^{1-1/n} dt,$$

y por el Teorema de Fubini tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{n/(n-1)} dV = \frac{n}{n-1} \int_0^\infty t^{1/(n-1)} |\Omega_t| dt,$$

de estas últimas igualdades es suficiente probar que

$$\int_0^\infty |\Omega_t|^{1-1/n} dt \geq \left\{ \frac{n}{n-1} \int_0^\infty t^{1/(n-1)} |\Omega_t| dt \right\}^{1-1/n}, \quad (4.3)$$

para esto consideremos

$$G(s) = \int_0^s |\Omega_t|^{1-1/n} dt, \quad F(s) = \left\{ \frac{n}{n-1} \int_0^s t^{1/(n-1)} |\Omega_t| dt \right\}^{1-1/n},$$

claramente

$$G(0) = F(0),$$

también, puesto que  $|\Omega_t|$  es una función decreciente en la variable  $t$ , tenemos

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{n-1}{n} \left[ \frac{n}{n-1} \right]^{1-1/n} \left\{ \int_0^s t^{1/(n-1)} |\Omega_t| dt \right\}^{-1/n} s^{1/(n-1)} |\Omega_s|, \\ &\leq \left[ \frac{n}{n-1} \right]^{-1/n} \left\{ \int_0^s t^{1/(n-1)} dt \right\}^{-1/n} s^{1/(n-1)} |\Omega_s|^{1-1/n}, \\ &= |\Omega_s|^{1-1/n}, \\ &= G'(s). \end{aligned}$$

Por tanto, para todo  $s \geq 0$ , tenemos

$$F'(s) \leq G'(s) \text{ y } F(0) = G(0) = 0,$$

luego

$$F(s) \leq G(s), \text{ para todo } s \geq 0.$$

Tomando límite  $s \rightarrow +\infty$  obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s),$$

por tanto (4.3) es válido y así  $\mathcal{J} \leq \mathcal{G}$ . ■

**Teorema 4.1.2.** *Dado cualquier  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , se cumple*

$$|\nabla|\phi|| = |\nabla\phi|, \tag{4.4}$$

para casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración:** Primero, en el conjunto abierto  $\{\phi > 0\}$  tenemos  $|\phi| = \phi$ , y en el conjunto abierto  $\{\phi < 0\}$  tenemos  $|\phi| = -\phi$ , luego en ambos casos la igualdad (4.4) es válida.

Además,  $\{\phi = 0\} \cap \{\nabla\phi \neq 0\}$  es una superficie  $(n-1)$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ , esto implica que el volumen  $n$ -dimensional de  $\{\phi = 0\} \cap \{\nabla\phi \neq 0\}$  es cero, luego en este caso (4.4) nuevamente es válida.

Queda por considerar qué sucede en el caso cuando  $\phi = 0$  y  $\nabla\phi = 0$ . Consideremos para  $\epsilon > 0$ , la función

$$\phi_\epsilon = \sqrt{\phi^2 + \epsilon^2},$$

entonces  $\phi_\epsilon \rightarrow |\phi|$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , y  $\nabla\phi_\epsilon \rightarrow \pm\nabla\phi$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  si  $\phi \neq 0$ .

Cuando  $\phi = 0$ , entonces  $\nabla\phi_\epsilon = 0$ ; por tanto  $\nabla\phi_\epsilon \rightarrow \nabla\phi$  cuando  $\phi = 0$  y  $\nabla\phi = 0$ . Una integración por partes implica que  $\nabla\phi_\epsilon$  converge a la derivada débil de  $|\phi|$  en  $W^{1,1}$ , que es  $\nabla|\phi|$ . ■

Ahora estamos listos para mostrar el Teorema principal de este trabajo.

## 4.2. La desigualdad isoperimétrica

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ , con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^1$ . Entonces*

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{1-1/n}} \geq n\omega_n^{1/n} = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|\mathbb{B}^n|^{1-1/n}}, \quad (4.5)$$

donde  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$  y  $\mathbb{B}^n$  denota la bola unitaria  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración:** De las definiciones de constante isoperimétrica de  $\mathbb{R}^n$  y la constante Sóbolev de  $\mathbb{R}^n$  es suficiente mostrar que

$$\|\nabla f\|_1 \geq n\omega_n^{1/n} \|f\|_{n/(n-1)}, \quad \text{para cualquier } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (4.6)$$

En efecto, si la desigualdad anterior es válida, entonces

$$\frac{\|\nabla f\|_1}{\|f\|_{n/(n-1)}} \geq n\omega_n^{1/n}, \quad \text{para cualquier } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

luego, por el Teorema Federer-Fleming [4.1.1]

$$\mathcal{J} = \mathcal{G} \geq n\omega_n^{1/n},$$

y por tanto

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{1-1/n}} \geq n\omega_n^{1/n},$$

para todo  $\Omega$  dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^1$  que es la desigualdad deseada.



