UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Ecuaciones y sistemas elípticos con crecimiento superlineal

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Yony Raúl Santaria Leuyacc

ASESOR

Alfonso Pérez Salvatierra

Lima - Perú

2015

ECUACIONES Y SISTEMAS ELÍPTICOS CON CRECIMIENTO SUPERLINEAL

YONY RAÚL SANTARIA LEUYACC

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobado por:

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Presidente del Jurado

Mg. Carlos Alberto Peña Miranda
Miembro del Jurado

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro Asesor

Lima - Perú

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

YONY RAÚL SANTARIA LEUYACC

Ecuaciones y Sistemas Elípticos con Crecimiento Superlineal ,
LaTeX, (Lima) 2015.
xiii, 97 p. 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2011)
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática.
I. UNMSM/FdeCM II. Título (serie)

DEDICATORIA

- *A mi madre Ysabel Leuyacc .*

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor de tesis Prof. Alfonso Pérez Salvatierra.

Agradezco al Prof. Agripino Garcia Armas (In memoriam) por las enseñanzas y consejos durante mis últimos años de pre-grado.

Agradezco a los profesores del ICMC-USP que contribuyeron de manera significativa en mi formación en la teoría de las EDP elípticas.

Agradezco a todos los que de algún modo formaron parte de la realización de mi tesis.

Yony Rául Santaria Leuyacc

RESUMEN

Ecuaciones y Sistemas Elípticos con Crecimiento Superlineal

YONY RAÚL SANTARIA LEUYACC

Diciembre - 2015

Asesor : Dr. Alfonso Pérez Salvatierra.
Título Obtenido : Licenciado en Matemática.

En este trabajo estudiaremos ecuaciones elípticas de la forma

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= f(x,u), \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ u &\in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ es un dominio limitado o $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua con condiciones de crecimiento subcrítico y crítico.

También estudiaremos sistemas de ecuaciones elípticas de la forma

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u,v), \qquad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v &= g(x,u,v), \qquad \text{em} \quad \Omega, \\ u, v &\in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$, $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas con condiciones de crecimiento subcrítico . Encontraremos soluciones definidas en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, para sistemas elípticos de tipo gradiente y de tipo hamiltoniano .

Para la existencia de soluciones usaremos Métodos Varacionales, haciendo uso especial del Teorema del Paso de Montaña .

Palabras Claves : ECUACIONES ELÍPTICAS
SISTEMAS ELÍPTICOS
CRECIMIENTO SUPERLINEAL
PASO DE MONTAÑA

ABSTRACT

Elliptic Equations and Systems with Superlinear Growth

YONY RAÚL SANTARIA LEUYACC

December - 2015

Advisor : Dr. Alfonso Pérez Salvatierra.
Obtained Degree : Mathematician.

In this work, we study elliptic equations of the form

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= f(x,u), \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ u &\in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ is a bounded domain or $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function with growth conditions sub-critical or critical.

Also we study elliptic system equations of the form

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u,v), \qquad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v &= g(x,u,v), \qquad \text{em} \quad \Omega, \\ u,v &\in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$, $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are continuous functions with sub-critical growth conditions . We will find solutions defined in $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ for systems of elliptic equations of gradient and hamiltonian types.

For the existence of solutions will use varationals methods, with special use of the Mountain Pass Theorem .

Keywords : ELLIPTIC EQUATIONS
ELLIPTIC SYSTEMS
SUPERLINEAR GROWTH
MOUNTAIN PASS THEOREM

Índice general

Introducción

En las últimas décadas el estudio de las Ecuaciones Elípticas no Lineales han llamado la atención de muchos investigadores en Ecuaciones en Derivadas Parciales, debido a su interacción con otras áreas dentro de las Matemáticas y de sus aplicaciones en disciplinas científicas tales como la Dinámica de fluidos, Transiciones de fase, Electromagnetismo, Ecología, Matemática financiera, Procesamiento de imágenes en Ciencias de la Computación, etcétera.

Nuestro estudio tratará ecuaciones de la forma:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u &=& f(x,u), & \text{en} & \Omega, \\ u &=& 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio limitado o $\Omega = \mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$.

Diremos que una función f es llamada **Superlineal** si

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty.$$

Una clase especial de funciones, son las que satisfacen la **Condición de Ambrosseti-Rabinowitz**, esto es, si existen $\mu > 2$ y $r \geq 0$, tales que

$$0 < \mu F(x,t) = \mu \leq t f(x,t), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},\ \forall\, |t| \geq r,$$

donde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)\, ds$.
Mostraremos posteriormente que toda función que satisface la condición de Ambrosseti-Rabinowitz es una función superlineal.

Los Métodos Variacionales es una de las principales a herramientas utilizadas para resolver problemas de la teoria de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. La idea principal es obtener un problema varacional equivalente en cierto sentido al problema diferencial. El problema varacional consiste en obtener puntos críticos para un funcional J asociado.

Por lo tanto, encontrar soluciones para el problema $(\mathcal{P})$ sera equivalente a encontrar puntos críticos del siguiente funcional definido en un espacio adecuado X.

$$\begin{array}{rcl} J \ : X & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx, \end{array}$$

Del primer integrando surge naturalmente el Espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ es decir el espacio de funciones tales que su derivada débil pertenece a $L^2(\Omega)$, también es necesario que la segunda integral del funcional J sea bien definida.

Sea f una función satisfaciendo

$$(h) \qquad |f(x,t)| \leq a + b|t|^p, \quad \text{para todo} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

entonces existen $c, d > 0$ tales que

$$|F(x,t)| \leq c + d|t|^{p+1} \quad \text{para todo} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, es necesario que

$$\int_\Omega \left(c + d|u|^{p+1}\right) dx < \infty$$

es decir u debe pertenecer al espacio $L^{p+1}(\Omega)$. En consecuencia las inmersiones de Sobolev condicionan a que $p+1 \leq 2^*$ donde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$ y $2^* = \infty$ si $N = 1, 2$ Además, por el Teorema de Rellich-Kondrachov tenemos inmersión compacta en $L^{p+1}(\Omega)$ si $p+1 < 2^*$ y hay perdida de compacidad si $p+1 = 2^*$, lo cual motiva la siguiente definición.

- Una función f satisfaciendo la condición (h) se dirá que posee crecimiento superlineal subcrítico, si f es una función superlineal y $2 < p+1 < 2^*$ si $N \geq 3$ o $1 < p < \infty$ si $N = 1, 2$.

- Una función f satisfaciendo la condición (h) se dirá que posee crecimiento superlineal crítico, si f es una función superlineal y $p+1 = 2^*$ si $N \geq 3$.

Dividiremos nuestro trabajo en 7 capítulos y un apéndice :

En el **Capitulo 1** demostraremos el Teorema del Paso de Montaña, que constituye uno de los más útiles teoremas de tipo Minimax.

En el **Capitulo 2** estudiaremos el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= f(x,u), & \text{en} & \Omega, \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ es un dominio limitado con frontera suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua con crecimiento superlineal subcrítico.

En el **Capitulo 3**, estudiaremos el siguiente problema superlineal subcrítico

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= Q(x)|u|^{p-2}u, \quad x & \text{en} & \mathbb{R}^N, \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

donde $N \geq 3$ y $2 < p < 2^*$.

En el **Capitulo 4** estudiaremos la existencia de solución, para el problema superlinea crítico

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= |u|^{2^*-2}u, \quad x & \text{en}\ \Omega, \\ u \geq 0, &\in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto limitado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

En los **Capitulo 5, 6 y 7** estudiaremos dos clases especiales de sistemas de ecuaciones parciales elípticas.

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u,v), & \text{em} & \Omega, \\ -\Delta v &= g(x,u,v), & \text{em} & \Omega, \\ u = v &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ y $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones con crecimiento superlinear subcrítico.

Finalmente daremos un apéndice donde mostraremos resultados y definiciones usadas a lo largo de nuestro estudio.

Notaciones

- $\mathbb{R}^N$ denota el Espacio euclidiano N-dimensional. $N \geq 2$.
- $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de la función u en relación a la i-ésima coordenada.
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ denota el gradiente de u.
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, denota el laplaciano de u
- $\rightharpoonup$ denota convergencia débil.
- $\rightarrow$ denota convergencia fuerte.
- $\hookrightarrow$ indica inmersión.
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^N$.
- $B_r(x_0)$ denota la bola abierta en $\mathbb{R}^N$, de centro x_0 y radio r.
- $\overline{\Omega}$ denota la cerradura de un subconjunto Ω en $\mathbb{R}^N$.
- supp u es la cerradura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$.
- $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ denota el espacio de las funciones infinitamente diferenciables $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ con suporte compacto en Ω.
- p' denota el exponente conjugado de p es decir $p' = \dfrac{p}{p-1}$.
- $f = o(g)$ en x_0 indica que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- $u_n = o_n(1)$ indica una que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.
- E^* denota el espacio dual de un subespacio vectorial E.
- $E^\perp$ denota el complemento ortogonal de un subespacio vectorial E.

Capítulo 1

Teorema del Paso de Montaña

En este capítulo demostraremos el Teorema del Paso de Montaña, que constituye uno de los más utiles teoremas de tipo Minimax. Nuestro estudio seguira los trabajos de Rabinowitz [10] y Willem [14].

1.1 Campo Pseudo-Gradiente

En esta seccion iremos a entender el concepto y la contruccion de un campo seudo-gradiente que serán fundamentales en la demostración del Lema de Deformacion.

Definición 1.1. *Sea X un espacio de Banach, un campo seudo-gradiente para $\phi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ es una aplicación localmente Lipschitziana $V : Y \to X$, que verifica*

$$\|V(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\|_{X'} \tag{1.1}$$

y

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle \geq \|\phi'(u)\|^2_{X'}, \tag{1.2}$$

donde $Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}$.

Lema 1.2. *Si $\phi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, entonces existe un campo pseudo-gradiente para ϕ, definida en $Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}$.*

Demostración. Dado $\tilde{u} \in Y$, entonces $\phi'(\tilde{u}) \neq 0$. Siendo $\phi'(\tilde{u})$ un funcional lineal continuo, tenemos

$$\|\phi'(\tilde{u})\| = \sup_{\|w\|=1} \langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle. \tag{1.3}$$

De (1.3), tenemos que existe una sucesión $(w_n) \subset X$ con $\|w_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w_n \rangle \to \|\phi'(\tilde{u})\|.$$

Así, existe $w = w_{n_0}$, para algún n_0 suficientemente grande, tal que

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle > \frac{2}{3}\|\phi'(\tilde{u})\|. \tag{1.4}$$

Ahora, definiendo la función

$$\begin{array}{rlcl} v & : Y & \to & X \\ & \tilde{u} & \mapsto & v(\tilde{u}) = \dfrac{3}{2}\|\phi'(\tilde{u})\|w. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\|v(\tilde{u})\| = \frac{3}{2}\|\phi'(\tilde{u})\|\|w\| < 2\|\phi'(\tilde{u})\|. \tag{1.5}$$

Ademas

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \langle \phi'(\tilde{u}), \frac{3}{2}\|\phi'(\tilde{u})\|w \rangle,$$

luego usando (1.4)

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \frac{3}{2}\|\phi'(\tilde{u})\|\langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle > \frac{3}{2}\|\phi'(\tilde{u})\|\frac{2}{3}\|\phi'(\tilde{u})\| = \|\phi'(\tilde{u})\|^2. \tag{1.6}$$

Siendo ϕ' contínua de (1.5) y (1.6), tenemos que existe una vecindad de $\tilde{u} \in Y$, la cual denotaremos por $N_{\tilde{u}}$, tal que para $u \in N_{\tilde{u}}$,

$$\|v(u)\| < 2\|\phi'(u)\| \tag{1.7}$$

y

$$\langle \phi'(u), v(u) \rangle > \|\phi'(u)\|^2, \tag{1.8}$$

por lo tanto, v es un campo pseudo-gradiente de ϕ definida en $N_{\tilde{u}}$.

Observe que la familia $\mathcal{N} = \{N_{\tilde{u}}; \tilde{u} \in Y\}$ es un cubrimiento abierto para Y, siendo X un espacio Métrico, entonces también es un espacio Paracompacto (ver [9]). Por lo tanto, existe un subcubrimiento localmente finito $\mathcal{M} = \{M_i; i \in I\}$ mas fina que $\mathcal{N}$, es decir para cada $i \in I$ existe $\tilde{u}_i \in Y$ tal que $M_i \subset N_{\tilde{u}_i}$ y para cada punto de Y existe una vecindad que intercepta apenas un número finito de conjuntos M_i. Sea $v_{\tilde{u}_i}$ o campo pseudo-gradiente de ϕ en $N_{\tilde{u}_i}$, luego considerando

$$v_i(u) = \begin{cases} v_{\tilde{u}_i}(u), & u \in N_{\tilde{u}_i}, \\ 0, & u \notin N_{\tilde{u}_i}. \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\rho_i(u) = dist(u, M_i^c),$$

y

$$V(u) = \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j \in I} \rho_j(u)} v_i(u).$$

Mostraremos que v es un campo pseudo-gradiente para ϕ en Y.

(i) Observe que V, es suma finita de funciones localmente Lipschitzianas, dado que el cubrimiento $\mathcal{M}$ de Y es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{N}$ y las funciones ρ_i son localmente Lipschitzianas, por lo tanto, V es localmente Litpschitziana.

(ii) Usando (1.7)

$$\|V(u)\| \leq \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j \in I} \rho_j(u)} \|v_i(u)\| = \|v_i(u)\| < 2\|\phi'(u)\|_{X'}$$

(iii) También por (1.8), tenemos

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle = \langle \phi'(u), \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j \in I} \rho_j(u)} v_i(u) \rangle = \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j \in I} \rho_j(u)} \langle \phi'(u), v_i(u) \rangle > \|\phi'(u)\|^2.$$

Por lo tanto, V es un campo pseudo-gradiente para ϕ en Y. ■

1.2 Lema de Deformación Cuantico

El Lema de Deformacion original es debido a Clark [18], Nosotros mostraremos el Lema de Deformación debido a Willem [19].
Dado una función $\phi : X \to \mathbb{R}$, denotaremos para cada número real d

$$\phi^d = \{u \in X; \phi(u) \leq d\}.$$

Lema 1.3. ***(Lema de Deformación Cuantitativo)*** *Sean X un espacio de Banach, $S \subset X$, $\delta > 0$, defina*

$$S_\delta = \{u \in X : dist(u, S) \leq \delta\}.$$

Además, sean $\phi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$ *y* $\epsilon > 0$ *tales que*

$$\|\phi'(u)\|_{X'} \geq \frac{8\epsilon}{\delta},\ \forall\, u \in \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}. \tag{1.10}$$

Entonces, existe una función $\eta \in \mathcal{C}([0,1]\times X, X)$*, de tal forma que:*

(i) $\eta(0,u) = u,\ \forall\, u \in X.$

(ii) $\eta(t,u) = u,\ \forall\, (t,u) \notin [0,1]\times\phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]).$

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon}\cap S) \subset \phi^{c-\epsilon}\cap S_\delta$*.*

Demostración. Defina los conjuntos

$$A = \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta},$$

$$B = \phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

y la función $\rho : X \to \mathbb{R}$, por

$$\rho(u) = \frac{d(u, X\backslash A)}{d(u,X\backslash A) + d(u,B)}.$$

Observe que

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad \rho \equiv 0 \ \text{ en } X\backslash A \quad \text{y} \quad \rho \equiv 1, \ \text{ em } B.$$

Verifiquemos que ρ es una función localmente Lipschitziana. Considere u_1 e $u_2 \in X$ y denotemos, para $i = 1,2$,

$$d^i_{u,X,A} = d(u_i, X\backslash A) \quad \text{y} \quad d^i_{u,B} = d(u_i, B).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|\rho(u_1)-\rho(u_2)| &= \Big|\frac{(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B})d^1_{u,X,A} - (d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B})d^2_{u,X,A}}{(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B})}\Big|,\\
&= \Big|\frac{d^1_{u,X,A}d^2_{u,B} - d^2_{u,X,A}d^1_{u,B}}{(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B})}\Big|,\\
&= \Big|\frac{d^1_{u,X,A}d^2_{u,B} - d^2_{u,X,A}d^2_{u,B} + d^2_{u,X,A}d^2_{u,B} - d^2_{u,X,A}d^1_{u,B}}{(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B})}\Big|,\\
&= \Big|\frac{d^2_{u,B}(d^1_{u,X,A} - d^2_{u,X,A}) + d^2_{u,X,A}(d^2_{u,B} - d^1_{u,B})}{(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B})}\Big|.
\end{aligned}$$

Dado que la función distancia es una contracción (ver [9, Exe 2, Pag 31]), tenemos

$$|d^1_{u,X,A} - d^2_{u,X,A}| \leq \|u_1 - u_2\| \quad \text{y} \quad |d^2_{u,B} - d^1_{u,B}| \leq \|u_1 - u_2\|.$$

Luego,

$$|\rho(u_1) - \rho(u_2)| \leq \frac{\|u_1 - u_2\| d^2_{u,B} + \|u_1 - u_2\| d^2_{u,X,A}}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})} = \frac{\|u_1 - u_2\|}{d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B}}.$$

Note que, para cada $u \in X$ se tiene que $d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B} > 0$, luego por continuidad existe, una constante $k > 0$ y una vecindad W_u de u, tal que

$$d^1_{w,X,A} + d^1_{w,B} \geq \frac{1}{k}, \quad \text{para todo} \quad w \in W_u.$$

Luego,

$$|\rho(u_1) - \rho(u_2)| \leq k\|u_1 - u_2\|, \quad \text{para todo} \quad u_1, u_2 \in W_{u_1}. \tag{1.11}$$

Por lo tanto, tenemos que ρ es una función localmente Lipschitziana.

Considere la siguiente función $f : X \to X$, definida por

$$F(u) = \begin{cases} -\phi(u)\dfrac{V(u)}{\|V(u)\|^2}, & u \in A, \\ 0, & u \in \overline{X \backslash A}, \end{cases}$$

donde V es un campo pseudo-gradiente de ϕ de las condiciones (1.2) y (1.10), tenemos

$$\|F(u)\| \leq \frac{1}{\|V(u)\|} \leq \frac{1}{\|\phi'(u)\|_{X'}} \leq \frac{\delta}{8\epsilon}. \tag{1.12}$$

Dado $u \in X$, considere la vecindad W_u, tal que ρ y V son localmentes Lipschitzianas en W_u. Tomando $u_1, u_2 \in W_u$ y sean

$$f(u_i) = \frac{V(u_i)}{\|V(u_i)\|^2} \quad \text{y} \quad f_i(u_j) = \frac{V(u_i)}{\|V(u_j)\|^2} \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2.$$

Entonces, si $u_1, u_2 \in \overline{X \backslash A}$, tenemos

$$\|F(u_1) - F(u_2)\| = 0 \leq \|u_1 - u_2\|.$$

Si $u_1 \in A$ y $u_2 \in \overline{X \backslash A}$, tenemos

$$\|F(u_1) - F(u_2)\| = \| - \rho(u_1) f(u_1)\| = \| - \rho(u_1) f(u_1) + \rho(u_2) f(u_1)\| = \frac{\|\rho(u_1) - \rho(u_2)\|}{\|V(u)\|}$$
$$\overset{(1,12)}{\leq} \frac{\delta}{4\epsilon}\|\rho(u_1) - \rho(u_2\| \overset{(1,11)}{\leq} \frac{k\delta}{4\epsilon}\|u_1 - u_2\| = k_1\|u_1 - u_2\|.$$

Finalmente, si $u_1, u_2 \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
\|F(u_1) - F(u_2)\| &= \| - \rho(u_1) f(u_1) + \rho(u_2) f(u_2)\| \\
&= \| - \rho(u_1) f(u_1) + \rho(u_1) f(u_2) - \rho(u_1) f(u_2) + \rho(u_2) f(u_2)\| \\
&\leq \|f(u_1) - f(u_2)\| + \frac{\delta}{4\epsilon}|\rho(u_1) - \phi(u_2)| \\
&\leq \|f(u_1) - f_1(u_2)\| + \|f_1(u_2) - f(u_2)\| + \frac{\delta}{4\epsilon}|\rho(u_1) - \phi(u_2)|
\end{aligned}$$

Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|f(u_1) - f_1(u_2)\| &\leq \|V(u_1)\Big|\frac{\|V(u_2)\|^2 - \|V(u_1)\|^2}{\|V(u_1)\|^2\|V(u_2)\|^2}\Big| \\
&= \frac{|\langle V(u_2) - V(u_1), V(u_2) - V(u_1)\rangle|}{\|V(u_1)\|\|V(u_2)\|^2} \\
&\leq \frac{\|V(u_1) + V(u_2)\|}{\|V(u_1)\|\|V(u_2)\|^2}\|V(u_1) - V(u_2)\| \\
&\leq k_2\|V(u_1) - V(u_2)\|,
\end{aligned}$$

dado que V es una función localmente lipschitziana.

Observe también que

$$\begin{aligned}
\|f_1(u_1) - f(u_2)\| &= \Big\|\frac{V(u_1)}{\|V(u_2)\|^2} - \frac{V(u_2)}{\|V(u_2)\|^2}\Big\| \\
&\leq \frac{\delta^2}{14\epsilon^2}\|V(u_1) - V(u_2)\| \leq k_3\|u_1 - u_2\|,
\end{aligned}$$

y como

$$\frac{\delta}{4\epsilon}|\rho(u_1) - \rho(u_2)| \leq k_1\|u_1 - u_2\|,$$

entonces

$$\|F(u_1) - F(u_2)\| \leq k_0\|u_1 - u_2\|.$$

donde $k_0 = k_1 + k_2 + k_3$. Por lo tanto, F es una función localmente lipschitziana.

Considere ahora, el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$(PVI) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) &=& F(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u) &=& u. \end{cases}$$

Dado que F es una función localmente lipschitziana y acotada, tenemos que para cada $u \in X$, el (PVI) posee una única solución continua $\sigma(\cdot, u)$ definida en $\mathbb{R}$ (ver [5]).

Por lo tanto, podemos definir la función $\eta : [0,1] \times X \to X$ como

$$\eta(t,u) = \sigma(8\epsilon t, u).$$

Entonces

(i) $\eta(0,u) = \sigma(0,u) = u$ para todo $u \in X$.

(ii) Note que $F \equiv 0$ en $\overline{X \backslash A}$ y por lo tanto dado $u \notin \phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) = X\backslash A$, tenemos que $\sigma(\cdot, u) = u$ es una solución del (PVI), luego por la unicidad de soluciones del (PVI), concluimos que $\eta(t,u) = u$, para todo $t \in [0,1]$.

