

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**E.A.P. DE INGENIERIA MECANICA DE FLUIDOS**

**Soluciones a la Teoría de Supergravedad utilizando  
objetos extendidos Tipo p-branas**

**TESIS**

para optar el Grado Académico de Magíster en Física

**AUTOR**

Fulgencio Villegas Silva

**ASESOR**

Mateo Márquez Jácome

**Lima – Perú**

**2005**

**A María Carmela , Segundo Fabián y Elvito.**

## Agradecimientos

Agradezco, primeramente y en forma especial, a mis padres por todo y por su paciencia; A mis profesores de la unidad de Post Grado de la Facultad de Física de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos; Al profesor M.Sc. Mateo Márquez Jácome, y al profesor Dr. Marco Rosas Tello por haber aceptado el asesoramiento en este trabajo. Debo agradecer a mis profesores del Instituto de Física Teórica de Sao Paulo, en forma particular al Profesor Dr. Abraham Hirz Zimerman por las charlas frecuentes y oportunas acerca de supersimetría, álgebra de corrientes y el modelo de Wess-zumino-Witten; también al Profesor Dr. Francisco Gómez por las clases de Álgebras de Kac-Moody; y al Profesor Dr. Nathan Berkovits por sus charlas de supercuerdas. También expreso mi agradecimiento a Michael Schulz (Department of physics, Stanford University), Ori Ganor (Department of Physics, Princeton University), Enrique Álvarez (Instituto de Física teórica, Universidad Autónoma de Madrid) por las consultas y material proporcionado para la culminación de este trabajo. Finalmente, agradezco a todos mis amigos y colegas de la Facultad de Ciencias Físicas de La Universidad Nacional Mayor de San Marcos que de una u otra manera contribuyeron a la culminación de éste trabajo.

## **Resumen**

El objetivo central de este trabajo es presentar a los objetos extendidos tipo  $p$ -branas como soluciones a la teoría de supergravedad, estudiando en detalle la geometría, la masa y las cargas que tienen asociadas cuando se piensa en ellas como fuentes. Partiendo de la acción general de Einstein, la cual describe un sistema clásico de  $D$ -dimensiones, que involucra al tensor métrico, a un campo escalar y un potencial de gauge, se obtienen las ecuaciones dinámicas de los campos, las cuales son resueltas usando un ansatz que permite acoplar las  $p$ -branas a la supergravedad. Luego se presentan algunos ejemplos de aplicación en teorías de Supergravedad (SUGRA), y finalmente se tocará el tema de las branas negras.

# Indice

<b>Prólogo</b>	<b>1</b>
<b>1 Monopolos, Ecuaciones y Cotas de Bogomol'nyi .</b>	<b>7</b>
1.1 Introducción.	7
1.2 Clasificación de las soluciones de naturaleza topológica en teorías de gauge	11
1.3 Simetría y dualidad	16
1.3.1 Acción de una partícula en un campo E-M	18
1.3.2 El monopolos de Dirac	20
1.3.3 La condición de cuantización	23
1.3.4 El monopolos según Wu y Yang	25
1.4 Cotas y ecuaciones de Bogomol'nyi	30
1.4.1 El monopolos de t'Hooft-Polyakov	34
1.4.2 Estados BPS	35
<b>2 Supersimetría y Supergravedad.</b>	<b>38</b>
2.1 Supersimetría en la Teoría de Campos	38
2.1.1 Superespacio, supercampos y acciones supersimétricas	42
2.1.2 La supercarga de Noether	47
2.2 Supergravedad	48
2.2.1 Elementos geométricos	50
2.2.2 Supergravitación pura	56
2.2.3 La carga de la supergravedad	60

<b>3</b>	<b>Supergravedad y p-branas</b>	<b>68</b>
3.1	Membranas p-dimensionales	68
3.2	Dinámica de la p-brana	69
3.2.1	Acoplamiento de las p-branas	72
3.3	Supergravedad	75
3.3.1	Supergravedad y p-branas	76
3.3.2	Acción General y Ecuaciones de Campo	79
<b>4</b>	<b>Soluciones tipo p-branas a la Teoría de Supergravedad</b>	<b>84</b>
4.1	El ansatz de las p-branas	84
4.1.1	Caso elemental o eléctrico	86
4.1.2	Caso solitónico o magnético	90
4.2	Las soluciones	93
4.2.1	Soluciones clásicas y conservación de SUSI	94
4.2.2	Solución de las ecuaciones de movimiento	97
4.3	Cargas y Masas	102
4.3.1	Carga elemental y solitónica de soluciones tipo p-brana	102
4.3.2	Dualidad en el contexto de las p-branas	107
4.3.3	La Masa de soluciones tipo p-brana	108
4.4	Ejemplos de aplicación	110
4.4.1	La solución de Reissner-Nordström	110
4.4.2	$D=11, n=4$ : Sector bosónico de supergravedad	112
4.5	Branas Negras	120

<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Apéndice: Relatividad General y Geometría Riemanniana</b>	<b>128</b>
A.1	Ecuación de campo libre de Einstein	128
A.2	Métricas conformes y el tensor de Weyl	134
A.3	El tensor de Ricci en el ansatz de las p-branas	137
<b>B</b>	<b>Apéndice: Glosario</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>152</b>





# Prólogo

Desde sus inicios, uno de los problemas fundamentales de la Teoría Cuántica de Campos ha sido el estudio de soluciones clásicas a las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica de los sistemas físicos, para luego desarrollar métodos de cuantificación en los que estas soluciones juegan un papel central. Tras los trabajos pioneros de Skyrme[1] sobre soluciones localizadas en una región finita, de ciertas teorías de campos que representarían a partículas bariónicas como el protón, se produjo un gran avance en este terreno en el transcurso de los años 70 del siglo pasado.

Nielsen y Olesen [2], en 1973, en trabajos relacionados con la teoría de cuerdas y los modelos duales, encontraron en una teoría de campos –el modelo abeliano de higgs- soluciones del tipo vórtice que también aparecen en la teoría fenomenológica de Ginsburg-Landau[3] de la superconductividad tipo II. Poco después, t’Hooft [4] y Polyakov [5] hallaron, en la extensión no abeliana del modelo anterior – el modelo de Georgi-Glashow- soluciones extendidas con propiedades de monopolo magnético. Finalmente, Belavin, Polyakov, Schwartz y Tyupkin [6], estudiando la versión euclídea de una teoría de Yang-Mills pura, encontraron soluciones localizadas en el espacio tiempo (instantones). Desde hace dos décadas, este tipo de soluciones, así como el papel que juegan en la cuantificación de modelos de las interacciones fundamentales, han sido objeto de numerosas investigaciones.

Durante la década de 1990, los estudios sobre dualidad han hecho contribuciones importantes a la teoría de cuerdas [7, 8, 9,10]. La riqueza de estas contribuciones esta en que los tópicos antiguamente inexplorados como los aspectos no perturbativos de la teoría de cuerdas se ven bastante atractivos con el estudio de dualidades. La existencia de soluciones no perturbativas de la teoría de las cuerdas puede ser demostrada basándose en dualidades que han sido planteadas como conjeturas en diversas teorías de cuerdas [11, 12, 13, 14, 15].

Las D-branas [16] (Dirichlet-branas), por ejemplo, se han identificado como estados no perturbativos de cuerdas con cargas en el sector R-R (Ramond-Ramond). Estas D-branas, en el límite de baja energía (o tensión grande) de teorías de cuerdas efectivas, tienen soluciones clásicas en términos de membranas de  $p$  dimensiones que llamamos *p-branas* en general.

Existen, sin embargo, muchos tipos de soluciones clásicas a la mecánica de cuerdas y todas ellas están vinculadas entre sí (y con la  $p$ -branas) a través de las dualidades de cuerda con las  $p$ -branas, son las soluciones tipo agujeros negros a teorías de cuerdas efectivas [17]. Esto sitúa problemas tradicionales de la gravedad cuántica como la interpretación microscópica de la termodinámica de agujeros negros, en el marco de la teoría de las supercuerdas [18].

Por otro lado muchas teorías de campo efectivas de estados masa cero en la teoría de cuerdas, corresponden a supergravedad (SUGRA) acoplada en algunos casos con campos externos. Por ejemplo, los estados no masivos de la cuerda heterótica, tiene como teoría de campo efectiva asociada, la SUGRA  $N=1$  en 10 dimensiones, acoplada con super- Maxwell  $N = 1$  [19, 20,21].

Las teorías de supergravedad aparecen al tratar de incluir supersimetría(SUSI) en modelos gravitacionales. Originalmente se pensó que esta fertilización cruzada podía producir modelos que resolvieran problemas fundamentales de la gravedad cuántica como las divergencias en el ultravioleta. Sucede que la supersimetría local no es suficiente para encargarse de las notables divergencias [22]. No obstante, las teorías de supergravedad tienen muchas cualidades interesantes que las hacen extremadamente valiosas para la física teórica y la fenomenología de las altas energías.

Las teorías maximales de la gravedad nos presentan por una parte un amplio número de campos, y al mismo tiempo son lo suficientemente restrictivas limitándonos a escoger cierto tipo de objetos masivos los cuales podemos acoplar a estos campos. Las restricciones de simetría limitan fuertemente la clase de términos con los que puede armar un lagrangiano y nos dicen que aunque no podemos acoplar campos de SUGRA con campos masivos, podemos acoplar a “objetos relativistas” como agujeros negros, cuerdas, y membranas. Para buscar los tipos de objetos con los que probar acoplo, podemos hacer lo mismo que en la derivación usual de la solución isotrópica en un espacio vacío usando todas las consideraciones posibles sobre las simetrías, y posteriormente averiguamos con que tipo de fuentes masivas podemos empatar la solución. En nuestro caso, veremos que si se pide una parte de la teoría supersimétrica

original no esté rota, encontramos soluciones tipo p-branas. hoy en día se piensa que este tipo de información puramente clásica que proviene de las teorías de supergravedad, es capaz de darnos información sobre aspectos no-perturbativos de la teoría de supercuerdas; ya que la formulación cuántica de la supergravedad se sustenta hoy por hoy en cada vez más tupidas red de cuerdas y membranas.

El objetivo central de este trabajo es presentar las p-branas como soluciones de teorías de supergravedad, estudiando en detalle la geometría, la masa y las cargas que tienen asociadas cuando se piensa en ellas como fuentes.

Las p-branas parecen generalizar la idea de carga puntual en el contexto de su gravedad. De hecho, uno de los aspectos más resaltantes que tienen, es que su estructura geométrica es muy cómoda para pensar en dualidad electromagnética y en general dualidad en el sentido  $SL(2, \mathbb{Z})$ . De hecho las soluciones tipo p-branas a la SUGRA, producen un flujo magnético como el que pudiera producir un monopolo, y admite que introduzcamos una fuente eléctrica y/o magnética existe además una manera natural de definir una acción dual a la que gobierna estos campos, donde las cargas eléctricas y magnéticas se intercambian; las ecuaciones de movimiento de una se convierte en las identidades de Bianchi de la otra y viceversa, mutando p-branas elementales por solitónicas; las constantes de acoplamiento muestran una relación de proporcionalidad inversa, y toda una serie de propiedades que confirman el hecho de la dualidad en el contexto de las soluciones p-branas de la SUGRA.

Por otro lado, como estas p-branas poseen simetría poincaré, se puede definir una masa o más precisamente una densidad de energía en reposo.

Esta densidad de energía no es un parámetro libre de la teoría si no que puede calcularse en función a las cargas eléctricas y magnética de la p-brana, y sorpresivamente satura el análogo a la cota de Bogomol'nyi de manera que estos objetos no solo generalizan monopolos susceptibles a entrar en una teoría dual, si no que además son estados BPS.

Este trabajo incluye un capítulo sobre monopolo, dualidad y estados BPS, a modo de introducción a los conceptos fundamentales que permiten representara las propiedades de las soluciones tipo p-branas a la teoría de supergravedad.

La dualidad electromagnética exacta fue originalmente concebida por Dirac [23] pensando en la posibilidad de detectar partículas con carga monopolar magnética. Hasta ahora nadie ha detectado monopolos magnéticos, sin embargo, la existencia de monopolos magnéticos sigue siendo la única fundamentación teórica generalmente aceptada para explicar la cuantización de la carga eléctrica. Sin embargo, también cabe

indicar que en la dualidad  $S$  las ecuaciones de Maxwell aparecen perfectamente simétricas ante el intercambio de cargas y campos eléctricos y magnéticos. Que la electricidad y el magnetismo estén relacionados es lo que muchos científicos esperaban desde principios del siglo XIX, pero más importante aun es que una de las consecuencias es una relación de proporcionalidad inversa entre las cargas eléctricas y magnéticas.

Visto a la ligera esto pudiera ser un detalle sin importancia, pero bajo la luz de la teoría cuántica de campos estamos relacionados constantes de acoplamiento, es decir, una teoría de gauge en un régimen de acoplamiento débil, bien pudiera estar relacionada con una de acoplamiento fuerte. Aquí existe algo importante que indicar: cuando no podamos realizar un desarrollo perturbativo por que la constante de acoplamiento de la teoría es muy grande, sería posible formular una teoría dual donde el acoplamiento sea débil y podamos usar series aproximativas.

La modificación del Lagrangiano de Maxwell hecha por witten [24], agrega una nueva simetría a la constantes de acoplamiento: la  $T$ Dualidad. Esta invarianza presenta ciertas teorías gauge, forman junto a la  $S$ -dualidad un grupo de invariancia de teorías gauge que se identifica con una representación de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Los objetos de carga mixtas (dyones) y los monopolos como el de Dirac o el de t' Hooft- Polyakov [25,26], saturan la llamada cota de Bogomol'nyi [27,28]; una desigualdad que limita los valores posibles de la carga, a una constante proporcional a la masa. Es precisamente en esta fórmula de masa - llamada formula de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) [29]- donde esta simetría del grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  se ven reflejadas de manera cerrada. En 1977, Montonen y Olive [30] propusieron que la teoría de Yang-Mills\_Higgs  $SO(3)$  debían ser invariante ante este grupo de dualidad, y en 1990 se demostró [31] que esto era cierto para el caso de Yang-Mills  $N=4$  visto como límite a baja energía de una teoría de cuerdas.

En esta dirección este trabajo pretende poner en evidencia cómo soluciones tipo p-branas a la teoría de supergravedad tienen cargas eléctricas y magnéticas que cumplen con la cuantización de Dirac, y saturan la ecuación de Bogomol'nyi. Esta analogía refuerza la validez de la generalización de partícula a p-branas pueden verse como estados BPS y existe una manera muy clara de expresar la dualidad electromagnética en términos de el acoplamiento de las branas con los campos y con sus duales en el sentido de Hodge.

La dualidad electromagnética tiene profundas raíces en la geometría. Durante la década de 1970, los avances paralelos en teorías de gauge y geometría de fibrados dieron a luz la interpretación de Wu-Yang [32] del monopolo de Dirac, en la que la estructura de los campos electromagnéticos es la de los fibrados principalmente  $U(1)$  con conexión. La conexión representa aquí el potencial de gauge, y la curvatura del fibrado representa el campo. Mientras que la formulación estándar del electromagnetismo puede pensarse como el fibrado en  $\mathbb{R}^3$ , un monopolo de Dirac es visto como un fibrado principal  $U(1)$  con conexión sobre una variedad de topología no trivial como  $S^2$ . La diferencia entre estas teorías, aunque suena pedestre, es en realidad muy profunda:  $\mathbb{R}^3$  no tiene agujeros, y  $S^2$  si lo tiene, de manera que se puede pensar en los monopolos (o en el efecto de Aharonov-Bohm) como “defecto topológicos” de una teoría de electrodinámica clásica.

En el capítulo 1 se discuten algunas nociones generales acerca de las soluciones regulares de energía finita que tienen lugar en teoría clásica de campos. Se analiza la posición original de Dirac en cuanto al monopolo magnético y la condición de cuantización de carga. Luego se estudia la dualidad electromagnética y como ésta vincula los regímenes de acoplamiento fuerte y débil en algunas teorías de gauge. Finalmente se presenta una visión topológica del monopolo y se estudia en forma breve las ecuaciones y cota de Bogomol’nyi [24].

En el capítulo 2 está dedicado a la introducción de algunos conceptos básicos de las teorías de supersimetría y supergravedad, se estudia el álgebra de supersimetría extendida, el superespacio y el mecanismo de construcción de acciones supersimétricas. Finalmente se introduce algunos aspectos geométricos de supergravedad y su relación con la construcción de cargas conservadas.

En el capítulo 3, se aborda el estudio de las  $p$ -branas como generalización de la idea de partículas, y se usa para describir los objetos extendidos que se acoplan a los campos bosónicos de la supergravedad en el mismo sentido en que las partículas puntuales cargadas se acoplan con los campos de la electrodinámica clásica. Se parte de la acción general, la cual describe un sistema clásico en  $D$ -dimensiones, que involucra la métrica  $g_{MN}$ , un campo escalar  $\mathbf{f}$ , y a una  $(n-1)$ -forma  $A_{[n-1]}$  que representa un potencial de calibre con un campo asociado  $F_{[n]} = dA_{[n-1]}$ , variando la acción general respecto a los campos, obtenemos las ecuaciones dinámicas de los campos bosónicos descritos.

El capítulo 4 está dedicado encontrar las soluciones a las ecuaciones de movimiento de estos campos, los cuales se resolverán introduciendo las p-branas a través de un ansatz [89,98] de requerimientos de preservación de la simetría  $Poincaré_d \times SO(D - d)$  que determinan la geometría de las soluciones. Se mostrara como se pueden pensar los conceptos de masa, carga eléctrica y carga magnética en este contexto; se analizará como estos objetos obedecen a una ecuación de tipo cota de Bogomol'nyi. El vinculo con la relatividad general se hará evidente cuando reconsideremos a las p-branas soluciones de supergravedad como límites extrémales de las branas negras. Se verá entonces que estas soluciones poseen un horizonte de eventos, y que además saturan la cota de Bogomol'nyi de la misma forma que los estados de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) para monopolos de Dirac o partículas con carga dyónica. El capítulo 5 contiene las conclusiones de ésta tesis. En un apéndice, por último, explicamos las convenciones adoptadas para realizar los cálculos presentados, y también se presenta un glosario de términos que permita entender mejor este trabajo.

# Capítulo 1

## Monopolos, Ecuaciones y Cotas

### De Bogomol'nyi

Este capítulo pretende motivar el posterior estudio de las  $p$ -branas que describen objetos que se particularizan a la Teoría de Maxwell con Monopolo de Dirac; presentan varias simetrías de dualidad y son objetos extendidos.

Aquí se describen los elementos matemáticos necesarios para la caracterización de las soluciones regulares de energía finita y de acción finita en la teoría clásica de campos de acuerdo a su naturaleza topológica. Seguidamente analizamos la posición original de Dirac, cómo la simetría de las ecuaciones de Maxwell alimentó la esperanza de conseguir — *detectar* en el sentido experimental— un monopolo magnético. Luego estudiaremos, cómo consideraciones sobre la dualidad electromagnética vinculan de manera muy útil los regímenes de acoplamiento débil y fuerte en algunas teorías de calibre. En cuanto al monopolo de Dirac, se deducirá la condición de cuantización de la carga. Posteriormente se presentará una visión topológica del monopolo. Finalmente encontramos la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi, mostrando que están acompañadas de una relación específica entre las constantes de acoplamiento del sistema.

### 1.1 Introducción

La simetría es una propiedad universal tanto en la vida corriente, desde el punto de vista matemático como desde el quehacer de la Física Teórica. Conseguir y concretar nuestros criterios estético-matemáticos sobre el universo es una de las columnas vertebrales de la física teórica. Criterios como estos fundamentaron las ecuaciones de

Maxwell a partir de los desarrollos en Electricidad y Magnetismo heredados del siglo XVIII, y son en realidad bastante más antiguos que las teorías que los ponen de manifiesto. La simetría de la ley de Henry-Faraday en contraposición a la ley de Ampère es lo que en el fondo impulsa a Maxwell a enunciar las ecuaciones de la electrodinámica clásica. Y es en simetría en lo que pensaba Dirac a la hora de introducir la idea de monopolo magnético [23].

Sin embargo, introducir belleza *ad hoc* en nuestras teorías podría terminar por parecer un exceso de narcisismo, a no ser que exista una cierta retribución por parte del (o hacia el) mundo natural. Originalmente, el regalo concedido a Dirac por su ofrenda a la simetría fue la explicación teórica de la cuantización de la carga. Pero la simetría electromagnética ha tenido mucho más que darnos desde 1930.

No se trata simplemente de postular la existencia de partículas con carga magnética, sino de explorar las consecuencias de la *dualidad electromagnética* que consiste en la invariancia de las ecuaciones de Maxwell ante una cierta manera de intercambiar los campos eléctricos y magnéticos. La ecuación de cuantización de la carga obtenida, inmediatamente vincula la carga eléctrica fundamental con la magnética según una relación de proporcionalidad inversa.

$$e \propto \frac{1}{g}. \quad (1.1)$$

Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos este hecho revela una relación escondida entre la constante de acoplamiento de la teoría electromagnética común, y una constante de acoplamiento asociada a una teoría de monopolos magnéticos: cuando una es “grande”, la otra es “pequeña”.

Lo verdaderamente sorprendente no es que exista esta relación, sino que sea el denominador común de muchas teorías de calibre aparentemente disímiles. La importancia de estas teorías es la que resalta la utilidad de este vínculo.

La Electrodinámica Cuántica (QED) — una de las teorías más exitosas jamás creadas — debe la clave de su análisis perturbativo, al hecho de que la constante de estructura fina  $\alpha$ , tiene un valor de  $\frac{1}{137} \ll 1$ . Es este valor numérico pequeño el que nos permite usar como caballo de batalla más común en la física: las aproximaciones



vistas como desarrollos en serie o *desarrollos perturbativos*, que usamos en sistemas físicos que van desde el péndulo simple, hasta el modelo de interacción electro-débil de Weinberg-Salam.

Pero no en todas las teorías de calibre tenemos la fortuna de poder realizar desarrollos perturbativos. Por ejemplo, las constantes de acoplamiento de la Cromodinámica Cuántica — teoría de importancia capital en las interacciones fuertes — no permiten tales desarrollos. Se nos muestra entonces un ejemplo de *acoplamiento fuerte*, que ha motivado entre otras cosas los desarrollos no perturbativos en la teoría cuántica de campos.

¿Qué hacer entonces con los regímenes de acoplamiento fuerte? Pues bien, la relación que la dualidad electromagnética da a luz entre las constantes de acoplamiento, sugiere una respuesta para los que sean capaces de conseguir un comportamiento similar en las teorías de calibre. Felizmente, este comportamiento es hartamente frecuente, tanto, que ya tiene nombre y apellido: *dualidad S*. En esencia esta dualidad se manifiesta como una relación estructural entre el régimen de acoplamiento electro-débil y el fuerte que relaciona de manera inversa las constantes de acoplamiento de dos teorías:

$$\mathbf{a}_F \rightarrow \frac{1}{\mathbf{a}_D}. \quad (1.2)$$

Esto inmediatamente lleva a concluir que cuando en una teoría no se puede realizar un desarrollo perturbativo, una solución elegante sería conseguir una teoría *S-dual* donde la constante de acoplamiento sea nuevamente mucho menor que la unidad, y podamos volver a analizar con las series perturbativas.

Contrariamente a lo que se desea hallar, la *dualidad-S* está lejos de ser la panacea de las teorías sin desarrollos perturbativos. Por citar un caso, semejante mecanismo no funciona para la Gravedad Cuántica, porque el origen de la no-perturbatividad de esta teoría no es que la constante de acoplamiento sea muy grande sino que es dimensional. No hay dualidad *S* que valga aquí.

Todas estas ideas, propias de la teoría cuántica de campos son expuestas nuevamente en el marco de la teoría de cuerdas, iniciando una manera “dual” de pensar que se ha convertido en una poderosa herramienta. Por ejemplo, la dualidad de Montonen-Olive, es bautizada nuevamente bajo el nombre de *T-dualidad*, al estudiar la teoría de cuerdas como la física bidimensional de los modelos- $\sigma$ , donde aparece como consecuencia de la naturaleza extendida de los objetos fundamentales involucrados. El

“dual” al efecto Meissner en la teoría de superconductividad de Bardeen, Cooper y Schrieffer (superconductividad BCS) nos sirve, por otro lado, para interpretar el confinamiento de fases en teorías gauge no-abelianas como el dual de el mecanismo de Higgs [33]. De manera que esta forma de pensar demuestra ser una poderosísima herramienta en áreas de la física teórica tan disímiles como confinamiento, teorías de campo efectivas, supersimetría y teoría de cuerdas.

En resumen, la historia de la dualidad- $S$  nace con el monopolo de Dirac en 1931 [23]. Durante la década de 1970 aparece en la teoría cuántica de campos cuando Coleman descubre la relación entre el modelo de Thirring y el de sine-Gordon [34,35], ambas teorías en  $1 + 1$  dimensiones. Aquí se asoma por primera vez la relación que tiene esta dualidad con la supersimetría, porque mientras que las partículas descritas por el modelo de sine-Gordon son campos escalares, las del modelo de Thirring son campos fermiónicos. De ese modo el acoplamiento electrodébil de una teoría bosónica corresponde al acoplamiento fuerte de una fermiónica, y viceversa.

Más tarde, este conjunto de ideas fue enriquecido con el descubrimiento hecho por Witten [24] de la naturaleza dyónica del monopolo, que puso sobre la mesa la relevancia del “término  $\mathbf{q}$ ”:

$$L_q = -\frac{e^2 \mathbf{q}}{32\mathbf{p}^2} F_{mv}^a * F^{amv}. \quad (1.3)$$

Éste término puede ser insertado en el lagrangiano de la teoría de Yang-Mills(YM) sin destruir laposibilidad de renormalización, pero agregando una interacción invariante ante conjugación de cargas, que viola simetrías  $P$  y  $CP$ . Lo interesante es que desde el punto de vista del factor de peso de Feynman, lo que le estamos haciendo a la teoría YM es en cierto modo una “traslación”:

$$e^{iS_{YM}} \rightarrow e^{iS_{YM} + \frac{i\mathbf{q}}{2\mathbf{p}} \int F^* F}, \quad (1.4)$$

de manera que la teoría con el término extra no se ve afectada por traslaciones  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} \pm 2\mathbf{p}$ . Sin embargo, el monopolo se convierte en un dyón con carga eléctrica

$\frac{\mathbf{q}}{2\mathbf{p}} n$ , con  $n$  entero, y carga magnética  $\frac{4\mathbf{p}}{e^2}$ .

Esto tiene una consecuencia profunda en la fórmula de masa BPS [27, 28, 36, 29] que se conocía desde mediados de la década de 1970, y que relaciona la masa y la carga de un monopolo que satura la cota de Bogomol'nyi.

$$M \geq a|g|, \quad (1.5)$$

donde  $a$  es una constante de proporcionalidad. Cuando se mezcla la carga dyónica de Witten con la masa de los estados BPS, uno se ve obligado a redefinir la igualdad en (1.5) como

$$M = |ae(n_e + \mathbf{t}n_m)| \quad (1.6)$$

con  $n_e$  y  $n_m$  enteros y  $\mathbf{t}$ , una constante de acoplamiento “complexificada”

$$\mathbf{t} \equiv \frac{\mathbf{q}}{2\mathbf{p}} + i\frac{4\mathbf{p}}{e^2}. \quad (1.7)$$

Finalmente las simetrías de la ecuación de la masa de los estados BPS (1.6) se resume en una estructura cerrada, las invariancias ante dualidad- $S$  y las invariancias ante traslaciones en  $\mathbf{q}$ . Estas simetrías juntas generan justamente el grupo modular  $SL(2, \mathbb{C})$ , al que se denomina *grupo de dualidad*.

Ya Montonen y Olive [30] habían conjeturado en 1977 que la teoría de Yang-Mills-Higgs  $SO(3)$  debía ser invariante ante el grupo de dualidad; pero no fue sino hasta 1990 que las transformaciones del grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  aparecen como una simetría de la teoría de Yang-Mills  $N = 4$  en el límite de baja energía de compactaciones toroidales de la teoría de cuerdas [31]. Una vez más, la simetría nos regala nuevos mundos en que pensar.

## 1.2 Clasificación de las Soluciones de Naturaleza Topológica en Teorías de Gauge

A partir de las ideas de Skyrme [1], y en el marco de la integral funcional, se puede mostrar que las soluciones de las ecuaciones de movimiento clásicas constituyen un buen punto de partida para cálculos cuánticos perturbativos y no-perturbativos [37].

En la formulación habitual de la teoría de campos, los campos de materia (sus excitaciones) se tratan como objetos puntuales. Aún en el contexto clásica esto acarrea dificultades análogas a las creadas por la divergencia que aparece al calcular la autoenergía de un carga puntual. En la teoría cuántica, lejos de desaparecer, este tipo de divergencias se hacen más graves. Si bien los métodos de renormalización permiten resolver esto de manera satisfactoria, resulta de interés estudiar soluciones extendidas que representen configuraciones regulares estables y de energía finita que, en particular, podrían evitar estas divergencias y dar cuenta de propiedades básicas de naturaleza no-perturbativa como, por ejemplo, el confinamiento.

Las ecuaciones de movimiento de las teorías de campos utilizadas en modelos de interacciones fundamentales son en general, no-lineales y por ello admiten soluciones conocidas como *solitones* (soluciones extendidas en el espacio, de energía finita en espacio espacio-tiempo minkowskiano) e *instantones* (soluciones extendidas en el espacio-tiempo euclídeo, de acción finita). En particular, las teorías de gauge, que brindan una descripción universal de todas las interacciones conocidas en la Naturaleza, exhiben soluciones de este tipo, de gran interés en diversos campos de la física. Vórtices, monopolos e instantones tiene importantes aplicaciones en la física de partículas, la cosmología, la astrofísica y la materia condensada.

Las soluciones tipo solitón pueden ser de naturaleza topológica o no-topológica, según estén asociadas o no a alguna propiedad global del espacio-tiempo y de la simetría de gauge de la teoría considerada. Para comprender las propiedades básicas de estas soluciones, consideremos una teoría de campos invariante bajo las transformaciones pertenecientes a un grupo dado de gauge compacto  $G$ . Los campos se deben transformar de acuerdo a alguna representación del grupo en cuestión. Así, un campo  $\mathbf{f}$  en la representación adjunta de  $G$ , es transformado según:

$$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}^g = g^{-1} \mathbf{f} g \quad , \quad g \in G . \quad (1.8)$$

Si se trata de una simetría local, resulta necesario introducir una conexión de modo que la diferenciación de los campos esté bien definida. Podemos asociar a dicha conexión un elemento del álgebra de Lie de  $G$ :

$$A_m = A_m^a T^a \quad (1.9)$$

donde  $T^a$ ,  $a = 1 \dots \dim G$  son los generadores del álgebra. De este modo, podemos definir la derivada covariante como:

$$D_m = \partial_m - ie[A_m] \quad (1.10)$$

de tal manera que, bajo las transformaciones de gauge,

$$A_m \rightarrow A_m^g = g^{-1} A_m g + \frac{i}{e} (\partial_m g^{-1}) g, \quad (1.11)$$

la derivada (1.10) resulta covariante:

$$D_m[A] \rightarrow g^{-1} D_m[A] g \quad (1.12)$$

El conmutador de dos componentes de la derivada covariante da como resultado una componente del tensor (antisimétrico) de curvatura correspondiente a la conexión,  $A_m$ :

$$[D_m, D_n] = -ie F_{mn}, \quad (1.13)$$

que toma sus valores en el álgebra de Lie del grupo  $G$ .  $F_{mn}$  es el tensor de campo de la teoría. Sus propiedades de transformación frente a un cambio de gauge son:

$$F_{mn} \rightarrow F_{mn}^g = g^{-1} F_{mn} g \quad (1.14)$$

Sólo en el caso abeliano el tensor de campo es invariante de gauge.

El Lagrangiano de una teoría de gauge,

$$L = L(\mathbf{F}, A_m), \quad (1.15)$$

es un escalar bajo el grupo de transformaciones de Poincaré y cambia, a lo sumo, en una divergencia frente a transformaciones de gauge. Una configuración de esta teoría tendrá,

en general, energía finita si las contribuciones de los distintos campos de la teoría son despreciables  $O(1/r^2)$  en todo el espacio,

$$D_m \mathbf{f}; 0, \quad V(\mathbf{f}); 0, \quad (1.16)$$

$$F_m; 0, \quad (1.17)$$

excepto en un número finito de regiones compactas  $U_1, \dots, U_n$ . En estas regiones se hallarán, eventualmente, las soluciones extendidas de naturaleza topológica. Consideraremos, por simplicidad, el caso de una única región compacta  $U$  con borde  $\Sigma \equiv \partial U$ , describiendo así una solución concentrada en una dada región del espacio. Resultan también de interés configuraciones clásicas con invariancia trasnacional en alguna dirección determinada, en cuyo caso el requisito que debe imponerse es que la densidad lineal de energía sea finita. O, en forma más general, configuraciones de mayor dimensionalidad con densidad superficial (hipersuperficial) de energía finita. En estos casos, la discusión realizada a continuación debe pensarse constreñida al subespacio ortogonal a las direcciones de invariancia.

El potencial de Higgs  $V(\mathbf{f})$  debe ser invariante de gauge. De esta manera, si  $\mathbf{f}_0$  está en el mínimo del potencial, su transformado en el espacio de campos a la variedad del vacío de Higgs  $\mathbf{M}$  como

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{f} / V(\mathbf{f}) = 0\}, \quad (1.18)$$

se puede notar inmediatamente que el grupo  $G$  actúa sobre  $\mathbf{M}$  de modo que cada  $g \in G$  toma un punto de  $\mathbf{M}$  y lo proyecta en otro punto de la misma variedad. Si suponemos que toda la degeneración del vacío se debe a la simetría de gauge, y no a alguna simetría accidental del potencial  $V(\mathbf{f})$ , entonces  $\mathbf{M}$  resulta constituido por una única órbita del grupo  $G$  [57]. Es decir,  $G$  actúa transitivamente sobre  $\mathbf{M}$ :

$$\forall(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \in \mathbf{M}, \exists g \in G / \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2^g. \quad (1.19)$$

El caso de interés para el estudio de configuraciones extendidas de origen topológico es el de aquellas teorías en las que  $\mathbf{M}$  es no-trivial, vale decir, consiste en más de un punto.

Equivalentemente,  $\mathbf{f}$  es, en ese caso, un campo de Higgs (tiene valor de esperado no-nulo).

Consideremos un elemento  $\mathbf{f} \in M$ . Llamaremos grupo pequeño  $H$  al subgrupo de  $G$  que deja invariante a  $\mathbf{f}$ :

$$H = \{ h \in G / \mathbf{f}^h = \mathbf{f} \} \quad (1.20)$$

(si  $G$  es transitivo en  $M$ ,  $H$  no depende del elemento particular  $\phi$ ). Notemos que  $H$  es el grupo de gauge que caracteriza a la simetría del vacío de Higgs de la teoría. De aquí resulta, entonces, que la variedad  $M$  resulta ser el espacio coset  $G/H$ .

$$M = G/H. \quad (1.21)$$

Una vez que se determina  $H$  para un dado modelo, la variedad que describe el vacío de Higgs queda especificada. En la región del espacio externa a la región compacta  $U$ , la derivada covariante del campo de Higgs debe anularse por lo que, a partir de la ecuación (2.6), vemos que

$$[F_{\mu\nu}, \mathbf{f}] = 0 \quad (1.22)$$

Dado que los generadores de  $H$  son aquellos que aniquilan a  $\mathbf{f}$ , esta ecuación indica que las únicas componentes del tensor electromagnético a las que es permeable el vacío de Higgs, son aquellas correspondientes al grupo de simetría residual  $H$ .

Al crecer el parámetro temporal  $t$ , el campo de Higgs  $\mathbf{f}(x,t)$  define una homotopía sobre la superficie  $\Sigma$ , es decir, una aplicación que varía continuamente con el tiempo (suponemos implícitamente que la variación es continua como consecuencia de las ecuaciones de campo clásicas). Resulta, pues, natural el concepto de clase de homotopía como el conjunto de todas las aplicaciones  $\mathbf{f}: \Sigma \rightarrow M$  tales que cualquier par de ellas  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  pueden ser vistas como las aplicaciones inicial y final de un homotopía. De este modo, podemos clasificar las configuraciones del campo de Higgs de acuerdo a la clase de homotopía que le corresponde. Esta clasificación es invariante

de gauge y no depende de la elección particular de  $\Sigma$  (siempre que envuelva a la región  $U$  una sola vez y con una orientación determinada). Por construcción, es evidente que la clasificación es también independiente del tiempo. Por lo tanto, la clase de homotopía relacionada con la configuración *es una cantidad cuantificada que aparece a nivel clásico*, de origen puramente topológico.

Es posible definir una operación entre clases de homotopía (si se deja fijo un cierto punto base de  $M$ ) de manera que el conjunto de clases más la operación constituyan un grupo. Este grupo es conocido como el grupo de homotopía  $\pi_n(M)$ , donde la  $n$  indica que consideraremos  $\Sigma$  isomorfa a una  $n$ -esfera  $S^n$ . La operación de grupo asociada a  $\pi_n(G/H)$  corresponderá, precisamente, a la ley de combinación de estos números cuánticos de origen topológico.

### 1.3. Simetría y Dualidad

Considerando unidades naturales  $c = h = 1$ , Las ecuaciones de Maxwell en el vacío están dadas por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Estas ecuaciones presentan simetrías estrictas. Primero está lo que llamamos la *dualidad electromagnética*, que consiste en intercambiar los campos según

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B}, -\mathbf{E}), \quad (1.24)$$

y que es justamente lo que llamó la atención de Maxwell. Además, tenemos una invariancia ante transformaciones de Lorentz, la cual podemos apreciar mas claramente introduciendo el tensor de campo electro-magnético, y su respectivo tensor dual,



$$F^{0i} \rightarrow -F^{i0} = -E^i \quad F^{ij} \textcircled{R} - \hat{\mathbf{I}}_{ijk} B^k \quad (1.25)$$

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}}^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

de donde resulta la versión usual covariante de Lorentz de las ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.26)$$

Estas ecuaciones en el vacío también son invariantes conformes, dado que un reordenamiento de la métrica – que preserve los ángulos – mantiene la forma de las ecuaciones (1.26). La transformación de dualidad electromagnética se ve aquí más sencillamente como

$$F^{\mu\nu} \rightarrow *F^{\mu\nu} \quad , \quad *F^{\mu\nu} \textcircled{R} - F^{\mu\nu} \quad (1.27)$$

Esta simetría electromagnética de la que hemos hablado queda violada cuando introducimos fuentes.

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad , \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.28)$$

Siguiendo la tradición Maxwelliana, Dirac, en su famoso artículo de 1931 sobre los monopolos magnéticos [19] reestablece la simetría de las ecuaciones introduciendo una corriente magnética  $k^\mu$ .

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad , \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = k^\mu \quad (1.29)$$

y una extensión de las reglas de transformación

$$j^\mu \textcircled{R} k^\mu \quad , \quad k^\mu \rightarrow -j^\mu \quad (1.30)$$

Esta nueva cantidad es la corriente magnética, la cual automáticamente considera la existencia de objetos con carga magnética  $g = \int d^3x k^0$ , e impone una relación de transformación de dualidad entre las cargas eléctrica y magnéticas

$$(q, g) \stackrel{\mathcal{R}}{\rightarrow} (g, -q) \quad (1.31)$$

La transformación de dualidad efectuada dos veces transforma los campos (E,B) en (-E, -B), y hace otro tanto con las cargas  $(q, g) \rightarrow (-q, -g)$ ; asegurándonos que aplicar dos veces la dualidad electromagnética, es equivalente a cambiar el signo de las cargas y los campos. Este detalle nos dice que teorías invariantes bajo dualidad electromagnética, son también teorías invariantes bajo conjugación de cargas.

### 1.3.1. Acción de una partícula en un campo E - M

Ecuaciones como la que define la fuerza de Lorentz en ausencia de monopolos,

$$m \frac{d^2 x^m}{d\mathbf{t}^2} = q F^m \frac{dx_v}{d\mathbf{t}}, \quad (1.32)$$

se ven modificadas con un termino extra, que las hace invariantes ante la dualidad EM, e.g.

$$m \frac{d^2 x^m}{d\mathbf{t}^2} = (q F^m + g^* F^m) \frac{dx_n}{d\mathbf{t}} \quad (1.33)$$

Esta fuerza de Lorentz que considera al monopolo magnético, puede ser derivada de la acción de una partícula acoplada con campos externos producidos por cargas eléctricas y magnéticas. A continuación voy a deducir esta acción.

Para no tener que introducir explícitamente la restricción

$$\frac{dx^m}{d\mathbf{t}} \frac{dx_m}{d\mathbf{t}} = c^2 = 1, \quad (1.34)$$

con multiplicadores de Lagrange en la acción  $S = \int dx^0 L(x^m, x'^m) = 0$ , voy a usar un parámetro afín  $s$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange para las coordenadas con el parámetro afín están dadas por

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L(x^m, x'^m)}{\partial x'_m} \right) - \partial^m L(x^m, x'^m) = 0 \quad (1.35)$$

Donde  $x' = \frac{dx}{ds}$ , y no hay necesidad de multiplicadores. Con esto, la acción de una partícula en un campo eléctrico es

$$S = \int ds (m \sqrt{x'^m x'_m} + q x'_m A^m) \quad (1.36)$$

donde  $A^\mu$  es el potencial asociado a  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . El acoplamiento de la partícula con el potencial magnético debe ser consistente con la dualidad E-M, introduciendo a través del potencial  $\tilde{A}_m$  asociado a  $*F_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu$  se tiene:

$$S = - \int ds (m \sqrt{x'^m x'_m} + q x'_m A^m + g x'_m \tilde{A}^m). \quad (1.37)$$

Calculando las ecuaciones de movimiento, Primero,

$$\frac{\partial L}{\partial x'_m} = \frac{m}{\sqrt{x'^m x'_m}} \frac{dx^m}{dt} \frac{dt}{ds} + e A^m + g \tilde{A}^m.$$

Las restricciones (1.34) las insertamos bajo la forma  $\sqrt{x'^m x'_m} ds = dt$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x'_m} = m \frac{dx^m}{dt} + e A^m + g \tilde{A}^m, \quad (1.38)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_m} \right) = \left( m \frac{d^2 x^m}{dt^2} + e \partial^n A^m \frac{dx_n}{dt} + g \partial^n \mathcal{A}^m \frac{dx_n}{dt} \right) \sqrt{x'^r x'_r} , \quad (1.39)$$

$$\partial^m L = \frac{dx_m}{dt} \left( e \partial^m A^n + g \partial^m \mathcal{A}^n \right) \sqrt{x'^m x'_m} . \quad (1.40)$$

Luego, las ecuaciones de movimiento (1.35) corresponden exactamente a la ecuación de la fuerza de Lorentz en presencia de monopolos (1.33)

$$m \frac{d^2 x^m}{dt^2} = \left( q F^{mv} + g {}^* F^{mv} \right) \frac{dx_v}{dt} .$$

### 1.3.2. El monopolo de Dirac

Aunque la dualidad está clara para la intensidad de campo, cuando expresamos este tensor en términos del potencial electromagnético, es válido preguntarse como se relaciona  $A_\mu$  con el potencial dual  $\mathcal{A}_m$ . Aquí surge por primera vez un problema puramente topológico, la transformación de dualidad que relaciona a estos dos potenciales es *no-local*. Este hecho llevó hacia un nuevo terreno de tópicos matemáticos que había permanecido inexplorado. El primer detalle que pudiera parecer extraño, es que en presencia de fuentes magnéticas ocurre que  $\partial_\nu {}^* F^{mv} \neq 0$ , aunque no existía potencial electromagnético  $A^\mu$ . Simétricamente, en regiones donde no existan corrientes  $k^\mu$ , es posible caracterizar fuentes magnéticas localizadas a través de un potencial  $A^\mu$ . Estas regiones tienen en general una topología no trivial, y nos veremos obligados a definir el potencial localmente en una *carta* en particular sobre la *variedad* que defina al espacio-tiempo y especificar las respectivas *funciones de transición*.