Consideremos primero  $\mathcal{C} = [0, 1]^n$ , el  $n$ -cubo unitario en  $\mathbb{R}^n$ , y para una función no negativa  $\mu \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ , consideremos las funciones

$$u^j : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$$

definidos por

$$u^j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_j \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \mu(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) d\xi_{j+1} \cdots d\xi_n,$$

para  $j = 1, \dots, n$ .

Consideremos también la función  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{C}$  definidas por

$$\eta^j(x) = \frac{1}{u^j(x)} \int_{-\infty}^{x_j} d\xi_j \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \mu(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) d\xi_{j+1} \cdots d\xi_n,$$

se cumple

$$\frac{\partial \eta^j}{\partial x_j}(x) = \frac{u^{j+1}}{u^j}(x),$$

y como una consecuencia de lo anterior tenemos

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial \eta^2}{\partial x_2}(x) = \cdots = \frac{\partial \eta^n}{\partial x_n}(x),$$

donde consideramos  $u^{n+1}(x) = \mu(x)$ .

Por otro lado observamos que  $\eta^j$  depende de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$  por lo que la matriz Jacobiana  $J_\eta(x)$  es triangular inferior, luego

$$\det J_\eta(x) = \prod_{j=1}^n \frac{\partial \eta^j}{\partial x_j}(x) = \frac{u^{n+1}}{u_1}(x). \quad (4.7)$$

También,

$$u^1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mu(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_2 \cdots d\xi_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x) dx,$$

así reescribiendo (4.7)

$$\det J_\eta(x) = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x) dx \right\}^{-1} \mu(x). \quad (4.8)$$

Consideremos un caso especial,  $\Omega = \mathbb{B}^n$  dominio convexo y acotado en  $\mathbb{R}^n$  con frontera de clase  $C^1$ ,  $\mu = 1_\Omega$  la función característica del dominio  $\Omega$  y denotamos con  $\Phi$  a su respectivo  $\eta$  definido anteriormente (Observe que  $1_\Omega \notin C_c^1(\mathbb{R}^n)$  sin embargo tanto  $u^j$  como  $\eta^j$  están bien definidos desde que  $\Omega$  es un dominio acotado).

En general cuando  $\Omega$  es un dominio convexo y acotado en  $\mathbb{R}^n$   $\eta \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , derivando  $\eta$  y usando la convexidad tenemos que  $\eta$  es Lipschitz por tanto  $C^0(\overline{\Omega})$  (Ver [KNO57]).

Ahora por (4.8) tenemos

$$\det J_\Phi(x) = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} 1_\Omega(x) dx \right\}^{-1} 1_\Omega(x) = \omega_n^{-1}.$$

Claramente  $\Phi$  es un difeomorfismo, así  $\Phi : \overline{\mathbb{B}^n} \rightarrow \mathcal{C}$  y  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{C}$  luego

$$\zeta = \Phi^{-1} \circ \eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{B}^n}.$$

Es claro que  $|\zeta| \leq 1$  y vamos a pensar  $\zeta$  como una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\overline{\mathbb{B}^n}$ , entonces puesto que  $\det J_\zeta(x) = \det J_{\Phi^{-1}} \cdot \det J_\eta$  y (4.8) tenemos

$$\det J_\zeta(x) = \omega_n \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x) dx \right\}^{-1} \mu(x) \leq \left\{ \frac{\operatorname{div} \zeta}{n} \right\}^n (x), \quad (4.9)$$

observe que hemos aplicado aquí la desigualdad aritmética-geométrica (Proposición [2.2.2]). Ahora vamos aplicar lo anterior para alguna función no negativa  $f \in C_c^\infty$ , consideremos