(iii) Sea $t > 0$ y $u \in X$, luego por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos

$$\begin{aligned} \|\sigma(8\epsilon t, u) - u\| = \|\sigma(8\epsilon t, u) - \sigma(0,u)\| &= \Big\| \int_0^{8\epsilon t} \frac{d}{dt}\sigma(s,u)\, ds \Big\| \\ &\leq \int_0^{8\epsilon t} \Big\| \frac{d}{dt}\sigma(s,u) \Big\|\, ds = \int_0^{8\epsilon t} \|F\big(\sigma(s,u)\big)\|\, ds. \\ &= \int_0^{8\epsilon t} \frac{\rho\big(\sigma(s,u)\big)}{\|V\big(\sigma(s,u)\big)\|}\, ds \leq \int_0^{8\epsilon t} \frac{1}{\|V\big(\sigma(s,u)\big)\|}\, ds. \\ &\overset{(1,2)}{=} \int_0^{8\epsilon t} \frac{1}{\|\phi'\big(\sigma(s,u)\big)\|}\, ds \overset{(1,10)}{\leq} \int_0^{8\epsilon t} \frac{\delta}{8\epsilon}\, dt = \delta t. \end{aligned}$$

En particular, para todo $t \in [0,1]$, tenemos

$$\|\sigma(8\epsilon t, u) - u\| \leq \delta.$$

Luego,

$$d\big(\sigma(8\epsilon t, u), S\big) \leq \delta, \quad \forall\, u \in S, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

entonces

$$\eta(t,u) = \sigma(8\epsilon t, u) \in S_\delta, \quad \forall\, u \in S, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

es decir

$$\eta(t, S) \subset S_\delta, \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{1.13}$$

Por otro lado, note que si $\sigma(t,u) \notin A$, entonces $F(\sigma(t,u)) = 0$ y por consiguiente $\frac{d}{dt}\phi(\sigma(t,u)) = 0$. Caso contrario,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(\sigma(t,u)) &= \phi'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u) = \phi'(\sigma(t,u))F\big(\sigma(t,u)\big)\\
&= -\frac{\rho\big(\sigma(t,u)\big)}{\|V\big(\sigma(t,u)\big)\|^2}\phi'(\sigma(t,u))V\big(\sigma(t,u)\big)\\
&\overset{(1,1)}{\leq} -\frac{\rho\big(\sigma(t,u)\big)}{4} \leq -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

De donde concluimos que, para cada $u \in X$ fijado $\phi\big(\sigma(\cdot,u)\big)$ es una función no creciente en la variable t.

Dado $u \in \phi^{c+\epsilon}$. Vamos a considerar los siguientes casos:

(a) Si $\phi\big(\sigma(t^*,u)\big) < c-\epsilon$, para algún $t^* \in [0, 8\epsilon)$, dado que $\phi\big(\sigma(\cdot,u)\big)$ es no creciente, tenemos

$$\phi\big(\eta(1,u)\big) = \phi\big(\sigma(8\epsilon,u)\big) \leq \phi\big(\sigma(t^*,u)\big) < c-\epsilon,$$

por lo tanto, tenemos que $\eta(1,u) \in \phi^{c-\epsilon}$.

(b) Si $\phi\big(\sigma(t^*,u)\big) \geq c-\epsilon$, para todo $t \in [0, 8\epsilon]$.
Como $\phi\big(\sigma(\cdot,u)\big)$ es no creciente y $u \in \phi^{c+\epsilon}$, tenemos

$$\phi\big(\sigma(t,u)\big) \leq \phi\big(\sigma(0,u)\big) = \phi(u) < c+\epsilon.$$

Luego,

$$\sigma(t,u) \in \phi^{-1}\big([c-\epsilon, c+\epsilon]\big) = B, \quad \forall\, t \in [0, 8\epsilon].$$

$$\begin{aligned}
\phi\big(\sigma(8\epsilon,u)\big) &= \phi\big(\sigma(0,u)\big) + \int_0^{8\epsilon} \frac{d}{dt}\phi\big(\sigma(s,u)\big)\, ds\\
&= \phi(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\epsilon} ds = \phi(u) - 2\epsilon < c-\epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto de (a), (b) y de (1.13), se satisface la condición (iii).

■

1.3 El Teorema del Paso de Montaña

El Teorema del Paso de Montaña, debido a Ambrosetti-Rabinowitz [10] es una de las herramientas más importante, para la obtención de los puntos críticos para funciones de clase $\mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$. Como veremos en el siguiente capitulo es posible escoger ϕ de tal forma que sus puntos críticos sean soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales parciales.

Definición 1.4. *Diremos que $\phi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ satisface la condición de Palais-Smale en el nivél $c \in \mathbb{R}$ denotada por $(PS)_c$, se para toda sucesión en $(u_n) \subset X$ satisfaciendo*

$$\lim_{n\to\infty} \phi(u_n) = c \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \|\phi'(u_n)\| = 0, \tag{1.14}$$

posee una subsucesión convergente. La sucesión satisfaciendo (1.14) es llamada sucesión de Palais-Smale en el nivel c. Además diremos que ϕ satisface la condición (PS) si satisface la condición $(PS)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.5. *Sea $\phi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$, tal que $\phi(0) = 0$ y,*

(I) existen $\rho, \sigma > 0$ tales que $\phi(u) \geq \sigma$, para todo $\|u\| = \rho$,

(II) existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ y $\phi(e) < 0$.

Sea

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi\big(\gamma(t)\big)$$

donde

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1],X); \gamma(0) = 0 \quad y \quad \gamma(1) = e\}.$$

entonces , dado $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

(i) $u \in \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

(ii) $\|\phi'(u)\| \leq 2\epsilon$

Demostración. Note que $c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi\big(\gamma(t)\big)$esta bien definido, dado que $\phi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ y $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1],X)$, luego $\phi\circ\gamma$ es una función continua y por lo tanto existe su máximo en el compacto $[0,1]$.

Tomando $\gamma \in \Gamma$ y definiendo la función

$$\begin{aligned} g \quad : [0,1] \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ t \qquad &\mapsto \quad g(t) = \|\gamma(t)\|, \end{aligned}$$

tenemos que

$$g(0) = \|\gamma(0)\| = 0 < \rho \quad \text{y} \quad g(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > \rho,$$

luego por el Teorema del Valor Intermedio, existe $t_0 \in (0,1)$, tal que $g(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = \rho$, luego por la condición (I), tenemos que $\phi\big(\gamma(t_0)\big) \geq \sigma$.

Por lo tanto, $\max\limits_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)) \geq \sigma$, luego tomando ínfimo con γ variando en Γ , tenemos que

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi\big(\gamma(t)\big) \geq \sigma > 0.$$

Suponiendo por contradicción, que la proposición sea falsa. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|\phi'(u)\| > 2\epsilon, \quad \forall \quad u \in \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]).$$

Observe que la afirmación anterior aún es valida si substituimos el valor de ϵ por ϵ_0, tal que $0 < \epsilon_0 < \epsilon$, por lo tanto, como $c > 0$, podemos suponer $\epsilon > 0$ pequeño, de modo que $c - 2\epsilon > 0$.

Luego, tomando $X = S$ y $\delta = 4$ en el Lema 1.3, tenemos que existe una función continua $\eta : [0,1] \times X \to X$, satisfaciendo

(i) $\eta(0,u) = u, \ \forall\, u \in X$.

(ii) $\eta(t,u) = u, \ \forall\, u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$.

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$.

Por la definición de c, existe $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} \phi\big(\tilde{\gamma}(t)\big) \leq c + \epsilon. \tag{1.15}$$

Definiendo la función

$$\begin{array}{rcl} h \ : [0,1] & \to & X \\ h & \mapsto & h(t) = \eta\big(1, \tilde{\gamma}(t)\big). \end{array}$$

Observe que, $h \in \mathcal{C}([0,1], X)$ y como $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, tenemos que $\tilde{\gamma}(0) = 0, \tilde{\gamma}(1) = e$, ademas como $\phi(0) = 0$ y $\phi(e) < 0$, entonces $0, e \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$, luego por (i)

$$h(0) = \eta\big(1, \tilde{\gamma}(0)\big) = \eta(1,0) = 0 \quad \text{y} \quad h(1) = \eta\big(1, \tilde{\gamma}(e)\big) = \eta(1,e) = e,$$

por lo tanto, $h \in \Gamma$.

Por otro lado, (1.15) implica que $\tilde{\gamma}(t) \in \phi^{c+\epsilon}$, $\forall\, t \in [0,1]$ y usando (ii), tenemos que

$$\tilde{\gamma}(t) = \eta\big(1, \tilde{\gamma}(t)\big) \in \phi^{c-\epsilon}, \quad \forall \quad t \in [0,1],$$

es decir $\phi\big(h(t)\big) \leq c + \epsilon$, $\forall\, t \in [0,1]$, luego

$$\max_{t\in[0,1]} \phi\big(h(t)\big) \leq c - \epsilon,$$

y dado que $h \in \Gamma$, tenemos

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi\big(\gamma(t)\big) \leq \max_{t\in[0,1]} \phi\big(h(t)\big) \leq c - \epsilon,$$

obteniendo una contradicción, por tanto la proposición queda demostrada. ∎

Corolario 1.6. *Con las hipótesis de la Proposición 1.5, existe una sucesión de Palais-Smale en el nivel c para el funcional ϕ.*

Demostración. Usando la Proposición 1.5, para cada $\epsilon_n = \dfrac{1}{2n}$, existe $u_n \in X$, tal que

(i) $u_n \in \phi^{-1}([c - 1/n, c + 1/n])$;

(ii) $\|\phi'(u_n)\|_{X'} \leq 1/n$.

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \phi(u_n) = c \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \|\phi'(u_n)\| = 0,$$

y por lo tanto existe una sucesión de Palais-Smale. ∎

Teorema 1.7. ***(Teorema del Paso de Montaña)*** *Sean X un espacio de Banach y $\phi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, tal que $\phi(0) = 0$ y,*

(I) existen $\rho, \sigma > 0$ tales que $\phi(u) \geq \sigma$, para todo $\|u\| = \rho$,

(II) existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e $\phi(e) < 0$.

Suponiendo que ϕ satisfaga $(PS)_c$, con

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi\big(\gamma(t)\big)$$

donde

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X); \gamma(0) = 0 \quad y \quad \gamma(1) = e\}.$$

entonces, $u \not\equiv 0$, tal que $\phi(u) = c$ y $\phi'(u) = 0$.

Demostración. Por el Corolario 1.6, existe una sucesión de Palais-Smale $(u_n) \subset X$, en el nivel c, como ϕ satisface $(PS)_c$ a menos de una subsucesión, podemos suponer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in X$, siendo $\phi \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ tenemos que $\phi(u) = c$ y $\phi'(u) = 0$, además como $\phi(u) = c \neq 0$ concluimos que $u \not\equiv 0$.

■

1.4 Teorema del Paso de Montaña para funcionales fuertemente indefinidos

A continuación enunciaremos el Teorema del Paso de Montaña para funcionales indefinidos el cual fue probado por Benci y Rabinowitz [3], en el año de 1979, el cual es una generalización del Teorema de Paso da Montaña.

Sea E un espacio de Hilbert, dada una función

$$h : [0,1] \times E \to E,$$

denotaremos por $h_t(u) = h(t,u)$, además si $E = E^1 \oplus E^2$, entonces existen proyecciones

$$\pi_i : E \to E^i,$$

tal que si $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in E^1$ y $u_2 \in E^2$, entonces $\pi_i u = u_i$ para $i = 1, 2$.

Definición 1.8. *Sea Σ el conjunto de las funciones $\phi \in \mathcal{C}\big([0,1] \times E, E\big)$, tal que*

(a) *Para todo $(t,u) \in [0,1] \times E$, se cumple*

$$\pi_2 \phi_t(u) = u_2 - W_t(u),$$

donde W_t es un operador compacto para todo $t \in [0,1]$.

(b) $\phi_0(u) = u$ *para todo* $u \in E$

Sean S y Q subespacios de E, Q con frontera ∂Q. Decimos que S y ∂Q hacen link, sí dada una función $\phi \in \Sigma$ tal que

$$\phi_t(\partial Q) \cap S = \varnothing, \quad \forall \quad t \in [0,1],$$

entonces

$$\phi_t(Q) \cap S = \varnothing, \quad \forall \quad t \in [0,1].$$

Teorema 1.9. *Sea H un espacio de Hilbert real con $H = H_1 \oplus H_2$, suponga que $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$, satisface la condición de Palais-Smale y*

(I_1) $\mathcal{L}(u) = \dfrac{1}{2}\langle Lu, u\rangle_H + \mathcal{H}(u)$, *donde $L : H \to H$ es un operador acotado, autoadjunto y ademas $L(H_1) \subset H_1$ y $L(H_2) \subset H_2$.*

(I_2) $\mathcal{H}'$ *es un operador compacto.*

(I_3) *Existe un subespacio $\widetilde{H} \subset H$ y conjuntos $S \subset H$, $Q \in \widetilde{H}$ y constantes $\sigma > \omega$ tales que*

- *(i)* $S \subset H_1$ *y* $\mathcal{L}(u) \geq \sigma$ *para todo* $u \in S$.
- *(ii)* Q *es limitado y* $\mathcal{L}(u) \leq \omega$ *para todo* u *en la frontera* ∂Q *de* Q *en* $\widetilde{H}$.
- *(iii)* S *y* ∂Q *hacen Link.*

Entonces $\mathcal{L}$, posee un punto critico $c \geq \sigma$.

Demostración. Ver [3]. ■

Una de las aplicaciones más importantes del Teorema 1.9 están en los Sistemas de ecuaciones de tipo Hamiltoniano, como veremos en el Capitulo 8.

Capítulo 2

Ecuaciones Elípticas no Lineales con Crecimiento Subcrítico.

2.1 Introducción

En este capitulo estudiaremos el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ es un dominio limitado con frontera suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua satisfaciendo ciertas condiciones a ser establecidas.

Buscaremos soluciones definidas en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, el cual es un Espacio de Hilbert con norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2 \right) dx \Big)^{1/2} = \Big(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \Big)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Para nuestro estudio, consideraremos la siguiente norma

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \Big)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Un resultado importante es dado por la siguiente afirmación

Afirmación 2.1. *Las normas dadas en (2.2) y (2.3) son equivalentes.*

Demostración. Por la desigualdad de Poincaré, $\big($Proposición A.16$\big)$, existe $C > 0$ tal

que
$$\int_\Omega u^2\,dx \leq C\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx,$$
entonces
$$\Big(\int_\Omega \big(|\nabla u|^2+u^2\big)\,dx\Big)^{1/2} \leq \Big((C+1)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}$$
entonces existe $K>0$ tal que
$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K\|u\|,$$
por otro lado,
$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_\Omega \big(|\nabla u|^2+u^2\big)\,dx\Big)^{1/2},$$
de donde
$$\|u\| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$
probando así la afirmación. ■

En lo que sigue usaremos la norma dada en (2.3) a menos que se diga lo contrario.

Una solución clásica de (2.1) es una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaciendo (2.1). Multiplicando la ecuación (2.1) por $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$
$$-\int_\Omega \Delta u\,\phi\,dx = \int_\Omega f(x,u)\phi\,dx. \tag{2.4}$$
Por otro lado, usando la Primera Identidad de Green $\big($Proposición A.2 $\big)$ y la condición $u\equiv 0$ en $\partial\Omega$ tenemos
$$-\int_\Omega \Delta u\,\phi\,dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla\phi\,dx - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\,ds = \int_\Omega \nabla u.\nabla\phi\,dx.$$
Reemplazando en (2.4), obtenemos
$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\phi\,dx = \int_\Omega f(x,u)\phi\,dx. \tag{2.5}$$
Dado que la igualdad dado en (2.5) es valido para cada $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, usando la densidad de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, tenemos
$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx = \int_\Omega f(x,u)v\,dx, \ \text{ para todo } \ v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$
La expresión (2.6) motiva a definir:

Definición 2.2. *Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ es llamada **Solución Débil** de la ecuación (2.1) si u satisface la relación (2.6).*

Asociamos a la ecuación (2.1) el siguiente funcional

$$\begin{array}{rcl} J \ : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx, \end{array} \tag{2.7}$$

donde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)\, ds$.
Supongamos que bajo ciertas condiciones de F que $J \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\big)$, por lo tanto, J' quedaría definida por :

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx - \int_\Omega f(x,u)v\, dx, \ \text{ para todo } \ u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.8}$$

Sea u un punto crítico de J, entonces

$$J'(u)v = 0, \quad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx = \int_\Omega f(x,u)v\, dx, \quad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

De donde observamos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de (2.1) si, y solo si u es punto crítico de J.

2.2 Ecuaciones Superlineales

Consideremos el siguiente problema

$$(\mathcal{P}_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(x,u), & \text{en} \quad \Omega, \\ u & = & 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ es un dominio limitado con frontera suave y supongamos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una función continua satisfaciendo las siguientes condiciones:

(h_1) existen $a, b > 0$ y $1 < p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$, tales que

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^p, \quad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

(h_2) $f(x,t) = o(|t|)$ en 0, uniformemente en x.

(h_3) **(Condición de Ambrosseti-Rabinowitz)** existen $\mu > 2$ y $r \geq 0$, tales que

$$0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},\ \forall\, |t| \geq r,$$

donde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)\, ds$.

Lema 2.3. *Suponiendo a condición (h_1), entonces el funcional J dado en (2.7) esta bien definido.*

Demostración. Escribiremos $J = J_1 - J_2$, donde

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \quad \text{y} \quad J_2 = \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

por lo tanto, mostraremos que J_1 y J_2, están bien definidas

(a) Por definición de $H_0^1(\Omega)$, tenemos $J_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx < +\infty$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

(b) Usando (h_1), obtenemos siguiente desigualdad

$$|F(x,t)| \leq \int_0^{|t|} |f(x,s)|\, ds \leq \int_0^{|t|} \big(a + b|s|^p\big)\, ds \leq a|t| + b\frac{|t|^{p+1}}{p+1}, \tag{2.9}$$

luego, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$|J_2(u)| \leq \int_\Omega |F(x,u)|\, ds \leq a\int_\Omega |u|\, ds + b\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx < +\infty,$$

debido a las inmersiones $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, donde usamos el hecho que $p + 1 < \frac{2N}{N-2}$.

■

Lema 2.4. *Suponiendo a condición (h_1), tenemos $J \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\big)$ y además*

$$J'(u).v = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx - \int_\Omega f(x,u)v\, dx, \;\; \textit{para todo}\;\; u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración. Escribiendo $J = J_1 - J_2$ como en el Lema 2.3

(a) Observe que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx.$$

Por lo tanto, $J_1(u) = \dfrac{1}{2}\langle u, u\rangle$, luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1}{\partial v}(u) &= \lim_{h\to 0}\frac{J_1(u+hv) - J_1(u)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\langle u+hv, u+hv\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\langle u, v\rangle - \frac{h}{2}\langle v, v\rangle = \langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{\|v\|\to 0}\frac{J_1(u+v) - J(u) - \langle u, v\rangle}{\|v\|} &= \lim_{\|v\|\to 0}\frac{\frac{1}{2}\langle u+v, u+v\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle}{\|v\|}\\ &= \lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|v\|}{2} = 0.\end{aligned}$$

Probando así, que J_1 es diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ y

$$J_1'(u).v = \langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx.$$

Ahora veamos que J' es continua, sean u_1, u_2 y $v \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$|\big(J_1'(u_1) - J_1'(u)\big).v| = |\langle u_1, v\rangle - \langle u_2, v\rangle| = |\langle u_1 - u_2, v\rangle| \leq \|u_1 - u_2\|\|v\|,$$

luego,

$$\|J_1'(u_1) - J_1'(u_2)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|\leq 1}|\big(J_1'(u_1) - J_1'(u)\big).v| \leq \|u_1 - u_2\|,$$

es decir J' es una aplicación lipschitziana y por consiguiente, $J_1 \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\big)$.

(b) Probemos primero que J_2 es diferenciable. Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ fijado y para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, considere

$$r(v) = J_2(u+v) - J_2(u) - \int_\Omega f(x, u)v\, dx. \tag{2.10}$$

Por lo tanto, queremos probar que

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0.$$

Es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| \leq \delta \Rightarrow |r(v)| \leq \epsilon \|v\| \tag{2.11}$$

De (2.10), podemos escribir

$$r(v) = \int_\Omega \big(F(x, u+v) - F(x,u)\big)\, dx - \int_\Omega f(x,u)v\, dx.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, para la función $h(t) = F(x, u+tv)$, tenemos

$$F(x,u+v) - F(x,u) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, u+tv)\, dt,$$

y dado que

$$\frac{d}{dt} F(x, u+tv) = f(x, u+tv)v,$$

entonces,

$$F(x,u+v) - F(x,u) = \int_0^1 f(x, u+tv)v\, dt,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
r(v) &= \int_\Omega \int_0^1 f(x,u+tv)v\, dt\, dx - \int_\Omega f(x,u)v\, dx \\
&= \int_\Omega \big(\int_0^1 f(x,u+tv)v\, dt - f(x,u)v \big)\, dx \\
&= \int_\Omega \big(\int_0^1 f(x,u+tv)v\, dt - \int_0^1 f(x,u)v\, dt \big)\, dx \\
&= \int_\Omega \int_0^1 \big(f(x,u+tv)v - f(x,u)v \big)\, dt\, dx
\end{aligned}$$

Usando el Teorema de Fubinni, tenemos

$$r(v) = \int_0^1 \int_\Omega \big(f(x,u+tv)v - f(x,u) \big) v\, dx\, dt. \tag{2.12}$$

Afirmacion 1: Se cumple que

$$f \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

En efecto, note que existen $c, d > 0$ tal que

$$(a + b|t|^p)^{\frac{p+1}{p}} \leq c + d|t|^{p+1}, \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Luego, usando la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$

$$\int_\Omega |f(x,u)|^{\frac{p+1}{p}}\, dx \leq \int_\Omega \left(a + b|u|^p\right)^{\frac{p+1}{p}} dx \leq \int_\Omega \left(c + d|u|^{p+1}\right) dx < \infty.$$

Afirmacion 2: Se cumple

$$f(\cdot, u + tv) \to f(\cdot, u), \quad \text{en} \quad L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega),$$

uniformemente para $t \in [0,1]$, para todo $x \in \Omega$, cuando $v \to 0$.

