



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Matemáticas**

**Escuela Académico Profesional de Matemática**

**La integral de Melnikov asociada a un punto de  
equilibrio hiperbólico de tipo silla**

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

**AUTOR**

Vladimir Alfredo DIONISIO ARMAS

**ASESOR**

Roxana LÓPEZ CRUZ

Lima, Perú

2016



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Dionisio, V. (2016). *La integral de Melnikov asociada a un punto de equilibrio hiperbólico de tipo silla*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Académico Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

957



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34

Teléfono IP Nº 619-7000

Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe

Lima - Perú

Escuela Académico-Profesional de Matemática

7(12)

63

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ...16:20... horas del día jueves 14 de julio 2016, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Calificador de Tesis: Dr. Renato Mario Benazic Tomé (Presidente), Tomás Alberto Núñez Lay (Miembro), Dra. Roxana López Cruz (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «LA INTEGRAL DE MELNIKOV ASOCIADA A UN PUNTO DE EQUILIBRIO HIPERBÓLICO DE TIPO SILLA)», presentado por el señor Bachiller VLADIMIR ALFREDO DIONISIO ARMAS, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

.....DIECIOCHO.....(18).  
(SOBRESALIENTE)

A continuación el Presidente del Jurado, Dr. Renato Mario Benazic Tomé, manifestó que el señor Bachiller VLADIMIR ALFREDO DIONISIO ARMAS, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ...17:20... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. RENATO MARIO BENAZIC TOMÉ  
PRESIDENTE

DRA. ROXANA LÓPEZ CRUZ  
MIEMBRO ASESOR

MG. TOMÁS ALBERTO NÚÑEZ LAY  
MIEMBRO

LA INTEGRAL DE MELNIKOV ASOCIADA A UN PUNTO DE EQUILIBRIO  
HIPERBÓLICO DE TIPO SILLA.

Vladimir Alfredo Dionisio Armas

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

.....  
Dr. Renato Mario Benazic Tomé  
Presidente

.....  
Mg. Tomas Alberto Nuñez Lay  
Miembro

.....  
Dra. Roxana López Cruz  
Miembro Asesor

Lima - Perú  
Julio - 2016

## FICHA CATALOGRÁFICA

DIONISIO ARMAS, VLADIMIR ALFREDO

La Integral de Melnikov asociada a un punto de equilibrio hiperbólico de tipo silla, (Lima) 2016.

vii, 70 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2016).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática. UNMSM/FdeCM II. Título (Serie).

*Dedicatoria*

*A mis padres: Máximo Alfredo y Celmith,  
a mis hermanos: José Antonio y Albert Iván  
y para mi sobrina Alessandra Thais.*

# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos-U.N.M.S.M.  
A la Facultad de Ciencias Matemáticas.  
A la Escuela Académica Profesional-E.A.P. de Matemática.  
A los responsables de mi formación académica:  
Al Decano: Dr(a) Doris Gómez Ticerán.  
Al Director de Escuela: Mg: José Perez Arteaga.  
A los Profesores:  
Al Dr: Agripino Garcia Armas (Q.E.P.D.)  
Al Dr: Moises Izaguirre Maguiña (Q.E.P.D.)  
Al Mg: Tomas Nuñez Lay.  
Al Dr: Edgar Vera Saravia.  
A mi asesora Dr(a): Roxana López Cruz.  
A mi familia.  
A las personas que colaboraron en la realización del presente trabajo.

*Vladimir Alfredo Dionisio Armas*



## RESUMEN

La Integral de Melnikov asociada a un punto de equilibrio hiperbólico de tipo silla.

Vladimir Alfredo Dionisio Armas

Julio- 2016

Orientador(a): Ph. D. Roxana López Cruz.

Título obtenido: Licenciado en Matemática

.....  
En este trabajo, se presenta la Integral de Melnikov para un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Hamiltoniano, asociado a una perturbación uniparamétrica.

Como parte central del trabajo, se desarrolla un método para probar la existencia o no existencia de puntos homoclínicos transversales.

Finalmente, se presenta como aplicación un estudio sobre la existencia y unicidad de una solución de tipo onda viajante para un modelo matemático en la combustión en un medio poroso.

**PALABRAS CLAVES:** Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Punto de Equilibrio Hiperbólico, Punto Homoclínico, Integral de Melnikov, Combustión en un Medio Poroso, Onda Viajante.

ABSTRACT

MELNIKOV'S INTEGRAL ASSOCIATED WITH A SADDLE HIPERBOLIC  
EQUILIBRIUM POINT.

VLADIMIR ALFREDO DIONISIO ARMAS

July - 2016

Advisor: Roxana López Cruz, Ph. D.  
Obtained Professional Title: Mathematics.

.....  
In this work, we present the Melnikov's Integral for a Hamiltonian system of differential equations associated with one-parameter perturbation.

As a central part of the work, we develop a method to prove the existence or nonexistence of transverse homoclinic points.

Finally, we present an application about the existence and uniqueness of a solution of traveling wave type for a mathematical model for the combustion in a porous medium.

KEYWORDS: Ordinary Differential Equations, Hyperbolic Equilibrium Point, Homoclinic Point, Melnikov's Integral, Combustion in Porous Medium, Traveling Wave.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Definiciones y resultados básicos	3
2.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias	4
2.3. Sistemas Lineales	7
2.3.1. Flujos y subespacios invariantes	8
2.4. Sistemas No Lineales	12
2.5. La aplicación de primer retorno de Poincaré	15
<b>3. Variedades Diferenciables.</b>	<b>17</b>
3.1. Definiciones Topológicas	17
3.2. Variedades Diferenciables	19
<b>4. La integral de Melnikov.</b>	<b>20</b>
4.1. Definiciones básicas.	20
4.2. La función de Melnikov.	26
<b>5. Una aplicación en la combustión en un medio poroso.</b>	<b>35</b>
5.1. Introducción.	35
5.2. Modelo matemático	35
5.3. Estudio del modelo matemático.	38
5.4. Ondas viajantes rápidas ( $0 < a < c$ ).	43
<b>6. Conclusiones y recomendaciones.</b>	<b>61</b>
6.1. Conclusiones.	61
6.2. Recomendaciones.	62

# Capítulo 1

## Introducción

Un Sistema Dinámico es un proceso cuya evolución se da por una ley matemática que puede ser una función o una ecuación diferencial.

El objetivo, al estudiar un sistema dinámico, es comprender y prever la evolución de ese sistema. Así, si se tiene un sistema dinámico definido en un conjunto  $X$  y si se elige un punto  $x \in X$ , uno de los objetivos de la teoría de sistemas dinámicos consiste en saber si la órbita de ese punto, es decir, el conjunto dado por los puntos que describen la evolución de  $x$  a través del sistema, tiene algún límite. Si es que no se cumple esta condición, al menos describir los puntos en los cuales la órbita se aproxima infinitas veces en el futuro.

En la primera parte de este trabajo, se estudia la perturbación de un sistema dinámico que posee un punto de equilibrio con variedades estable e inestable que se intersectan. El comportamiento dinámico posee propiedades que llevan a la noción de caos. Por ejemplo, si las variedades estable e inestable de un punto de equilibrio se intersectan transversalmente es posible mostrar, usando la teoría de Poincaré, Birkhoff y Smale, la existencia de infinitas órbitas periódicas de período arbitrariamente grande.

La idea de separatrices que se intersectan transversalmente apareció por primera vez en el famoso artículo de Henri Poincaré sobre el **Problema de los Tres Cuerpos** de 1890. En 1963 y 1964 Melnikov y Arnold desarrollaron una teoría para mostrar que el péndulo

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = \varepsilon \cos(at)$$

no es integrable, en el sentido de que no existen integrales analíticas. Para esto, se perturba el sistema creando una órbita homoclínica cerca de una singularidad no hiperbólica. Con esto se generan infinitas órbitas periódicas de período arbitrariamente grande.

Las ideas básicas que se introducirán aquí se deben a Melnikov V. K. (1963) y posteriormente en (1980) Chow, S. N., Hale, J. K., y Mallet-Paret, J. han obtenido resultados similares usando métodos alternativos y Holmes y Marsden (1981) han aplicado el método a ciertos flujos infinito-dimensionales derivadas de ecuaciones en derivadas parciales y de varios grados de libertad de los sistemas autónomos Hamiltonianos, así mismo el método de Melnikov se ha aplicado al estudio de los sistemas dinámicos perturbados por Morozov (1973, 1976), McLaughlin (1979) y Holmes (1979, 1980), en particular, Morozov (1979) y Holmes han estudiado la Ecuación de Duffing utilizando el método.

En la segunda parte se presenta una aplicación en combustión en un medio poroso donde se probará la existencia y unicidad de una solución de tipo onda viajante.

Este trabajo, está organizado de la siguiente forma, en el Capítulo 2 y Capítulo 3, se presentan los principales resultados básicos del Análisis Real, una breve revisión teórica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) y de Variedades Diferenciables, respectivamente, herramientas que en su conjunto se van a utilizar en el desarrollo del presente trabajo, en el Capítulo 4, se realiza el estudio de la Integral de Melnikov para un sistema Hamiltoniano que admite una órbita homoclínica asociada a un punto de equilibrio hiperbólico de tipo silla; así como también, se va a desarrollar un método para probar la existencia o no existencia de puntos homoclínicos transversales en un sistema Hamiltoniano al adicionar una pequeña perturbación, al adicionar un término no autónomo al sistema no perturbado, así mismo en el Capítulo 5, se presenta una aplicación de la Integral de Melnikov para el estudio de un modelo matemático en la combustión en un medio poroso, modelo matemático que se transforma en un sistema de EDO's bidimensional al realizar un cambio de variables, el cual pasa a ser objeto de estudio y se demostrará la existencia y la unicidad de una órbita para el sistema de EDO's, correspondiendo a la existencia y unicidad de una onda viajante para el modelo matemático. Se utilizará la teoría de perturbaciones para mostrar la existencia y de la Integral de Melnikov para probar la unicidad de la órbita del sistema de EDO's y finalmente en el Capítulo 6, se presentan las conclusiones y recomendaciones correspondientes del presente trabajo.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se presentan las herramientas que se van a utilizar en el desarrollo de todo el trabajo de tesis, tales como una breve revisión de los principales resultados de Análisis Real y de la teoría básica de EDO's.

### 2.1. Definiciones y resultados básicos

**Definición 1.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$ , una aplicación  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  es llamada **Lipschitziana** cuando existe  $L > 0$  (constante de Lipschitz de  $f$ ) tal que, para cualesquiera  $x, y \in X$ , se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

**Teorema 1.** Sea  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación continua. Si  $K \subset X$  es un conjunto compacto entonces  $f(K)$  es un conjunto compacto.

La demostración de este teorema puede ser vista en [6](pp. 45-46).

**Corolario 1. (Weierstrass).** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto. Si  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación continua, entonces existen  $x_0, x_1 \in K$  tal que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para todo  $x \in K$ .

La demostración de este corolario puede ser vista en [6](pp. 45-46).

**Lema 2.1.1. La desigualdad de Gronwall generalizado.**

Sean  $u, v$  y  $c$  funciones continuas y  $c \geq 0$  en  $[0, t]$  con  $c$  derivable en  $]0, t[$  tales que

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds.$$

Entonces

$$v(t) \leq c(0)\exp\left[\int_0^t u(s)ds\right] + \int_0^t \dot{c}(s)\exp\left[\int_s^t u(\tau)d\tau\right]ds.$$

La demostración de este lema puede ser vista en [3](pp. 37).

**Teorema 2. De la aplicación implícita.**

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida en el conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ , diferenciable en el punto  $a \in U$ , con  $f(a) = c$ . Si  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$  es una descomposición en suma directa tal que  $a = (a_1, a_2)$  y la derivada  $\partial_2 f(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo, entonces existen conjuntos abiertos  $V, Z$  (donde  $a_1 \in V \subset \mathbb{R}^m, a \in Z \subset U$ ) con la siguiente propiedad: para cada  $x \in V$  existe un único  $\xi(x) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(x, \xi(x)) \in Z$  y  $f(x, \xi(x)) = c$ .

La aplicación  $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  así definida y diferenciable en el punto  $a_1$  y su derivada en aquel punto es

$$\dot{\xi}(a_1) = -[\partial_2 f(a)]^{-1} \circ [\partial_1 f(a)].$$

La demostración de este teorema puede ser vista en [6](pp. 295-296).

**Teorema 3. Fórmula de Taylor.**

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^2$  en el conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Para un punto fijo  $a \in U$  y para todo  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a + v \in U$ , se escribe:

$$f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \alpha_i \alpha_j + r(v).$$

las derivadas son calculadas en el punto  $a$ . Entonces  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|^2} = 0$ .

La demostración de este teorema puede ser vista en [6](pp. 261-262).

## 2.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias

**Definición 2.** Sean  $J \subset \mathbb{R}$  y  $U \subset \mathbb{R}^n$  subconjuntos abiertos no vacíos y  $F : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación de clase  $C^r, r \geq 1$ . Una **ecuación diferencial ordinaria** es la ecuación que asume la siguiente forma:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(k-1)}(t), x^{(k)}(t)) = 0, \text{ con } k \leq r \tag{2.1}$$

con  $t \in J$  y  $x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(k-1)}(t), x^{(k)}(t) \in U$ . Siendo el punto la representación de la diferenciación de  $x$  con respecto a  $t$ .

**Definición 3.** El **orden** de la ecuación diferencial ordinaria (2.1) es el mayor orden de la derivada que se encuentra en la ecuación diferencial ordinaria.

La solución de la ecuación diferencial ordinaria (2.1) se presenta en la siguiente:

**Definición 4.** Se dice que una función  $\gamma : J_0 \subset J \rightarrow U$  de clase  $C^r$  con  $r \geq 1$  es la **solución** de la ecuación diferencial ordinaria (2.1) si satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $J_0$  es un subconjunto abierto no vacío de  $J$ .

(ii)  $(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t), \dots, \gamma^{(k-1)}(t), \gamma^{(k)}(t)) \in J \times U$  para todo  $t \in J_0$ .

(iii)  $F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t), \dots, \gamma^{(k-1)}(t), \gamma^{(k)}(t)) = 0$  para todo  $t \in J_0$ .

Para los fines de este trabajo de tesis, se desarrollarán ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Es decir, ecuaciones de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

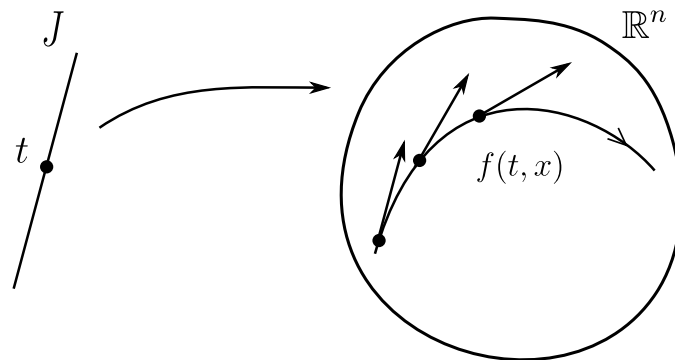
Aquí,  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  es una función vectorial de una variable independiente (usualmente el tiempo  $t$ ) y  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación de clase  $C^r$ ,  $1 \leq r < \infty$  definida sobre un subconjunto abierto no vacío  $J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

**Definición 5.** Sea  $J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  subconjunto abierto. Un **campo vectorial** de clase  $C^r$ ,  $1 \leq r < \infty$  en  $U$  es una aplicación  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^r$ . El campo vectorial  $f$  es asociado a la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x).$$

### Observación:

Físicamente, se interpreta a la igualdad anterior como el campo vectorial con la condición que fija la velocidad  $\dot{x} = f(t, x(t))$  de una partícula en la posición  $x$  en el instante  $t$  y geoméricamente, se interpreta también como que existe un vector  $f(t, x)$  en la posición  $x$  en el instante  $t$ . Ver la **figura 2.1**.



**Figura 2.1:** El campo vectorial  $f$ .

Fuente: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Guckenheimer, Jhon; Holmes, Philip.



**Definición 6.** La aplicación  $\dot{x} = f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  con  $x \in \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial **Hamiltoniano** si existe una función

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \mathcal{H}(u, v) \end{aligned}$$

de clase  $C^2$  verificando

$$f_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v}(u, v) \text{ y } f_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(u, v). \quad (2.3)$$

**Definición 7.** Una función  $\gamma(t) : J_0 \subset J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , siendo  $J$  un intervalo abierto no vacío de  $\mathbb{R}$  y  $\gamma$  de clase  $C^1$  en ese intervalo, es una solución de (2.2) si satisface:

$$\dot{\gamma}(t) = f(t, \gamma(t)).$$

Es decir,  $\gamma(t)$  es una solución del sistema (2.2) si, y solamente si, la trayectoria de la partícula es tangente al campo vectorial en cada uno de sus puntos.