$$\mu = f^{n/(n-1)} = f^1 f^{1/(n-1)} = f \mu^{1/n},$$

esto es,

$$\mu(x) = f(x) \mu(x)^{1/n},$$

por otro lado de la desigualdad (4.9) despejamos  $\mu(x)$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \mu(x) &\leq \{n\omega_n^{1/n}\}^{-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x) dx \right\}^{1/n} (f \operatorname{div} \zeta)(x), \\ &= \frac{\|f\|_{n/(n-1)}^{1/(n-1)}}{n\omega_n^{1/n}} \{ \operatorname{div} f \zeta - \nabla f \cdot \zeta \}(x), \end{aligned}$$

en la última igualdad hemos usado la identidad  $f \operatorname{div} \zeta + \nabla f \cdot \zeta = \operatorname{div} f \cdot \zeta$ , luego

$$\|f\|_{n/(n-1)} \leq \frac{-1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \cdot \zeta dV \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dV, \quad (4.10)$$

esta es la desigualdad (4.6) para funciones no negativas  $f \geq 0$ .

Demostraremos ahora para el caso general, dado  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$  entonces Lipschitz con soporte compacto, consideremos la función  $F_\epsilon = j_\epsilon * |f| \geq 0$ . Entonces (4.10) implica

$$\|F_\epsilon\|_{n/(n-1)} \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla F_\epsilon| dV,$$

haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$ ; y por el Teorema [2.3.2] obtenemos

$$\|f\|_{n/(n-1)} \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |f|| dV.$$

Ahora por el Teorema [4.1.2] es decir  $|\nabla |f|| = |\nabla f|$ , concluimos

$$\|f\|_{n/(n-1)} \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dV.$$

■

### 4.3. Caso de la igualdad

Ahora vamos a considerar el caso de la igualdad en la desigualdad isoperimétrica, es decir en la ecuación (4.5). Primeramente veamos como actua la función  $\eta$  definida anteriormente, para  $\Omega = \mathbb{B}^3$  que es un dominio convexo y acotado en  $\mathbb{R}^3$  con frontera de clase  $C^1$  y  $\mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\mu = 1_\Omega$  la función característica de este dominio  $\Omega$ , luego

$$\begin{aligned}
 u^1(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}^2} 1_\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} 1_\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
 &= V_3(\Omega) \\
 \eta^1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{u^1(x_1, x_2, x_3)} \int_{-\infty}^{x_1} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}^2} 1_\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3 \\
 &= \frac{V_3(\Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; \xi_1 < x_1\})}{V_3(\Omega)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Volumen sombreado} = \eta^1 \cdot V_3(\Omega) = \eta^1 \cdot u^1$$

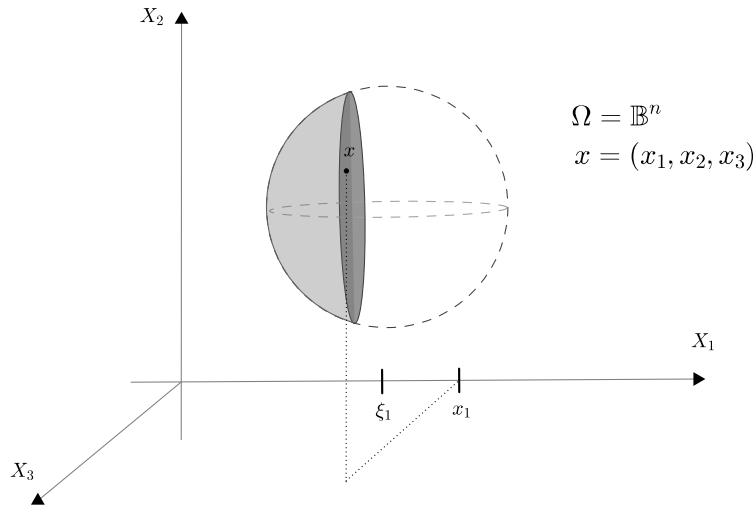


Figura 4.2: Las funciones  $\eta^1$  y  $u^1$

$$\begin{aligned}
u^2(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_{\mathbb{R}^1} 1_{\Omega}(x_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\Omega}(x_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3 \\
&= V_2(\Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = \xi_1\}) \\
\eta^2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{u^2(x_1, x_2, x_3)} \int_{-\infty}^{x_2} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}} 1_{\Omega}(x_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 \\
&= \frac{V_2(\Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = \xi_1, x_2 < \xi_2\})}{V_2(\Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = \xi_1\})}
\end{aligned}$$

$$\text{Área sombreada} = \eta^2 \cdot V_2(\Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = \xi_1\}) = \eta^2 \cdot u^2$$