En efecto, sea $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, con $v_n \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$, luego por la inmersión de Sobolev, tenemos que $v_n \to 0$ en $L^{p+1}(\Omega)$, Luego por el Teorema A.6, a menos de una subsucesión existe $g \in L^{p+1}(\Omega)$, tal que

$$v_n(x) \to 0, \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega. \tag{2.14}$$

y

$$|v_n(x)| \leq g(x), \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega, \ \forall\, n \geq 1. \tag{2.15}$$

De (2.15)

$$|(u + tv_n)(x)| \leq \big(|u| + g\big)(x), \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Dado que f es continua, tenemos

$$\Big|f(x, u + tv_n(x)) - f(x, u(x))\Big|^{\frac{p+1}{p}} \to 0, \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega, \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{2.16}$$

Ademas, usando la condición (h_2), (2.15) y (2.13) tenemos para c.t.p en Ω y para todo $t \in [0,1]$ que

$$\begin{aligned} |f(x, u + tv_n) - f(x,u)|^{\frac{p+1}{p}} &\leq c_0\Big[|f(x, u + tv_n)|^{\frac{p+1}{p}} + |f(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}}\Big] \\ &\leq c_0\Big[\big(a + b(|u| + g)^p\big)^{\frac{p+1}{p}} + \big(a + b|u|^p\big)^{\frac{p+1}{p}}\Big] \\ &\leq 2cc_0 + c_0 d(|u| + g)^{p+1} + c_0 d|u|^{p+1} \\ &= c_1 + d_1(|u| + g)^{p+1} + d_1|u|^{p+1}. \end{aligned}$$

Ademas

$$\int_\Omega \big(c1 + d_1(|u|+g)^{p+1} + d_1|u|^{p+1}\big)\,dx = c_1|\Omega| + d_1\|\big(|u|+g\big)\|_{p+1}^{p+1} + d_1\|u\|_{p+1}^{p+1} < \infty.$$

Así existe $G = c_1 + d_1(|u|+q)^{p+1} + d_1|u|^{p+1} \in L^1(\Omega)$, tal que

$$|f(x,u+tv_n) - f(x,u)|^{\frac{p+1}{p}} \leq G, \quad \text{c.t.p. en } \Omega,\ \forall\, t \in [0,1]. \tag{2.17}$$

Luego de (2.16), (2.17) y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos para todo $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x,u+tv_n(x)) - f(x,u)|^{\frac{p+1}{p}}\,dx = 0,$$

luego la Afirmación 2 es probada, es decir

$$\big\|f\big(\cdot,u+tv\big) - f\big(\cdot,u\big)\big\|_{\frac{p+1}{p}} \to 0,\ \text{uniformemente en } t \in [0,1],\ \text{cuando } v \to 0.$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| \leq \delta \Rightarrow \big\|f\big(\cdot,u+tv\big) - f\big(\cdot,u\big)\big\|_{\frac{p+1}{p}} \leq \epsilon, \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{2.18}$$

Luego, usando a desigualdad de Hölder y $(2{,}18)$ en (2.12), tenemos

$$\begin{aligned}
|r(v)| &\leq \int_0^1 \int_\Omega |(f(x,u+tv)v - f(x,u)v|\,dx\,dt \\
&\leq \int_0^1 \|f(x,u+tv) - f(x,u)\|_{\frac{p+1}{p}} \|v\|_{p+1}\,dt \\
&\leq \int_0^1 \epsilon\|v\|_{p+1}\,dt \\
&\leq \epsilon\|v\|_{p+1}
\end{aligned}$$

ademas de la inmersión de $H_0^1(\Omega)$ en $L^{p+1}(\Omega)$, existe $k > 0$, tal que

$$\|v\|_{p+1} \leq k\|v\|.$$

Entonces,

$$\|v\| \leq \delta \Rightarrow |r(v)| \leq \epsilon k\|v\|.$$

es decir J_2 es diferenciable y

$$J_2'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\,dx, \quad \forall \quad u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Probemos ahora la continuidad de J_2', sea $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$, luego como visto en la parte anterior, tenemos

$$\|f(x,u+tv_n) - f(x,u)\|_{\frac{p+1}{p}} \to 0, \quad \text{uniformemente en} \quad t \in [0,1]. \tag{2.19}$$

Por otro lado, por definición

$$\|J_2'(u+v_n) - J_2'(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|\le 1} \left|\big(J_2'(u+v_n) - J_2'(u)\big).v\right|. \tag{2.20}$$

Luego usando (2.19) y (2.20), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|J_2'(u+v_n) - J_2'(u)\|_{H^{-1}} &\le \sup_{\|v\|\le 1} \int_0^1 \left|f(x,u+tv_n) - f(x,u)v\right| dt \\
&\le \sup_{\|v\|\le 1} \|f(x,u+tv_n) - f(x,u)\|_{\frac{p+1}{p}} \|v\|_{p+1} \\
&\le \sup_{\|v\|\le 1} k\|f(x,u+tv_n) - f(x,u)\|_{\frac{p+1}{p}} \|v\| \\
&\le k\|f(x,u+tv_n) - f(x,u)\|_{\frac{p+1}{p}} \to 0.
\end{aligned}$$

De donde concluimos que $J_2 \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\big)$.

■

Lema 2.5. *Suponiendo la condición (h_3), entonces existen constantes positivas c y d, tales que*

$$F(x,t) \ge c|t|^\mu - d, \quad \textit{para todo} \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \overline{\Omega}.$$

Demostración. Consideremos los siguientes casos:
Caso 1: Para $t \ge r$ y $x \in \overline{\Omega}$.
De la condición (h_3) para $s > 0$ tenemos $0 < \dfrac{\mu}{s} \le \dfrac{f(x,s)}{F(x,s)}$, luego, integrando con respecto a la variable s desde r hasta t, obtenemos

$$\int_r^t \frac{\mu}{s}\,ds \le \int_r^t \frac{f(x,s)}{F(x,s)}\,ds,$$

de donde

$$\mu \ln t - \mu \ln r \leq \ln F(x,t) - \ln F(x,r), \quad \forall\, t \geq r,\ \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

luego

$$\ln \left(\frac{t}{r}\right)^{\mu} \leq \ln \frac{F(x,t)}{F(x,r)}, \quad \forall\, t \geq r, \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

además como $\ln$ es una función creciente, obtenemos

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,r)}{r^{\mu}} |t|^{\mu}, \quad \forall t \geq r, \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando $m_1 = \min\limits_{x \in \overline{\Omega}} F(x,r)$, note que m_1 esta bien definido, dado que $F(\cdot, r)$ es continua y $\overline{\Omega}$ es compacto, denotando por $c_1 = \dfrac{m_1}{r^{\mu}} > 0$, tenemos

$$F(x,t) \geq c_1 |t|^{\mu}, \quad \forall t \geq r, \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

Caso 2: Para $t \leq -r$ y $x \in \overline{\Omega}$.
De la condición (h_3) para $s < 0$ tenemos $\dfrac{\mu}{t} \geq \dfrac{f(x,t)}{F(x,t)}$, luego, integrando con respecto a la variable s desde t hasta $-r$, obtenemos

$$\int_t^{-r} \frac{\mu}{s}\, ds \leq \int_t^{-r} \frac{f(x,s)}{F(x,s)}\, ds,$$

de donde

$$\ln F(x,-r) - \mu \ln F(x,t) \leq \mu \ln |-r| - \mu \ln |t|, \quad \forall\, t \leq -r,\ \forall x \in \overline{\Omega}$$

luego

$$\ln \left|\frac{-r}{t}\right|^{\mu} \geq \ln \frac{F(x,-r)}{F(x,t)}, \quad \forall\, t \leq -r, \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

además como $\ln$ es una función creciente, obtenemos

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,-r)}{r^{\mu}} |t|^{\mu}, \quad \forall\, t \leq -r, \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando $m_2 = \min\limits_{x \in \overline{\Omega}} F(x,-r)$, análogamente m_2 esta bien definido, dado que $F(\cdot,-r)$ es continua y $\overline{\Omega}$ es compacto, denotando por $c_2 = \dfrac{m_2}{r^{\mu}} > 0$, tenemos

$$F(x,t) \geq c_2 |t|^{\mu}, \quad \forall\, t \leq -r, \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Luego, de los dos casos tomando $c = \text{mín}\{c_1, c_2\}$, tenemos que

$$F(x,t) \geq c|t|^{\mu}, \quad \forall\, |t| \geq r, \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{2.21}$$

Sea $m_3 = \displaystyle\min_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times[-r,r]} F(x,t)$, el cual existe pues f es continua y $\overline{\Omega} \times [-r,r]$ compacto, luego

$$F(x,t) \geq m_3, \quad \forall\, t \in [-r,r], \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

tomando $d > 0$ tal que $d \geq cr^{\mu} - m_3$, entonces $m_3 \geq c|t|^{\mu} - d$, para todo $t \in [-r,r]$, por consiguiente

$$F(x,t) \geq c|t|^{\mu} - d,\ \forall\, |t| \leq r,\ \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{2.22}$$

Por último usando (2.21) y (2.22), obtenemos la prueba del Lema. ■

2.3 Existencia de Solución para un Problema Superlinear

Teorema 2.6. *Sea $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, satisfaciendo las condiciones $(h_1) - (h_3)$, entonces el problema $(\mathcal{P}_1)$ posee una solución débil no trivial.*

Demostración. Vamos a mostrar que el funcional J, verifica las hipótesis del Teorema del Paso de Montaña.

Note que $X = H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Banach, por el Lema 2.1 tenemos que $J \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\big)$, ademas de la definición de J, tenemos que $J(0) = 0$.

Verificación de la condición (I)

De la condición (h_2), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$|f(x,t)| \leq \epsilon|t|, \quad \text{se } |t| \leq \delta.$$

Luego,

$$|F(x,t)| \leq \int_0^{|t|} |f(x,s)|\, ds \leq \int_0^{|t|} \epsilon|s|\, ds = \frac{1}{2}\epsilon|t|^2, \quad \text{para } |t| \leq \delta. \tag{2.23}$$

De (h_1), tenemos que

$$|F(x,t)| \leq \int_0^{|t|} |f(x,s)|\, ds \leq \int_0^{|t|} \big(a + b|s|^p\big)\, ds \leq a|t| + b\frac{|t|^{p+1}}{p+1},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto, para $|t| > \delta$, tenemos $1 \leq \dfrac{|t|^p}{\delta^p}$, entonces

$$|F(x,t)| \leq a|t| + \frac{b}{p+1}|t|^{p+1} \leq \left(\frac{a}{\delta^p} + \frac{b}{p+1}\right)|t|^{p+1} = A|t|^{p+1}, \quad \text{para } |t| > \delta, \tag{2.24}$$

con $A = \left(\dfrac{a}{\delta^p} + \dfrac{b}{p+1}\right)$.
Por lo tanto, de (2.23) y (2.24), obtenemos

$$|F(x,t)| \leq \frac{1}{2}\epsilon|t|^2 + A|t|^{p+1}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{2.25}$$

Como

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)\, dx.$$

De (2.25), obtenemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2\, dx - A\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\|u\|_2^2 - A\|u\|_{p+1}^{p+1}.$$

Por las inmersiones de Sobolev existen constantes positivas c_1 y c_2, tales que

$$\|u\|_2 \leq c_1\|u\| \quad \text{y} \quad \|u\|_{p+1} \leq c_2\|u\|, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Luego, denotando por $K = c_1^2$ y $M = Ac_2^{p+1}$, entonces

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - K\epsilon\|u\|^2 - M\|u\|^{p+1}, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega),$$

es decir

$$J(u) \geq \|u\|^2\Big(\frac{1-2K\epsilon}{2} - M\|u\|^{p-1}\Big), \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega),$$

para $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u\| = \rho$, tenemos

$$J(u) \geq \rho^2\Big(\frac{1-2K\epsilon}{2} - M\rho^{p-1}\Big).$$

Luego, tomando ϵ suficientemente pequeño e escogiendo $\rho > 0$, tal que

$$\Big(\frac{1-2K\epsilon}{2} - M\rho^{p-1}\Big) \geq \frac{1}{4},$$

luego, basta considerar $\rho = \frac{1}{2}\big(\frac{1-4K\epsilon}{4M}\big)^{\frac{1}{p-1}}$ y $\sigma = \frac{\rho^2}{4}$, para obtener

$$J(u) \geq \sigma, \quad \forall \quad \|u\| = \rho.$$

Verificación de la condición (II)
Fijando $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, entonces para cada $t \geq 0$, tenemos

$$J(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,tu)\,dx.$$

Usando el Lema 2.5, obtenemos

$$J(tu) \leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \big(c|tu|^\mu - d\big)\,dx = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - ct^\mu\|u\|_\mu^\mu + d|\Omega|, \tag{2.26}$$

En (2.26), como $\mu > 2$, tenemos que $\lim\limits_{t\to+\infty} J(tu) = -\infty$, entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|t_0 u\| > \rho \quad \text{y} \quad J(t_0 u) < 0,$$

en consecuencia basta tomar $e = t_0 u$.
Verificación de la condición (PS)
Sea $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ una sucesión de Palais-Smale, es decir

$$|J(u_n)| \leq c, \quad \text{y} \quad \|J'(u_n)\| \to 0.$$

Mostraremos primero que (u_n) es una sucesión limitada.
Como $\|J'(u_n)\| \to 0$, entonces $\|J'(u_n)\| \leq 1$ para n suficientemente grande, luego

$$|J'(u_n).u_n| \leq \|J'(u_n)\|\|u_n\| \leq \|u_n\|,$$

para n, suficientemente grande, además

$$|J(u_n) - \frac{1}{\mu}J'(u_n).u_n| \leq |J(u_n)| + \frac{1}{\mu}|J'(u_n).u_n| \leq c + \frac{1}{\mu}\|u_n\|.$$

Por definición

$$J(u_n) - \frac{1}{\mu}J'(u_n).u_n = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\big)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \big(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\big)\,dx.$$

Entonces, para n suficientemente grande, tenemos

$$\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\Big)\|u_n\|^2+\int_\Omega \Big(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\Big)\,dx\leq c+\frac{1}{\mu}\|u_n\| \tag{2.27}$$

Defina $\Omega_n=\{x\in\Omega; |u_n(x)|\geq r\}$, luego usando la condición (h_3) tenemos

$$\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\geq 0,\quad \forall\, x\in\Omega_n,$$

lo cual implica

$$\int_{\Omega_n}\Big(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\Big)\,dx\geq 0. \tag{2.28}$$

Siendo f y F son continuas, entonces $g(x,t)=\dfrac{1}{\mu}f(x,t)t-F(x,t)$ es también una función continua, ademas como $\overline{\Omega}\times[-r,r]$ es un conjunto compacto, entonces existe $c_1>0$ tal que

$$|g(x,t)|\leq c_1,\qquad \text{para todo}\quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times[-r,r],$$

en particular, si $x\in\Omega_n^c$ entonces $\big(x,u_n(x)\big)\in\overline{\Omega}\times[-r,r]$, luego

$$|g(x,u_n)|\leq c_1,\quad \forall\, x\in\Omega_n^c.$$

es decir

$$-c_1\leq\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\leq c_1\quad \forall\, x\in\Omega_n^c.$$

Así

$$\int_{\Omega_n^c}\Big(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\Big)\,dx\geq-\int_{\Omega_n^c}c_1\geq-\int_\Omega c_1=-c_1|\Omega|. \tag{2.29}$$

Luego, de (2.28) y (2.29)

$$\int_\Omega\Big(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\Big)\,dx\geq -c_2,$$

donde $c_2=c_1|\Omega|$ es una constante positiva, por lo tanto, reemplazando en (2.27)

$$\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\Big)\|u_n\|^2-c_2\leq c+\frac{1}{\mu}\|u_n\|,$$

Sean $c_3=c+c_1>0$ y $c_4=\dfrac{1}{\mu}$, luego

$$\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\Big)\|u_n\|^2\leq c_3+c_4\|u_n\|. \tag{2.30}$$

Suponga que (u_n) no sea una sucesión limitada en $H_0^1(\Omega)$, entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_{n_k}\| = \infty$, sin embargo usando (2.30), tenemos

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}) \leq \frac{c_3}{\|u_{n_k}\|^2} + \frac{c_4}{\|u_{n_k}\|} \to 0,$$

lo cual contradice que $\mu > 2$, por lo tanto, (u_n) es una sucesión limitada en $H_0^1(\Omega)$. Siendo $H_0^1(\Omega)$ un espacio reflexivo y (u_n) una sucesión limitada , existe una subsucesión la cual continuaremos denotando como (u_n), tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{en } \ H_0^1(\Omega),$$

luego por la inmersión compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, tenemos

$$\|u_n - u\|_{p+1} \to 0. \tag{2.31}$$

Ademas por el Teorema A.6, a menos de una subsucesión

$$u_n(x) \to u(x), \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega. \tag{2.32}$$

y

$$|u_n(x)| \leq g(x), \ \text{c.t.p. } x \in \Omega, \ \forall\, n \geq 1, \ \text{donde } g \in L^{p+1}(\Omega). \tag{2.33}$$

De (2.32) y dado que f es una función continua usando, tenemos

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}} \to 0, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega. \tag{2.34}$$

Ademas, usando la condición (h_2) y (2.33), tenemos

$$\begin{aligned} |f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}} &\leq k_0\Big[|f(x, u_n(x))|^{\frac{p+1}{p}} + |f(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}}\Big] \\ &\leq k_0\Big[\big(a + b|u_n(x)|^p\big)^{\frac{p+1}{p}} + \big(a + b|u(x)|^p\big)^{\frac{p+1}{p}}\Big] \\ &\leq k_1 + k_2|g(x)|^{p+1} + k_2|u(x)|^{p+1}, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Así existe $G = k_1 + k_2|g|^{p+1} + k_2|u|^{p+1} \in L^1(\Omega)$, tal que

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{p+1}{p}} \leq G(x), \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega. \tag{2.35}$$

Luego de (2.34), (2.35) y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|^{\frac{p+1}{p}}\,dx=0,$$

es decir

$$\left\|f\big(\cdot,u_n(\cdot)\big)-f\big(\cdot,u(\cdot)\big)\right\|_{\frac{p+1}{p}}\to 0.$$

Luego, usando a desigualdad de Hölder y $(2{,}31)$, tenemos

$$|\int_{\Omega}\big(f(x,u_n)-f(x,u)\big)(u_n-u)\,dx|\leq\left\|f\big(\cdot,u_n(\cdot)\big)-f\big(\cdot,u(\cdot)\big)\right\|_{\frac{p+1}{p}}\|u_n-u\|_{p+1}\to 0. \quad (2.36)$$

De igual forma como $f\in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, tenemos

$$|\int_{\Omega}f(x,u)(u_n-u)\,dx|\leq\left\|f\big(\cdot,u(\cdot)\big)\right\|_{\frac{p+1}{p}}\|u_n-u\|_{p+1}\to 0. \quad (2.37)$$

Note que, como $\|J'(u_n)\|\to 0$ y $\{(u_n-u)\}$ es una sucesión limitada, entonces

$$|J'(u_n)(u_n-u)|\leq\|J'(u_n)\|\|u_n-u\|\to 0, \quad (2.38)$$

También, como $u_n\rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\langle u,u_n-u\rangle=\langle u,u_n\rangle-\langle u,u\rangle\to\langle u,u\rangle-\langle u,u\rangle=0. \quad (2.39)$$

Como

$$J'(u_n)(u_n-u)=\langle u_n,u_n-u\rangle-\int_{\Omega}f(x,u_n)(u_n-u)\,dx,$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|^2&=\langle u_n-u,u_n-u\rangle=\langle u_n,u_n-u\rangle-\langle u,u_n-u\rangle\\&=J'(u_n)(u_n-u)+\int_{\Omega}f(x,u_n)(u_n-u)\,dx-\langle u,u_n-u\rangle,\\&=J'(u_n)(u_n-u)+\int_{\Omega}\big(f(x,u_n)-f(x,u)\big)(u_n-u)\,dx\\&\quad-\int_{\Omega}f(x,u)(u_n-u)\,dx-\langle u,u_n-u\rangle.\end{aligned}$$

Usando (2.36), (2.37), (2.38) y (2.39) obtenemos

$$\|u_n-u\|^2\to 0,$$

es decir

$$u_n \to u, \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega).$$

Probando así la existencia de una subsucesión convergente en $H_0^1(\Omega)$, es decir se satisface la condición (PS).
Finalmente, utilizando el Teorema del Paso del montaña, tenemos la existencia de un punto crítico no trivial, y por lo tanto, existe una solución débil no trivial para el problema $(\mathcal{P}_1)$. ■

2.4 Un Problema Superlineal Asociado

Consideramos el siguiente ecuación elíptica que extiende el problema $(\mathcal{P}_1)$:

$$(\mathcal{P}_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + \lambda u & = & f(x,u), & \text{en} \quad \Omega, \\ u & = & 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2.40}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ es un dominio limitado con frontera suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua satisfaciendo $(h_1) - (h_3)$ y $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$, donde $\lambda_1(\Omega)$ es el primer es el primer autovalor del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda u, & \text{en} \quad \Omega, \\ u & \in & H_0^1(\Omega), & \end{array} \right.$$

El cual también es dado por

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} > 0.$$

Afirmación 2.7. *Se satisfacen las siguientes afirmaciones*

(a) La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \|\|_\lambda \ : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \|u\|_\lambda = \Big(\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2 \right) dx \Big)^{1/2}, \end{array}$$

define una norma sobre $H_0^1(\Omega)$, ademas $\left(H_0^1(\Omega), \|\ \|_\lambda\right)$ es un espacio de Hilbert.

(b) Las normas $\|\ \|_\lambda$ y $\|\ \|$ son equivalentes.

Demostración.

(a) Considere la siguiente forma bilineal

$$\begin{array}{rcl}\langle \ , \ \rangle_\lambda \ : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \langle u,v\rangle_\lambda = \displaystyle\int_\Omega \big(\nabla u.\nabla v + \lambda uv\big)\, dx.\end{array}$$

De la definición observamos que se verifica:

(i) $\langle u+v, w\rangle_\lambda = \langle u,w\rangle_\lambda + \langle v,w\rangle_\lambda, \quad \forall\, u,v,w \in H_0^1(\Omega).$

(ii) $\langle u,v\rangle_\lambda = \langle v,u\rangle_\lambda, \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega).$

(iii) $\langle \alpha u,v\rangle_\lambda = \alpha\langle v,u\rangle_\lambda, \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) $\langle u,u\rangle_\lambda \geq 0, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$

En efecto, siendo

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} > 0,$$

entonces

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\int_\Omega u^2\, dx}, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\},$$

por lo tanto, para $\lambda > -\lambda_1$

$$\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\big)\, dx \geq \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2\big)\, dx \geq 0, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}.$$

de donde

$$\langle u,u\rangle_\lambda \geq 0, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$$

(v) $\langle u,u\rangle_\lambda = 0, \quad \Leftrightarrow \ u = 0.$

Observe que si $u = 0$ entonces $\langle u,u\rangle_\lambda = 0$, por otro lado, sea $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\langle u,u\rangle_\lambda = 0$.

Caso 1: $-\lambda_1 < \lambda < 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\big)\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{\lambda}{\lambda_1}\lambda_1 \int_\Omega u^2\, dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{\lambda}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\ &= \big(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\big)\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \big(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\big)\|u\|^2 \end{aligned}$$

dado que en este caso $1 + \dfrac{\lambda}{\lambda_1} > 0$, entonces $\|u\|^2 = 0 \Rightarrow u = 0$.

Caso 2: $0 < \lambda$.

Dado que $\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\big)\, dx = 0$ y $\lambda > 0$, entonces

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_\Omega u^2\, dx = 0,$$

por lo tanto $u = 0$.

De (i)-(v), podemos concluir que $\langle\ ,\ \rangle_\lambda$ define un producto interno, entonces

$$\|u\|_\lambda = \sqrt{\langle u, u\rangle_\lambda} = \Big(\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\big)\, dx\Big)^{1/2},$$

es una norma sobre $H_0^1(\Omega)$.

(b) Probemos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_\lambda \geq C_1 \|u\| \quad \forall \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.41}$$

Caso 1: $-\lambda_1 < \lambda < 0$

$$\begin{aligned}
\|u\|_\lambda^2 &= \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\big)\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{\lambda}{\lambda_1}\lambda_1 \int_\Omega u^2\, dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{\lambda}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\
&= \big(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\big)\|u\|^2
\end{aligned}$$

Caso 2: $0 < \lambda$

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\big)\, dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \|u\|^2.$$

Entonces, basta considerar $C_1 = \sqrt{\text{mín}\{1, 1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\}}$.
Ahora probemos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$C_2\|u\| \geq \|u\|_\lambda \quad \forall \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.42}$$

Caso 1: $-\lambda_1 < \lambda < 0$

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\big)\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \|u\|^2$$

Caso 2: $0 < \lambda$

$$\begin{aligned}\|u\|_\lambda^2 &= \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\big)\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{\lambda}{\lambda_1}\lambda_1 \int_\Omega u^2\, dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{\lambda}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\ &= \big(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\big)\|u\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, basta considerar $C_2 = \sqrt{\text{máx}\{1, 1+\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\}}$. Finalmente de (2.41) y (2.42) concluimos que las normas son equivalentes.

■

Análogamente como en la Sección $2{,}1$, una solución clásica para el problema $(\mathcal{P}_2)$ es una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaciendo $(\mathcal{P}_2)$. Multiplicando la ecuación $(\mathcal{P}_2)$ por $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, y integrando por partes, obtenemos

$$\int_\Omega \big(\nabla u.\nabla \phi + \lambda u \phi\big)\, dx = \int_\Omega f(x,u)\phi\, dx \tag{2.43}$$

Considerando el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ con la norma $\|u\|_\lambda$, dado que $(\mathcal{P}_2)$ es valido para cada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, usando la densidad tenemos

$$\int_\Omega \big(\nabla u.\nabla v + \lambda u v\big)\, dx = \int_\Omega f(x,u) v\, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.44}$$

Luego, decimos que una función $u \in H_0^1(\Omega)$ es una **Solución Débil** de la ecuación $(\mathcal{P}_2)$, si u satisface la relación (2.44).