**Definición 8.** Se dice que el campo vectorial  $f$  genera un **flujo**  $\phi_t : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $\phi_t = \phi(t, x)$  es una aplicación de clase  $C^r$ ,  $1 \leq r < \infty$  definida para todo  $(t, x)$  en  $J \times U$ , si verifica (2.2) en el sentido que

$$\frac{d}{dt}(\phi(t, x))|_{t=\tau} = f(\phi(\tau, x)). \quad (2.4)$$

para todo  $(t, x) \in J \times U$ . En este dominio de definición  $\phi_t$  satisface las siguientes propiedades:

- (i)  $\phi_0 = \phi(0, x) = x$ .
- (ii)  $\phi_{t+s} = \phi(t + s, x) = \phi(t, (\phi(s, x))) = \phi_t \circ \phi_s, \quad \forall t, s \in J$ .

**Definición 9.** Sea  $x_0$  un punto en el diagrama de fase para (2.1). Se dice que la órbita de  $x_0$ , denotado por  $O(x_0)$ , es el conjunto de puntos que describe la solución de (2.1) basado en el punto  $x_0$ . Mas precisamente, para  $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ , entonces la **órbita** que pasa por  $x_0$  es dada por el siguiente conjunto

$$O(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(t, x_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

### Observación:

Una diferencia entre la solución y la órbita de una ecuación diferencial ordinaria es que la solución indica la velocidad con que se recorre la órbita.

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma (2.2), en la cual el campo vectorial no contiene el tiempo en la forma explícita, es decir, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de la siguiente forma  $\dot{x} = f(x)$  son llamados **sistemas autónomos**.

**Definición 10.** Se dice que  $x \in U$  es un **punto de equilibrio** del campo vectorial  $f$  cuando  $f(x) = 0$ . Un punto que no es de equilibrio es llamado **punto regular** de  $f$ .

Existen problemas en que se busca la trayectoria de una partícula siguiendo un campo vectorial dado y que en algún instante inicial está localizado en una posición particular, son llamados **Problemas de Valor Inicial (PVI)**.

**Teorema 4. De existencia y unicidad**

Considere el siguiente (PVI)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

definido para  $(t, x), (t_0, x_0) \in J \times U$ , donde  $f$  es de clase  $C^1$  en  $U$ . Se tiene que:

- (i) Para cada punto  $(t_0, x_0) \in J \times U$  existe una solución  $x = \gamma(t)$  del sistema (2.5) tal que:  $\gamma(t_0) = x_0$ .
- (ii) Si dos soluciones  $x = \gamma(t)$  y  $y = \psi(t)$  del sistema (2.5) son iguales para un valor  $t = t_0$ , es decir,  $\gamma(t_0) = \psi(t_0)$ , entonces ellas continúan iguales para todos los valores de  $t$  en que ambas están definidas; para todo  $|t - t_0|$  suficientemente pequeño.

La demostración de este teorema puede ser vista en [10] pp. 19-24.

## 2.3. Sistemas Lineales

**Definición 11.** Sea  $A$  una matriz de orden  $n \times n$  con entradas constantes reales o complejas. Entonces los **valores propios** de  $A$  son números  $\lambda$  reales o complejos tales que

$$(A - \lambda I_{n \times n})\vec{u} = 0$$

tiene soluciones no triviales. Así mismo, las soluciones correspondientes  $\vec{u}$  son llamadas **vectores propios** de  $A$  asociados al valor propio  $\lambda$ .

**Definición 12.** Sea  $A$  una matriz de orden  $n \times n$  con entradas constantes reales o complejas. Entonces, el **espectro** de  $A$ , denotado por  $\sigma(A)$  es dado por el siguiente conjunto

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_{n \times n} - A \text{ es no invertible} \}.$$

Sea  $A$  una matriz de orden  $n \times n$  con entradas constantes reales o complejas, entonces vamos a considerar el siguiente PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

El siguiente teorema que se presenta a continuación va a garantizar la existencia y unicidad de la solución para el PVI (2.6).

**Teorema 5. (Fundamental para Sistemas Lineales)** Sea  $A$  una matriz de orden  $n \times n$  con entradas constantes reales o complejas. Entonces para un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  fijo, el PVI (2.6) tiene una única solución de la siguiente forma:

$$x(x_0, t) = e^{tA}x_0. \quad (2.7)$$

donde  $e^{tA}$  es una matriz de orden  $n \times n$  obtenida por la exponencial de  $A$  como la serie uniformemente convergente sobre un conjunto compacto para  $|t| \leq t_0$  con  $t_0 > 0$ , dada por,

$$e^{tA} = \left[ I_{n \times n} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots \right]. \quad (2.8)$$

La demostración de este teorema puede ser vista en [11](pp. 17-18). Así mismo, una solución general para el sistema (2.6) puede ser obtenido por la superposición lineal de  $n$  soluciones linealmente independientes  $\{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$ :

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^j(t),$$

donde las  $n$  constantes  $c_j$  son determinadas por las condiciones iniciales.

Si la matriz  $A$  de orden  $n \times n$  tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes  $v^j$  con  $j = 1, \dots, n$ , entonces podemos tomar como base para el espacio de soluciones las funciones vectoriales

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t} v^j$$

donde  $\lambda_j$  es el valor propio asociado con  $v^j$ . Para valores propios complejos sin multiplicidad,  $\lambda_j$ , es decir,  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ , teniendo vectores propios  $v^R \pm iv^I$ , podemos tomar

$$\begin{aligned} x^j &= e^{\alpha_j t} (v^R \cos \beta t - v^I \sin \beta t) \\ x^{j+1} &= e^{\alpha_j t} (v^R \cos \beta t + v^I \sin \beta t) \end{aligned}$$

como el par asociado de soluciones reales linealmente independientes.

### 2.3.1. Flujos y subespacios invariantes

Dado cualquier punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\phi(x_0, t) = e^{tA}x_0$  es el punto en el cual la solución del sistema (2.6) en el punto  $x_0$  se encuentra después del tiempo  $t$ . Por lo tanto el operador  $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contiene la información global sobre el conjunto de todas las soluciones de (2.6) ya que (2.8) se verifica en todos los puntos de  $\mathbb{R}^n$ .

Tenemos que la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \phi : J \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto \phi(t, x) = e^{tA}x \end{aligned}$$

define un flujo en  $\mathbb{R}^n$ , pues satisface

$$i) \phi(0, x_0) = e^{0A}x_0 = x_0, \text{ para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{ii) } \phi(t+s, x_0) = e^{(t+s)A}x_0 = e^{tA} \cdot e^{sA}x_0 = e^{tA}(\phi(s, x_0)) = \phi(t, \phi(s, x_0)), \quad \forall t, s \in J.$$

y este flujo es generado por un campo vectorial  $Ax$  definido en  $\mathbb{R}^n$ .

El flujo  $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  describe todas las soluciones del sistema (2.6). En este conjunto ciertas soluciones tienen un papel muy importante; aquellos que se encuentran en los subespacios lineales generado por los vectores propios.

**Definición 13.** Un subespacio  $E \subset \mathbb{R}^n$  es llamado **subespacio invariante** con respecto al flujo  $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si  $e^{tA}E \subset E$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , más precisamente

$$x \in E \Rightarrow e^{tA}x \in E, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Estos subespacios son invariantes bajo  $e^{tA}$ , en particular, si  $v^j$  es un vector propio real de  $A$  y, por tanto de  $e^{tA}$ , entonces la solución basada en el punto  $c_j v^j \in \mathbb{R}^n$  permanece en el  $\text{span}\{v^j\}$  para todo tiempo; es decir,

$$x(cv^j, t) = cv^j e^{\lambda_j t}.$$

Similarmente, los espacios bidimensionales generados por  $\text{Re}\{v^j\}, \text{Im}\{v^j\}$ , cuando  $v^j$  es un vector propio complejo, es invariante bajo  $e^{tA}$ .

Dividimos los espacios propios generados por los vectores propios en tres espacios y estos son:

$$\begin{aligned} &\text{el subespacio estable, } E^s = \text{span}\{v^1, \dots, v^{n_s}\}, \\ &\text{el subespacio inestable, } E^u = \text{span}\{u^1, \dots, u^{n_u}\} \text{ y} \\ &\text{el subespacio central, } E^c = \text{span}\{w^1, \dots, w^{n_c}\}, \end{aligned}$$

donde  $v^1, \dots, v^{n_s}$  son los  $n_s$  vectores propios asociados a los valores propios con la parte real negativa,  $u^1, \dots, u^{n_u}$  son los  $n_u$  vectores propios que están asociados a los valores propios con la parte real positiva y  $w^1, \dots, w^{n_c}$  son los  $n_c$  vectores propios asociados a los valores propios que tienen la parte real igual a cero. Así mismo, se tiene que

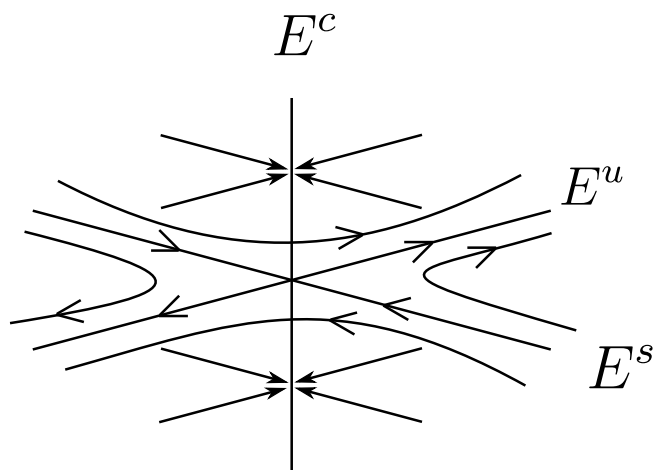
$$n_s + n_u + n_c = n.$$

**Teorema 6. (Descomposición Primaria)** Sea  $A$  una matriz real de orden  $n \times n$  diagonalizable en  $\mathbb{C}$ . Entonces

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c \tag{2.9}$$

donde  $E^s, E^u$  y  $E^c$  son los espacios estable, inestable y central de (2.6), respectivamente. Así mismo  $E^s, E^u$  y  $E^c$  son invariantes con respecto al flujo  $e^{tA}$  de (2.6) respectivamente.

La demostración de este teorema puede ser vista en [11](pp. 55). Este teorema dice que cualquier solución que comienza en  $E^s, E^u$  o  $E^c$  en un tiempo  $t = 0$  permanece en  $E^s, E^u$  o  $E^c$ , respectivamente, para todo  $t \in \mathbb{R}$ .



**Figura 2.2:** Los subespacios  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$

Fuente: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Guckenheimer, Jhon; Holmes, Philip.

### Observación:

Las soluciones que se encuentran en  $E^s$  son caracterizadas por el decaimiento exponencial (sea monótona o oscilatoria), los que se encuentran en  $E^u$  están caracterizadas por el crecimiento exponencial y las soluciones que se encuentran en  $E^c$  no tienen la característica como en  $E^s$  o  $E^u$ . Vea la **figura 2.2**.

Ahora vamos a considerar el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax,$$

donde  $A$  es una matriz de orden  $2 \times 2$  con entradas constantes reales, de modo que se puede obtener importante información cualitativa sobre las soluciones a partir de los valores propios de  $A$ . Vamos a considerar los casos más importantes.

- Si  $A$  tiene los valores propios reales de signos opuestos. En este caso se dice que el origen es un punto de equilibrio de tipo **silla**.
- Todos los valores propios de  $A$  tienen la parte real negativa. Entonces se dice que el origen es un punto de equilibrio de tipo **nudo**.
- Todos los valores propios de  $A$  tienen la parte real positiva. Entonces se dice que el origen es un punto de equilibrio de tipo **foco**.
- Los valores propios de  $A$  son imaginarios puros. En este caso se dice que el origen es un punto de equilibrio de tipo **centro**.

El siguiente teorema va a caracterizar los puntos de equilibrio más importantes.

**Teorema 7.** Sea

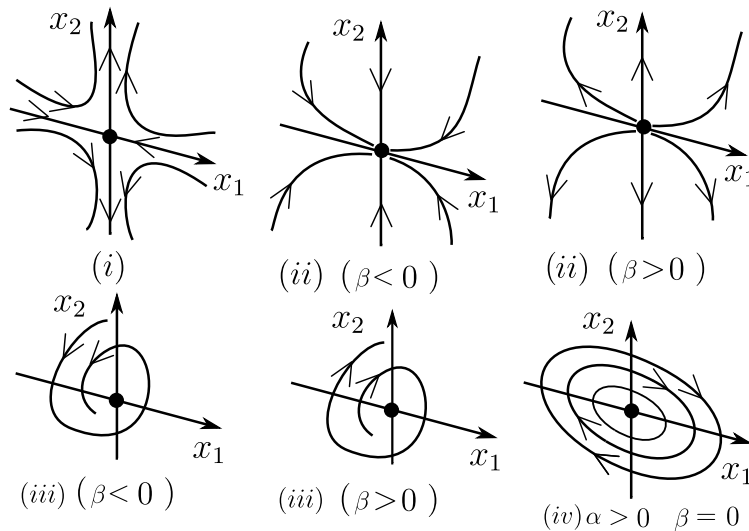
$$\dot{x} = Ax$$

un sistema lineal, donde  $A$  es una matriz de orden  $2 \times 2$  con entradas constantes de modo que  $\alpha = \det(A) \neq 0$  y  $\beta = \text{tr}(A)$ .

- i) Si  $\alpha < 0$ . Entonces el sistema lineal dado tiene en el origen un punto de equilibrio de tipo silla.
- ii) Si  $\alpha > 0$  y  $\beta^2 - 4\alpha \geq 0$ . Entonces el sistema lineal dado tiene en el origen un punto de equilibrio de tipo nudo. Asimismo, si  $\beta < 0$ , se dice que el origen es un nudo estable y si  $\beta > 0$ , se dice que el origen es un nudo inestable.
- iii) Si  $\alpha > 0$ ,  $\beta^2 - 4\alpha < 0$  y  $\beta \neq 0$ . Entonces el sistema lineal dado tiene en el origen un punto de equilibrio de tipo foco. Así mismo, si  $\beta < 0$ , se dice que el origen es un foco estable y si  $\beta > 0$ , se dice que el origen es un foco inestable.
- iv) Si  $\alpha > 0$  y  $\beta = 0$ . Entonces el sistema lineal dado tiene en el origen un punto de equilibrio de tipo centro.

Ver la **figura 2.3**.

La demostración de este teorema puede ser vista en [11](pp. 25-26).



**Figura 2.3:** Puntos de equilibrio para el sistema lineal  $\dot{x} = Ax$ .

Fuente: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.

Sotomayor, J.

## 2.4. Sistemas No Lineales

En la sección anterior se vió que para aplicaciones suaves de clase  $\mathcal{C}^1$  siguiendo el **teorema de existencia y unicidad** de la solución del PVI.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x); & x \in \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

está definida, por lo menos, en una vecindad  $t \in ]-c, c[$  de  $t = 0$ . Es decir, el flujo local  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es definido por  $\phi_t(x_0) = x(t, x_0)$ . De forma análoga en el caso lineal, sin embargo puede ser que no tenga la formula general  $e^{tA}$ .

Ahora, supongamos que tenemos un punto de equilibrio  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Vamos a estudiar el comportamiento de las soluciones en una vecindad  $\mathcal{V}$  del punto  $\bar{x}$  haciendo una linealización del sistema (2.10) en  $\bar{x}$ . Es decir, estudiando el sistema lineal

$$\dot{\xi} = Df(\bar{x})\xi; \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

donde  $Df = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]$  es la matriz Jacobiana de las primeras derivadas parciales de la función

$$f = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

y  $x = \bar{x} + \xi$ ,  $\|\xi\| \ll 1$ . Como (2.11) es un sistema lineal de la forma (2.6), el mapa del flujo linealizado  $D\phi_t(\bar{x})\xi$  resultante de (2.11) en un punto  $\bar{x}$  es obtenido de (2.11) a través de la integración

$$D\phi_t(\bar{x})\xi = e^{tDf(\bar{x})}\xi.$$

Ahora, mediante dos teoremas fundamentales en sistemas dinámicos se puede estudiar el comportamiento de las soluciones del sistema (2.10) en una vecindad  $\mathcal{V}$  del punto de equilibrio  $\bar{x}$ , basado en el comportamiento de las soluciones del sistema linealizado (2.11). Sin embargo es necesario algunas definiciones previas.

**Definición 14.** Sean  $f_1$  y  $f_2$  dos campos vectoriales definidos en los conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U_1$  y  $U_2$ , respectivamente. Se dice que  $f_1$  es **topológicamente equivalente** a  $f_2$  cuando existe un homeomorfismo  $h : U_1 \rightarrow U_2$  que lleva las órbitas de  $f_1$  en las órbitas de  $f_2$  preservando la orientación.