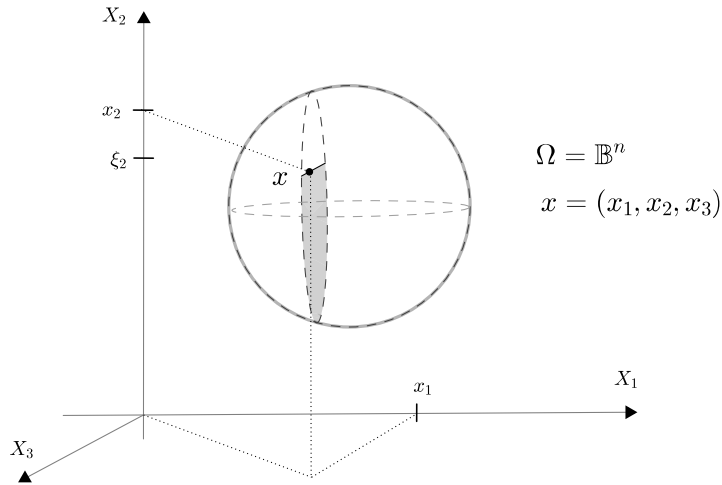


Figura 4.3: Las funciones  $\eta^2$  y  $u^2$

$$\begin{aligned}
u^3(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_3 1_{\Omega}(x_1, x_2, \xi_3) \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_{\Omega}(x_1, x_2, \xi_3) d\xi_3 \\
&= V_1(\Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2\}) \\
\eta^3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{u^3(x_1, x_2, x_3)} \int_{-\infty}^{x_3} d\xi_3 1_{\Omega}(x_1, x_2, \xi_3) \\
&= \frac{V_1(\Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, x_3 < \xi_3\})}{V_1(\Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2\})}
\end{aligned}$$

*Longitud del segmento*  $= \eta^3 \cdot V_1(\Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2\}) = \eta^3 \cdot u^3$

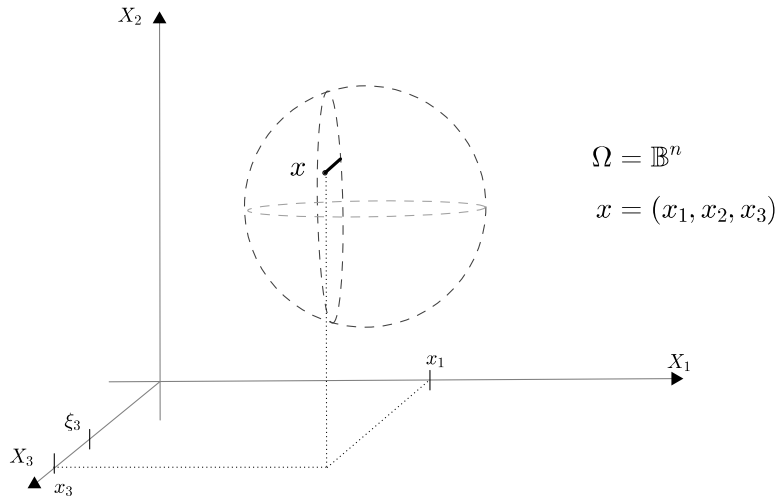


Figura 4.4: Las funciones  $\eta^3$  y  $u^3$

Generalizando para  $\Omega$  un dominio convexo y acotado en  $\mathbb{R}^n$  con frontera de clase  $C^1$ , y  $\mu = 1_{\Omega}$  la función característica del dominio  $\Omega$

$$\begin{aligned}
u^1(x) &= V_n(\Omega), \\
\eta^1(x) &= \frac{V_{n-1}(\Omega \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 < x_1\})}{V_n(\Omega)},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u^2(x) &= V_{n-1}(\Omega \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi_1 = x_1\}), \\ \eta^2(x) &= \frac{V_{n-1}(\Omega \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 = x_1, \xi_2 < x_2\})}{V_{n-1}\Omega \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi_1 = x_1\}}, \end{aligned}$$

y más generalmente,

$$\begin{aligned} u^j(x) &= V_{n-j+1}(\Omega \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{j-1} = x_{j-1}\}), \\ \eta^j(x) &= \frac{V_{n-j+1}(\Omega \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{j-1} = x_{j-1}, \xi_j < x_j\})}{V_{n-j+1}(\Omega \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{j-1} = x_{j-1}\})}, \end{aligned}$$

Se prueba también  $\eta \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , y podemos extender  $J_\eta(x)$  a una matriz de funciones continuas en  $\overline{\Omega}$ .