2.5 Existencia de Solución para el Problema Superlineal Asociado

Asociamos al problema $(\mathcal{P}_2)$ el siguiente funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\big)\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

donde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)\,ds$. Observe que podemos escribir

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int_\Omega F(x,u)\,dx, \tag{2.45}$$

Análogamente como fue probado en el Lema 2.4 tenemos que $J \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\big)$ y

$$J'(u)v = \int_\Omega \big(\nabla u.\nabla v + \lambda uv\big)\,dx - \int_\Omega f(x,u)v\,dx, \text{ para todo } u,v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.46}$$

análogamente observamos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de $(\mathcal{P}_2)$ si, y solo si u es punto crítico de J.

Teorema 2.8. *Sean $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua, satisfaciendo las condiciones $(h_1)-(h_3)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un dominio limitado con $N\geq 3$ y $-\lambda_1<\lambda$, entonces el problema $(\mathcal{P}_2)$ posee una solución débil no trivial.*

Demostración. La demostración es análoga al Teorema 2.6, basta cambiar la norma $\|\;\|$ por la norma $\|\;\|_\lambda$ y sus correspondientes productos internos asociados. ■

Teorema 2.9. *Existe una solución débil no trivial para el siguiente problema*

$$(\mathcal{P}_3)\quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= |u|^{p-1}u, \qquad \textit{en} \quad \Omega\\ \qquad\quad u &\geq 0, \qquad\qquad u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.47}$$

donde $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ es un conjunto limitado, $N\geq 3$, $-\lambda_1<\lambda$ y $1\leq p<2^*-1$.

Demostración. Definiendo la función

$$\begin{aligned} f\;:\overline{\Omega}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ (x,t) &\mapsto f(x,t) = (t^+)^p, \end{aligned}$$

entonces se cumple las condiciones $(h_1)-(h_3)$: en efecto

(h_1) $|f(x,t)| \leq |t|^p$.

(h_2) $f(x,t) = o(t)$ en el origen, dado que

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(t^+)^p}{t} = 0.$$

(h_3) Tenemos que

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds = \int_0^t |s^+|^p\,ds = \frac{(t^+)^{p+1}}{p}.,$$

luego, para $\mu = 3$

$$0 < F(x,t) = \frac{(t^+)^{p+1}}{p} < \mu f(x,t)t = 3(t^+)^{p+1}, \quad \forall \quad |t| > 0.$$

Luego, usando el Teorema 2.8, existe una solución débil no trivial $u \in H_0^1(\Omega)$ para el problema,

$$(\widetilde{\mathcal{P}}_3) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= (u^+)^p, & \text{en} \quad \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.48}$$

Dado que u es una solución débil del problema $\widetilde{\mathcal{P}}_3$, tenemos que

$$\int_\Omega \big(\nabla u.\nabla v + \lambda uv\big)\, dx = \int_\Omega (u^+)^p v\, dx, \ \text{ para todo } \ v \in H_0^1(\Omega).$$

En particular para $v = u^-$, obtenemos

$$\int_\Omega \big(\nabla u.\nabla u^- + \lambda uu^-\big)\, dx = \int_\Omega (u^+)^p u^-\, dx. \tag{2.49}$$

Dado que $u = u^+ + u^-$, $\nabla u = \nabla u^+ + \nabla u^-$, $u^+u^- = 0$ y $\nabla u^+\nabla u^- = 0$, entonces reemplazando en (2.49), tenemos

$$\int_\Omega \big(|\nabla u^-|^2 + \lambda(u^-)^2\big)\, dx = \|u^-\|_\lambda^2 = 0,$$

luego, $u^- = 0$ por consiguiente $u = u^+$ de donde $u \geq 0$, es decir u es solución del problema $(\mathcal{P}_3)$. ■

Observación 2.10. *Existen soluciones para los problemas $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$ y $(\mathcal{P}_3)$ cuando $N = 2$, sin embargo en este caso podemos cambiar la condición (h_2) por la siguiente condición*

(h_2') *Existen $a, b > 0$ y $1 < p < \infty$, tales que*

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^p, \quad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Siendo su demostración análoga, observando que cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tenemos por las inmersiones de Sobolev que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \textit{para todo} \quad 1 < p < \infty.$$

Capítulo 3

Ecuaciones no Lineales con Crecimiento Subcrítico definidas en $\mathbb{R}^N$

En este capitulo, nuestro objetivo es estudiar el siguiente problema el cual fue introducido por Ding - Ni en 1986 (Ver [15]).

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= Q(x)|u|^{p-2}u, \quad x \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N, \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $N \geq 3$ y $2 < p < 2^*$.

En este capitulo usaremos el espacio de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ con norma dada por:

$$\|u\|_\lambda = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2 \right) dx \Big)^{1/2}.$$

La principal diferencia de trabajar con un dominio limitado y $\mathbb{R}^N$, es que no tenemos las inmersiones compactas de $H^1(\mathbb{R}^N)$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Para superar este inconveniente consideraremos un subespacio de $H^1(\mathbb{R}^N)$, de modo que sea posible la inmersión compacta en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Vamos a estudiar por lo tanto algunos resultados referente a ello.

3.1 Principio de Criticalidad Simétrica

En esta sección presentamos el Principio de Criticalidad Simétrica el cual fue introducido por Palais [16] , empezaremos definiendo algunas nociones sobre acción de grupos que son necesarias para un mejor entendimiento de este resultado. La importancia de este resultado radica que nos ayuda a resolver el problema de la perdida de compacidad, el cual es causado por el hecho que trabajamos en dominios no limitados.

Definición 3.1. *Una acción de un grupo topológico G sobre un espacio vectorial H es una aplicación continua*

$$\begin{aligned} G \times H &\to H \\ (g, u) &\mapsto gu, \end{aligned}$$

satisfaciendo las siguientes condiciones:

(a) $1u = u$, *para todo* $u \in H$.

(b) $(gh)(u) = g(hu)$, *para todo* $u \in H$ *y para todo* $g, h \in G$.

(c) La aplicación $g : H \to H$, *dada por* $g(u) = gu$ *es una aplicación lineal para cada* $g \in G$.

Observación 3.2. *Si* $\|gu\| = \|u\|$, *para todo* $u \in H$, *decimos que la acción es isométrica.*

Definición 3.3. *Considere la acción de un grupo topológico G sobre un espacio vectorial normado H*

(a) El espacio de los puntos invariantes de esta acción es el subespacio cerrado de H definido por

$$Fix(G) = \{u \in H; gu = u, \ \forall g \in G\}.$$

(b) Un conjunto $A \subset H$ *es invariante si* $gA = A, \ \forall g \in G$.

(c) Un funcional $I : H \to \mathbb{R}$ *es invariante si* $I \circ g = I, \ \forall g \in G$.

(d) Una aplicación $f : H \to H$ *es equivariante si* $f \circ g = g \circ f, \ \forall g \in G$.

Definición 3.4. *(a) Sean G un subespacio de $\mathcal{O}(N)$ y Ω un conjunto invariante $\mathbb{R}^N$. La acción de $G \times G$ sobre $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ es definida por*

$$\big(fu(x), gv(x)\big) := \big(u(f^{-1}x), v(f^{-1}x)\big). \tag{3.2}$$

Observe que la definición anterior tiene sentido, pues para todo $x \in \Omega$ entonces $f^{-1}x, g^{-1}x \in G$.

(b) El subespacio de las funciones invariantes de $H_0^1(\Omega)$ es definido por

$$H_{0,G}^1(\Omega) := \{u \in H_0^1(\Omega) : gu = u, \ \forall g \in G\}.$$

De este modo, definimos el espacio $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ por:

$$H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : gu = u, \ \forall g \in \mathcal{O}(N)\}.$$

Definición 3.5. *Sean G un subgrupo de $\mathcal{O}(N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$, definimos*

$$m(y, r, G) = \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists\, g_1, \ldots, g_n \in G : j \neq k \Rightarrow B_r(g_i y) \cap B_r(g_j y) = \varnothing\}.$$

Decimos que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es compatible con G, si existe $r > 0$, tal que

$$\lim_{\substack{|y|\to\infty \\ dist(y,G)\leq r}} m(y, r, G) = \infty.$$

Lema 3.6. *Sea $G = \mathcal{O}(N)$, entonces $\mathbb{R}^N$ es compatible con G.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, tome $r = 1$ $y_n = (n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N$, $\theta = 2\, arcsen(\frac{1}{n})$ $k = [|\dfrac{2\pi}{\theta}|]$, defina la función

$$\begin{array}{rcl} R_\theta \ : \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R}^N \\ x & \mapsto & R_\theta(x) = Ax. \end{array}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} cos\,\theta & sen\,\theta & 0 & \ldots & 0 \\ -sen\,\theta & cos\,\theta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, $g_0 = I, g_1 = R_\theta, g_2 = R_\theta^2, \cdots, g_k = R_\theta^{k-1}$ son elementos de $\mathcal{O}(N)$ que satisfacen $j \neq k \Rightarrow B_1(g_i y_n) \cap B_1(g_j y_n) = \varnothing$ (Observe la figura a seguir).
Entonces

$$m\big(y_n, 1, \mathcal{O}(\mathbb{R}^N)\big) = [|\frac{\pi}{arcsen\frac{1}{n}}|].$$

Por lo tanto,

$$\lim_{|y|\to\infty} m\big(y, 1, \mathcal{O}(\mathbb{R}^N)\big) = \infty.$$

■

Teorema 3.7. *Si Ω es compatible con G, entonces las siguientes inmersiones son compactas*

$$H^1_{0,G}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad para\ 2 < p < 2^*,$$

Demostración. Ver [14]. ■

Corolario 3.8. *Las siguientes inmersiones son compactas*

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad \textit{para } 2 < p < 2^*.$$

Demostración. Usando el Lema 3.6, tenemos que $\mathbb{R}^N$es compatible con $\mathcal{O}(\mathbb{R}^N)$ por lo tanto, el resultado sigue del Teorema 3.7 ■

Teorema 3.9. ***(Principio de Criticalidad Simétrica, Palais [16])*** *Suponga que la acción de grupo topológico G sobre un espacio de Hilbert H sea isométrica Si $I \in \mathcal{C}(H, \mathbb{R})$ es invariante y u es un punto crítico de I restricto a $Fix(G)$, entonces u es un punto crítico de I en H.*

Demostración. Dado que I es invariante, para cada $g \in G$, tenemos

$$\begin{aligned} I'(gu).v &= \lim_{t\to 0} \frac{I(gu+tv) - I(gu)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{I\big(g(u+tg^{-1}v)\big) - I(gu)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{I(u+tg^{-1}v) - I(u)}{t} = I'(u).g^{-1}v. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Luego, usando el Teorema de Representación de Riez (Teorema A.7), tenemos que existe una aplicación $\nabla I : H \to H$, tal que

$$I'(u).v = \langle \nabla I(u), v\rangle \quad \text{y} \quad \|I'(u)\| = \|\nabla I(u)\|, \quad \forall v \in H.$$

Por lo tanto,

$$I'(gu).v = \langle \nabla I(gu), v\rangle \quad \text{y} \quad I'(u).g^{-1}v\langle \nabla I(u), g^{-1}v =\rangle \quad \forall\, v \in H. \tag{3.4}$$

Luego, de (3.3) tenemos

$$\langle \nabla I(gu), v\rangle = \langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle.$$

Ademas, usando que la acción es isométrica, tenemos

$$\begin{aligned} \|\nabla I(u) + g^{-1}v\|^2 &= \|\nabla I(u)\|^2 + 2\langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle + \|g^{-1}v\|^2 \\ &= \|\nabla I(u)\|^2 + 2\langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle + \|v\|^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

También

$$\begin{aligned} \|g\nabla I(u) + v\|^2 &= \|g\nabla I(u)\|^2 + 2\langle g\nabla I(u), v\rangle + \|v\|^2 \\ &= \|\nabla I(u)\|^2 + 2\langle g\nabla I(u), v\rangle + \|v\|^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Y dado que

$$\|g\nabla I(u)+v\|^2 = \|g\nabla I(u)+g(g^{-1}v)\|^2 = \|g(\nabla I(u)+g^{-1}v)\|^2 = \|\nabla I(u)+g^{-1}v\|^2.$$

Así (3.5) y (3.6) son iguales, por lo tanto

$$\langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle = \langle \nabla I(u), v\rangle.$$

Usando (3.3) y (3.4) tenemos

$$\langle \nabla I(gu), v\rangle = \langle g\nabla I(u), v\rangle, \quad \forall\, v \in H.$$

De donde obtenemos

$$\nabla I(gu) = g\nabla I(u), \tag{3.7}$$

es decir ∇I es equivariante con relación a la acción de grupo.
Suponga que u es un punto crítico de I restricto $Fix(G)$, como $u \in Fix(G)$, entonces $gu = u$, $\forall g \in G$ luego de (3.7), tenemos que

$$\nabla I(u) \in Fix(G).$$

Siendo u punto crítico de I restricto a $Fix(G)$, tenemos

$$I'(u).v = 0, \quad \forall\, v \in Fix(G),$$

es decir

$$\langle \nabla I(u), v\rangle = 0, \quad \forall\, v \in Fix(G),$$

Implicando que $\nabla I(u) \in Fix(G)^\perp$, por lo tanto

$$\nabla I(u) \in Fix(G) \cap Fix(G)^\perp = \{0\}.$$

Entonces

$$I'(u).v = \langle \nabla I(u), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0, \quad \forall v \in H,$$

probando así que u es punto crítico de I en H. ■

3.2 Ondas Solitarias Simétricas

Probaremos la existencia del siguiente problema, el cual fue estudiado por Strauss 1977 (Ver [17]).

Teorema 3.10. *Si $N \geq 2$ y $2 < p < 2^*$, entonces existe una solución, radialmente simétrica y positiva de*

$$(\mathcal{P}_4) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= |u|^{p-2}u \quad x \quad \textit{en} \quad \mathbb{R}^N, \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Demostración. Consideremos el siguiente problema

$$(\widetilde{\mathcal{P}}_4) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= (u^+)^{p-1} \quad x \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N, \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Asociamos a la ecuación $(\widetilde{\mathcal{P}}_4)$ el siguiente funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p \, dx,$$

o equivalentemente

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p \, dx,$$

Note que considerando la función $f(u) = (u^+)^{p-1}$ podemos probar como en el Lema 2.4 que $J \in \mathcal{C}^1\big(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\big)$ y

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u.\nabla v + \lambda uv\big)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p-1} v \, dx, \quad \text{para todo } \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Nuestro objetivo es probar que la función J restricto al subespacio $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, satisface la condiciones del Teorema del Paso de Montaña.

Verificación de la condición (I)

Como $u^+ \leq |u|$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx = \|u\|_p^p.$$

Luego,

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda - \frac{1}{p}\|u\|_p^p.$$

Por las inmersión $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, existe $c_1 > 0$, tal que

$$\|u\|_p \leq c_1 \|u\|_\lambda, \quad \forall \quad u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Por lo tanto,

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda - \frac{c_1^p}{p}\|u\|_\lambda^p = \|u\|_\lambda^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{c_1^p}{p}\|u\|_\lambda^{p-2}\Big).$$

Para $\|u\|_\lambda = \rho$, tenemos

$$J(u) \geq \rho^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{c_1^p}{p}\rho^{p-2}\Big).$$

Tomando $\rho > 0$ tal que

$$\frac{1}{2} - \frac{c_1^p}{p}\rho^{p-2} \geq \frac{1}{4},$$

es decir para $0 < \rho \leq \Big(\frac{p}{4c_1^p}\Big)^{\frac{1}{p-2}}$, tenemos

$$J(u) \geq \frac{\rho^2}{4} = \sigma, \quad \text{si} \quad \|u\|_\gamma = \rho.$$

Verificación de la condición (II)

Fijando $u_0 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, tal que $u_0 > 0$, entonces $u_0^+ = u_0$, así para cada $t \geq 0$, tenemos

$$J(tu_0) = \frac{t^2}{2}\|u_0\|_\lambda^2 - \frac{t^p}{p}\|u_0\|_p^p.$$

Como $p > 2$, tenemos que $\lim\limits_{t\to+\infty} J(tu_0) = -\infty$, entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|t_0 u_0\| > \rho \quad \text{y} \quad J(t_0 u_0) < 0,$$

en consecuencia basta tomar $e = t_0 u_0$.

Verificación de la condición (PS)

Sea $(u_n) \subset H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, tal que $|J(u_n)| \leq c$ y que $\|J'(u_n)\| \to 0$, mostraremos primero que (u_n) es una sucesión limitada.

Dado que,

$$J(u_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2\big)\, dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p\, dx,$$

y

$$J'(u_n)v = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u_n . \nabla v + \lambda u_n v\big)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{p-1} v\, dx,$$

luego

$$J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n)u_n = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)\|u\|_\lambda^2. \tag{3.8}$$

Por otro lado, como $\|J'(u_n)\| \to 0$, tenemos

$$\|J'(u_n).u_n\| \leq \|J'(u_n)\|\|u_n\|_\lambda \leq \|u_n\|_\lambda,$$

para n, suficientemente grande, luego

$$|J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n).u_n| \leq |J(u_n)| + \|J'(u_n)\|\|u_n\|_\lambda \leq c + \frac{1}{p}\|u_n\|_\lambda, \tag{3.9}$$

usando (3.8) y (3.9), tenemos para n suficientemente grande

$$\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)\|u_n\|_\lambda^2 \leq c + \frac{1}{p}\|u_n\|_\lambda.$$

De donde deducimos que (u_n) es una sucesión limitada en $H^1_{rad}(\Omega)$.
Siendo $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ un espacio reflexivo y (u_n) una sucesión limitada , existe una subsucesión, la cual continuaremos denotando como (u_n), tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{en} \quad H^1_{rad}(\mathbb{R}^N), \tag{3.10}$$

luego por el Teorema 3.7 tenemos la inmersión compacta $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, luego

$$u_n \to u, \quad \text{en} \quad L^p(\mathbb{R}^N). \tag{3.11}$$

De (3.10), tenemos que $\langle u_n, u\rangle_\lambda \to \langle u, v\rangle_\lambda$, para cada $v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, es decir

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u_n.\nabla v + \lambda u_n v\big)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u.\nabla v + \lambda u v\big)\, dx. \tag{3.12}$$

De (3.11) y usando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p v\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p v\, dx, \quad \forall \quad v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N). \tag{3.13}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p\, dx. \tag{3.14}$$

Además como $\|J'(u_n)\| \to 0$ y (u_n) es una sucesión limitada, entonces $J'(u_n).u_n \to 0$, es decir

$$\|u_n\|_\lambda^2 \to \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p \, dx.$$

Y por (3.14)

$$\|u_n\|_\lambda^2 \to \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p \, dx. \tag{3.15}$$

Por otro lado,

$$J'(u_n)u = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u_n.\nabla u + \lambda u_n u\big) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{p-1} u \, dx,$$

como $J \in \mathcal{C}^1$ entonces $J'(u_n)u \to J'(u)u = 0$ además de (3.12) y (3.13), tenemos

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p \, dx. \tag{3.16}$$

Usando (3.15) y (3.16), concluimos que

$$\|u_n\|_\lambda \to \|u\|_\lambda,$$

y dado que $u_n \rightharpoonup u,$ en $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, siendo $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ un espacio de Hilbert concluimos que

$$u_n \to u, \quad \text{en} \quad H^1_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

es decir se satisface la condición (PS).

Finalmente, utilizando el Teorema del Paso del Montaña, tenemos la existencia de un punto crítico no trivial de J, restricto al espacio $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, luego por el Principio de Criticalidad Simétrica u es un punto crítico no trivial de J en $H^1(\mathbb{R}^N)$ esto quiere decir que u es una solución débil para el problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_4)$. Así

$$0 = J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u.\nabla v + \lambda uv\big) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p-1} v \, dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Tomado $v = u^-$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u.\nabla u^- + \lambda u u^-\big) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p-1} u^- \, dx = 0,$$

de donde $\|u^-\|_\lambda^2 = 0$, por lo tanto $u^- = 0$, Luego $u \geq 0$ y usando el Principio del Máximo obtenemos que u es positiva. ■

Observación 3.11. *La solución del problema $(\mathcal{P}_4)$ encontrada es también una solución clásica* *es decir* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ $\big($*Ver [14, Lema1.30]*$\big)$.

3.3 Ondas Solitarias no Simetricas

En esta sección estudiaremos el siguiente problema

$$(\mathcal{P}_5) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u &= Q(x)|u|^{p-2}u, \quad x \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N, \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.17}$$

donde $N \geq 3$, $2 < p < 2^*$ y la función Q satisface las siguientes propiedades

(Q_1) $Q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

(Q_2) $1 = \lim\limits_{|x|\to\infty} Q(x) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} Q(x)$.

Observe que si $Q(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^N$, obtenemos el problema $(\mathcal{P}_4)$, el cual ya probamos su existencia, por lo tanto, este es un problema es más general. Ademas escalando el problema podemos considerar en la propiedad (Q_2) cualquier número real positivo. Como hicimos en la sección anterior, consideramos el siguiente problema

$$(\widetilde{\mathcal{P}}_5) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= Q(x)(u^+)^{p-1} \quad x \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N, \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Asociamos a la ecuación $(\widetilde{\mathcal{P}}_5)$ el siguiente funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\big)\, dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p\, dx,$$

Procediendo como en el capitulo anterior, tenemos que $J \in \mathcal{C}^1\big(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\big)$ y

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u.\nabla v + \lambda uv\big)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^{p-1}v\, dx, \ \text{ para todo } \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 3.12. *Sea*

$$S_p := \inf_{\substack{v\in H^1(\mathbb{R}^N) \\ \|v\|_p=1}} \|v\|_\lambda^2.$$

Entonces existe una función $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *positiva tal que*

$$S_p = \|u\|_\lambda^2, \quad \text{con} \quad \|u\|_p = 1.$$

Demostración. Ver [6] y [14]. ■

El siguiente Lema nos dice que la condición de Palais-Smale es valida solo para ciertos valores

Lema 3.13. *Sea Q una función satisfaciendo las condiciones (Q_1) y (Q_2), entonces cualquier sucesión $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$d = \sup_{n\in\mathbb{N}} J(u_n) < c^* = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big) S_p^{\frac{p}{p-2}}$$

y

$$\|J'(u_n)\| \to 0, \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty$$

posee una subsucesión convergente.

Demostración. Sea $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $|J(u_n)| \leq c$ y $\|J'(u_n)\| \to 0$, mostraremos primero que (u_n) es una sucesión limitada.