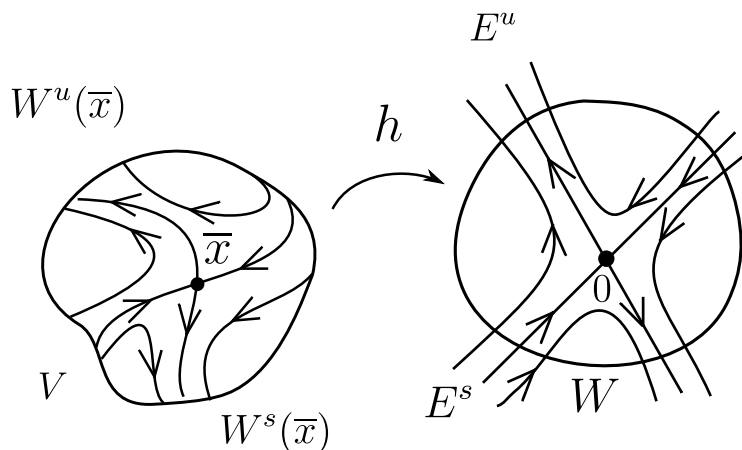
**Definición 15.** Sean  $\phi_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\phi_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos flujos generados por los campos vectoriales  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  respectivamente. Se dice que  $f_1$  es **topológicamente conjugado** a  $f_2$  cuando existe un homeomorfismo  $h : U_1 \rightarrow U_2$  de modo que  $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$  para todo  $(t, x) \in V_1$ .

**Definición 16.** Se dice que  $\bar{x}$  es un punto de equilibrio **hiperbólico** para un campo vectorial  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^r$ ,  $1 \leq r < \infty$  si  $Df(\bar{x})$  no tiene valores propios con parte real igual a cero.

**Teorema 8. (Hartman-Grobman)** Sean  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^r$ ,  $1 \leq r < \infty$  y  $\bar{x} \in U$  un punto de equilibrio hiperbólico de  $f$ . Entonces  $f$  y  $Df(\bar{x})$  son topológicamente conjugados. Más precisamente, existe una vecindad  $V$  de  $\bar{x}$  en  $U$  y una vecindad  $W$  de 0 en  $\mathbb{R}^n$  y un homeomorfismo  $h : V \rightarrow W$  tal que

$$h \circ f = Df(\bar{x}) \circ h.$$

El esbozo de la demostración de este teorema puede ser vista en [11](pp. 121-123). El **teorema de Hartman-Grobman** dice que en una vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico de un sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$  existe un homeomorfismo  $h$  que lleva las órbitas del sistema no lineal (2.10) en las órbitas del sistema lineal (2.11). Ver la **figura 2.4**.



**Figura 2.4:** Teorema (Hartman-Grobman)

Fuente: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.  
Guckenheimer, Jhon; Holmes, Philip.

**Definición 17.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  una vecindad del punto de equilibrio  $\bar{x}$ . La **variedad estable local** y la **variedad inestable local** de  $\bar{x}$ , denotados por  $W_{loc}^s(\bar{x})$  e  $W_{loc}^u(\bar{x})$  respectivamente, son los siguientes conjuntos:

$$W_{loc}^s(\bar{x}) = \{x \in U : \phi_t(x) \longrightarrow \bar{x}, t \longrightarrow +\infty, \phi_t(x) \in U \forall t \geq 0\} \quad (2.12)$$

$$W_{loc}^u(\bar{x}) = \{x \in U : \phi_t(x) \longrightarrow \bar{x}, t \longrightarrow -\infty, \phi_t(x) \in U \forall t \leq 0\} \quad (2.13)$$

respectivamente, donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es una vecindad del punto de equilibrio  $\bar{x}$  y  $\phi_t$  es el flujo generado por el campo vectorial  $f$ .

A pesar de que  $W_{loc}^s(\bar{x})$  y  $W_{loc}^u(\bar{x})$  sean llamados variedades son definidos como conjuntos sin ninguna estructura de variedad. Sin embargo el siguiente teorema garantiza que estos conjuntos son, efectivamente variedades.

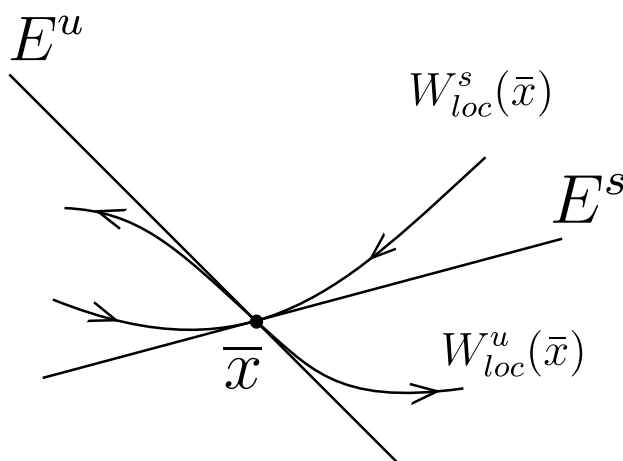
**Teorema 9. (De la variedad estable e inestable para un punto de equilibrio hiperbólico)** Supongamos que  $\dot{x} = f(x)$  tiene un punto de equilibrio hiperbólico  $\bar{x}$ . Entonces existe una  $n_s$ -variedad estable local  $W_{loc}^s(\bar{x})$  tangente al espacio propio  $E^s$  en el punto  $\bar{x}$  y una  $n_u$ -variedad inestable local  $W_{loc}^u(\bar{x})$  tangente al espacio propio  $E^u$  en el punto  $\bar{x}$ .  $W_{loc}^s(\bar{x})$  y  $W_{loc}^u(\bar{x})$  son de la misma clase de diferenciabilidad de la función  $f$ .

La demostración de este teorema puede ser vista en [11](pp. 107-108).



**Observación:**

Las variedades  $W_{loc}^s(\bar{x}), W_{loc}^u(\bar{x})$  son el gráfico de una función de dominio en  $E^s, E^u$  e imagen en  $E^u, E^s$  respectivamente. Ver la **figura 2.5**.



**Figura 2.5:** Las variedades estable e inestable local  $W_{loc}^s(\bar{x})$  e  $W_{loc}^u(\bar{x})$  de un punto de equilibrio hiperbólico  $\bar{x}$ .

Fuente: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Guckenheimer, Jhon; Holmes, Philip.

Las variedades invariantes locales  $W_{loc}^s$  e  $W_{loc}^u$  tienen variedades globales análogas  $W^s(\bar{x})$  y  $W^u(\bar{x})$  las cuales son obtenidas dejando puntos en  $W_{loc}^s$  recorriendo el flujo para atrás en el tiempo y los puntos en  $W_{loc}^u$  recorriendo el flujo para el frente en el tiempo respectivamente, es decir:

**Definición 18.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  una vecindad del punto de equilibrio  $\bar{x}$ . Entonces la **variedad estable global** y la **variedad inestable global** de  $\bar{x}$  denotados por  $W^s(\bar{x})$  y  $W^u(\bar{x})$  respectivamente, son los siguientes conjuntos:

$$W^s(\bar{x}) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(\bar{x})) \tag{2.14}$$

$$W^u(\bar{x}) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(\bar{x})) \tag{2.15}$$

respectivamente.

La existencia y unicidad de las soluciones del sistema no lineal (2.10) garantiza que  $W^s(\bar{x}_1)$  y  $W^s(\bar{x}_2)$  con  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  no se pueden intersectar. De manera análoga  $W^u(\bar{x}_1)$  y  $W^u(\bar{x}_2)$  con  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  no se pueden intersectar. Así mismo,  $W^s(\bar{x}_1)$  no se puede autointersectar, similarmente  $W^u(\bar{x}_1)$  no se puede autointersectar. Sin embargo, las intersecciones

de la variedad estable y la variedad inestable de puntos de equilibrio distintos o del mismo punto de equilibrio pueden ocurrir y de hecho son una fuente de una parte mayor del comportamiento complejo que se encuentran en los sistemas dinámicos.

**Definición 19.** Se dice que  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio **no hiperbólico** para un campo vectorial  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^r$ ,  $1 \leq r < \infty$  si  $Df(\bar{x})$  tiene algún valor propio con la parte real igual a cero.

Ahora se enuncia un teorema importante para los puntos de equilibrio no hiperbólicos.

**Teorema 10. (De la variedad central para un punto de equilibrio no hiperbólico).**

Supongamos que  $\dot{x} = f(x)$  tiene un punto de equilibrio no hiperbólico  $\bar{x}$ . Entonces existe una  $n_c$ -variedad central local  $W_{loc}^c(\bar{x})$  tangente al espacio propio  $E^c$  en el punto  $\bar{x}$ .

La demostración de este teorema puede ser vista en [2](pp. 319-321).

### Observación:

Las variedades estable e inestable de un punto de equilibrio existen y son únicas.

## 2.5. La aplicación de primer retorno de Poincaré

Sea  $\gamma$  una órbita periódica de algún flujo  $\phi_t \in \mathbb{R}^n$  generado por el campo vectorial no lineal  $f(x)$ . Tomamos una sección transversal local  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , de dimensión  $n - 1$ . La hiper superficie  $\Sigma$  no es necesariamente plana, pero debe ser escogida de modo que el flujo sea transversal siempre a  $\Sigma$ . Es decir, se debe verificar que  $f(x) \cdot \eta(x) \neq 0$  para todo  $x \in \Sigma$ , donde  $\eta(x)$  es la unidad normal a  $\Sigma$  en  $x$ . Denotamos por  $p$  el único punto donde  $\gamma$  intersecta  $\Sigma$  y  $U \subset \Sigma$  una vecindad de  $p$ . (Si  $\gamma$  tiene varias intersecciones con  $\Sigma$ , entonces se escoje  $\Sigma$  de modo que  $\gamma$  intersecte a  $\Sigma$  solamente una vez). La **aplicación de primer retorno de Poincaré**  $\mathcal{P} : U \rightarrow \Sigma$  queda definido por el flujo generado por el campo vectorial  $f$ , es decir: para un punto  $q \in U$  se tiene que:

$$\mathcal{P}(q) = \phi_\tau(q),$$

donde  $\tau = \tau(q)$  es el tiempo para que la órbita  $\phi_t(q)$  basada en  $q$ , vuelva a intersectar nuevamente la sección  $\Sigma$ . Ver la **figura 2.6**.

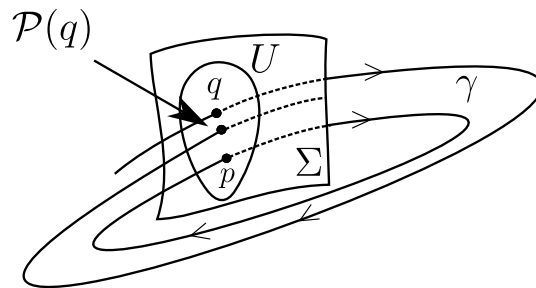
**Definición 20.** Se dice que  $f = \mathcal{O}(g)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  siempre que exista una constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

para  $x$  suficientemente próximo de  $x_0$ .

Por otro lado se dice que  $f = o(g)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  siempre que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$



**Figura 2.6:** La aplicación de primer retorno de Poincaré y la sección transversal local  $\Sigma$ .  
Fuente: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.  
Guckenheimer, Jhon; Holmes, Philip.

# Capítulo 3

## Variedades Diferenciables.

En este capítulo se presenta una breve revisión de la teoría de variedades diferenciables, con el objetivo de complementar y completar el enunciado de los teoremas de la variedad estable, inestable y central de un punto de equilibrio.

### 3.1. Definiciones Topológicas

**Definición 21.** Una *topología* sobre un conjunto no vacío  $M$  es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $M$  con las siguientes propiedades

- 1).  $\emptyset, M \in \tau$ .
- 2). La unión de los elementos de cualquier subcolección de  $\tau$  está en  $\tau$ .
- 3). La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de  $\tau$  está en  $\tau$ .

**Definición 22.** Sea  $M$  un conjunto no vacío y  $\tau$  una topología sobre  $M$ . Entonces el par  $(M, \tau)$  es llamado *espacio topológico*.

Si  $M$  es un espacio topológico con una topología  $\tau$ , se dice que un subconjunto  $\mathcal{U}$  de  $M$  es un conjunto abierto de  $M$  si  $\mathcal{U}$  pertenece a la colección  $\tau$ . Usando esta terminología, se puede decir que un espacio topológico es un conjunto  $M$  junto a una colección de subconjuntos de  $M$ , llamados conjuntos abiertos, tales que  $\emptyset$  y  $M$  son ambos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos [9].

**Definición 23.** Un espacio topológico  $M$  se denomina espacio de **Hausdorff** si para cada par  $x_1$  y  $x_2$  de puntos distintos de  $M$ , existen las vecindades  $\mathcal{U}_1$  y  $\mathcal{U}_2$  de  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente, de manera que sean disjuntas.

**Definición 24.** Sea  $M$  un espacio topológico. Un *sistema de coordenadas local* en  $M$  es un homeomorfismo  $x : \mathcal{U} \rightarrow x(\mathcal{U})$  de un subconjunto abierto  $\mathcal{U} \subset M$  sobre un conjunto abierto  $x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ .

Para cada  $p \in \mathcal{U}$  se tiene que  $x(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p))$ . Los números  $x_i = x_i(p)$  son llamados las **coordenadas** del punto  $p \in \mathcal{U}$  en el sistema  $x$ .

**Definición 25.** Un atlas de dimensión  $n$  sobre un espacio topológico sobre  $M$  es una colección  $\mathfrak{A}$  de sistemas de coordenadas locales  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cuyos dominios  $U$  cubren  $M$ . Los dominios  $U$  de los sistemas coordinados  $x \in \mathfrak{A}$  son llamados las **vecindades coordinadas** de  $\mathfrak{A}$ .

**Definición 26.** Un espacio topológico en el cual existe un atlas de dimensión  $n$  es llamado **variedad topológica de dimensión  $n$**

**Observación:**

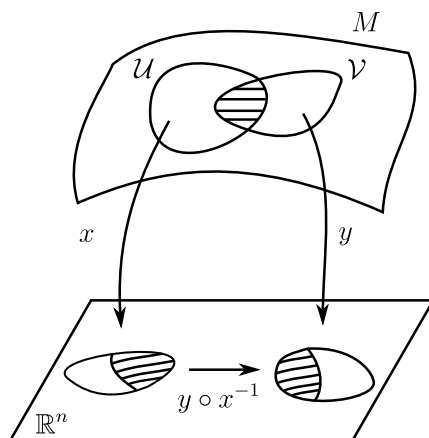
La definición anterior quiere decir que  $M$  es una variedad topológica de dimensión  $n$ , si y solo si, si cada punto de  $M$  tiene una vecindad homeomorfa a un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 27.** Dados dos sistemas de coordenadas local  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $y : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  en el espacio topológico  $M$ , tal que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ , cada punto  $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  tiene coordenadas  $x_i = x_i(p)$  en el sistema  $x$  y coordenadas  $y_i = y_i(p)$  en el sistema  $y$ .  
La correspondencia

$$(x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)) \longleftrightarrow (y_1(p), y_2(p), \dots, y_n(p))$$

establece un homeomorfismo  $y \circ x^{-1} : x(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow y(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  llamado **cambio de coordenadas**.

Ver la **figura 3.1**.



**Figura 3.1:** La mudanza de coordenadas  $y \circ x^{-1}$ .

Fuente: Variedades Diferenciáveis.

Lima, Elon Lages

**Definición 28.** Un atlas  $\mathfrak{A}$  sobre un espacio topológico  $M$  es **diferenciable** de clase  $\mathcal{C}^k$  con  $k \geq 1$ , si todos los cambios de coordenadas  $y \circ x^{-1}, x, y$  son aplicaciones de clase  $\mathcal{C}^k$ . En este caso se escribe  $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}^k$ . Sigue que  $y \circ x^{-1}$  es un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^k$ . En particular si escribimos

$$y \circ x^{-1} : (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)) \mapsto (y_1(p), y_2(p), \dots, y_n(p)).$$

Entonces el determinante del Jacobiano  $\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$  es no nulo para todo punto de  $x(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ .

**Definición 29.** Sea  $\mathfrak{A}$  un atlas de dimensión  $n$  y de clase  $\mathcal{C}^k$  en un espacio topológico  $M$ . Un sistema de coordenadas  $z : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es llamado **admisibile** relativo al atlas  $\mathfrak{A}$  si, para todo sistema de coordenadas  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que pertenece a  $\mathfrak{A}$  con  $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ , los cambios de coordenadas  $z \circ x^{-1}$  y  $x \circ z^{-1}$  son de clase  $\mathcal{C}^k$ . En otras palabras, si  $\mathfrak{A} \cup \{z\}$  si sigue siendo un atlas de clase  $\mathcal{C}^k$  en  $M$ .

**Definición 30.** Un atlas  $\mathfrak{A}$  de dimensión  $n$  y de clase  $\mathcal{C}^k$  en un espacio topológico  $M$ . es llamado un atlas **maximal** si, contiene a todos los sistemas de coordenadas locales que son admisibles en relación a  $\mathfrak{A}$ .