Ya hemos visto como actúa la función  $\eta$  en  $\mathbb{B}^n$ , para ver el caso de la igualdad vamos a repetir el argumento hecho para la desigualdad. Dado  $x \in \Omega$ , claramente puesto que  $\mu(x) = 1_\Omega(x)$ , la desigualdad (4.9) toma la forma siguiente

$$1 \leq \frac{|\Omega|^{1/n}}{n\omega_n^{1/n}} \operatorname{div} \zeta(x), \quad (4.11)$$

integrando sobre  $\Omega$ , usando Teorema de la Divergencia y el hecho que  $|\zeta| \leq 1$  tenemos

$$|\Omega| \leq \frac{|\Omega|^{1/n}}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\partial\Omega} \zeta \cdot \nu dA \leq \frac{|\Omega|^{1/n}}{n\omega_n^{1/n}} |\partial\Omega|, \quad (4.12)$$

que es la versión original de la desigualdad isoperimétrica.

Ahora, si tenemos la igualdad en (4.12), entonces tenemos la igualdad en (4.9) y en (4.11), luego

$$\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_j} = \left\{ \frac{\omega_n}{|\Omega|} \right\}^{1/n}; \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{en todo } \Omega,$$

en efecto, de (4.9) tenemos que

$$\begin{aligned} \det J_\zeta &= \det J_{\Phi^{-1}} \det J_\eta \\ &= \omega_n \det J_\eta \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_j} = \omega_n \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j},$$

por tanto

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial x_1} = \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial \zeta^n}{\partial x_n},$$

ahora usando (4.11) concluimos

$$\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_j} = \left\{ \frac{\omega_n}{|\Omega|} \right\}^{1/n}.$$

Del mismo modo, nuevamente si tenemos la igualdad en (4.12) tenemos

$$\zeta|_{\partial\Omega} = \left\{ \frac{\omega_n}{|\Omega|} \right\}^{1/n} \nu; \quad \text{en todo } \partial\Omega.$$

Ahora por conveniencia vamos asumir que  $|\Omega| = \omega_n$  y así  $\omega_n/|\Omega| = 1$ , luego reescribiendo tenemos

$$\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_j} = 1; \quad j = 1, \dots, n \text{ en todo } \Omega. \quad (4.13)$$

$$\zeta|_{\partial\Omega} = \nu; \quad \text{en todo } \partial\Omega. \quad (4.14)$$

De la igualdad (4.13) y el hecho que la matriz jacobiana de  $\zeta$  es triangular inferior, tenemos

$$\zeta^j = x_j + \alpha^j(x_1, \dots, x_{j-1}), \text{ para todo } j = 1, \dots, n$$

donde observamos que para  $j = 1$ ,  $\alpha^1$  es constante.

Por otro lado en la frontera de  $\Omega$ , puesto que  $\zeta|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , tenemos

$$1 = \sum_{j=1}^n (\zeta^j)^2,$$

luego

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n \zeta^j d\zeta^j, \\ &= \sum_{j=1}^n \zeta^j \left\{ dx_j + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha^j}{\partial x_k} dx_k \right\}, \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \zeta^j + \sum_{k=j+1}^n \zeta^k \frac{\partial \alpha^k}{\partial x_j} \right\} dx_j. \end{aligned}$$



Por otro lado de (4.14) tenemos  $\sum_{j=1}^n \zeta^j dx_j = 0$ , entonces

$$\zeta^j + \sum_{k=j+1}^n \zeta^k \frac{\partial \alpha^k}{\partial x_j} = \zeta^j, \text{ para todo } j = 1, \dots, n.$$

Luego

$$\sum_{k=j+1}^n \zeta^k \frac{\partial \alpha^k}{\partial x_j} = 0, \text{ para todo } j = 1, \dots, n.$$

En particular para  $j = n - 1$  tenemos  $\zeta^n \frac{\partial \alpha^n}{\partial x_{n-1}} = 0$ , Así

$$\frac{\partial \alpha^n}{\partial x_{n-1}} = 0,$$

en los puntos de  $\partial\Omega$  tal que  $\zeta^n \neq 0$ , por tanto  $\alpha^n$  ahora solo depende de  $x_1, \dots, x_{n-2}$ .

Vamos a fijar  $x_1, \dots, x_{n-2}$  y reescribimos

$$\zeta(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) + (\alpha^1, \alpha^2(x_1), \dots, \alpha^n(x_1, \dots, x_{n-2})) \quad (4.15)$$

Esto implica que el lugar geométrico

$$\{x_j = \text{constante} : j = 1, \dots, n - 2\} \cap \partial\Omega$$

es un círculo.