Dado que,

$$J(u_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2\big)\, dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^p\, dx,$$

y

$$J'(u_n)v = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u_n.\nabla v + \lambda u_n v\big)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^{p-1} v\, dx,$$

entonces

$$J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n)u_n = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)\|u\|_\lambda^2.$$

Por otro lado, como $\|J'(u_n)\| \to 0$, tenemos

$$|J'(u_n).u_n| \leq \|J'(u_n)\|\|u_n\|_\lambda \leq \|u_n\|_\lambda,$$

para n suficientemente grande, luego

$$|J(u_n) - \frac{1}{p}J'(u_n).u_n| \leq |J(u_n)| + \frac{1}{p}\|J'(u_n)\|\|u_n\|_\lambda \leq c + \frac{1}{p}\|u_n\|_\lambda,$$

entonces, para n suficientemente grande, tenemos

$$\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)\|u_n\|_\lambda^2 \leq c + \frac{1}{p}\|u_n\|_\lambda.$$

De donde deducimos que (u_n) es una sucesión limitada en $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Desde $H^1(\mathbb{R}^N)$ es un espacio reflexivo y por las inmersiones en dominios limitados, existe una subsucesión una que continuaremos denotando como (u_n) tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{en} \quad H^1(\mathbb{R}^N), \tag{3.18}$$

$$u_n \to u, \quad \text{en} \quad L^p_{loc}(\mathbb{R}^N). \tag{3.19}$$

$$u_n \to u \quad \text{c.t.p en} \quad \mathbb{R}^N. \tag{3.20}$$

Observe que

$$\big((u_n^+)^{p-1}\big)^{\frac{p}{p-1}} = (u_n^+)^p \leq |u_n|^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

Ademas de (3.20) tenemos que

$$(u_n^+)^{p-1} \to (u^+)^{p-1} \quad \text{c.t.p en} \quad \mathbb{R}^N,$$

luego usando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$(u_n^+)^{p-1} \to (u^+)^{p-1} \quad \text{en} \quad L^{\frac{p}{p-1}}_{loc}(\mathbb{R}^N). \tag{3.21}$$

De (3.18), tenemos que $\langle u_n, u\rangle_\lambda \to \langle u, v\rangle_\lambda$, para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, es decir

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u_n.\nabla v + \lambda u_n v\big)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u.\nabla v + \lambda u v\big)\, dx. \tag{3.22}$$

Ademas dado $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, tenemos

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)\phi\big((u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}\big)\, dx\Big| &\leq c\int_K |\phi|\big|(u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}\big|\, dx \\ &\leq c\|\phi\|_{L^p(K)}\|(u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(K)}. \end{aligned}$$

donde $c = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} |Q(x)|$ y K =supp(ϕ), siendo K un conjunto compacto.
De (3.21), obtenemos

$$\|(u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(K)} \to 0.$$

Por lo tanto,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)\phi\big((u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}\big)\, dx\Big| \to 0,$$

es decir

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^p\phi\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p\phi\, dx, \quad \forall \quad \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Usando la densidad de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u_n^+)^p v\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p v\,dx, \quad \forall \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.23}$$

Luego de (3.22) y (3.23), tenemos

$$J'(u_n)v \to \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u.\nabla v + \lambda uv\big)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p v\,dx, \quad \forall \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

como también $J'(u_n)v \to 0$ entonces por unicidad de limite

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u.\nabla v + \lambda uv\big)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p v\,dx = 0, \quad \forall \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.24}$$

De donde,

$$-\Delta u + \lambda u = Q(x)(u^+)^{p-1}.$$

Es decir u es solución del problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_5)$, ademas para $v = u$ en $(3,24)$, tenemos

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^{p+1}\,dx.$$

entonces

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p v\,dx = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)\|u\|_\lambda^2 \geq 0. \tag{3.25}$$

Dado que Q es una función limitada y $(u_n) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ entonces $(Q^{1/q}u_n) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, ademas usando la definición de S_p, tenemos

$$\|Q^{1/p}u_n\|_p \leq c\|u_n\|_p \leq cS_p^{-\frac{1}{2}}\|u_n\|_\lambda.$$

y como (u_n) es limitada en $H^1(\mathbb{R}^N)$ entonces $(Q^{1/q}u_n)$ es una sucesión limitada en $L^p(\mathbb{R}^N)$, usando (3.20) tenemos

$$Q^{1/p}u_n \to Q^{1/p}u \quad \text{c.t.p en} \quad \mathbb{R}^N.$$

Luego usando el Lema de Brézis-Lieb (Lema A.9) tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Q^{1/p}(x)u_n|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |Q^{1/p}(x)u|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |Q^{1/p}(x)v_n|^p\,dx + o_n(1),$$

donde $v_n = u_n - u$. Dado que $Q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u_n|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p\,dx + o_n(1), \tag{3.26}$$

Siendo Q una función continua y $\lim\limits_{|x|\to\infty} Q(x) = 1 = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} Q(x)$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$Q(x) - 1 < \frac{\epsilon}{2k}, \quad \text{para todo} \quad x \in B_R(0)^c. \tag{3.27}$$

donde $k = \sup\limits_n \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx$. Ademas siendo $c_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} Q(x)$ entonces en particular

$$Q(x) - 1 \le c_1, \quad \text{en} \quad B_R(0).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx\Big| &\le \int_{\mathbb{R}^N} \big(Q(x)-1\big)|v_n|^p\,dx \\
&= \int_{B_R(0)} \big(Q(x)-1\big)|v_n|^p\,dx + \int_{B_R(0)^c} \big(Q(x)-1\big)|v_n|^p\,dx \\
&\le c_1 \int_{B_R(0)} |v_n|^p\,dx + \frac{\epsilon}{2k}\int_{B_R(0)^c} |v_n|^p\,dx \\
&= c_1 \int_{B_R(0)} |v_n|^p\,dx + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De (3.19) tenemos que $v_n \to 0$ en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\int_{B_R(0)} |v_n|^p\,dx \to 0,$$

entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge n_0$

$$\int_{B_R(0)} |v_n|^p\,dx \le \frac{\epsilon}{2c_1},$$

Por lo tanto,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx\Big| \le \epsilon, \quad \forall \quad n \ge n_0.$$

Es decir

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx,$$

así

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|v_n|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx + o_n(1). \tag{3.28}$$

Entonces de (3.26) y (3.28), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u_n|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx + o_n(1). \tag{3.29}$$

Asumiendo que $J(u_n) \to c \leq d$, entonces

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u_n|^p\,dx = c + o_n(1).$$

Usando (3.29), tenemos

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p\,dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx = c + o_n(1).$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 + J(u) - \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx = c + o_n(1). \tag{3.30}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ entonces $\langle u_n, u\rangle_\lambda \to \|u\|_\lambda^2$ y dado que $v_n = u_n - u$ entonces

$$\|v_n\|_\lambda^2 = \|u_n\|_\lambda^2 - 2\langle u_n, u\rangle_\lambda + \|u\|_\lambda^2 = \|u_n\|_\lambda^2 - \|u\|_\lambda^2 + o_n(1). \tag{3.31}$$

Reemplazando (3.31) en (3.30) se tiene

$$J(u) + \frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx = c + o_n(1). \tag{3.32}$$

Dado que $J'(u_n)u_n = o_n(1)$, entonces

$$\|u_n\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u_n|^p\,dx = o_n(1),$$

usando (3.29), obtenemos

$$\|u_n\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx = o_n(1),$$

y ahora usando (3.31)

$$\|v_n\|_\lambda^2 + \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx = o_n(1),$$

y dado que

$$J'(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)|u|^p\,dx = 0.$$

En consecuencia, tenemos

$$\|v_n\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx = o_n(1).$$

Entonces existe $b \geq 0$ tal que

$$\|v_n\|_\lambda^2 \to b \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx \to b. \tag{3.33}$$

Suponiendo que $b > 0$, de la definición de S_p, tenemos

$$\|u\|_\lambda^2 \geq S_p\|u\|_p^2 = S_p\big(\|u\|_p^p\big)^{\frac{p}{2}},$$

tomando limites y usando (3.33), tenemos

$$b \geq S_p b^{\frac{p}{2}} \tag{3.34}$$

De (3.32), tenemos

$$\frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx = c - J(u) + o_n(1),$$

y de (3.33)

$$\frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)b + o_n(1).$$

Por lo tanto, usando la unicidad de limite concluimos

$$\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)b = c - J(u).$$

Luego, por (3.25)

$$\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)b \leq c$$

Finalmente usando (3.34), se tiene

$$c^* = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) S_p^{\frac{p}{p-2}} \leq (\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) b \leq c \leq d < c^*,$$

lo cual es una contradicción, de este modo , necesariamente $b = 0$, y por lo tanto, en (3,33)

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 = \|v_n\|_\lambda^2 \to 0.$$

Es decir,

$$u_n \to u, \quad \text{en} \quad H^1(\mathbb{R}^N).$$

■

3.4 Existencia de Solución Ondas Solitarias no Simétricas

Teorema 3.14. *Sean $N \geq 3$, $2 < p < 2^*$ y Q una función satisfaciendo las condiciones (Q_1) y (Q_2). Entonces el problema*

$$(\mathcal{P}_5) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u &= Q(x)|u|^{p-2}u, \quad x \quad en \quad \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, & u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Posee una solución débil no trivial.

Demostración. Consideramos el problema

$$(\widetilde{\mathcal{P}}_5) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= Q(x)(u^+)^{p-1} \quad x \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N, \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Cuyo funcional asociado esta dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p \, dx,$$

Aplicaremos el Teorema de Paso de Montaña para el funcional J.

Verificación de la condición (I)

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^p dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx - \frac{c_1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p dx,$$

donde $c_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} Q(x)$.
Ademas como $(u^+)^p \leq |u|^p$, entonces

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx - \frac{c_1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{c_1}{p}\|u\|_p^p, \tag{3.35}$$

dado que

$$\|u\|_\lambda^2 \geq S_p \|u\|_p^2.$$

Entonces

$$\|u\|_\lambda^p \geq S_p^{\frac{p}{2}} \|u\|_p^p.$$

Luego, reemplazando en (3.35), obtenemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{c_1}{p}\frac{1}{S_p^{\frac{p}{2}}}\|u\|_\lambda^p.$$

Si $\|u\|_\lambda = \rho$, entonces

$$J(u) \geq r^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{c_1}{p}\frac{1}{S_p^{\frac{p}{2}}}\rho^{p-2}\Big).$$

Si ρ es tal que

$$\frac{1}{2} - \frac{c_1}{p}\frac{1}{S_p^{\frac{p}{2}}}\rho^{p-2} \geq \frac{1}{4},$$

es decir si $0 < \rho < \big(\frac{p}{4c_1}\big)^{\frac{1}{p-2}} S_p^{\overline{2(p-2)}^{\,p}}$, entonces

$$J(u) \geq \frac{\rho^2}{4} = \sigma > 0, \quad \text{para todo} \quad \|u\|_\lambda = \rho.$$

Verificación de la condición (II)
Sea $v > 0$ con $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ una función donde se alcanza el ínfimo para S_p, es decir

$$\frac{\|v\|_\lambda^2}{\|v\|_p^2} = S_p. \tag{3.36}$$

$$J(v) = \frac{1}{2}t^2\|v\|_\lambda^2 - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx$$

Como $p > 2$, tenemos que $\lim\limits_{t\to+\infty} J(tv) = -\infty$, entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|t_0 v\| > \rho \quad \text{y} \quad J(t_0 v) < 0,$$

en consecuencia basta tomar $e = t_0 v$.

Verificación de la condición (PS)

Note que por el Lema 3.13, la condición (PS) se verifica si el nivel minimax es menor que c^*, por lo tanto vamos a probar que efectivamente es así.

Observe que si $Q \equiv 1$, la existencia de solución esta dado por el Teorema 3.10, entonces podemos suponer que $Q \neq 1$, entonces para v satisfaciendo (3.36), tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx > \int_{\mathbb{R}^N} v^p \, dx. \tag{3.37}$$

Considerando la función $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como

$$\zeta(t) = \frac{t^2}{2} \|v\|_\lambda^2 - \frac{t^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx,$$

entonces

$$\zeta'(t) = t\|v\|_\lambda^2 - t^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx.$$

Nuestro objetivo es encontrar el máximo valor da función ζ, luego igualamos $\zeta'(t) = 0$, así obtenemos

$$t\big(\|v\|_\lambda^2 - t^{p-2} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx\big) = 0.$$

entonces tenemos los siguientes puntos críticos de la función ζ

$$t_1 = 0 \quad \text{y} \quad t_2 = \Big(\frac{\|u\|_\lambda^2}{\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx} \Big)^{\frac{1}{p-2}},$$

dado que $p > 2$ y el gráfico el máximo de la función es alcanzado en t_2, luego

$$\max_{t \geq 0} J(tv) = \max_{t \geq 0} \zeta(t) = \zeta(t_2), \tag{3.38}$$

y

$$\zeta(t_2) = \frac{1}{2} \Big(\frac{\|u\|_\lambda^2}{\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx} \Big)^{\frac{2}{p-2}} \|v\|_\lambda^2 - \Big(\frac{\|u\|_\lambda^2}{\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx} \Big)^{\frac{p}{p-2}} \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx$$

$$= \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big) \Big[\frac{\|u\|_\lambda^2}{\big(\int_{\mathbb{R}^N} Q(x) v^p \, dx \big)^{\frac{2}{p}}} \Big]^{\frac{p}{p-2}}.$$

Por lo tanto, usando (3.37) y (3.38), obtenemos

$$\max_{t\geq 0} J(tv) = (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\Big[\frac{\|u\|_\lambda^2}{\big(\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)v^p\,dx\big)^{\frac{2}{p}}}\Big]^{\frac{p}{p-2}} < (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\Big[\frac{\|u\|_\lambda^2}{\|v\|_p^2}\Big]^{\frac{p}{p-2}} = (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})S_\lambda^{\frac{p}{p-2}} = c^*.$$

Definiendo ahora $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, como

$$\gamma_0(t) = tt_0 v.$$

Entonces $\gamma_0 \in \Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \quad \text{y} \quad \gamma(1) = e\}$. Ademas

$$c = \max_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J\big(\gamma(t)\big) \leq \max_{t\in[0,1]} J\big(\gamma_0(t)\big) = \max_{t\in[0,1]} J(tt_0 v) \leq \max_{t\geq 0} J(tv) < c^*.$$

entonces por el Lema 3.13 se satisface la condición $(PS)_c$.
Por lo tanto, por el Teorema del Paso de Montaña , existe u punto crítico no trivial de J, entonces $J'(u)v = 0$ para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, en particular para $v = u^-$, tenemos

$$J'(u)u^- == \int_{\mathbb{R}^N}\big(\nabla u.\nabla u^- + \lambda u u^-\big)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)(u^+)^{p-1}u^-\,dx = \|u^-\|_\lambda^2 = 0,$$

de donde $u^- = 0$, por lo tanto, $u \geq 0$, entonces u no solamente es solución del problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_5)$ sino también del problema $(\mathcal{P}_5)$. ∎

Capítulo 4

Ecuaciones no Lineales con Crecimiento Crítico

En este capitulo, estudiaremos el siguiente problema crítico el cual fue estudiado por Brezis-Niremberg (1983) (Ver [8])

$$(\mathcal{P}_6) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + \lambda u & = & |u|^{2^*-2}u, \quad x \quad \text{en } \Omega, \\ u \geq 0, & \in & H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

donde Ω es un conjunto limitado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

4.1 Un Problema con Crecimiento Crítico

Consideremos el siguiente el problema

$$(\widetilde{\mathcal{P}}_6) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + \lambda u & = & (u^+)^{2^*-1}, \quad x \quad \text{en } \Omega, \\ u & \in & H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Definiendo $f(u) = (u^+)^{2^*-1}$, tenemos $F(u) = \dfrac{(u^+)^{2^*}}{2^*}$
Luego, el funcional asociado al problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_6)$ esta dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2\right) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*}\, dx,$$

luego

$$J'(u).v = \int_\Omega \left(\nabla u.\nabla v + \lambda u.v\right) dx - \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.1}$$

Observación 4.1. *Una función* $u \in H_0^1(\Omega)$ *es solución del problema* $(\widetilde{\mathcal{P}}_6)$ *si, y solo sí es solución del problema* $(\mathcal{P}_6)$.

Si u es solución de $(\mathcal{P}_6)$ entonces $u = u^+$, luego es solución del problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_6)$. Por otro lado, si u es solución del problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_6)$ entonces $J'(u)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, en particular para $v = u^-$ en (4.1), tenemos

$$0 = J'(u)u^- = \int_\Omega \left(\nabla u.\nabla u^- + \lambda u u^-\right) dx - \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} u^-\, dx = \int_\Omega \left(|\nabla u^-|^2 + \lambda |u^-|^2\right) dx,$$

es decir $\|u^-\|_\lambda^2 = 0$, entonces $u^- \equiv 0$ luego $u \geq 0$ y en consecuencia u es solución de $(\mathcal{P}_6)$.

Definición 4.2. ***(Desigualdad Crítica de Sobolev)*** *Sea* $N \geq 3$, *la mejor constante en la desigualdad de Sobolev es dado por*

$$S := \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \|\nabla u\|_2^2.$$

Lema 4.3. *Toda sucesión* $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, *tal que*

$$d = \sup_{n \in \mathbb{N}} J(u_n) < c^* = \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}, \quad y \quad \|J'(u_n)\| \to 0,$$

admite una subsucesión convergente, es decir J *satisface la condición* $(PS)_d$.

Demostración. Probaremos primero que la sucesión (u_n) es limitada en $H_0^1(\Omega)$. Como $\|J'(u_n)\| \to 0$, luego para n suficientemente grande tenemos $\|J'(u_n)\| \leq 2^*$, entonces

$$-\frac{1}{2^*} J'(u_n)u_n \leq \left| -\frac{1}{2^*} J'(u_n)u_n \right| \leq \frac{1}{2^*} \|J'(u_n)\| \|u_n\|_\lambda \leq \|u_n\|_\lambda.$$

Por lo tanto, para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} d + \|u_n\|_\lambda &\geq J(u_n) - \frac{1}{2^*} J'(u_n)u_n \\ &= \frac{\|u_n\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{2^*}}{2^*}\, dx - \frac{1}{2^*}\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} u_n\, dx \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}\Big(\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-}\, dx - \int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\, dx \Big). \end{aligned}$$

Luego,

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})\|u_n\|_\lambda^2 \leq d + \|u_n\|_\lambda, \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande .}$$

Lo cual implica que (u_n) es limitada en $H_0^1(\Omega)$. Luego a menos de una subsucesión, podemos suponer que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ en } H_0^1(\Omega),$$

$$u_n \to u, \text{ en } L^2(\Omega),$$

$$u_n \to u, \text{ c.t.p en } \Omega.$$

Ademas como la sucesión (u_n) es limitada en $L^{2^*}(\Omega)$ tenemos que $\big(f(u_n)\big) = \big((u_n^+)^{2^*-1}\big)$ es limitada en $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ y $f(u_n) \to f(u)$ c.t.p en Ω, luego usando el Lema A.8, tenemos

$$f(u_n) \rightharpoonup f(u), \quad \text{en} \quad L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega),$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ y dado que $\dfrac{2^*}{2^*-1}$ y 2^* son conjugados, entonces tenemos

$$\int_\Omega f(u_n)v\,dx \to \int_\Omega f(u)v\,dx. \tag{4.2}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle u_n, v\rangle_\lambda = \int_\Omega \big(\nabla u_n \nabla v + \lambda u_n v\big)\,dx \to \int_\Omega \big(\nabla u \nabla v + \lambda uv\big)\,dx = \langle u, v\rangle_\lambda. \tag{4.3}$$

Dado que $J'(u_n)v \to 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega \big(\nabla u_n \nabla v + \lambda u_n v\big)\,dx - \int f(u_n)v\,dx \to 0.$$

Luego, usando (4.2) y (4.3) tenemos

$$\int_\Omega \big(\nabla u \nabla v + \lambda uv\big)\,dx = \int_\Omega f(u)v\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.4}$$

Es decir u es solución, del problema

$$-\Delta u + \lambda u = f(u).$$

En particular para $v = u$ en (4.4), obtenemos

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_\Omega f(u)u\,dx = \int_\Omega (u^+)^{2^*-1}u\,dx = \int_\Omega (u^+)^{2^*}\,dx = 2^*\int_\Omega F(u)\,dx, \tag{4.5}$$

de donde deducimos que

$$J(u) = \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(u)\,dx = \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \frac{\|u\|_\lambda^2}{2^*} = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\big)\|u\|_\lambda^2 \geq 0. \tag{4.6}$$

Definiendo $v_n = u_n - u$, luego por el Lema A.9, tenemos

$$\int_\Omega F(u_n)\,dx = \int_\Omega F(u)\,dx + \int_\Omega F(v_n)\,dx + o_n(1). \tag{4.7}$$

Dado que $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\langle v_n, u\rangle_\lambda = \langle u_n, u\rangle_\lambda - \langle u, u\rangle_\lambda \to \langle u, u\rangle_\lambda - \langle u, u\rangle_\lambda = 0, \tag{4.8}$$

luego, usando (4.7) y (4.8)

$$\begin{aligned}
J(u_n) &= \frac{\|u_n\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(u_n)\,dx \\
&= \frac{\|v_n + u\|_\lambda^2}{2} - \Big(\int_\Omega F(u)\,dx + \int_\Omega F(v_n)\,dx\Big) + o_n(1) \\
&= \frac{\|v_n\|_\lambda^2}{2} + \langle v_n, u\rangle_\lambda + \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(u)\,dx - \int_\Omega F(v_n)\,dx + o_n(1) \\
&= J(u) + \frac{\|v_n\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(v_n)\,dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Como (u_n) es limitada en $H_0^1(\Omega)$, podemos suponer que $J(u_n) \to c \leq d$, por lo tanto

$$J(u) + \frac{\|v_n\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(v_n)\,dx \to c. \tag{4.9}$$

Ademas usando (4.5), (4.7) y (4.8), tenemos

$$\begin{aligned}
J'(u_n)u_n &= \|u_n\|_\lambda^2 - 2^* \int_\Omega F(u_n)\,dx \\
&= \|v_n\|_\lambda^2 + 2\langle v_n, u\rangle_\lambda + \|u\|_\lambda^2 - 2^*\Big(\int_\Omega F(u)\,dx + \int_\Omega F(v_n)\,dx\Big) + o_n(1) \\
&= \|v_n\|_\lambda^2 - 2^* \int_\Omega F(v_n)\,dx + \|u\|_\lambda^2 - 2^* \int_\Omega F(u)\,dx + o_n(1) \\
&= \|v_n\|_\lambda^2 - 2^* \int_\Omega F(v_n)\,dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Y dado que $J'(u_n)u_n \to 0$, obtenemos

$$\|v_n\|_\lambda^2 - 2^* \int_\Omega F(v_n)\, dx \to 0,$$

y como

$$2^* \int_\Omega F(v_n)\, dx = 2^* \int_\Omega \frac{(v_n^+)^{2^*}}{2^*}\, dx = \int_\Omega (v_n^+)^{2^*}\, dx = \|v_n^+\|_{2^*}^{2^*}, \tag{4.10}$$

entonces

$$\|v_n\|_\lambda^2 - \|v_n^+\|_{2^*}^{2^*} \to 0,$$

Luego, podemos suponer que

$$\|v_n\|_\lambda^2 \to b \quad \text{y} \quad \|v_n^+\|_{2^*}^{2^*} \to b. \tag{4.11}$$

Como $\|v_n\|_\lambda^2 = \|\nabla v_n\|_2^2 + \lambda \|v_n\|_2^2$ y $v_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$ entonces $\|\nabla v_n\|_2^2 \to b$. Por la Desigualdad de Sobolev, tenemos

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \geq S\|v_n\|_{2^*}^2 \geq S\|v_n^+\|_{2^*}^2,$$

luego tomado los limites, tenemos $b \geq Sb^{\frac{2}{2^*}}$, es decir $b = 0$ o $b \geq S^{\frac{N}{2}}$. Además tomando limite en (4.9) usando (4.10) y (4.11), obtenemos

$$J(u) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})b = c,$$

De (4.6) tenemos $J(u) \geq 0$, por lo tanto,

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})b \leq c.$$

Ahora suponiendo que $b \geq S^{\frac{N}{2}}$, tenemos

$$c^* = \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} = S^{\frac{N}{2}}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}) \leq (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})b \leq c \leq d < c^*,$$

de donde tenemos una contradicción. Por lo tanto, $b = 0$ es decir

$$\|v_n\|_\lambda = \|u_n - u\|_\lambda \to 0,$$

de donde concluimos que $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$, obteniendo así una subsucesión convergente. ■

Lema 4.4. *Sean Ω un dominio limitado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$ y $-\lambda_1(\Omega) < \lambda < 0$. Entonces existe una función no negativa $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, tal que*

$$\frac{\|v\|_\lambda^2}{\|v\|_{2^*}^2} < S.$$

Demostración. Ver [14]. ■

4.2 Existencia de Solución para el Problema con Crecimiento Crítico.

Teorema 4.5. ***(Brezis-Niremberg, 1982)*** *Sean Ω un dominio limitado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$ y $\lambda_1(\Omega) < \lambda < 0$. Entonces el problema $(\mathcal{P}_6)$ posee una solución no trivial.*

Demostración. Verificaremos que se satisfacen las condiciones del Teorema del Paso de Montaña y además se satisface la condición $(PS)_c$ donde el nivel minimax c es menor que c^*.