## 3.2. Variedades Diferenciables

**Definición 31.** Una **variedad diferenciable**, de dimensión  $n$  y de clase  $\mathcal{C}^n$  es un par ordenado  $(M, \mathfrak{A})$  donde  $M$  es un espacio topológico de Hausdorff y  $\mathfrak{A}$  es un atlas maximal de clase  $\mathcal{C}^k$  y dimensión  $n$  sobre  $M$ .

### Observación:

Los puntos, rectas, planos, arcos de curvas, esferas y toros son ejemplos de variedades. En particular una órbita es una variedad unidimensional, el cual será la principal variedad que se va a utilizar en este trabajo.

**Definición 32.** Un conjunto invariante por el flujo de un campo vectorial  $f$  que tiene una estructura de variedad diferenciable de clase  $\mathcal{C}^k$ , es llamado **variedad invariante de clase  $\mathcal{C}^k$** .

# Capítulo 4

## La integral de Melnikov.

### 4.1. Definiciones básicas.

En este capítulo vamos a estudiar la aplicación de primer retorno de Poincaré para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

donde:

- i)  $f$  es un campo vectorial Hamiltoniano de clase  $C^r$ ,  $r \geq 2$ .
- ii)  $\epsilon g(x, t)$  es la  $\epsilon$ -perturbación con  $\epsilon > 0$  y  $g$  es una aplicación periódica de período  $T > 0$  de clase  $C^r$  con  $r \geq 2$ .

Las aplicaciones  $f$  y  $g$  son acotadas en conjuntos acotados.

**Definición 33.** Sea  $p_0$  un punto de equilibrio hiperbólico tipo silla para el sistema (4.1) cuando  $\epsilon = 0$ . Un punto  $p \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $p \in W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$  es llamado punto **homoclínico**.

Si  $W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$  tiene intersección transversal, entonces el punto es llamado punto **homoclínico transversal**.

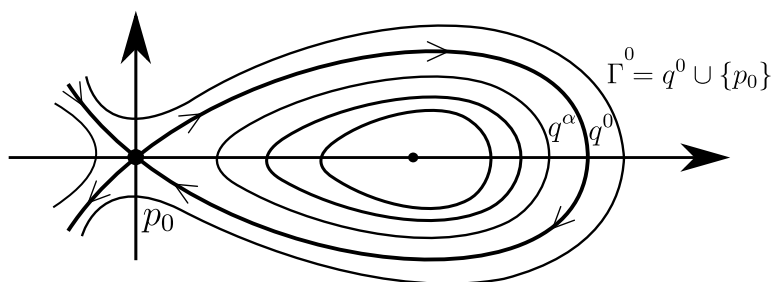
**Definición 34.** Sea  $p \in W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$  con  $p \neq p_0$ , entonces la órbita de  $p$ , en el sistema (4.1) para  $\epsilon = 0$ , que se aproxima a  $p_0$ , cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , es llamada **órbita homoclínica**.

Vamos a desarrollar un método que permita probar la existencia o no existencia de puntos homoclínicos transversales de la aplicación de primer retorno de Poincaré para una órbita periódica. Para realizar el estudio, vamos a suponer lo siguiente:

- (A<sub>1</sub>) Para  $\epsilon = 0$ , en la ecuación (4.1) posee una órbita homoclínica  $q^0(t)$  para el punto de equilibrio hiperbólico de tipo silla  $p_0$ .
- (A<sub>2</sub>)  $\Gamma^0 = \{q^0(t)/t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_0\}$  es tal que el  $\text{int}(\Gamma^0)$  está llena de una familia continua  $\{q^\alpha\}_{\alpha \in ]-1, 0[}$  de órbitas periódicas. Siendo  $d(x, \Gamma^0) = \inf_{q \in \Gamma^0} |x - q|$ , entonces se tiene que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} d(q^\alpha(t), \Gamma^0) = 0$ .

(A<sub>3</sub>)  $h_\alpha = \mathcal{H}(q^\alpha(t))$  es constante para todo  $t$  y  $q^\alpha(t + T_\alpha) = q^\alpha(t)$ . Entonces  $T_\alpha$  es una función diferenciable de  $h_\alpha$  y  $\frac{dT_\alpha}{dh_\alpha} > 0$  en el  $\text{int}(\Gamma^0)$ , donde  $\mathcal{H}$  es la función Hamiltoniana del campo vectorial  $f$ .

Ver la **figura 4.1**.



**Figura 4.1:** El diagrama de fase para el sistema (4.1) asociado a las hipótesis (A<sub>1</sub>), (A<sub>2</sub>) y (A<sub>3</sub>).

Fuente: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Guckenheimer, Jhon; Holmes, Philip.

### Observación:

De las hipótesis (A<sub>2</sub>) y (A<sub>3</sub>) se tiene que  $T_\alpha \rightarrow \infty$  monótonicamente cuando  $\alpha \rightarrow 0$ .

Ahora haciendo  $\theta = t \text{ mod}(T)$  con  $t \in \mathbb{R}$ , entonces el sistema (4.1) se transforma en un sistema autónomo equivalente de la siguiente forma:

$$G(x, \theta) = \begin{cases} \dot{x} = f(x) + \epsilon g(x, \theta) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1; \text{ con } S^1 = \mathbb{R} \text{ mod}(T)$$

Considere la aplicación de primer retorno de Poincaré

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\epsilon^{t_0} : \Sigma^{t_0} &\longrightarrow \Sigma^{t_0} \\ p &\longmapsto \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p) \end{aligned}$$



para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.1) donde el conjunto

$$\Sigma^{t_0} = \{(x, t) / t = t_0 \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^2 \times S^1$$

es una sección transversal global en el tiempo  $t_0$  para el flujo autónomo del sistema (4.1). De la hipótesis  $(A_1)$  se tiene que  $\mathcal{P}_0^{t_0}$  posee un punto hiperbólico de tipo silla  $p_0$  y que  $\Gamma^0 = W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$  está llena de puntos homoclínicos no transversales para  $\mathcal{P}_0^{t_0}$ . **Note** que 0 aquí implica que  $\epsilon = 0$  en el sistema (4.1).

Ahora se presentan dos resultados básicos de la teoría de perturbaciones, los cuales serán utilizados para desarrollar el método.

**Lema 4.1.1.** *Supongamos que el sistema (4.1) satisface  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  y  $(A_3)$ , ya descritas. Entonces se cumple que, para  $0 < \epsilon \ll 1$ , el sistema (4.1) tiene una única órbita hiperbólica periódica  $\gamma_\epsilon^0(t) = p_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$ . Análogamente la aplicación de primer retorno de Poincaré  $\mathcal{P}_\epsilon^{t_0}$  tiene un único punto de equilibrio hiperbólico de tipo silla*

$$p_\epsilon^{t_0} = p_0 + \mathcal{O}(\epsilon).$$

## Demostración:

Vamos a utilizar el teorema de la aplicación implícita. Se define la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} F : U \subset ]0, 1[ \times \Sigma^{t_0} &\longrightarrow \Sigma^{t_0} \\ (\epsilon, p) &\longmapsto F(\epsilon, p) = p - \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p), \end{aligned}$$

donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $]0, 1[ \times \Sigma^{t_0}$ .

Note que  $G(x, \theta) = (f(x) + \epsilon g(x, \theta), 1)$  entonces, la aplicación de primer retorno de Poincaré  $\mathcal{P}_\epsilon^{t_0}$ , está definida por el flujo generado por el campo vectorial  $G$ , luego  $\mathcal{P}_\epsilon^{t_0}$  es diferenciable, pues se esta asumiendo que  $f$  y  $g$  son de clase  $\mathcal{C}^2$ . En consecuencia  $F$  es diferenciable.

Observe que:  $F(0, p_0) = p_0 - \mathcal{P}_0^{t_0}(p_0) = p_0 - p_0 = 0$  y

$$DF(\epsilon, p) = \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon}(p - \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p)) \quad Id - D\mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p) \right).$$

Evaluando en  $(0, p_0)$  :

$$DF(0, p_0) = \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon}(p - \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p)) \Big|_{(\epsilon, p)=(0, p_0)} \quad Id - D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0) \right).$$

Como  $D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0)$  es hiperbólica, se tiene que  $1 \notin \sigma(D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0))$ . Por tanto  $Id - D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0)$  es invertible.

Ahora  $D_2F(0, p_0) : \Sigma^{t_0} \longrightarrow \Sigma^{t_0}$  representado por  $Id - D\mathcal{P}_0^{t_0}(p_0)$  es un isomorfismo lineal, y en concordancia con el teorema de la aplicación implícita, existen  $\mathcal{V}, \mathcal{Z}$  conjuntos abiertos (donde  $\epsilon \in \mathcal{V}, p_0 \in \mathcal{Z} \subset U$ ) con la siguiente propiedad:

para cada  $t \in \mathcal{V}$  existe un único  $\xi(t) \in \Sigma^{t_0}$  tal que

$$(t, \xi(t)) \in \mathcal{Z} \text{ y } F(t, \xi(t)) = p_0 - \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(p_0) = 0.$$

Entonces se tiene que:

$$\xi(t) - \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(\xi(t)) = 0 \implies \xi(t) = \mathcal{P}_\epsilon^{t_0}(\xi(t)).$$

Luego para cada  $t$  existe una única órbita periódica hiperbólica  $\gamma_\epsilon^0(t)$  cerca de  $p_0$  y por tanto, existe un único punto hiperbólico de tipo silla  $\mathcal{P}_\epsilon^{t_0} = p_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$ .  $\square$

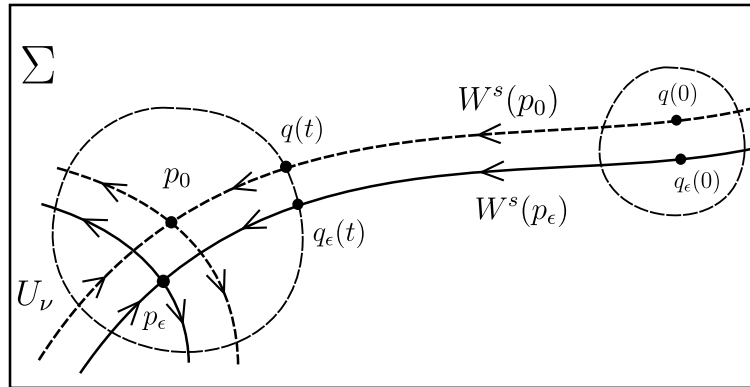
**Lema 4.1.2.** Las variedades estable local e inestable local  $W_{loc}^s(\gamma_\epsilon)$  y  $W_{loc}^u(\gamma_\epsilon)$ , respectivamente de la órbita perturbada  $\gamma_\epsilon$  están  $C^r$ -próximas de las variedades estable e inestable local de la órbita periódica no perturbada  $p_0 \times S^1$ . Asimismo, las órbitas  $q_\epsilon^s(t, t_0)$  y  $q_\epsilon^u(t, t_0)$  están contenidas en  $W^s(\gamma_\epsilon)$  y  $W^u(\gamma_\epsilon)$  respectivamente, las cuales son expresadas por:

$$q_\epsilon^s(t, t_0) = q^0(t - t_0) + \epsilon q_1^s(t, t_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2); \quad t \in [t_0, +\infty[. \quad (4.2)$$

$$q_\epsilon^u(t, t_0) = q^0(t - t_0) + \epsilon q_1^u(t, t_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2); \quad t \in ] - \infty, t_0[. \quad (4.3)$$

### Demostración:

Por el **teorema 9**, se tiene que, las variedades locales del sistema perturbado existen. Ahora se fija una  $\nu$ - vecindad con,  $0 < \epsilon \ll \nu \ll 1$ ,  $\mathcal{U}_\nu$  de  $p_0$  de modo que: para  $\epsilon > 0$  fijo suficientemente pequeño, se tiene que  $W_{loc}^s(\gamma_\epsilon)$  y  $W_{loc}^u(\gamma_\epsilon)$  están  $\epsilon$ -próximo de  $W_{loc}^s(p_0)$  y  $W_{loc}^u(p_0)$ , respectivamente. Ver la **figura 4.2**.



**Figura 4.2:**  $W_{loc}^s(\gamma_\epsilon)$  y  $W_{loc}^u(\gamma_\epsilon)$  están  $\epsilon$ -próximos de  $W_{loc}^s(p_0)$  y  $W_{loc}^u(p_0)$ .

Fuente: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Guckenheimer, Jhon; Holmes, Philip.

Para cada  $t \in [0, T]$ . Tome  $q_\epsilon^s(t) \in W_\epsilon^s(p_\epsilon)$  y  $q^s(t) \in W^s(p_0)$ . Se tiene que:

$$q^s(t) = q^s(0) + \int_0^t f(q^s(r)) dr \quad (4.4)$$

y

$$q_\epsilon^s(t) = q_\epsilon^s(0) + \int_0^t f(q_\epsilon^s(r)) dr + \epsilon \int_0^t g(q_\epsilon^s(r), r) dr. \quad (4.5)$$

Note que:  $q_\epsilon^s(0) = q^s(0) + \mathcal{O}(\epsilon)$ . Luego sustrayendo la igualdad (4.5) y la igualdad (4.4), se obtiene que:

$$q_\epsilon^s(t) - q^s(t) = q_\epsilon^s(0) - q^s(0) + \int_0^t [f(q_\epsilon^s(r)) - f(q^s(r))]dr + \epsilon \int_0^t g(q_\epsilon^s(r), r)dr, \quad (4.6)$$

aplicando la desigualdad triangular a la igualdad (4.6) se tiene que:

$$\begin{aligned} |q_\epsilon^s(t) - q^s(t)| &= \left| q_\epsilon^s(0) - q^s(0) + \int_0^t [f(q_\epsilon^s(r)) - f(q^s(r))]dr + \epsilon \int_0^t g(q_\epsilon^s(r), r)dr \right| \\ &\leq |q_\epsilon^s(0) - q^s(0)| + \left| \int_0^t [f(q_\epsilon^s(r)) - f(q^s(r))]dr \right| + \\ &\quad + \left| \epsilon \int_0^t g(q_\epsilon^s(r), r)dr \right| \\ &\leq |q_\epsilon^s(0) - q^s(0)| + \int_0^t | [f(q_\epsilon^s(r)) - f(q^s(r))] | dr + \\ &\quad + \epsilon \int_0^t | g(q_\epsilon^s(r), r) | dr. \end{aligned}$$

Ahora, para facilitar las cuentas, se utiliza las siguientes notaciones:  $\xi(t) = q_\epsilon^s(t) - q^s(t)$ ,  $L$  es la constante de Lipschitz de  $f$  y  $C$  es el valor máximo de  $g$ , en la desigualdad anterior. Entonces la desigualdad anterior se transforma en:

$$|\xi(t)| \leq |\xi(0)| + L \int_0^t |\xi(r)| dr + \epsilon Ct.$$

Utilizando el **Lema de Gronwall Generalizado** [3] para

$$c(t) = |\xi(0)| + \epsilon Ct \text{ y } u(r) = L,$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned} |\xi(t)| &\leq |\xi(0)| e^{Lt} + \int_0^t \epsilon C e^{L(t-r)} dr \\ &= |\xi(0)| e^{Lt} + \frac{\epsilon C}{L} (e^{Lt} - 1) \\ &= \left[ |\xi(0)| + \frac{\epsilon C}{L} \right] e^{Lt} - \frac{\epsilon C}{L} = \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$|q_0^s(t - t_0) - q_\epsilon^s(t - t_0)| = |q_0^s(t - t_0) - p_0^s + p_0^s - p_\epsilon^s + p_\epsilon^s - q_\epsilon^s(t - t_0)|.$$

Utilizando la desigualdad triangular se obtiene que:

$$|q_0^s(t - t_0) - q_\epsilon^s(t - t_0)| \leq \underbrace{|q_0^s(t - t_0) - p_0^s|}_{\mathcal{O}(\epsilon)} + \underbrace{|p_0^s - p_\epsilon^s|}_{\mathcal{O}(\epsilon)} + \underbrace{|p_\epsilon^s - q_\epsilon^s(t - t_0)|}_{\mathcal{O}(\epsilon)},$$

luego, como cada sumando en el lado derecho de la desigualdad es de  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Se tiene que:

$$| q_0^s(t - t_0) - q_\epsilon^s(t - t_0) | = \mathcal{O}(\epsilon)$$

para  $t \in ]t_0, +\infty[$ .

De forma similar, se obtiene que:

$$| q_0^u(t - t_0) - q_\epsilon^u(t - t_0) | = \mathcal{O}(\epsilon)$$

para  $t \in ]-\infty, t_0]$ . □

### Observación:

El **lema 4.1.1** garantiza la existencia de un punto hiperbólico  $p_\epsilon$  próximo de  $p_0$  y el **Lema 4.1.2** garantiza la proximidad entre las variedades invariantes del sistema perturbado  $W^u(p_\epsilon), W^s(p_\epsilon)$  y las variedades invariantes del sistema no perturbado  $W^u(p_0), W^s(p_0)$  respectivamente bajo la influencia de pequeñas perturbaciones.