Dirac plantea que imaginemos un monopolo magnético en analogía a su hermano eléctrico; una fuente magnética puntual de carga  $g$  que colocaremos por comodidad en el origen del espacio; <sup>3</sup> produce un campo magnético

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{g}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.41)$$

En cualquier lugar de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , el rotor de este campo es nulo  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ . Si intentáremos conseguir un potencial  $\mathbf{A}$  que provenga de  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , nos topáramos con una obligatoria singularidad del potencial en una región que asemeja una cuerda con un extremo en el origen y otro extremo infinitamente lejos. A este objeto se le suele llamar *la cuerda de Dirac* y se le representa

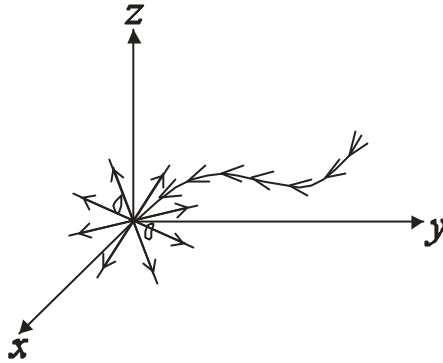


Figura 1.1: El monopolio de Dirac visto como el extremo de la cuerda de Dirac

“físicamente” como un solenoide *muy* apretado o como una cadena de dipolos que va desde el origen al infinito. Un ejemplo de potencial que produce un campo como el anterior es [38]:

$$A_+(r) = \frac{g}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} e_\phi, \quad (1.42)$$

expresado en coordenadas esféricas polares  $(r, \theta, \phi)$ . Esta es una cuerda de Dirac que cubre todo el eje  $z$  negativo, donde  $\theta = \pi$  el potencial (1.42) presenta una singularidad. Otra posibilidad es

$$A_-(r) = -\frac{g}{4\pi r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} e_\phi. \quad (1.43)$$

Aquí  $A_-$  es singular en la parte positiva ( $\theta = 0$ ) del eje  $z$ .

La región del espacio donde ambos potenciales están definidos (donde nuestras cartas se solapan) es el espacio  $\mathcal{D}$  sin el eje  $z$ . Aquí los campos se relacionan mediante una transformación de calibre

$$\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_- + \nabla \chi \quad (1.44)$$

$\chi$  representa la función de transición que mencionamos anteriormente, y solo necesita ser definida localmente. Además,  $\mathbb{R}^3 - \{k\mathbf{e}_z \mid k \in \mathbb{R}\}$  es desconexo, así que buscamos una región homeomorfa como por ejemplo el plano  $xy$  sin el origen y calculamos  $\chi$  allí. (Ver figura 1.2)  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  corresponde a

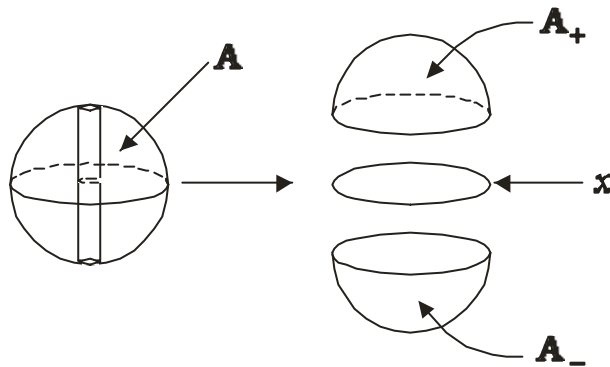


Figura 1.2.: Regiones en las que los campos  $\mathbf{A}_+$  y  $\mathbf{A}_-$  están definidos

$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}}{2}$ , por lo que fijamos

$$\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_- = \frac{g}{2\mathbf{p}r} \mathbf{e}_r = \nabla \left( \frac{g}{2\mathbf{p}} \mathbf{f} \right). \quad (1.45)$$

O bien

$$\mathbf{c} = \frac{g}{2\mathbf{p}} \mathbf{f}. \quad (1.46)$$

Tenemos el potencial en dos cartas que se solapan, y sus respectivas funciones de transición. He aquí una muestra de la estructura topológica: un potencial

electromagnético  $A_m$ , y su dual  $A_m^{\circ}$  relacionados no localmente. En  $A_m^{\circ}$  introducimos una carga magnética del mismo modo que lo haríamos en  $A_{el}$  para una carga eléctrica:

$$A^{\circ} = \frac{g}{4\mathbf{p}r'} \quad A^{\circ} = 0 \quad (1.47)$$

Mientras que si queremos el potencial “estándar”  $A_{el}$ , tenemos que especificarlo en dos regiones distintas del espacio-tiempo (1.42 , 1.43) y añadir la transformación de calibre que las vincule en la región de solapamiento de las cartas (1.46)

Calculemos la carga magnética de nuestro objeto puntual usando  $A_{el}$  y  $A_m^{\circ}$  para tener un panorama de la situación:

Vía  $A^m$  :

$$\begin{aligned} g &= \int_{s^2} B \cdot dS \\ &= \int_{s^2_+} \nabla \times A_+ \cdot dS + \int_{s^2_-} \nabla \times A_- \cdot dS \\ &= \int_{s^1} A_+ \cdot dl - \int_{s^1} A_- \cdot dl \\ &= \int_{s^1} \nabla \mathbf{c} \cdot dl \\ &= \mathbf{c}(2\pi) - \mathbf{c}(0) \end{aligned}$$

Vía  $A^{\circ m}$  :

$$\begin{aligned} g &= \int_{s^2} B \cdot dS \\ &= - \int_{s^2} \nabla A^{\circ} \cdot dS \\ &= - \int_{s^2} \nabla \left( \frac{g}{4\mathbf{p}r} \right) \cdot dS \\ &= \frac{g}{4\mathbf{p}} \int_{s^2} \frac{r}{r^3} \cdot dS \\ &= \frac{g}{4\mathbf{p}} \int_{s^2} d\Omega_2 \end{aligned}$$

### 1.3.3. La condición de cuantización

#### 1.3.4.

Volviendo al tema de las cuerdas de Dirac. En la discusión anterior, se recurrió a un artificio para describir el potencial: se sacó la cuerda de nuestro campo de visión. Dirac argumentó que el campo singular en esta región del espacio donde está el solenoide apretado – que debería tomarse en cuenta normalmente para contrarrestar la carga  $g$  del monopolo – debía ser inobservable. Además se deduce que dos cuerdas que terminan en el mismo monopolo tienen potenciales *distintos* aún cuando producen el mismo campo.

Así que de acuerdo con el experimento de Aharonov-Bohm, se tiene un método para distinguir dos cuerdas.

Ante esta incomodidad, la respuesta de Dirac fue requerir que los observables físicos no dependan de la posición de la cuerda. La cuerda debe ser *cuánticamente inobservable*. A través de la introducción de consideraciones mecánico-cuánticas en esta problema, veremos que la “condición de invisibilidad de la cuerda” nos conduce a la cuantización de la carga.

Como vimos en (1.44), los potenciales de dos cuerdas distintas están relacionados por una transformación de calibre. En general esta transformación [39] corresponde al gradiente del ángulo sólido que

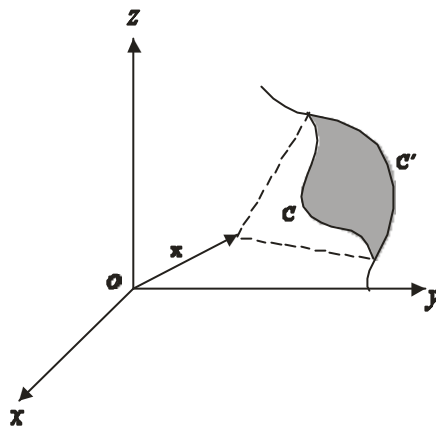


Figura 1.3: La transformación de calibre entre los potenciales de las cuerdas  $C$  y  $C'$  es el gradiente del ángulo sólido  $\Omega_{C-C'}(x)$ .

subtiende la diferencia entre las dos cuerdas – que es un solenoide en forma de lazo cerrado, como indica la Figura 1.3 – a los ojos de un punto de observación:

$$A = A' + g\nabla\Omega_{C-C'} \quad (1.48)$$

Ahora bien, sabemos [40] que una transformación de calibre electromagnético deja invariante al ecuación de Schödinger, si la función de onda del sistema que estamos considerando, se transforma según

$$\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}' = \mathbf{y} e^{iqx}. \quad (1.49)$$



Donde  $q$  es la carga de la partícula que la función describe, y  $x$  la función de calibre. De acuerdo a (1.48), un cambio en la posición de la cuerda de Dirac viene acompañado por una variación  $x = g\Omega_C - C'$ , que afecta a la función de onda:

$$\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}' = \mathbf{y}^{e i q g \mathbf{W} - C'} . \quad (1.50)$$

Un electrón ( $q = e/4\mathbf{p}$ ) que atraviese la región que encierra el desplazamiento de la cuerda, percibe una variación del ángulo subteniendo de  $4\mathbf{p}$ . Así que para que la función de onda del electrón no se vea afectada por la presencia de la cuerda de Dirac – cosa que afectaría a todo observable que midamos – nos vemos forzados a requerir.

$$eg = 2\mathbf{p}n , \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \quad (1.51)$$

Esto expresa una fundamentación teórica para la cuantización de la carga.

### 1.3.4. El monopolo según Wu y Yang

El desarrollo de la Geometría Diferencial, y de la Topología por el lado de la matemática, y de las teorías de calibre en el dominio de la física a mediados del siglo XX, puso de manifiesto una gran área de interés común. En las décadas subsiguientes un camino fisicomatemático complicado terminó por revelar que las teorías de Yang-Mills y la geometría afín de fibrados principales son exactamente la misma cosa [73]. Unos cuantos años más tarde, esta dirección de investigación generó el interés de los físicos por los métodos de la entonces nueva geometría diferencial, como el de los matemáticos por esta gran inspiración que presentaba relación con el mundo natural.

En el año 1975, Wu y Yang [32] abordaron el problema de los monopolos de Dirac, describiéndolos como *fibrados principales  $U(1)$  no-triviales con conexión*. En su lenguaje, lo que hemos hecho en las secciones anteriores es cubrir la esfera  $S^2$  que encierra el monopolo con dos cartas que se solapan al menos en el ecuador. Luego establecemos que las fibras sean elementos del grupo de las transformaciones de calibre electromagnético  $U(1)$ . Y finalmente “cosemos los parches” del fibrado, usando las

transformaciones de calibre como funciones de transición. En este contexto, veremos que la carga magnética corresponde a la primera clase de Chern del fibrado principal.

Vamos a analizar la interpretación de Wu-Yang, estableciendo la estructura de *fibrado principal*. Sea  $M = S^2$  el *espacio base*, que es parametrizado con coordenadas  $(\mathbf{q}, \mathbf{f})$ ,  $\mathbf{q} \in [0, \mathbf{p}]$ ,  $\mathbf{f} \in [0, 2\mathbf{p}]$ ; y  $F = U(1) \sim S^1$  que es parametrizado con coordenadas  $e^{i\psi}$  el *grupo de estructura* que es a la vez la *fibra*. Separamos ahora  $S^2$  en dos hemisferios  $S_+^2$  y  $S_-^2$  de tal modo que su intersección sea justamente el círculo unitario  $S_+^2 \cap S_-^2 = S^1$  parametrizado por el ángulo ecuatorial  $\phi$ . Esto establece *una trivialización local* que relaciona al aspecto local del fibrado:

$S_+^2 \times U(1)$  con coordenadas  $(\mathbf{q}, \mathbf{f}; e^{i\psi_+})$ , y

$S_-^2 \times U(1)$  con coordenadas  $(\mathbf{q}, \mathbf{f}; e^{i\psi_-})$ ,

con el espacio total  $E$  que tiene en general una estructura más complicada que  $S_+^2 \times S^1$ .

Las funciones de transición  $t_{ij}$  que por definición son elementos de  $U(1)$ , deben ser también funciones de el ángulo  $\mathbf{f}$  en  $S^1$ ,

$$t_{-+} \equiv e^{ic(\mathbf{f})}, \quad (1.52)$$

de tal modo que correspondan a la función que ya conocíamos (1,46).

La figura del campo de calibre – es decir el potencial  $A_\mu$  – es introducida a través de la 1-forma conexión que definimos localmente en los dos hemisferios:

$$\mathbf{w} = \begin{cases} A_+ + d\mathbf{y}_+ & \text{en } S_+^2 \\ A_- + d\mathbf{y}_- & \text{en } S_-^2 \end{cases} \quad (1.53)$$

la condición de compatibilidad que tiene la forma:

$$A_j = t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij},$$

queda en nuestro caso – usando (1.52) – simplificada a

$$A_{\pm m} = A_{mm} \pm i \partial_m \mathbf{C}, \quad (1.54)$$

en componentes. Esta conexión  $A_\mu$  difiere con el potencial cuadrivector estándar  $A_\mu$  en un factor del álgebra de Lie de  $U(1)$  :  $A_\mu = i A_\mu$  , y una constante de acoplamiento relacionada con la carga del electrón que todavía no tomaremos en cuenta. Esto nos lleva directamente a la transformación de calibre que ya conocíamos (1.44) :

$$A_{\pm m} = A_{mm} \pm \partial_m \mathbf{C}, \quad (1.55)$$

La estructura completa del electromagnetismo de Maxwell queda contenida así en la geometría del fibrado. Por ejemplo, la conexión  $\omega$  establece la *curvatura* del fibrado, a través de las *ecuaciones de estructura de Cartan*

$$\Omega = d\mathbf{w} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{w}, \quad (1.56)$$

que localmente se ven como

$$F = dA + A \dot{U}A, \quad (1.57)$$

y que en nuestro caso toman la forma

$$F = dA, \quad (1.58)$$

donde  $F = iF$  . De este modo, la teoría de Maxwell es un fibrado principal en el que la conexión  $\mathbf{w}$  representa el potencial, y la curvatura  $\Omega$  representa al campo electromagnético. En caso de que el fibrado este definido, como en nuestro caso, sobre un espacio de topología no trivial  $S^2$ , aparecen monopolos. Si el espacio es trivial, las ecuaciones locales (1.57) se satisfacen en toda la variedad y estamos en el caso usual sin monopolos.

Todavía queda, sin embargo, un detalle para aclarar. Cuando decimos que el *espacio total*  $P$  es una variedad, las fibras definidas en los hemisferios deben “acoplarse” exactamente. En el caso trivial no hay nada que acoplar porque las

ecuaciones locales (1.57) son las globales (1.56), pero cuando le damos la vuelta a la esfera  $S^2$  alrededor del ecuador  $S^1$ , el ajuste debe asegurarse mediante las condiciones de compatibilidad de las funciones de transición:

$$t_{ij}(p) t_{ji}(p) = 1, \quad p \in U_i \cap U_j \quad (1.59)$$

Que en nuestro caso quiere decir que el cambio dentro de las funciones de transición

$$\Delta \mathbf{c} \equiv \int d\mathbf{c} = \frac{g}{2\mathbf{p}} \int_0^{2\mathbf{p}} d\mathbf{f} = g, \quad (1.60)$$

debe ser múltiplo *entero* de  $2\pi$ :

$$g = 2\pi n, \quad \text{con } n \in \mathcal{Z}. \quad (1.61)$$

Esta es la “*versión topológica*” de la condición de cuantización de Dirac, que es equivalente a (1.51), si nos tomamos la molestia de ser un poco más analíticos; en realidad, para que el potencial vector  $A_\mu$  en la interpretación geométrica de Wu y Yang corresponda justamente al de la acción de Maxwell

$$-\frac{1}{4e^2} \int F_m F^m, \quad (1.62)$$

debemos introducir una constante de acoplamiento que no habíamos considerado anteriormente  $\frac{1}{e} A_\mu \rightarrow A_\mu$ , y que nos lleva a la cuantización de la carga tal como la habíamos obtenido en (1.51)

$$eg = 2\pi n, \quad \text{para algún } n \in \mathcal{Z}$$

El monopolo de Dirac posee otra “*cualidad topológica*” que aparece en el tapete cuando consideramos la *primera clase de Chern* de nuestro fibrado.

$$c_1(F) = \frac{iF}{2\mathbf{p}}. \quad (1.63)$$

Esta clase característica corresponde al *primer carácter de Chern*  $ch_1(F)$  en nuestro caso, donde puede entenderse como una medida de lo torcido que aparece el fibrado cuando pegamos sus piezas locales. Si integramos esta clase sobre la esfera  $S^2$ , siempre teniendo en mente el teorema de Stokes y las transformaciones de calibre (1.55), obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} ch_1(F) &= -\frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{S^2} F \\ &= -\frac{1}{2\mathbf{p}} \left( \int_{S^2_+} dA_+ + \int_{S^2_-} dA_- \right) \\ &= -\frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{S^1} (A_+ - A_-) \\ &= -\frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{S^1} dx, \end{aligned} \quad (1.64)$$

Considerando (1.45 , 1.46) , podemos concluir:

$$\int_{S^2} ch_1(F) = -\frac{g}{2\mathbf{p}} = -n.$$

Es decir, la carga magnética del monopolo puede verse como el *winding number* de la transformación de calibre. En otras palabras, las transformaciones de calibre  $d_X$  están clasificadas por el primer grupo de homotopía  $\mathbf{p}_1(U(1))$ , y escogen un representante de clase por cada número entero.

## 1.4. Cotas y Ecuaciones de Bogomol’nyi

Las soluciones extendidas de naturaleza topológica en teoría clásica de campos presentan una serie de características comunes que las dotan de un mayor interés. Su carga topológica puede ser vista como la integral espacial de la componente temporal de una corriente cuya divergencia se anula sin necesidad de imponer las ecuaciones de movimiento. La estabilidad de las configuraciones de mínima carga topológica está garantizada por su carácter topológico.

Estudiando la estabilidad de configuraciones de número topológico mayor, Bogomol'nyi encontró en 1976 [41] que ésta puede ser probada sólo cuando las constantes de acoplamiento de la teoría cumplen con ciertas condiciones particulares dependientes del modelo. Más aún, la masa de estas soluciones puede hallarse en forma analítica bajo las mismas condiciones, presentando las siguientes peculiaridades:

(i) La masa resulta proporcional a la carga topológica de la configuración. Dado que estas configuraciones son estables, una solución genérica de la teoría, perteneciente al mismo sector topológico, tendrá una masa superior o igual a la suya. Es decir, la masa de una solución cualquiera de la teoría clásica, sujeta a las restricciones arriba mencionadas sobre las constantes de acoplamiento, presenta una cota inferior usualmente llamada, *cota de Bogomol'nyi*. Cada sector topológico tendrá un valor para esta masa mínima, proporcional a su número topológico.

(ii) Las configuraciones de masa mínima, en cada sector topológico, son solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden consistentes con las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este conjunto de *ecuaciones de Bogomol'nyi* resulta, en principio, fácilmente integrable, aunque, en general, no se encuentra solución analítica para ellas. No obstante, para determinar el espectro de masa mínimas de los distintos sectores topológicos, no es necesario conocer la solución explícita, Es suficiente el saber que tal solución existe.

Este par de elementos, *cota* y *ecuaciones de Bogomol'nyi*, han sido desde entonces encontrados en innumerables modelos, aún en el contexto de las teorías gravitatorias.

La motivación original de Dirac – aparte de la esperanza en la detección de partículas con carga monopolar magnética, que nunca llegó a concertarse– fue que su afán de introducir una simetría capaz de explicar el origen de la cuantización de la

carga eléctrica. No obstante, que un sistema físico presente una “dualidad”, es decir que existan dos perspectivas distintas de la teoría, es algo que ocurre con extrema frecuencia en la física. La dualidad onda-partícula, es solo una de las muchas manifestaciones de esta manera de pensar en dualidad entre sistemas físicos que es llevada desde la mecánica cuántica y la física del estado sólido hasta los últimos desarrollos de la teoría de supercuerdas.

Sobre el Hamiltoniano del oscilador armónico, por ejemplo,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \quad (1.65)$$

se puede definir una transformación canónica

$$D: x \rightarrow \frac{p}{m\omega}, \quad p \rightarrow mx\omega, \quad (1.66)$$

que intercambia posición y momentum y deja invariante las relaciones de conmutación  $[x, p] = i$ .  $D$  es una *simetría* del Hamiltoniano que se ve reflejada en el hecho que la función de onda del estado base y su transformada de Fourier se intercambian bajo  $D$  (cosa que no es el del todo sorprendente puesto que la transformada de una gaussiana es una gaussiana). Otro detalle importante es que, en analogía al caso de la dualidad electromagnética, aplicar dos veces la transformación  $D$  es equivalente a cambiar el signo a  $x$ . Reconocemos la acción del operador de paridad ( $D^2 = P$ ), que deja invariante al Hamiltoniano del oscilador armónico en la misma forma en la que la conjugación de carga deja invariante las ecuaciones de Maxwell.

Otro sistema que exhibe una dualidad, es el modelo de Ising bidimensional que describe un sistema de espines  $\sigma_i = \pm 1$  en una red cuadrada interactuando con sus primeros vecinos con una fuerza  $J$ . La temperatura crítica  $T_c$  de este modelo, descrito por la función de partición.

$$Z(K) = \sum_s e^{K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j}, \quad K = \frac{J}{k_B T} \quad (1.67)$$

fue calculada por Kramers y Wannier usando dualidad, aún antes de que el sistema fuera resuelto analíticamente por Onsager. El cálculo de la temperatura crítica usando dualidad, se basa en que el sistema descrito por la red *dual* – aquella cuyos vértices son los centros de las caras de la red original – es también una red cuadrada, pero con una constante de acoplamiento  $K^*$  que cumple la relación

$$\operatorname{sen} h 2K^* = \frac{1}{\operatorname{senh} 2K}. \quad (1.68)$$

Lo fundamental aquí es que aunque ambos sistemas son equivalente– son dos redes cuadrada de espines– , cuando la red de espines se encuentra a alta temperatura, su dual se comporta como si tuviera temperatura baja, y viceversa. Si este sistema tiene una sola transición de fase, entonces esta debe ocurrir justamente en el punto en el que las constantes de acoplo sea iguales  $K = K^*$ , y esto precisamente determina la temperatura crítica

$$\sinh \left( \frac{2J}{k_B T_c} \right) = 1. \quad (1.69)$$

En la teoría cuántica de campos, el primer ejemplo de dualidad apareció en 1975, con la equivalencia del modelo de Thirring con el de sine-Gordon. El modelo 1+1 dimensional relativista de sine-Gordon descrito por la acción

$$S_{SG} = \int d^2 x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \mathbf{f} \partial^\mu \mathbf{f} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}^2} (\cos \mathbf{b} \mathbf{f} - 1) \right], \quad (1.70)$$



contiene mesones de masa  $M_m = \sqrt{a}$  y solitones de masa  $M_s = \frac{8\sqrt{a}}{b^2}$  que interpolan entre los infinitos mínimos que tiene el potencial de Thirring que describe fermiones interactuando bajo la batuta de la acción.

$$S_s = \int d^2x \left[ \bar{y} i g_m \partial^m y + m \bar{y} y - \frac{g}{2} (\bar{y} g^m y) (\bar{y} g_m y) \right]. \quad (1.71)$$

La equivalencia relaciona las constantes de acoplo de ambas teorías ( $\beta^2$  y  $g$ ), según

$$\frac{b^2}{4p} = \frac{1}{a + \frac{g}{p}}, \quad (1.72)$$

e intercambia los solitones del sine-Gordon por los fermiones de Thirring, y los mesones por anti-fermiones, lo que sugiere una cierta “simetría” entre campos bosónicos y fermiónicos. Al igual que en el caso del modelo de Ising (1.68), la constante de acoplamiento tiene una relación esencialmente de proporcionalidad inversa, y un régimen de acoplamiento fuerte en una teoría que corresponde a una de acoplamiento electro-debil en la otra.

En general, esta dualidad relaciona regímenes de acoplamiento fuerte con electro-débil y viceversa, entre teorías equivalentes. También intercambia automáticamente las cargas conservadas de Noether con cargas “topológicas”. Y además, con frecuencia involucra una dualidad de tipo “geométrico” como la que existe entre la red y la red dual en el modelo de Ising.

El trabajo de Mandelstam, 't Hooft y otros, sugirió que el confinamiento en la cromodinámica cuántica puede entenderse como un fenómeno dual a la superconductividad, que involucra la condensación de objetos magnéticamente cargados. Esto término de incentivar la búsqueda de dualidad en teorías de calibre en 4 dimensiones, que hasta entonces había estado motivada en gran medida por la

existencia de dualidad en los sistemas simples que hemos comentado, y por los resultados de Dirac, 't Hooft y Polyakov en cuanto a la existencia de los monopolos magnéticos.

El electromagnetismo con monopolos no es el final de esta búsqueda porque los monopolos magnéticos no forman parte del espectro estándar de la electrodinámica cuántica, pero aún, a partir de ésta, no se puede definir una teoría de campos local que posea electrones y monopolos a la vez. Lo que nos lleva al trabajo de 't Hooft y Polyakov.

### 1.4.1. El monopolos de 't Hooft-Polyakov

Una teoría que cumple los requisitos de espectro con cargas eléctrica y magnéticas a la vez, es la parte bosónica del modelo de Georgi-Glashow. En 1974, 't Hooft [25] y Polyakov [26] descubrieron que este modelo admite soluciones que desde lejos parecen monopolos de Dirac. No obstante estas soluciones son regulares y no necesitan fuentes de carga magnética como el monopolos de Dirac.

Dado que los monopolos solo tiene sentido si el grupo de calibre  $U(1)$  es compacto, tiene sentido buscar teorías en las que  $U(1)$  es compacto por estar inmerso en un grupo de calibre más grande que también sea compacto. Además, como el operador de carga eléctrica  $Q$  es el generador del álgebra  $U(1)$  en la teoría de Maxwell, su cuantización pudiera explicarse si  $Q$  fuera generador del álgebra de un grupo de calibre simple más grande que contenga generadores de autovalores discretos. La selección más sencilla para esta grupo grande es a todas luces  $SU(2)$ , donde  $Q$  sería un generador del álgebra de momentum angular de espín  $SU(2)$ , que tiene autovalores discretos.

Esto cuantiza la carga, y pareciera que nos hemos desecho del “incómodo” monopolos, sin embargo con el grupo  $SU(2)$  tenemos el problema de escoger la dirección de  $Q$  en las tres coordenadas de  $SU(2) \sim SO(3)$ , lo que se hace mediante un campo escalar  $\phi^a$  de tres componentes ( $a = 1, 2, 3$ ) como los campos de calibre  $SU(2)$ . Este campo tiene el aroma del campo de Higgs, ya que debe tener la propiedad de no desvanecerse en el vacío puesto que allí también debe fijar la dirección de  $Q$ .

Lo que queda al final es un campo tipo “Higgs” que a través de la ruptura espontánea de simetría del vacío, rompe la simetría de calibre  $SU(2)$  para dejarnos con la simetría del subgrupo  $U(1)$  [42, 43, 44] que queríamos para definir el operador de carga.

Así como está planteada, esta teoría vendría a ser un buen análogo en cuatro dimensiones para la teoría de sine-Gordon. En este caso la simetría que relaciona los distintos vacíos no es discreta sino continua, pero de todos modos es posible conseguir configuraciones estables de campos con topología no trivial y energía finita. En lenguaje más sencillo; aquí también hay solitones.

Lo que ’t Hooft y Polyakov descubrieron, fue justamente que estas soluciones clásicas producen un flujo magnético con una intensidad  $g = \frac{4\mathbf{p}}{e}$  que desde lejos generan un campo igual al del monopolo de Dirac. Así que finalmente tenemos una teoría  $U(1)$  con monopolos de carga  $\frac{4\mathbf{p}}{e}$ , dentro de una teoría  $SU(2)$  que por si sola tiene ya partículas con carga eléctrica  $\pm e$ . Estas soluciones obedecen la condición de Dirac (1.36) de manera que la supuesta explicación sin monopolos de la cuantización de la carga se reduce al final al mismo argumento de Dirac.

### 1.4.2. Estados BPS

El centro de esta discusión es en realidad el origen de la masa y la carga de los campos que hemos trabajado. Como los monopolos de Dirac nos exigen una fuente, su masa es un parámetro libre que no se puede calcular. Pero el monopolo de ’t Hooft-Polyakov no tiene tal fuente, y su masa es una propiedad intrínseca del sistema de Yang-Mill-Higgs que lo soporta, de manera que parece calculable.

Primero una aproximación heurística a la dependencia funcional de la masa. Como los parámetros libres aquí son las cargas, y presumiblemente la masa depende de ellas, podemos decir:

$$M = M(e, g). \quad (1.73)$$

Sin embargo la dualidad electromagnética discreta, puede generalizarse y hacerse continua bajo la forma de una rotación de tipo [45]:

$$e + ig \in \mathbb{R} e^{i\mathbf{f}}(e + ig), \quad (1.74)$$

la dependencia funcional de  $M$  en las cargas monopulares se lo debemos a Bogomol'nyi [27, 28] y se conoce como la *cota de Bogomol'nyi*

$$M = M(|e + ig|) = M(\sqrt{e^2 + g^2}). \quad (1.75)$$

El resultado para las cargas monopulares se lo debemos a Bogomol'nyi [27, 28] y se conoce la *cota de Bogomol'nyi*

$$M \propto a |g| \quad (1.76)$$

El mecanismo de Higgs, por otro lado, nos suministra la siguiente fórmula para la masa de las cargas eléctricas de la teoría:

$$M = a |q| \quad (1.77)$$

La similitud entre estas fórmulas nos hace preguntarnos si existe un límite en el que se sature la fórmula (1.76). El llamado *límite de Prasad-Sommerfield* [36] hace el trabajo de conseguir la igualdad imponiendo las *ecuaciones de Bogomol'nyi*.

$$E_i = 0, \quad \nabla_0 \mathbf{f} = 0, \quad B_i = \pm \nabla_i \mathbf{f}, \quad (1.78)$$

Donde  $E_i$  y  $B_i$  son las componentes de los campos de calibre no-abelianos eléctrico y magnético. En el caso de monopolos de 't Hooft-Polyakov que admiten carga eléctrica, la fórmula de masa que satura la cota de Bogomol'nyi es

$$M = a\sqrt{e^2 + g^2} \quad (1.79)$$

y se cumple para todas las partículas del modelo. Las configuraciones de campo para las que se cumplen las ecuaciones de Bogomol'nyi, son lo que se denominan estados *BPS*.

## Capítulo 2

# Supersimetría y Supergravedad

A fin de estudiar la relación existente entre los aspectos topológicos discutidos precedentemente y la supersimetría extendida, introduciremos en este capítulo algunos elementos generales de supersimetría: describimos el álgebra de supersimetría N-

extendida en un espacio-tiempo tetradimensional, seguidamente presentamos la formulación de estas teorías en términos de supercampos evaluados en el superspacio. Luego se estudia la teoría de supergravedad y sus aspectos geométricos. Finalizamos discutiendo algunos aspectos relacionados con la construcción de las cargas conservadas de la supergravedad.

## 2.1 Supersimetría en la Teoría de Campos

No hay evidencias experimentales consistentes de que la supersimetría sea una simetría de la naturaleza. Sin embargo, el número de razones teóricas por las que parece necesario recurrir a ella ha ido aumentando progresivamente en los últimos 20 años. Desde la escala de energía del modelo Standard de la interacción electrodébil hasta la escala de Planck de la gravedad cuántica, los intentos de unificación de las interacciones fundamentales llevan a preguntarse acerca de la posible existencia de una súper-simetría que relacione los sectores bosónico y fermiónico. Una simetría de esta naturaleza brinda un mecanismo que permitiría mantener esta jerarquía de masas sin la necesidad de realizar un ajuste fino a cada orden de la teoría de perturbaciones, debido al teorema de no-renormalización [46]. Por otra parte, la supersimetría aporta un marco teórico para comprender de qué manera las interacciones electrodébil y fuerte han tenido su origen en una única interacción presente a altas temperaturas ( $T : 10^{15} GeV$ ) que se presume tuvieron lugar en periodos tempranos del Universo.

Se especula que, de existir una teoría que unifique todas las interacciones tanto a nivel clásico como cuántico, esta podría ser supersimétrica ( las candidatas más prometedoras son, en este sentido, las teorías de supercuerdas ). La diferencia principal entre las dos interacciones de largo alcance, la gravedad y el electromagnetismo, generalmente pensada como un impedimento para la unificación de las mismas, radica en el carácter exclusivamente atractivo de la primera. Precisamente en este hecho reposa la razón principal para buscar una eventual teoría unificadora en el contexto de algún modelo supersimétrico [47]: la fuerza atractiva es propagada por un campo de espín par, mientras que la interacción electromagnética tiene por partícula portadora al fotón, excitación de un campo de espín 1. Solo la supersimetría es capaz de considerar multipletes que contengan a estos portadores. Mas aún, dichos multipletes deberán contener campos de materia (fermiónicos). En la Teoría Cuántica de Campos, la única

manera conocida en la actualidad para unificar todas las interacciones (incluida la gravitatoria), se basa en los modelos de supersimetría. En efecto, la supergravedad (supersimetría local) unifica de manera natural a la gravitación con las otras interacciones.

¿Qué es, entonces, la supersimetría? En forma amplia se podría decir que es una simetría que unifica a fermiones (básicamente materia) y bosones (básicamente mediadores de las interacciones) colocándolos en un mismo multiplete, consecuencia inmediata de este hecho es que sus generadores deben ser de naturaleza fermiónica. Por otra parte, al relacionar campos con distintos valores de espín, la supersimetría resulta ser una simetría interna que se combina de manera no-trivial con el grupo de Poincaré. En 1967, Coleman y Mandula [48] probaron, bajo hipótesis muy generales, que cualquier grupo de Lie que contenga al grupo de Poincaré  $P$  y a un grupo de simetría interna  $G$ , resulta ser el producto directo  $P \times G$ . Es decir, no es posible combinar de manera no-trivial las simetrías internas de una teoría con las del espacio-tiempo, dentro de un grupo de Lie. Los generadores de las simetrías internas conmutan con el momento y el momento angular, de modo que los múltipletes irreducibles de estos grupos de simetría no pueden contener partículas de distinta masa o de diferente espín.

La estructura del grupo de Lie, al menos en el entorno de la identidad, está determinada enteramente por el álgebra de Lie. Por lo tanto, se debe de generalizar ésta a fin de poder construir el álgebra de los generadores de supersimetría que admita representaciones que mezclen campos de distinto espín. Gol'fand y Likhtman [49] resolvieron el problema introduciendo el álgebra de Lie graduada en la que los generadores se dividen en pares  $P$  e impares  $I$ , según satisfagan relaciones de conmutación o anticonmutación de acuerdo al esquema siguiente:

$$[P, P] = P, \quad [P, I] = I \quad \text{y} \quad \{I, I\} = P \quad (2.1)$$

Los generadores del grupo de Poincaré  $P_A$  y  $J_{AB}$  son operadores pares que satisfacen las siguientes propiedades del álgebra de Lie:

$$[P_A, P_B] = P_C, \quad [P_A, J_{BC}] = \mathbf{h}_{AB} P_C - \mathbf{h}_{AC} P_B$$

y

$$\{J_{AB}, J_{CD}\} = \mathbf{h}_{AD} J_{BC} + \mathbf{h}_{BC} J_{AD} - \mathbf{h}_{AC} J_{BD} - \mathbf{h}_{BD} J_{AC} \quad (2.2)$$

mientras que los generados de la supersimetría  $Q_\alpha$  resultan impares, dada su naturaleza fermiónica, de modo que satisfacen relaciones de anticonmutación

$$\{Q_a, Q_b\} = P_{ab} \quad (2.3)$$

El álgebra de Lie graduada se completa con los conmutadores entre operadores pares e impares como, por ejemplo,

$$[Q_a, J_{AB}] = (c_{AB})_a^b Q_b \quad (2.4)$$

Utilizando las identidades de Jacobi generalizadas, se puede comprobar que las matrices  $c_{ab}$  forman una representación del álgebra de Lorentz. En otras palabras,  $Q_\alpha$  se transforma en una representación (fermiónica) del grupo de Lorentz. Mas aún, los operadores de simetría fermiónicos solo pueden tener un valor de espín igual a  $1/2$  [25]. Eligiendo la representación irreducible  $(0, 1/2) \oplus (1/2, 0)$ , las matrices  $c_{AB}$  resultan ser proporcionales a las matrices de espín  $\Sigma_{AB}$ .

$$c_{AB} = \frac{1}{2} \Sigma_{AB} \frac{1}{4} (\Gamma_A \Gamma_B - \Gamma_B \Gamma_A), \quad (2.5)$$

construidas a partir de las matrices de Dirac  $\Gamma_A$ , de donde resulta claro que el subíndice de  $Q_\alpha$  describe su carácter espinorial.

Es posible elegir en este punto, sin perder generalidad,  $Q_\alpha$  como un espinor de Majorana

$$Q_a = C_{ab} \bar{Q}^b \quad (2.6)$$

donde  $C_{\alpha\beta} = -C_{3\alpha}$  es la matriz de conjugación de carga. Haciendo uso nuevamente de las identidades de Jacobi generalizadas, es posible obtener otras propiedades del álgebra de supersimetría. Así, se puede comprobar inmediatamente que el generador de supersimetría conmuta con  $P_A$ .

$$[Q_a, P_A] = 0, \quad (2.7)$$



y admite una simetría interna generada por un operador par de rotaciones quirales  $R$ ,

$$[Q_a, R] = i(\mathbf{G}_5)_a^b Q_b \quad (2.8)$$

Finalmente, el álgebra de supersimetría más general posible, compatible con el teorema de Coleman-Mandula, resulta:

$$\{Q_a, Q_b\} = 2(\mathbf{G}^A C)_{ab} P_A \quad (2.9)$$

Es decir, la aplicación sucesiva de dos transformaciones de supersimetría produce una traslación.

Resulta de sumo interés considerar el caso de una teoría invariante frente a  $N$  transformaciones independientes de supersimetría. Se habla, en este caso, de una teoría de supersimetría  $N$ -extendida. Llamando a los generadores,  $Q_a^I$ ,  $I = 1, \dots, N$  se comprueba de inmediato que las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.7) se modifican trivialmente (el superíndice  $I$  es mudo frente a las transformaciones del grupo de Poincaré). El álgebra de supersimetría se extiende para incorporar nuevos términos  $U^{IJ}$  y  $V^{IJ}$ ,

$$\{Q_a^I, Q_b^J\} = 2(\Gamma^A C)_{ab} \mathbf{d}^{IJ} P_A + C_{ab} U^{IJ} + (\Gamma_5 C)_{ab} V^{IJ} \quad (2.10)$$

antisimétricos en los índices  $(I, J)$ , denominados cargas centrales. Como consecuencia de las identidades de Jacobi generalizadas, ellas conmutan con todos los generadores del álgebra y entre sí. Por último, el grupo interno de simetría que admite una teoría con  $N$  supersimetrías puede ser obtenido mediante el uso, una vez más, de las identidades de Jacobi, y resulta  $U(N)$  en ausencia de cargas centrales y, en general,  $USp(2q_1) \times \dots \times$

$USp(2q_k) \times U(N - 2q)$  con  $k \leq N/2$  y  $q = \sum_{i=1}^k q_i = [N/2]$ , cuando las cargas centrales

están presentes en el álgebra [120].