Verificación de la condición (I)

Observe que

$$J(u) = \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(u)\,dx = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}\|u^+\|_{2^*}^{2^*} \geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

Luego, usando la desigualdad de Sobolev, tenemos

$$\|u\|_{2^*}^{2^*} \leq S^{\frac{-2^*}{2}}\|\nabla u\|_2^{2^*},$$

además existe $c > 0$ tal que $\|\nabla u\|_2 \leq c\|u\|_\lambda$, entonces

$$J(u) \geq \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \frac{1}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*} \geq \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \frac{1}{2^* S^{\frac{2^*}{2}}}\|\nabla u\|_2^{2^*} \geq \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \frac{c^{2^*}}{2^* S^{\frac{2^*}{2}}}\|u\|_\lambda^{2^*},$$

entonces para $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u\|_\lambda = \rho$, tenemos

$$J(u) \geq \frac{\rho^2}{2} - M\rho^{2^*} = \rho^2(\frac{1}{2} - M\rho^{2^*-2}), \quad \text{donde } M = \frac{c^{2^*}}{2^* S^{\frac{2^*}{2}}}.$$

Por lo tanto, escogiendo $0 < \rho < \left(\dfrac{1}{4M}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$, tenemos

$$J(u) \geq \frac{\rho^2}{4} = \sigma > 0, \quad \text{si} \quad \|u\|_\lambda = \rho,$$

satisfaciendo así la condición (I).

Verificación de la condición (II)

Tomado $v > 0$ en $H_0^1(\Omega)$ la función del Lema 4.4, tenemos

$$J(tv) = \frac{t^2}{2}\|v\|_\lambda^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v\|_{2^*}^{2^*} \to -\infty, \quad \text{si } t \to +\infty,$$

entonces existe $t_0 > 0$, tal que $J(t_0 v) < 0$ y $\|t_0 v\|_\lambda > \rho$.

Por lo tanto, la condición se verifica con $e = t_0 v$.

Verificación de la condición (PS)

Sea la función dada por el Lema 4.4, luego

$$0 < \max_{t\geq 0} J(tv) = \max_{t\geq 0}\left(\frac{\|tv\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(tv)\,dx\right) = \max_{t\geq 0}\left(\frac{t^2}{2}\|v\|_\lambda^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v\|_{2^*}^{2^*}\right),$$

Observe que,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\|v\|_\lambda^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v\|_{2^*}^{2^*}\right) = t\|v\|_\lambda^2 - t^{2^*-1}\|v\|_{2^*}^{2^*} = 0.$$

Entonces, tenemos dos puntos críticos

$$t_1 = 0 \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\|v\|_\lambda^{\frac{2}{2^*-2}}}{\|v\|_{2^*}^{\frac{2}{2^*-2}}},$$

luego

$$\max_{t\geq 0} J(tv) = J(t_2 v).$$

entonces

$$0 < \max_{t\geq 0} J(tv) = \left(\frac{\|v\|_\lambda^{\frac{2}{2^*-2}}}{\|v\|_{2^*}^{\frac{2}{2^*-2}}}\right)^2 \frac{\|v\|_\lambda^2}{2} - \left(\frac{\|v\|_\lambda^{\frac{2}{2^*-2}}}{\|v\|_{2^*}^{\frac{2}{2^*-2}}}\right)^{2^*} \frac{\|v\|_{2^*}^{2^*}}{2^*},$$

de donde

$$0 < \max_{t\geq 0} J(tv) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\left(\frac{\|v\|_\lambda^2}{\|v\|_{2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}} < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} = c^*. \tag{4.12}$$

Considerando la función

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 \ : [0,1] & \to & H_0^1(\Omega) \\ t & \mapsto & \gamma_0(t) = tt_0 v. \end{array}$$

entonces $\gamma_0(0) = 0$ y $\gamma_0(1) = e$, así

$$\gamma_0 \in \Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H_0^1(\Omega)); \gamma(0) = 0 \quad \text{y} \quad \gamma(1) = e\}.$$

Entonces

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J\big(\gamma(t)\big) \le \max_{t\in[0,1]} J\big(\gamma_0(t)\big) \le \max_{t\ge 0} J(tt_0 v) = \max_{t\ge 0} J(tv) < c^*.$$

Por lo tanto, J satisface la geometría del Paso de Montaña para un nivel minimax $c \in [b, c^*)$, luego por el Lema 4.3 J satisface la condición $(PS)_c$.

Luego, por el Teorema del Paso de Montaña existe una solución no trivial para el problema $(\widetilde{\mathcal{P}}_6)$ y por la Observación 4.1 tenemos una solución no trivial para el problema $(\mathcal{P}_6)$. ■

Capítulo 5

Sistema de Ecuaciones Elípticas.

En este capitulo estudiaremos dos clases especiales de sistemas de ecuaciones parciales elípticas.

Consideremos el siguiente problema

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f(x,u,v), & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v &=& g(x,u,v), & \text{em} \quad \Omega, \\ u=v &=& 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ y $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Nuestro interés es utilizar métodos varacionales estudiadas en el Capitulo 1, para encontrar soluciones del sistema $(\mathcal{S})$, por lo tanto, nuestro objetivo sera asociar al sistema $(\mathcal{S})$ un funcional definido en un espacio de funciones adecuado, de tal forma que los puntos críticos de este funcional sea soluciones del problema $(\mathcal{S})$.

Consideraremos dos tipos de sistemas elípticos :

Definición 5.1. *Diremos que el sistema* $(\mathcal{S})$ *es un Sistema Gradiente si existe una función* $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *tal que*

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f \quad y \frac{\partial F}{\partial v} = g.$$

Por otro lado, diremos que el sistema $(\mathcal{S})$ *es un Sistema Hamiltoniano si existe una función* $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *tal que*

$$\frac{\partial H}{\partial u} = g \quad y \frac{\partial H}{\partial v} = f.$$

5.1 Sistemas Gradientes

La teoría utilizada para resolver sistemas gradientes es similar al caso escalar de una ecuación elíptica. Consideremos el siguiente sistema gradiente

$$(\mathcal{S}_g) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= F_u(x,u,v), \quad \text{em} \ \ \Omega, \\ -\Delta v &= F_v(x,u,v), \quad \text{em} \ \ \Omega, \\ \ \ u,v &\in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

En el contexto varacional, buscamos soluciones débiles para $(\mathcal{S}_g)$. Decimos que (u,v) es una solución débil de S_g si $(u,v) \in H_0^1(\Omega)^2$ y satisface para todo $(\phi,\psi) \in H_0^1(\Omega)^2$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx = \int_\Omega F_u(x,u,v)\phi \, dx \quad \text{y} \quad \int_\Omega \nabla v \nabla \psi \, dx = \int_\Omega F_v(x,u,v)\psi \, dx.$$

Denotemos por

$$U=(u,v), \quad \Delta U = (\Delta u, \Delta v) \quad \text{y} \quad \nabla F(x,U) = \big(F_u(x,u,v), F_v(x,u,v)\big).$$

Por lo tanto, podemos escribir el sistema $(\mathcal{S}_g)$ como

$$(\mathcal{S}_g) \qquad \begin{cases} -\Delta U &= \nabla F(x,U), \quad \text{en} \ \ \Omega, \\ \ \ U &\in \big(H_0^1(\Omega)\big)^2. \end{cases}$$

Dado que Ω es un conjunto limitado podemos escoger la norma en $\big(H_0^1(\Omega)\big)^2$, dada por

$$\|U\|_{(H_0^1(\Omega))^2} = \int_\Omega |\nabla U|^2 \, dx = \Big(\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big) \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

la cual proviene del producto interno definido por

$$\langle U, T \rangle_{(H_0^1(\Omega))^2} = \int_\Omega \nabla U . \nabla T \, dx.$$

Luego, el funcional asociado al problema esta dado por

$$J(U) = \frac{1}{2}\|U\|^2 - \int_\Omega F(x,U)\, dx, \tag{5.1}$$

donde $\|U\| = \|U\|_{(H_0^1(\Omega))^2}$. Luego, sí $J \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega)^2, \mathbb{R})$, tenemos que

$$J'(U).\Phi = \int_\Omega \nabla U.\nabla \Phi \, dx - \int_\Omega \nabla F.\Phi \, dx, \quad \forall \quad \Phi = (\phi, \psi) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2.$$

Ademas si $U = (u, v)$ es un punto crítico de J, tenemos para todo $(\phi, \psi) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$.

$$J'(u,v).(\phi,\psi) = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v).(\nabla \phi, \nabla \psi) \, dx - \int_\Omega (F_u(x,u,v), F_v(x,u,v)).(\phi.\psi) \, dx = 0,$$

Tomando en particular $(\phi, 0)$ y $(0, \psi)$ con $\psi, \psi \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx = \int_\Omega F_u(x,u,v)\phi \, dx \quad \text{y} \quad \int_\Omega \nabla v \nabla \psi \, dx = \int_\Omega F_v(x,u,v)\psi \, dx.$$

De donde concluimos que los puntos críticos del funcional (5.1) son soluciones débiles del sistema (S_g).

Observación 5.2. *Cuando $\Omega = \mathbb{R}^N$ el sistema $(\mathcal{S}_g)$, se escribe de la forma*

$$(\mathcal{S}_G) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + u & = & F_u(x,u,v), & en \;\; \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v & = & F_v(x,u,v), & en \;\; \mathbb{R}^N, \\ u, v & \in & H^1(\mathbb{R}^N). & \end{array} \right.$$

Decimos que (u, v) es una solución débil de $(\mathcal{S}_G)$ si $(u, v) \in \left(H^1(\mathbb{R}^N)\right)^2$ y satisface

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u \nabla \phi + u\phi\big) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F_u(x,u,v)\phi dx \quad y \quad \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla v \nabla \psi + v\phi\big) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F_v(x,u,v) dx,$$

para todo $(\phi, \psi) \in \left(H^1(\mathbb{R}^N)\right)^2$. Análogamente podemos escribir el sistema $(\mathcal{S}_G)$ como

$$(\mathcal{S}_G) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta U + U & = & \nabla F(x, U), & en \;\; \mathbb{R}^N, \\ U & \in & \left(H^1(\mathbb{R}^N)\right)^2. & \end{array} \right.$$

En este caso, escogemos la norma en $\left(H^1(\mathbb{R}^N)\right)^2$, dada por

$$\|U\|_{H^1(\mathbb{R}^N)^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla U|^2 + |U|^2\right) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 + |\nabla v|^2 + |v|^2\right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

la cual proviene del producto interno definido por

$$\langle U, T \rangle_{(H^1(\mathbb{R}^N))^2} = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla U.\nabla T + U.T\big) \, dx.$$

Luego, el funcional asociado al problema esta dado por

$$J(U) = \frac{1}{2}\|U\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,U)\,dx, \tag{5.2}$$

donde $\|U\| = \|U\|_{H^1(\mathbb{R}^N)^2}$*, procediendo como en el caso anterior, obtenemos que la soluciones débiles del sistema* $(\mathcal{S}_G)$ *son los puntos críticos del funcional (5.2).*

5.2 Sistemas Hamiltonianos

Consideremos el siguiente sistema hamiltoniano

$$(\mathcal{S}_h) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& H_v(x,u,v), & \text{em} \;\; \Omega, \\ -\Delta v &=& H_u(x,u,v), & \text{em} \;\; \Omega, \\ u,v &\in& H_0^1(\Omega). & \end{array} \right.$$

Decimos que (u,v) es una solución débil de (S_h) si $(u,v) \in H_0^1(\Omega)^2$ y satisface

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi\,dx = \int_\Omega H_v(x,u,v)\psi\,dx \quad \text{y} \quad \int_\Omega \nabla v \nabla \phi\,dx = \int_\Omega H_u(x,u,v)\phi\,dx,$$

para todo $(\phi,\psi) \in \big(H_0^1(\Omega)\big)^2$.

El funcional asociado al sistema $(\mathcal{S}_h)$ esta dado por

$$J(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v\,dx - \int_\Omega H(x,u,v)\,dx. \tag{5.3}$$

Luego, sí $J \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega)^2, \mathbb{R})$, tenemos que

$$J'(u,v).(\phi,\psi) = \int_\Omega \big(\nabla u \nabla \psi + \nabla v \nabla \phi\big)\,dx - \int_\Omega \big(H_u(x,u,v)\phi + H_v(x,u,v)\psi\big)\,dx,$$

para todo $(\phi,\psi) \in \big(H_0^1(\Omega)\big)^2$. Ademas si (u,v) es un punto crítico de J, tenemos

$$J'(u,v).(\phi,\psi) = 0 \quad \forall\,(\phi,\psi) \in \big(H_0^1(\Omega)\big)^2.$$

Tomando en particular $(\phi,0)$ y $(0,\psi)$ con $\psi,\psi \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi\,dx = \int_\Omega H_u(x,u,v)\phi\,dx \quad \text{y} \quad \int_\Omega \nabla u \nabla \psi\,dx = \int_\Omega H_v(x,u,v)\psi\,dx.$$

De donde concluimos que los puntos críticos del funcional (5.3) son soluciones débiles del sistema $(\mathcal{S}_h)$

Observación 5.3. *Cuando* $\Omega = \mathbb{R}^N$ *el sistema* (S_h)*, se escribe de la forma*

$$(\mathcal{S}_H) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u &= H_v(x,u,v), \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v &= H_u(x,u,v), \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u, v &\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Decimos que (u,v) *es una solución débil de* $(\mathcal{S}_H)$ *si* $(u,v) \in \big(H^1(\mathbb{R}^N)\big)^2$ *y satisface*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u \nabla \psi + u\psi\big) dx = \int_{\mathbb{R}^N} H_v(x,u,v)\psi dx \quad y \quad \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla v \nabla \phi + v\phi\big) dx = \int_{\mathbb{R}^N} H_u(x,u,v)\phi dx,$$

para todo $(\phi, \psi) \in \big(H^1(\mathbb{R}^N)\big)^2$.

El funcional asociado al sistema $(\mathcal{S}_H)$ *esta dado por*

$$J(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u . \nabla v + uv\big)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x,u,v)\, dx. \tag{5.4}$$

Procediendo como en el caso anterior, obtenemos que la soluciones débiles del sistema $(\mathcal{S}_H)$ *son los puntos críticos del funcional (5.3).*

Capítulo 6

Un Sistema Gradiente con Crecimiento Superlineal Subcrítico

En este capitulo estudiaremos la existencia de una solución no trivial para un sistema de ecuaciones elípticas de tipo gradiente .

6.1 El Sistema Gradiente $(\mathcal{S}_1)$

Sea el sistema

$$(\mathcal{S}_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u &= F_u(u,v), \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ -\Delta v + v &= F_v(u,v), \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ \quad u, v &\in H^1(\Omega). \end{cases}$$

donde $N \geq 3$ y F es una función dada, por simplicidad estudiaremos el caso autónomo, es decir cuando la función F no depende de la variable x, sin embargo el caso no autónomo puede ser probado de manera similar.

Como fue mostrado en el capítulo anterior el sistema $(\mathcal{S}_1)$ puede escribirse como

$$(\mathcal{S}_1) \qquad \begin{cases} -\Delta U + U &= \nabla F(U), \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ \quad U &\in \left(H^1(\Omega)\right)^2. \end{cases}$$

donde $U = (u,v) \in \left(H^1(\Omega)\right)^2$, con la norma

$$\|U\|_{H^1(\Omega)^2} = \left(\int_\Omega \left(|\nabla U|^2 + |U|^2\right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Luego, el funcional asociado al sistema $(\mathcal{S}_1)$ esta dado por

$$J(U) = \frac{1}{2}\|U\|^2 - \int_\Omega F(x,U)\,dx, \tag{6.1}$$

donde $\|U\| = \|U\|_{H^1(\Omega)^2}$.

Consideremos las siguientes condiciones para la función F

(F_1) $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

(F_2) Existen $1 < p, q < 2^* - 1$ y una constante $C > 0$, tal que

$$|\nabla F(s,t)| \leq C(1 + |s|^p + |t|^q), \quad \forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

(F_3) $F(0,0) = F_s(0,t) = F_t(s,0) = 0, \quad \forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2.$

(F_4) $|\nabla F(s,t)| = o(|(s,t)|)$ en el origen.

(F_5) Existe $\mu > 2$, tal que

$$T\nabla F(T) \geq \mu F(T) > 0, \quad \forall\,T \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}.$$

Observación 6.1. *En lo que se sigue C denotará una constante positiva arbitraria, la cual podrá ser modificada sin alterarse su notación.*

Lema 6.2. *Considerando las condiciones $(F_1) - (F_3)$, entonces para $1 \leq p, q \leq 2^* - 1$, tenemos*

$$F(u,v) \leq C(1 + |u|^{p+1} + |v|^{q+1}), \quad \forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Demostración. Sin perdida de generalidad, asumiremos que $p \geq q$, de (F_2), tenemos

$$F_u(u,v) \leq |F_u(u,v)| \leq |\nabla F(u,v)| \leq C(1 + |u|^p + |u|^q).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^u F_s(s,v)\,ds &\leq C\int_0^u (1 + |u|^p + |v|^q)\,ds\\ &\leq C|u| + C|u|^{p+1} + |v|^q|u|.\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$F(u,v) - F(0,v) \leq C|u| + C|u|^{p+1} + C|v|^q|u|. \tag{6.2}$$

De (F_2) y (F_3), tenemos

$$F(0,v)=\int_0^v F_t(0,t)\,dt \leq C\int_0^v (1+|t|^q)\,dt \leq C|v|+C|v|^{q+1}. \tag{6.3}$$

Luego de (6.2) y (6.3)

$$F(u,v)\leq C|u|+C|v|+C|u|^{p+1}+C|v|^q|u|+C|v|^{q+1}.$$

Analizando los siguientes casos:

Caso 1: $|u|\leq 1$.

Si $|v|\leq 1$, tenemos

$$F(u,v)\leq C.$$

Si $|v|\geq 1$, tenemos

$$F(u,v)\leq C+C|v|+C|v|^q+C|v|^{q+1}\leq C+|v|^{q+1}.$$

Caso 2: $|u|\geq 1$.

Si $|v|\leq 1$, tenemos

$$F(u,v)\leq C|u|+C+C|u|^{p+1}+C|u|+\leq C+C|u|^{p+1}.$$

Si $|v|\geq 1$, tenemos

$$F(u,v)\leq C|u|^{p+1}+C|u|^q|v|+C|v|^{p+1}. \tag{6.4}$$

Sea $s=\frac{p+1}{q+1}\geq 1$, entonces $|u|^q|v|\leq |u|^q|v|^s$, usando la desigualdad de Hölder $ab\leq \dfrac{a^r}{r}+\dfrac{b^{r'}}{r'}$ con $a=|u|^q, b=|q|^s, r=\frac{q+1}{q}$ y $r'=q+1$,obtenemos

$$|u|^q|v|\leq |u|^q|v|^s\leq \frac{q}{q+1}|u|^{p+1}+\frac{1}{q+1}|u|^{p+1}. \tag{6.5}$$

Usando (6.4) y (6.5)

$$F(u,v)\leq C|u|^{p+1}+C|v|^{p+1}.$$

Analizando todos los casos concluimos que existe $C>0$, tal que

$$F(u,v)\leq C+C|u|^{p+1}+C|v|^{p+1}.$$

■

Lema 6.3. *Considerando las condiciones* $(F_1)-(F_4)$*, entonces*

$$F(u,v)\leq \epsilon(|u|^2+|v|^2)+C(|u|^{p+1}+|v|^{q+1}),$$

para todo $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ *y todo* $\epsilon>0$.

Demostración. Por (F_4), dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$|\nabla F(u,v)|\leq \epsilon|(u,v)| \quad \text{si} \quad |(u,v)|\leq\delta,$$

es decir

$$F_u(u,v),F_v(u,v)\leq|\nabla F(u,v)|\leq\epsilon\big(|u|+|v|\big) \quad \text{si} \quad |(u,v)|\leq\delta. \tag{6.6}$$

Luego, si $|(u,v)|\leq\delta$

$$F(u,v)-F(0,v)=\int_0^u F_s(s,v)\,ds\leq\epsilon\int_0^u\big(|s|+|v|\big)\,ds\leq\frac{\epsilon}{2}|u|^2+\epsilon|v||u|. \tag{6.7}$$

Por (F_3) y (6.6), tenemos para $|(u,v)|\leq\delta$

$$F(0,v)=\int_0^v F_t(0,t)\,dt\leq\epsilon\int_0^v |t|\,dt\leq\frac{\epsilon}{2}|v|^2. \tag{6.8}$$

Ahora de (6.7) y (6.8), para $|(u,v)|\leq\delta$, tenemos

$$F(u,v)\leq\frac{\epsilon}{2}|u|^2+\epsilon|v||u|+\frac{\epsilon}{2}|v|^2\leq\frac{\epsilon}{2}|u|^2+\epsilon\big(\frac{|u|^2}{2}+\frac{|v|^2}{2}\big)+\frac{\epsilon}{2}|v|^2$$

es decir

$$F(u,v)\leq\epsilon\big(|u|^2+|v|^2\big), \quad \text{si} \quad |(u,v)|\leq\delta. \tag{6.9}$$

Por otro lado, si $|(u,v)|\geq\delta$, podemos suponer que $|u|\geq\dfrac{\delta}{2}$, usando el Lema 6.2, y sea C_1 una constante positiva tal que $C\leq C_1(\frac{\delta}{2})^{p+1}$, entonces

$$\begin{aligned}F(u,v)&\leq C+C|u|^{p+1}+C|v|^{q+1}\\&\leq C_1(\frac{\delta}{2})^{p+1}+C|u|^{p+1}+C|v|^{q+1}\\&\leq C_1|u|^{p+1}+C|u|^{p+1}+C|v|^{q+1}.\end{aligned}$$

es decir existe una constante $C > 0$, tal que

$$F(u,v) \leq C\big(|u|^{p+1} + |v|^{q+1}\big), \quad \text{si} \quad |(u,v)| \geq \delta. \tag{6.10}$$

Finalmente de (6.9) y (6.10) concluimos que

$$F(u,v) \leq \epsilon(|u|^2 + |v|^2) + C(|u|^{p+1} + |v|^{q+1}).$$

■

Proposición 6.4. *El funcional asociado J de (6.1) esta bien definido y $J \in \mathcal{C}^1\big(\big(H_0^1(\Omega)\big)^2, \mathbb{R}\big)$, además*

$$J'(U).\Phi = \int_\Omega \big(\nabla u.\nabla\phi + u\phi + \nabla v.\nabla\psi + v\psi\big)\, dx - \int_\Omega \big(F_u(u,v)\phi + F_v(u,v)\psi\big)\, dx,$$

para todo $U = (u,v)$, $\Phi = (\phi,\psi) \in \big(H^1(\Omega)\big)^2$.