De la ecuación (4.15) tenemos que la intersección de todo 2-plano con  $\partial\Omega$  es una traslación de un círculo en la esfera (ver figura [4.5]).

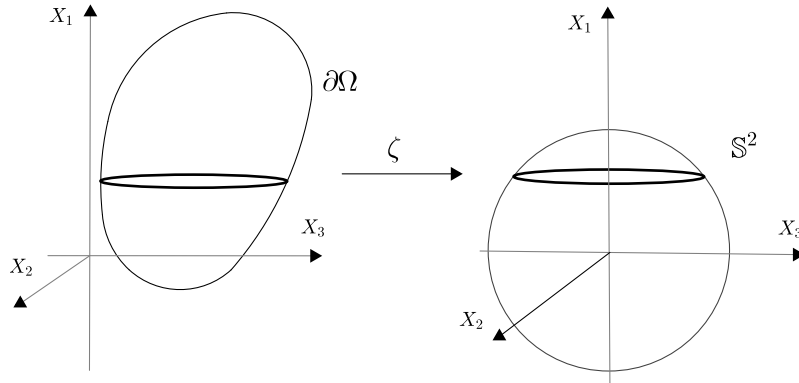


Figura 4.5: Intersección de un 2-plano y  $\partial\Omega$ .

Así la intersección del dominio  $\Omega$  con un 2-plano es un 2-disco de radio menor o igual a 1.

Ahora puesto que la función  $\zeta$  va de  $\Omega$  en  $\mathbb{B}^n$ , luego debe existir al menos un 2-plano para que su intersección con  $\Omega$  sea un 2-disco de radio igual a 1.

Elegimos dos puntos antipodales  $m_1$  y  $m_2$  en la frontera de este 2-disco de radio igual a 1, entonces para todo 2-plano a travez de  $m_1$  y  $m_2$  la intersección de este nuevo 2-plano con  $\Omega$  es un 2-disco, puesto que este nuevo 2-disco contiene a  $m_1$  y  $m_2$ , también debe tener radio igual a 1 (Ver figura [4.6]).

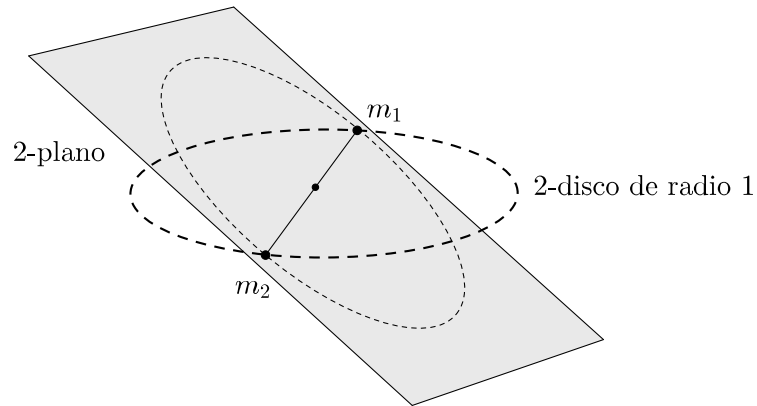


Figura 4.6: Intersección de un 2-plano y  $\Omega$ .

Concluimos que para cada 2-plano a travez de  $m_1$  y  $m_2$  la intersección del 2-plano con  $\Omega$  es un 2-disco con radio igual a 1, pero entonces  $\Omega$  es una bola  $n$ -dimensional de radio igual a 1 y centrado en el punto medio de  $m_1$  y  $m_2$ .

Por tanto tenemos la igualdad en la desigualdad isoperimétrica si y solamente si el dominio  $\Omega$  es la bola  $n$ -dimensional.

## Capítulo 5

# Comentario final

La desigualdad isoperimétrica tiene una gran variedad de aplicaciones, muchas de tipo geométrico que resultan más complicados de resolver usando solamente el cálculo como nos muestra [POL54].