### 2.1.1 Superespacio, Supercampos y Acciones

## Supersimétricas .

Una formulación particularmente útil, elegante y compacta para la construcción de teorías supersimétricas y el calculo de correcciones cuánticas en las mismas, es la que resulta de la definición del superespacio [52, 53] .Introduciremos, pues, el superespacio como una variedad que puede ser descrita localmente por las coordenadas anticonmutantes  $\mathbf{q}_a$  y  $\bar{\mathbf{q}}^{\dot{a}}$  que se acomodan, en el caso tetradimensional, en espinores de Weyl (ver Apéndice). Sobre esta variedad , las transformaciones de supersimetría se traducen en traslaciones.

$$(x^m, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rightarrow (x^m + i\mathbf{q}\mathbf{s}^m\bar{\epsilon} - i\epsilon\mathbf{s}^m\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q} + \epsilon, \bar{\mathbf{q}} + \bar{\epsilon}). \quad (2.11)$$

Esta traslación en el superespacio es generada por el operador diferencial  $\in Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}$ ,

$$Q_a = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^a} - i\mathbf{s}_{a\dot{a}}^m \bar{\mathbf{q}}^{\dot{a}} \partial_m \quad \text{y} \quad \bar{Q}^{\dot{a}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}^{\dot{a}}} - i\mathbf{q}^a \mathbf{s}_{a\dot{b}}^m \epsilon^{\dot{b}} \partial_m, \quad (2.12)$$

donde  $Q_a$  y  $\bar{Q}^{\dot{a}}$  generan, por otra parte, álgebra de supersimetría (2.9)escrita en la formulación biespinorial. Notamos, a partir de (2.12), que las dimensiones de masa de  $Q$  y  $\bar{Q}$  son  $m^{1/2}$ , mientras que las coordenadas grassmanianas  $\mathbf{q}$  y  $\bar{\mathbf{q}}$  tienen dimensionalidad  $m^{-1/2}$ . Es posible construir un nuevo conjunto de operadores diferenciales  $D_\alpha$  y  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ ,

$$D_a = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^a} + i\mathbf{s}_{a\dot{a}}^m \bar{\mathbf{q}}^{\dot{a}} \partial_m \quad \text{y} \quad \bar{D}_{\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}^{\dot{a}}} - i\mathbf{q}^a \mathbf{s}_{a\dot{b}}^m \partial_m, \quad (2.13)$$

que anticonmutan con los generadores  $Q$  y  $\bar{Q}$ :

$$\{D_a, Q_b\} = \{D_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = \{\bar{D}_{\dot{a}}, Q_b\} = \{\bar{D}_{\dot{a}}, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = 0, \quad (2.14)$$

de modo que operan en forma covariante (supersimétrica) sobre funciones definidas en el superespacio. Los supercampos son, precisamente, estas funciones  $F(x, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}})$  que

tienen como dominio alguna región del superespacio. Dado el carácter anticonmutante de  $\mathbf{q}$  y  $\bar{\mathbf{q}}$ , la expansión en series de Taylor de un supercampo en estas coordenadas se corta en un determinado orden,

$$F(x, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = f(x) + \mathbf{q}\mathbf{f}(x) + \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{c}}(x) + \mathbf{q}\mathbf{q}m(x) + \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}n(x) + \mathbf{q}\mathbf{s}^m\bar{\mathbf{q}}v_m(x) + \mathbf{q}\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{I}}(x) + \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}\mathbf{y}(x) + \mathbf{q}\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}l(x). \quad (2.15)$$

Las leyes de transformación para estos supercampos resultan definidas según

$$\mathbf{d}_\xi F(x, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = i(\xi \in Q + \bar{\xi} \in \bar{Q}) F(x, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}), \quad (2.16)$$

y el desarrollo en series de Taylor de ambos miembros de la ecuación anterior proporciona las leyes de transformación de los campos componentes. El parámetro de la transformación  $\xi$  tiene dimension  $m^{-1/2}$ . Los supercampos forman representaciones lineales del álgebra de supersimetría: tanto la combinación lineal de supercampo. Estas representaciones, no obstante, son en general reducibles. Podemos constreñir el supercampo a presentaciones irreducibles, imponiéndole vínculos covariantes como  $\bar{D}F = 0$  o  $F = F^\dagger$ . Llamaremos supercampo quiral  $\Phi$  a aquél que satisface la primera de estas condiciones, mientras que denominaremos supercampo vectorial  $V$  al que verifica la condición de realidad. Para construir explícitamente un supercampo, dado el elemento base de la representación, que no es mas que  $F(x,0,0)$ , debemos realizar una traslación en el superespacio:

$$F(x, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \exp[\mathbf{q}\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{Q}}] F(x,0,0). \quad (2.17)$$

Así, el supercampo quiral resulta dado, en términos de sus campos componentes, por la siguiente expresión :

$$\Phi(y, \mathbf{q}) = \mathbf{f}(y) + \mathbf{q}\mathbf{y}(y) + \mathbf{q}\mathbf{q}F(y), \quad (2.18)$$

en la que  $y^m = x^m + i\mathbf{q}\mathbf{s}^m\bar{\mathbf{q}}$ , evidenciando la condición de quiralidad impuesta sobre el supercampo. El producto de supercampos quirales da lugar a nuevos supercampos

quirales. En cambio, el producto de un campo quiral con uno antiquiral, arroja como resultado un supercampo de naturaleza vectorial.

El supercampo vectorial, por su parte, puede ser escrito de manera compacta en la calibración de Wess-Zumino como

$$V = -\mathbf{q}\mathbf{s}^m \bar{\mathbf{q}} A_m(x) + i\mathbf{q}\mathbf{q}\mathbf{q}\bar{\mathbf{r}}(x) - i\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}\mathbf{r}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{q}\mathbf{q}\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} D(x) \quad (2.19)$$

De este modo, podemos ver al supercampo vectorial como la generalización supersimétrica del campo de gauge. Asimismo, podemos construir un supercampo quiral invariante de gauge  $W_\alpha$  correspondiente al tensor electromagnético, mediante la condición (covariante):

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}_\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} D_\alpha V \quad (2.20)$$

con una descomposición en campos componentes dada por

$$W_\alpha = i\mathbf{r}_\alpha(y) + \mathbf{q}_\alpha D(y) - \frac{i}{2}(\mathbf{s}^m \bar{\mathbf{s}}^{\nu} \mathbf{q})_\alpha F_m(y) + \mathbf{q}\mathbf{q}\mathbf{s}_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\mathbf{r}}^{\dot{\alpha}}(y) \quad (2.21)$$

Análogamente, el supercampo antiquiral  $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ ,

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D^{\dot{\alpha}} D_\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} V \quad (2.22)$$

tiene un desarrollo similar en campos componentes, dependientes de la variable  $y^{\dot{m}} = x^m - i\mathbf{q}\mathbf{s}^m \bar{\mathbf{q}}$  a raíz de su pertenencia a un supermultiplete antiquiral. Debido a que las coordenadas grassmannianas del superspacio tienen dimensiones negativas de masa, los campos  $F$  y  $D$  deben ser los de mayor dimensionalidad en sus respectivos multipletes. Consecuencia directa de este hecho, resulta el que sus transformaciones de supersimetría no puedan ser otra cosa que *derivadas totales* de campos de menor dimensionalidad. De este modo, un lagrangiano invariante supersimétrico puede ser construido considerando la componente  $F$  de algún supercampo quiral o,

alternativamente, como la componente  $D$  de un supercampo vectorial. En términos del superespacio, recordando que las únicas integrales sobre las variables de Grassmann que arrojan un resultado no - trivial son :

$$\int d^2 \mathbf{q} \mathbf{q}^a \mathbf{q}_a = \int d^2 \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}}_a \bar{\mathbf{q}}^{a*} = 1, \quad (2.23)$$

la componente  $F$  de un supercampo quiral  $\Phi$  puede ser convenientemente escrita como

$$F = \int d^2 \mathbf{q} \Phi, \quad (2.24)$$

mientras que la componente  $D$  de un supercampo vectorial  $V$  resulta, simplemente.

$$D = \int d^2 \mathbf{q} d^2 \bar{\mathbf{q}} V \quad (2.25)$$

De este modo, la acción supersimétrica mas general posible, puede escribirse esquemáticamente como

$$S = \int d^4 x (d^2 \mathbf{q} \Phi + h.c.) + \int d^4 x d^2 \mathbf{q} d^2 \bar{\mathbf{q}} V, \quad (2.26)$$

donde  $\Phi$  es algún supercampo quiral y  $V$  algún supercampo vectorial, construidos mediante el uso del calculo tensorial supersimétrico [54] a partir de los supercampos fundamentales de la teoría.

Consideramos dos ejemplos sencillos que resultaran de gran utilidad para el capitulo próximo. Podemos construir un supercampo quiral multiplicando factores quirales  $W_a$ . Así, el producto  $\epsilon^{ab} W_a W_b$  es, por construcción, un supercampo quiral invariante Lorentz. La integral espacio-temporal de su componente  $F$  resultará, entonces, una acción con invarianza supersimétrica Explícitamente.

$$\frac{1}{4} \int d^4 x d^2 \mathbf{q} \epsilon^{ab} W_a W_b + h.c. = \int d^4 x \left[ -\frac{1}{4} F_m F^{m\nu} - i \mathbf{r} \mathbf{S}^m \partial_m \bar{\mathbf{F}} + \frac{1}{2} D^2 \right] \quad (2.27)$$

es la versión supersimétrica del termino de Maxwell, en la que vemos aparecer el termino cinético del fotito y queda en evidencia el carácter auxiliar del campo  $D$ .

Si hacemos, en cambio, el producto de un supercampo quiral con otro antiquiral  $\Phi^\dagger$ , resulta un supercampo vectorial. El producto de éste con otros campos vectoriales, seguirá siendo de naturaleza vectorial. De este modo, la componente  $D$  del campo vectorial  $\Phi^\dagger e^v \Phi$ , tendrá que ser una acción supersimétrica. El calculo explicito muestra que tal cantidad,

$$\int d^4x d^2\mathbf{q} d^2\bar{\mathbf{q}} \Phi^\dagger e^v \Phi = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (D_m \mathbf{f})^* (D^m \mathbf{f}) - \frac{i}{2} \mathbf{y} \mathbf{s}^m D_m \bar{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} |F|^2 + \frac{ie}{2} (\bar{\mathbf{y}} \mathbf{r} \mathbf{f} - \mathbf{r} \mathbf{y} \mathbf{f}^*) + \frac{e}{2} D |\mathbf{f}|^2 \right] , \quad (2.28)$$

no es más que la extensión súper simétrica del termino cinético de un campo escalar complejo. Contiene el término cinético del Higgsino cargado, junto con otros términos auxiliares y de interacción.

Cuando el grupo de simetría interna es abeliano, como es el caso en la presente discusión, es posible sumar a la acción un término lineal en el supercampo vectorial,

$$\int d^4x d^2\mathbf{q} d^2\bar{\mathbf{q}} \mathbf{x} V = \mathbf{x} \int d^4x D , \quad (2.29)$$

conocido como el término de Fayet-Hiopoulos, relacionado con la ruptura espontánea de supersimetría y la generación de potenciales de ruptura de simetría interna .

En el caso tridimensional, la discusión varia ligeramente. Los espinores tienen tan solo dos componentes, de modo que es que el superespacio está descrito localmente por coordenadas  $(x^\mu, \theta^\alpha)$ , donde  $\theta^\alpha$  es un espinor de Majorana (real). Los operadores que representan a la supercarga y a la derivada covariante son análogos a los definidos en (3.29) y (3.30)

$$Q_a = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^a} - i(\mathbf{g}^m \mathbf{q})_a \partial_m \quad \text{y} \quad D_a = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^a} + i(\mathbf{g}^m \mathbf{q})_a \partial_m . \quad (2.30)$$

Las principales diferencias con el caso tetradimensional, son las siguientes:

(i) Es posible imponer la condición de realidad al supercampo escalar, dando lugar a

$$S(x, \mathbf{q}) = N(x) + \mathbf{q}^a \mathbf{c}_a(x) - \frac{1}{2} \mathbf{q}^a \mathbf{q}_a D(x) \quad , \quad (2.31)$$

que contiene un campo escalar real  $N$ , un fermión de Majorana  $\chi$ , y un segundo campo escalar real que, al estar en la potencia máxima del desarrollo del supercampo en las coordenadas anticonmutantes, resulta ser un campo auxiliar.

(ii) El supercampo vectorial lleva un índice espinorial  $\Gamma_\alpha$ , y en el calibre de Wess-Zumino se escribe como :

$$\Gamma_a(x, \mathbf{q}) = iA_m(x) (\mathbf{g}^m \mathbf{q})_a - \mathbf{q}^g \mathbf{q}_g \mathbf{r}_a(x) \quad , \quad (2.32)$$

donde el fotón  $A_\mu$ , es acompañado por el fotino  $\mathbf{r}$ ; que resulta un espinor de Majorana.

### 2.1.2. La Supercarga de Noether

La posibilidad de construir acciones explícitamente invariantes frente a transformaciones de supersimetría implica la existencia de teorías cuánticas de campos en las cuales los generadores  $Q_\alpha$  y  $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$  pueden ser representados en términos de corrientes espinoriales  $J_a^m$  y  $\bar{J}^{m\dot{\alpha}}$ .

$$Q_a = \int d^3x J_a^0 \quad \text{y} \quad \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \int d^3x \bar{J}^{0\dot{\alpha}} \quad , \quad (2.33)$$

conservadas

$$\partial_m J_a^m = 0 \quad \text{y} \quad \partial_m \bar{J}^{m\dot{\alpha}} = 0 \quad , \quad (2.34)$$

presentes en estas teorías como consecuencia del teorema de Noether. Las corrientes  $J_a^m$  y  $\bar{J}^{m\dot{\alpha}}$  son, entonces, expresiones locales en los operadores de campo. El álgebra (2.9) se satisface a partir de las relaciones canónicas de anticonmutación y el espacio de Fock resultante se ajusta a alguna representación del álgebra de supersimetría. Volviendo a la notación espinorial de 4-componentes, el metodo de Noether prescribe la siguiente expresión para la corriente conservada,

$$J^m = \sum_{\{\Phi\}} \frac{dL}{d\nabla_m \Phi} d\Phi + \sum_{\{\Psi\}} \frac{dL}{d\nabla_m \Psi} d\Psi - q^m \quad , \quad (2.35)$$

donde  $\{\Phi\}$  y  $\{\Psi\}$  representan los conjuntos completos de campos bosónicos y fermiónicos del modelo considerado. El termino  $q^\mu$  aparece de la libertad del lagrangiano, aún siendo invariante supersimétrico, de cambiar en una divergencia,

$$dL = \nabla_m q^m \quad (2.36)$$

La carga de supersimetría resultará, simplemente, la integral espacial de la componente temporal de la corriente .

## 2.2. Supergravedad

La supergravedad es la teoría de gauge que resulta de imponer la supersimetría como una invarianza local. Un hecho notable, al que debe su nombre , es que una simetría de gauge de este tipo entre fermiones y bosones sólo puede ser implementada en una teoría de campos si el espacio - tiempo es curvo y , por lo tanto , la gravedad está presente . Esto puede ser entendido de un modo simple recordando que, de acuerdo con el álgebra de supercargas , dos transformaciones de supersimetría sucesivas dan lugar a una traslación . Consecuentemente, si imponemos la invarianza supersimétrica como una simetría local, la teoría correspondiente resultara invariante ante traslaciones locales o, lo que es lo mismo, transformaciones generales de coordenadas. La teoría de gauge de la supersimetría contiene así a la gravedad y es, por lo tanto, conocida como supergravedad [55, 56].

Las teorías de supergravedad dan una descripción unificada, a nivel cuántico, de la gravitación y las restantes interacciones. Esta unificación se extiende hasta el principio general sobre el cuál se construyen estas interacciones: la invarianza de gauge. Si damos rango de invarianza local a N supersimetrías admitidas por un modelo, estudiado con supergravedad extendida  $N = 2$  por Ferrara y Van Nieuwenhuizen en 1977 [58], unifica electromagnetismo con la gravedad adicionando



un gravitino complejo al fotón y al gravitón. En este mismo modelo se comprobó explícitamente la cancelación entre los diagramas divergentes de la teoría de Maxwell-Einstein pura, y aquellos nuevos diagramas que contienen gravitinos en las líneas internas.

El estudio de algunos aspectos formales de las teorías de supergravedad extendida, puede brindar respuestas, inclusive, a problemas abiertos en el contexto de las teorías gravitatorias. Un ejemplo notable lo constituye la demostración de la positividad de la energía en la teoría de la relatividad general llevada a cabo por Deser y Teitelboim [59], a partir de la observación hecha por Teitelboim [60] según la cuál el Hamiltoniano cuántico de las supergravedad puede escribirse como

$$H = \frac{1}{\hbar} \text{tr} Q^2 \quad (2.37)$$

donde  $Q$  es la supercarga. De este modo, el límite  $\hbar \rightarrow 0$  de la expresión anterior resulta en el teorema de la positividad de la energía en la relatividad general [100]. Inspirado por estos argumentos, Witten [62] dio una prueba elegante y rigurosa del mismo. Posteriormente, Horowitz y Strominger [63], Deser [64] y Teitelboim [65] mostraron que estos resultados derivan del uso de : la supergravedad como una herramienta de cálculo poderosa para investigar la estructura de las teorías clásicas de la gravitación .

Más recientemente, la supergravedad ha sido utilizada para estudiar problemas de interés en el ámbito de la cosmología como el de la constante cosmológica y el cálculo microscópico de la entropía de Bekenstein-Hawking [66, 67] en ciertos agujeros negros que son solución, a bajas energías, de la teoría de supercuerdas [68, 69, 70]. Contagiados de este espíritu, también los resultados de esta Tesis grafican la enorme utilidad que pueda tener el estudio de teorías supergravitatorias para la comprensión de fenómenos que se presentan en teorías gravitatorias no-supersimétricas.

El campo de gauge correspondiente a la supersimetría local ha de ser fermiónico y tener, asimismo, un índice Lorentz vectorial: el cual lo denotaremos como  $\Psi_M$ . Una transformación infinitesimal de supergravedad sobre dicho campo toma la forma

$$d\Psi_M = \frac{2}{k} D_M \epsilon \ , \quad (2.38)$$

donde  $D_M \in$  es la derivada supercovariante del parámetro espinorial.  $\Psi_M$  es un campo de Majorana de espín 3/2 llamado gravitino ya que pertenece al mismo multiplete que el tensor simétrico de dos índices  $g_{MN}$  que describe al campo del gravitón (de espín 2). El conteo de grados de libertad “off - shell ” (sin haber eliminado a los campos auxiliares a través de sus ecuaciones de movimiento algebraicas ) . Indica que deben existir campos auxiliares en el supermultiplete que compensen la diferencia entre los grados de libertad bosónicos y fermionicos. Existen diversos conjuntos de campos auxiliares que cumplen con la condición. Trabajaremos en la formulación mínima, en la que no aparecen espinores auxiliares, y los grados de libertad bosónicos son provistos por un campo escalar M, un campo pseudoescalar N y un pseudovector  $b_M$ .

### 2.2.1 Elementos Geométricos.

No existen representaciones del grupo de transformaciones generales de coordenadas que se comporten como spinores frente al subgrupo de Lorentz [71]. Por este motivo, dado que las teorías de supergravedad incluyen campos fermiónicos como el gravitino. Los campos de materia y los compañeros supersimétricos de los bosones mediadores, una formulación que permita resolver este punto es necesaria .Para ello, definimos en cada punto  $x$  del espacio-tiempo, un conjunto de coordenadas  $\mathbf{x}_x^A(x)$ , localmente inerciales en dicho punto. Podemos, entonces, escribir la métrica en un sistema de coordenadas genérico (no - inercial) como:

$$g_{MN}(x) = V_M^A(x) V_N^B(x) \mathbf{h}_{AB} \quad , \quad (2.39)$$

donde hemos introducido la cantidad  $V_M^A(x)$  que resulta

$$V_M^A(x) = \frac{\partial \mathbf{x}_x^A(x)}{\partial x^M} . \quad (2.40)$$

Denotamos los índices espacio - temporales “curvos” con letras mayúsculas de la segunda mitad del alfabeto M, N, R, ... , mientras que utilizamos la primera mitad A, B, C, ... para caracterizar a los índices “planos”, referidos al sistema de coordenadas

localmente inercial  $\mathbf{x}_x^A(x)$  en cada punto  $x$  del espacio-tiempo. Fijadas las coordenadas localmente inerciales  $\mathbf{x}_x^A(x)$  en cada punto, las derivadas parciales  $V_M^A(x)$  cambian frente a una transformación general de coordenadas no-inerciales:  $x^M \rightarrow x'^M$ , de acuerdo a la regla :

$$V_M^A \rightarrow V'^A_M = \frac{\partial x^N}{\partial x'^M} V_N^A \quad . \quad (2.41)$$

Es decir, las cantidades  $V_M^A(x)$  definen un conjunto de 4 campos vectoriales covariantes al que se lo suele llamar tétrada o “vierbein”. Dado un campo vectorial contravariante  $A^M(x)$ , podemos utilizar la tétrada para referir sus componentes en el punto  $x$  al sistema de coordenadas localmente inercial  $\mathbf{x}_M^A(x)$  :

$$A^A(x) = V_M^A(x) A^M(x) \quad . \quad (2.42)$$

Notemos que las cantidades  $A^A(x)$  son campos escalares. Podemos hacer lo mismo con campos vectoriales covariantes y, en general, con campos tensoriales según :

$$A^A(x) = V_A^M(x) A_M(x) \quad , \quad B^A_B(x) = V_N^A(x) V_B^M(x) B^N_M(x) \quad . \quad (2.43)$$

donde  $V_B^N(x)$ ,

$$V_B^N(x) = \mathbf{h}_{ABg}^{MN}(x) V_M^A(x) \quad . \quad (2.44)$$

es, simplemente, la inversa de la tétrada:

$$V_B^M(x) V_N^B(x) = \mathbf{d}_N^M \quad y \quad V_M^A(x) V_B^M(x) = \mathbf{d}^A_B \quad (2.45)$$

Una vez que hemos definido un sistema de coordenadas localmente inerciales en cada punto del espacio-tiempo, los campos espinoriales pueden ser introducidos en el formalismo sin que sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz entren en conflicto con la invarianza frente a transformaciones generales de coordenadas. Dado

que la física no puede depender del sistema de referencia inercial elegido en cada punto, las ecuaciones de movimiento y la acción deben ser invariantes con respecto a redefiniciones de estos sistemas de coordenadas localmente inerciales en cada punto del espacio-tiempo. En otras palabras, la acción debe ser invariante frente a transformaciones de Lorentz locales  $A^A_B(x)$  que actúan sobre los campos de la teoría de acuerdo a sus índices localmente inerciales :

$$A^A(x) \rightarrow \Lambda^a_b(x) A^B(x) , \quad B^A_B(x) \rightarrow \Lambda^A_C(x) \Lambda^D_B(x) B^C_D(x) \dots \quad (2.46)$$

donde, claro está,

$$\mathbf{h}_{AB} \Lambda^A_C(x) \Lambda^B_D(x) = \mathbf{h}_{CD} . \quad (2.47)$$

En general, un campo  $\Phi_n(x)$  transformará de acuerdo a la regla:

$$\Phi_n(x) \rightarrow \Phi'_n(x) = \sum_m [D(\Lambda(x))]_{nm} \Phi_m(x) , \quad (2.48)$$

donde  $D(\Lambda(x))$  es una representación del grupo de Lorentz infinitesimal para cada punto del espacio - tiempo. De este modo, cada campo de la teoría resulta definido por sus propiedades de transformación tanto frente a las transformaciones generales de coordenadas, como frente al grupo de Lorentz local que resulta de cambiar la elección de sistema de coordenadas localmente inercial. Así, el campo de Dirac, por ejemplo, se comporta como un escalar frente a transformaciones generales de coordenadas y un espinor de Lorentz , mientras que la tétrada  $V^A_M$  es un vector coordinado, así como un vector de Lorentz . La acción, claro está, debe ser un escalar coordinado y Lorentziano .

Para poder escribir, en esta formulación , una densidad lagrangiana apropiada , debemos definir la diferenciación covariante sobre los campos . Si definimos la derivación en el sistema de coordenadas localmente inercial a través de la expresión.

$$\partial_A \equiv V^M_A \frac{\partial}{\partial x^M} , \quad (2.49)$$

las propiedades de transformación frente al grupo de Lorentz local no son apropiadas ,aunque desde el punto de vista de las transformaciones generales de coordenadas (2.49) presente un conjunto de campos escalares . En efecto,

$$\partial_A \Phi_n(x) \rightarrow \Lambda_A^B(x) \sum_m \left[ D(\Lambda(x)) \partial_B + V_B^M \frac{\partial D(\Lambda(x))}{\partial x^M} \right]_{nm} \Phi_m(x). \quad (2.50)$$

de modo que, a fin de construir un operador diferencial  $D_A$  que resulte un escalar coordinado y un vector frente a transformaciones de Lorentz,

$$D_A \Phi_n(x) \rightarrow \Lambda_A^B(x) \sum_m [D(\Lambda(x))]_{nm} D_B \Phi_m(x), \quad (2.51)$$

debemos introducir una conexión matricial  $\mathfrak{Q}_A^\Phi(x)$ , cuya transformación de Lorentz local contenga un término inhomogéneo que cancele al segundo término del miembro derecho de la ecuación (2.50):

$$\bar{\Omega}_A(x) \rightarrow D(\Lambda(x)) \bar{\Omega}_A(x) D^{-1}(\Lambda(x)) - V_A^M(x) \frac{\partial D(\Lambda(x))}{\partial x^M} D^{-1}(\Lambda(x)). \quad (2.52)$$

Para conocer la estructura de la matriz  $\mathfrak{Q}_A^\Phi(x)$ , podemos considerar transformaciones de Lorentz infinitesimales, en cuyo caso la matriz  $D(\Lambda(x))$  tomo la forma:

$$D(\Lambda(x)) = 1 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{AB}(x) \sum^{AB}, \quad (2.53)$$

donde  $\mathbf{w}_{AB}(x) = -\mathbf{w}_{BA}(x)$  es el parámetro de la transformación y  $\sum^{AB}$  son un conjunto de matrices constantes que satisfacen el álgebra de Lorentz (2.2). Finalmente, utilizando las propiedades de transformación de la tétrada en tanto vector de Lorentz , podemos deducir la siguiente expresión para la conexión  $\mathfrak{Q}_A^\Phi(x)$ :

$$\mathfrak{Q}_A^\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum^{BC} V_B^N(x) V_A^M(x) \nabla_M V_{CN}(x), \quad (2.54)$$

donde

$$\nabla_M V_{CN} \equiv \frac{\partial V_{CN}}{\partial x^M} - \Gamma_{MN}^L V_{CL} \quad (2.55)$$

es la derivada covariante (frente a transformaciones generales de coordenadas).  $\Gamma_{MN}^L$  son los símbolos de Christoffel correspondientes a la métrica del espacio- tiempo según:

$$\Gamma_{MN}^L = \frac{1}{2} g^{LP} \left[ \frac{\partial g_{PN}}{\partial x^M} + \frac{\partial g_{PM}}{\partial x^N} - \frac{\partial g_{MN}}{\partial x^P} \right] \quad (2.56)$$

Finalmente, hemos encontrado una expresión para la derivada covariante frente al grupo de Lorentz local

$$D_A = V_A^M D_M = V_A^M \left( \frac{\partial}{\partial x^M} + \frac{1}{4} \mathfrak{Q}_{MAB}(x) \Sigma^{AB} \right). \quad (2.57)$$

introduciendo un campo de gauge  $\mathfrak{Q}_{MAB}$  asociado a dicha simetría ,

$$\mathfrak{Q}_{MAB}(x) = V_A^N(x) \nabla_M V_{BN}(x) - V_B^N(x) \nabla_M V_{AN}(x) \quad , \quad (2.58)$$

que recibe el nombre de conexión espinorial . Haciendo uso de las ecuaciones (2.39) y (2.55) , podemos escribir dicha conexión puramente en términos del campo de tétrada según :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{MAB}(V) &= \frac{1}{2} V_A^N (\partial_M V_{BN} - \partial_N V_{BM}) - \frac{1}{2} V_B^N (\partial_M V_{AN} - \partial_N V_{AM}) \\ &- \frac{1}{2} V_A^R V_B^S V_M^C (\partial_R V_{CS} - \partial_S V_{CR}). \end{aligned} \quad (2.59)$$

En ausencia de torsión, el conmutador de estas derivadas covariantes está relacionado con la curvatura de las rotaciones espinoriales

$$[D_M, D_N] = \frac{1}{4} R_{MN}{}^{AB} \Sigma_{AB} , \quad (2.60)$$

que, a su vez, verifica la siguiente identidad con el tensor de Riemann del espacio - tiempo :

$$R_{MNRS} = R_{MN}{}^{AB} V_{AR} V_{BS} . \quad (2.61)$$

Si contraemos índices en el miembro derecho de la ecuación anterior, llegamos a una expresión para el escalar de curvatura R en términos del campo de tétrada y de la conexión espinorial:

$$R(V, \Omega) = R_{MN}{}^{AB} (\Omega(V)) V_B{}^N V_A{}^M . \quad (2.62)$$

En esta formulación, consideraremos a la tétrada como el campo que describe la geometría del espacio-tiempo (es decir, la gravitación).

## 2.2.2 Supergravedad Pura

Consideramos brevemente en esta sección, la construcción de la teoría de supergravedad para en un espacio-tiempo tetradimensional. Dado que el gravitino es el campo de gauge de la supersimetría local , sabemos que su ley de transformación debe estar dada por la ecuación (2.38), en la que la derivada  $D_M$  puede ser escrita en términos de la conexión espinorial,

$$d\Psi_M = \frac{2}{k} (\partial_M + \frac{1}{4} \Omega_{MAB} \Sigma^{AB}) \Psi . \quad (2.63)$$

Además, dado que el parámetro anticonmutante es un espinor de Majorana, el generador de las transformaciones de Lorentz que aparece en la ecuación anterior puede ser escrito en términos de los elementos del álgebra de Clifford como:

$$\Sigma^{AB} = \frac{1}{2}(\Gamma^A \Gamma^B - \Gamma^B \Gamma^A). \quad (2.64)$$

Un lagrangiano que resulte invariante frente a la transformación (2.63), puede ser obtenido de manera sencilla covariantizando el término de Rarita - Schwinger utilizado para describir la dinámica de campos de espín 3/2 como el gravitino:

$$\mathcal{L}_\Psi = -\frac{1}{2} \epsilon^{MNR S} \bar{\Psi}_M \Gamma_S \Gamma_N D_R \Psi_S. \quad (2.65)$$

Las matrices  $\Gamma^M(x)$  se obtienen a partir de los generadores del álgebra de Clifford por medio de la tétrada :

$$\Gamma^M(x) = V_A^M(x) \Gamma^A \quad (2.66)$$

El lagrangiano (2.65) es invariante frente a las transformaciones (2.63) sólo si el campo gravitacional satisface las ecuaciones de Einstein sin fuentes . Esto se debe a la necesidad de introducir el término cinético de la tétrada ,

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2k^2} V R(V, \mathcal{Q}), \quad (2.67)$$

que corresponde al lagrangiano de Einstein (V es el determinante de la tétrada). Dado que la tétrada es el campo bosónico del multiplete de Einstein cuyos estados no-masivos poseen la máxima helicidad posible, su ley de transformaciones supersimétrica sólo puede tomar la siguiente forma en términos del campo de gravitino:

$$dV_M^A = k \bar{\epsilon} \Gamma^A \Psi_M. \quad (2.68)$$



El lagrangiano total  $L = L_Y + L_V$  resulta invariante supersimétrico frente al conjunto de transformaciones locales (2.63) y (2.68). Es evidente que, la conexión espinorial puramente bosónica dada en (2.58) no resulta supercovariante. En presencia de supersimetría la deducción que nos llevó a su obtención debe ser modificada ligeramente a fin de tener en cuenta dicha invarianza. Aparece, entonces, una contribución fermiónica en la conexión espinorial, que adquiere la siguiente expresión:

$$\Omega_{MAB}(V, \Psi) = \Omega_{MAB}^{\text{bos}}(V) + \frac{k^2}{4} (\bar{\Psi}_M \Gamma_A \Psi_B + \bar{\Psi}_A \Gamma_M \Psi_B - \bar{\Psi}_M \Gamma_B \Psi_A) . \quad (2.69)$$

La (super) conexión espinorial  $\Omega_{MAB}(V, \Psi)$  es una cantidad supercovariante. La contribución fermiónica adicionada en (2.69), proporciona torsión al espacio-tiempo. Esto resulta evidente del cálculo del conmutador de dos derivadas supercovariantes escritas en términos de la superconexión espinorial  $\Omega_{MAB}$ :

$$[D_M, D_N] = \frac{1}{4} R_{MN}^{AB} \Sigma_{AB} + \frac{1}{2} R_{MN}^A D_A , \quad (2.70)$$

en el que aparece un término de torsión  $R_{MN}^A(V, \Psi)$ ,

$$R_{MN}^A(V, \Psi) = \frac{k^2}{2} V_M^B V_N^C \bar{\Psi}_B \Gamma^A \Psi_C . \quad (2.71)$$

La inclusión del término de torsión en la conexión espinorial sólo modifica al lagrangiano de supergravedad pura y sus correspondientes transformaciones a través de la corrección que introduce en la superderivada covariante.

Hemos construido de esta manera, la teoría de supergravedad pura, pero en su versión “on-shell” (sin campos auxiliares, de modo que el álgebra de supersimetría cierra únicamente sobre las ecuaciones de movimiento). A fin de poder construir acciones invariantes frente a supersimetría local que contengan a otros múltipletes, introducimos los campos auxiliares de la formulación mínima:  $M$ ,  $N$  y  $b_M$ . Al tratarse de campos auxiliares, sus leyes de transformación supersimétricas deben ser tales que se anulen

sobre las ecuaciones de movimiento. Esto restringe considerablemente los posibles términos que pueden aparecer de las siguientes expresiones:

$$\mathbf{d}M = a(\bar{\epsilon} \Gamma_M R^M) \quad , \quad \mathbf{d}N = b(i\bar{\epsilon} \Gamma_5 \Gamma_M R^M)$$

$$\text{y} \quad \mathbf{d}b_M = c(i\bar{\epsilon} \Gamma_5 R_M) + d(i\bar{\epsilon} \Gamma_5 \Gamma_M R^N) \quad , \quad (2.72)$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son parámetros reales que deben ser determinados mediante el requisito de que estas transformaciones cierren un álgebra.  $R^M$  es el tensor de campo del gravitino,

$$R^M = i\epsilon^{MNR5} \Gamma_5 \Gamma_N D_R(\Omega(V, \Psi))\Psi_S \quad , \quad (2.73)$$

y se anula sobre las ecuaciones de movimiento. Los valores que toman los distintos parámetros resultan:

$$a = b = -\frac{1}{3}c = d = -\frac{1}{2} \quad . \quad (2.74)$$

El hecho de que el álgebra aún no cierre “off-shell” se debe a que no hemos considerado la posibilidad de que las leyes de transformación de los campos contengan términos que dependan de los campos auxiliares y se anulen sobre las ecuaciones de movimiento. Teniendo en cuenta este tipo de términos, es posible llegar a un álgebra cerrada de las leyes de transformación de los campos que integran el multiplete de Einstein, sin hacer uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la supergravedad pura [72]. El resultado está dado por el siguiente conjunto de transformaciones:

$$\mathbf{d}V_M^A = k \bar{\epsilon} \Gamma^A \Psi_M \quad ,$$

$$\mathbf{d}\Psi_M = \frac{2}{k} D_M(\Omega(V, \Psi))\epsilon + i\Gamma_5 (b_M - \frac{1}{3}\Gamma_M \not{b})\epsilon - \frac{1}{3}\Gamma_M (M + i\Gamma_5 N)\epsilon \quad ,$$

$$\mathbf{d}M = -\frac{1}{2}V^{-1}\bar{\epsilon} \Gamma_M R^M - \frac{k}{2}i\bar{\epsilon} \Gamma_5 \Psi_M b^M - k \bar{\epsilon} \Gamma^M \Psi_M M + \frac{k}{2} \bar{\epsilon} (M + i\Gamma_5 N)\Gamma^M \Psi_M \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}N &= -\frac{i}{2}V^{-1}\bar{\epsilon}\Gamma_5\Gamma_M R^M + \frac{k}{2}\bar{\epsilon}\Psi_M b^M - k\bar{\epsilon}\Gamma^M\Psi_M N - \frac{k}{2}i\bar{\epsilon}\Gamma_5(M+i\Gamma_5 N)\Gamma^M\Psi_M, \\
\mathbf{d}b_M &= -\frac{3i}{2}V^{-1}\bar{\epsilon}\Gamma_5(g_{MN} - \frac{1}{3}\Gamma_M\Gamma_N)R^N + k\bar{\epsilon}\Gamma^N b_N\Psi_M - \frac{k}{2}\bar{\epsilon}\Gamma^N\Psi_N b_M \\
&\quad - \frac{k}{2}i\bar{\Psi}_M\Gamma_5(M+i\Gamma_5 N)\epsilon - \frac{ik}{4}\epsilon^{BCD} b_B\bar{\epsilon}\Gamma_5\Gamma_C\Psi_D. \quad (2.75)
\end{aligned}$$

El álgebra descrita por estas transformaciones resulta ser una generalización del álgebra de supersimetría global dada en la ecuación (2.9), explícitamente,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{d}_{\epsilon_1}, \mathbf{d}_{\epsilon_2}] &= \mathbf{d}_{generalcoord.} (2\bar{\epsilon}_2\Gamma_M\epsilon_1) + \mathbf{d}_{Lorentzlocal} (2\bar{\epsilon}_2\Gamma^M\epsilon_1\Omega_{MAB} \\
&\quad - \frac{2k}{3}\bar{\epsilon}_2(\Sigma_{AB}(M+i\Gamma_5 N) + \epsilon_{ABMN}b^M\Gamma^N)\epsilon_1) \\
&\quad + \mathbf{d}_{supersimetria} (-k\bar{\epsilon}_2\Gamma^M\epsilon_1\Psi_M). \quad (2.76)
\end{aligned}$$

El resultado de aplicar dos transformaciones locales de supersimetría sucesivas, no sólo se traduce en una transformación general de coordenadas de parámetro  $2\bar{\epsilon}_2\Gamma_M\epsilon_1$ , sino que produce además transformaciones locales de Lorente y de supersimetría con parámetros dependientes de los campos.

Finalmente, el lagrangiano de supergravedad pura off-shell, invariante frente a las transformaciones (2.75), resulta:

$$L_{SG} = -\frac{1}{2k^2}VR + \frac{i}{2}\bar{\Psi}_M R^M - \frac{1}{3}V(M^2 + N^2 - b_M b^M). \quad (2.77)$$

Es inmediato constatar que la eliminación de los campos auxiliares por medio de sus ecuaciones de movimiento algebraicas, conducen el Lagrangiano y sus transformaciones a la forma dada en las ecuaciones (2.63), (2.65), (2.67) y (2.68), es decir, a la formulación ‘on-shell’ de la supergravedad pura.

### 2.2.3. La Carga de la Supergravedad

Finalizaremos este capítulo discutiendo algunos aspectos relacionados con la construcción de las cargas conservadas de la supergravedad y del álgebra que ellas generan. En una teoría supergravitatoria, al igual que en la relatividad general, dado que

el espacio-tiempo plano. No obstante, si el espacio-tiempo tiene un comportamiento asintótico adecuado, se podrán definir cargas conservadas asociadas a los generadores deben resultar escritos en términos de integrales de superficie. La energía, por ejemplo, podrá ser identificada como la carga asociada a las traslaciones por Teitelboin [60].

Consideremos un espacio-tiempo con métrica  $g_{MN}$  que tiende asintóticamente a una solución de las ecuaciones de Einstein de vacío según:

$$g_{MN} = \bar{g}_{MN} + h_{MN} \quad (2.78)$$

con  $h_{MN} \rightarrow 0$  en el infinito, donde

$$\bar{G}_{MN} = \bar{R}_{MN} - \frac{1}{2} \bar{g}_{MN} \bar{R} = 0. \quad (2.79)$$

Las cantidades con una barra están calculadas puramente en términos de la métrica asintótica  $\bar{g}_{MN}$ . La descomposición (2.78) es covariante y no implica de modo alguno que  $h_{MN}$  represente pequeñas correcciones. El tensor de Einstein puede ser escrito como

$$G_{MN} = \bar{G}_{MN} + G_{MN}^{lin} - t_{MN}, \quad (2.80)$$

donde  $G_{MN}^{lin}$  es lineal en  $h_{MN}$  mientras que  $T_{MN}$ , al que definiremos, como el tensor de energía-momento del campo gravitacional, contiene términos de segundo orden y superiores en  $h_{MN}$ . El tensor energía-momento total  $\Theta_{MN}$  resulta:

$$\Theta_{MN} \equiv T_{MN} + t_{MN} = G_{MN}^{lin} \quad (2.81)$$

y satisface, a partir de la identidad de Bianchi, la ecuación

$$\bar{\nabla}_M \Theta^{MN} = 0, \quad (2.82)$$

donde  $\bar{\nabla}_M$  es la derivada covariante respecto de la métrica  $\bar{g}_{MN}$ . La conservación covariante (2.82) no es suficiente para construir cargas conservadas. Sin embargo, si introducimos los vectores de Killing,  $k_M^a$ ,  $a = 1 \dots N_k$ , de la métrica asintótica  $\bar{g}_{MN}$ ,

$$\bar{\nabla}_M k_N^a + \bar{\nabla}_N k_M^a = 0 \quad , \quad (2.83)$$

es inmediato ver que podemos definir una densidad vectorial conservada  $J_M^a$ ,

$$J_M^a \equiv \sqrt{-\bar{g}} \Theta_{MN} k^{Na} \quad , \quad (2.84)$$

de la que resultan un conjunto de  $N_k$  cargas conservadas  $K^a$ ,

$$K^a = \int_{\Sigma} \Theta^{MN} k_M^a d\Sigma_N \quad (2.85)$$

Si el cuádrivector  $k_M^a$  es tipo tiempo, entonces  $k^a$  da la energía relativa a la métrica de energía nula,  $g_{MN} = \bar{g}_{MN}$ . Escritas a partir de un conjunto de corrientes conservadas, las cargas  $K^a$  pueden ser expresadas mediante el teorema de Gauss como integrales de superficie. Usando la descomposición de  $\Theta_{MN}$  dada en (2.81), y el comportamiento asintótico  $T_{MN} \mathcal{O}$ , podemos encontrar la forma explícita [73]:

$$K^a = \frac{1}{4} \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{d}_{MNR}^{STU} \Gamma^{NA} B^{kRa} \bar{V}_A^M \bar{V}_U^B d\Sigma_{ST} \quad , \quad (2.86)$$

en términos de la conexión  $\Gamma^{NA}_B$  correspondiente a la métrica  $h_{MN}$ . Estas cargas conservadas, en definitiva, han podido ser construidas a partir del hecho de haber considerado un conjunto de geometrías que tienen asintóticamente a una única configuración  $\bar{g}_{MN}$ , de la que identificamos sus vectores de Killing  $k_M^a$ . Es decir, las dificultades de la covarianza general han sido evitadas mediante la especificación de las condiciones de contorno sobre el conjunto de soluciones físicamente admisibles.

Las cargas conservadas resultantes de la invarianza frente a transformaciones locales de supersimetría pueden ser obtenidas de manera similar. En analogía con los vectores de Killing que dejan a la métrica  $\bar{g}_{MN}$  invariante, supondremos que existen espinores de Killing  $\eta_I$  que generan transformaciones locales de supersimetría que dejan invariante al valor asintótico nulo del gravitino,

$$\nabla_M^{\%} \mathbf{h}_I = 0, \quad (2.87)$$

donde  $\bar{\nabla}_M$  es el operador diferencial supercovariante (2.75) evaluado en la métrica asintótica  $\bar{g}_{MN}$  [74]. Resultará conveniente escribir al espinor de Killing  $\mathbf{h}_I$  como una combinación lineal  $\mathbf{h}_I = c_m \mathbf{h}_I^m$  de elementos impares de un álgebra de Grassmann  $\{c_m/c_n c_n = -c_n c_m\}$ , de modo que los  $\mathbf{h}_I^m$  formen un conjunto linealmente independiente de campos espinoriales anticonmutantes que verifican (2.87).