Así mismo este Lema implica que la solución que se encuentra en la variedad estable del sistema perturbado  $W^s(p_\epsilon)$  se puede expresar mediante la siguiente igualdad

$$q_\epsilon^s(t, t_0) = q^0(t - t_0) + \epsilon q_1^s(t, t_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

para  $t \geq t_0$ . En efecto, se hace la sustitución de la igualdad anterior en el sistema (4.1) y se obtiene que:

$$\dot{q}^0(t, t_0) + \epsilon \dot{q}_1^s(t, t_0) = f(q_\epsilon^s(t, t_0)) + \epsilon g(q_\epsilon^s(t, t_0), t), \quad (4.7)$$

utilizando la **Fórmula de Taylor** con resto infinitesimal de primer orden para  $f(q_\epsilon^s(t, t_0))$  y  $g(q_\epsilon^s(t, t_0))$  en el punto  $q^0(t, t_0)$ , se obtiene que:

$$f(q_\epsilon^s(t, t_0)) = f(q^0(t, t_0)) + \epsilon Df(q^0(t, t_0))q_1^s(t, t_0) \quad (4.8)$$

y

$$g(q_\epsilon^s(t, t_0), t) = g(q^0(t, t_0), t) + \epsilon Dg(q^0(t, t_0))q_1^s(t, t_0), \quad (4.9)$$

respectivamente. Sustituyendo las igualdades (4.8) y (4.9) en la igualdad (4.7) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{q}^0(t, t_0) + \epsilon \dot{q}_1^s(t, t_0) &= f(q^0(t, t_0)) + \epsilon Df(q^0(t, t_0))q_1^s(t, t_0) + \epsilon(g(q^0(t, t_0), t) + \\ &+ \epsilon Dg(q^0(t, t_0))q_1^s(t, t_0)). \end{aligned}$$

Como  $\dot{q}^0(t, t_0) = f(q^0(t, t_0))$  y  $Dg(q^0(t, t_0)) = 0$ , se tiene la siguiente igualdad:

$$\dot{q}_1^s(t, t_0) = Df(q^0(t - t_0))q_1^s(t, t_0) + g(q^0(t - t_0), t). \quad (4.10)$$

De manera similar para  $t \leq t_0$  se obtiene que:

$$\dot{q}_1^u(t, t_0) = Df(q^0(t - t_0))q_1^u(t, t_0) + g(q^0(t - t_0), t). \quad (4.11)$$

## 4.2. La función de Melnikov.

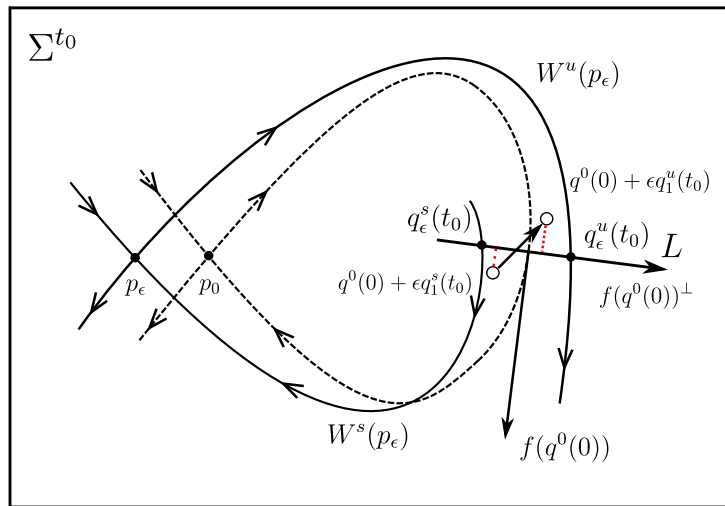
**Definición 35.** Considere la sección transversal  $\Sigma^{t_0}$  y el punto  $q^0(0) \in \Sigma^{t_0}$ . Se sabe que  $f(q^0(0))$  es un vector tangente a la órbita homoclínica en  $\mathcal{P}^0$  en  $q^0(0)$ . Se considera la recta  $L$ , recta normal a  $f(q^0(0))$  en  $q^0(0)$  y cuya dirección es dada por:

$$f^\perp(q^0(0)) = (-f_2(q^0(0)), f_1(q^0(0)))^\top. \quad (4.12)$$

Como las variedades invariantes  $W^u(p_\epsilon^{t_0})$  y  $W^s(p_\epsilon^{t_0})$  están  $C^r$ -próximos de  $\Gamma^0$ , estas variedades cruzan la recta  $L$ . Sean  $q_\epsilon^u(t_0) = q_\epsilon^u(t_0, t_0)$  y  $q_\epsilon^s(t_0) = q_\epsilon^s(t_0, t_0)$  los únicos puntos en  $W^u(p_\epsilon^{t_0}) \cap L$  y  $W^s(p_\epsilon^{t_0}) \cap L$  de manera que la distancia a  $p_\epsilon^{t_0}$  sea mínima. Se define la **separación** de las variedades  $W^u(p_\epsilon^{t_0})$  y  $W^s(p_\epsilon^{t_0})$  en la sección  $\Sigma^{t_0}$  en  $q^0(0)$  por la siguiente igualdad

$$D(t_0) = q_\epsilon^u(t_0) - q_\epsilon^s(t_0).$$

Ver la **figura 4.3**.



**Figura 4.3:** La separación de las variedades  $W^u(p_\epsilon^{t_0})$  y  $W^s(p_\epsilon^{t_0})$ .

Fuente: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

Guckenheimer, Jhon; Holmes, Philip.

Ahora utilizando el **lema 4.1.2**, se tiene que:

$$D(t_0) = \epsilon(q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0)) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

se define la **distancia**  $d$  en  $t_0$  entre las variedades  $W^u(p_\epsilon)$  y  $W^s(p_\epsilon)$  como la proyección del vector  $D(t_0)$  sobre el vector normal  $f^\perp(q^0(0))$ , denotado por  $d(t_0)$  mediante la siguiente igualdad

$$d(t_0) = \epsilon \frac{f^\perp(q^0(0)) \cdot (q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0))}{\|f^\perp(q^0(0))\|} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Luego, utilizando la igualdad (4.12) en la igualdad anterior, se tiene que;

$$d(t_0) = \epsilon \frac{f(q^0(0)) \wedge (q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0))}{\|f(q^0(0))\|} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.13)$$

donde el **operador**  $\wedge$ , está definido por:

$$a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1 \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^2,$$

y  $f(q^0(0)) \wedge (q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0))$  es la proyección de  $q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0)$  sobre  $f^\perp(q^0(0))$ . Finalmente se define la **función de Melnikov**, por:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt,$$

aquí,  $q^0(t)$  es la órbita homoclínica del sistema no perturbado y cuya integral converge absolutamente; es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t)| dt$$

es convergente y  $f \wedge g = f_1 g_2 - f_2 g_1$ .

A contiuaación se presenta un resultado que relaciona la distancia  $d$  con la función de Melnikov, el cual permite medir la distancia entre las variedades estable e inestable del sistema perturbado. De esta manera, cuando la función de Melnikov se anula, se tiene la intersección de las variedades estable e inestable.

**Teorema 11.** *Si la función de Melnikov tiene un cero simple en  $t_0$ , es decir,  $M(t_0) = 0$  y  $\frac{\partial M}{\partial t}(t_0) \neq 0$  y no depende de  $\epsilon$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $W^u(p_\epsilon)$  y  $W^s(p_\epsilon)$  se intersectan transversalmente. Y si la función de Melnikov no posee ceros, entonces  $W^u(p_\epsilon) \cap W^s(p_\epsilon) = \emptyset$ .*

### Demostración:

Se considera la función distancia dependiente del tiempo, denotado por  $\Delta(t, t_0)$  y definida mediante la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \Delta(t, t_0) &= f(q^0(t - t_0)) \wedge (q_1^u(t, t_0) - q_1^s(t, t_0)) \\ &= f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) - f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) \\ &:= \Delta^u(t, t_0) - \Delta^s(t, t_0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Luego sustituyendo la igualdad (4.14) en la igualdad (4.13), se obtiene que:

$$d(t_0) = \epsilon \frac{\Delta(t_0, t_0)}{\|f(q^0(0))\|} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Ahora se va a calcular  $\Delta(t_0, t_0)$ . En efecto:  
derivando  $\Delta^s(t, t_0)$  con respecto a  $t$  en primer lugar, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\Delta^s(t, t_0)] &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0))] \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^s(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0))] \frac{d}{dt}q^0(t-t_0) \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^s(t, t_0)] \\ &= Df(q^0(t-t_0))\dot{q}^0(t-t_0) \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \dot{q}_1^s(t, t_0).\end{aligned}$$

Usando la igualdad (4.10) y que  $\dot{q}^0(t-t_0) = f(q^0(t-t_0))$  en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\Delta^s(t, t_0)] &= Df(q^0(t-t_0))f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \dot{q}_1^s(t, t_0) \\ &= Df(q^0(t-t_0))f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge (Df(q^0(t-t_0))q_1^s(t, t_0) + g(q^0(t-t_0), t)) \\ &= Df(q^0(t-t_0))f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge Df(q^0(t-t_0))q_1^s(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).\end{aligned}$$

De la igualdad  $Av \wedge w + v \wedge Aw = \text{tr}(A)v \wedge w$  y de la definición de  $\Delta^s(t, t_0)$ , se obtiene que:

$$\frac{d}{dt}[\Delta^s(t, t_0)] = \text{tr}(Df(q^0(t-t_0))) \Delta^s(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).$$

Luego como  $f$  es un campo vectorial Hamiltoniano, entonces  $\text{tr}(Df(q^0(t-t_0))) = 0$ . Entonces la igualdad anterior se expresa mediante la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt}[\Delta^s(t, t_0)] = f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).$$

Como en la distancia  $\Delta^s$  interviene la trayectoria estable, entonces se integra esta última ecuación desde  $t_0$  hasta  $+\infty$ , es decir:

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{d}{dt}[\Delta^s(t, t_0)] = \int_{t_0}^{+\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t) dt.$$

Y utilizando el **Primer teorema fundamental del cálculo** en el lado izquierdo de la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\Delta^s(+\infty, t_0) - \Delta^s(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t) dt.$$

Sin embargo

$$\Delta^s(+\infty, t_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0).$$

Ahora como  $q_1^s(t, t_0)$  es acotado por el **lema 4.1.2** y siendo  $q^0(t - t_0)$  una solución del sistema no perturbado entonces  $q^0(t - t_0) \rightarrow p_0$ , siempre que  $t \rightarrow +\infty$  y como  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , en particular  $f$  es continua, entonces  $f(q^0(t - t_0)) \rightarrow f(p_0) = 0$ , siempre que  $t \rightarrow +\infty$ , es decir:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) = 0.$$

Luego

$$\Delta^s(+\infty, t_0) = 0.$$

Por tanto

$$-\Delta^s(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt. \quad (4.15)$$

Por otro lado, ahora se procede a derivar  $\Delta^u(t, t_0)$  con respecto  $t$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Delta^u(t, t_0)] &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t - t_0))] \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^u(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t - t_0))] \frac{d}{dt}q^0(t - t_0) \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^u(t, t_0)] \\ &= Df(q^0(t - t_0))\dot{q}^0(t - t_0) \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge \dot{q}_1^u(t, t_0). \end{aligned}$$

Usando la igualdad (4.11) y que  $\dot{q}^0(t - t_0) = f(q^0(t - t_0))$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Delta^u(t, t_0)] &= Df(q^0(t - t_0))f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge \dot{q}_1^u(t, t_0) \\ &= Df(q^0(t - t_0))f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t - t_0)) \wedge (Df(q^0(t - t_0))q_1^u(t, t_0) + g(q^0(t - t_0), t)) \\ &= Df(q^0(t - t_0))f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t - t_0)) \wedge Df(q^0(t - t_0))q_1^u(t, t_0) \\ &\quad + f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t). \end{aligned}$$

De la igualdad  $Av \wedge w + v \wedge Aw = \text{tr}(A)v \wedge w$  y de la definición de  $\Delta^u(t, t_0)$ , se obtiene que:

$$\frac{d}{dt}[\Delta^u(t, t_0)] = \text{tr}(Df(q^0(t - t_0))) \Delta^u(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t).$$

Luego como  $f$  es un campo vectorial Hamiltoniano, entonces  $\text{tr}(Df(q^0(t - t_0))) = 0$ . Entonces  $\frac{d}{dt}[\Delta^u(t, t_0)]$  se expresa mediante la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dt}[\Delta^u(t, t_0)] = f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t).$$

Como en la distancia  $\Delta^u$  interviene la trayectoria inestable, entonces se integra desde  $-\infty$  hasta  $t_0$ , es decir:

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{d}{dt}[\Delta^u(t, t_0)] = \int_{-\infty}^{t_0} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt.$$



Utilizando el **Primer teorema fundamental del cálculo** en el lado izquierdo de la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\Delta^u(t_0, t_0) - \Delta^u(-\infty, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt.$$

Sin embargo

$$\Delta^u(-\infty, t_0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0),$$

Ahora como  $q_1^u(t, t_0)$  es acotado por el **lema 4.1.2** y siendo  $q^0(t - t_0)$  una solución del sistema no perturbado entonces  $q^0(t - t_0) \rightarrow p_0$ , siempre que  $t \rightarrow -\infty$  y como  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , en particular  $f$  es continua, entonces  $f(q^0(t - t_0)) \rightarrow f(p_0) = 0$ , siempre que  $t \rightarrow -\infty$ , es decir:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) = 0.$$

entonces:

$$\Delta^u(-\infty, t_0) = 0.$$

Por lo tanto

$$\Delta^u(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt. \quad (4.16)$$

Ahora, sumando la igualdad (4.15) y (4.16) se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \Delta(t_0, t_0) = \Delta^u(t_0, t_0) - \Delta^s(t_0, t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{+\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt, \end{aligned}$$

usando la propiedad de la parctición de la integral en el lado derecho de la igualdad anterior, se tiene que:

$$\Delta(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t)) dt. \quad (4.17)$$

De la definición de la función de Melnikov, se tiene que:

$$M(t_0) = \Delta(t_0, t_0).$$

Luego la igualdad (4.13) asume la siguiente forma:

$$d(t_0) = \epsilon \frac{M(t_0)}{\|f(q^0(0))\|} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.18)$$

Fijando  $\epsilon > 0$ , luego de la hipótesis  $M(t_0) = 0$  y  $\frac{\partial M}{\partial t}(t_0) \neq 0$  entonces el signo de  $M(t_0)$  oscila en una vecindad  $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$  con  $\tau > 0$ , lo cual implica que el signo de  $d(t_0)$

tambi3n oscila en una vecindad de  $t_0$ . Entonces en concordancia con el teorema del valor intermedio, existe un  $c \in ]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$  de manera que  $d(c) = 0$ , luego se tiene que:  $q_\epsilon^u(c) = q_\epsilon^s(c)$ .

Por tanto

$$W^u(p_\epsilon) \cap W^s(p_\epsilon) \neq \emptyset. \quad (4.19)$$

Ahora supongamos que la intersecci3n de  $W^u(p_\epsilon)$  y  $W^s(p_\epsilon)$  no es transversal (hip3tesis auxiliar), entonces  $q_\epsilon^u(r) = q_\epsilon^s(r)$  para todo  $r \in ]c - \delta, c + \delta[$  con  $\delta > 0$ , entonces  $d(r) = 0$  para todo  $r \in ]c - \delta, c + \delta[$  lo cual implica que  $M(r) = 0$  en una vecindad de  $c$ , pues  $M$  no depende de  $\epsilon$  y  $\frac{\mathcal{O}(\epsilon^2)}{\epsilon} = -\frac{M(r)}{\|f(q^0(0))\|}$ , entonces  $\frac{\partial M}{\partial t}(r) = 0$ . Sin embargo como  $\frac{\partial M}{\partial t}(t_0) \neq 0$ , luego en particular se puede asumir que  $\frac{\partial M}{\partial t}(r) \neq 0$  para todo  $r \in ]c - \delta, c + \delta[ \subset ]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$ , siendo una contradicci3n. Por lo tanto la intersecci3n de las variedades estable e inestable  $W^s(p_\epsilon)$  y  $W^u(p_\epsilon)$  es transversal.

Por el contrario, si la funci3n de Melnikov no tiene ceros, entonces  $q_\epsilon^u(t_0)$  y  $q_\epsilon^s(t_0)$  conservan la misma orientaci3n y por lo tanto, las variedades  $W^u(p_\epsilon)$  y  $W^s(p_\epsilon)$  no se intersecan.  $\square$

### Observaci3n:

El **teorema 11**, muestra que la funci3n de Melnikov  $M(t_0)$  expresa una buena medida de la separaci3n de las variedades estable e inestable del sistema perturbado  $W^s(p_\epsilon)$  y  $W^u(p_\epsilon)$ , respectivamente.