Otras de las aplicaciones son las equivalencias que existen con otros resultados como por ejemplo la desigualdad de Wirtinger:

**Teorema 5.0.1** (Desigualdad de Wirtinger). *Sea  $f$  una función de clase  $C^1(\mathbb{R}^n)$ , periódica con periodo  $2\pi$  tal que  $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ . Entonces  $f$  satisface la siguiente desigualdad*

$$\int_0^{2\pi} [f'(t)]^2 dt \geq \int_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt.$$

O también el siguiente resultado

**Teorema 5.0.2.** *Sea  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  se tiene la desigualdad*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx.$$

*Entonces la mejor constante en esta desigualdad es la misma de la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^n$ .*

Donde la mejor constante en esta desigualdad es el ínfimo de los  $C_n$  tal que la desigualdad sigue siendo válida.

El mismo Teorema Federer-Fleming usado en este trabajo es un resultado equivalente.

La desigualdad isoperimétrica se plantea para espacios más generales, llamados variedades Riemannianas que podemos pensarlas como espacios donde está bien definida una noción de área ( $(n-1)$ -dimensional) y volumen ( $n$ -dimensional).

Por ejemplo, tomemos la esfera  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  que tiene área total  $4\pi$ , el problema isoperimétrico en esta superficie (subvariedad Riemanniana de  $\mathbb{R}^n$ ) se formula como sigue:

*¿Qué curva en  $\mathbb{S}^2$  de menor perímetro encierra una área fija  $\pi$ ?*

En el plano, en  $\mathbb{R}^n$  y en algunas variedades Riemannianas como las esferas  $\mathbb{S}^n$  y espacios hiperbólicos  $\mathbb{H}^n$  el problema isoperimétrico ha sido solucionado, algunos recientemente como en el caso del paraboloides que es una superficie de revolución elaborada por I. Benjamini y I. Cao [BC96].

Un resultado importante del problema isoperimétrico en estos espacios generales, más precisamente para las variedades Riemannianas compactas fue resuelto por el matemático Olivier Druet en su artículo *Isoperimetric inequalities on compact manifolds* [DRU02], para más detalles puede revisar también [TC15].

Más aún tenemos la siguiente

**Conjetura.** (*Cartan-Hadamard*) *Dado  $(M^n, g)$  una variedad Riemanniana completa de dimensión  $n \leq 2$ , simplemente conexa y de curvatura seccional no positiva. Entonces dado cualquier subconjunto abierto  $\Omega$  de  $M$  con su cerradura compacta y frontera diferenciable, se cumple*

$$\frac{|\partial\Omega|_g}{|\Omega|_g^{\frac{n-1}{n}}} \geq K(n, 1)^{-1},$$

*Los volúmenes indicados son con respecto a la medida Riemanniana y*

$$K(n, 1)^{-1} = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|_\xi}{|\mathbb{B}^n|_\xi^{1-1/n}},$$

*donde  $\xi$  es la métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^n$ .*

Esta conjetura por lo menos hasta el año 2008 esta abierta para dimensión  $n \geq 5$ , Weil [WEI26] la demostró para dimensión  $n = 2$ . Kleiner [KLE92] la demostró para dimensión  $n = 3$  y Croke [CRO84] la demostró para dimensión  $n = 4$ .

# Notaciones

## Vectores y conjuntos

- $\mathbb{R}^n$  es el espacio euclidiano  $n$ -dimensional.
- $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , con 1 en la posición  $j$  es el vector canónico de  $\mathbb{R}^n$ .
- $x = (x_1, \dots, x_n)$  un punto en  $\mathbb{R}^n$ .
- $\text{diam } U$  es el diámetro del conjunto  $U$ .
- $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$  es la norma del vector  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- $\langle x, y \rangle$  es el producto interno de los vectores  $x$  e  $y$  en  $\mathbb{R}^n$ .
- $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| < r\}$  es la bola abierta con centro en el punto  $x$  y radio  $r$ .
- $|\Omega|$  es la medida de Lebesgue del conjunto  $\Omega$ .
- $\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ .
- $\mathbb{B}^n(a)$  es la bola abierta centrada en el origen de radio  $a$ .
- $\mathbb{B}^n$  es la bola abierta centrado en el origen de radio 1.
- $w_n$  es el volumen de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ .
- $c_{n-1}$  es el volumen  $(n - 1)$ - dimensional de la esfera  $\mathbb{S}^n$ .
- $\overline{\Omega}$  es la cerradura del conjunto  $\Omega$ .
- $d(x, \Omega)$  es la distancia del punto  $x$  al conjunto  $\Omega$ .
- $\partial\Omega$  es la frontera del conjunto  $\Omega$ .

- $V_n(\Omega)$  es el volumen  $n$ -dimensional del conjunto  $\Omega$ .
- $[0, 1]^n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$  es el  $n$ -cubo de  $\mathbb{R}^n$ .