Para completar la construcción de las supercargas sólo nos resta, en analogía con lo realizado con el conjunto de invarianzas de la métrica del espacio-tiempo, considerar la ecuación de movimiento del campo de gauge de la supersimetría, es decir, el gravitino. A pesar de que no hemos explicitado aún las tres funciones arbitrarias de las que depende, el gravitino debe satisfacer una ecuación de movimiento de Rarita-Schwinger, que podemos separar en las partes lineal y no-lineal según:

$$\epsilon^{MNR S} \Gamma_5 \bar{\Gamma}_N \nabla_R^{\%} \Psi_S = \Theta^M, \quad (2.88)$$

donde,

$$\bar{\Gamma}_N = \nabla_N^{\% A} \Gamma_A, \quad (2.89)$$

de modo que  $\Theta^M$ , compuesta por términos no-lineales y fuentes, satisfice:

$$\nabla_M^{\%} \Theta^M = 0, \quad (2.90)$$

Por lo tanto, haciendo uso de los espinores de Killing comunantes  $\mathbf{h}_I^m$ , cuya existencia hemos supuesto, podemos definir un conjunto de cantidades  $J_I^m M$ .

$$J_I^{mM} \equiv V \mathbf{h}_I^m \Theta^M , \quad (2.91)$$

que pueden escribirse como derivados totales:

$$J_I^{mM} \equiv \partial_R (\bar{V} \mathbf{h}_I^m \in^{MNR S} \Gamma_5 \bar{\Gamma}_N \Psi_S) , \quad (2.92)$$

Usando el lema de Schwartz, tenemos finalmente:

$$\partial_M J_I^{mM} = 0 . \quad (2.93)$$

Las cargas de supergravedad resultarán, simplemente, de evaluar la integral de las corrientes de supersimetría  $J_I^{mM}$  sobre una hipersuperficie  $\Sigma$  tipo espacio:

$$Q_I^m = \int_{\Sigma} \mathbf{h}_I^m \in^{MNR S} \Gamma_5 \bar{\Gamma}_N \nabla_R \Psi_S d\Sigma_M . \quad (2.94)$$

De (2.92), usando el teorema de Stokes, podemos escribir las supercargas  $Q_I^m$  en la forma:

$$Q_I^m = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{h}_I^m \in^{MNR S} \Gamma_5 \bar{\Gamma}_N \Psi_S d\Sigma_{MR} , \quad (2.95)$$

donde  $\partial\Sigma$  es el borde de  $\Sigma$ . Tanto la integral de superficie (2.95) como la obtenida para los generadores  $K^a$  en (2.86), no cambian su métrica  $\bar{g}_{MN}$  es reemplazada por  $g_{MN}$  (realizándose las contracciones con ésta última). Del mismo modo, podemos relajar las condiciones (2.83) y (2.87) sobre  $k_M^a$  y  $\mathbf{h}_I^m$ , imponiéndose sólo que tiendan asintóticamente a vectores y espinores de Killing respectivamente. Hablaremos, pues, de vectores y espinores de Killing asintóticos para referirnos a estas cantidades que resultan necesarias para la definición de las cargas conservadas. Debemos notar que el hecho de que todos los generadores puedan definirse por integrales de superficie es muy conveniente en vistas de que el espacio-tiempo puede tener una topología no-trivial.

Resulta interesante plantearse, en este punto, las siguientes preguntas acerca de la naturaleza de la supercargas encontradas: (i) ¿son las transformaciones generadas por (2.95) verdaderamente locales?, (ii) ¿cuál es el álgebra que satisfacen los generadores  $Q_I^m$ ? Mostraremos a continuación que las transformaciones generadas por  $Q_I^m$  son locales y que, a pesar de ello, estos generadores satisfacen un álgebra de supersimetría global. Para ello, resulta conveniente trabajar en la formulación Hamiltoniana de la supergravedad. En esta formulación, las invarianzas de gauge se traducen en la existencia de un conjunto de vínculos de primera clase [75]. Consideremos los vínculos correspondientes a la supersimetría local (resultados análogos pueden ser obtenidos para las simetrías restantes [76]). A partir de la forma del término de Rarita-Schwinger se ve que la componente temporal del gravitino  $\Psi_0$ , entra en el Hamiltoniano como un multiplicador de Lagrange arbitrario. Por lo tanto, el factor que lo acompaña en el Hamiltoniano  $H_0$ , en el que los vínculos aún no han sido implementados,

$$H_0 = \int_{\Sigma} d^3x \bar{\Psi}_0 \mathbb{G} + \dots, \quad (2.96)$$

resultará ser un vínculo de primera clase -equivalente a la ‘ley de Gauss’- de la supergravedad,

$$\mathbb{G} \approx 0. \quad (2.97)$$

La forma explícita de  $\mathbb{G}$ , resulta una generalización simple de la obtenida para la supergravedad pura [77]:

$$\mathbb{G} = \Gamma^A \Psi_1 \Pi'_A - \frac{1}{2} [\Gamma^I, \Gamma^J] \mathbb{V}_1 \Psi_J, \quad (2.98)$$

donde  $I, J = 1, 2, 3$  son índices espaciales y  $\Pi'_A$  son las variables canónicamente conjugadas de las componentes espaciales de la tétrada  $V_I^A$ .

El Hamiltoniano  $H_0$  corresponderá a un generador de evolución temporal apropiado sólo si sus derivadas funcionales están bien definidas. Esto significa que la variación de  $H_0$  debe poder escribirse como una integral de volumen lineal en las variaciones de los campos,



$$dH_0 = \int d^3x \left( \sum_{\{\Phi\}} a_{\Phi}(x) d\Phi(x) + \sum_{\{\Pi\}} b_{\Pi}(x) d\Pi(x) \right). \quad (2.99)$$

La derivada funcional de  $H_0$  con respecto a un cierto tiempo, resultará dada por el coeficiente que acompaña a la variación de dicho campo en el desarrollo anterior:

$$\frac{dH_0}{d\Phi(x)} = a_{\Phi}(x) \quad \text{y} \quad \frac{dH_0}{d\Pi(x)} = b_{\Pi}(x). \quad (2.100)$$

Las variaciones permitidas a los campos deben circunscribirse al espacio de fases que contiene a las soluciones de interés físico [76] de modo que, por ejemplo, den lugar a una supercarga espinorial  $Q$  finita y bien definida. La ‘ley de Gauss’ (2.98) de un sistema con vínculos de primera clase, genera las transformaciones de gauge que, en nuestro caso, son las de supersimetría local. No obstante, el generador  $G$  está constreñido a anularse en la superficie definida por los vínculos. Por otra parte, esperamos encontrar leyes de conservación no-triviales asociadas a las transformaciones de supersimetría global (pensadas como un caso particular). Estas aparecen, como mostraremos a continuación, de correcciones a los generadores debidas a integrales de superficie, como la que obtuvimos en (2.95)

Si estudiamos la variación del Hamiltoniano  $H_0$ , considerando que el multiplicador  $\bar{\Psi}_0$  se aproxima asintóticamente a un valor finito y constante  $\bar{\Psi}_0(\infty)$ , resulta inmediato que, tras una integración por partes:

$$dH_0 = -\bar{\Psi}_0(\infty) dQ + (\text{integral de volumen}) + \dots, \quad (2.101)$$

donde

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d\Sigma_l [\Gamma^l, \Gamma^l] \Psi_l, \quad (2.102)$$

es una expresión análoga a la obtenida en la discusión precedente (2.95). Por lo tanto, si queremos tener un Hamiltoniano consistente (2.99), que genere la dinámica del sistema

cuando las transformaciones de supersimetría no-nulas en el infinito están permitidas, tendremos que corregir  $H_0$  de modo que el término de superficie en (2.101) desaparezca:

$$H = H_0 + \bar{\Psi}_0(\infty) Q. \quad (2.103)$$

Esto puede entenderse en los siguientes términos: se ha impuesto al multiplicador de Lagrange  $\Psi_0$  un comportamiento asintótico distinto al del generador  $G$  (que se anula asintóticamente). Una transformación de supersimetría generada con un parámetro tal, es impropia [80], es decir, cambia el estado físico del sistema. No es posible eliminar la posibilidad de hacer este tipo de transformaciones por un fijado de gauge. Es por ello que obtenemos un generador  $Q$  que no se anula débilmente, al que denominaremos la supercarga total del sistema. Notemos que  $Q$  se modifica frente a una transformación de supersimetría de acuerdo al *álgebra de supersimetría global*. Esto puede verificarse introduciendo en (2.102) la ley de transformación del gravitino (camino que seguiremos en el próximo capítulo) o, mejor aún, expresado la parte asintótica del conmutador de dos transformaciones como una función de las partes asintóticas de las transformaciones originales [79]. Si la teoría de supergravedad de partida es una teoría  $N$ -extendida, el álgebra de supersimetría global que generarán las  $Q^I$  será también,  $N$ -extendida [60].

Aún cuando los valores numérico de la integral de superficie se transformen correctamente, no es posible usar a  $Q$  aún como un generador: los términos de superficie no tienen derivadas funcionales bien definidas y, por lo tanto, sus paréntesis de Poisson con los distintos campos de la teoría no existen. Las integrales de superficie generarían, ingenuamente, una transformación que coincide con la identidad en todo su dominio excepto en el borde. Lo que está ocurriendo es que aún no hemos impuesto las condiciones de gauge [59]. Una vez que fijamos dichas condiciones (por ejemplo, mediante la condición natural  $\Gamma^I \Psi_I = 0$ ), los vínculos pasan a ser de segunda clase y pueden ser tratados como cantidades que se anulan idénticamente, siempre que reemplacemos los paréntesis de Poisson originales por los paréntesis de Dirac correspondientes a las condiciones de gauge elegidas [75].

Los paréntesis de Dirac son de naturaleza no-local, y es debido a este hecho que los valores asintóticos de los multiplicadores de Lagrange determinarán, en forma precisa, el valor de los mismos en todo el espacio. Entonces tiene verdadero sentido hablar de una *transformación local*, generada por  $Q$  mediante la aplicación de

paréntesis de Dirac, dada en *términos del valor asintótico del parámetro*  $\bar{\Psi}_0(\infty)$ . Una vez que se realiza el fijado de gauge, sólo pueden ser realizadas transformaciones impropias que preservan la condición de gauge. Así, el valor asintótico del parámetro define en forma precisa a la transformación en cada punto del espacio [80]. El hecho de que un término de superficie genere una transformación local definida sobre todo el espacio, en apariencia paradójico, se explica por la no-localidad de los paréntesis de Dirac que hace necesario conocer el valor de los campos sobre todo el espacio para poder evaluarlos.

Resumiendo, las integrales de superficie satisfacen el álgebra global de supersimetría correspondiente, a pesar de que generan transformaciones de supergravedad. La razón está en que, luego de que se realiza el fijado de gauge, el parámetro de la transformación está determinado en todo lo puntos del espacio por su valor en el infinito, donde el espacio-tiempo es plano [60].

## Capítulo 3

### Supergravedad y *p*-branas

En este capítulo trataremos los orígenes de las *p*-branas como objetos extendidos, y de cómo se acoplan con campos bosónicos de supergravedad en el mismo sentido en que partículas puntuales cargadas se acoplan con los campos de la electrodinámica clásica.

Haciendo uso de la acción general se deducen las ecuaciones dinámicas de los campos bosónicos.

### 3.1 Membranas $p$ -dimensionales

La idea de los objetos extendidos tiene una historia que se remonta hasta el año 1962, en el que Paul A.M. Dirac es tentado con la idea de establecer una correspondencia entre las partículas elementales y los modos de vibración de una membrana [81]. La idea de los objetos extendidos con más dimensiones que la cuerda, no tuvo mucha aceptación en el mundo científico hasta 1986, el año en que el estudio de membranas con supersimetría resulto en el advenimiento de la *supermembrana*, estudiada por J. Hughes, Jim Liu y Joseph Polchinski [82]. Luego, en plena efervescencia de la teoría de supercuerdas, un grupo pequeño de físicos teóricos razonando en la misma línea de investigación comenzada por Dirac: Ya que se está reemplazando las partículas puntuales en nuestras teorías de campo por cuerdas unidimensionales, ¿porqué no probamos usar membranas bidimensionales, o mejor aún, objetos  $p$ -dimensionales?. Ya que si se aceptaban supercuerdas en un universo de  $D \leq 10$  dimensiones, los campos tienen dimensiones espacio-temporales suficientes para acoplarse con objetos extendidos (supermembranas).

En el sector bosónico de la SUGRA, por ejemplo, encontramos un gran número de campos Ramona-Ramond (R-R) y campos Neveu-Schwartz/ Neveu-Schwartz (NS-NS) que son  $n$ -formas que se acoplarían naturalmente a objetos extendido como las  $p$ -*branas*. Soluciones clásica a las ecuaciones de movimiento de estas teorías no involucran la zoología de las  $p$ -*branas* por entero porque los requerimientos de supersimetría son bastante restrictivos en cuanto a las características de las soluciones. En el capítulo 4 se construirá un cierto tipo de  $p$ -*brana* que nos da una solución a las ecuaciones de movimiento y satisface las exigencias de la SUSI, cuyas soluciones tipo  $p$ -*branas* satisface la teoría de supergravedad.

### 3.2. Dinámica de la $p$ -brana

Ya que vamos a usar objetos, debemos aclarar entonces cual será la dinámica que las rige. A continuación veremos que existe una manera muy sencilla de extender la física de puntitos a dinámica de sábanas multidimensionales.

El principio de mínima acción que se usa en la física de partículas puntuales puede pensarse como un requerimiento de mínima longitud de la línea mundo. La generalización natural de este concepto fue presentada por Dirac [81] en el caso  $d=3$  y posteriormente por Nambu [83, 84] y Goto [85] para  $d=1$ , y consiste en minimizar el volumen-mundo de la  $p$ -brana. De este modo, la dinámica de una  $p$ -brana en un espacio-tiempo  $D$  dimensional, esta gobernada por la siguiente acción

$$S_{NG} = -T_d \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-\det (\partial_m x^M \partial_\nu x^N \mathbf{h}_{MN})} = -T_d \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-h} \quad , \quad (3.1)$$

donde  $\xi^\mu$  ( $\mu = 0, \dots, p = d - 1$ ) son las coordenadas del volumen-mundo de la  $p$ -brana, y  $x^M$  ( $M=0, \dots, D - 1$ ) las coordenadas del espacio-tiempo. También hemos definido aquí a  $h_{\mu\nu} = \partial_m x^M \partial_\nu x^N \mathbf{h}_{MN}$ , que es la métrica *inducida* en el volumen-mundo, cuyo determinante está representado por  $h = \det (h_{\mu\nu})$ .

Esta acción tipo Nambu-Goto contiene toda la información concerniente a la dinámica de una  $p$ -brana libre. Nos dice que la  $p$ -brana ha de minimizar su volumen-mundo del mismo modo que la partícula libre viaja por la trayectoria más corta entre dos puntos, no obstante, existe una acción un poco más simple que produce las mismas ecuaciones de movimiento que (3.1). En el caso de las cuerdas, es conocida como la “acción de Polyakov”, quien hizo la labor publicitaria resaltando sus virtudes en la cuantización vía integrales de Feynman. El aspecto de la acción de Polyakov generalizada para  $p$ -branas es [86]:

$$S_p = -\frac{T_d}{2} \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-\mathbf{g}} [\mathbf{g}^{mn} h_{mn} - (d-2)] \quad , \quad (3.2)$$

donde se introduce un campo auxiliar  $\gamma_{\mu\nu}(\xi)$  (siguiendo la siguiente convención tácita,  $\mathbf{g}_m$  un tensor,  $\mathbf{g}^m$  su inversa y  $\gamma$  es su determinante).

Para asegurarnos que estas acciones son equivalentes, variamos respecto a la métrica  $\mathbf{g}^m$  -vamos a usar la ecuación de la variación de la raíz del determinante mátrico (A.17)

que tiene la forma  $\mathbf{d}\sqrt{-\mathbf{g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\mathbf{g}}\mathbf{g}_{ab}\mathbf{d}\mathbf{g}^{ab}$  para conseguir su relación con la métrica inducida  $h^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\mathbf{g}^m} S &= -\frac{T_d}{2} \int d^d \mathbf{x} (\mathbf{d}\sqrt{-\mathbf{g}} [(\mathbf{g}^{rs} h_{rs} - (d-2))] + \sqrt{-\mathbf{g}} h_m \mathbf{d}\mathbf{g}^m) \\ &= -\frac{T_d}{2} \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-\mathbf{g}} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{g}_m [(\mathbf{g}^{rs} h_{rs} - (d-2))] + h_m \right) \mathbf{d}\mathbf{g}^m \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De este modo, la relación entre ambas métricas es

$$h_m = \frac{1}{2} \mathbf{g}_m [(\mathbf{g}^{rs} h_{rs} - (d-2))] \quad . \quad (3.4)$$

Si contraemos la ecuación anterior con  $\gamma^{\mu\nu}$  podremos refinar un poco el cálculo:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^m h_m &= \frac{1}{2} \mathbf{g}^m \mathbf{g}_m [(\mathbf{g}^{rs} h_{rs} - (d-2))] \\ &= \frac{1}{2} d \mathbf{g}^m h_m - \frac{1}{2} d(d-2) \end{aligned}$$

dividiendo entre  $d - 2$ , quedamos con

$$\mathbf{g}^m h_m = d \quad , \quad \text{para } d \neq 2 \quad . \quad (3.5)$$

Reemplazando (3.5) en (3.4) obtenemos

$$h_m = \mathbf{g}_m \quad , \quad \text{para } d \neq 2 \quad . \quad (3.6)$$

Hemos conseguido que, salvo en el caso especial  $d = 2$  que corresponde a las cuerdas estándar que analizaremos más adelante, ambas métricas son iguales, así que cuando sustituimos  $h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$  en la acción tipo Polyakov (3.2), recuperamos la acción tipo Nambu-Goto (3.1). Ambas acciones describen entonces la misma dinámica para  $d \neq 2$ , pero para saber de que dinámica estamos hablando, debemos calcular la otra variación posible:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_x^M S &= -T_d \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-\mathbf{g}} \mathbf{g}^{mv} \mathbf{d} (\partial_m x^M) \partial_v x^N \mathbf{h}_{MN} \\ &= T_d \int d^d \mathbf{x} \partial_m (\sqrt{-\mathbf{g}} \mathbf{g}^{mv} \partial_v x^N \mathbf{h}_{MN}) \mathbf{d} x^N = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde se ha integrado por partes, reestableciendo la ecuación de movimiento

$$\partial_m (\sqrt{-\mathbf{g}} \mathbf{g}^{mv} \partial_v x^N \mathbf{h}_{MN}) \mathbf{d} x^M = 0. \quad (3.8)$$

El caso particular  $d = 2$  corresponde a la acción más sencilla de la teoría de cuerdas, que difiere con el resto de las acciones de  $p$ -branas en que presenta una invariante de Weyl (Ver A.2). Este rasgo característico de la teoría aparece porque la métrica y la métrica inducida no son iguales en este caso sino *proporcionales*, lo que no basta para fijar el campo auxiliar  $\gamma_{\mu\nu}$ . En pocas palabras, las métricas conformes a la inducida representan el mismo *embedding* en el espacio-tiempo. Más explícitamente, la variación de la acción con respecto a la métrica es

$$\mathbf{d}_{\mathbf{g}^{mm}} S = -\frac{T_d}{2} \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-\mathbf{g}} \left( h_{mm} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{mm} \mathbf{g}^{rs} h_{rs} \right) \mathbf{d} \mathbf{g}^{mm} = 0, \quad (3.9)$$

lo que implica que,

$$h_{mv} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{mm} \mathbf{g}^{rs} h_{rs}. \quad (3.10)$$

Tomando el determinante de esta ecuación

$$h = \mathbf{g} \left( \frac{\mathbf{g}^{mm} h_{mm}}{2} \right)^2, \quad (3.11)$$

que podemos usar para eliminar el factor  $\gamma^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  en (3.10), para obtener una ecuación que nos demuestra que las métricas son conformes entre sí:

$$\frac{h_{mm}}{\sqrt{-h}} = \frac{\mathbf{g}_{mm}}{\sqrt{-\mathbf{g}}} \quad (3.12)$$

La ecuación de movimiento para la variación respecto de las coordenadas es, son embargo, la misma que la de cualquier otra  $p$ -brana libre (3.8), esto porque en todo caso debe minimizarse su volumen-mundo.

### 3.2.1 Acoplamiento de las $p$ -branas

El próximo paso es la introducción de algunos términos consistentes que permitan enriquecer la acción de Polyakov para las  $p$ -branas.

Pues bien, primero que nada podemos llevar la discusión al contexto de la gravedad, cambiando  $\eta_{MN}$  por  $g_{MN}(x)$ . Luego podemos introducir un tensor antisimétrico  $A$  de rango  $d$  acoplado a la brana que ahora pertenece al reino de la relatividad general, a través de un término de Wess-Zumino. Con esto la acción resultante es:

$$S_d = T_d \int d^d \mathbf{x} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-\mathbf{g}} \mathbf{g}^{mm} \partial_m X^M \partial_\nu X^N g_{MN} + \frac{d-2}{2} \sqrt{-\mathbf{g}} - \frac{1}{d!} \epsilon^{m_1 \dots m_d} \partial_{m_1} X^{M_1} \dots \partial_{m_d} X^{M_d} A_{M_1 \dots M_d} \right]. \quad (3.13)$$

Las ecuaciones de movimiento son en este caso

$$\partial_m (\sqrt{-\mathbf{g}} \mathbf{g}^{mm} \partial_\nu X^N g_{MN}) + g_{MP} \Gamma_{QR}^P \partial_m X^Q \partial_n X^R \mathbf{g}^{mn}$$



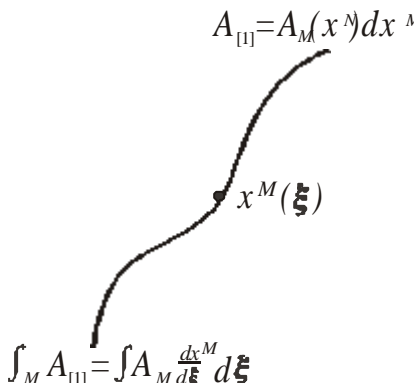
$$= \frac{1}{d!} \epsilon^{m_1 \dots m_d} \partial_{m_1} X^{M_1} \dots \partial_{m_d} X^{M_d} F_{M_1 \dots M_d}, \quad (3.14)$$

variando respecto a las coordenadas y

$$\mathbf{g}_m = \partial_m X^M \partial_\nu X^N g_{MN(x)}, \quad (3.15)$$

variando respecto a la métrica. El campo  $F$  viene dado por  $F = dA$  y por esto satisface la identidad de Bianchi  $dF=0$ .

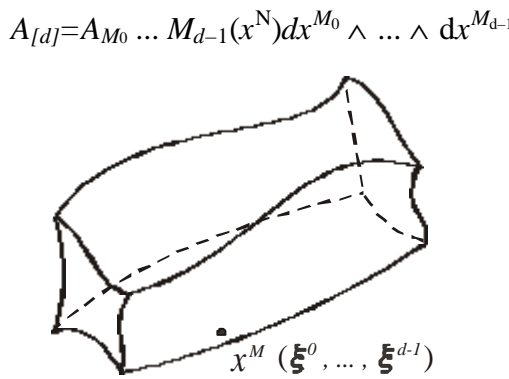
Las partículas ( $p=0$ ) que evolucionan en el tiempo se mueven en líneas ( $d=1$ ) que llamamos *líneas-mundo*. Del mismo modo, las cuerdas ( $p=1$ ) barren *superficies-mundo* ( $d=2$ ), y en general una  $p$ -brana debe barrer un *volumen-mundo*  $d = p+1$  dimensional, se ha de dejar algo de espacio para que lo haga, así que la dimensión del volumen mundo de la  $p$ -brana queda automáticamente limitada en  $d \leq D$ . El acoplamiento con el campo  $A$  se elige análogamente al acoplamiento tipo electrodinámica tetradimensional. Es decir: si un campo eléctrico  $A_\mu$  representado



$A_{[1]} = A_M(x^N) dx^M$

$x^M(\xi)$

$\int_M A_{[1]} = \int A_M \frac{dx^M}{d\xi} d\xi$



$A_{[d]} = A_{M_0} \dots M_{d-1}(x^N) dx^{M_0} \wedge \dots \wedge dx^{M_{d-1}}$

$x^M(\xi^0, \dots, \xi^{d-1})$

$\int_M A_{[d]} = \int A_{M_0} \dots M_{d-1} \partial_{\mu_0} x^{M_0} \dots \partial_{\mu_{d-1}} x^{M_{d-1}} d^d \xi$

Figura 3.1: El acoplamiento de Wess-Zumino como generalización del acoplamiento de Maxwell

por una 1-forma se acopla con la línea mundo de una partícula (una 0-brana), entonces el volumen mundo  $d = p+1$ -dimensional de una  $p$ -brana está acoplado con una  $d = p+1$ -forma.

El acoplamiento de Wess-Zumino no es, por supuesto, el único posible para una brana en general. Las  $D$ -branas [16], por ejemplo se acoplan a los campos

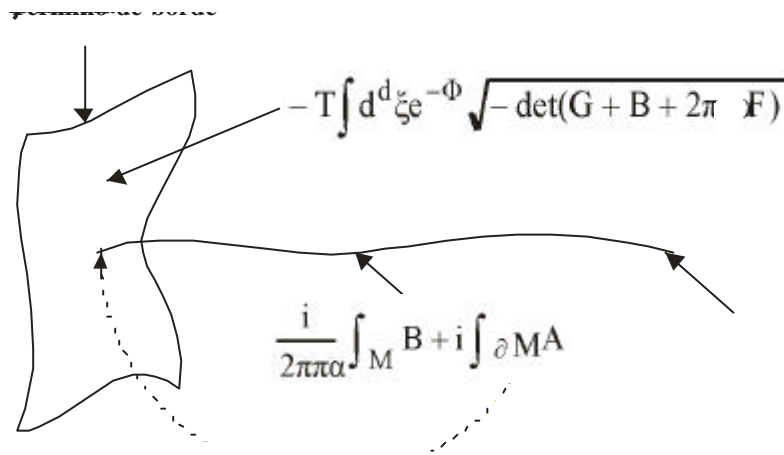


Figura 3.2.: El Acoplamiento de una D-brana con el campo  $A_\mu$  asociado a una cuerda, vía la acción de Dirac-Infeld

$A_m$  y  $B_m$  de una cuerda, a través de la acción de Dirac-Born-Infeld [78]:

$$S_{BI} = -T_d \int d^d \mathbf{x} e^{-\Phi} \sqrt{-\det(G_m + B_m + 2\pi\alpha' F_m)}, \quad (3.16)$$

con  $\mu=0, \dots, d-1$ . Los campos  $B$  y  $F = dA$  son los campos inducidos en la  $D$ -brana por los que aparecen en la acción de la cuerda

$$\frac{i}{4\pi\alpha'} \int_M d^2 \mathbf{s} \sqrt{-g} \epsilon^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N B_{MN} + i \int_{\partial M} dX^M A_M, \quad (3.17)$$

Donde  $\alpha = 0,1$  (Ver figura 3.2). Las soluciones tipo  $p$ -branas a la teoría de supergravedad no se acoplan con los campos de la cuerda sino con campos tipo  $n$ -formas de calibre de una teoría efectiva a baja energía. En los casos en que se pudiera agregar consistentemente una acción de Dirac-Born-Infeld, estaríamos agregando campos nuevos que modificarían las ecuaciones de movimiento sacándolas fuera del marco de la SUGRA en el que nos estamos moviendo. En particular, los campos en las teorías de supergravedad que nos atañen, son algo tediosos eligiendo a la clase de objetos con los que se acoplan. Además, la supersimetría agrega restricciones extra en cuanto a las dimensiones posibles de las soluciones tipo  $p$ -branas en distintos espacio-tiempos.

### 3.3. Supergravedad

Antes de enunciar las características que deben tener las  $p$ -branas para ser soluciones de SUGRA, conviene establecer la acción, el tipo de campos y las ecuaciones de movimiento que se considerarán. En esta sección se comentará el origen de la elección de campos y teorías de SUGRA que las  $p$ -branas pretenden resolver, y se calcularán sus respectivas ecuaciones de movimiento.

#### 3.3.1 Supergravedad y $p$ -branas

Cuando decimos que no nos interesa un acoplo tipo Dirac-Born-Infeld es porque la relación que tienen los campos con la teoría de cuerdas es por la vía de las teorías efectivas de baja energía a las cuerdas cerradas Tipo II que no tienen extremos en los que adherir términos de borde sobre una Dirichlet-brana con dinámica. Como ejemplo de construcción de una teoría efectiva de gravedad, consideremos el modelo sigma que describe una cuerda bosónica que se mueve en un condensado de sus modos no masivos  $(g_{MN}, A_{MN}, \mathbf{f})$ :

$$I = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2z \sqrt{g} [g^{ij} \partial_i x^M \partial_j x^N g_{MN}(x)]$$

$$+ i\epsilon^{ij} \partial_i x^M \partial_j x^N A_{MN}(x) + \mathbf{a}' R(\mathbf{g})\mathbf{f}(x)]. \quad (3.18)$$

La acción anterior, clásicamente invariante bajo reescalamientos de Weyl  $\gamma^{ij} \rightarrow \Lambda^2(z) \gamma^{ij}$ , pierde esta invariante al ser cuantizada. Esto es una anomalía que nos obliga a restringir los campos de la acción mediante ecuaciones diferenciales que impongan la invariancia a la fuerza. Las ecuaciones diferenciales sobre los campos son [87,88],

$$0 = R_{MN} + \frac{1}{4} F_M^{PQ} F_{NPQ} - 2\nabla_M \nabla_{NF}, \quad (3.19)$$

$$0 = \nabla_P F^P_{MN} - 2(\nabla_P \mathbf{f}) F^P_{MN}, \quad (3.20)$$

$$0 = 4\nabla_M \mathbf{f} \nabla^N \mathbf{f} - 4\nabla_M \nabla^M \mathbf{f} + R + \frac{1}{12} F_{MNP} F^{MNP} + (D - 26). \quad (3.21)$$

Estas ecuaciones dan relaciones de consistencia y pueden ser interpretadas como ecuaciones de campo para el límite de baja energía de la cuerda. Es posible construir una acción que describa la dinámica de los campos – “Si va a cumplir la invariancia de Weyl, tienes que moverte *por aquí* – que posteriormente puede identificarse como el límite de tensión infinita (o longitud nula) de la cuerda. De manera que la teoría cuántica de los campos anteriores, está descrita por la *acción efectiva*:

$$I_{Efe} = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2f} \left[ (D - 26) - \mathbf{a}' \frac{2}{3} (R + 4\nabla^2 \mathbf{f} - 4(\nabla \mathbf{f})^2, \right. \\ \left. - \frac{1}{2} F_{MNP} F^{MNP} \right) + \mathcal{O}(\mathbf{a}')^2 \right] \quad (3.22)$$

donde  $F_{MNP} = \mathcal{F}_{[MA_{NP]} = \mathcal{F}_M A_{NP} + \mathcal{F}_N A_{PM} + \mathcal{F}_P A_{MN}$  el campo  $F_{[3]} = d_{[2]}$  del potencial de calibre (De ahora en adelante denotaremos con un subíndice entre corchetes  $X_{[n]}$  a una forma cualquiera  $X$  de rango  $n$ ). El término  $(D - 26)$  representa la dimensión crítica de la cuerda bosónica, en la que se puede obtener una solución de espacio-tiempo plano.

Sabemos que una acción efectiva para teorías de supercuerdas debe contener un sector descrito por campos  $(g_{MN}, A_{MN}, \mathbf{f})$ , es decir, lo que se llama un sector Neveu-

Schwartz/Neveu-Schwarz (NS-NS), pero la dimensión crítica cambia a  $D=10$ . Para considerar estos casos, integraremos por partes (3.22) y sustituiremos la dimensión crítica por  $D = 10$  de modo que el término  $(D - 26) \rightarrow (D - 10)$  se anule. Se obtiene entonces lo que se denomina [89], la acción efectiva en el *cuadro* de la cuerda:

$$I^{Cuerda} = \int d^{10}x \sqrt{-g^{(S)}} e^{-2f} \left[ R^{(S)} + 4\nabla^M \mathbf{f} \nabla_M \mathbf{f} - \frac{1}{12} F^{MNP} F_{MNP} \right]. \quad (3.23)$$

Ésta acción tiene un aspecto complicado para hacer relatividad general porque no incluye como uno de sus términos a la acción de Einstein

$$\int d^D x \sqrt{-g} R(g) \quad (3.24)$$

por lo que no contamos con soluciones de la ecuación de Einstein *in vacuo*. Un inconveniente así, aunque pueda parecer grave, no es insalvable porque podemos reescalar la métrica con una transformación conforme

$$g_{MN} \rightarrow e^{1f} g_{MN}, \quad (3.25)$$

para eliminar el coeficiente  $e^{-2\phi}$  y obtener la acción en el esquema de Einstein.

Dada (3.25), veamos como aparece la nueva acción en nuestro espacio decimensional. Cada término transforma con un coeficiente distinto, el determinante métrico, por ejemplo reescala a (A.38):

$$g^{(s)} = e^{10\lambda\phi} g,$$

y el escalar de curvatura  $R$  se transforma en (A.42):

$$R^{(S)} = e^{-1f} \left[ R - 9\mathbf{I} \nabla^M \nabla_M \mathbf{f} - 18\mathbf{I}^2 \nabla^M \mathbf{f} \nabla_M \mathbf{f} \right]. \quad (3.26)$$

Los términos con  $\nabla_M \mathbf{f} \nabla_M \mathbf{f}$  y  $F^{MNP} F_{MNP}$  en el cuadro de la cuerda (3.23), provienen de contraer cantidades que son naturalmente covariantes en todos sus índices, por lo que aparecen reescalados en un factor de  $e^{-\lambda\phi}$  por cada índice contraído. e.g.:

$$\begin{aligned}\nabla^M \mathbf{f} \nabla_M \mathbf{f} &= g^{(s)MN} \nabla_M \mathbf{f} \nabla_N \mathbf{f} \rightarrow e^{-1f} \nabla^M \mathbf{f} \nabla_M \mathbf{f} \\ F^{MNP} F_{MNP} &\rightarrow e^{-31f} F^{MNP} F_{MNP}\end{aligned}$$

Con la transformación que hemos escogido, la acción (3.23) queda convertida en:

$$\begin{aligned}I^{Cuerda} \rightarrow \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[ e^{(4I-2)f} (R + (4-18I^2) \nabla^M \mathbf{f} \nabla_M \mathbf{f}) \right. \\ \left. - 9I \nabla^M \nabla_M \mathbf{f} - \frac{1}{12} e^{(2I-2)f} F^{MNP} F_{MNP} \right].\end{aligned}$$

Ahora está claro que para tener un término como (3.24) debemos escoger  $I = \frac{1}{2}$ , con lo que la acción queda:

$$\int d^{10}x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} \nabla^M \mathbf{f} \nabla_M \mathbf{f} - \frac{1}{12} e^{-f} F^{MNP} F_{MNP} - \frac{9}{2} \nabla^M \nabla_M \mathbf{f} \right].$$

El último término es una derivada total que no presenta significado importante en este trabajo, por lo tanto se elimina para obtener la acción en el *cuadro de Einstein*:

$$I_{Einstein} = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} \nabla^M \mathbf{f} \nabla_M \mathbf{f} - \frac{1}{12} e^{-f} F^{MNP} F_{MNP} \right]. \quad (3.27)$$

### 3.3.2. Acción General y Ecuaciones de Campo

En (3.27) tenemos una acción efectiva para campos del sector NS-NS, sin embargo, una de las diferencias entre la teoría puramente bosónica y la teoría de cuerdas supersimétricas, es que las supercuerdas también incluyen un sector de campos

bosónicos llamado el sector Ramond-Ramond (R-R), que puede contener campos  $F_{[n]}$  de distintos rangos. Por ejemplo, en la teoría tipo IIA [90, 91, 92, 93] aparecen los siguientes campos R-R:  $F_{[2]} = dA_{[1]}$  y  $F_{[4]} = dA_{[3]} + A_{[1]} \wedge F_{[3]}$ ; mientras que en el tipo IIB [47, 94, 95, 96] aparecen tres campos R-R, uno asociado a un campo pseudoescalar  $F_{[1]} = d\phi$  un campo autodual en  $D = 10$   $F_{[5]} = *F_{[5]} = dA_{[4]}$ , y una 3-forma  $F_{[3]}^R = dA_{[2]}^R$  que forma un par con un  $F_{[3]}^{NS}$  del sector NS-NS.

En general, uno encuentra campos  $F_{[n]}$  con rangos que varían del  $n=1$  a  $n=5$  en las teorías tipo II, y naturalmente podemos construir cualquiera de sus duales  $*F$  que tendrían rangos entre 5 y 9. Es importante tener una acción que pueda contener todos estos campos, porque a ellos se acoplarán las  $p$ -branas. Esta acción [89, Ec. 3.1] es la que describe un sistema clásico en  $D$  dimensiones, que involucre a la métrica  $g_{MN}$ , a un campo escalar  $\phi$ , y a una  $(n-1)$ -forma  $A_{[n-1]}$  que representa un potencial de calibre con un campo asociado  $F_{[n]} = dA_{[n-1]}$ :

$$\begin{aligned}
I &= \int d^D x \mathcal{L}(F, g_{MN}, A_{[n-1]}) \\
&= \int d^D x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} \nabla_M F \nabla^M F - \frac{1}{2n!} e^{af} F_{[n]}^2 \right] \\
&= \int d^D x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} g^{MN} \nabla_M F \nabla_N F \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2n!} e^{af} g^{M_1 N_1} g^{M_2 N_2} \dots g^{M_n N_n} F_{M_1 M_2 \dots M_n} F_{N_1 N_2 \dots N_n} \right] \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos una acción general (3.27), debemos buscar las ecuaciones de movimiento de los campos decritos. Para esto, seguimos el método usual de variar los campos; comencemos por la métrica  $g_{MN}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{g_{MN}} I &= - \int d^D x \sqrt{-g} G^{PQ} \mathbf{d}_{g_{PQ}} - \mathbf{d} \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{MN} \nabla_M F \nabla_N F \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2n!} e^{af} g^{M_1 N_1} \dots g^{M_n N_n} F_{M_1 \dots M_n} F_{N_1 \dots N_n} \right] \quad (3.29)
\end{aligned}$$

El primer término provee el tensor de Einstein en la forma usual (ver apéndice A.1). Estudiemos en detalle el segundo término

$$\begin{aligned}
& \mathbf{d} \int d^D x \sqrt{-g} g^{MN} \nabla_M \mathbf{f} \nabla_N \mathbf{f} = \\
& = \int d^D x (\mathbf{d} \sqrt{-g} g^{MN} + \sqrt{-g} \mathbf{d} g^{MN}) \nabla_M \mathbf{f} \nabla_N \mathbf{f} \\
& = \int d^D x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} \nabla_M \mathbf{f} \nabla^M \mathbf{f} g^{PQ} - \nabla^P \mathbf{f} \nabla^Q \mathbf{f} \right) \mathbf{d} g_{PQ} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Aquí se han usado las ecuaciones (A.12, A.17) de (A.1):

$$\mathbf{d} g^{MN} = -g^{MP} g^{NQ} \mathbf{d} g_{PQ}$$

y

$$\mathbf{d} \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{MN} \mathbf{d} g_{MN},$$

Para manejar el último término, recordamos que  $F$  es antisimétrico y que la variación sobre la raíz del determinante métrico viene dada por (A.17), así que

$$\begin{aligned}
& \mathbf{d} \int d^D x \sqrt{-g} e^{af} g^{M_1 N_1} \dots g^{M_n N_n} F_{M_1 \dots M_n} F_{N_1 \dots N_n} = \\
& = \int d^D x \sqrt{-g} e^{af} \left[ \frac{1}{2} F_{[n]}^2 g^{PQ} \mathbf{d} g_{PQ} + n \mathbf{d} g^{MN} F_M \dots F_N \dots \right] \\
& = \int d^D x \sqrt{-g} e^{af} \left[ \frac{1}{2} F_{[n]}^2 g^{PQ} - n F^P \dots F^Q \dots \right] \mathbf{d} g_{PQ}. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Sintetizando los resultados, la ecuación de movimiento asociada a variaciones de la métrica es

$$G_{MN} = -\frac{1}{4} \nabla_P \mathbf{f} \nabla^P \mathbf{f} g_{MN} + \frac{1}{2} \nabla_M \mathbf{f} \nabla_N \mathbf{f}$$



$$+ \frac{e^{af}}{2(n-1)!} \left( F_M \dots F_N \dots - \frac{1}{2n} F_{[n]}^2 g_{MN} \right). \quad (3.32)$$

Que podemos simplificar aún más calculando la traza del tensor de Einstein para obtener el escalar  $R$  y posteriormente la curvatura  $R_{MN}$  de Ricci:

$$G_M^M = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \nabla_M \mathbf{f} \nabla^M \mathbf{f} + \frac{e^{af}}{2n!} \left( n - \frac{D}{2} \right) F_{[n]}^2. \quad (3.33)$$

Despejando el escalar de curvatura de

$$G_M^M = \left( 1 - \frac{D}{2} \right) R, \quad (3.34)$$

obtenemos

$$R = \frac{1}{2} \nabla_M \mathbf{f} \nabla^M \mathbf{f} + \frac{e^{af}}{2n!} \left( \frac{2n-D}{2-D} \right) F_{[n]}^2, \quad (3.35)$$

que podemos reemplazar en (3.32) para escribir el tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{MN} &= G_{MN} + \frac{1}{2} g_{MN} R \\ &= -\frac{1}{4} \nabla_p \mathbf{f} \nabla^p \mathbf{f} g_{MN} + \frac{1}{2} \nabla_M \mathbf{f} \nabla_N \mathbf{f} \\ &\quad + \frac{e^{af}}{2(n-1)!} \left( F_M \dots F_N \dots - \frac{1}{2n} F_{[n]}^2 g_{MN} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{MN} \left[ \frac{1}{2} \nabla_M \mathbf{f} \nabla^M \mathbf{f} + \frac{e^{af}}{2n!} \left( \frac{2n-D}{2-D} \right) F_{[n]}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \partial_M \mathbf{f} \partial_N \mathbf{f} + \frac{e^{af}}{2(n-1)!} \left[ F_M \dots F_N \dots - \frac{n-1}{n(D-2)} F_{[n]}^2 g_{MN} \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Con lo que tenemos la ecuación de movimiento para la métrica.