En la secci3n anterior se realiz3 el estudio de la integral de Melnikov para un punto de equilibrio hiperb3lico de tipo silla en un campo vectorial Hamiltoniano.

Ahora, supongamos que el sistema definido en (4.1) verifica  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  y  $(A_3)$ , sin embargo  $f$  deja de ser un campo vectorial Hamiltoniano [4].

Vamos a considerar la funci3n distancia dependiente del tiempo:

$$\begin{aligned} \Delta(t, t_0) &= f(q^0(t - t_0)) \wedge (q_1^u(t, t_0) - q_1^s(t - t_0)) \\ &= f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) - f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) \\ &:= \Delta^u(t, t_0) - \Delta^s(t, t_0). \end{aligned}$$

ahora derivando  $\Delta^s(t, t_0)$  con respecto a  $t$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Delta^s(t, t_0)] &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t - t_0))] \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^s(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t - t_0))] \frac{d}{dt}q^0(t - t_0) \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^s(t, t_0)] \\ &= Df(q^0(t - t_0))\dot{q}^0(t - t_0) \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge \dot{q}_1^s(t, t_0). \end{aligned}$$

Utilizando la igualdad (4.10) y que  $\dot{q}^0(t - t_0) = f(q^0(t - t_0))$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}^s(t, t_0) &= Df(q^0(t - t_0))f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge \dot{q}_1^s(t, t_0) \\
&= Df(q^0(t - t_0))f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) + \\
&\quad + f(q^0(t - t_0)) \wedge (Df(q^0(t - t_0))q_1^s(t, t_0) + g(q^0(t - t_0), t)) \\
&= Df(q^0(t - t_0))f(q^0(t - t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) + \\
&\quad + f(q^0(t - t_0)) \wedge Df(q^0(t - t_0))q_1^s(t, t_0) + \\
&\quad + f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t).
\end{aligned}$$

Ahora utilizando la igualdad  $Av \wedge w + v \wedge Aw = tr(A)v \wedge w$  y de la definición de  $\Delta^s(t, t_0)$ , la igualdad anterior se transforma en:

$$\dot{\Delta}^s(t, t_0) = tr(Df(q^0(t - t_0))) \Delta^s(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t).$$

Sustituyendo la siguiente igualdad  $tr(Df(q^0(t - t_0))) = div(f(q^0(t - t_0)))$ , en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\dot{\Delta}^s(t, t_0) = div(f(q^0(t - t_0))) \Delta^s(t, t_0) + f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t),$$

luego sumando  $-div(f(q^0(t - t_0))) \Delta^s(t, t_0)$  a los dos lados de la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\dot{\Delta}^s(t, t_0) - div(f(q^0(t - t_0))) \Delta^s(t, t_0) = f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t).$$

Ahora, multiplicando por el factor integrante:  $e^{-\int_{t_0}^t div(f(q^0(r-t_0)))dr}$  a los dos lados de la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \Delta^s(t, t_0) e^{-\int_{t_0}^t div(f(q^0(r-t_0)))dr} \right) &= e^{-\int_{t_0}^t div(f(q^0(r-t_0)))dr} \\
&\cdot (f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t)).
\end{aligned}$$

Luego integrando de  $t_0$  hasta  $+\infty$ , la igualdad anterior, obtiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{+\infty} \left[ \frac{d}{dt} \left( \Delta^s(t, t_0) e^{-\int_{t_0}^t div(f(q^0(r-t_0)))dr} \right) \right] &= \int_{t_0}^{+\infty} \left[ e^{-\int_{t_0}^t div(f(q^0(r-t_0)))dr} \right. \\
&\cdot (f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t)) \left. \right].
\end{aligned}$$

Utilizando el **Primer teorema fundamental del cálculo** en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
-\Delta^s(t_0, t_0) e^{-\int_{t_0}^{t_0} div(f(q^0(r-t_0)))dr} &= -\Delta^s(+\infty, t_0) e^{-\int_{t_0}^{+\infty} div(f(q^0(r-t_0)))dr} + \\
&+ \int_{t_0}^{+\infty} \left[ e^{-\int_{t_0}^t div(f(q^0(r-t_0)))dr} \right. \\
&\cdot (f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t)) \left. \right].
\end{aligned}$$

Como  $e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0)))dr}$  es acotada,  $\Delta^s(+\infty, t_0) = 0$  y  $e^{-\int_{t_0}^{t_0} \text{div}(f(q^0(r-t_0)))dr} = 1$ .  
se tiene que:

$$-\Delta^s(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} [e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0)))dr} (f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t))]. \quad (4.20)$$

De forma similar, derivando  $\Delta^u(t, t_0)$  con respecto a  $t$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Delta^u(t, t_0)] &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0))] \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^u(t, t_0)] \\ &= \frac{d}{dt}[f(q^0(t-t_0))] \frac{d}{dt}q^0(t-t_0) \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \frac{d}{dt}[q_1^u(t, t_0)] \\ &= Df(q^0(t-t_0))\dot{q}^0(t-t_0) \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \dot{q}_1^u(t, t_0). \end{aligned}$$

Utilizando la igualdad (4.10) y que  $\dot{q}^0(t-t_0) = f(q^0(t-t_0))$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}^u(t, t_0) &= Df(q^0(t-t_0))f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge \dot{q}_1^u(t, t_0) \\ &= Df(q^0(t-t_0))f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge (Df(q^0(t-t_0))q_1^u(t, t_0) + g(q^0(t-t_0), t)) \\ &= Df(q^0(t-t_0))f(q^0(t-t_0)) \wedge q_1^u(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge Df(q^0(t-t_0))q_1^u(t, t_0) + \\ &\quad + f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t). \end{aligned}$$

Ahora utilizando la igualdad  $Av \wedge w + v \wedge Aw = \text{tr}(A)v \wedge w$  y de la definición de  $\Delta^u(t, t_0)$ , se obtiene que:

$$\dot{\Delta}^u(t, t_0) = \text{tr}(Df(q^0(t-t_0))) \Delta^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).$$

Sustituyendo la siguiente igualdad  $\text{tr}(Df(q^0(t-t_0))) = \text{div}(f(q^0(t-t_0)))$ , en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\dot{\Delta}^u(t, t_0) = \text{div}(f(q^0(t-t_0))) \Delta^u(t, t_0) + f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t),$$

luego sumando  $-\text{div}(f(q^0(t-t_0))) \Delta^u(t, t_0)$  a los dos lados de la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\dot{\Delta}^u(t, t_0) - \text{div}(f(q^0(t-t_0))) \Delta^u(t, t_0) = f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t).$$

Ahora, multiplicando por el factor integrante:  $e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0)))dr}$  a los dos lados de la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta^u(t, t_0)e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0)))dr}) &= e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0)))dr} \\ &\cdot (f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)). \end{aligned}$$

Ahora integrando de  $-\infty$  hasta  $t_0$ , en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\int_{-\infty}^{t_0} \left[ \frac{d}{dt} (\Delta^u(t, t_0) e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr}) \right] = \int_{-\infty}^{t_0} \left[ e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr} \cdot (f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)) \right].$$

Luego utilizando el **Primer teorema fundamental del cálculo** en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Delta^u(t_0, t_0) e^{-\int_{t_0}^{t_0} \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr} &= \Delta^u(-\infty, t_0) e^{-\int_{t_0}^{+\infty} \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr} + \\ &+ \int_{-\infty}^{t_0} \left[ e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr} \cdot (f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)) \right]. \end{aligned}$$

Como  $e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr}$  es acotada,  $\Delta^u(-\infty, t_0) = 0$  y  $e^{-\int_{t_0}^{+\infty} \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr} = 1$ . se tiene que:

$$\Delta^u(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \left[ e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr} (f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)) \right]. \quad (4.21)$$

Ahora sumando la igualdad (4.20) y la igualdad (4.21), se obtiene:

$$\Delta(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr} (f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)) \right]. \quad (4.22)$$

Finalmente

$$d(t_0) = \epsilon \frac{M(t_0)}{\|f(q^0(0))\|} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Entonces, se tiene que la función de Melnikov está dada por la siguiente igualdad:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\int_{t_0}^t \text{div}(f(q^0(r-t_0))) dr} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t) dt.$$

# Capítulo 5

## Una aplicación en la combustión en un medio poroso.

### 5.1. Introducción.

La mayor parte de los recursos del petróleo en el mundo son hidrocarburos viscosos y pesados, que son difíciles y costosos de producir y refinar. Por lo general mientras más pesado o denso es el petróleo crudo, menos es su valor económico, siendo unas de las propiedades del fluido que más afecta la productividad y la recuperación es la viscosidad del petróleo. Cuanto más viscoso es el petróleo, más difícil resulta producirlo. Sin embargo, la importancia del petróleo de alta viscosidad está aumentando. La primera razón es que, dada la situación actual, muchos yacimientos de petróleo de alta viscosidad pueden ahora ser explotados de forma rentable. La segunda razón es que estos recursos son abundantes. Es decir, los recursos totales de petróleo en el mundo son aproximadamente de 9 a  $13 \times 10^{12}$  trillones de barriles o de 1,4 a 2,1 trillones de  $m^3$ . El petróleo convencional representa apenas cerca del 30 % del total.

Se tiene pues que la alta viscosidad del combustible sólido genera muchas dificultades para la producción.

En este sentido para reducir la alta viscosidad del combustible sólido presente en el reservorio, vamos a utilizar el Método No Convencional Térmico (combustión in situ), en otras palabras recuperación mejorada de petróleo Enhanced Oil Recovery (EOR).

La **combustión in situ** es un método que consiste en inyectar aire u oxígeno para inducir la ignición en el reservorio con la presencia de combustible sólido y permitir un régimen de combustión y a medida que el frente de combustión avanza a través del reservorio, genere calor suficiente y gas de combustión para reducir la viscosidad del petróleo el cual se encuentra al frente del mismo y de manera que, empuje el petróleo hacia los pozos productores [5].

### 5.2. Modelo matemático

En esta sección, se estudia el modelo matemático [1], que describe el proceso de la reacción provocada por la combustión in-situ en un estrato del reservorio, el cual es dado

por el siguiente sistema

$$\partial_t \theta + a \partial_x \theta = \partial_{xx} \theta + \rho Y \Phi \quad (5.1)$$

$$\partial_t \rho = -\rho Y \Phi \quad (5.2)$$

$$\partial_t Y + a \partial_x Y = -\rho Y \Phi \quad (5.3)$$

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\theta}), & \text{si } \theta > 0. \\ 0, & \text{si } \theta \leq 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

donde:

- 1)  $\theta$  es la **temperatura**.
- 2)  $\rho$  es la **concentración de combustible sólido**.
- 3)  $Y$  es la **concentración de oxígeno**,

siendo estas, variables dependientes adimensionales.

Aquí se asume que el oxígeno (componente del gas) y el calor se están moviendo con la velocidad  $a > 0$ . Una reacción exotérmica que involucra el oxígeno y el combustible sólido puede ocurrir solamente cuando la temperatura está por encima de la temperatura límite, que es dado por el valor de  $\theta = 0$ . Debido a esta convención, la temperatura puede ser negativa.

La tasa de reacción es dada en (5.4) por  $\Phi(\theta)$ . La ecuación (5.1) representa el transporte y difusión de la temperatura y la generación de la energía termal por la reacción.

La ecuación (5.2) representa el consumo del combustible sólido.

La ecuación (5.3) representa el transporte del oxígeno y el consumo del oxígeno en la reacción.

Estamos interesados en soluciones con  $\rho \geq 0$  y  $Y \geq 0$  en todos los lugares.

Se considera (5.1) y (5.2) en  $-\infty < x < \infty$ ,  $t \geq 0$ , con condiciones constantes de frontera.

$$(\theta, \rho, Y)(-\infty) = (\theta^L, \rho^L, Y^L), \quad (\theta, \rho, Y)(\infty) = (\theta^R, \rho^R, Y^R). \quad (5.5)$$

Se asume que la reacción no ocurre en las condiciones de frontera. Existen tres razones para las cuales la reacción puede desaparecer:

- (1) El **control de temperatura (TC)**. La reacción cesa debido a la baja temperatura. Es decir,  $\theta \leq 0$ ;
- (2) El **control de combustible (FC)**. La reacción cesa debido a la falta de combustible. Esto es,  $\rho = 0$ ;
- (3) El **control de oxígeno (OC)**. La reacción cesa debido a la falta de oxígeno. Es decir,  $Y = 0$ .

Naturalmente, dos o tres condiciones pueden ocurrir simultáneamente. Nuestro estudio es limitado a condiciones de frontera genérico:

(L) Exactamente una de las siguientes condiciones acontece:  $\theta^L \leq 0$ , o  $\rho^L = 0$ , o  $Y^L = 0$ . Los otros dos son números positivos.

(R) Exactamente una de las siguientes condiciones acontece:  $\theta^R \leq 0$ , o  $\rho^R = 0$ , o  $Y^R = 0$ . Los otros dos son números positivos.

Una **onda de combustión**, significa una onda viajante no trivial continua con velocidad  $c > 0$ ,  $c \neq a$ , es decir, una solución del sistema (5.1)-(5.3) con velocidad  $c$ . No se va a considerar ondas con velocidad  $c < 0$ , puesto que se tiene en mente la inyección de aire en una extremidad del medio poroso.

Se denota por  $(\theta^-, \rho^-, Y^-) \xrightarrow{c} (\theta^+, \rho^+, Y^+)$  una onda de combustión de velocidad  $c$  que conecta el **estado izquierdo**  $(\theta^-, \rho^-, Y^-)$  con el **estado derecho**  $(\theta^+, \rho^+, Y^+)$ , y estos estados son llamados **estados finales de la onda**.

### Observación:

Estados en los cuales los terminos de la reacción desaparecen son clasificados como:  $TC, FC, OC, TC \cap FC, TC \cap OC, FC \cap OC$  ó  $TC \cap FC \cap OC$ . El tipo de estado indica exactamente que condiciones son satisfechas en aquel estado; por ejemplo, en el estado de tipo  $TC \cap FC$ , se tiene que:  $\theta \leq 0, \rho = 0$  y  $Y > 0$ . Una onda de velocidad  $c$  de un estado de tipo  $FC \cap OC$  para otro estado de tipo  $TC$ , es denotado por:  $FC \cap OC \xrightarrow{c_f} TC$ . Estados diferentes de  $TC, FC$  y  $OC$ , no pueden ser el primer o el último estado de una onda por causa de las suposiciones (L) y (R).

El siguiente teorema describe las ondas de combustión:

**Teorema 12. (Ondas de combustión rápida)** Para  $a > 0$  fijo. Sea  $(\theta^+, \rho^+, Y^+)$  un estado de tipo  $TC$ , es decir,  $\theta^+ \leq 0, \rho^+ > 0, Y^+ > 0$ . Supongamos que  $\theta^+ + Y^+ > 0$ . Entonces, existe un estado  $(\theta^-, \rho^-, Y^-)$  y una velocidad  $c_f > 0$  tal que existe una onda de combustión  $(\theta^-, \rho^-, Y^-) \xrightarrow{c_f} (\theta^+, \rho^+, Y^+)$  que se aproxima de su estado derecho exponencialmente. Se tiene que  $\theta^- > 0$ , y  $\rho^-$  o  $Y^-$  o ambos iguales a 0. Más precisamente, para un punto  $(\theta^+, \rho^+)$  fijo, existe un único  $Y^*$  con  $\theta^+ + Y^* > 0$  tal que

1) Si  $\theta^+ + Y^+ < Y^*$ , entonces existe una onda de combustión de tipo  $OC \xrightarrow{c_f} TC$ ;

2) Si  $Y^+ = Y^*$ , entonces existe una onda de combustión de tipo  $FC \cap OC \xrightarrow{c_f} TC$ ;

3) Si  $Y^+ > Y^*$ , entonces existe una onda de combustión de tipo  $FC \xrightarrow{c_f} TC$ .

En todos los casos  $\theta^+ + Y^+ = \theta^- + Y^-$  y

$$c_f = \frac{aY^+ - aY^-}{Y^+ - Y^- + \rho^- - \rho^+}.$$

No existen ondas de combustión con:  $c > a$  y  $\theta^+ + Y^+ \leq 0$ .

El **Teorema 12**, garantiza que si el estado derecho posee poco oxígeno, es decir, cuando  $(\theta^+ + Y^+ \leq 0)$  entonces la reacción no ocurre. Si el estado derecho posee una cantidad moderada de oxígeno, entonces existe una onda de combustión en la cual todo el oxígeno es usado en la reacción, y si él posee bastante oxígeno, entonces existe una onda de combustión en la cual todo el combustible es usado en la reacción.