Demostración. Escribiendo $J = J_1 - J_2$, donde

$$J_1(U) = \frac{1}{2}\langle U, U\rangle \quad \text{y} \quad J_2(U) = \int_\Omega F(U)\, dx$$

dado que J_1 es una forma cuadrática entonces esta bien definida en $\big(H_0^1(\Omega)\big)^2$, además $J_1 \in \mathcal{C}^1$ y

$$J_1'(U).\Phi = \langle U, \Phi\rangle = \int_\Omega \big(\nabla u.\nabla\phi + u\phi + \nabla v.\nabla\psi + v\psi\big)\, dx.$$

para todo $U = (u,v)$, $\Phi = (\phi,\psi) \in \big(H^1(\Omega)\big)^2$.

Sea $U = (u,v) \in \big(H^1(\Omega)\big)^2$, entonces por las inmersiones de Sobolev y el Lema 6.3

$$\begin{aligned} |J_2(U)| = \int_\Omega |F(u,v)|\, dx &\leq \int_\Omega \epsilon(|u|^2 + |v|^2) + C(|u|^{p+1} + |v|^{q+1}) \\ &= \epsilon\|u\|_2^2 + \epsilon\|v\|_2^2 + C\|u\|_{p+1}^{p+1} + C\|v\|_{q+1}^{q+1} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, J_2 esta bien definido, además procediendo como en el Lema 2.3, tenemos que $J_2 \in \mathcal{C}^1$ y

$$J_2(U).\Phi = \int_\Omega \nabla F(U).\Phi\, dx = \int_\Omega \big(F_u(u,v)\phi + F_v(u,v)\psi\big)\, dx,$$

para todo $U = (u,v)$, $\Phi = (\phi,\psi) \in \big(H^1(\Omega)\big)^2$. ■

6.2 Existencia de Solución para el Sistema $(\mathcal{S}_1)$

Teorema 6.5. *Sea $N \geq 3$, $1 \leq p, q \leq 2^* - 1$, y considerando las condiciones $(F_1) - (F_5)$, entonces el sistema S_1, posee una solución radial no trivial.*

Demostración. Mostraremos que el funcional J satisface las condiciones del Teorema de Paso de Montaña

Verificación de la condición (I)

Usando el Lema 6.3, tenemos

$$\begin{aligned}
J(U) &= \frac{1}{2}\|U\| - \int_{\mathbb{R}^2} F(U)\, dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|U\| - \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2\, dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |v|^2\, dx - C \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p+1}\, dx - C \int_{\mathbb{R}^2} |v|^{q+1}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\|U\| - \epsilon \|u\|^2_{L^2} - \epsilon \|v\|^2_{L^2} - C\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}} - C\|v\|^{q+1}_{L^{q+1}} \\
&\geq \frac{1}{2}\|U\|^2 - 2\epsilon \|U\|^2_{L^2 \times L^2} - C\|U\|^{p+1}_{L^{p+1} \times L^{p+1}} - C\|U\|^{q+1}_{L^{q+1} \times L^{q+1}}.
\end{aligned}$$

Usando las inmersiones continuas existe una constante $C > 0$, talque

$$\|U\|_{L^2 \times L^2} \leq C\|U\|, \quad \|U\|_{L^{p+1} \times L^{p+1}} \leq C\|U\|, \quad \|U\|^{q+1}_{L^{q+1} \times L^{q+1}} \leq C\|U\|.$$

Entonces, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
J(U) &\geq \frac{1}{2}\|U\|^2 - \epsilon C\|U\|^2 - C\|U\|^{p+1} - C\|U\|^{q+1} \\
&= \|U\|^2 \big(\frac{1}{2} - \epsilon C - C\|U\|^{p-1} - C\|U\|^{q-1} \big).
\end{aligned}$$

Tomando $\|U\| = \rho$, tenemos

$$J(U) \geq \rho^2 \big(\frac{1}{2} - \epsilon C - C\rho^{p-1} - C\rho^{q-1} \big),$$

por lo tanto, para ϵ y ρ suficientemente pequeño tenemos que

$$\rho^2 \big(\frac{1}{2} - \epsilon C - C\rho^{p-1} - C\rho^{q-1} \big) = \sigma > 0,$$

es decir

$$J(U) \geq \sigma > 0, \quad \forall \quad \|U\| = \rho.$$

Verificación de la condición (II)
Observe que usando la condición (F_5)

$$uF_u(u,0) = (u,0)\big(F_u(u,0), F_v(u,0) \geq \mu F(u,0).$$

Luego usando el Lema 2.5, tenemos que existen constantes $C, D > 0$ tal que

$$F(u,0) \geq C|u|^\mu - D \quad \forall \quad u \in \mathbb{R}. \tag{6.11}$$

Tomando $U = (u,0) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que $U \neq 0$, entonces para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} J\big(t(u,0)\big) &= \frac{t^2}{2}\|u\|_{H^1} - \int_\Omega F\big(t(u,0)\big)\, dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|u\|_{H^1} - \int_K F\big(t(u,0)\big)\, dx, \end{aligned}$$

donde $K = \text{supp } u$, luego de (6.11)

$$\begin{aligned} J\big(t(u,0)\big) &\leq \frac{t^2}{2}\|u\|_{H^1} - Ct^\mu \int_K |u|^\mu\, dx + D\int_K 1\, dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|u\|_{H^1} - Ct^\mu \|u\|^\mu_{L^\mu(K)}\, dx + D|K|. \end{aligned}$$

Dado que $\mu > 2$, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} J\big(t(u,0)\big) = -\infty.$$

Por lo tanto, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|t_0(u,0)\| > \rho \quad \text{y} \quad J\big(t_0(u,0)\big) < 0.$$

es decir, existe $e = t_0(u,0)$ con $e \in \big(H_0^1(\Omega)\big)^2$, tal que

$$\|e\| > \rho \quad \text{y} \quad J(e) < 0.$$

satisfaciendo así la condición (II).
Verificación de la condición (PS).
Sea $(U_n) = (u_n, v_n) \subset \big(H_0^1(\Omega)\big)^2$, una sucesión de Palais - Smale , es decir

$$|J(U_n)| \leq C \quad \text{y} \quad \|J'(U_n)\| \to 0,$$

por lo tanto, para n suficientemente grande tenemos

$$\begin{aligned}J(U_n)-\frac{1}{\mu}\nabla J(U_n).U_n &\leq |J(U_n)-\frac{1}{\mu}\nabla J(U_n).U_n|\\ &\leq |J(U_n)|+\frac{1}{\mu}|\nabla J(U_n).U_n|\\ &\leq |J(U_n)|+\frac{1}{\mu}\|\nabla J(U_n)\|\|U_n\|\\ &\leq C+C\|U_n\|.\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}J(U_n)-\frac{1}{\mu}\nabla J(U_n).U_n &= \frac{1}{2}\|U_n\|^2-\int_\Omega F(U_N)\,dx-\frac{1}{u}\|U_n\|^2+\frac{1}{\mu}\int_\Omega \nabla J(U_n).U_n\,dx\\ &= \big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\big)\|U_n\|^2+\frac{1}{\mu}\int_\Omega\big(\nabla J(U_n).U_n-\mu F(U_n)\big)\,dx.\end{aligned}$$

Usando la condición (F_5), tenemos

$$\int_\Omega\big(\nabla J(U_n).U_n-\mu F(U_n)\big)\,dx\geq 0,$$

luego

$$\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\big)\|U_n\|^2\leq J(U_n)-\frac{1}{\mu}\nabla J(U_n).U_n.$$

Entonces

$$\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\big)\|U_n\|^2\leq C+C\|U_n\|.$$

De donde concluimos que (U_n) es una sucesión limitada en $\big(H_0^1(\Omega)\big)^2$, por lo tanto, existe una subsucesión la cual seguiremos denotando por (U_n) y $U\in\big(H_0^1(\Omega)\big)^2$, tal que

$$U_n\rightharpoonup U,\quad \text{en}\quad H_0^1(\Omega)\times(H_0^1(\Omega).$$

Ademas por la inmersiones compactas de

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)\quad \text{y}\quad H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{q+1}(\Omega),$$

podemos suponer a menos de una subsucesión que

$$U_n\to U,\quad \text{en}\quad L^{p+1}(\Omega)\times L^{q+1}(\Omega). \tag{6.12}$$

$$U_n\to U,\quad \text{c.t.p}\quad \text{en}\quad \Omega. \tag{6.13}$$

De (F_1) y de (6.13) tenemos

$$|\nabla F(U_n) - \nabla F(U)| \to 0, \quad \text{c.t.p en} \quad \Omega. \tag{6.14}$$

También usando el Teorema A.6 existe $W = (w_1, w_2) \in L^{p+1}(\Omega) \times L^{q+1}(\Omega)$, tal que $|u_n| \leq w_1$ y $|v_n| \leq w_2$ c.t.p en Ω, por lo tanto

$$|u_n|^p \leq w_1^p \in L^s(\Omega), \quad s = \frac{p+1}{p}.$$

$$|v_n|^p \leq w_2^q \in L^r(\Omega), \quad r = \frac{q+1}{q}.$$

Ademas usando la condición (F_2), tenemos

$$|\nabla F(U_n) - \nabla F(U)| \leq 2C + Cw_1^p + Cw_2^q + C|u|^p + C|v|^q,$$

suponga sin perdida de generalidad que $p \leq q$ entonces $r \leq s$, como $w_1^q, u^q \in L^r(\Omega)$ usando la Proposición A.4, tenemos que $w_1^q, u^q \in L^s(\Omega)$, y por lo tanto

$$G = 2C + Cw_1^p + Cw_2^q + C|u|^p + C|v|^q \in L^s(\Omega).$$

Entonces,

$$|\nabla F(U_n) - \nabla F(U)| \leq G \in L^s(\Omega). \tag{6.15}$$

Luego, usando o Teorema de la Convergencia dominada, tenemos

$$|\nabla F(U_n) - \nabla F(U)| \in L^s(\Omega),$$

por lo tanto,

$$\nabla F(U_n) - \nabla F(U) \in L^s(\Omega) \times L^s(\Omega). \tag{6.16}$$

Observe también que como $p+1 \leq q+1$, luego por la Proposición A.4 tenemos

$$U_n \to U, \quad \text{en} \quad L^{p+1}(\Omega) \times L^{p+1}(\Omega). \tag{6.17}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|U_n - U\|^2 &= \|U_n\|^2 - \int_\Omega \big(\nabla u_n \nabla u + u_n u + \nabla v_n \nabla v + v_n v\big)\, dx + \|U\|^2 \\
&= J'(U_n).(U_n - U) - J'(U).(U_n - U) + \int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla F(U_n) - \nabla F(U)\big)\big(U_n - U\big)\, dx.
\end{aligned}$$

Como $\|J'(U_n)\| \to 0$ y (U_n) es una sucesión limitada, entonces

$$|J'(U_n).(U_n - U)| \leq \|J'(U_n)\|\|(U_n - U)\| \to 0. \tag{6.18}$$

También como $U_n \rightharpoonup U$ en $\big(H_0^1(\Omega)\big)^2$, entonces

$$J'(U).(U_n - U) \to 0. \tag{6.19}$$

Usando la desigualdad de Hölder, (6.16) y (6.17), tenemos

$$\Big|\int_\Omega \big(\nabla F(U_n) - \nabla F(U)\big)\big(U_n - U\big)\, dx\Big| \leq \|\nabla F(U_n) - \nabla F(U)\|_{L^s \times L^s} \|U_n - U\|_{L^{p+1} \times L^{p+1}} \to 0. \tag{6.20}$$

Finalmente de (6.18), (6.19) y (6.20), concluimos que

$$\|U_n - U\| \to 0,$$

por lo tanto, hemos encontrado una subsucesión (U_n) tal que

$$U_n \to U, \quad \text{en} \quad \big(H_0^1(\Omega)\big)^2.$$

Por lo tanto, J satisface las condiciones del Teorema del Paso de la Montaña, de donde obtenemos un punto critico no trivial U de J en $\big(H_0^1(\Omega)\big)^2$. Por lo tanto, existe una solución débil no trivial del Sistema (S_g). ■

Capítulo 7

Un Sistema Hamiltoniano con Crecimiento Superlineal Crítico

En este capitulo estudiaremos la existencia de solución para un sistema elíptico de tipo hamiltoniano

7.1 El Sistema Hamiltoniano $(\mathcal{S}_2)$

Sea el sistema

$$(\mathcal{S}_2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v & = & |u|^{q-1}u, & \text{en} \quad \Omega, \\ -\Delta u & = & |v|^{p-1}v, & \text{en} \quad \Omega, \\ u, v & \in & H_0^1(\Omega), & \end{array} \right.$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ y $1 < p, q < 2^* - 1$.

Decimos que (u, v) es una solución débil de (S_2) si $(u, v) \in H_0^1(\Omega)^2$ y satisface

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi \, dx = \int_\Omega |v|^{q-1} v\psi \, dx \quad \text{y} \quad \int_\Omega \nabla v \nabla \phi \, dx = \int_\Omega |u|^{p-1} u\phi \, dx, \quad \forall \quad (\phi, \psi) \in H_0^1(\Omega)^2.$$

El funcional asociado al sistema (S_2) es dado por

$$J(u, v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega |u|^{q+1} \, dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |v|^{p+1} \, dx. \tag{7.1}$$

Luego, $J \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega)^2, \mathbb{R})$, y además

$$J'(u, v).(\phi, \psi) = \int_\Omega \nabla u.\nabla \psi \, dx + \int_\Omega \nabla v \nabla \phi \, dx - \int_\Omega |u|^{q-1} u\phi \, dx - \int_\Omega |v|^{p-1} v\psi \, dx. \tag{7.2}$$

para todo $(\phi,\psi)\in\big(H_0^1(\Omega)\big)^2$. Ademas si (u,v) es un punto crítico de J, tenemos

$$J'(u,v).(\phi,\psi)=0 \quad \forall\ (\phi,\psi)\in\big(H_0^1(\Omega)\big)^2.$$

Por lo tanto, si tomamos $(\phi,0)$ y $(0,\psi)$ con $\psi,\psi\in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\phi\,dx=\int_\Omega |u|^{q-1}u\phi\,dx \quad \text{y} \quad \int_\Omega \nabla u\nabla\psi\,dx=\int_\Omega |v|^{p-1}v\psi\,dx.$$

De donde concluimos que los puntos críticos del funcional (7.1) son soluciones débiles del sistema (S_2).

7.2 Existencia de Solución para el Sistema $(\mathcal{S}_2)$

Escribiremos $J(u,v)=J_1(u,v)-J_2(u,v)$, donde

$$J_1(u,v)=\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx$$

y

$$J_2(u,v)=\frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx+\frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\,dx$$

trataremos de encontrar soluciones definidas en $E=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, dado $(u,v)\in E$, consideraremos la norma

$$\|(u,v)\|_E=\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2+|\nabla v|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

la cual proviene del producto interno

$$\langle (u_1,v_1),(u_2,v_2)\rangle_E=\int_\Omega \nabla u_1.\nabla u_2\,dx+\int_\Omega \nabla v_1\nabla v_2\,dx,$$

en lo que sigue omitiremos el subindice E.
Definimos los siguientes subespacios

$$E^+=\{(u,+u):u\in H_0^1(\Omega)\} \quad \text{y} \quad E^-=\{(u,-u):u\in H_0^1(\Omega)\}.$$

Luego, dado $(u,v)\in E$, tenemos

$$(u,v)=\Big(\frac{u+v}{2},\frac{u+v}{2}\Big)+\Big((\frac{u-v}{2}),-(\frac{u-v}{2})\Big),$$

luego $E = E^+ + E^-$, ademas tenemos $E^+ \cap E^- = \{0\}$, por lo tanto

$$E = E^+ \oplus E^-.$$

Note que , E^+ y E^- son ortogonales con el producto interno $\langle\ ,\ \rangle_E$. Además sea

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{L^2 \times L^2} = \int_\Omega u_1 u_2\, dx + \int_\Omega v_1 v_2\, dx,$$

Por lo tanto, E^+ y E^- también son ortogonales con el producto interno $\langle\ ,\ \rangle_{L^2 \times L^2}$. Observe también que

$$J(u, u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \quad \text{es positiva en} \quad E^+,$$

$$J(u, -u) = -\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \quad \text{es negativa en} \quad E^-.$$

y

$$\begin{array}{rcl} T^\pm \ : H_0^1(\Omega) & \to & E^\pm \\ u & \mapsto & T^\pm(u) = (u, \pm u), \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico y por lo tanto, J_1 es positivo definido en E^+ y negativo definido en E^-, siendo E^+ y E^- subespacios de dimensión infinita, lo cual determina que e funcional J sea fuertemente indefinido

Lema 7.1. *Existe un operador autoadjunto y limitado $L : E \to E$, tal que $L(E^+) \subset E^+$, $L(E^-) \subset E^-$ y*

$$J_1(z) = \frac{1}{2}\langle Lz, z \rangle_E, \quad \textit{con} \quad z = (u, v) \in E.$$

Demostración. Definiendo $L(u, v) = (v, u)$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle L(u,v), (u,v) \rangle_E = \langle (v,u), (u,v) \rangle_E &= \int_\Omega \big(\nabla v \nabla u + \nabla u \nabla v\big)\, dx \\ &= 2\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega \big(\nabla u \nabla v + \nabla v \nabla u\big)\, dx = \\ &= \langle (u,v), (v,u) \rangle_E = \langle (u,v), L(u,v) \rangle_E. \end{aligned}$$

entonces L es autoadjunto y $J_1(z) = \frac{1}{2}\langle Lz, z \rangle_E$, para $z = (u, v) \in E$. Además

$$\|L(u,v)\|_E = \|(v,u)\| = \Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + |\nabla u|^2\, dx\Big)^{1/2} = \|(u,v)\|_E.$$

Por lo tanto,

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{\|(u,v)\|\leq 1} \|L(u,v)\| = \sup_{\|(u,v)\|\leq 1} \|(u,v)\| = 1,$$

es decir L es un operador limitado, note también que

$$z_1 = (u,u) \in E^+ \Rightarrow L(z_1) = (u,u) \in E^+,$$

$$z_2 = (u,-u) \in E^- \Rightarrow L(z_2) = (-u,u) \in E^-,$$

es decir $L(E^+) \subset E^+$, $L(E^-) \subset E^-$. ■

Definiendo $e = (\phi,\phi) \in E^+$ con $\phi \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\|e\|_E = 1$ y sea

$$\widetilde{E} = \langle e \rangle \oplus E^- = \{re + (u,-u) : u \in H_0^1(\Omega), r \in \mathbb{R}\},$$

$$S = \partial B_\rho(0) \cap E^+,$$

$$Q = \{re : 0 \leq r \leq r_1\} \oplus \big(B_{r_2}(0) \cap E^-\big),$$

donde $r_1 > \rho$ y r_2 son números que serán determinados a continuación.

Lema 7.2. *Existen constantes $\rho > 0$ y $\sigma > 0$ tales que*

$$J(z) \geq \sigma, \quad \forall \quad u \in S.$$

Demostración. Sea $z = (u,u) \in E^+$, luego

$$J(z) = J(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx.$$

De las inmersiones de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$\|u\|_{p+1} \leq C\|u\| \quad \text{y} \quad \|u\|_{q+1} \leq C\|u\|,$$

por lo tanto,

$$J(u,u) \geq \|u\|^2 - \frac{C}{q+1}\|u\|^{q+1} - \frac{C}{p+1}\|u\|^{p+1},$$

dado que $p+1 > 2$ y $q+1 > 2$, entonces

$$J(u,u) \geq \|u\|^2\Big(1 - \frac{C}{q+1}\|u\|^{q-1} - \frac{C}{p+1}\|u\|^{p-1}\Big),$$

luego para $\|u\| = \rho_1$ con $\rho_1 > 0$ tal que $\dfrac{C}{q+1}\rho_1^{q-1} + \dfrac{C}{p+1}\rho_1^{p-1} < \dfrac{1}{2}$, entonces

$$J(u,u) \geq \frac{\rho_1^2}{2} = \sigma > 0 \quad \text{si} \quad \|(u,u)\|_E = \sqrt{2}\rho_1 = \rho,$$

es decir

$$J(z) \geq \sigma \quad \text{para} \quad z \in B_\rho(0) \cap E^+.$$

■

Lema 7.3. *Existen $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$, tal que*

$$J(z) \leq 0, \quad \textit{para todo} \quad z \in \partial Q,$$

donde

$$Q = \{re : 0 \leq r \leq r_1\} \oplus \big(B_{r_2}(0) \cap E^-\big),$$

y donde ∂Q representa la frontera de Q respecto a $\widetilde{E}$.