Vamos ahora a variar las componentes del potencial de calibre.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{A_{[n-1]}} &= -\mathbf{d} \int d^D x \sqrt{-g} \frac{1}{2n!} e^{af} F_{[n]}^2 \\ &= -\frac{1}{n!} \int d^D x \sqrt{-g} e^{af} F^{M\dots} \partial_M \mathbf{d}A\dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

Integrando por partes y asumiendo que la variación  $\delta A$  se anula en la superficie de integración,

$$\mathbf{d}_{A_{[n-1]}} = \frac{1}{n!} \int d^D x \partial_M (\sqrt{-g} e^{af} F^{M\dots}) \mathbf{d}A\dots \quad (3.38)$$

La ecuación de movimiento que resulta es

$$\partial_M (\sqrt{-g} e^{af} F^{M\dots}) = 0 \quad (3.39)$$

Pero cómo  $F$  es antisimétrico, y lo que está entre paréntesis es una densidad tensorial de peso 1, podemos decir [97]

$$\nabla_M (\sqrt{-g} e^{af} F^{M\dots}) = \sqrt{-g} \nabla_M (e^{af} F^{M\dots}) = 0, \quad (3.40)$$

Ya que  $\nabla_M (\sqrt{-g}) = 0$

Para terminar con las ecuaciones de campo falta la variación en  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_f &= -\mathbf{d} \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \nabla_M \mathbf{f} \nabla^M \mathbf{f} + \frac{1}{2n!} e^{af} F_{[n]}^2 \right] \\ &= \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \partial_M \mathbf{f} \partial^M (\mathbf{d}\mathbf{f}) - \frac{a}{2n!} e^{af} F_{[n]}^2 \mathbf{d}\mathbf{f} \right] \\ &= \int d^D x \left[ \partial_M (\sqrt{-g} \partial^M \mathbf{f}) - \sqrt{-g} \frac{a}{2n!} e^{af} F_{[n]}^2 \right] \mathbf{d}\mathbf{f} \end{aligned}$$

$$= \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \nabla_M (\nabla^M \mathbf{f}) - \frac{a}{2n!} e^{a\mathbf{f}} F_{[n]}^2 \right] d\mathbf{f}$$

Donde se ha integrado por partes y aprovechando nuevamente  $\nabla_M (\sqrt{-g}) = 0$ . La ecuación de campo asociada a la variación de  $\phi$  es entonces:

$$\nabla_M \nabla^M \mathbf{f} = \frac{a}{2n!} e^{a\mathbf{f}} F_{[n]}^2 \quad (3.41)$$

A modo de recapitulación y sumario, presentemos nuevamente las ecuaciones de movimiento para hacernos de una visión general:

$$R_{MN} = \frac{1}{2} \partial_M \mathbf{f} \partial_N \mathbf{f} + \frac{e^{a\mathbf{f}}}{2(n-1)!} \left[ F_M \dots F_N - \frac{n-1}{n(D-2)} F_{[n]}^2 g_{MN} \right], \quad (3.42)$$

$$\nabla_M (e^{a\mathbf{f}} F^{M\dots}) = 0 \quad (3.43)$$

$$\nabla_M \nabla^M \mathbf{f} = \frac{a}{2n!} e^{a\mathbf{f}} F_{[n]}^2 \quad (3.44)$$

Estas ecuaciones representan las ecuaciones dinámicas de los campos bosónicos, las cuales se resolverán en el siguiente capítulo introduciendo las p-branas a través de un ansatz.

# Capítulo 4

## Soluciones Tipo $p$ -branas a la Teoría de Supergravedad

En el presente capítulo se encontrará soluciones tipo  $p$ -branas a la teoría de supergravedad. Planteadas las soluciones, se estudiarán sus propiedades más importantes, las masas y las cargas, y se vincularán con la teoría de estados BPS. Después de presentar algunos ejemplos de aplicación en teorías de SUGRA, se tocará el tema de las branas negras. Por un lado, hemos planteado una acción que describe la dinámica de campos bosónicos que aparecen en teorías de supergravedad; y por el otro tenemos unos objetos extendidos que bien pudieran acoplarse con estos campos. La tarea es ahora resolver las ecuaciones de movimiento de una manera particular que nos permita introducir tales objetos. Haciendo esto, se ha hallado soluciones a la teoría de supergravedad usando objetos tipo  $p$ -branas. Ya no se hablará de membranas en general sino, de *Soluciones Tipo  $p$ -branas a la Teoría de Supergravedad*.

### 4.1 El ansatz de las $p$ -branas

Las complicadas ecuaciones de movimiento que se obtiene de (3.28) se resolverán usando un ansatz [98, 89], en el que se introducen las  $p$ -branas. En cuanto a la métrica, por ejemplo, se requiere que se preserven algunas supersimetrías, lo cual obliga a mantener también simetrías traslacionales. Además, por consideraciones de simetría esférica análogas a las usadas en la construcción de la solución de Schwarzschild, se puede simplificar algo más el caso, considerando isotropía en las coordenadas a las que no alcance la simetría trasnacional. Por otro lado, los campos  $F$  de (3.28) se pueden considerar como campos externos que se acoplan a ciertos objetos “cargados” extendidos, de  $p$  dimensiones, inmersos en el espacio  $D$  dimensional. Así que si las soluciones conservan la simetría  $(Poincaré)_d \times SO(D - d)$  con  $d = p + 1$ , pueden ser

interpretadas como las superficies-mundo  $d$ -dimensionales de estos objetos, inmersas en el espacio total. Esta elección naturalmente divide las coordenadas espacio-temporales en dos partes:

$$\begin{aligned} x^M &= (x^m, y^m) \\ M &= 0, \dots, D-1 \\ \mathbf{m} &= 0, \dots, p = d - 1 \\ m &= d, \dots, D-1 \end{aligned} \quad , \quad (4.1)$$

siendo  $x^\mu$  las coordenadas del volumen-mundo, y  $y^m$  sus “Transversas”. Las componentes de la métrica se separan también según [89]:

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{m}} &= e^{2A(r)} \mathbf{h}_{\mathbf{m}} \\ g_{mn} &= e^{2B(r)} \mathbf{d}_{mn} \\ g_{mv} &= g_{\mathbf{m}v} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde hemos escogido una dependencia en

$$r = \sqrt{\mathbf{d}_{mn} y^m y^n} \quad (4.3)$$

para asegurar la invariancia trasnacional en  $x^\mu$  y la simetría  $SO(D - d)$  en  $y^m$ . Por último, también los campos deben tener una dependencia “radial” en las direcciones “transversales”.

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{f}(r) \\ F_{[n]} &= F_{[n]}(r) \\ A_{[n-1]} &= A_{[n-1]}(r) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hemos dicho en el capítulo anterior que los campos externos que componen la acción (3.28) pueden ser acoplados con unos objetos extendidos que hemos llamado  $p$ -branas en la sección 3.2.1. Insistimos en la pregunta natural: ¿De que manera acoplamos una  $n$ -forma a una de esta  $p$ -branas?

#### 4.1.1. Caso elemental o eléctrico

Para respondernos la pregunta anterior, recordamos lo que hemos hecho para agregar el término de Wess-Zumino en la acción de las  $p$ -branas (2.13) por analogía a la electrodinámica. Se debe resaltar aquí que se está agregando un término de interacción que las  $p$ -branas en general no tienen: estamos “cargando a las  $p$ -branas”. En electrodinámica clásica, la 1-forma de Maxwell  $A_\mu$  se acopla naturalmente con la línea mundo de una partícula cargada, vía la integral:

$$\int A_{[1]} = \int (A_m dx^m) = \int A_m \left( \frac{dx^m}{ds} \right) ds . \quad (4.5)$$

Se puede generalizar el acoplamiento considerando potenciales de mayor rango  $A_{[n-1]}$  y objetos extendidos de dimensión  $p$ . Integramos entonces la  $n-1$  forma sobre el *volumen*-mundo de la  $p$ -brana. Según la manera en la que el espacio-tiempo se encuentra (4.1), las dimensiones de los objetos quedan automáticamente vinculadas como

$$p = d = (n - 1) - 1 \quad (4.6)$$

Este acoplamiento fundamenta lo que llamaremos la solución *eléctrica o elemental*.

También deseamos que los campos externos cumplan con (4.4), es decir que satisfagan los requerimientos de la simetría  $(Poincaré)_d \times SO(D-d)$ . Una elección como

$$A_{m_1 \dots m_{n-1}} = \epsilon_{m_1 \dots m_{n-1}} e^{C(r)} , \quad (4.7)$$

con los otros componentes nulos, fija  $F_{[n]}$

$$\begin{aligned} F_{m_1 \dots m_{n-1}} &= \epsilon_{m_1 \dots m_{n-1}} \partial_m e^C \\ &= \frac{y_m}{r} e^C \epsilon_{m_1 \dots m_{n-1}} C' \end{aligned} \quad (4.8)$$

y cumple las expectativas. Nótese que intercambiando el índice  $m$  con cualquier otro, debe cambiarse el signo del campo.

Esto es todo en cuanto al ansatz puramente se refiere. Ahora solo faltaría insertarlo en las ecuaciones de movimiento (3.42, 3.43 y 3.44) calculadas anteriormente y resolver las ecuaciones diferenciales que nos queden. Esta tarea puede realizarse con

mayor facilidad gracias a que la dependencia en  $r$  simplifica notablemente los cálculos, por ejemplo, si  $f = f(r)$  es cualquier función de las coordenadas transversas, tenemos:

$$\partial_m r = \frac{y_m}{r} \quad (4.9)$$

$$\partial_m f = \frac{y_m}{r} f' \quad (4.10)$$

$$\partial_m \partial_n f = \frac{y_m y_n}{r^2} f'' + \left( \frac{\mathbf{d}_{mm}}{r} - \frac{y_m y_n}{r^3} \right) f' \quad (4.11)$$

donde  $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$

Aplicamos nuestras consideraciones sobre las cantidades que componen la ecuación de movimiento para la métrica (3.42). Primero se calcula algunas cantidades relacionadas con el campo externo, como  $F_M \dots F_N$  y  $F_{[n]}^2$ :

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{m}} \dots F_{\mathbf{n}} \dots &= F_{\mathbf{m}m_1 m_2 \dots} F_{\mathbf{n}}^{m_1 m_2 \dots} + \dots + F_{\mathbf{m}m_1 \dots m_{n-1}} F_{\mathbf{v}}^{m_1 \dots m_{n-1}} \\ &= (n-1) F_{\mathbf{m}m_1 m_2 \dots} F_{\mathbf{v}}^{m_1 m_2 \dots} \\ &= (n-1) e^{-2A(n-2) - 2B} \mathbf{d}^{m_1 n_1} \mathbf{h}^{m_1 v_1} \dots F_{\mathbf{m}m_1 m_2 \dots} F_{n_1 v_2} \dots \\ &= (n-1)! e^{-2A(d-1) - 2B + 2C} (C')^2 \mathbf{h}_{\mathbf{m}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde hemos usado (4.6) y la identidad

$$\epsilon^{m_1 \dots m_i m_{i+1} \dots m_n} \epsilon_{n_1 \dots n_i m_{i+1} \dots m_n} = (n-i)! \mathbf{d}_{n_1 \dots n_i}^{m_1 \dots m_i}, \quad (4.13)$$

para el caso  $i=1$ .

Faltan las componentes transversales de  $F_M \dots F_N$ :

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{m}} \dots F_{\mathbf{n}} \dots &= e^{-2A(n-1)} \mathbf{h}^{m_1 v_1} \dots F_{\mathbf{m}m_1 \dots} F_{n_1 v_1 \dots} \\ &= \frac{y_m y_n}{r^2} (n-1)! e^{-2Ad + 2C} (C')^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

y  $F_{[n]}^2$ :

$$\begin{aligned}
F_{\dots} F_{\dots} &= F_{m_1 m_2 \dots} F^{m_1 m_2 \dots} + \dots + F_{m_1 \dots m_{n-1}} F^{m_1 \dots m_{n-1}} \\
&= n F_{m_1 m_2 \dots} F^{m_1 m_2 \dots} \\
&= n e^{-2A(n-1) - 2B + 2C} \mathbf{d}^{m_1 m_1} \frac{y_{m_1} y_{n_1}}{r^2} \in_{m_2 \dots m_n} \in^{m_2 \dots m_n} (C')^2 \\
&= n! e^{-2Ad - 2B + 2C} (C')^2,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

El término que faltaría,  $F_{m \dots} F_{\nu \dots}$ , se anula, ya que en

$$F_{m \dots} F_{\nu \dots} = F_m M_2 \cdot M_{n-1} F_{\nu}^{M_2 \cdot M_{n-1}} \tag{4.16}$$

algunos de los índices  $M_i$  de  $F_{\nu}^{M_2 \cdot M_{n-1}}$  debe correr en el espacio transverso porque según (4.8),  $F_{\nu}^{\nu_2 \cdot \nu_{n-1}} = 0$ . Pero si  $M_i = m_i$ , entonces aparecen dos índices transversos en  $F_m M_2 \cdot M_{n-1}$ , lo que es también imposible. La simetría esférica, pues, aniquila todo término cruzado como  $F_{m \dots} F_{\nu \dots}$  y, como puede verse en la ec (A.50), en  $R_{m\nu}$ .

Por comodidad, definiremos a continuación una definición que vincula las dimensiones de las partes separadas del espacio tiempo.

$$\mathcal{d}^{\circ} \equiv D - 2 - d \tag{4.17}$$

Esta relación, que es idempotente  $\mathcal{d}^{\circ} = d$ , nos ayudará a expresar la ecuación de movimiento (2.42) de una manera más sencilla:

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{m}} &= \frac{e^{af}}{2(n-1)!} \left( F_{m \dots} F_{\nu \dots} - \frac{n-1}{n(D-2)} F_{[n]}^2 g_{\mathbf{m}} \right) \\
&= \frac{\mathcal{d}^{\circ}}{2(D-2)} e^{af - 2A(d-1) - 2B + 2C} (C')^2 \mathbf{h}_{\mathbf{m}},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
R_{mn} - \frac{1}{2} \partial_m \mathbf{f} \partial_n \mathbf{f} &= \frac{e^{af}}{2(n-1)!} \left( F_{m \dots} F_{n \dots} - \frac{n-1}{n(D-2)} F_{[n]}^2 g_{\mathbf{m}} \right) \\
&= \left( \frac{1}{2} \frac{y_m y_n}{r^2} - \frac{d}{D-2} \mathbf{d}_{mn} \right) e^{af - 2Ad + 2C} (C')^2.
\end{aligned} \tag{4.19}$$



Todavía restan dos ecuaciones de movimiento que considerar. Como involucran la derivada de la raíz del determinante métrico, conviene simplificarla con el ansatz. Usando la ecuación (A.18) esta derivada aparece como:

$$\begin{aligned}
\partial_m \sqrt{-g} &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} [g^{mn} \partial_m g_{nn} + g^{pq} \partial_m g_{pq}] \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} [2d \partial_m A + 2(D-d) \partial_m B] \\
&= [dA' + (D-d)B'] \frac{y_m}{r}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

La ecuación de movimiento para el campo externo  $A_{[n-1]}$  es (3.43). Con el ansatz eléctrico y la ecuación (4.20), se reduce a:

$$\begin{aligned}
\partial_m (\sqrt{-g} e^{aF} F^{m\dots}) &= \mathbf{d}^{mn} \in^{m_2\dots m_n} \partial_m (\sqrt{-g} e^{aF-2dA-2B+C} \frac{y_n}{r} C') \\
&= \sqrt{-g} \in^{m_2\dots m_n} \mathbf{d}^{ab} \left\{ [dA' + (D-d)B'] \frac{y_c y_b}{r^2} C' \right. \\
&\quad + [a \partial_c \mathbf{f} - 2d \partial_c A - 2 \partial_c B + \partial_c C] \frac{y_b}{r} C' \\
&\quad \left. + \partial_c \left( \frac{y_b}{r} C' \right) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

0, de manera más sucinta:

$$C'' + \frac{d'+1}{r} C' + C'(a\mathbf{f}' - dA' + dB' + C') = 0. \tag{4.21}$$

Queda la última ecuación de movimiento (3.44), que se refiere al campo escalar  $\phi$ . Como disponemos de la derivada  $\partial_m \sqrt{-g}$ , escribimos de una vez la ecuación simplificada:

$$\begin{aligned}
\partial_m (\sqrt{-g} g^{mn} \partial_n \mathbf{f}) &= \sqrt{-g} [dA' + (D-d)B'] \frac{y_m}{r} g^{mn} \partial_n \mathbf{f} \\
&\quad + \sqrt{-g} (-2\mathbf{d}^{mm} e^{-2B} \partial_m B) \partial_n \mathbf{f} + \sqrt{-g} g^{mm} \partial_m \partial_n \mathbf{f} \\
&= \sqrt{-g} e^{-2B} \left[ dA' \mathbf{f} + (D-d)B' \mathbf{f} - 2B' \mathbf{f} + \mathbf{f}'' \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{D-d}{r} - \frac{1}{r} \right) \mathbf{f}' \right] \\
&= \frac{a}{2n!} \sqrt{-g} e^{a\mathbf{f}} F_{[n]}^2.
\end{aligned}$$

Que reagrupamos como

$$dA' \mathbf{f} + dB' \mathbf{f} + \mathbf{f}'' + \frac{d^{\alpha} + 1}{r} \mathbf{f}' = \frac{a}{2n!} e^{a\mathbf{f} + 2B} F_{[n]}^2. \quad (4.22)$$

Para el ansatz eléctrico ya hemos calculado  $F_{[n]}^2$  en la ec. (4.15), así que cerramos las ecuaciones de movimiento con:

$$dA' \mathbf{f} + dB' \mathbf{f} + \mathbf{f}'' + \frac{d^{\alpha} + 1}{r} \mathbf{f}' = \frac{a}{2} e^{a\mathbf{f} - 2dA + 2C} (C')^2. \quad (4.23)$$

#### 4.1.2. Caso solitónico o magnético

El campo externo  $A$  que estudiamos en la sección anterior, no es el único que podemos acoplar a la *Maxwell* con una  $p$ -brana. Existe otro campo relacionado con el campo  $A$  de la acción generalizada (3.28) que podemos acoplar de la misma forma. Si se toma, por ejemplo, el dual del campo  $*F = *(dA)$ , que es una  $(D-n)$ - forma, pudiéramos interpretarlo como el campo de fuerza de cierto potencial de gauge  $B$  asociado a  $*F$  por la relación usual  $*F = dB$ . Luego en  $B$  tendríamos una  $(D - n - 1)$ -forma que puede acoplarse con el volumen mundo de nuestra  $p$ -brana con un cambio en la elección de la dimensionalidad de los objetos –compárese con (4.6):

$$p = d - 1 = (D - n - 1) - 1. \quad (4.24)$$

El problema al seguir esta construcción, es que el potencial  $B$  estaría relacionado no-localmente con los campos de nuestra acción en el mismo sentido en que los potenciales  $A^\mu$  y  $X^m$  de la sección 1.3.2 están relacionados no-localmente: si fijamos

$\mathcal{A}^m$  (1.47),  $A^\mu$  viene dado por dos expresiones (1.42 y 1.43) en dos espacios 3D abiertos distintos. Es decir, tendríamos que especificar  $B$  en un cubrimiento abierto sobre nuestra variedad y proveer también las debidas funciones de transición en las intersecciones.

De manera que aunque conocemos la relación entre la dimensión de la  $p$ -brana y el rango del campo al que se acopla gracias a (4.24), el ansatz [89] se expresa en términos de  $F_{[n]}$ , que es una cantidad global.

$$F_{m_1 \dots m_n} = \mathbf{I} \in_{m_1 \dots m_n p} \frac{y^p}{r^{n+1}} \quad (4.25)$$

$$F_{m_1 \dots m_n} = 0, \quad (4.26)$$

donde el parámetro  $\lambda$  es una constante de integración relacionada con objetos con “carga magnética” y la potencia de  $r$  se escoge para que se satisfaga la identidad de Bianchi.

Como en el caso eléctrico vamos a usar el ansatz magnético parasimplificar el aspecto de las ecuaciones de movimiento. Simplificando las cantidades que aparecen en la ecuación para la variación de la métrica (3.42):

$$F_{m \dots} F_{\nu \dots} = 0, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} F_{m \dots} F_n^{\dots} &= F_{m m_2 \dots m_n} F_n^{m_2 \dots m_n} \\ &= e^{-2B(n-1)} \mathbf{d}^{a_2 b_2} \dots \mathbf{d}^{a_n b_n} \mathbf{I}^2 \in_{m m_2 \dots m_n p} \in_{n n_2 \dots n_n q} \frac{y^p y^q}{r^{2(n+1)}} \\ &= \mathbf{I}^2 \frac{e^{-2B(n-1)}}{r^2(n+1)} y^p y_q \mathbf{d}_m^{(n-1)!} \mathbf{d}_{pm}^{qr} \\ &= \frac{\mathbf{I}^2}{r^2(d_0+1)} e^{-2Bd^*} (n-1)! \left( \mathbf{d}_{mn} - \frac{y_m y_n}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} F_{[n]}^2 &= F_{M_1 \dots M_n} F^{M_1 \dots M_n} \\ &= F_{m_1 \dots m_n} F^{m_1 \dots m_n} \\ &= \frac{\mathbf{I}^2}{r^2(d_0+2)} e^{-2B(d_0+1)} y^p y_q \in_{p m_1 \dots m_n} \in^{q m_1 \dots m_n} \\ &= \frac{\mathbf{I}^2}{r^2(d_0+1)} n! e^{-2B(d_0+1)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Insertando (4.27, 4.28, 4.29) en las ecuaciones de movimiento obtenemos las ecuaciones simplificadas para el ansatz magnético:

$$\begin{aligned}
R_{mm} &= -\frac{e^{af}}{2(n-1)!} \left( \frac{n-1}{n(D-2)} F_{[n]}^2 g_{mm} \right) \\
&= -\frac{d^0}{2(D-2)} \frac{\mathbf{I}^2}{r^2 (d^0+1)} e^{af-2B(d^0+1)+2A} \mathbf{h}_{mm}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
R_{mn} - \frac{1}{2} \partial_m \mathbf{f} \partial_n \mathbf{f} &= \frac{e^{af}}{2(n-1)!} \left( F_{m\dots n} F_n - \frac{n-1}{n(D-2)} F_{[n]}^2 g_{mn} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{I}^2}{r^2 (d^0+1)!} e^{af-2Bd^0} \left( \frac{d}{D-2} \mathbf{d}_{mn} - \frac{y_m y_n}{r^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Continuando con la ecuación del campo externo(3.43) para el caso magnético:

$$\begin{aligned}
\partial_m (\sqrt{-g} e^{af} F^{m\dots}) &= \mathbf{I} \in^{pm\dots} \partial_m (\sqrt{-g} e^{af-2nB} \frac{y_p}{r^{n+1}}) \\
&= \sqrt{-g} \in^{pm\dots} \left\{ [aA' + (D-d)B'] \frac{y_m y_p}{r^{n+2}} \right. \\
&\quad \left. + (a \partial_m \mathbf{f} - 2n \partial_m B) \frac{y_p}{r^{n+1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{d}_{mp}}{r^{n+1}} - \frac{y_m y_p}{r^{n+3}} \right\} = 0
\end{aligned}$$

Aquí desembocamos en lo que parecía un impasse. La simetría de  $\mathbf{d}_{mp}$  y la antisimetría de  $\in^{pm\dots}$ , nos deja con la expresión no muy útil

$$\in^{pc\dots} y_c y_p \left[ dA' - d\mathcal{B}' + a\mathbf{f} \frac{1}{r} \right] = 0, \tag{4.32}$$

con  $\in^{pc\dots} y_c y_p = 0$ , que simplemente nos dice que no se excluye la posibilidad de que la cantidad entre los corchetes se nula.

Esto parecería dejarnos con una “deficiencia” de ecuaciones para dilucidar una posible solución, pero más adelante veremos que no nos será necesaria ninguna

ecuación de movimiento aparte de las que se asocian a la métrica y al campo escalar  $\phi$  para plantearla. De este modo, sustituyendo (4.29) en (4.22) tendremos la ecuación:

$$dA' \mathbf{f} + \bar{d}B' \mathbf{f} + \mathbf{f}'' + \frac{d^{\delta+1}}{r} \mathbf{f} = \frac{a}{2} e^{af-2\delta B} \frac{\mathbf{I}^2}{r^2 (d^{\delta+1})} \quad (4.33)$$

## 4.2. Las Soluciones

Tenemos ya una versión simple de las ecuaciones de movimiento para los dos ansätze que queremos manejar. Sin embargo hay un término que no hemos simplificado todavía con el ansatz de la separación de la métrica en dos partes solo dependientes de la coordenadas “radial” en el espacio transverso. Este término faltante es el tensor de curvatura de Ricci que depende directamente de esta métrica. La apariencia del tensor de Ricci simplificado solo puede apreciarse después de tediosos cálculos que no forman parte de la argumentación central del proceso de solución. Por esto, hemos decidido anexas tales cálculos en el apéndice A.3 y citar solamente sus resultados (A.51, A.52):

$$R_{mm} = -\mathbf{h}_{mm} e^{2(A-B)} \left[ A'' + d(A')^2 + \frac{d^{\delta+1}}{r} A' + dA' B' \right] \quad (4.34)$$

$$R_{nn} = -\mathbf{d}_{nn} \left[ B'' + d(B')^2 + \frac{2d^{\delta+1}}{r} B' + dA' B' + \frac{d}{r} A' \right] - \frac{y_m y_m}{r^2} \left[ d\bar{B}'' - d\bar{B}'^2 - \frac{d^{\delta}}{r} B' - 2dA' B' + dA'' + d(A')^2 - \frac{d}{r} A' \right] \quad (4.35)$$

Colocando el término faltante del ansatz, el tensor de Ricci, en las ecuaciones de movimiento (4.18, 4.19, 4.23) para el ansatz eléctrico y (4.30, 4.31, 4.33) para el magnético, podemos ver la expresión general de las ecuaciones de movimiento:

$$A'' + d(A')^2 + \frac{d^{\delta+1}}{r} A' + dA' B' = \frac{d^{\delta}}{2(D-2)} S^2 \quad (4.35)$$

$$B'' + d(B')^2 + \frac{2d^{\delta+1}}{r} B' + dA' B' + \frac{d}{r} A' = -\frac{d}{2(D-2)} S^2 \quad (4.37)$$

$$d\bar{B}'' - d\bar{B}'^2 - \frac{d^{\delta}}{r} B' - 2dA' B' + dA'' + d(A')^2 - \frac{d}{r} A' + \frac{1}{2} (\mathbf{f})^2 = \frac{1}{2} S^2 \quad (4.38)$$

$$dA' \mathbf{f} + d\mathcal{B}' \mathbf{f} + \mathbf{f}'' + \frac{d^{\mathcal{A}+1}}{r} \mathbf{f} = -\frac{1}{2} \mathbf{V} a S^2, \quad (4.39)$$

donde

$$S = \begin{cases} (e^{\frac{1}{2}a\mathbf{f}-dA+C}) C' & d = n-1, \mathbf{V} = +1 \\ \mathbf{I}(e^{\frac{1}{2}a\mathbf{f}-d\mathcal{B}}) r^{-d-1} & d = D-n-1, \mathbf{V} = -1 \end{cases} \quad (4.40)$$

y como extra exclusivo del caso eléctrico, tenemos la ecuación (4.21):

$$C'' + \frac{d^{\mathcal{A}+1}}{r} C' + C'(a\mathbf{f} - dA' + d\mathcal{B}' + C') = 0$$

sobre la cual habremos de analizar la consistencia de la solución eléctrica.

Llegado a este punto es momento de conseguir la *solución* de las ecuaciones anteriores. Pero antes, motivados por los requerimientos de conservación de supersimetría, para perfeccionar aún más el ansatz se impone una condición de linealidad sobre la métrica.

$$dA' + d\mathcal{B}' = 0 \quad (4.41)$$

Esta condición de linealidad nos permite hacer un artificio a la hora de resolver las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, hacer un artificio nos obliga a estudiar la fundamentación de dicho artificio en sí, esto es, analizar un poco más a fondo las propiedades de lo que se denomina un *solitón*, para poder explicar porque la preservación de parte de la supersimetría nos lleva a soluciones SUGRA que saturan la cota de Bogomol'nyi.

#### 4.2.1. Soluciones clásica y conservación de SUSI

No se pretende aquí hacer una revisión sobre solitones dentro de una revisión sobre  $p$ -branas, pero conviene citar ciertas propiedades de los solitones [9, 66, 24, 36].

Primero, los solitones son, en general, soluciones no-perturbativas a ecuaciones de campo no lineales, que no pueden resolverse por perturbación de las ecuaciones de campo linealizadas. Su masa por unidad de  $p$ -volumen es inversamente proporcional, como se vio en la sección 3.3, a una potencia de una constante de acoplo sin

dimensiones, de modo que el límite de acoplo electrodébil de una teoría perturbativa corresponde al acoplo fuerte de solitones.

Los solitones suelen estar caracterizados por un índice de carácter topológico –como la carga del monopolo de Dirac o de ‘t Hooft-Polyakov del capítulo 1– que al cuantizar será un número cuántico que nunca fue una carga de Noether conservada.

Siguiendo con la tradición de la generalización de casos sencillos que hemos conservación de ciertas simetrías lleva a soluciones clásicas BPS, y luego lo ajustaremos a nuestras necesidades. Consideremos un modelo  $\mathbf{I}\mathbf{f}$  enriquecido, en 1+1 -dimensiones:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_m \mathbf{f} \partial^m \mathbf{f} - \frac{1}{4} \mathbf{I} \left( \mathbf{f} - \frac{1}{g} \right)^2. \quad (4.42)$$

Muy a la manera del modelo de sine-Gordon en el que aparecen solitones indestructibles, éste modelo tiene [100] una carga topológica conservada y una masa dadas por:

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{g} \left( \mathbf{f} \Big|_{x \rightarrow \infty} - \mathbf{f} \Big|_{x \rightarrow -\infty} \right), \quad (4.43)$$

y,

$$\mathbf{e} = \int dx \frac{1}{2} (\mathbf{f})^2 + \frac{1}{4} \mathbf{I} \left( \mathbf{f} - \frac{1}{g} \right)^2 = \frac{2}{3} \sqrt{2} \frac{m}{g}. \quad (4.44)$$

Una versión supersimétrica del Lagrangiano anterior es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_m \mathbf{f} \partial^m \mathbf{f} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{y}}_i \mathbf{g}^m \partial_m \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{I}^2 (\mathbf{f} - a^2)^2 - \mathbf{I} \mathbf{f} \bar{\mathbf{y}} \mathbf{y}, \quad (4.45)$$

y tiene dos cargas definidas por

$$Q_{\pm} = \int dx (\mathbf{f}_{\pm} \mathbf{f}) \mathbf{y}_{\pm} m \mathbf{I} (\mathbf{f} - a^2)^2 \mathbf{y}_m, \quad (4.46)$$

donde  $\mathbf{y}_{\pm}$  son las componentes derecha e izquierda del espinor  $\mathbf{y}$ . Estas supercargas satisfacen el álgebra [77]:

$$Q_{\pm}^2 = P_{\pm} \quad , \quad \{Q_+, Q_-\} = T \quad , \quad (4.47)$$

con  $P_{\pm} \equiv P_0 \pm P_1$ , y donde  $T$  es la carga en el sentido topológico. El álgebra supersimétrica nos asegura que

$$P_+ + P_- = (Q_+ \pm Q_-)^2 \text{ m } T \quad . \quad (4.48)$$

Lo que implica, para la masa en reposo  $M$ , una relación tipo cota de Bogomol'nyi

$$M \geq \frac{1}{2} T \quad , \quad (4.49)$$

que es saturada por los estados  $|s\rangle$  tales que  $(Q_+ \pm Q_-)|s\rangle = 0$ , es decir, los estados BPS son aniquilados por una combinación de las cargas supersimétricas. Otra combinación de supercargas no aniquila el estado, sino que crea un fermión no masivo. Que la mitad de las supercargas aniquile la solución clásica y sature la cota de Bogomol'nyi, mientras que la otra mitad produzca fermiones sin masa en el condensado, es lo que sucede en la mayor parte de los ejemplos de soluciones solitónicas en teorías supersimétricas. De este modo, conseguir los estados que conserven parte de las supercargas, es conseguir la vía alterna más corta que nos lleve a las ecuaciones de movimiento.

En el caso de la supergravedad en 11 dimensiones, existe también un álgebra supersimétrica que debe cumplirse [102],

$$\{Q, Q\} = C(\Gamma^A P_A + \Gamma^{AB} U_{AB} + \Gamma^{ABCDE} V_{ABCDE}) \quad . \quad (4.50)$$

donde  $C$  es la matriz de conjugación de carga, las  $\Gamma$  son las matrices de Dirac en  $D = 11$ ,  $P_A$  es el 11-momentum, y las cantidades  $U_{AB}$  y  $V_{ABCDE}$  están relacionadas con las cargas eléctrica  $e_d$  y magnética  $g_d$  de las soluciones. La ecuación (4.50) involucra también, como en (4.47), la supercarga [103]:

$$Q = \int_{\partial M} \Gamma^{0bc} \mathbf{y}_c \sum_{9b} \quad . \quad (4.51)$$



De igual forma que en (3.48), como  $Q^2$  es positivo, genera las relaciones de cota de Bogomol'nyi

$$\mathbf{e} \geq \frac{2}{\sqrt{\Delta}} e_d \quad (4.52)$$

$$\mathbf{e} \geq \frac{2}{\sqrt{\Delta}} g_d \quad (4.53)$$

Saturar las inecuaciones de Bogomol'nyi implica colocar las  $p$ -branas en ciertos supermultipletes especiales que *conserven una parte de la supersimetría*. Además, al analizar la consistencia de anular los campos fermiónicos de la supergravedad ( el gravitino  $\mathbf{y}_M$ ), nos encontramos con la citada porción residual de la supersimetría expresada en términos de la ecuación [104]:

$$d\mathbf{y}_A \Big|_{y=0} = \mathcal{D}_A \mathbf{e} = 0. \quad (4.54)$$

donde  $\mathbf{y}_A = e_A^M$  y

$$\mathcal{D}_A \mathbf{e} = D_A \mathbf{e} - \frac{1}{288} (\Gamma_A^{BCDE} - 8\mathbf{d}_B^A \Gamma^{CDE}) F_{BCDE} \mathbf{e}, \quad (4.55)$$

$$D_A \mathbf{e} = (\partial_A + \frac{1}{4} \mathbf{w}_A^{BC} \Gamma_{BC}) \mathbf{e}. \quad (4.56)$$

Esta última condición solo puede ser consistente si la métrica en el condensado cumple [104, 105]

$$3A' + 6B' = 0 \quad , \quad C'e^C = 3A'e^{3A} \quad (4.57)$$

pero en general para otras dimensiones distintas de 11, donde  $d = 3$  y  $d' = 6$ , se tiene la relación de linealidad (4.41)

#### 4.2.2. Solución de las ecuaciones de movimiento

Armados pues de un ansatz que elimina a B de las ecuaciones de movimiento, podemos enfrentar las complicadas ecuaciones de movimiento, que quedan reducidas a:

$$A'' + \frac{d'+1}{r} A' = \frac{d'}{2(D-2)} S^2, \quad (4.58)$$

$$d(D-2)(A')^2 + \frac{1}{2}d^{\alpha+1}(\mathbf{F})^2 = \frac{1}{2}dS^2 \quad , \quad (4.59)$$

$$\mathbf{F}' + \frac{d^{\alpha+1}}{r}\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\mathbf{V}aS^2 \quad , \quad (4.60)$$

La primera y la última de estas ecuaciones sugieren una nueva relación de linealidad, esta vez entre  $\phi$  y  $A$ . Despejamos los factores necesarios para formularla:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{V}a(D-2)}{d^{\alpha}} A' \quad , \quad (4.61)$$

que naturalmente reducirá el número de ecuaciones nuevamente . Una de las ecuaciones (4.59), relacionará ahora a  $\phi$  con  $S$  de la siguiente manera:

$$\left[ \frac{2dd^{\alpha}}{a^2(D-2)} + 1 \right] (\mathbf{F})^2 = S^2 \quad .$$

Por comodidad definiremos una constante

$$\Delta = a^2 + \frac{2dd^{\alpha}}{(D-2)} \quad , \quad (4.62)$$

que esta relacionada, como vemos, a la constante de acoplamiento del campo escalar, y al rango de los campos o a la dimensión de la  $p$ -brana y la separación de la métrica, si se quiere. Con esto las ecuaciones de movimiento se presentan de la manera más diáfana alcanzable en este trabajo:

$$\frac{\Delta}{a^2} (\mathbf{F})^2 = S^2 \quad , \quad (4.63)$$

$$\mathbf{F}' + \frac{d^{\alpha+1}}{r}\mathbf{F} + \frac{\mathbf{V}\Delta}{2a}(\mathbf{F})^2 = 0 \quad . \quad (4.64)$$

Usando una variable auxiliar  $\phi = \phi'$  obtenemos que

$$\mathbf{j}' + \left( \frac{d^{\alpha+1}}{r} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\mathbf{V}\Delta}{2a} \right) \mathbf{F}^2 = 0 \quad . \quad (4.65)$$

Esta ecuación es el caso particular cuadrático de la famosa ecuación de Bernoulli. El método estándar de resolverla consiste en realizar un cambio de variables  $u = \phi^{-1}$ , que automáticamente la convierte en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$u' + \left( \frac{d^{\alpha+1}}{r} \right) u + \frac{V\Delta}{2a} = 0. \quad (4.66)$$

Ésta, es ya manejable por la vía del factor integrante, y su solución es:

$$u = \frac{V\Delta}{2a} \left[ K_1 r^{d^{\alpha+1}} - \frac{r}{d^{\alpha}} \right], \quad (4.67)$$

donde  $K_1$  es la constante de integración. Retornando a las variables originales  $\phi' = u^{-1}$ , quedamos con otra ecuación diferencial de primer orden,

$$f' = \frac{2a}{V\Delta} \left[ K_1 r^{d^{\alpha+1}} - \frac{r}{d^{\alpha}} \right]^{-1}, \quad (4.68)$$

que se resuelve por integración directa en r:

$$f = \frac{2a}{V\Delta} \ln \left[ d^{\alpha} K_1 - \frac{1}{r^{d^{\alpha}}} \right] + K_2, \quad (4.69)$$

agregando una segunda constante de integración  $K_2$ . Ahora se debe restringir estas constantes, para ello consideramos lo siguiente: Por un lado no queremos un campo escalar disperso por todo el universo, por lo que  $\phi \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0$  fija

$$K_2 = -\frac{2a}{V\Delta} \ln d^{\alpha} K_1, \quad (4.70)$$

Por el otro lado, para asegurarnos de la ausencia de singularidades en el campo para r finito –que es  $r = 1/d^{\alpha} K_1$  en este caso– definimos

$$k = -\frac{1}{d\kappa_1} > 0 . \quad (4.71)$$

De este modo hemos llegado por un fin a una solución en todo el sentido de la palabra:

$$\mathbf{f} = \frac{2a}{\mathbf{V}\Delta} \ln \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^*}} \right] . \quad (4.72)$$

Gracias a la relaciones de linealidad (4.41 , 4.61) podemos reducir las funciones  $A$  y  $B$  a dos constantes de integración

$$A = -\frac{d^*}{\mathbf{V}a(D-2)} \mathbf{f} + \mathbf{K}_A , \quad (4.73)$$

$$B = \frac{d}{\mathbf{V}a(D-2)} \mathbf{f} + \mathbf{K}_B . \quad (4.74)$$

Nuevamente, condiciones físicas nos sugieren una métrica plana lejos del origen. Esto impone la condición  $A|_{r \rightarrow \infty} = B|_{r \rightarrow \infty} = 0$  , que lleva las dos constantes de integración a cero:

$$A = -\frac{2d^*}{\Delta(D-2)} \ln \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^*}} \right] , \quad (4.75)$$

$$B = \frac{2d}{\Delta(D-2)} \ln \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^*}} \right] . \quad (4.76)$$

Queda solamente la función  $C$ , asociada al potencial del ansatz eléctrico que halla a partir de la ecuación (4.40), haciendo uso de la linealidad (4.61) y (4.63) –recordando que para el caso eléctrico,  $\zeta = +1$ ,

$$\begin{aligned} [e^C]' &= S e^{\frac{1}{2}af+dA} \\ &= \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \mathbf{f} e^{-\left[ \frac{1}{2}a + \frac{d^*d}{\mathbf{V}a(D-2)} \right] \mathbf{f}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \mathbf{f} e^{-\frac{\Delta}{2a} \mathbf{f}} \\
&= \pm \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \left[ e^{-\frac{\Delta}{2a} \mathbf{f}} \right]
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Puesta así, la integración es trivial. El único detalle importante es escoger el signo positivo para que  $C$  sea real – si así lo deseamos podemos fijar el signo de  $S$  como

$$-\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \mathbf{f}$$

$$C = \ln \frac{2}{\sqrt{\Delta}} - \ln \left[ 1 + \frac{k}{r^{\frac{d}{2}}} \right] \tag{4.78}$$

Esta ecuación es además consistente con la ecuación (3.21).

El caso esta básicamente cerrado. Por amor a la síntesis podemos usar la ecuación (4.40) (sustituyendo las expresiones para  $\phi$  y  $B$  en el caso magnético en el que  $\zeta = -1$ ) para vincular el parámetro  $\lambda$  con la constante de integración  $k$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= S r^{\frac{d}{2}+1} e^{-\frac{1}{2} a \mathbf{f} + \frac{d}{2} B} \\
&= -\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \left( \frac{2a}{\mathbf{V}\Delta} \left[ 1 + \frac{k}{r^{\frac{d}{2}}} \right]^{-1} \frac{d}{r^{\frac{d}{2}+1}} \right) r^{\frac{d}{2}+1} e^{\left[ -\frac{a^2}{\mathbf{V}\Delta} + \frac{2dk}{\Delta(D-2)} \right] \ln \left[ 1 + \frac{k}{r^{\frac{d}{2}}} \right]} \\
&= \frac{2d}{\sqrt{\Delta}} k
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Esta relación puede tomarse como la *definición* del parámetro  $\lambda$ .