### 5.3. Estudio del modelo matemático.

En esta sección se va a estudiar el modelo matemático [1]. En efecto: reescribiendo el sistema (5.1)-(5.3) de la siguiente forma equivalente

$$\partial_t \theta + a \partial_x \theta = \partial_{xx} \theta + \rho Y \Phi(\theta) \quad (5.6)$$

$$\partial_t(\theta + \rho) + a \partial_x \theta = \partial_{xx} \theta \quad (5.7)$$

$$\partial_t(Y - \rho) + a \partial_x Y = 0. \quad (5.8)$$

Donde la ecuación (5.7) se obtiene por la sustitución de la suma de las ecuaciones (5.1) y (5.2), la ecuación (5.8) es el resultado de la sustitución de la diferencia de la ecuación (5.3) y la ecuación (5.2).

En el sistema de ecuaciones (5.6)-(5.8), hacemos la sustitución de la coordenada espacial  $x$  por  $\xi$  que se está moviendo con velocidad  $c$ :  $\xi = x - ct$ , de manera que se obtiene las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \partial_t \theta &= -c \partial_\xi \theta + \partial_t \theta & \partial_t \rho &= -c \partial_\xi \rho + \partial_t \rho, & \partial_t Y &= -c \partial_\xi Y + \partial_t Y \\ \partial_x \theta &= \partial_\xi \theta & & & \partial_x Y &= \partial_\xi Y. \\ \partial_{xx} \theta &= \partial_{\xi\xi} \theta, & & & & \end{aligned}$$

Luego sustituyendo las ecuaciones anteriores en el sistema (5.6)-(5.8) se obtiene que:

$$\begin{aligned} -c \partial_\xi \theta + \partial_t \theta + a \partial_\xi \theta &= \partial_{\xi\xi} \theta + \rho Y \Phi(\theta), \\ -c \partial_\xi \theta + \partial_t \theta - c \partial_\xi \rho + \partial_t \rho + a \partial_\xi \theta &= \partial_{\xi\xi} \theta, \\ -c \partial_\xi Y + \partial_t Y + c \partial_\xi \rho - \partial_t \rho + a \partial_\xi Y &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente poniendo en evidencia los terminos  $\partial_t \theta$ ,  $\partial_t(\theta + \rho)$  y  $\partial_t(Y - \rho)$  respectivamente en el sistema anterior, se obtiene:

$$\partial_t \theta = (c - a) \partial_\xi \theta + \partial_{\xi\xi} \theta + \rho Y \Phi(\theta) \quad (5.9)$$

$$\partial_t(\theta + \rho) = (c - a) \partial_\xi \theta + \partial_{\xi\xi} \theta + c \partial_\xi \rho \quad (5.10)$$

$$\partial_t(Y - \rho) = (c - a) \partial_\xi Y - c \partial_\xi \rho \quad (5.11)$$

Las soluciones estacionarias de (5.9)-(5.11) son las soluciones de tipo onda viajante [13] del sistema (5.1)-(5.3) de velocidad  $c$ . Las soluciones estacionarias de (5.9)-(5.11) satisfacen el sistema de EDO's.

$$0 = (c - a) \partial_\xi \theta + \partial_{\xi\xi} \theta + \rho Y \Phi(\theta) \quad (5.12)$$

$$0 = (c - a) \partial_\xi \theta + \partial_{\xi\xi} \theta + c \partial_\xi \rho \quad (5.13)$$

$$0 = (c - a) \partial_\xi Y - c \partial_\xi \rho \quad (5.14)$$

En la igualdad (5.12) hacemos que  $v_1 = \partial_\xi \theta$  e integrando (5.12)-(5.14) con respecto a  $\xi$  se obtiene el siguiente sistema:

$$\dot{\theta} = v_1 \quad (5.15)$$

$$v_1 = (a - c)v_1 - \rho Y \Phi(\theta) \quad (5.16)$$

$$w_1 = (c - a)\theta + v_1 + c\rho \quad (5.17)$$

$$w_2 = (c - a)Y - c\rho \quad (5.18)$$

donde  $w_1$  y  $w_2$  son constantes de integración, se asume que:  $a \neq c$ . Entonces podemos resolver para  $Y$  usando la igualdad (5.18), de manera que:

$$Y = \frac{c\rho + w_2}{c - a}. \quad (5.19)$$

Para  $v_1$  se resuelve usando la igualdad (5.17), obteniendo:

$$\dot{\theta} = v_1 = (a - c)\theta - c\rho + w_1. \quad (5.20)$$

Finalmente derivando la ecuación (5.17) con respecto a  $\xi$ , se tiene:

$$0 = (c - a)\dot{\theta} + \dot{v}_1 + c\dot{\rho},$$

Ahora, sustituyendo el valor de  $\dot{v}_1$  dado por la ecuación (5.16) y la igualdad (5.15), se obtiene:

$$c\dot{\rho} = Y\rho\Phi(\theta),$$

luego sustituyendo el valor de  $Y$  dada por la igualdad (5.19) y dividiendo por  $c$ , en la igualdad anterior, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a - c)\theta - c\rho + w_1 \\ \dot{\rho} = \frac{c\rho + w_2}{c(c - a)}\rho\Phi(\theta) \end{cases} \quad (5.21)$$

donde  $(w_1, w_2)$  es un vector de parámetros.

Los puntos de equilibrio para el sistema (5.21) son dados por las siguientes igualdades:

$$(a - c)\theta - c\rho + w_1 = 0 \quad (5.22)$$

$$\frac{c\rho + w_2}{c(c - a)}\rho\Phi(\theta) = 0 \quad (5.23)$$

Entonces, los puntos de equilibrio del sistema (5.21) son:

$$((a - c)\theta - c\rho + w_1, \Phi(\theta)) = (0, 0) \quad (5.24)$$

$$((a - c)\theta - c\rho + w_1, \rho) = (0, 0) \quad (5.25)$$

$$((a - c)\theta - c\rho + w_1, \rho) = (0, -\frac{w_2}{c}) \quad (5.26)$$

Todos los puntos de equilibrio se encuentran en la línea recta  $H$  definida por la siguiente igualdad

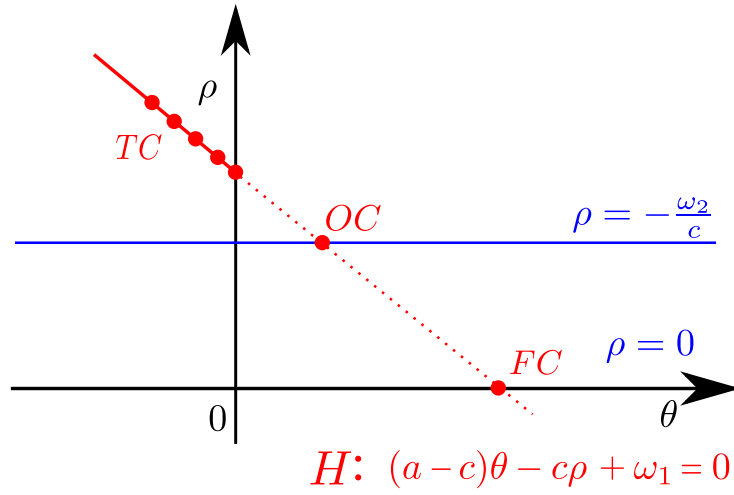
$$H : (a - c)\theta - c\rho + w_1 = 0.$$

Observe que la línea recta  $H$  tiene inclinación positiva si  $0 < c < a$  e inclinación negativa si  $c > a$ . Ver la **figura 5.1 y 5.2**.

En términos de las variables  $(\theta, v_1, \rho, Y)$ , con  $v_1 = \theta$ , la línea recta  $H$  corresponde a  $v_1 = 0$ . La porción de  $H$  en  $\theta \leq 0$  es  $TC$ ; la porción en  $\theta > 0$  es la unión disjunta de

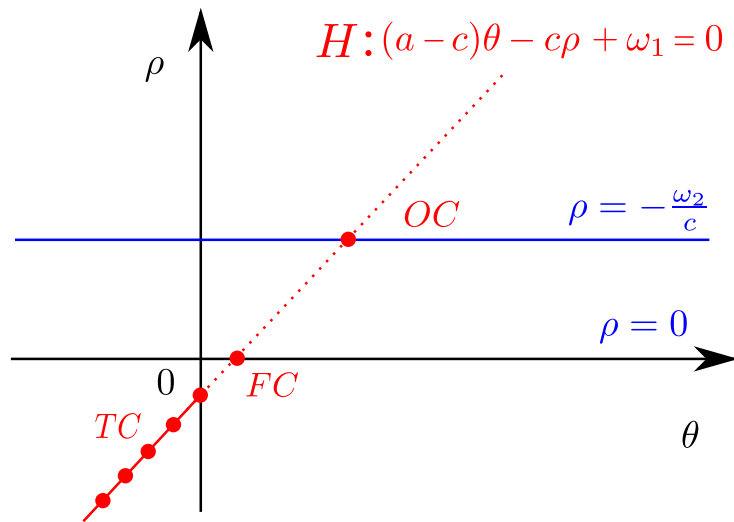
$$FC(\rho = 0 \text{ solamente}), OC(Y = 0 \text{ solamente}) \text{ y } FC \cap OC(\rho = Y = 0).$$

**Figura 5.1:** Distribución de los puntos equilibrio para el sistema (5.21), donde  $0 < a < c$ .



Fuente: elaboración propia.

**Figura 5.2:** Distribución de los puntos de equilibrio para el sistema (5.21), donde  $0 < c < a$ .



Fuente: elaboración propia.

De la ecuación (5.19), el sistema (5.21) tiene las siguientes líneas rectas invariantes.

$$\rho = 0 \text{ y } \rho = -\frac{w_2}{c}. \quad (5.27)$$

La parte físicamente relevante del diagrama de fase del sistema (5.21), el cual es denotado por  $\mathcal{P}$ , tiene  $\rho \geq 0$  y  $Y \geq 0$ .

Ahora de la igualdad (5.19) se tiene que:

- 1)  $0 < c < a$ ,  $Y \geq 0$  si y solamente si  $\rho \leq -\frac{w_2}{c}$ .
- 2)  $c > a$ ,  $Y \geq 0$  si y solamente si  $\rho \geq -\frac{w_2}{c}$ .

En el primer caso,  $\mathcal{P}$  es no vacío si  $w_2 < 0$ , luego  $\mathcal{P} = \{(\theta, \rho) : 0 \geq \rho \geq -\frac{w_2}{c}\}$ . En el segundo caso  $\mathcal{P} = \{(\theta, \rho) : \rho \geq \max\{0, -\frac{w_2}{c}\}\}$ . Observe que ambos conjuntos son invariantes.

El conjunto de puntos de equilibrio del sistema (5.21) es la unión de cuatro subconjuntos

$$\begin{aligned} FC &= \{(\theta, \rho) : \theta > 0, \rho = 0, c\rho + w_2 > 0 \text{ y } (a - c)\theta - c\rho + w_1 = 0\}, \\ OC &= \{(\theta, \rho) : \theta > 0, \rho > 0, c\rho + w_2 = 0 \text{ y } (a - c)\theta - c\rho + w_1 = 0\}, \\ FC \cap OC &= \{(\theta, \rho) : \theta > 0, \rho = 0, c\rho + w_2 = 0 \text{ y } (a - c)\theta - c\rho + w_1 = 0\}, \\ TC^* &= \{(\theta, \rho) : \theta \leq 0 \text{ y } (a - c)\theta - c\rho + w_1 = 0\}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

### Observación:

Los conjuntos  $FC$ ,  $OC$  y  $FC \cap OC$  constan de los puntos de equilibrio de esos tipos solamente teniendo en cuenta la igualdad (5.19).

$TC^*$  incluye todos los puntos de equilibrio de tipo  $TC$ ,  $TC \cap FC$ ,  $TC \cap OC$  y  $TC \cap FC \cap OC$ . Es decir, todos los puntos de equilibrio de baja temperatura.

La linealización del sistema (5.21) en el punto  $(\theta, \rho)$  tiene la siguiente matriz:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ \frac{c\rho + w_2}{c(c-a)}\rho\dot{\Phi}(\theta) & \frac{2c\rho + w_2}{c(c-a)}\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2 \times 2}. \quad (5.29)$$

Ahora se va a caracterizar los puntos de equilibrio del sistema (5.21), mediante la siguiente proposición:

**Proposición 1.** *Para todo punto de equilibrio  $(\theta, \rho)$  del sistema (5.21), se verifica:*

- 1) *Si  $(\theta, \rho) \in TC^*$ , entonces un valor propio es  $a - c$  el cual está asociado al vector propio  $(1, 0)$  y el otro valor propio es 0.*
- 2) *Si  $(\theta, \rho) \in FC$  o  $FC \cap OC$ , entonces un valor propio es  $a - c$  el cual está asociado al vector propio  $(1, 0)$ . Este vector apunta a lo largo de la línea recta invariante  $\rho = 0$ . El otro valor propio es positivo en  $FC$  y 0 en  $FC \cap OC$ . Su vector propio asociado es transversal a la línea recta invariante  $\rho = 0$ .*
- 3) *Si  $(\theta, \rho) \in OC$  es punto de silla, un valor propio es  $a - c$ , el cual está asociado al vector propio  $(1, 0)$ . Este vector propio está en la línea recta invariante  $\rho = -\frac{w_2}{c}$  correspondiente a  $Y = 0$ . El otro vector propio es transversal a la línea recta invariante.*

## Demostración:

- (1) Sea  $(\theta, \rho) \in TC^*$ . Entonces, evaluando el punto de equilibrio en el sistema linealizado (5.29) se obtiene que:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

luego los valores propios del sistema linealizado son:

$$\lambda = a - c \text{ y } \lambda = 0.$$

El vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  está asociado al valor propio  $\lambda = a - c$  y el vector propio  $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c})$  está asociado al valor propio  $\lambda = 0$ .

- (2) Sea  $(\theta, \rho) \in FC$  o  $FC \cap OC$ . Entonces, evaluando el punto de equilibrio en el sistema linealizado (5.29) se tiene que:

$$DF(\theta, 0) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ 0 & \frac{w_2}{c(c-a)}\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

En el conjunto  $FC$  se tiene que  $Y > 0$  luego

$$w_2 = (c - a)Y - c\rho = (c - a)Y. \quad (5.30)$$

Por tanto  $w_2$  tiene el mismo signo de  $c - a$ .

Luego los valores propios del sistema linealizado anterior son:

$$\lambda = a - c \text{ y } \lambda = 0.$$

El vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  está asociado al valor propio  $\lambda = a - c$  y el vector propio  $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c})$  está asociado al valor propio  $\lambda = 0$ .

En el conjunto  $FC \cap OC$  tenemos que  $Y = 0$ , luego se tiene que  $w_2 = 0$ . Entonces evaluando  $(\theta, \rho) \in FC \cap OC$  en la matriz de la linealización del sistema (5.29), se obtiene:

$$DF(\theta, 0) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Luego los valores propios del sistema linealizado anterior son:

$$\lambda = a - c \text{ y } \lambda = 0.$$

El vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  está asociado al valor propio  $\lambda = a - c$  y el vector propio  $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c})$  está asociado al valor propio  $\lambda = 0$ .

- (3) Sea  $(\theta, \rho) \in OC$ . Entonces, evaluando el punto de equilibrio en el sistema linealizado (5.29), se obtiene que:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} a - c & -c \\ 0 & \frac{w_2}{c(a-c)}\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Como  $\rho > 0$  y  $c\rho + w_2 = 0$ , entonces  $w_2 < 0$ , luego los valores propios son:

$$\lambda = a - c \text{ y } \lambda = \frac{w_2}{c(a - c)}\Phi(\theta),$$

de acuerdo con el **Teorema 7 (i)**, se tiene que el punto de equilibrio en el conjunto  $OC$  es un punto de equilibrio de tipo silla. El vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  está asociado al valor propio  $\lambda = a - c$ , está a lo largo de la línea recta invariante  $\rho = -\frac{w_2}{c}$  y el vector propio  $\vec{v} = (1, \frac{a-c}{c} - \frac{w_2\Phi(\theta)}{c^2(a-c)})$  está asociado al valor propio  $\lambda = \frac{w_2}{c(a-c)}\Phi(\theta)$ , el cual es transversal a la línea recta  $\rho = -\frac{w_2}{c}$ .

□

### Observación:

Como las líneas rectas  $\rho = 0$  y  $\rho = -\frac{w_2}{c}$ , cada una, contiene solamente un punto de equilibrio, respectivamente, entonces estas líneas rectas no contienen ondas viajantes con límites finitos en sus extremidades.

Por tanto, a partir de la **Proposición 1**, se concluye que para encontrar soluciones para el sistema (5.21) que se aproximen a los estados finales exponencialmente, entonces se debe estudiar los siguientes casos:

**Caso 1** : Para  $0 < a < c$ ; estado izquierdo en  $FC$  o  $OC$ , estado derecho en  $TC^*$ .

**Caso 2** : Para  $0 < c < a$ ; estado izquierdo en  $FC$  o  $TC^*$ , estado derecho en  $OC$ .

Se dice que el caso (1) es una **onda viajante rápida** y que el caso (2) es una **onda viajante lenta**.