## Funciones y espacios de funciones

- $1_\Omega$  es la función característica del conjunto  $\Omega$ .
- $C(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es continua}\}$ .
- $C^k(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es } k\text{-veces diferenciable y continua}\}$ .
- $C^\infty(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}; f \in C^k(U) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}$ .
- $C_c^\infty(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}; f \in C^\infty(U) \text{ y } \text{soop}(f) \text{ compacto}\}$ .
- $L^1_{loc}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}; f \in L^p(V) \text{ para cada abierto } V \subset U \text{ con } \bar{V} \subset U \text{ y } \bar{V} \text{ es compacto}\}$ .
- $Df$  es la derivada de la función  $f$ .
- $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$
- $\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$  es la norma  $p$  de la función  $f$ .
- $\nabla f$  es el gradiente de la función  $f$ .
- $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  es derivada parcial de  $f$ .
- $\text{soop}(f)$  es el soporte de la función  $f$ .
- $f * g$  es el producto convolución de las funciones  $f$  y  $g$ .
- $J_f$  es el Jacobiano de la función  $f$ .
- $\det J_f$  es el determinante del Jacobiano de la función  $f$ .
- $\inf(f)$  es el ínfimo de la función  $f$ .
- $D^\alpha$  es la derivada de orden  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .
- $\sup(f)$  es el supremo de la función  $f$ .
- $f|_U$  es la función  $f$  restringido a un subconjunto  $U$ .

## Otras notaciones

- $H_\delta^s$  es la medida aproximada  $s$ -dimensional Hausdorff.
- $H^s$  medida  $s$ -dimensional Hausdorff.
- $\mathcal{L}^n$  medida  $n$ -dimensional de Lebesgue.
- $H_{dim}$  dimension de Hausdorff.
- $|\Omega|_g$  volumen Riemmaniano del conjunto  $\Omega$ .



# Bibliografía

- [BC96] I. BENJAMINI and I. CAO. A new isoperimetric theorem for surface of variable curvature. *Duke Math. Journal*, 1996.
- [BER03] M. BERGUER. A panoramic view on riemannian geometry. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2003.
- [CHA93] ISAAC CHAVEL. *Riemannian geometry—a modern introduction*, volume 108 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [CHA01] ISSAC CHAVEL. *Isoperimetric inequalities: differential geometric and analytic perspectives*. Cambridge tracts in mathematics 145. Cambridge University Press, 2001.
- [CRO84] C. B. CROKE. A sharp four dimensional isoperimetric inequality. *Comment. Math. Helv.*, 59:182–192, 1984.
- [CZ08] VICTOR RAFAEL CABANILLAS ZANINI. *El Problema Isoperimétrico*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2008.
- [DC79] MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO. *Geometria riemanniana*, volume 10. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [DC12] MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO. *Geometría Diferencial de curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [DRU02] OLIVIER DRUET. Isoperimetric inequalities on compact manifolds. *Geom. Dedicata*, 90:217–236, 2002.
- [EG92] LAWRENCE C. EVANS and RONALD F. GARIEPY. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

- [HUR01] A. HURWITZ. Sur le problème des isoperimètres. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1901.
- [KLE92] B. KLEINER. An isoperimetric comparison theorem. *Invent. Math.*, 108:37–47, 1992.
- [KNO57] H. KNOTHE. Contributions to the theory of convex bodies. *Mich. Math.*, 1957.
- [LL12] ELON LAGES LIMA. *Curso de Análise*, volume 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.
- [MNR04] JAIME E. MUÑOZ RIVERA. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Coordenação de matemática aplicada e computacional, Laboratorio Nacional de computação científica- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.
- [POL54] GEORGE POLYA. *Mathematics of Plausible Reasoning*. Princeton U. Press, 1954.
- [SCH39] E. SCHMIDT. Über das isoperimetrische problem in raum von  $n$  dimensionen. *Math. Z.*, 1939.
- [TC15] GALINDO TAZA CHAMBI. *Uma desigualdade Isoperimétrica en Variedades Riemannianas Compactas*. Universidade Federal de Rio de Janeiro, 2015.
- [TK16] MIRIAM TELICHEVESKY and PATRICIA KLASER. O problema isoperimétrico. 2016.
- [WEI26] A. WEIL. *Sur les surfaces a courbure négative*, volume 182. CR Acad. Sci Paris, 1926.