Finalmente, como ya disponemos de todas las funciones auxiliares que hemos definido para darle forma al ansatz de las  $p$ -branas, podemos expresar la métrica en una forma explícita vía el elemento de línea:

$$ds^2 = \left[ 1 + \frac{k}{r^{\frac{d}{2}}} \right]^{\frac{4d}{\Delta(D-2)}} \mathbf{h}_{\mathbf{m}\mathbf{n}} dx^{\mathbf{m}} dx^{\mathbf{n}} + \left[ 1 + \frac{k}{r^{\frac{d}{2}}} \right]^{\frac{4d}{\Delta(D-2)}} \mathbf{d}_{\mathbf{m}\mathbf{n}} dy^{\mathbf{m}} dy^{\mathbf{n}}. \tag{4.80}$$

También, ya que tenemos la función  $C$  (4.78) y la relación entre los parámetros de “carga”  $k$  y  $\lambda$ , podemos escribir de forma explícita el campo  $F$  para el caso eléctrico (4.8) y el magnético (4.25):

$$F_{m_1 \dots m_p m}^{(E)} = \mathbf{I} \in_{m_1 \dots m_p} \frac{y_m}{r^{\tilde{d}+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{\tilde{d}}} \right]^{-2} \quad (4.81)$$

$$F_{m_1 \dots m_{d+1}}^{(M)} = \mathbf{I} \in_{m_1 \dots m_{\tilde{d}+1} p} \frac{y^p}{r^{\tilde{d}+2}} \quad (4.82)$$

## 4.3 Cargas y Masas

Como puede verse las ecuaciones anteriores, los campos del ansatz tienden a caer como  $r^{-(\tilde{d}+1)}$  en el infinito del espacio transversal  $r \rightarrow \infty$ . Esta tendencia asintótica es lo suficientemente sutil como para poder proporcionarnos una “densidad de carga” no nula. Por otro lado estas  $p$ -branas han sido construidas para tener simetría transnacional en  $p$  coordenadas espaciales, de modo que pudiéramos calcular su energía total, que estaría asociada directamente a la masa. En esta sección introducimos las fuentes que se acoplan con la supergravedad para fundamentar el origen de la carga de las  $p$ -branas, y se darán las pautas para el cálculo de la carga de estas fuentes. Además usaremos el formalismo de Arnowitt, Deser y Misner (ADM) [106], para calcular la densidad de energía de estas fuentes.

### 4.3.1 Carga elemental y solitónica de soluciones tipo $p$ -brana

La manera heurística de conseguir una generalización de los conceptos de masa y carga en el caso de las  $p$ -branas es calcular integrales al estilo de la ley de Gauss en electrodinámica clásica, e integrales de la energía total. Existe, no obstante, una manera de concebir estos objetos como fuentes eléctricas acopladas a la supergravedad. Si nos fijamos en las funciones con las que se construye el ansatz, conseguiremos la función armónica siguiente:

$$H(r) = 1 + \frac{k}{r^{\tilde{d}}}. \quad (4.83)$$

Esta función tiene una clara singularidad en la hipersuperficie  $r = 0$  del espacio-tiempo, que se manifiesta en la estructura de la métrica (donde por supuesto  $H(r)$  también aparece). Que ésta singularidad de la métrica sea física o de coordenadas, depende de la estructura global de la solución, que depende a su vez de muchos factores como la dimensión del espacio-tiempo y de las  $p$ -branas o la constante de acoplo  $a$  del dilatón  $\mathbf{f}$ .

En muchos casos –por ejemplo la supergravedad en 11 dimensiones que estudiaremos mas adelante– esta singularidad es física, y corresponde a una curva temporal. Esto nos sugiere una buena generalización a las partículas cargadas “comunes”; ya que en electrodinámica clásica las cargas puntuales pasean su singularidad en el campo por curvas temporales, es razonable que la singularidad temporal de las  $p$ -branas corresponda a una fuente tipo membrana cargada.

La acción de la membrana que se acopla con estos campos es

$$S_d = T_d \int d^d \mathbf{x} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-y} y^{mn} \partial_m X^M \partial_n X^N g_{MN} e^{\frac{-af}{d}} + \frac{d-2}{2} \sqrt{-\mathbf{g}} - \frac{1}{d!} \epsilon^{m_1 \dots m_d} \partial_{m_1} X^{M_1} \dots \partial_{m_d} X^{M_d} A_{M_1 \dots M_d} \right] \quad (4.84)$$

que difiere de la acción de la membrana (3.13) en un reescalamiento de Weyl [98]. Tanto en la acción anterior (4.84), como en la acción que hemos visto ya en (3.13),  $X^M(\xi^d)$  es la trayectoria de la  $p$ -brana en el espacio-tiempo total, parametrizada por las  $d$  coordenadas de su superficie. Si se varía respecto al campo  $A_{M_1, \dots, M_d}$ , se obtiene:

$$\mathbf{d}_{AM_1 \dots M_d} S_d = T_d \int d^d \mathbf{x} \epsilon^{m_1 \dots m_d} \partial_{m_1} X^{M_1} \dots \partial_{m_d} X^{M_d} \mathbf{d}^D(x-X) \quad (4.85)$$

Veremos que este objeto está relacionado directamente con la fuente  $J_{[d]}$  que representa la  $d$ -forma de corriente que se acopla al campo antisimétrico. Como vemos, es una generalización de las fuentes puntuales de electromagnetismo, y sospechamos ya una relación entre la tensión  $T_d$  de la  $p$ -brana y la carga eléctrica o magnética que lleva.

La variación con respecto al dilatón corresponde a

$$\mathbf{d}_f S_d = -\frac{aT_d}{d} \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-\mathbf{g}} \mathbf{g}^{mn} \partial_m X^M \partial_n X^N g_{MN} e^{\frac{-af}{d}} \mathbf{d}^D(x-X). \quad (4.86)$$

Análogamente, variando con respecto a la métrica, se obtiene

$$\mathbf{d}_{g_{MN}} S_d = -T_d \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-\mathbf{g}} \mathbf{g}^{mn} \partial_m X^M \partial_n X^N e^{\frac{-af}{d}} \mathbf{d}^D(x-X). \quad (4.87)$$

Esto está relacionado con un tensor  $T^{MN}$  que puede interpretarse como el tensor de energía momentum de la materia en el sistema que no proviene de los campos de supergravedad.

Para sumar las dos acciones (3.28, 4.84), debemos tomar en cuenta la constante de gravitación  $k$  que debe aparecer en todo Lagrangiano que representa materia [97, ec. (11.49)]. Como la constante de gravitación es distinta de  $4\pi$  para espacios que tengan dimensión distinta de 4, estableceremos la relación en términos de una constante  $k_D$  que dependerá de la dimensión del espacio-tiempo del caso. De este modo, la acción de los campos bosónicos de la supergravedad adquiere un factor multiplicativo dejado de lado que no tiene injerencia en las ecuaciones de movimiento mientras no estén acopladas a la acción de materia (4.84)

$$I_D(d) = \frac{1}{2k_D^2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} \nabla_M \mathbf{f} \nabla^M \mathbf{f} - \frac{1}{2(d+1)!} e^{af} F_{[d+1]}^2 \right]. \quad (4.88)$$

Con esto, las ecuaciones de movimiento (3.42, 3.43, 3.44) quedan modificadas. Para el dilatón, se halla

$$\begin{aligned} \partial_M \left( \sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \mathbf{f} \right) + \frac{a}{2(d+1)!} \sqrt{-g} e^{-af} F^2 = \\ \frac{ak_D^2 T_d}{d} \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-\mathbf{g}\mathbf{g}^{mn}} \partial_m X^M \partial_\nu X^N g_{MN} e^{\frac{af}{d}} \mathbf{d}^D(x-X). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Para la variación de la métrica, por otro lado, debemos reinsertar el factor  $\frac{\sqrt{-g}}{2k_D^2}$  que no modifica la ecuación de movimiento en el vacío, pero que ahora nos lleva a

$$\begin{aligned} R^{MN} - \frac{1}{2} \partial_M \mathbf{f} \partial_N \mathbf{f} = \\ \frac{e^{af}}{2d!} \left[ F_M \dots F_N \frac{1}{2(d+1)} F_{[d+1]}^2 g_{MN} \right] + k_D^2 T^{MN}, \end{aligned} \quad (4.90)$$

donde

$$T^{MN} = -T_d \int d^d \mathbf{x} \sqrt{-\mathbf{g}\mathbf{g}^{mn}} \partial_m X^M \partial_\nu X^N e^{-\frac{af}{d}} \frac{\mathbf{d}^D(x-X)}{\sqrt{-g}} \quad (4.91)$$



es el tensor de energía momentum para la materia colocada en el análisis gracias a la introducción de fuentes. Análogamente, la ecuación de movimiento para el campo de gauge es

$$\begin{aligned} \partial_M (\sqrt{-g} e^{aF} F^{M M_1 \dots M_d}) = \\ 2k_D^2 T_d \int d^d \mathbf{x} \in \mathfrak{m} \dots \mathfrak{m}_d \partial_{\mathfrak{m}} X^{M_1} \dots \partial_{\mathfrak{m}_d} X^{M_d} \mathbf{d}^D(x-X). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Esta ecuación puede expresarse de manera sucinta en lenguaje de formas, notando que el dual en el sentido de Hodge de la cantidad  $e^{aF} F$  es

$$\begin{aligned} *(e^{aF} F) &= e^{aF} F_{M_1 \dots M_{d+1}} *(dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_{d+1}}) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{(D-d-1)!} e^{aF} F^{M_1 \dots M_{d+1}} \in_{M_1 \dots M_D} dx^{M_{d+2}} \wedge \dots \wedge dx^{M_D}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

La derivada externa de esta ecuación es

$$\begin{aligned} d*(e^{aF} F) &= \frac{1}{(D-d-1)!} \partial_{M_{d+1}} (\sqrt{-g} e^{aF} F^{M_1 \dots M_d M}) \\ &\in_{M_1 \dots M_d M_{d+2} \dots M_D} dx^{M_{d+1}} \wedge \dots \wedge dx^{M_D}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Ahora definimos la d-forma de corriente como

$$J^{M_1 \dots M_d} \equiv T_d \int d^d \mathbf{x} \in \mathfrak{m} \dots \mathfrak{m}_d \partial_{\mathfrak{m}} X^{M_1} \dots \partial_{\mathfrak{m}_d} X^{M_d} \frac{\mathbf{d}^D(x-X)}{\sqrt{-g}}, \quad (4.95)$$

cuyo dual de Hodge es

$$\begin{aligned} *J &= \frac{\sqrt{-g}}{(D-d)!} J^{M_1 \dots M_d} \in_{M_1 \dots M_D} dx^{M_{d+1}} \wedge \dots \wedge dx^{M_D} \\ &= \frac{1}{(D-d)!} T_d \int d^d \mathbf{x} \in \mathfrak{m} \dots \mathfrak{m}_d \partial_{\mathfrak{m}} X^{M_1} \dots \partial_{\mathfrak{m}_d} X^{M_d} \mathbf{d}^D(x-X) \\ &\in_{M_1 \dots M_D} dx^{M_{d+1}} \wedge \dots \wedge dx^{M_D}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Comparando (4.94, 4.96) con (4.92), nos damos cuenta que basta reordenar los índices del tensor antisimétrico  $F$ , para obtener una ecuación de campo más interesante:

$$d * (e^{aF} F) = 2k_D^2 (-1)^{d^2} * J, \quad (4.97)$$

que puede servirse acompañada por la identidad de Bianchi

$$dF = 0. \quad (4.98)$$

Además, estas ecuaciones nos confirman que la generalización de las cargas eléctricas y magnética de las  $p$ -branas vía integrales tipo ley de Gauss es consistente. Al establecer

$$e_d \equiv \frac{1}{\sqrt{2k_D}} \int_{s^{d+1}} e^{aF} * F \quad (4.99)$$

como carga eléctrica, y

$$g_{\mathcal{A}^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2k_D}} \int_{s^{d+1}} F. \quad (4.100)$$

como carga magnética, está claro que la carga eléctrica es el equivalente a una carga de “Noether” conservada, en virtud de la ecuación de movimiento (4.97). Por otro lado también se destaca el carácter topológico de la carga magnética que se conserva gracias a las identidades de Bianchi.

La carga eléctrica está relacionada con la tensión de la  $p$ -brana a través de

$$e_d = \sqrt{2k_D} T_d (-1)^{(D-d)(d+1)}. \quad (4.101)$$

Y la carga magnética, además, obedece la condición de cuantización [107, 108],

$$e_d g_{\mathcal{A}^0} = 2\mathbf{p}n, \text{ con } n \in \mathcal{Z}, \quad (4.102)$$

análoga a la condición de cuantización de Dirac (para  $(d = \mathcal{A}^0 = 1, D = 4)$  que relaciona las cargas eléctricas y magnéticas de la electrodinámica relacionada con monopolos (1.36).

### 4.3.2 Dualidad en el contexto de las $p$ -branas

Ahora extendemos la idea de dualidad sobre las  $p$ -branas. Primero establecemos una teoría que intercambiara las ecuaciones de campo (4.97) por las identidades de Bianchi

(4.98) y viceversa, en el mismo sentido en el que establecíamos la simetría de las ecuaciones de Maxwell con monopolos (1.14):  $d * F = K$  pasa a ser ecuación de campo, y  $dF = 0$ , identidad de Bianchi. La ecuación de los campos bosónicos de supergravedad (4.88), y la acción de la  $p$ -brana asociada (4.84), producen las ecuaciones de movimiento

$$d * (e^{af} \mathcal{F}^0) = 2k_D^2 (-1)^{d^2} * J, \quad (4.103)$$

$$d\mathcal{F}^0 = 0, \quad (4.104)$$

si y solo si sustituimos  $d$  por  $d^0$ ,  $a = a(d)$  por  $a(d^0) = -a(d)$  y consideramos un campo  $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^0_{[d^0-1]} = d\mathcal{A}^0_{[d^0]}$ . Las acciones de a teoría dual quedan:

$$\mathcal{I}^0_D(d^0) = \frac{1}{2k_D^2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} \nabla_M \mathbf{f} - \frac{1}{2(d^0+1)!} e^{-af} F^2_{[d^0+1]} \right], \quad (4.105)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^0_{d^0} = T \int d^{d^0} \mathbf{x} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-\mathbf{g}\mathbf{g}^{mn}} \partial_m X^M \partial_n X^N g_{MN} e^{\frac{af}{d^0}} + \frac{d^0-2}{2} \sqrt{-\mathbf{g}} \right. \\ \left. - \frac{1}{d^0!} \epsilon^{m_1 \dots m_{d^0}} \partial_{m_1} X^{M_1} \dots \partial_{m_{d^0}} X^{M_{d^0}} A_{M_1 \dots M_{d^0}} \right]. \end{aligned} \quad (4.106)$$

La dualidad consiste en que una teoría descrita por  $\mathcal{I}^0_D(d^0) + \mathcal{S}^0_{d^0}$  tiene las mismas soluciones elementales que  $I_D(d) + S_d$ , si hacemos el cambio que hemos descrito ( $d \rightarrow d^0$  y  $a \rightarrow -a$ ). Con esto la carga eléctrica queda como

$$\theta^0_{d^0} = \frac{1}{\sqrt{2k_D}} \int_{S^{d^0+1}} e^{-af^*} \mathcal{F}^0, \quad (4.107)$$

la carga magnética es a su vez

$$\mathcal{G}^0_{d^0} = \frac{1}{\sqrt{2k_D}} \int_{S^{d^0+1}} F, \quad (4.108)$$

y ambas cumplen con la condición de cuantización

$$\theta^0_{d^0} \mathcal{G}^0_{d^0} = 2\pi n, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.109)$$

### 4.3.3 La Masa de soluciones tipo $p$ -brana

Como ya hemos dicho, la simetría traslacional en las direcciones espaciales de la  $p$ -brana nos permitiría el cálculo de una masa total. Sin embargo la extensión infinita de la  $p$ -brana en estas coordenadas, haría divergir cualquier integral de superficie tipo ley de Gauss. Así que en el caso de la “masa” de una  $p$ -brana, desviaremos nuestra atención hacia la densidad de energía por unidad de  $p$ -volumen. Es decir, en vez de calcular una integral de superficie en las  $D - 1$  dimensiones espaciales  $d^{D-2} \Sigma^a$ , calculamos una integral  $d^{D-d-1} \Sigma^m$  en la frontera  $\mathcal{M}_T$  del espacio transverso.

Bastaría ahora calcular los componentes importantes del tensor de energía momentum de las  $p$ -branas, para ello, veremos que la energía de solitones en un espacio-tiempo asintóticamente plano, viene dada por la masa  $ADM$  (Arnowitt-Deser-Misner) [106, 109, 110], que es el respectivo invariante de Poincaré para estos sistemas gravitacionales.

La integral tipo Ley de Gauss que buscamos, hemos dicho que es la fórmula de masa  $ADM$  [111, Cap. 21], en la que removemos la integral espacial  $d\Sigma^i, i = 1, \dots, d - 1$ , y nos dedicamos al espacio transverso:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{4\Omega_{d+1}} \int_{\partial M_T} d^{d+1}\Sigma^m (\partial^n h_{mn} - \partial_m h_n^b) , \quad (4.110)$$

donde  $\Omega_{d+1}$  es el volumen de la esfera unitaria  $S^{d+1}$ , y  $b = 1, \dots, D - 1$  es un índice espacial sobre el espacio-tiempo total. Como la métrica es asintóticamente plana, podemos separar la componente de Minkowski-plana del resto; la métrica auxiliar  $h_{mn} = g_{MN} - \eta_{MN}$  es la medida de tal separación.

Aproximado para  $r \rightarrow \infty$  la métrica del ansatz (4.80) tenemos:

$$\begin{aligned}
h_{mn} &= \left[ \left( 1 + \frac{k}{r^{d^6}} \right)^{\frac{4d}{\Delta(D-2)}} - 1 \right] \mathbf{d}_{mn} \\
&\approx \frac{4kd}{\Delta(D-2)r^{d^6}} \mathbf{d}_{mn},
\end{aligned} \tag{4.111}$$

y también:

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= \left[ \left( 1 + \frac{k}{r^{d^6}} \right)^{\frac{4d^6}{\Delta(D-2)}} - 1 \right] \mathbf{d}_{ij} \\
&\approx -\frac{4kd^6}{\Delta(D-2)r^{d^6}} \mathbf{d}_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Con lo que calculamos

$$\begin{aligned}
h_b^b &= -\frac{4kd^6}{\Delta(D-2)r^{d^6}} \mathbf{d}_i^i + \frac{4kd}{\Delta(D-2)r^{d^6}} \mathbf{d}_m^m \\
&= -\frac{4k}{\Delta(D-2)r^{d^6}} (d^6(d-1) - d(D-d)) \\
&= \frac{8k(d + \frac{1}{2}d^6)}{\Delta(D-2)r^{d^6}}.
\end{aligned} \tag{4.113}$$

Luego calculamos las derivadas, a partir de (4.9)

$$\begin{aligned}
\partial^n h_{mn} &= \frac{4kd}{\Delta(D-2)} \mathbf{d}_{mn} g^{np} \partial_p (r^{-d^6}) \\
&= -\frac{4kdd^6}{\Delta(D-2)} \frac{1}{r^{d^6+1}} g^{np} \frac{y_p}{r} \mathbf{d}_{mn} \\
&= -\frac{4kdd^6}{\Delta(D-2)} \frac{y_m}{r^{d^6+2}},
\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}
\partial_m h_b^b &= \frac{8k(d + \frac{1}{2}d^6)}{\Delta(D-2)} \partial_m (r^{-d^6}) \\
&= \frac{8kd^6(d + \frac{1}{2}d^6)}{\Delta(D-2)} \frac{y_m}{r^{d^6+2}}.
\end{aligned} \tag{4.115}$$

Ahora estamos listos para calcular la masa ADM de las  $p$ -branas; sabemos que  $d^{\#+1}\Sigma^m = r^{\#}y^m d\Omega^{\#+1}$ , y usando la ecuación (4.110) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\frac{kd^{\#}}{\Delta(D-2)\Omega^{\#+1}} \frac{y^m}{r^2} \left( d - 2\left(d + \frac{1}{2}d^{\#}\right) \right) y_m \int_{\partial M} d\Omega^{\#+1} \\ &= -\frac{kd^{\#}}{\Delta(D-2)} (d - 2d - d^{\#}) \\ &= \frac{kd^{\#}}{\Delta}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Pero sabemos cual es la relación entre  $k$  y  $\lambda$ , así que:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{I}}{2\sqrt{\Delta}}. \quad (4.117)$$

## 4.4 Ejemplos de aplicación

### 4.4.1 La solución de Reissner-Nordstrom

El caso no trivial mas sencillo en el que se puede aplicar el ansatz de las  $p$ -branas para resolver las ecuaciones de movimiento, es la solución de Reissner-Nordstrom a las ecuaciones de Einstein. Esta solución consiste de acoplar el electromagnetismo de Maxwell con gravedad usando el tensor de energía-momentum de Maxwell en las ecuaciones

$$G_{MN} = 8\mathbf{p}T_{MN}. \quad (4.118)$$

El tensor de energía-momentum de un campo electromagnético tiene la forma [39, ec.(12.113)]:

$$T_{MN} = \frac{1}{4\mathbf{p}} \left( F_{MP}F_N^P - \frac{1}{4}F_{PQ}F^{PQ}g_{MN} \right). \quad (4.119)$$

Está claro que este tensor es antisimétrico y sin traza, de manera que podemos reemplazar el tensor  $G_{MN}$  por el de Ricci en (4.118). Obtenemos entonces un caso particular de la ecuación de movimiento (3.42) para variaciones de la métrica en la acción general, en el que el espacio tiempo es  $D = 4$ -dimensional, el campo es la  $n = 2$ -forma electromagnética, y no hay campos escalares acoplados ( $a = 0$ ). En este caso las únicas  $p$ -branas que pueden acoplarse al campo son del mismo tipo: la  $p = (2-1)-1 = 0$ -brana eléctrica y la  $p = (4-2-1) - 1 = 0$ -brana magnética.

Hemos calculado las ecuaciones de campo a partir de una lagrangiano general, de manera que fijando los parámetros anteriores en (3.28), reconstruimos la acción para este ejemplo:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \right]. \quad (4.120)$$

La métrica (4.80) también queda determinada con esta elección:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-2} \mathbf{h}_{00} dx^0 dx^0 + \left(1 + \frac{k}{r}\right)^2 \mathbf{d}_{mn} dy^m dy^n. \quad (4.121)$$

Nótese que  $\eta_{00} = -1$ , y que la métrica tiende asintóticamente al espacio plano de Minkowski. Al realizar el cambio de coordenadas.

$$R = r + k, \quad (4.122)$$

llegamos a una ecuación que podemos reconocer cuando se expresa en coordenadas esféricas polares:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{k}{R}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{k}{R}\right)^2 dR^2 + R^2 (d\mathbf{q}^2 + \text{sen}^2 \mathbf{q} d\mathbf{f}^2) \\ &= -\left(1 - \frac{2k}{R} + \frac{k^2}{R^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2k}{R} + \frac{k^2}{R^2}\right)^{-1} dR^2 \\ &\quad + R^2 (d\mathbf{q}^2 + \text{sen}^2 \mathbf{q} d\mathbf{f}^2) \end{aligned} \quad (4.123)$$

Esta métrica que se obtiene, es justamente un caso particular solución de Reissner-Nordstrom [59, 112] as las ecuaciones de Einstein acopladas a electromagnetismo, que representan un agujero negro cargado. En general, la solución Reissner-Nordstrom tiene un aspecto más complicado [111, ec. (31.24b)], porque depende tanto de la masa como de la carga del agujero:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}\right)^{-1} dR^2 \\ &\quad + R^2 (d\mathbf{q}^2 + \text{sen}^2 \mathbf{q} d\mathbf{f}^2). \end{aligned} \quad (4.124)$$

Pero el ansatz de la  $p$ -branas se refiere exclusivamente al caso particular en el que la masa del agujero es equivalente a su carga  $M = Q = k$ .

Veamos los campos asociados a esa solución. La solución elemental tiene una forma (4.81) que desde lejos se ve como una carga eléctrica puntual:

$$F_{0_i}^{(E)} = \mathbf{I} \in_0 \frac{y_i}{r^3} \left[ 1 + \frac{k}{r} \right]^{-2} \quad (4.125)$$

$$\stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} \mathbf{I} \in_0 \frac{y_i}{r^3}, \quad (4.126)$$

mientras que la solución solitónica corresponde exactamente al monopolio de Dirac:

$$F_{if}^{(M)} = \mathbf{I} \in_{ijk} \frac{y^k}{r^3}, \quad (4.127)$$

que se deriva del campo (1.26) que hemos visto anteriormente.

La masa ADM de estas soluciones (4.116)

$$E = k, \quad (4.128)$$

es justamente consistente con la masa  $M = k$  que establece el ansatz sobre la métrica de Reissner-Nordstrom.

#### 4.4.2 $D = 11$ , $n = 4$ : Sector bosónico de supergravedad

La acción de los campos del sector bosónico de la supergravedad en 11 dimensiones es:

$$I_{11} = \int d^{11}x \left[ \sqrt{-g} \left( R - \frac{1}{48} F_{[4]}^2 \right) + \frac{1}{6} F_{[4]} \wedge F_{[4]} \wedge A_{[3]} \right]. \quad (4.129)$$

Los campos que considera reflejan la estructura del espectro de la teoría en el que todos los campos son campos de gauge y no hay ningún escalar  $\mathbf{f}$ . El escalar es removido consistentemente de la acción general (3.28) si llevamos a cero su constante de acoplo con el campo. Con esto también fijamos el parámetro auxiliar  $\Delta$ , según (4.62)

$$\Delta = a^2 + \frac{2dd^0}{(D-2)} = 0 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{11-2} = 4, \quad (4.130)$$



donde hemos usado que la 4-forma  $F_{[4]}$  puede acoplarse con una solución eléctrica con  $d=4-1=3$  (tipo 2-brana) o con una solución magnética con  $d^{\#}=11-3-2=6$  (tipo 5-brana)

El término de Chern-Simons  $F \wedge F \wedge A$  que no aparece en la acción general (3.28), no impide que apliquemos el tipo de soluciones que hemos considerado porque justamente para ellas, se anula. Esto es, el tipo de campo (tanto eléctrico como magnético) consistente con la solución que hace  $F \tilde{U} F \tilde{U} A = 0$ . para estar en lo cierto tenemos que asegurarnos de que no sólo el término de Chern-Simons, sino su variación también se anule. La ecuación para la variación del campo  $A_{[3]}$  es

$$\partial_M (\sqrt{-g} F^{MPQR}) + \frac{1}{2(4!)^2} \epsilon^{PQRM \dots N \dots} F_{M \dots} F_{N \dots} = 0 \quad (4.131)$$

El segundo término automáticamente se anula gracias a la presencia el tensor completamente antisimétrico, dejándonos con la ecuación de movimiento que obtenemos en ausencia del término de Chern-Simons (3.43).

## La 2-brana elemental o eléctrica

Para este caso, el acoplamiento de la brana con el campo nos dice que  $d=3$ , y por consiguiente  $d^{\#}=6$ , por lo que la forma de la métrica (4.80) queda:

$$ds^2 = \left[1 + \frac{k}{r^6}\right]^{\frac{2}{3}} \mathbf{h}_{mn} dx^m dx^n + \left[1 + \frac{k}{r^6}\right]^{\frac{1}{3}} \mathbf{d}_{mn} dy^m dy^n, \quad (4.132)$$

y el campo  $F$  (4.81) tiene la forma:

$$F_{hmr m}^{(E)} = \mathbf{I} \epsilon_{mnr} \frac{y_m}{r^8} \left[1 + \frac{k}{r^6}\right]^{-2}. \quad (4.133)$$

A partir de (4.99) podemos calcular la carga eléctrica [89]:

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{11}} \int_{S^7} *F = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} \quad (4.134)$$

Expresadas en estas coordenadas que llamamos *isotrópicas*, esta solución pareciera ser singular en el origen. Sin embargo, luego de resolver los campos para el ansatz considerado, el escalar de curvatura toma la forma – ver apéndice A.3.2, (A.61):

$$R = \frac{\Delta - d\hat{d}^6}{\Delta(D-2)} \frac{\mathbf{I}^2}{r^{2\hat{d}^4+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{\hat{d}^6}} \right]^{\frac{4d}{\Delta(D-2)} - 2}$$

que en el caso  $d = 3$ ,  $\hat{d}^6 = 6$ ,  $D = 11$  y  $\Delta = 4$ , resulta en

$$\begin{aligned} R &= -\frac{7}{18} \frac{\mathbf{I}^2}{r^{14}} \left[ 1 + \frac{k}{r^6} \right]^{-\frac{7}{3}} \\ &\underset{r \rightarrow 0}{\approx} -\frac{7}{18} 6^{\frac{7}{3}} \mathbf{I}^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Así que la curvatura no es singular en el origen. Del mismo modo [89], el resto de los componentes invariantes asociados al tensor de curvatura de Riemann  $R_{MNPQ}$  y al campo  $F_{MNPQ}$ , tampoco lo son.

Más aún, aunque la distancia propia desde un punto sobre la geodésica  $x^0 = \text{const}$  y el origen diverge, un rayo de luz tardaría un tiempo finito en llegar hasta allí [113, 114] desde cualquier punto del espacio-tiempo. Sucede entonces algo análogo a lo que ocurre con un agujero negro con simetría esférica: mientras nos acercamos al radio de Schwarzschild la variación en la coordenada temporal diverge, pero nuestro tiempo propio no diverge sino que tiende al valor finito en el que somos absorbidos por la singularidad. Ya que el origen de la singularidad  $r = 0$  parece estar en el tipo de coordenadas usadas, sospechamos que la métrica no cubre todo el espacio-tiempo y deberíamos conseguir una extensión analítica de las coordenadas para que sean “buenas” coordenadas en toda la variedad. En nuestro caso, el problema no está apareciendo en el radio de Schwarzschild sino en  $r = 0$ , así que conviene hacer el cambio a coordenadas “tipo Schwarzschild” para indagar un poco más en la singularidad:

$$r = (\hat{r}^6 - k)^{\frac{1}{6}}. \quad (4.136)$$

Con esto, la métrica queda

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left[1 - \frac{k}{\hat{r}^6}\right]^{\frac{2}{3}} \mathbf{h}_{mn} dx^m dx^n + \left[1 - \frac{k}{\hat{r}^6}\right]^{-\frac{4}{3}} \mathbf{d}_{mn} dy^m dy^n \\
&= \left[1 - \frac{k}{\hat{r}^6}\right]^{\frac{2}{3}} (-dt^2 + d\mathbf{S}^2 + d\mathbf{r}^2) \\
&\quad + \left[1 - \frac{k}{\hat{r}^6}\right]^{-2} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\Omega_7^2,
\end{aligned} \tag{4.137}$$

donde se ha usado

$$dr = \frac{\hat{r}^5}{(\hat{r}^6 - k)^{\frac{5}{6}}} d\hat{r} = \left[1 - \frac{k}{\hat{r}^6}\right]^{\frac{5}{6}} d\hat{r}. \tag{4.138}$$

El campo, por su parte, se transforma en

$$\begin{aligned}
F_{mrm} &= \mathbf{I} \in_{mnr} \left[1 - \frac{k}{\hat{r}^6}\right]^{-\frac{1}{6}} \frac{\hat{y}_m}{(\hat{r}^6 - k)^{\frac{8}{6}}} \left[1 - \frac{k}{\hat{r}^6}\right]^2 \\
&= \mathbf{I} \in_{mnr} \frac{\hat{y}_m}{\hat{r}^8} \left[1 - \frac{k}{\hat{r}^6}\right]^{\frac{1}{6}}.
\end{aligned} \tag{4.139}$$

El “radio de Schwarzschild”  $\hat{r} = k^{\frac{1}{6}}$  define ahora una superficie heptadimensional cuya normal es un vector nulo. Para ver esto más claramente, tomamos la expresión para una superficie de radio constante  $\hat{r} = \hat{r}_c$ :

$$f(x^M) = \hat{r} = \sqrt{\mathbf{d}_{mn} \hat{y}^m \hat{y}^n} = \hat{r}_c. \tag{4.140}$$

El campo vectorial normal a estas hipersuperficies, está dado por

$$n_M \equiv \frac{\partial f}{\partial x^M} \Big|_{\hat{r}=\hat{r}_c}. \tag{4.141}$$

de manera que

$$n_M = \begin{cases} n_m = 0 \\ n_m = \frac{\hat{y}_m}{\hat{r}} \Big|_{\hat{r}=\hat{r}_c} \end{cases} . \quad (4.142)$$

La norma de  $n_M$  se calcula usando la métrica

$$n^2 = g^{mn} n_m n_n = \left[ 1 - \frac{k}{\hat{r}_c^6} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (4.143)$$

Para el caso  $r_c = k^{\frac{1}{6}}$ ,  $n_M$  es un vector nulo, lo que confirma que estamos frente a un horizonte de eventos. El exponente de  $\frac{2}{3}$  en la métrica, mantiene negativo el signo del elemento  $g_{\infty}$  de la métrica para todo  $\hat{r}$ . Esto quiere decir que cualquier curva sobre el eje  $t$  será una curva temporal para  $\hat{r} < k^{\frac{1}{6}}$ : a diferencia del caso estándar de Schwarzschild, los conos de luz no se voltean en la cara interna del horizonte.

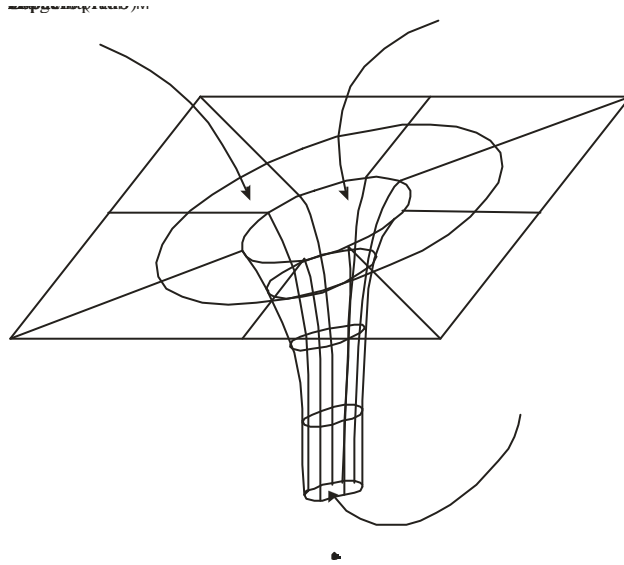


Figura 4.1: Esquema de la interpolación entre el espacio plano y la garganta  $(\text{AdS})_4 \times S^7$  en la solución  $D = 11$  eléctrica.

Se puede expresar la solución en coordenadas que permitan ver más claramente la estructura geométrica de la p-brana: Las coordenadas de *interpolación*

$$\hat{r} = k^{\frac{1}{6}} (1 - r^3)^{-\frac{1}{6}}, \quad (4.144)$$

por ejemplo, transforman la métrica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left[ \dot{r}^2 (-dt^2 + d\mathbf{s}^2 + d\mathbf{r}^2) + 4k^{\frac{1}{3}} \dot{r}^{-2} d\dot{r}^2 \right] + k^{\frac{1}{3}} d\Omega_7^2 \\
& + k^{\frac{1}{3}} \left[ (1 - \dot{r}^3)^{-\frac{1}{3}} - 1 \right] \left[ 4\dot{r}^{-2} d\dot{r}^2 + d\Omega_7^2 \right]
\end{aligned}
\tag{4.145}$$

Estas coordenadas se llaman así, porque interpolan entre  $\dot{r} \rightarrow 1$  donde sobrevive la primera línea de (3.145).

En ésta métrica que queda en el límite  $\dot{r} \rightarrow 0$ , reconocemos la formulación estándar de la métrica en  $(\text{AdS})_4 \times S^7$ , que generaliza la solución de Robinson-Bertotti.  $(\text{AdS})_4 \times S^7$  en  $D = 4$ . El diagram de Carter-Penrose para la estructura del espacio-tiempo de la membrana puede verse en la figura 3.2.

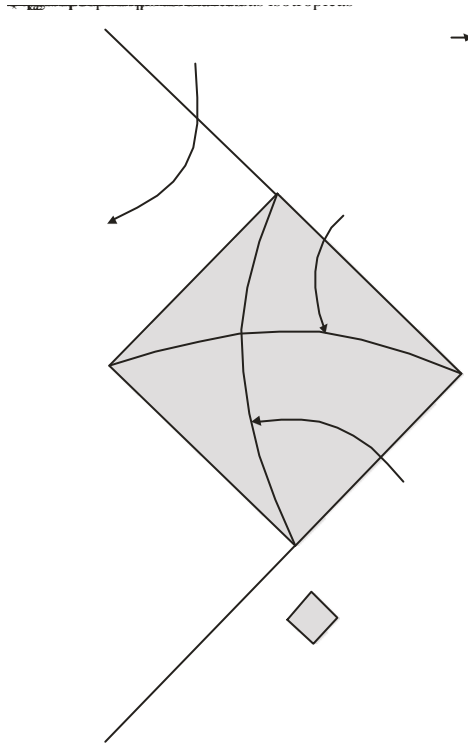


Figura 4.2: Diagrama de Carter – Penrose para la solución eléctrica en  $D = 11$

Este diagrama revela que la métrica correspondiente a la 2 –brana, es muy similar a la solución de Reissner-Nordstrom que hemos estudiado anteriormente. En la región sombreada –que corresponde a la parte del espacio tiempo que es cubierta por las coordenadas isotrópicas – uno pudiera moverse sobre geodésicas nulas radiales, y llegar a las fronteras  $\mathbf{H}^+$  y  $\mathbf{H}$ , en un tiempo propio finito. Estas fronteras constituyen los

horizontes futuro y pasado. La parte sombreada también representa la interpolación entre las regiones  $I^\pm$  en los infinitos futuros y pasado, y una región que tiende asintóticamente a  $(\text{AdS})_4 \times \Sigma^7$  en el horizonte.

## La 5-brana solitónica/magnética

También existe una solución magnética que corresponde a una 5-brana. De la métrica (4.80), con  $d = 6$  y  $d^{\text{eff}} = 11 - 6 - 2 = 3$ , tenemos una expresión en coordenadas isotrópicas, que se expresa como:

$$ds^2 = \left[1 + \frac{k}{r^3}\right]^{\frac{1}{3}} \mathbf{h}_{mn} dx^m dx^n + \left[1 + \frac{k}{r^3}\right]^{\frac{2}{3}} \mathbf{d}_{mn} dy^m dy^n. \quad (4.146)$$

Análogamente al caso de la 2-brana eléctrica, esta solución también interpola entre dos soluciones de la supergravedad en el vacío:  $(\text{AdS})_7 \times \Sigma^4$  y el espacio plano  $M_{11}$ . Realizando el mismo tipo de cambio de coordenadas que en el caso anterior

$$r = \frac{k^{\frac{1}{3}} \hat{r}^2}{(1 - \hat{r}^6)^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.147)$$

llegamos a las coordenadas de interpolación, en las que la métrica toma la forma

$$ds^2 = \hat{r}^2 \mathbf{h}_{mn} dx^m dx^n + k^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{4(1 + \hat{r}^6)^2}{\hat{r}^2 (1 - \hat{r}^6)^{\frac{8}{3}}} d\hat{r}^2 + \frac{d\Omega_4^2}{(1 - \hat{r}^6)^{\frac{2}{3}}} \right]. \quad (4.148)$$

Para esta solución, la superficie  $r = 0$ ,  $\hat{r} = 0$ , es también un horizonte degenerado que mantiene la orientación de los conos de luz, y además es un espejo donde se refleja una simetría que no se tiene en el caso eléctrico: la isometría  $\hat{r} \rightarrow -\hat{r}$ . Dado que la solución es simétrica ante este cambio, se pueden identificar las regiones  $\hat{r} \leq 0$  y  $\hat{r} \geq 0$  de la misma forma en la que se identifican estas regiones en el caso de la geometría plana en coordenadas polares. Verbigracia, en el límite asintótico  $\hat{r} = -1$ .

Aquí las geodésicas nulas que provienen de  $\hat{r} = 1$  pueden, como Alicia, pasar a través del espejo en  $\hat{r} = 0$  y seguir evolucionando en sus parámetros afines hasta el otro lado ( $\hat{r} = -1$ ) del universo: la 5-brana es no-singular.

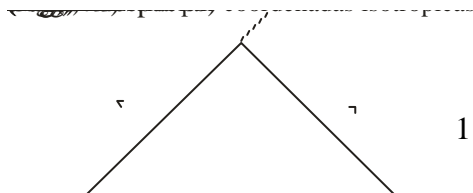


Figura 4.3 : Diagrama de Carter-Penrose para la solución magnética en D=11

Existe todavía, sin embargo, la garganta por donde la geometría plana se va por el caño del espacio  $(\text{AdS})_7 \times \Sigma^4$ .

La carga magnética de esta solución [89] coincide justamente con lo esperado en (4.100).

$$g_{\mathfrak{g}} = g_3 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{11}} \int_{S^4} F = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} \quad (4.149)$$

## 4.5 Branas Negras

Considerando la solución de Reissner-Nordstrom (4.124):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}\right)^{-1} dR^2 + R^2 (d\mathbf{q}^2 + \text{sen}^2 \mathbf{q} d\mathbf{f}^2).$$

Dado que esta métrica no depende de la coordenada temporal,  $\frac{\partial}{\partial t}$  es un vector Killing, cuya norma esta indisolublemente asociada al elemento  $g_{\infty}$  de la métrica. Este elemento es el responsable de un cambio de signo en la norma, en las dos raíces del término cuadrático que contiene:

$$R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (4.150)$$

Esto quiere decir que tenemos dos horizontes de Killing en  $R = R_{\pm}$ . Si la masa del agujero fuera menor que su carga  $M < |Q|$ , los dos horizontes desaparecerían de nuestro panorama dejando expuesta la singularidad en el origen. En este contexto, se formula entonces la conjetura de la “censura cósmica”, que establece

$$M \geq |Q|, \quad (4.151)$$

y que destierra las singularidades visibles al reino de la especulación científica. Esta cota que tiene la carga es justamente una cota de Bogomol’nyi que queda garantizada por la supersimetría en el ámbito de la teoría de cuerdas, nos interesa construir objetos que saturen esta cota de Bogomolny.