Demostración. Observe que la frontera de Q con respecto a $\widetilde{E}$ esta dado por

$$\partial Q = \partial Q_1 \cup \partial Q_2 \cup \partial Q_2,$$

donde

$$\partial Q_1 = \{(u,-u) : u \in H_0^1(\Omega), \|(u,-u)\|_E \leq r_2\},$$

$$\partial Q_2 = \{r_1 e + (u,-u) : u \in H_0^1(\Omega), \|(u,-u)\| \leq r_2\},$$

$$\partial Q_3 = \{re + (u,-u) : 0 \leq r \leq r_1, u \in H_0^1(\Omega),\ \|(u,-u)\| = r_2\}.$$

Analizando los casos:
Caso 1: $z \in \partial Q_1$
En este caso $z = (u,-u)$ con $\|(u,-u)\| \leq r_2$, luego

$$J(z) = J(u,-u) = -\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx \leq 0.$$

Caso 2: $z \in \partial Q_2$
En este caso $z = (r_1\phi + u, r_1\phi - u)$, luego

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_\Omega \nabla(r_1\phi + u)\nabla(r_1\phi - u)\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |r_1\phi + u|^{q+1}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |r_1\phi - u|^{p+1}\,dx \\ &= r_1^2\int_\Omega |\nabla\phi|^2\,dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |r_1\phi + u|^{q+1}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |r_1\phi - u|^{p+1}\,dx \end{aligned}$$

$$= \frac{r_1^2}{2} - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |r_1\phi + u|^{q+1}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |r_1\phi - u|^{p+1}\,dx$$

dado que $H_0^1(\Omega) = \langle\phi\rangle \oplus \langle\phi\rangle^\perp$, donde $\langle\cdot\rangle$ representa el espacio generado, podemos escribir $u = t\phi + u_2$ para algún $t \in \mathbb{R}$ y $u_2 \perp \phi$, entonces

$$\begin{aligned} J_2(z) &= \frac{1}{q+1}\int_\Omega |r_1\phi + u|^{q+1}\,dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega |r_1\phi - u|^{p+1}\,dx \\ &= \frac{1}{q+1}\int_\Omega |(r_1+t)\phi + u_2|^{q+1}\,dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega |(r_1-t)\phi - u_2|^{p+1}\,dx \\ &= \frac{1}{q+1}\|(r_1+t)\phi + u_2\|_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{p+1}\|(r_1-t)\phi - u_2\|_{p+1}^{p+1}. \end{aligned}$$

Luego usando la Proposición A.4, existe $C > 0$ tal que

$$J_2(z) \geq \frac{C}{q+1}\|(r_1+t)\phi + u_2\|_2^{q+1} + \frac{C}{p+1}\|(r_1-t)\phi - u_2\|_2^{p+1},$$

y dado que $\phi \perp u_2$ en $L^2(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned} J_2(z) &\geq \frac{C}{q+1}\Big((r_1+t)^2\|\phi\|_2^2 + \|u_2\|_2^2\Big)^{\frac{q+1}{2}} + \frac{C}{p+1}\Big((r_1-t)^2\|\phi\|_2^2 + \|u_2\|_2^2\Big)^{\frac{p+1}{2}} \\ &\geq \frac{C}{q+1}|r_1+t|^{q+1}\|\phi\|_2^{q+1} + \frac{C}{p+1}|r_1-t|^{p+1}\|\phi\|_2^{p+1}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{r_1^2}{2} - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - J_2(z) \\ &\leq \frac{r_1^2}{2} - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{C}{q+1}|r_1+t|^{q+1}\|\phi\|_2^{q+1} - \frac{C}{p+1}|r_1-t|^{p+1}\|\phi\|_2^{p+1} \end{aligned}$$

Entonces

$$J(z) \leq \frac{r_1^2}{2} - \frac{C}{q+1}|r_1+t|^{q+1}\|\phi\|_2^{q+1} - \frac{C}{p+1}|r_1-t|^{p+1}\|\phi\|_2^{p+1} \tag{7.3}$$

siendo $\|(u,-u)\|_E \leq r_2$ entonces $\|(t\phi+u_2,-t\phi-u_2)\|_E^2 \leq r_2$, por lo tanto

$$t^2\|\nabla\phi\|_2^2 + \|\nabla u_2\|_2^2 \leq r_2^2$$

y dado que $\|e\| = \|(\phi,\phi)\|_E = 1$ entonces $\|\nabla\phi\|_2^2 = \dfrac{1}{2}$ luego $|t| \leq \sqrt{2}r_2$ por lo tanto, tomando en (7.3) r_1 suficientemente grande y dado que $q+1>2$ tendremos que $J(z) \leq 0$ para $z \in \partial Q_2$.
Caso 3: $z \in \partial Q_3$
En este caso $z = (r\phi+u, r\phi-u)$, con $0 \leq r \leq r_1$,$\|\nabla\phi\|_2^2 = \dfrac{1}{2}$ y $\|\nabla u\|_2^2 = \dfrac{r_2^2}{2}$

$$\begin{aligned}
J(z) &= J_1(z) - J_2(z)\\
&= \int_\Omega \nabla(r\phi+u)\nabla(r\phi-u)\,dx - J_2(z)\\
&= r^2\int_\Omega |\nabla\phi|^2\,dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - J_2(z)\\
&\leq \frac{r^2}{2} - \frac{r_2^2}{2} - J_2(z)\\
&\leq \frac{r_1^2}{2} - \frac{r_2^2}{2}
\end{aligned}$$

Entonces basta considerar $r_1 = r_2$ obtener $J(z) \leq 0$ para todo $z \in \partial Q_3$.
De los tres casos tenemos probado el lema. ■

Lema 7.4. *Sea (z_n) una sucesión en E , tal que $|J(z_n)| \leq C$ y $\|J'(z_n)\| \to 0$, entonces (z_n) es una sucesión limitada*

Demostración. Como $\|J'(z_n)\| \to 0$ entonces para todo $\big((\phi_n,\psi_n)\big) \subset E$

$$|J'(u_n,v_n).(\phi_n,\psi_n)| \leq \epsilon_n\|(\phi_n,\psi_n)\|_E, \quad \text{donde} \quad \epsilon_n \to \infty. \tag{7.4}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
C + \frac{\epsilon_n}{2}\|(v_n,u_n)\|_E &\geq J(u_n,v_n) + \frac{1}{2}|J'(u_n,v_n)(u_n,v_n)|\\
&\geq J(u_n,v_n) - \frac{1}{2}J'(u_n,v_n)(u_n,v_n)\\
&= (\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1})\int_\Omega |u_n|^{q+1}\,dx + (\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1})\int_\Omega |v_n|^{p+1}\,dx\\
&= (\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1})\|u_n\|_{q+1}^{q+1} + (\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1})\|v_n\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned}$$

Luego, podemos considerar que existen constantes $C_1 > 1$ y $C_2 > 1$, tales que

$$\|u_n\|_{q+1}^{q+1} \leq C_1 + C_1\epsilon_n\|(v_n, u_n)\|_E \quad \text{y} \quad \|v_n\|_{p+1}^{p+1} \leq C_2 + C_2\epsilon_n\|(v_n, u_n)\|_E.$$

Entonces

$$\|u_n\|_{q+1}^{q} \leq \big(C_1 + C_1\epsilon_n\|(v_n, u_n)\|_E\big)^{\frac{q}{q+1}} \quad \text{y} \quad \|v_n\|_{p+1}^{p} \leq \big(C_2 + C_2\epsilon_n\|(v_n, u_n)\|_E\big)^{\frac{p}{p+1}},$$

y dado que $C_1 > 1$ y $C_2 > 1$, entonces

$$\|u_n\|_{q+1}^{q} \leq C_1 + C_1\epsilon_n\|(v_n, u_n)\|_E \quad \text{y} \quad \|v_n\|_{p+1}^{p} \leq C_2 + C_2\epsilon_n\|(v_n, u_n)\|_E. \tag{7.5}$$

Por otro lado,

$$\big\|\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big\|_E^2 \leq \Big|\big\langle (v_n, u_n), \big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big\rangle\Big| = \big|J_1'(u_n, v_n)\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big| \tag{7.6}$$

Ademas usando (7.4) tenemos

$$\big|J'(u_n, v_n).\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big| \leq \epsilon_n\big\|\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big\|_E \tag{7.7}$$

Sea

$$M_n = \big\|\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big\|_E^2 - \epsilon_n\big\|\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big\|_E$$

Luego de (7.6) y (7.7), tenemos

$$\begin{aligned}
M_n &\leq \big|J_1'(u_n, v_n)\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big| - \big|J'(u_n, v_n).\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big| \\
&\leq \big|J_1'(u_n, v_n)\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big) - J'(u_n, v_n).\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big| \\
&= \big|J_2'(u_n, v_n)\big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\big)\big| \\
&\leq \Big|\int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n\big(\frac{u_n+v_n}{2}\big)\,dx\Big| + \Big|\int_\Omega |v_n|^{p-1}v_n\big(\frac{u_n+v_n}{2}\big)\,dx\Big| \\
&\leq \int_\Omega |u_n|^q\big|\frac{u_n+v_n}{2}\big|\,dx + \int_\Omega |v_n|^p\big|\frac{u_n+v_n}{2}\big|\,dx
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder para $q+1$ y $(q+1)^* = \dfrac{q+1}{q}$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n|^q \Big|\frac{u_n+v_n}{2}\Big|\,dx &\leq \Big(\int_\Omega (|u_n|^q)^{(q+1)^*}\,dx\Big)^{\frac{1}{(q+1)^*}} \Big(\int_\Omega \Big|\frac{u_n+v_n}{2}\Big|^{q+1}\,dx\Big)^{\frac{1}{q+1}}\\ &\leq \Big(\int_\Omega |u_n|^{q+1}\,dx\Big)^{\frac{q}{q+1}} \Big(\int_\Omega \Big|\frac{u_n+v_n}{2}\Big|^{q+1}\,dx\Big)^{\frac{1}{q+1}}\\ &\leq \|u_n\|_{q+1}^q \Big\|\frac{u_n+v_n}{2}\Big\|_{q+1}\end{aligned}$$

Usando las inmersiones de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ en $L^{p+1}(\Omega)$, existe $c_1 > 0$ tal que

$$\Big\|\frac{u_n+v_n}{2}\Big\|_{q+1} \leq c_1 \Big\|\nabla\Big(\frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\|_2 \leq c_1 \Big\|\Big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\|_E.$$

Luego ,

$$\int_\Omega |u_n|^q \Big|\frac{u_n+v_n}{2}\Big|\,dx \leq c_1 \|u_n\|_{q+1}^q \Big\|\Big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\|_E. \tag{7.8}$$

Análogamente, existe $c_2 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |v_n|^p \Big|\frac{u_n+v_n}{2}\Big|\,dx \leq c_2 \|u_n\|_{p+1}^p \Big\|\Big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\|_E. \tag{7.9}$$

Por lo tanto, de (7.8) y (7.9), existe $c_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}M_n &\leq c_1 \|u_n\|_{q+1}^q \Big\|\Big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\|_E + c_2 \|u_n\|_{p+1}^p \Big\|\Big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\|_E\\ &\leq c_3\big(\|u_n\|_{q+1}^q + \|u_n\|_{p+1}^p\big) \Big\|\Big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\|_E,\end{aligned}$$

luego usando la definición de M_n y simplificando, tenemos

$$\Big\|\Big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\|_E \leq \epsilon_n + c_3\big(\|u_n\|_{q+1}^q + \|u_n\|_{p+1}^p\big), \tag{7.10}$$

análogamente podemos encontrar $c_4 > 0$, tal que

$$\Big\|\Big(\frac{u_n-v_n}{2}, -\frac{u_n-v_n}{2}\Big)\Big\|_E \leq \epsilon_n + c_4\big(\|u_n\|_{q+1}^q + \|u_n\|_{p+1}^p\big). \tag{7.11}$$

Como

$$\|(u_n, v_n)\|_E = \Big\|\Big(\frac{u_n+v_n}{2}, \frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\|_E + \Big\|\Big(\frac{u_n-v_n}{2}, -\frac{u_n-v_n}{2}\Big)\Big\|_E.$$

Entonces, usando (7.10) y (7.11), tenemos

$$\|(u_n, v_n)\|_E \leq 2\epsilon_n + c_5\big(\|u_n\|_{q+1}^q + \|u_n\|_{p+1}^p\big).$$

Luego usando (7.5), tenemos

$$\|(u_n, v_n)\|_E \leq 2\epsilon_n + c_3\big(C_1 + C_2\epsilon_n\|(u_n, v_n)\|_E\big) + c_4\big(C_1 + C_2\epsilon_n\|(u_n, v_n)\|_E\big).$$

Es decir, existe $C_0 > 0$ y $(\widetilde{\epsilon_n}) \subset \mathbb{R}$ satisfaciendo $\widetilde{\epsilon}_n \to 0$, tal que

$$\|(u_n, v_n)\|_E \leq C_0 + \widetilde{\epsilon}_n\|(u_n, v_n)\|_E.$$

Por lo tanto, la sucesión $(z_n) = \big((u_n, v_n)\big)$ es limitada. ■

Lema 7.5. *Sea (z_n) una sucesión en E , tal que $|J(z_n)| \leq C$ y $\|J'(z_n)\| \to 0$, entonces existe una subsucesión convergente.*

Demostración. Por el Lema anterior, la sucesión (z_n) es limitada en E, entonces sin perdida de generalidad podemos suponer que existe $z = (u, v) \in E$, tal que

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v), \quad \text{en} \quad E,$$

entonces

$$\langle (u_n, v_n), (\phi, \psi)\rangle_E \to \langle (u, v), (u, v)\rangle_E, \quad \forall\ (\phi, \psi) \in E$$

en particular para $(\phi, \psi) = (u, 0)$ y $(\phi, \psi) = (0, v)$, de donde obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u\, dx \to \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \tag{7.12}$$

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla v\, dx \to \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \tag{7.13}$$

ademas por la inmersión compacta de $E \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega) \times L^{q+1}(\Omega)$, podemos suponer que

$$u_n \to u, \quad \text{en} \quad L^{p+1}(\Omega), \tag{7.14}$$

$$v_n \to v, \quad \text{en} \quad L^{q+1}(\Omega), \tag{7.15}$$

De la limitación de (v_n) y la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, existe $M > 0$, tal que

$$\Big(\int_\Omega |v_n|^{(p+1)}\, dx\Big)^{\frac{1}{p+1}} \leq M \quad \text{para todo} \quad n \geq 1. \tag{7.16}$$

Entonces usando la desigualdad de Hölder y (7.14), tenemos

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega |v_n|^{p-1}v_n(u_n-u)\,dx\Big| &\leq \int_\Omega |v_n|^p|u_n-u|\,dx\\
&\leq \Big(\int_\Omega |v_n|^{p(p+1)^*}\,dx\Big)^{\frac{1}{(p+1)^*}}\Big(\int_\Omega |u_n-u|^{p+1}\,dx\Big)^{\frac{1}{p+1}}\\
&\leq \Big(\int_\Omega |v_n|^{p+1}\,dx\Big)^{\frac{p}{p+1}}\Big(\int_\Omega |u_n-u|^{p+1}\,dx\Big)^{\frac{1}{p+1}}\\
&\leq M^p\Big(\int_\Omega |u_n-u|^{p+1}\,dx\Big)^{\frac{1}{p+1}}.
\end{aligned}$$

Luego, usando (7.16)

$$\Big|\int_\Omega |v_n|^{p-1}v_n(u_n-u)\,dx\Big| \to 0. \tag{7.17}$$

Note que

$$|J'(u_n,v_n)(u_n-u,0)| \leq \epsilon_n\|(u_n-u,0)\|_E,$$

es decir

$$\Big|\int_\Omega \nabla u_n\nabla(u_n-u)\,dx - \int_\Omega |v_n|^{p-1}v_n(u_n-u)\,dx\Big| \leq \epsilon_n\|(u_n-u,0)\|_E.$$

usando (7.17), obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u_n\nabla(u_n-u)\,dx \to 0,$$

entonces

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega \nabla u_n\nabla u\,dx \to 0.$$

Luego, usando (7.12)

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \tag{7.18}$$

Observe que

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - 2\int_\Omega \nabla u_n\nabla u\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

Luego, usando (7.12) y (7.18), obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2\,dx \to 0. \tag{7.19}$$

De manera similar es posible probar

$$\int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2 \, dx \to 0. \tag{7.20}$$

Note también que

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\|_E^2 = \|(u_n - u, v_n - v)\|_E^2 = \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2 \, dx$$

Finalmente, usando (7.19) y (7.20), obtenemos

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\|_E^2 \to 0.$$

Mostrando, que

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \quad \text{en} \quad E.$$

Probando así que existe una subsucesión convergente. ■

Teorema 7.6. *El sistema S_2 posee una solución no trivial definida en $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Dado que J es un funcional ser fuertemente indefinido, usaremos el Teorema de Paso de Montaña para funcionales fuertemente indefinidos, donde

$$H = E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad H_1 = E^+, \quad H_2 = E^-.$$

Del Lema 7.5 tenemos que se satisface la condición de Palais-Smale. Las condiciones se satisfacen por los Lemas 7.1, 7.2 , 7.3 y además se satisface la condición (iii) (ver [10]). Por lo tanto, existe un punto crítico no trivial para el funcional J es decir el sistema $(\mathcal{S}_2)$, posee una solución no trivial.

■

Apéndice A

Resultados Básicos

En este apéndice son presentados resultados básicos que son utilizados en el desenvolvimiento de este trabajo. Aunque son omitidas las demostraciones de los resultados, son citadas las referencias que la contienen

Definición A.1. *Sea u una función de clase $C^2(\Omega)$. El Laplaciano de u, denotado por Δu, es el operador diferencial definido por*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Proposición A.2. ***(Primera Identidad de Green)*** *Sean Ω un dominio limitado cuja frontera es una hiperfície de clase $\mathcal{C}^1$ y η es el vector normal unitario exterior a la frontera de Ω. Dado dos funciones $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$, entonces*

$$-\int_\Omega \Delta u\, \phi\, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi\, dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\, ds.$$

Teorema A.3. ***(Desigualdad de Hölder)*** *[7, Theorem 4.6] Sean Ω un dominio abierto de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad y \quad \int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proposición A.4. *Si $\mu(\Omega) < \infty$ y $1 \leq r < p$. Entonces $L^p(\Omega) \subseteq L^r(\Omega)$ y existe $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_r \leq c\|u\|_p \quad \forall\, u \in L^p(\Omega).$$

Teorema A.5. ***(Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue)*** *[7, Theorem 4.2] Sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ que satisface:*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *c.t.p. en* Ω,

(ii) Existe una función $h \in L^1(\Omega)$, *tal que para todo* $n \geq 1$, *se verifica* $|f_n(x)| \leq h(x)$ *c.t.p. en* Ω.

Entonces,

$$f \in L^1(\Omega) \quad y \quad \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0.$$

Teorema A.6. *[7, Theorem 4.9] Sea* Ω *un dominio abierto en* $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$, (u_n) *una sucesión* $L^p(\Omega)$ *y* $u \in L^p(\Omega)$, *tales que*

$$u_n \longrightarrow u, \quad en \quad L^p(\Omega).$$

Entonces, existen una subsucesión $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$ *y* $g \in L^p(\Omega)$, *satisfaciendo:*

(i) $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$ *c.t.p. en* Ω,

(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq g(x)$ *c.t.p. en* Ω, *para todo* $k \geq 1$.

Teorema A.7. ***{Teorema de Representación de Riesz}*** *[7, Theorem 4.11] Sea* Ω *un dominio abierto en* $\mathbb{R}^N$, $1 < p < \infty$, *y sea* $\phi \in \big(L^p(\Omega)\big)^*$ *Entonces, existe una única función* $u \in L^{p'}(\Omega)$, *tal que*

$$\phi(f) = \int_\Omega fu\, dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Ademas

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\phi\|_{(L^p)^*}.$$

Lema A.8. ***(Lema de Brezís-Lieb, primera version)*** *Sea* Ω *un dominio abierto en* $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$, (u_n) *una sucesión* $L^p(\Omega)$ *tales que*

(i) (u_n) *es una sucesión limitada en* $L^p(\Omega)$,

(ii) $u_n \to u$ *c.t.p. en* Ω.

Entonces

$$u_n \rightharpoonup u, \quad en \quad L^p(\Omega).$$

Demostración. Ver [20]. ■

Lema A.9. ***(Lema de Brezís-Lieb, segunda version)*** *[7, Theorem 4.9] Sea* Ω *un dominio abierto en* $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$, (u_n) *una sucesión* $L^p(\Omega)$ *tales que*

(i) (u_n) *es una sucesión limitada en* $L^p(\Omega)$,

(ii) $u_n \to u$ *c.t.p. en* Ω.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p \right) = \|u\|_p^p.$$

A.1 Espacios de Sobolev

Definición A.10. *Sean* $u, v \in L^1_{Loc}(\Omega)$ *y* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *un multi-índice de orden* $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. *Decimos que* v *es* α*-derivada débil de* u *y escribimos* $D^\alpha u = v$, *desde que*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \, dx, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

con $D^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_n}} \varphi$.

Definición A.11. *Sean* $p \in [1, \infty]$, k *un entero positivo y* Ω *un abierto no vacío de* $\mathbb{R}^N$ *con* $N \geq 1$. *Definimos el espacio de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *como*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N \textit{ con } |\alpha| \leq k\}.$$

Observe que en la definición de $W^{k,p}(\Omega)$ la derivada considerada es la derivada débil. Asi, decir que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ significa que existe $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u = v_\alpha$ en el sentido débil.

Definición A.12. *Si* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *definimos su norma como*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & , \quad p = \infty. \end{cases}$$

Definición A.13. *Definimos el espacio* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *como*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_c^\infty}(\Omega)^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}$$

es decir

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : \exists (u_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),\ \textit{tal que } u_n \to u \textit{ en } W^{k,p}(\Omega) \right\}.$$

Además cuando $\Omega = \mathbb{R}^N$, tenemos

$$W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N) = W^{k,p}(\mathbb{R}^N).$$

Si $p = 2$ e $k = 1$ escribiremos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \quad \text{y} \quad H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Denotaremos por $H^{-1}(\Omega)$ como el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$

Definición A.14. *Sean Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 3$. Definimos el espacio $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ como*

$$\mathcal{D}^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^{2^*}(\Omega) : \ \nabla u \in L^2(\Omega)\}.$$

Con norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

Definición A.15. *Definimos el espacio $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ como*

$$\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_c^\infty}(\Omega)^{\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{1,2}}}$$

es decir

$$\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega) := \left\{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\Omega) : \exists (u_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \ \textit{tal que } u_n \to u \textit{ en } \mathcal{D}^{1,2}(\Omega)\right\}.$$

Teorema A.16. ***(Desigualdad de Poincaré)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|\Omega| < \infty$ entonces existe $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|\nabla u\|_2, \quad \forall \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Además la constante

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2},$$

es alcanzada en $H_0^1(\Omega)$.

Teorema A.17. ***(Desigualdad general de Sobolev)*** *[1, Theorem 4.12] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto limitado regular. Entonces las inmersiones a seguir son continuas:*

(i) Si $kp < N$ entonces $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq \frac{pN}{N-kp}$.

(ii) Si $kp = N$ e $p > 1$ entonces $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$.

Corolario A.18. *(i) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto limitado regular. Entonces las inmersiones*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{para todo} \quad 1 \leq q < \infty,$$

son continuas.

(ii) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ un abierto limitado regular. Entonces las inmersiones

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{para todo} \quad 1 \leq q \leq \frac{2N}{N-2},$$

son continuas.

Teorema A.19. ***(Inmersiones Compactas: Rellich-Kondrachov)*** *[1, Theorem 6.3] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto limitado regular. Entonces, las seguintes inmersiones son compactas:*

(i) Si $kp < N$ entonces $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \frac{pN}{N-kp}$.

(ii) Si $kp = N$ y $p > 1$ entonces $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$.

Corolario A.20. *(i) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto limitado regular. Entonces las inmersiones*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{para todo} \quad 1 \leq q < \infty,$$

son compactas.

(ii) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ un abierto limitado regular. Entonces las inmersiones

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{para todo} \quad 1 \leq q < \frac{2N}{N-2},$$

son compactas.

Bibliografía

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. Second edition. Pure and applied mathematics. Elsevier, 2003.

[2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz. *Dual variational methods in critical point theory and applications*. J. Funct. Anal. 14 (1973), 349–381.

[3] V. Bensi and P. H. Rabinowitz. *Critical point theorems for indefinite functionals* Invent, Math, 52 (1979), 241-273

[4] J. Hulshof and R. van der Vorst. *Differential systems with strongly indefinite variational structure.* J. Funct. Anal. 114 (1993), 32?58

[5] J. Hale. *Ordinary Differential Equations.* 2nd Ed., Krieger, 1980.

[6] P.L. Lions. *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations The locally compact case.* Ann. Inst. H. Poincaré, Vol. II 1 (1984), pp. 223?2832nd Ed., Krieger, 1980.

[7] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext, Springer, 2010.

[8] H. Brezis and L. Niremberg. *Positive Solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math 36 (1984) 437-477

[9] Lima, E. L. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA (2005).

[10] EH. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*,CBMS Reg. Conf. Ser. Math., vol. 65, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1986).

[11] G. B. Folland. *Introduction to partial differential equations*. (2a Edição), Princeton University Press, 1995.

[12] P. L. Lions. *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variatons. The Limit Case, Part 2* Revista Matemática Iberoamericana Vol. 1, no 1 (1985), 145-201.

[13] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of Second Order*. Springer, 1998.

[14] M. Willem. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 24. Birkhäuser, 1996.

[15] W. Y. Ding and W. M. Ni. *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*. Arch. Rat. Mech Anal. 31 (1986) 283-308

[16] R. S. Palais. *The principle of symmetric criticality*. Comm. Math. Phys. 69,(1979), 19-30.

[17] W. A. Strauss. *Existence of solitary waves in higher dimensions*. Comm. Math. Phys. 55,(1977), 149-162.

[18] D. Clark. *A variant of the Ljusternik-Schnirelman theory.* Indiana J. Math 22 (1973), 65-74

[19] M. Willem. *Lectures on critical point theory* . Trabalho de Matemática 199 (1983), Universidade de Brasília

[20] M. Willem. *Analyse Harmonique Réelle*, Hermann, Paris, 1995.