Estas soluciones, que hacen desaparecer el carácter degenerado del horizonte de eventos de las  $p$ -branas, toman el nombre de *branas negras*. La métrica de las branas negras generaliza el patrón de Reissner-Nordstrom al contexto general de las  $p$ -branas en muchas dimensiones, y aparece en coordenadas tipo Schwarzschild [115, 116, 117] como:

$$ds^2 = -\frac{\Sigma_+}{\Sigma_-} dt^2 + \frac{\Sigma_+}{\Sigma_-} \mathbf{d}x_i dx_i + \frac{2a^2}{\Sigma_-} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 \sum_{\Sigma_-} \frac{2a^2}{\Delta \hat{r}^6} d\Omega_{D-d-1}^2, \quad (4.152)$$

donde las funciones  $\Sigma_+$ , y  $\Sigma_-$ , están definidas por



$$\Sigma_{\pm} = 1 - \left( \frac{r_{\pm}}{r} \right)^{d_6} \quad (4.153)$$

El campo escalar esta relacionado con esta funciones mediante

$$e^{\frac{V_{\Delta}}{2a} f} = \frac{1}{\Sigma_{-}} \quad (4.154)$$

Y, en analogía con (4.79), el campo antisimétrico de esta solución tiene un parámetro de carga

$$\mathbf{I} = \frac{2d_6}{\sqrt{\Delta} r_{-}^{\frac{d_6}{2}}} \quad (4.155)$$

Lo más interesante de las branas negras –aparte que su solución *extremal*  $r_{+} = r_{-}$  corresponde de las  $p$ -branas BPS que hemos estudiado – es que tienen dos horizontes que cambian el signo de la norma del vector de Killing  $\frac{\partial}{\partial t}$ . El horizonte externo  $\hat{r} = r_{+}$ , es no-singular y es lo que llamaríamos “el horizonte de eventos de la  $p$ -brana”. No seríamos capaces de ver nada de adentro desde la región externa, y el componente  $g_{00}$  nos dice que los conos de luz se voltean como en el caso estándar de Schwarzschild. El otro horizonte  $\hat{r} = r_{-}$  coincide en general con una singularidad física donde los invariantes del tensor de curvatura divergen. El hecho de que el horizonte interno corresponda a la singularidad de la brana negra ya esta sugerido por la divergencia del campo escalar en este horizonte (4.154). pero incluso en los casos en el que no hay campo escalar, la singularidad persiste en los casos  $p \geq 1$ .

Tenemos ahora una explicación de la degeneración del horizonte en los casos anteriores: en el límite extremal de la brana negra, cuando  $a = 0$  y podemos trincar los campos escalares, los conos de luz no se voltean al atravesar el horizonte porque en realidad atraviesan *dos* horizontes ( $r_{+} = r_{-}$ ) colocados en el mismo lugar- En este caso la singularidad desaparece y se puede continuar analíticamente la descripción del espacio tiempo detrás del horizonte. No obstante, el hecho de que el horizonte interno de la brana negra sea en general singular, nos indica a “localizar” la brana en el horizonte  $\hat{r} = r_{-}$  o en el único horizonte mixto de la solución extremal.

## **Capítulo 5**

# Conclusiones

Los principales resultados que he obtenido en el trabajo de tesis son:

1. Se demuestra que la acción de Nambu-Goto (3.1) para las p-branas es equivalente a la acción de Polyakov (3.2) para las cuerdas en el caso  $d \neq 2$ . Esto implica que ambas acciones describen la misma dinámica para  $d \neq 2$ .
2. Las soluciones tipo p-branas se acoplan a la supergravedad mediante campos tipo n-formas de gauge de una teoría efectiva a baja energía.
3. Se ha encontrado una acción efectiva para teoría de supercuerdas que incluye la acción de Einstein dada por la ecuación (3.27):

$$I_{Einstein} = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} \nabla^M \mathbf{f} \nabla_M \mathbf{f} - \frac{1}{12} e^{-\mathbf{f}} F^{MNP} F_{MNP} \right]$$

4. Se ha encontrado una acción general que describe un sistema clásico en D-dimensiones en función de la métrica  $g_{MN}$ , de un campo escalar  $\mathbf{f}$  y una (n-1)-forma  $A_{[n-1]}$  que representa un potencial de calibre con un campo asociado  $F_{[n]} = dA_{[n-1]}$ ; la cual presenta la forma (3.28):

$$I = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} \nabla_M \mathbf{f} \nabla^M \mathbf{f} - \frac{1}{2n!} e^{a\mathbf{f}} F_{[n]}^2 \right]$$

5. A partir de la acción general se han encontrado las ecuaciones dinámicas correspondientes a los campos  $g_{MN}$ ,  $\mathbf{f}$  y  $F_{[n]}$  (3.42), (3.43) y (3.44) dadas por:

$$R_{MN} = \frac{1}{2} \partial_M \mathbf{f} \partial_N \mathbf{f} + \frac{e^{a\mathbf{f}}}{2(n-1)!} \left[ F_M \dots F_N - \frac{n-1}{n(D-2)} F_{[n]}^2 g_{MN} \right]$$

$$\nabla_M (e^{af} F^{M\dots}) = 0$$

$$\nabla_M \nabla^M \mathbf{f} = \frac{a}{2n!} e^{af} F_{[n]}^2$$

6. Haciendo uso de un ansatz se resuelven las ecuaciones dinámicas, encontrándose las siguientes soluciones: (4.72), (4.80) . (4.81) y (4.82).

- Para el campo escalar

$$\mathbf{f} = \frac{2a}{V\Delta} \ln \left[ 1 + \frac{k}{r^{\tilde{d}^6}} \right]$$

- Para la métrica, vía el elemento de línea.

$$ds^2 = \left[ 1 + \frac{k}{r^{\tilde{d}^6}} \right]^{-\frac{4\tilde{d}^6}{\Delta(D-2)}} \mathbf{h}_{mn} dx^m dx^n + \left[ 1 + \frac{k}{r^{\tilde{d}^6}} \right]^{\frac{4d}{\Delta(D-2)}} \mathbf{d}_{mn} dy^m dy^n$$

- Para el campo F, para el caso eléctrico y magnético respectivamente.

$$F_{m_1 \dots m_{\tilde{d}^6}}^{(E)} = \mathbf{I} \in_{m_1 \dots m_{\tilde{d}^6}} \frac{y_m}{r^{\tilde{d}^6+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{\tilde{d}^6}} \right]^{-2}$$

$$F_{m_1 \dots m_{\tilde{d}^6+1}}^{(M)} = \mathbf{I} \in_{m_1 \dots m_{\tilde{d}^6+1}} \frac{y^p}{r^{\tilde{d}^6+2}}$$

7. Se demuestra que la p-brana tiene propiedades de masa y carga, donde:

- Su masa, la cual está relacionada con su energía por unidad de volumen, está dada por (4.117)

$$\mathbf{e} = \frac{1}{4\Omega_{\tilde{d}^6+1}} \int_{\partial M_T} d^{\tilde{d}^6+1} \Sigma^m (\partial^n h_{mn} - \partial_m h_n^b) = \frac{\mathbf{I}}{2\sqrt{\Delta}}.$$

- Su carga eléctrica esta dada por (4.99):

$$e_d \equiv \frac{1}{\sqrt{2}k_D} \int_{s^{\tilde{d}^6+1}} e^{af} * F$$

- Su carga magnética está dada por (4.100):

$$g_{\tilde{d}^6} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}k_D} \int_{s^{\tilde{d}^6+1}} F.$$

8. Extendiendo la dualidad sobre las p-branas se determina las cargas duales, las cuales son:

- Carga eléctrica dual (4.107)

$$\theta_{d^b} = \frac{1}{\sqrt{2}k_D} \int_{S^{d+1}} e^{-af^*} F^b,$$

- Carga magnética dual (4.108)

$$g_d^b = \frac{1}{\sqrt{2}k_D} \int_{S^{d+1}} F^b$$

9. Se demuestra que las cargas y sus duales cumplen con las condiciones de cuantización de Dirac (4.102) y (4.109)

$$e_d g_{d^b} = 2\mathbf{p}n, \text{ con } n \in \mathcal{C},$$

$$\theta_{d^a} \theta_d^b = 2\mathbf{p}n, \text{ con } n \in \mathcal{C}.$$

10. Para demostrar la validez de las soluciones planteadas se acopla el electromagnetismo de Maxwell con la gravedad usando el tensor de energía-momento de Maxwell a las ecuaciones de relatividad general obteniéndose la métrica (4.123)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2k}{R} + \frac{k^2}{R^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2k}{R} + \frac{k^2}{R^2}\right)^{-1} dR^2 + R^2 (d\mathbf{q}^2 + \text{sen}^2 \mathbf{q} d\mathbf{f}^2)$$

que es un caso particular de la solución de Reissner-Nordstrom a las ecuaciones de Einstein acopladas al electromagnetismo que representan un agujero negro cargado, esta solución corresponde al caso en que la masa del agujero equivale a su carga,  $M=Q=k$ . Lo cual demuestra la consistencia de las soluciones encontradas en el presente trabajo.

11. Se demuestra que la 2-brana tiene naturaleza eléctrica, siendo su carga (4.134)

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{11}} \int_{S^7} *F = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}}$$

también se demuestra que la métrica correspondiente a la 2-brana es similar a la solución de reissner –Nordstrom, Lo cual demuestra la validez de las soluciones encontradas.

12. Se demuestra que la 5-brana presenta naturaleza magnética, siendo la carga magnética dada por (4.149)

$$g_{\mathbb{R}} = g_3 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{11}} \int_{S^4} F = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

13. En este trabajo se muestra que cuando se considera a las  $p$ -branas como soluciones de la supergravedad en el límite extremal de las branas negras el vínculo de las  $p$ -branas con la relatividad general se hace evidente, se demuestra también que estas soluciones presentan un horizonte de eventos y que saturan la cota de Bogomol'nyi.

14. Existen trabajos similares que se han realizado sobre este tema, los cuales permiten comparar los resultados que se han encontrado en esta tesis.

a) Tim Cornelis de Wit, "Domain-Walls and Gauged Supergravities", Doctoral Thesis, Center for Theoretical Physics, Groningen University, Netherlands, 2003.

En este trabajo el autor resuelve la teoría de supergravedad usando teoría de cuerdas, obteniendo los siguientes resultados[118]:

- Las cuerdas poseen naturaleza de carga eléctrica ( $Q_e$ ) y carga magnética ( $Q_m$ ) dadas por:

$$Q_e : \int_{S^{D-p-2}} *F_{(p+2)}$$

$$Q_m : \int_{S^{p+2}} F_{(p+2)}$$

- Las soluciones a la teoría de supergravedad son:

$$ds^2 = H^{-\frac{4(D-p-3)}{\Delta}(D-2)} dx_{(p+1)}^2 + H^{\frac{4(p+1)}{\Delta}(D-2)} dy_{(D-p-1)}^2,$$

$$e^f = H^{\frac{2a}{\Delta}}, \quad \mathbf{V} = \begin{cases} +1 & \text{eléctrico} \\ -1 & \text{magnético} \end{cases}$$

$$F_{m_1 \dots m_{p+1}} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \mathbf{e}_{m_1 \dots m_{p+1}} \partial_m (H^{-1}) \quad \text{eléctrico}$$

$$F_{m_1 \dots m_p} = -\frac{2}{\sqrt{\Delta}} \mathbf{e}_{m_1 \dots m_p} \partial_r H \quad \text{magnético}$$

donde  $H(r) = 1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{D-p-3}$

Notamos que estos resultados son similares a los que he obtenido en este trabajo de tesis. Si existe alguna diferencia, en cuanto a constantes, esto se debe a que el autor consideró diferentes condiciones iniciales o diferente ansatz.

- b) Huan-Xiong Yang, Cong-Kao Wen. Ben-Geng Cai, “An Alternative  $Dp$ -brane Solution of Type IIB Supergravity”, hep-th/0411082 v2 19 nov 2004.

El autor resuelve la supergravedad usando D-branas, encontrando las siguientes ecuaciones dinámicas[119]:

$$R_n^m = \frac{1}{2.5!} (5 F^{m_2 \dots e_5} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_n^m F_5^2)$$

$$\partial_m (\sqrt{g} F^{m_2 \dots m_5}) = 0$$

$$(*F)_{m_1 m_2 \dots m_5} = F_{m_1 m_2 \dots m_5}.$$

De lo cual notamos que estas ecuaciones tienen similitud con las ecuaciones presentadas en esta tesis, algunas diferencias que se presentan se debe al tipo de ansatz que usó el autor, pero en esencia las ecuaciones presentan las mismas características que las presentadas en esta tesis.

- c) Marco M. Caldarelli, “ On Supersymmetric Solutions of D=4 Gauged Supergravity”, hep-th/0411153 v2 8feb 2005.

El autor hace una clasificación de las soluciones supersimétricas a la teoría de supergravitación en cuatro dimensiones. El autor plantea una función de la forma[120]

$$\hat{F} = \frac{l^2}{4} F \bar{F} \left[ V \wedge df + *(V \wedge (dg + \frac{1}{l} dz)) \right],$$

llegando a la conclusión de que cuando  $\hat{F}$  es real, entonces las soluciones a la SUGRA D-4 es puramente magnética con carga

$$Q_m = \frac{1}{4\mathbf{p}} \int \hat{F}$$

y que cuando  $\hat{F}$  es imaginaria las soluciones a la SUGRA D-4 es puramente eléctrica.

Nuevamente podemos notar que las características de las soluciones coinciden con las que se presentan en esta tesis.

## Apéndice A

# Relatividad General y Geometría Riemanniana

## A.1 Ecuación de Campo Libre de Einstein

### A.1.1 La ecuación de Palatini

La ecuación de Palatini describe la variación del tensor de curvatura de Riemann en función de variaciones en la conexión métrica. La derivación estándar de la ecuación de Palatini en los libros de texto usuales [18,57] es partir un sistema de coordenadas geodésicas en donde

$$\Gamma_{bc}^a = 0. \quad (\text{A.1})$$

Hemos señalado como  $*$  que la igualdad es válida sólo en el sistema de coordenadas de la geodésica. Aquí, el tensor de Riemann tiene la siguiente apariencia.

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a. \quad (\text{A.2})$$

La variación de  $\Gamma_{bc}^a$  a una nueva conexión  $\bar{\Gamma}_{bc}^a$  la llamamos  $d\Gamma_{bc}^a = \bar{\Gamma}_{bc}^a - \Gamma_{bc}^a$ . Siendo  $d\Gamma_{bc}^a$  la diferencia entre dos conexiones, en un tensor de tipo (1,2)

$$\begin{aligned} d\Gamma_{bc}^a &= \bar{\Gamma}_{bc}^a - \Gamma_{bc}^a \\ &= \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} \bar{\Gamma}_{ef}^d + \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial^2 x^d}{\partial x'^b \partial x'^c} \\ &\quad - \left( \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} \Gamma_{ef}^d + \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial^2 x^d}{\partial x'^b \partial x'^c} \right) \\ &= \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} d\Gamma_{ef}^d. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$



La variación del tensor de Riemann será

$$\mathbf{d}R_{bcd}^a = \partial_c \mathbf{d}\Gamma_{bd}^a - \partial_d \mathbf{d}\Gamma_{bc}^a \quad (\text{A.4})$$

Pero sabemos que en el sistema de coordenadas geodésicas, la derivada parcial es la misma que la convariante, por lo que

$$\mathbf{d}R_{bcd}^a = \nabla_c \mathbf{d}\Gamma_{bd}^a - \nabla_d \mathbf{d}\Gamma_{bc}^a. \quad (\text{A.5})$$

Esta ecuación es tensorial porque según (A.3)  $\mathbf{d}\Gamma_{bc}^a$  es tensor. Luego, ya que una ecuación tensorial es válida para cualquier sistema de coordenadas, podemos dejar la notación  $\nabla$  y afirmar que, en general.

$$\mathbf{d}R_{bcd}^a = \nabla_c \mathbf{d}\Gamma_{bd}^a - \nabla_d \mathbf{d}\Gamma_{bc}^a \quad (\text{A.6})$$

Esta es la ecuación de Palatini.

Hubiéramos podido, por supuesto, calcular (A.6) a fuerza bruta:

$$\begin{aligned} \Gamma_{bc}^a &\rightarrow \Gamma_{bc}^a - \mathbf{d}\Gamma_{bc}^a \Rightarrow \\ R_{bcd}^a &\rightarrow \partial_c \Gamma_{bd}^a + \partial_c \mathbf{d}\Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \partial_d \mathbf{d}\Gamma_{bc}^a + (\Gamma_{bd}^e + \mathbf{d}\Gamma_{bd}^e)(\Gamma_{ec}^a + \mathbf{d}\Gamma_{ec}^a) \\ &\quad - (\Gamma_{bc}^e + \mathbf{d}\Gamma_{bc}^e)(\Gamma_{ed}^a + \mathbf{d}\Gamma_{ed}^a) \\ &= R_{bcd}^a + \partial_c \mathbf{d}\Gamma_{bd}^a - \Gamma_{bc}^e \mathbf{d}\Gamma_{ed}^a + \Gamma_{ec}^a \mathbf{d}\Gamma_{bd}^e \\ &\quad - \partial_d \mathbf{d}\Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \mathbf{d}\Gamma_{ec}^a - \Gamma_{ed}^a \mathbf{d}\Gamma_{bc}^e + O(\mathbf{d}^2). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Despreciando los términos de orden  $O(\delta^2)$  y recordando que la derivada covariante del (1,2) – tensor  $\delta\Gamma$  es

$$\nabla_d \mathbf{d}\Gamma_{bc}^a = \partial_d \mathbf{d}\Gamma_{bc}^a - \Gamma_{db}^e \mathbf{d}\Gamma_{ec}^a - \Gamma_{dc}^e \mathbf{d}\Gamma_{be}^a + \Gamma_{ed}^a \mathbf{d}\Gamma_{bc}^e, \quad (\text{A.8})$$

tenemos que, sumando y restando  $\Gamma_{dc}^e \mathbf{d}\Gamma_{be}^a$  a (A.7) obtenemos nuevamente la ecuación de Palatini (A.6).

## A.1.2 La Variación de la Métrica y de su Determinante

Una variación en la métrica

$$g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \mathbf{d}g_{ab}, \quad (\text{A.9})$$

induce una variación en la métrica inversa

$$g^{ab} \rightarrow g^{ab} + \mathbf{d}g^{ab}. \quad (\text{A.10})$$

Para descubrir la relación existente entre estas variaciones, estudiaremos como transforma la delta de Kronecker

$$\mathbf{d}g_c^a = g^{ab} g_{bc} \rightarrow \mathbf{d}g_c^a + \mathbf{d}g^{ab} g_{bc} + g^{ab} \mathbf{d}g_{bc} + O(\mathbf{d}^2), \quad (\text{A.11})$$

pero  $\mathbf{d}g_c^a$  es un tensor constante por lo que  $\mathbf{d}\mathbf{d}g_c^a = 0$ , que nos lleva hasta

$$\mathbf{d}g^{ab} = -g^{ac} g^{db} \mathbf{d}g_{cd}. \quad (\text{A.12})$$

Al determinante métrico, por su cuenta, le ocurre lo siguiente

$$\mathbf{d}\sqrt{-g} = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{ab}} \mathbf{d}g_{ab} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g_{ab}} \mathbf{d}g_{ab}. \quad (\text{A.13})$$

Y ahora debemos ahondar un poco más, recordando un poco de álgebra lineal. La inversa  $g^{ab}$  de la métrica  $g_{ab}$  puede definirse en términos de cofactores  $C^{ab}$  según

$$g^{ab} = \frac{1}{g} (C^{ab})^T = \frac{1}{g} C^{ba} \Rightarrow C^{ba} = C^{ab} = g g^{ab}. \quad (\text{A.14})$$

Por otro lado, podemos expandir el determinante métrico por cofactores sobre su  $a$ -ésima columna

$$g = \sum_{b=1}^D g_{ab} C^{ab}. \quad (\text{A.15})$$

Derivando respecto a  $g_{ab}$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ab}} = C^{ab} = g g^{ab}, \quad (\text{A.16})$$

por lo que la variación de  $\sqrt{-g}$  queda como

$$d\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} dg_{ab}. \quad (\text{A.17})$$

También podemos ver  $g$  como función de  $(g^{ab}(x^c))$  de modo que

$$\partial_c g = \frac{\partial g}{\partial g_{ab}} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} = g g^{ab} \partial_c g_{ab}. \quad (\text{A.18})$$

Como estamos usando la conexión métrica, sabemos que

$$\nabla_c g_{ab} = \nabla^c g_{ab} = 0, \quad (\text{A.19})$$

y

$$\begin{aligned} \partial_c g_{ab} &= \Gamma_{ac}^d g_{db} + \Gamma_{bc}^d g_{ad}, \\ \partial_c g^{ab} &= -\Gamma_{dc}^a g^{db} - \Gamma_{dc}^b g^{ad}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

lo que nos lleva a

$$\partial_c g = 2g \Gamma_{ac}^a, \quad (\text{A.21})$$

como  $g$  es una densidad tensorial de peso 2,

$$\nabla_c g = 0. \quad (\text{A.22})$$

Por otro lado,

$$\partial_c \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \partial_c g = \sqrt{-g} \Gamma_{ac}^a, \quad (\text{A.23})$$

y como  $\sqrt{-g}$  es una densidad tensorial de peso 1,

$$\nabla_c \sqrt{-g} = 0. \quad (\text{A.24})$$

### A.1.3 Ecuación de Campo Libre

Partimos de la acción de Einstein,

$$I = \int d^D x \sqrt{-g} R = \int d^D x \sqrt{-g} g^{ab} R_{ab}. \quad (\text{A.25})$$

Para estudiar las ecuaciones de movimiento, calculamos la variación

$$\mathbf{d}I = \int d^D x \left[ \mathbf{d} \left( \sqrt{-g} g^{ab} \right) R_{ab} + \sqrt{-g} g^{ab} \mathbf{d}R_{ab} \right]. \quad (\text{A.26})$$

Vamos a concentrarnos en el segundo término de esta ecuación. Con ayuda de la ecuación de Palatini (A.6), y recordando (A.19, A.24), El segundo término de (A.26) se modifica en

$$\begin{aligned} \int d^D x \sqrt{-g} g^{ab} \mathbf{d}R_{ab} &= \int d^D x \sqrt{-g} g^{ab} \left( \nabla_c \mathbf{d}\Gamma_{ab}^c - \nabla_b \mathbf{d}\Gamma_{ca}^c \right) \\ &= \int d^D x \nabla_c \left( \sqrt{-g} g^{ab} \mathbf{d}\Gamma_{ab}^c - \sqrt{-g} g^{ac} \mathbf{d}\Gamma_{ba}^b \right) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Como ya hemos visto en (A.3),  $\mathbf{d}\Gamma_{bc}^a$  es un tensor de tipo (1,2), así que  $g^{ab} \mathbf{d}\Gamma_{ab}^c$  y  $g^{ac} \mathbf{d}\Gamma_{ba}^b$  son ambos vectores contravariantes. Recordemos ahora que si  $T^a$  es un vector contravariante,

$$\nabla_c \left( \sqrt{-g} T^a \right) = \partial_c \left( \sqrt{-g} T^a \right) + \Gamma_{bc}^a \left( \sqrt{-g} T^b \right) - 1\Gamma_{bc}^b \left( \sqrt{-g} T^a \right), \quad (\text{A.28})$$

de modo que

$$\nabla_a \left( \sqrt{-g} T^a \right) = \partial_a \left( \sqrt{-g} T^a \right). \quad (\text{A.29})$$

Con esto,

$$\begin{aligned} \int d^D x \sqrt{-g} g^{ab} \mathbf{d}R_{ab} &= \int d^D x \nabla_c \left( \sqrt{-g} g^{ab} \mathbf{d}\Gamma_{ab}^c - \sqrt{-g} g^{ac} \mathbf{d}\Gamma_{ab}^b \right) \\ &= \int_{\Omega} \partial_a \mathbf{t}^a d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Usando el teorema de Stokes y suponiendo que las variaciones en  $\delta T$  son nulas en la superficie de integración  $\partial\Omega$ , el segundo término de (A.26) es cero y quedamos con

$$\begin{aligned} \mathbf{d}I &= \int d^D x \mathbf{d} \left( \sqrt{-g} g^{ab} \right) R_{ab} \\ &= \int d^D x \left( \mathbf{d}\sqrt{-g} g^{ab} + \sqrt{-g} \mathbf{d}g^{ab} \right) R_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

y le damos algo de utilidad a las expresiones (A.12, A.17) para llegar a

$$\begin{aligned} \mathbf{d}I &= \int d^D x \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{cd} \mathbf{d}g_{cd} g^{ab} - \sqrt{-g} g^{ac} g^{db} \mathbf{d}g_{cd} \right) R_{ab} \\ &= \int d^D x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} R g^{cd} - R^{cd} \right) \mathbf{d}g_{cd} \\ &= - \int d^D x \sqrt{-g} G^{cd} \mathbf{d}g_{cd}, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

donde  $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$  es el tensor de Einstein. Finalmente  $\mathbf{d}I = 0$  nos lleva a la ecuación de campo libre

$$G_{ab} = 0 \quad (\text{A.33})$$

## A.2 Métricas conformes y el tensor de Weyl

Se dice que dos métricas  $g_{ab}$  y  $\bar{g}_{ab}$  están *relacionadas de manera conforme* [18] o son *conformes* entre ellas si se cumplen que:

$$\bar{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}; \quad \bar{g}^{ab} = \Omega^{-2} g^{ab} \quad (\text{A.34})$$

donde  $\Omega(x)$  es una función diferenciable no nula.

Veamos como se relacionan las conexiones de dos métricas conformes:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{bc}^a &= \frac{1}{2} \bar{g}^{ad} (\partial_b \bar{g}_{dc} + \partial_c \bar{g}_{db} - \partial_d \bar{g}_{bc}) \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \Gamma_{bc}^a + \frac{1}{2} \Omega^{-2} g^{ad} (g_{dc} \partial_b (\Omega^2) + g_{db} \partial_c (\Omega^2) - g_{bc} \partial_d (\Omega^2)) \\
&= \Gamma_{bc}^a + \Omega^{-1} (\mathbf{d}_c^a \partial_b \Omega + \mathbf{d}_c^a \partial_c \Omega - g_{bc} g^{ad} \partial_d \Omega)
\end{aligned}$$

De manera que la conexión asociada a la métrica  $\bar{g}_{ab}$  se puede expresar en términos de  $g_{ab}$  y de  $\Omega(x)$ , como:

$$\bar{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a + \mathbf{d}_c^a \partial_b \mathbf{w} + \mathbf{d}_b^a \partial_c \mathbf{w} - g_{bc} g^{ad} \partial_d \mathbf{w} \quad (\text{A.35})$$

donde  $\mathbf{w} \equiv \ln \Omega(x)$ . Definiendo las cantidades:

$$\begin{aligned}
\Delta_{bc}^a &= \mathbf{d}_c^a \partial_b \mathbf{w} + \mathbf{d}_b^a \partial_c \mathbf{w} - g_{bc} \partial^a \mathbf{w} \\
\Delta_{abc} &= g_{ac} \partial_b \mathbf{w} + g_{ab} \partial_c \mathbf{w} - g_{bc} \partial_a \mathbf{w}
\end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

podemos escribir de manera más sencilla los símbolos de Christoffel de primera y segunda clase transformados:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{abc} &= \Omega^2 (\Gamma_{abc} + \Delta_{abc}) \\
\bar{\Gamma}_{bc}^a &= \Gamma_{bc}^a + \Delta_{bc}^a
\end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Sería interesante ahora estudiar como se relacionan otras cantidades asociadas a métricas conformes, como la curvatura o el tensor de Ricci. Comencemos con el determinante métrico:

$$\bar{g} = \frac{1}{D!} \epsilon^{a_1 a_2 \dots a_D} \epsilon^{b_1 b_2 \dots b_D} \bar{g}_{a_1 b_1} \bar{g}_{a_2 b_2} \dots \bar{g}_{a_D b_D} = \Omega^{2D} g \quad (\text{A.38})$$

El tensor de Riemann tiene la siguiente apariencia

$$\begin{aligned}
R_{abcd} &= \frac{1}{2} (\partial_b \partial_c g_{ad} + \partial_a \partial_d g_{bc} - \partial_a \partial_c g_{bd} - \partial_b \partial_d g_{ac}) + \\
&+ g_{ef} (\Gamma_{ad}^e \Gamma_{bc}^f - \Gamma_{ac}^e \Gamma_{bd}^f),
\end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Transformaremos cada una de sus partes para conseguir  $\bar{R}_{abcd}$  :

$$\begin{aligned}
\partial_a \partial_b \bar{g}_{cd} &= \partial_a \partial_b (\Omega^2 g_{cd}) \\
&= \partial_a (g_{cd} 2\Omega \partial_b \Omega + \Omega^2 \partial_b g_{cd}) \\
&= \partial_a [\Omega^2 (2g_{cd} \partial_b \mathbf{w} + \partial_b g_{cd})] \\
&= \Omega^2 (\partial_a \partial_b g_{cd} + 4g_{cd} \partial_a \mathbf{w} \partial_b \mathbf{w} + 2\partial_a g_{cd} \partial_b \mathbf{w} + 2\partial_b g_{cd} \partial_a \mathbf{w} + 2g_{cd} \partial_a \partial_b \mathbf{w})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\partial_b \partial_c \bar{g}_{ad} + \partial_a \partial_d \bar{g}_{bc} - \partial_a \partial_c \bar{g}_{bd} - \partial_b \partial_d \bar{g}_{ac}) = \\
&\Omega^2 \left[ \frac{1}{2}(\partial_b \partial_c g_{ad} + \partial_a \partial_d g_{bc} + \partial_a \partial_c g_{bd} - \partial_b \partial_d g_{ac}) \right. \\
&+ 2(\partial_{ad} \partial_b \mathbf{w} \partial_c \mathbf{w} + g_{bc} \partial_a \mathbf{w} \partial_d \mathbf{w} - g_{bd} \partial_a \mathbf{w} \partial_c \mathbf{w} - g_{ac} \partial_b \mathbf{w} \partial_d \mathbf{w}) \\
&+ \partial_b g_{ad} \partial_c \mathbf{w} + \partial_a g_{bc} \partial_d \mathbf{w} - \partial_a g_{bd} \partial_c \mathbf{w} - \partial_b g_{ac} \partial_d \mathbf{w} \\
&+ \partial_c g_{ad} \partial_b \mathbf{w} + \partial_d g_{bc} \partial_a \mathbf{w} - \partial_c g_{bd} \partial_a \mathbf{w} - \partial_d g_{ac} \partial_b \mathbf{w} \\
&\left. + g_{ad} \partial_b \partial_c \mathbf{w} + g_{bc} \partial_a \partial_d \mathbf{w} - g_{bd} \partial_a \partial_c \mathbf{w} - g_{ac} \partial_b \partial_d \mathbf{w} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ef} \bar{\Gamma}_{ad}^e \bar{\Gamma}_{bc}^f &= \Omega^2 g_{ef} (\Gamma_{ad}^e + \Delta_{ad}^e) (\Gamma_{bc}^f + \Delta_{bc}^f) \\
&= \Omega^2 g_{ef} [\Gamma_{ad}^e \Gamma_{bc}^f + \Gamma_{ad}^e \Delta_{bc}^f + \Delta_{ad}^e \Gamma_{bc}^f + \Delta_{ad}^e \Delta_{bc}^f]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{ef} \Gamma_{ad}^e \Delta_{bc}^f &= \frac{1}{2} [\partial_a g_{cd} \partial_b \mathbf{w} + \partial_a g_{bd} \partial_c \mathbf{w} - g_{bc} \partial_a g_{ed} \partial^e \mathbf{w} \\
&+ \partial_d g_{ca} \partial_b \mathbf{w} + \partial_d g_{ba} \partial_c \mathbf{w} - g_{bc} \partial_a g_{ea} \partial^e \mathbf{w} \\
&- \partial_c g_{ad} \partial_b \mathbf{w} - \partial_b g_{ad} \partial_c \mathbf{w} + g_{bc} \partial_e g_{ad} \partial^e \mathbf{w} ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{ef} \Delta_{ad}^e \Gamma_{bc}^f &= \frac{1}{2} [\partial_b g_{ac} \partial_a \mathbf{w} + \partial_b g_{dc} \partial_a \mathbf{w} - g_{ad} \partial_b g_{ec} \partial^e \mathbf{w} \\
&+ \partial_c g_{ab} \partial_d \mathbf{w} + \partial_c g_{db} \partial_a \mathbf{w} - g_{ad} \partial_c g_{eb} \partial^e \mathbf{w} \\
&- \partial_a g_{bc} \partial_d \mathbf{w} - \partial_b g_{bc} \partial_a \mathbf{w} + g_{ad} \partial_e g_{bc} \partial^e \mathbf{w} ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{ef} \Delta_{ad}^e \Delta_{bc}^f &= g_{ab} \partial_c \mathbf{w} \partial_d \mathbf{w} + g_{ac} \partial_b \mathbf{w} \partial_d \mathbf{w} \\
&+ g_{bd} \partial_a \mathbf{w} \partial_c \mathbf{w} + g_{cd} \partial_a \mathbf{w} \partial_b \mathbf{w} \\
&- 2g_{ad} \partial_b \mathbf{w} \partial_c \mathbf{w} - 2g_{bc} \partial_a \mathbf{w} \partial_d \mathbf{w} + g_{ad} g_{bc} \partial^e \mathbf{w} \partial_e \mathbf{w}
\end{aligned}$$

Insertando todo esto en la expresión del tensor de Riemann transformado, obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{abcd} = \Omega^2 & \left[ R_{abcd} + g_{ad} (\partial_b \partial_c \mathbf{w} - \Gamma_{bc}^e \partial_e \mathbf{w} + \partial_b \mathbf{w} \partial_c \mathbf{w}) \right. \\ & + g_{bc} (\partial_a \partial_d \mathbf{w} - \Gamma_{ad}^e \partial_e \mathbf{w} + \partial_a \mathbf{w} \partial_d \mathbf{w}) \\ & - g_{ac} (\partial_b \partial_d \mathbf{w} - \Gamma_{bd}^e \partial_e \mathbf{w} + \partial_b \mathbf{w} \partial_d \mathbf{w}) \\ & - g_{bd} (\partial_a \partial_c \mathbf{w} - \Gamma_{ac}^e \partial_e \mathbf{w} + \partial_a \mathbf{w} \partial_c \mathbf{w}) \\ & \left. + (g_{ad} g_{bc} - g_{ac} g_{bd}) \partial^e \mathbf{w} \partial_e \mathbf{w} \right]\end{aligned}$$

Reconociendo la derivada covariante  $\nabla_a \nabla_b \mathbf{w} = \partial_a \partial_b \mathbf{w} - \Gamma_{ab}^e \partial_e \mathbf{w}$ , y definiendo el tensor  $\mathbf{w}_{ab} \equiv \nabla_a \nabla_b \mathbf{w} - \nabla_a \mathbf{w} \nabla_b \mathbf{w}$  nos queda una expresión bastante compacta para el tensor de teorías transformado:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{abcd} = \Omega^2 & \left[ R_{abcd} + g_{ad} \mathbf{w}_{bc} + g_{bc} \mathbf{w}_{ad} - g_{ac} \mathbf{w}_{bd} - g_{bd} \mathbf{w}_{ac} \right. \\ & \left. + (g_{ad} g_{bc} - g_{ac} g_{bd}) \nabla^e \mathbf{w} \nabla_e \mathbf{w} \right],\end{aligned}\tag{A.40}$$

podemos calcular el tensor de Ricci transformando  $\bar{R}_{ab} = \bar{g}^{cd} \bar{R}_{cadb}$ , contrayendo|1 (A.40) con la métrica transformada:

$$\bar{R}_{ab} = R_{ab} - (D-2)(\mathbf{w}_{ab} + g_{ab} \nabla^c \mathbf{w} \nabla_c \mathbf{w}) - g_{ab} \nabla^c \nabla_c \mathbf{w},\tag{A.41}$$

una última contracción nos lleva al escalar de curvatura transformado:

$$\bar{R} = \Omega^{-2} \left[ R - 2(D-1) \nabla^a \nabla_a \mathbf{w} - (D-1)(D-2) \nabla^a \mathbf{w} \nabla_a \mathbf{w} \right]\tag{A.42}$$

### A.3 El tensor de Ricci en el ansatz de las $p$ -branas

El ansatz de las  $p$ -branas impone fuertes restricciones en la geometría del espacio tiempo que nos ayudan a resolver el sistema de ecuaciones de movimiento (3.42, 3.43, 3.44) asociadas a la acción general (3.28). la preservación de la simetría  $(Poincaré)_d \times SO(D-d)$  separa naturalmente las coordenadas según (4.1):



$$\begin{aligned}
x^M &= (x^m, y^m) \\
M &= 0, \dots, D-1 \\
\mathbf{m} &= 0, \dots, p = d-1 \\
m &= d, \dots, D-1
\end{aligned}$$

y la isotropía de la métrica se asegura con el ansatz (3.2):

$$\begin{aligned}
g_{mv} &= e^{2A(r)} \mathbf{h}_{mv} \\
g_{mn} &= e^{2B(r)} \mathbf{d}_{mn} \\
g_{mv} &= g_{mi} = 0
\end{aligned}$$

donde  $A$  y  $B$  dependen exclusivamente de la coordenada radial del espacio transverso

$$r = \sqrt{\mathbf{d}_{mn} y^m y^n}.$$

Para resolver las ecuaciones de movimiento, se simplificará la expresión para el tensor de curvatura de Ricci usando el ansatz anterior. Una vez obtenida la solución, estaremos provistos de las funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  que definen la métrica y tendremos una expresión cerrada para los tensores y el escalar de curvatura.

### A.3.1 Antes de la solución

Para construir el tensor de Ricci, usaremos Geometría Riemanniana “clásica” en vez de usar vielbeins, y la ecuación de estructura de Cartan. La conexión métrica se define como:

$$\Gamma_{NR}^M = \frac{1}{2} g^{MS} (\partial_B g_{SR} + \partial_R g_{SN} - \partial_S g_{NR}), \quad (\text{A.43})$$

y sus componentes para el ansatz y la separación de la métrica son:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{vr}^m &= 0 \\
\Gamma_{vr}^m &= \Gamma_{rv}^m = \mathbf{d}_v^m \partial_r A \\
\Gamma_{nr}^m &= 0 \\
\Gamma_{vr}^m &= -\mathbf{h}_{vr} e^{2(A-B)} \partial^m A \\
\Gamma_{vr}^m &= \Gamma_{rv}^m = 0 \\
\Gamma_{nr}^m &= \mathbf{d}_r^m \partial_n B + \mathbf{d}_n^m \partial_r B - \mathbf{d}_{nr}^m \partial^m B
\end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Para calcular el tensor de Riemann calculamos primero todos los términos no nulos posibles de la ecuación

$$R_{NRS}^M = \partial_R \Gamma_{NS}^M - \partial_D \Gamma_{NR}^M + \Gamma_{NS}^T \Gamma_{TR}^M - \Gamma_{NR}^T \Gamma_{TS}^M. \quad (\text{A.45})$$

Por ejemplo las derivadas de la conexión, que no se hacen cero:

$$\begin{aligned} \partial_s \Gamma_{vr}^m &= \mathbf{d}_v^m \partial_s \partial_r A \\ \partial_s \Gamma_{vg}^m &= \mathbf{h}_{vg} e^{2(A-B)} \left[ 2\partial_s B \partial^m A - 2\partial_s A \partial^m A - \partial_s \partial^m A \right] \\ \partial_s \Gamma_{nr}^m &= \mathbf{d}_r^n \partial_s \partial_n B + \mathbf{d}_n^m \partial_s \partial_r B - \mathbf{d}_{nr} \partial_s \partial^m B, \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

y las conexiones contraídas:

$$\begin{aligned} \Gamma_{vs}^t \Gamma_{tr}^m &= \mathbf{d}_v^t \partial_s A \partial_r A \\ \Gamma_{vs}^t \Gamma_{tr}^m &= -\mathbf{h}_{vr} e^{2(A-B)} \partial_s A \partial^m A \\ \Gamma_{vs}^t \Gamma_{tr}^m &= -\mathbf{h}_{vs} \mathbf{d}_r^m e^{2(A-B)} \partial_t A \partial^t A \\ \Gamma_{vs}^t \Gamma_{tr}^m &= \mathbf{h}_{vs} e^{2(A-B)} (\partial_r A \partial^n B - \partial^m A \partial_r B - \mathbf{d}_r^m \partial^t A \partial_t B) \\ \Gamma_{bd}^e \Gamma_{er}^m &= \mathbf{d}_r^m (\partial_d A \partial_b B - \partial_b A \partial_d B - \mathbf{d}_{bd} \partial^e B \partial_e A) \\ \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a &= 2\mathbf{d}_c^a \partial_b B \partial_d B + \mathbf{d}_d^a \partial_b B \partial_c B + \mathbf{d}_b^a \partial_d B \partial_c B \\ &\quad - \mathbf{d}_{dc} \partial_b B \partial^a B - \mathbf{d}_{bc} \partial_d B \partial^a B - \mathbf{d}_{bd} \mathbf{d}_c^a \partial^e B_e B. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Con estas piezas armamos todos los componentes del tensor de curvatura de Riemann:

$$\begin{aligned} R_{vrd}^m &= (\mathbf{h}_{vr} \mathbf{d}_d^m - \mathbf{h}_{vd} \mathbf{d}_r^m) e^{2(A-B)} \partial^e A \partial_e A \\ R_{vrd}^m &= R_{vdr}^m = 0 \\ R_{vcd}^m &= R_{brd}^m = 0 \\ -R_{bdr}^m &= R_{brd}^m = \mathbf{d}_r^m (\partial_b A \partial_d B + \partial_d A \partial_b B - \mathbf{d}_{bd} \partial^e B \partial_e A \\ &\quad - \partial_b A \partial_d A - \partial_d \partial_b A) \\ R_{bcd}^m &= R_{vrd}^a = 0 \\ -R_{vrd}^a &= R_{vrd}^a = \mathbf{h}_{vr} e^{2(A-B)} (\partial_d A \partial^a A + \partial_d \partial^a A + \mathbf{d}_d^a \partial^e A \partial_e B \\ &\quad - \partial_d B \partial^a A - \partial_d A \partial^a B) \\ R_{vcd}^a &= R_{brd}^a = 0 \\ R_{brd}^a &= R_{bdr}^a = 0 \\ R_{bcd}^a &= \mathbf{d}_c^a (\partial_b B \partial_d B - \partial_b \partial_d B - \mathbf{d}_d^b \partial^e B \partial_e B) \\ &\quad - \mathbf{d}_d^a (\partial_b B \partial_c B - \partial_b \partial_c B - \mathbf{d}_c^b \partial^e B \partial_e B) \\ &\quad + \mathbf{d}_{bd}^a (\partial^a B \partial_c B - \partial^a \partial_c B) \\ &\quad - \mathbf{d}_{bc}^a (\partial^a B \partial_d B - \partial^a \partial_d B). \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Para conseguir el tensor de Ricci basta contraer las componentes del de Riemann  $R_{MN} = R_{MRN}^R$  tomando en cuenta que cuando contraemos deltas, contamos las dimensiones de los subespacios según:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{d}_m^m = d \\ \mathbf{d}_a^a = D - d \end{array} \right\} \mathbf{d}_M^M = D, \quad (\text{A.49})$$

de este modo el tensor de Ricci tiene componentes:

$$\begin{aligned} R_{mb} &= R_{av} = 0 \\ R_{mv} &= R_{mv}^r + R_{mv}^c \\ &= -\mathbf{h}_{mv} e^{2(A-B)} (d \partial_c A \partial^c A + \partial_c \partial^c A + \partial^c \partial A \partial_c B) \\ R_{ab} &= R_{amb}^m + R_{acb}^c \\ &= d(\partial_a A \partial_b B + \partial_b A \partial_a B - \mathbf{d}_{ab} \partial^c B \partial_c A) \\ &= -\partial_a A \partial_b A - \partial_a \partial_b A \\ &\quad + \partial^c (\partial_a B \partial_b B - \partial_a \partial_b B - \mathbf{d}_{ab} \partial^c B \partial_c B) \\ &\quad - \mathbf{d}_{ab} \partial^c \partial_c B. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Finalmente podemos aprovechar la isotropía para convertir las derivadas en derivadas respecto a la coordenada radial (4.9, 4.10, 4.11), y así simplificar la apariencia del tensor.

$$R_{mv} = -\mathbf{h}_{mv} e^{2(A-B)} \left[ A'' + d(A')^2 + \frac{d^{d_0+1}}{r} A' + d A' B' \right] \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} R_{mn} &= -\mathbf{d}_{mn} \left[ B'' + \partial^c (B')^2 + \frac{2d^{d_0+1}}{r} B' + d A' B' + \frac{d}{r} A' \right] \\ &\quad - \frac{y_m y_n}{r^2} \left[ d B'' - \partial^c (B')^2 - \frac{d^{d_0}}{r} B' - 2d A' B' \right. \\ &\quad \left. + d A'' + d(A')^2 - \frac{d}{r} A' \right] \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

### A.3.2 Después de la solución

Una vez resueltas las ecuaciones de movimiento para el ansatz considerado, obtenemos las funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  (4.75, 4.76) que estaban indeterminadas en la métrica original:

$$A(r) = -\frac{2d^0}{\Delta(D-2)} \ln \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^0}} \right],$$

$$B(r) = \frac{2d}{\Delta(D-2)} \ln \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^0}} \right].$$

Con esto pudiéramos resolver las expresiones para el tensor de Riemann, la curvatura de Ricci y escalar de curvatura en términos de su dependencia funcional en  $r$  con los respectivos parámetros libres. No obstante, el haber resuelto campos y fuentes como  $\mathbf{f}$  y  $S$  nos sirve para no realizar otra vez el cálculo desde el principio y ahorrarnos mucho trabajo.

Comencemos pues por las componentes espaciales del tensor de Ricci (A.51),

$$R_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = -\mathbf{h}_{\mathbf{m}\mathbf{m}} e^{2(A-B)} \left[ A'' + \frac{d^0+1}{r} A' + A'(dA' + d^0 B') \right]. \quad (\text{A.53})$$

El último término se anula por la condición de linealidad (4.41) y el resto corresponde al término acoplado a la fuente (4.58), por lo que:

$$R_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = -\mathbf{h}_{\mathbf{m}\mathbf{m}} e^{2(A-B)} \frac{d^0}{2(D-2)} S^2. \quad (\text{A.54})$$

Pero  $S'$  es proporcional a  $\mathbf{f}$  según (4.63), y el dilatón  $\mathbf{f}$  está resuelto en (4.72), luego,

$$S^2 = \frac{\Delta^2}{a^2} \left[ \frac{2a}{\mathbf{\Delta}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^0}} \right]^{-1} \left( -\frac{d^0}{r^{d^0+1}} \right) \right]^2$$

$$= \frac{\mathbf{I}^2}{r^{2d^0+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^0}} \right]^2, \quad (\text{A.55})$$

donde se ha aprovechado la relación (4.79) que define al parámetro  $\lambda$ . Por otro lado gracias a las soluciones para  $A(r)$  y  $B(r)$  antes citadas, tenemos que

$$e^{2(A-B)} = \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^0}} \right]^{\frac{4}{\Delta(D-2)}(d+d^0)} = \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^0}} \right]^{\frac{4}{\Delta}}. \quad (\text{A.56})$$

Insertando las ecuaciones anteriores en las componentes espaciales del tensor de Ricci, tenemos

$$R_{m\nu} = -\mathbf{h}_{m\nu} \frac{d^{\mathcal{D}}}{2(D-2)} \frac{\mathbf{I}^2}{r^{2d^{\mathcal{D}}+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^{\mathcal{D}}}} \right]^{-\frac{4}{\Delta}-2}. \quad (\text{A.57})$$

Seguimos el mismo procedimiento en el caso de las componentes transversas: la linealidad (4.41), la relación entre  $A'$  y  $\mathbf{f}$  (4.61) y la relación entre  $\mathbf{f}$  y  $S$  (4.63) nos dicen

$$\begin{aligned} R_{mn} &= -\mathbf{d}_{mn} \left[ -\frac{d}{d^{\mathcal{D}}} A'' - \frac{d}{d^{\mathcal{D}}} \frac{d^{\mathcal{D}+1}}{r} A' \right] - \frac{y_m y_n}{r^2} \frac{d(D-2)}{d} (A')^2 \\ &= \left[ \mathbf{d}_{mn} \frac{d}{2(D-2)} - \frac{y_m y_n}{r^2} \frac{d d^{\mathcal{D}}}{\Delta(D-2)} \right] S^2 \\ &= \left( \frac{1}{2} \mathbf{d}_{mn} - \frac{d^{\mathcal{D}} y_m y_n}{\Delta r^2} \right) \frac{d}{(D-2)} \frac{\mathbf{I}^2}{r^{2d^{\mathcal{D}}+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^{\mathcal{D}}}} \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Para obtener el escalar de Ricci  $R = g^{MN} R_{MN}$ , contraemos con los componentes inversos de la métrica (4.80):

$$\begin{aligned} g^{m\nu} R_{m\nu} &= -(\mathbf{h}^{m\nu} \mathbf{h}_{m\nu}) \frac{d^{\mathcal{D}}}{2(D-2)} \frac{\mathbf{I}^2}{r^{2d^{\mathcal{D}}+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^{\mathcal{D}}}} \right]^{-\frac{4d^{\mathcal{D}}}{\Delta(D-2)} - \frac{4}{\Delta}-2} \\ &= -\frac{d d^{\mathcal{D}}}{2(D-2)} \frac{\mathbf{I}^2}{r^{2d^{\mathcal{D}}+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^{\mathcal{D}}}} \right]^{-\frac{4d}{\Delta(D-2)}-2}, \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

y análogamente con la parte transversa,

$$g^{mn} R_{mn} = \left( \frac{1}{2} (D-d) - \frac{d^{\mathcal{D}}}{\Delta} \right) \frac{d}{(D-2)} \frac{\mathbf{I}^2}{r^{2d^{\mathcal{D}}+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^{\mathcal{D}}}} \right]^{-\frac{4d}{\Delta(D-2)}-2}. \quad (\text{A.60})$$

Sumando, se llega finalmente al escalar de curvatura:

$$R = \frac{\Delta - d d^{\mathcal{D}}}{\Delta(D-2)} \frac{\mathbf{I}^2}{r^{2d^{\mathcal{D}}+2}} \left[ 1 + \frac{k}{r^{d^{\mathcal{D}}}} \right]^{-\frac{4d}{\Delta(D-2)}-2}. \quad (\text{A.61})$$

## Apéndice B

### Glosario

**Agujero negro.-** Teóricamente, cuerpo extremadamente compacto con una fuerza gravitatoria muy grande. Las variedades propuestas incluyen los miniagujeros negros o primordiales , objetos de baja masa procedentes de los inicios del universo; agujeros negros medianos o estelares, que se forman a partir de los núcleos de estrellas muy antiguas y masivas; y agujeros negros supermasivos, equivalentes en masa a varios cientos de millones de estrellas y situados en el centro de las galaxias.

**Álgebra de Grassmann.**- Llamada también álgebra exterior, es un álgebra asociativa unital  $K$  generado por un conjunto  $S$  conforme a la relación  $\mathbf{cx} + \mathbf{xc} = 0$  para cualquier  $\mathbf{c}, \mathbf{x}$  en  $S$ . Esta definición dice que los generadores son cantidades anticonmutativas y debe ser modificada en caso de que  $K$  tenga característica 2.

La construcción de tal álgebra es la misma construcción del producto cuña: se toma el espacio vectorial  $V$  que tiene  $S$  como base, y la suma directa de todas las potencias exteriores de  $V$ , usando el producto cuña en cada parte graduada. Si  $S$  es finito de cardinal  $n$ , el álgebra de Grassmann tiene como base un producto cuña por cada subconjunto de  $S$ , y cada producto compuesto de cuñas de elementos de  $S$  con repeticiones se iguala a cero.

**Álgebra de Clifford.**-Existe en un espacio ortogonal de  $n$  dimensiones finitas  $X = R^{p,q}$ , de signatura  $(p,q)$ , existe un álgebra asociada real,  $A = R_{p,q}$ , con unidad  $I$  que contiene formas isonorfias de  $R$  y  $X$  como subespacios lineales de forma tal que, para todo  $x$  en  $X$

$$x^2 = -x.x.$$

Si el álgebra se genera como anillo por las copias de  $R$  y  $X$ , o equivalentemente como un álgebra real por  $\{I\}$  y  $X$  entonces se dice que  $A$  es un álgebra geométrica de Clifford de  $X$ .

**Anomalías.**- Son términos o magnitudes físicas que aparecen dentro de la versión cuántica de una teoría, y cuya existencia impide que se cumplan ciertas leyes de conservación o simetría.

**Ansatz.**- Palabra de origen Alemán que significa “ Nos dejan asumir que las cosas sean como ...”. En el lenguaje físico, es una suposición razonable que se hace para simplificar o dar solución a un problema.

**Aplicación abierta.**- Una función de un espacio a otro es **abierto** si la imagen de cualquier abierto es abierto.

**Axiones.**- Supuesta partícula elemental que podría ser gran parte de la materia oscura que domina en el universo.

**Bosón.**- Partícula elemental con espín entero, es decir , una partícula que obedece la estadística de Bose-Einstein.

**Bosón gauge.**- Bosón vectorial de espín uno que hace de intermediario de las interacciones gobernadas por teorías gauge. Ejemplos de bosones gauge son los fotones en electrodinámica cuántica, los gluones en cromodinámica cuántica y los bosones W y Z en el modelo de Weinberg-Salam.

**Bosón de Higgs.**- Partícula de espín cero con masa no nula, predicha por Peter Higgs que existe en ciertas teorías gauge, en particular en la teoría electrodébil. Sería la responsable de dotar de masa al resto de bosones y fermiones fundamentales al acoplarse a ellos por medio del Mecanismo de Higgs. El bosón de Higgs aún no ha sido encontrado, pero se piensa que se encontrará con aceleradores mayores en los próximos años, especialmente después de que otras predicciones de la teoría, incluyendo los bosones W y Z, hayan sido confirmadas, aunque se ha establecido un límite inferior a su masa de  $117\text{GeV}/c^2$ .

**Brana.**- Es un ente físico localizado en una región finita del espacio-tiempo; poseen masa, la cual está relacionada con su energía por unidad de volumen: poseen carga, llamada carga de Ramond-Ramond. Son objetos extensos que aparecen en la teoría de cuerdas. Una 1-brana es una cuerda, una 2-brana una membrana, una 3-brana tiene tres dimensiones extensas, etc. En términos más generales, una p-brana tiene p dimensiones espaciales.

**Carga central.**- Es un operador bosónico en una teoría cuántica el cual conmuta con todo operador pero puede ser obtenido por conmutación con otros operadores. En la teoría de campo superdimétrica en algunos casos el super álgebra de Poincaré admite extensión central. El valor del elemento central en un estado cuántico es la carga central del estado. El operador cuántico el cual corresponde al elemento central es también llamado carga central.

**Chiral o quiral.**- Dícese de cualquier objeto que es diferente a otro objeto cuya forma es la imagen reflejada en un espejo del primero. Chiralidad es una asimetría entre izquierda y derecha para fermiones. Si existe aquiralidad, mediante rotaciones y traslaciones se puede superponer un objeto sobre otro, entonces existe una simetría ante reflexiones y se dice que existe una simetría de paridad, es decir ambos objetos, imágenes especulares uno del otro, son iguales.

**Clase de Chern.**- es una invariante topológica asociada a una estructura diferenciable sobre una variedad analítica compleja.



**Clase característica.**- Sea  $G$  un grupo, y para un espacio topológico  $X$ , escríbase  $b_G(x)$  para el conjunto de las clases de isomorfismo de  $G$ -fibrados principales. Esto es un funtor de  $\text{Top}$  a  $\text{Set}$ , enviando una función  $f$  a la operación  $f^*$  del *pullback*. Una clase característica  $c$  de  $G$ -fibrados principales es entonces una transformación natural de  $b_G$  a un funtor  $H^*$  de *cohomología*, visto también como funtor a  $\text{Set}$ .

Es decir deseamos asociar a cualquier  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow X$  un elemento  $c(P)$  en  $H^*(X)$  tal que, si  $f: Y \rightarrow X$  es una función continua, entonces  $c(f^* P) = f^* c(P)$ . A la izquierda está la clase del pullback de  $P$  a  $Y$ ; a la derecha está la imagen de la clase de  $P$  bajo la función inducida en cohomología.

**Conexión.**- En geometría diferencial, la conexión es una manera de especificar la diferenciación covariante en una variedad diferenciable. La teoría de conexiones conduce a los invariantes de curvatura (véase también tensor de curvatura), y la torsión. Esto se aplica a los fibrados tangentes; hay conexiones más generales, en geometría diferencial: una conexión puede referirse a una conexión en cualquier fibrado vectorial o a una conexión en un fibrado principal.

En un acercamiento particular, una conexión es una 1-forma a valores en un álgebra de Lie que es un múltiplo de la diferencia entre la derivada covariante y la derivada parcial ordinaria. Es decir, la derivada parcial no es una noción intrínseca en una variedad diferenciable: una conexión *corrige* el concepto y permite la discusión en términos geométricos. Las conexiones dan lugar a un transporte paralelo.

**Conexión de Cartan.**- En matemáticas, la conexión de Cartan en geometría diferencial es una generalización amplia del concepto de la conexión, basado en una comprensión del papel del grupo afín en el acercamiento usual. Fue desarrollado por Elie Cartan. Cartan reformuló la geometría diferencial riemanniana, pero no solamente para dichas variedades diferenciales, sino que hizo la teoría para una variedad diferenciable arbitraria, incluyendo las variedades diferenciales dadas por los grupos de Lie. Esto estaba en términos de marcos móviles como reformulación alternativa de la relatividad general. El formalismo de Cartan es un acercamiento alternativo a la derivada covariante y la curvatura, con las formas diferenciales. Puede también ser entendido en términos de fibrado de bases y permite generalizaciones como fibrado de espinores.

**Compactificación.**-Es el mecanismo por el cual se pueden obtener teorías de supercuerdas en espacio-tiempos de cuatro dimensiones, mediante el proceso de

compactificación las seis dimensiones adicionales se enrollan en una topología compacta, de tamaño tan pequeño que resulta inobservable a las energías accesibles experimentalmente. En el mismo proceso es posible romper parcialmente la supersimetría del sistema, resultando en modelos más ajustados al mundo real.

**Coset.**- Se define coset de  $H$ , a una distribución involutiva tangente a las subvariedades inmersas. Siendo  $H$  un sub grupo de Lie inmerso en un grupo de Lie.

**Cuerda heterótica.**- Es una mezcla peculiar (híbrido) de la cuerda bosónica y de la supercuerda (el adjetivo heterótico viene de la palabra griega heterosis). La cuerda heterótica debe ser una cuerda cerrada, por que no es posible definir ninguna condición de contorno que relacione las excitaciones de desplazamiento izquierdo y derecho.

**Cuerda abierta.**- Es un objeto fundamental unidimensional en la teoría de cuerdas que tiene dos extremos, y por lo tanto es topológicamente equivalente a un intervalo de recta. Tal cuerda puede ejecutar uno a uno de infinitamente muchos patrones vibratorios, En algunos casos, la vibración de baja energía se identifica con un taquión, y puede experimentar condensación de taquiones.

**Cuerda cerrada.**- Es un objeto fundamental unidimensional en la teoría de cuerdas que no tiene extremos, y por lo tanto es topológicamente equivalente a un círculo. Tal cuerda cerrada puede ejecutar uno de infinitamente muchos patrones vibratorios. Uno de ellos identifica siempre la cuerda con el gravitón.

**Dualidad T.**- La dualidad T es una simetría de la teoría de cuerdas, relacionando la teoría de cuerdas del tipo IIA y del tipo IIB, y las dos teorías de cuerdas heteróticas. las transformaciones de la dualidad T actúan en los espacios en los cuales por lo menos una dirección tiene la topología de un círculo. Bajo la transformación, el radio  $R$  de esa dirección cambiará a  $1/R$ , y los estados "envueltos" de la cuerda serán intercambiados por los estados de la cuerda de gran momento en la teoría dual.

**Espacio cociente.**- Si  $X$  e  $Y$  son espacios y  $f: X \rightarrow Y$  es cualquier función, el espacio cociente sobre  $Y$  inducido por  $f$  es la topología menos fina para la que  $f$  es continua. El ejemplo más común de este espacio es el que se consigue con una relación de equivalencia en  $X$ , siendo  $Y$  el conjunto de las  $f$  la aplicación proyección natural.

**Forma diferencial.**- En geometría diferencial, una forma diferencial de grado  $k$  es una sección diferenciable de la  $k$ -ésima potencia exterior del fibrado cotangente de la

variedad. En cualquier punto  $p$  en una variedad, una  $k$ -forma da una función multilineal desde la potencia cartesiana  $k$ -ésima del espacio tangente en  $p$  a  $\mathbf{R}$ .

Por ejemplo, el diferencial de una función diferenciable en una variedad (una 0-forma) es una 1-forma. El de 1-forma (forma de Pfaff) es un concepto básico particularmente útil en el tratamiento libre de coordenadas de los tensores. En este contexto, pueden ser definidas como funciones lineales a valores reales de vectores, y pueden ser considerados como generando el espacio dual con respecto al espacio vectorial de los vectores que se definen encima. Un viejo nombre para 1-formas en este contexto es de "vectores covariantes".

**Fibrado.-** En matemáticas, en particular topología, un fibrado es una función continua suryectiva,  $\delta$  de un espacio topológico  $E$  a otro espacio topológico  $B$ , satisfaciendo otra condición que lo hace de una forma particularmente simple localmente. Introduciendo otro espacio topológico  $F$ , utilizamos la función de proyección de  $B \times F \rightarrow B$  como modelo. Por ejemplo en el caso de un fibrado vectorial,  $F$  es un espacio vectorial sobre los números reales.

Diciéndolo más formalmente, para cualquier  $x$  en  $B$ , hay una vecindad  $U_x$  tales que  $\delta^{-1}(U_x)$  es homeomórfico a  $U \times F$ , de una manera tal que  $\delta$  transporta a la proyección sobre el primer factor.  $B$  se llama el espacio de base del fibrado y  $E$  el espacio total, y para cualquier  $x \in B$ , la preimagen de  $x$ ,  $\delta^{-1}(x)$  se llama la fibra en  $x$  y la función  $\delta$  se llama la función de proyección.

**Fibrado tangente.-** En matemáticas, el fibrado tangente de una variedad es la unión de todos los espacios tangente en cada punto de la variedad.

**Fibrado trivial.-** Cada función de proyección natural  $p: B \times F \rightarrow B$  es un fibrado. Los fibrados como éstos se llaman los fibrados triviales. Un ejemplo estándar, localmente trivial pero no (globalmente) trivial es la Banda de Möbius como  $E$ , en la cual  $B$  se puede tomar como un círculo y  $F$  un segmento de línea. La *torcedura* en la cinta es evidente sólo globalmente, mientras que localmente la estructura de la cinta define la topología. Cada fibrado vectorial es un fibrado; aquí  $F$  es un espacio vectorial sobre los números reales. Para calificar como fibrado vectorial, las transiciones que relacionan las vecindades localmente trivializables tendrán que ser lineales también. Cada función cobertora es un fibrado; aquí el espacio fibra  $F$  es discreto.

**Gauge, teoría.-** Cualquiera de las teorías cuánticas de campos creadas para explicar las interacciones fundamentales. Una teoría gauge requiere un grupo de simetría para

los campos y los potenciales. En el caso de la electrodinámica, el grupo es abeliano, mientras que las teorías gauge para las interacciones fuertes y débiles utilizan grupos no abelianos. Las teorías gauge no abelianas son conocidas como teorías de Yang-Mills.

**Instantón.**- Es un objeto clásico con una interpretación mecánico-cuántica. No se le considera partícula, sino transición entre dos estados de un sistema, una manifestación del fenómeno conocido como efecto túnel. Es un solitón que se presenta como objeto confinado, no solo en una región definida del espacio, sino también en un instante de tiempo.

**Solitón.**- Son ondas o perturbaciones no lineales que pueden propagarse sin perder energía o sin disiparse, y mantienen su tamaño y forma, incluso luego de colisionar entre sí, permaneciendo estables por mucho tiempo, aun bajo una gran variedad de condiciones.

**Supermembranas, teoría de .**-Teoría unificada de las interacciones fundamentales que incorpora supersimetría, en la que las entidades básicas son objetos extensos bidimensionales. Se piensa que tienen la misma escala de longitud que las supercuerdas  $10^{-35}$  m.

**Supersimetría.**- Simetría que puede ser aplicada a las partículas elementales con el fin de transformar un bosón en un fermión y viceversa. En las teorías supersimétricas más simples, cada bosón tiene un compañero fermiónico y cada fermión tiene un compañero bosónico.

**Tensor de curvatura.**- En geometría diferencial, el tensor de curvatura es una de las nociones más importantes; generaliza la Curvatura de Gauss a dimensiones más altas. La geometría infinitesimal de las variedades de Riemann con dimensión 3 es demasiado complicada como para describirla por un número en un punto dado. Riemann introdujo una manera de describirla con un "pequeño monstruo de" tensor. Nociones similares han encontrado usos por todas partes en geometría diferencial.

Lo que sigue es una descripción de este tensor; asume que el lector está familiarizado con la curvatura de Gauss. Los artículos conexión de Cartan y derivada covariante contienen dos maneras distintas de introducir y de calcular el tensor de curvatura.

**Teoría M.**- La Teoría M es una de las candidatas a convertirse en la 'Teoría de Todo'. Tiene su origen en la Teoría de las cuerdas según la cual todas las partículas son en realidad diminutas *cuerdas* que vibran a cierta frecuencia y nosotros vivimos en un universo vibrando a cierta frecuencia, lo cual requiere 11 dimensiones.

La teoría M es una solución propuesta para la desconocida teoría de todo, la cual combina las 5 teorías de las supercuerdas y supergravedad en 11 dimensiones. De acuerdo con el Dr. Edward Witten, quién propuso la teoría, herramientas matemáticas, muchas de las cuales aún tienen que ser inventadas, son necesarias para un total entendimiento de la misma.

**Término topológico.**- En teoría clásica de campos, un término topológico es un término en el lagrangiano el cual es localmente una forma diferencial representando una clase cohomologica secundaria. Un ejemplo en teorías gauge es un término de Chern-Simons.

**Variedad.**-Una variedad es el objeto geométrico estándar en matemática, que generaliza la noción intuitiva de superficie a cualquier dimensión y sobre cuerpos variados (y no forzosamente el de los reales); existe en diversas variantes utilizadas según el dominio particular considerado.

**Variedad algebraica.**- son curvas o superficies definidas como raíces de polinomios de varias variables generalmente complejas.

**Variedad de Calabi-Yau.**- En matemáticas, una variedad de Calabi-Yau es una variedad de Kähler compacta con una primera clase de Chern nula. El matemático Eugenio Calabi conjeturó en 1957 que tales variedades admiten una métrica "Ricci-flat" (una en cada clase de Kähler), esta conjetura fue probada por Shing-Tung Yau en 1977 y devino el teorema de Yau. Por lo tanto, una variedad de Calabi-Yau se puede también definir como variedad Ricci-plana compacta de Kähler.

Es también posible definir una variedad de Calabi-Yau como variedad con una holonomía  $SU(n)$ . Otra condición equivalente es que la variedad admite una  $(n, 0)$ -forma holomórfica global nunca nula.

En una dimensión compleja, los únicos ejemplos son familia de toros. Obsérvese que la métrica Ricci-plana en el toro es realmente una métrica plana, de modo que la holonomía es el grupo trivial que es isomorfo a  $SU(1)$ . En dos dimensiones complejas, el toro  $T^2$  y las variedades K3 proveen los únicos ejemplos.  $T^2$  se excluye a veces de la clasificación de ser un Calabi-Yau, pues su holonomía (otra vez el grupo trivial) es un subgrupo propio de  $SU(2)$ , en vez de ser isomorfo a  $SU(2)$ . Por otra parte, el grupo holonomía de K3 es el  $SU(2)$  pleno, así que puede correctamente ser llamado un Calabi-Yau en 2 dimensiones. En tres dimensiones complejas, la clasificación de los Calabi-

Yau posibles es un problema abierto. Un ejemplo de Calabi-Yau 3 dimensional es el quíntico en  $CP^4$ .

Las variedades de Calabi-Yau son importantes en teoría de supercuerdas. En los modelos de supercuerdas más convencionales, diez dimensiones conjeturales en teoría de cuerdas se suponen devenir las cuatro de las cuales estamos enterados, llevando una cierta clase de fibrado con dimensión seis de la fibra. Compactificación en variedades de Calabi-Yau son importantes porque dejan algo de la supersimetría original intacta. Más exactamente, la compactificación en un Calabi-Yau de tres dimensiones (la dimensión real es 6) deja un cuarto de la supersimetría original intacta.

**Variedad diferencial.**- son superficies lisas (sin puntos angulosos) y generalmente reales, donde se pueden definir en cualquier punto vectores (o planos) tangentes; están utilizadas por la teoría de los grupos de Lie, por el cálculo diferencial sobre los espacios topológicos más generales (que se utilizan en mecánica, por ejemplo).

**Vielvein.**- Teoría especial para una variedad diferenciable que cubre todas las dimensiones. Se aplica a la métrica de cualquier signatura. En cualquier dimensión, para una pseudo geometría de Riemann, esta teoría de la conexión de Cartan es un método alternativo en geometría diferencial.

## Bibliografia

- [1] T.H.R. Skyrme, Proc. R. Soc. **A 247** (1958) 260 ; Proc. R. Soc. **A 262** (1961) 233 ; Nucl. Phys. **31** (1962) 556.
- [2] H:B: Nielsen y P. Olsen, Nuc. Phys. **B 61** (1973) 45
- [3] V.L. Ginzburg y L. D. Landau, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **20** (1950) 1064.
- [4] G. t' Hooft, Nucl. Phys. **B 79** (1974) 276.
- [5] A.M. Polyakov, JETP Lett. **20** (1974) 194; Soviet Physics JETP **41** (1976) 988.
- [6] A.A. Belavin, A. M. Polyakov, A.S. Schwartz y Yu S. Tyupkin, Phys. Lett. **B59** (1975) 85.
- [7] John H. Schwarz, *Lectures on superstring and m theory dualities*, Preprint CALTECH-68-2065, hep- th/9607201, 1996

- [8] M.J. Duff, *M-theory (the theory formerly known as strings)*, Preprint CPT-TAMU-33-96 hep-th/9608117, 1996.
- [9] Green, M.B., Schwarz, J.H., and Witten, E. (1987). *Superstring theory. Vol 1: Introduction*. Cambridge: Cambridge university press
- [10] Ashoke Sen, *Unification of string dualities*, Preprint MRI-PHY-96-28, hep-th/9609176, 1996.
- [11] John H. Schwarz and Ashoke Sen, *Duality symmetries of 4d heterotic strings*, Phys. Lett. **B 312** (1993), 105-114, hep-th/9305185.
- [12] John H. Schwarz and Ashoke Sen, *Duality symmetric actions*, Nucl. Phys. B 411 (1994), 35-63, hep-th/9304154.
- [13] C.M. Hull and P. K. Townsend, *Enhanced gauge symmetries in super-string theories*, Nucl. Phys. **B 451** (1995), 525-546, hep-th/9505073.
- [14] Edward Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. **B 443** (1995), 85-126, hep-th/9503124.
- [15] C.M. Hull and P. K. Townsend, *Unity of superstring dualities*, Nucl. Phys. **B 438** (1995), 109-137, hep-th/9410167.
- [16] Jin Dai, R.G. Leigh, and Joseph Polchinski, *New connections between string theories*, Mod. Phys. Lett. **A 4** (1989), no. 21, 2073-2083.
- [17] Donam Youm, *Black holes and solitons in string theory*, Phys. Rept. **D 316** (1999), 1, Preprint IASSNS-HEP-97/100, hep-th/9701010.
- [18] Juan Marín Maldacena, *Black holes in string theory*, PhD Dissertation, Princeton University, hep-th/9607235, 1996.
- [19] A.W. Chamseddine,  *$n = 4$  supergravity coupled to  $n = 4$  matter*, Nucl. Phys. **B 185** (1981), 403-415.
- [20] E. Bergshoeff, M. de Roo, B. de Wit, and P. van Nieuwenhuizen, *Ten-dimensional Maxwell-Einstein supergravity, its currents, and the issue of its auxiliary fields*. Nucl. Phys. **B 195** (1982), 97-136.
- [21] G.F. Chapline and N.S. Mantón, *Unification of Yang-Mills theory and supergravity in ten-dimensions*, Phys. Lett **B 120** (1983), 105-109.
- [22] P. S. Howe and Kellogg. S. Stelle, *The ultraviolet properties of super-symmetric field theories*, Int. J. Mod. Phys. **A 4** (1989), 1871.
- [23] Paúl A. M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. **A 133** (1931), 60-72.



- [24] Edward Witten, *Dyons of charge  $e\mathbf{q}2\mathbf{p}$* , Nucl. Phys. **B 86** (1979), 283-287.
- [25] G. 't Hooft, *Magnetic monopole in unified gauge theories*, Nucl. Phys. **B 79** (1974), 276-284.
- [26] A. M. Poyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*, JETP Lett. **20** (1974), 194-195.
- [27] E. B. Bogomol'nyi, *Stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976), 449.
- [28] E. B. Bogomol'nyi, *Stability of classical solutions*, In Rebbi and Soliani [67].
- [29] M. K. Prasad and Charles M. Sommerfield, *An exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon*, In Rebbi and Soliani [67].
- [30] C. Montonen and David I. Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles?*, Phys. Lett. **B 72** (1977), 117.
- [31] Ana María Font, L. Ibañez, D. Lüüst, and F. Quevedo, *Strong - weak coupling duality and nonperturbative effects in string theory*, Phys. Lett. **B 249** (1990), 35-43.
- [32] Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang, *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*, Phys. Rev. **D 12** (1975), 3845.
- [33] G. 't Hooft, *Topology of the gauge condition and new confinement phases in nonabelian gauge theories*, Nucl. Phys. **B 190** (1981), 455.
- [34] Sidney Coleman, *Quantum sine-Gordon equation as the massive Thir-ring model*, Phys. Rev. **D 11** (1975), no. 8, 2088-2097.
- [35] S. Mandelstam, *Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation*, Phys. Rev. **D 11** (1975), no. 10, 3026-3030.
- [36] M. K. Prasad and Charles M. Sommerfield, *An exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975), 760-762.
- [37] Stephen W. Hawking, *Black holes and thermodynamics*, Phys. Rev. **D 13** (1976), 191.
- [38] J.M. Figueroa-O'Farril, *Electromagnetic Duality for Children*, Draft Versión, Massachusetts Instituto of Technology, 1997.
- [39] R. Hermann, *Vector bundles in mathematical physics*, W. A. Benjamin, 1970.
- [40] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Fraude Laloe, *Quantum Mecharnos*, second ed., John Wiley & Sons, Paris, 1977.

- [41] E.B. Bogomol'nyi, *Sov. Jour. Nucl. Phys.* **24** (1976) 449.
- [42] P. Higgs, *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons*, *Phys. Rev.* **145** (1966), 1156-1163.
- [43] F. Englert and R. Brout, *Broken symmetry and the mass of gauge vector bosons*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 321-323.
- [44] T.W.B. Kibble, *Symmetry breaking in non-abelian gauge theories*, *Phys. Rev.* **155** (1967), 1554-1561.
- [45] David I. Olive, Exact electromagnetic duality, hep-th/9508089, 1995.
- [46] M.T. Grisaru, W. Siegel y M. Roček, *Nucl. Phys.* **B159** (1979) 420.
- [47] P. S. Howe and P. C. West, *The complete  $n = 2, d = 10$  supergravity*, *Nucl. Phys.* **B 238** (1984), 181.
- [48] S. Coleman y J. Mandula, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251.
- [49] Yu. A. Gol'fand y E. S. Likhthman, *JETP Lett.* **13** (1971) 323.
- [50] R. Hagg, J. Lopuszanski y MLF. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B 88** (1975) 61.
- [51] Ferrara, C.A. y B. Zumino, *Phys. Lett.* **B100** (1981) 393
- [52] P.G.O. Freund, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University Press, 1986.
- [53] J. Wess y J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd. Edition. Princeton Series in Physics, Princeton University Press, 1992.
- [54] J. Wess y B. Zumino. *Nucl. Phys.* **B78** (1974) 1.
- [55] S. Ferrara, D.Z. Freedman y P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 3214.
- [56] S. Deser y B. Zumino, *Phys. Lett.* **B62** (1976) 335.
- [57] S. Coleman, *New Phenomena in Subnuclear Physics (Proc. 1975 Int. School of Physics 'Ettore Majorana')*, ed. A. Zichichi, New York: Plenum (1975) 297.
- [58] S. Ferrara y P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 1669.
- [59] S. Deser y C. Teitelboim, *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977) 249.
- [60] C. Teitelboim, *Phys. Lett.* **B 69** (1977) 240.
- [61] M.T. Grisaru, *Phys. Lett.* **B 73** (1978) 207.
- [62] E. Witten, *Int. J. Mod. Phys.* **A 10** (1995) 1247.
- [63] G.T. Horowitz y A. Strominger, *Phys. Rev.* **D 27** (1983) 2793.
- [64] S. DESER, *Phys. Rev.* **D 27** (1983) 2805.
- [65] C. Teitelboim, *Phys. Rev.* **D 29** (1984) 2763.

- [66] J. Bekenstein, *Lett. Nuovo Cimento* **4** (1972)737; *Phys. Rev.* **D7** (1973)2333; *Phys. Rev.* **D 9** (1974) 3292.
- [67] S.W. Hawking. *Nature* **248** (1974) 30; *Comm. Math. Phys* **43** (1975) 199.
- [68] A. Strominger y C. Vafa, *Phys. Lett.* **B 379** (1996) 99.
- [69] J.M. Maldacena y A. Strominger. *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 428.
- [70] C.V. Jhonson, R.R. Khuri y R.C. Myers, *Phys. Lett.* B378 (1996) 78.
- [71] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons Inc., 1972.
- [72] P. West. *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, 2en. Edition, World Scientific, 1990.
- [73] A. Trautman, *Fiber Bundles associated with Space-Time*, Rept. Math. Phys. 1 (1970), 29-62.
- [74] C.M. Hull, *Commun. Math. Phys* **90** (1983) 545.
- [75] P.A.M. Dirac, *Can. J. Math* **2** (1950) 129.
- [76] T. Reege y C. Teitelboim, *Phys. Lett.* **B 53** (1974)101; *Ann. Phys (N.Y.)***88** (1974) 286.
- [77] Edward Witten and David I. Olive, *Supersymmetry algebras that include topological charges*, *Phys. Lett.* **B 78** (1978), 97.
- [78] R.G. Leigh, *Dirac-Bom-Infeld action from Dirichlet o-model*, *Mod. Phys. Lett.* **A 4** (1989), 2767-2772.
- [79] C.Teitelboim, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1106.
- [80] R. Benguria, P. Cordero y C. Teitelboim, *Nucl.Phys.* **B 122** (1977) 61.
- [81] Paúl A. M. Dirac, *An extensible model of the electron*, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 268** (1962), 57-67.
- [82] J. Hughes, Jim Liu, and Joseph Polchinski, *Supermembrane*, *Phys. Lett.* **B 180** (1986), 370.
- [83] Yoichiro Nambu, *Lectures at the copenhagen summer symposium*, Un- published, 1970.
- [84] F. Mansouri and Yoichiro Nambu, *Gauge conditions in dual resonance models*, *Phys. Lett.* **B 39** (1972), 375.
- [85] T. Goto, *Relativistic quantum mechanics of one-dimensional mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model*, *Prog. Theor. Phys.* **46** (1971), 1560-1569.

- [86] M.J. Duff, *Supermembranes*, Based on lectures given at the TASI Summer School, University of Colorado, Boulder, June 1996; the Topical Meeting, Imperial College, London, July 1996 and the 26th British Universities Summer School in Theoretical Elementary Particle Physics, University of Swansea, September 1996. hep-th/9611203, 1996.
- [87] C. Callan, D. Friedan, E. Martinec, and M. Perry, *Strings in background fields*. Nucl. Phys. **B 262** (1985), 593.
- [88] César Gómez López, *Dualidad y d-branas*, IV Escuela La Hechicera; Relatividad, Campos, Astrofísica (Mérida, Venezuela) (Héctor Rago, ed.), Noviembre 1998, pp. 85-231.
- [89] Kellogg S. Stelle, *Lectures on Supergravity p-branes*, Lectures given at the ICTP Summer School in High Energy Physics and Cosmology, hep-th/9701088, 1996.
- [90] I.C.G. Campbell and P. C. West,  *$n = 2$   $d = 10$  nonchiral supergravity and its spontaneous compactification*, Nucl. Phys. **B 243** (1984), 112.
- [91] F. Giani and M. Pernici,  *$n = 2$  supergravity in ten-dimensions*, Phys. Rev. **D 30** (1984), 325-333.
- [92] M. Huq and M.A. Namazie, *Kaluza-Klein supergravity in ten-dimensions*, Class. Quantum Grav. **2** (1985), 293.
- [93] M. Huq and M.A. Namazie, *Kaluza-Klein supergravity in ten-dimensions; erratum*, Class. Quantum Grav. **2** (1985), 597.
- [94] Michael B. Green and John H. Schwarz, *Extended supergravity in ten-dimensions*, Phys. Lett. **B 122** (1983), 143.
- [95] John H. Schwarz and P. C. West, *Symmetries and transformations of chiral  $n = 2$   $d = 10$  supergravity*, Phys. Lett. **B 126** (1983), 301.
- [96] John H. Schwarz, *Covariant field equations of chiral  $n = 2$   $d = 10$  supergravity*, Nucl. Phys. **B 226** (1983), 269.
- [97] Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, first ed., Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [98] M.J. Duff, R. R. Khuri, and J. X. Lu, *String solutions*, Phys. Rep. **259** (1995), 213, hep-th/9412184.
- [99] C. Callan, Jeffrey A. Harvey, and A. Strominger, *Supersymmetric string solitons*, Lectures given at Trieste Summer School, Trieste Italy, 1991.

- [100] R. Rajaraman (ed.), *Solitons and instanton*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [101] Jeffrey A. Harvey, *Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry*, hep-th/96030086, 1996.
- [102] J.W. van Holten and A. van Proeyen,  *$n = 1$  supersymmetry algebras in  $d=2$ ,  $d=3$ ,  $d=4 \bmod 8$* , J. Phys. **A 15** (1982), 3763.
- [103] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, *Strings in background fields*, Phys. Lett. **B 76** (1978), 409.
- [104] M.J. Duff and Kellogg S. Stelle, *Multi-membrane solutions of  $d = 11$  supergravity*, Phys. Lett. **B 253** (1991), 113.
- [105] A. Dabholkar, G. W. Gibbons, Jeffrey A. Harvey, and F. Ruiz Ruiz, *Superstrings and solitons*, Nucl. Phys. **B 262** (1990), 593.
- [106] R. Arnowitt, S. Deser, and Charles W. Misner, *The dynamics of general relativity*, Gravitation: An Introduction to Current Research (L. Witten, ed.), John Wiley & Sons, New York, 1962, pp. 227-265.
- [107] Rafael I. Nepomechie, *Magnetic monopoles from antisymmetric tensor gauge fields*, Phys. Rev. **D 31** (1985), 1921.
- [108] Claudio Teitelboim, *Monopoles of higher rank*, Phys. Lett. **B 167** (1986), 69.
- [109] R. Arnowitt, S. Deser, and Charles W. Misner, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity*, Phys. Rev. **122** (1961), 997-1006.
- [110] Stephen W. Hawking and G.T. Horowitz, *The gravitational Hamiltonian, action, entropy, and surface terms*, Class. Quant. Grav. **13** (1996), 1487-1498.
- [111] Charles W. Misner, Kip Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Free-man, San Francisco, 1973.
- [112] G. Nordstrom, *On the energy of the gravitational field in Einstein's theory*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **20** (1918), 1238-1245.
- [113] G. W. Gibbons and P. K. Townsend, *Vacuum interpolation in supergravity via super  $p$ -branes*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 3754-3757
- [114] M.J. Duff, G. W. Gibbons, and P. K. Townsend, *Macroscopic superstrings as interpolating solitons*, Phys. Lett. **B 332** (1994), 321-328.
- [115] Gary T. Horowitz and Andrew Strominger, *Black strings and  $p$ -branes*, Nucl. Phys. **B 360** (1991), 197-209.

- [116] M.J. Duff and J. X. Lu, *Black and super p-branes in diverse dimensions*, *Uncl. Phys.* **B 416** (1994), 301-334, hep-th/9306052.
- [117] M.J. Duff, J. X. Lu, and C.N. Pope, *The black branes of m-theory*, hep-th/9604052, 1996.
- [118] Tim Cornelis de Wit, “*Domain-Walls and Gauged Supergravities*”, Doctoral Thesis, Center for Theoretical Physics, Groningen University, Netherlands, 2003.
- [119] Huan-Xiong Yang, Cong-Kao Wen. Ben-Geng Cai, “*An Alternative Dp-brane Solution of Type IIB Supergravity*”, hep-th/0411082.
- [120] Marco M. Caldarelli, “*On Supersymmetric Solutions of D=4 Gauged Supergravity*”, hep-th/0411153