En la próxima sección se estudiará las ondas viajantes rápidas.

## 5.4. Ondas viajantes rápidas ( $0 < a < c$ ).

En esta sección se demostrará el **Teorema 12**.

Supongamos que el estado derecho de una onda viajante para el sistema de ecuaciones (5.1)-(5.3) es:  $(\theta^+, \rho^+, Y^+)$  con  $\theta^+ \leq 0$ . Supongamos  $(R)$ . Observemos que estamos interesados en estudiar solamente el caso en que  $\rho^+ > 0$  y  $Y^+ > 0$ . Es decir, el estado derecho  $(\theta^+, \rho^+, Y^+)$  se encuentra en  $TC$ . Esto se debe a razones físicas, ya que si el combustible está en falta en el estado derecho, no puede ser transportado para allá; si el oxígeno está faltando en el estado derecho, entonces no puede ser transportado para allá tan rápido para soportar una velocidad de onda de combustión mayor que  $a$ .

El estado derecho  $(\theta^+, \rho^+, Y^+)$  corresponde a:

$$\begin{aligned} (\theta, v, \rho, Y) &= (\theta^+, 0, \rho^+, Y^+) \text{ y} \\ (\theta, \rho, w_1, w_2) &= (\theta^+, \rho^+, (c - a)\theta^+ + c\rho^+, (c - a)Y^+ - c\rho^+). \end{aligned}$$

Luego se tiene que:

$$(w_1, w_2) = ((c - a)\theta^+ + c\rho^+, (c - a)Y^+ - c\rho^+). \quad (5.31)$$

Ahora sustituyendo la igualdad (5.31) en el sistema (5.21), se obtiene que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a - c)(\theta - \theta^+) - c(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = \left(\frac{\rho - \rho^+}{c - a} + \frac{Y^+}{c}\right)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \quad (5.32)$$

La línea recta invariante  $Y = 0$  corresponde a

$$\rho = -\frac{w_2}{c} = \rho^+ - \frac{c - a}{c}Y^+.$$

Como  $c > a$ , esta línea recta se encuentra abajo de la línea recta  $\rho = \rho^+$ . Esta línea recta se encuentra encima (abajo) de  $\rho = 0$  si  $\rho^+ > \frac{(c-a)}{c}Y^+$  (respectivamente.  $\rho^+ < \frac{(c-a)}{c}Y^+$ ).

Las líneas rectas  $\rho = 0$  y  $Y = 0$  coinciden si  $\rho^+ = \frac{(c-a)}{c}Y^+$ , es decir,  $c = \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}$ .

El sistema (5.32) tiene un vector de parámetros  $(a, c, \theta^+, \rho^+, Y^+)$ . Ahora para realizar un adecuado estudio, se va a fijar la terna  $(a, \theta^+, \rho^+)$  con  $a > 0, \theta^+ \leq 0$  y  $\rho^+ > 0$ , para lo cual se definen las siguientes regiones:

$$\text{Región C} = \{(Y^+, c) : \rho^+ < Y^+ < \infty \text{ y } c = \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}\}. \quad (5.33)$$

$$\text{Región 1} = \{(Y^+, c) : \rho^+ < Y^+ < \infty \text{ y } c > \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}\}. \quad (5.34)$$

$$\text{Región 2} = \{(Y^+, c) : Y^+ > 0, c > a \text{ y } c < \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}\}. \quad (5.35)$$

Ver la figura 5.3.

### Estudio del sistema (5.32) en la región C.

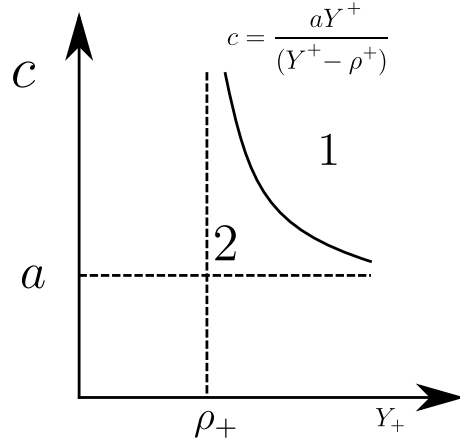
En la región C, las líneas rectas  $\rho = 0$  y  $Y = 0$  coinciden, es decir, en esta región se tiene que  $c = \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}$ , luego haciendo la sustitución de  $c = \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}$  en el sistema (5.32) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \left(a - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}\right)(\theta - \theta^+) - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} &= \left(\frac{\rho - \rho^+}{\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+} - a} + \frac{Y^+}{\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}}\right)\rho\Phi(\theta). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \left(\frac{a(Y^+ - \rho^+) - aY^+}{Y^+ - \rho^+}\right)(\theta - \theta^+) - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} &= \left(\frac{\rho - \rho^+}{\frac{aY^+ - a(Y^+ - \rho^+)}{Y^+ - \rho^+}} + \frac{Y^+}{\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}}\right)\rho\Phi(\theta). \end{aligned}$$

**Figura 5.3:** Diagrama de la región C, región 1 y región 2.



Fuente: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam.

Chapiro, G. ; Marchesin, D. ; Schecter, S.

Realizando las operaciones correspondientes en el lado derecho del sistema se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \left(\frac{-a\rho^+}{Y^+ - \rho^+}\right)(\theta - \theta^+) - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} &= \left(\frac{(\rho - \rho^+)(Y^+ - \rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+(Y^+ - \rho^+)}{aY^+}\right)\rho\Phi(\theta).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \left(\frac{-a\rho^+}{Y^+ - \rho^+}\right)(\theta - \theta^+) - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} &= \left(\frac{(\rho - \rho^+)(Y^+ - \rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+(Y^+ - \rho^+)}{aY^+}\right)\rho\Phi(\theta)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{a}{(Y^+ - \rho^+)}(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)) \\ \dot{\rho} &= \frac{(Y^+ - \rho^+)}{a}\left(\frac{\rho - \rho^+}{\rho^+} + 1\right)\rho\Phi(\theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{a}{(Y^+ - \rho^+)}(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)) \\ \dot{\rho} &= \frac{(Y^+ - \rho^+)}{a\rho^+}\rho^2\Phi(\theta)\end{aligned}$$



Ahora multiplicando el factor  $a\rho^+(Y^+ - \rho^+) > 0$  al sistema (5.32) se tiene que:

$$\begin{aligned} a\rho^+(Y^+ - \rho^+)\dot{\theta} &= a^2\rho^+(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)) \\ a\rho^+(Y^+ - \rho^+)\dot{\rho} &= (Y^+ - \rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta), \end{aligned}$$

y haciendo que  $\tau = a\rho^+(Y^+ - \rho^+)t$ , entonces  $\frac{d\tau}{dt} = a\rho^+(Y^+ - \rho^+)$ , se tiene el siguiente cambio de escala:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &:= \frac{d\theta}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = a^2\rho^+(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)) \\ \dot{\rho} &:= \frac{d\rho}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = (Y^+ - \rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta). \end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a^2\rho^+(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)) \\ \dot{\rho} = (Y^+ - \rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta). \end{cases} \quad (5.36)$$

Observe que: cuando  $\rho > 0$  se tiene que  $\dot{\rho} = 0$  para  $\theta \leq 0$ , entonces las órbitas para  $\theta \leq 0$  son horizontales y  $\dot{\rho} > 0$  para  $\theta > 0$ .

Para  $\rho > 0$ , se tiene que  $\theta$  cambia de signo, de positivo a negativo cuando la línea recta

$$H : \rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho) = 0$$

es cruzada a partir de la izquierda hacia la derecha.

Los puntos de equilibrio del sistema (5.36), son  $(\theta, \rho)$  tales que verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a^2\rho^+(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)) &= 0 \\ (Y^+ - \rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se obtiene que:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ con } \theta^+ \leq 0 \text{ y } (\theta, \rho) = (\theta^+ + Y^+, 0) \quad (5.37)$$

son los puntos de equilibrio del sistema (5.36). Realizando la linealización en el punto  $(\theta, \rho)$ , se tiene la siguiente matriz:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ (Y^+ - \rho^+)^2\rho^2\dot{\Phi}(\theta) & 2(Y^+ - \rho^+)^2\rho\Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2 \times 2}. \quad (5.38)$$

Evaluando la matriz de linealización (5.38) en el punto  $(\theta^+, \rho^+)$ , se obtiene que:

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}. \quad (5.39)$$

Luego los valores propios asociados a la matriz (5.39) son:

$$\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0 \text{ y } \lambda = 0.$$

entonces el vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  está asociado al valor propio  $\lambda = -a^2(\rho^+)^2$  y el vector propio  $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$ , está asociado al valor propio  $\lambda = 0$ .

Existe la variedad estable unidimensional  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  de modo que es tangente al vector  $\vec{u}$  en el punto  $(\theta^+, \rho^+)$  y también existe una variedad central unidimensional  $W^c(\theta^+, \rho^+)$  el cual es tangente al vector  $\vec{v}$  en el punto  $(\theta^+, \rho^+)$ .

De forma análoga evaluando el punto  $(\theta^+ + Y^+, 0)$  en la matriz de linealización (5.39), de manera que se obtiene que:

$$DF(\theta^+ + Y^+, 0) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}. \quad (5.40)$$

Entonces los valores propios asociados a la matriz (5.40) son:

$$\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0 \text{ y } \lambda = 0.$$

para el valor propio  $\lambda = -a^2(\rho^+)^2$  está asociado el vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  y para el valor propio  $\lambda = 0$  está asociado el vector propio  $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$ .

Entonces, existe una variedad estable unidimensional  $W^s(\theta^+ + Y^+, 0)$  y existe una variedad central unidimensional  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$  los cuales son tangentes a los vectores propios  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  en el punto  $(\theta^+ + Y^+, 0)$ , respectivamente.

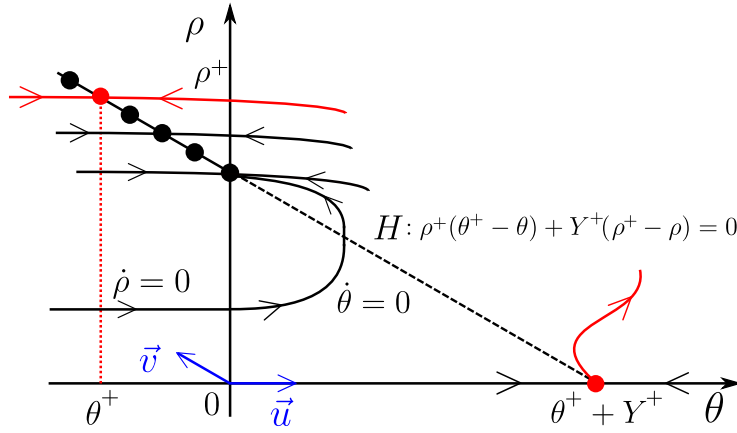
Si  $\theta^+ + Y^+ < 0$ , no existe onda viajante con estado derecho en el punto  $(\theta^+, \rho^+)$  que conecte los puntos  $(\theta^+ + Y^+, 0)$  y  $(\theta^+, \rho^+)$ , pues se tendría una contradicción con el Teorema de existencia y unicidad para EDO's.

Si  $\theta^+ + Y^+ > 0$ , el punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, 0)$  es de tipo  $FC \cap OC$ , pues  $\rho = Y = 0$ . Para  $\rho > 0$  existe una variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ , la cual es tangente al vector  $\vec{v}$  en el punto  $(\theta^+ + Y^+, 0)$ . Es decir,  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$  se encuentra encima o abajo de la línea recta  $H$ , siendo la última imposible, pues el flujo atraviesa la línea recta  $H$  de izquierda a derecha. Por tanto las soluciones en  $\rho > 0$  deja la línea recta  $H$  por encima y es tangente al vector  $\vec{v}$  en el punto  $(\theta^+ + Y^+, 0)$ . Ver la **figura 5.4**.

**Proposición 2.** Sea  $a > 0$  y  $\theta^+ \leq 0$ .

- (1) Supongamos que  $\rho^+ \geq -\theta^+$ . Entonces existe un único  $Y^*$ , con  $\rho^+ < Y^* < \infty$  tal que, para el sistema (5.36) la variedad estable de  $(\theta^+, \rho^+)$  contiene una rama de la variedad central de  $(\theta^+ + Y^*, 0)$ . Para  $\rho^+ < Y^+ < Y^*$ , la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra encima de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$ ; para  $Y^* < Y^+ < \infty$ , la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra abajo de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$ .
- (2) Supongamos que  $\rho^+ < -\theta^+$ . Entonces existe un único  $Y^*$ ,  $-\theta^+ < Y^* < \infty$  tal que, para el sistema (5.36) la variedad estable de  $(\theta^+, \rho^+)$  contiene una rama de la variedad central de  $(\theta^+ + Y^*, 0)$ . Para  $-\theta^+ < Y^+ < Y^*$ , la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra encima de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$ ; para  $Y^* < Y^+ < \infty$ , la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra abajo de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$ .

**Figura 5.4:** Diagrama de fase asociado al sistema (5.36).



Fuente: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam.  
Chapiro, G. ; Marchesin, D. ; Schecter, S.

### Demostración:

En ambos casos de la proposición vamos a considerar solamente que  $Y^+ > -\theta^+$ , pues para cuando  $Y^+ \leq -\theta^+$  se tendría que, en esta región, las órbitas son horizontales, imposibilitando la conexión.

En el caso (1) vamos a considerar el valor límite  $Y^+ = \rho^+$  en el sistema (5.36):

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a^2(\rho^+)^2((\theta^+ - \theta) + (\rho^+ - \rho)) \\ \dot{\rho} = 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

Luego el sistema (5.41) tiene los siguientes puntos de equilibrio

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ y } (\theta, \rho) = (\theta^+ + \rho^+, 0).$$

Haciendo la linealización del sistema (5.41) en el punto  $(\theta, \rho)$  se tiene que:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}. \quad (5.42)$$

Sustituyendo  $(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+)$  en la matriz de linealización (5.42), se obtiene:

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}. \quad (5.43)$$

Entonces la matriz (5.43) tiene los siguientes valores propios  $\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0$  y  $\lambda = 0$ . Para el valor propio  $\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0$  está asociado al vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  y para

el valor propio  $\lambda = 0$  está asociado al vector propio  $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$ . Ahora, sustituyendo  $(\theta, \rho) = (\theta^+ + \rho^+, 0)$  en (5.42) se obtiene:

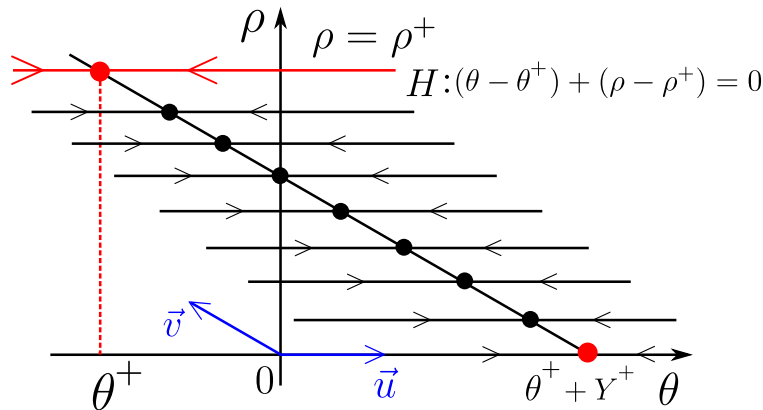
$$DF(\theta^+ + \rho^+, 0) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^2 & -a^2\rho^+Y^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}. \quad (5.44)$$

Entonces la matriz de linealización (5.44) tiene los siguientes valores propios:

$$\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0 \text{ y } \lambda = 0.$$

El valor propio  $\lambda = -a^2(\rho^+)^2 < 0$  está asociado al vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  y para el valor propio  $\lambda = 0$  está asociado al vector propio  $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$ . Como  $\dot{\rho} = 0$ , entonces la línea recta  $H : (\theta^+ - \theta) + (\rho^+ - \rho) = 0$  es una línea recta de equilibrios atractores. La variedad estable de estos puntos son líneas rectas horizontales. En particular la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  es la línea recta  $\rho = \rho^+$ , y la variedad central  $W^c(\theta^+ + \rho^+, 0)$  es la línea recta  $H : (\theta^+ - \theta) + (\rho^+ - \rho) = 0$ ,  $\theta^+ < \theta$ . En esta región no es posible la existencia de una onda viajante que conecte el punto de equilibrio  $(\theta^+ + \rho^+, 0)$  con el punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$ . Ver la **figura 5.5**. Observe

**Figura 5.5:** Diagrama de fase asociado al sistema (5.41)



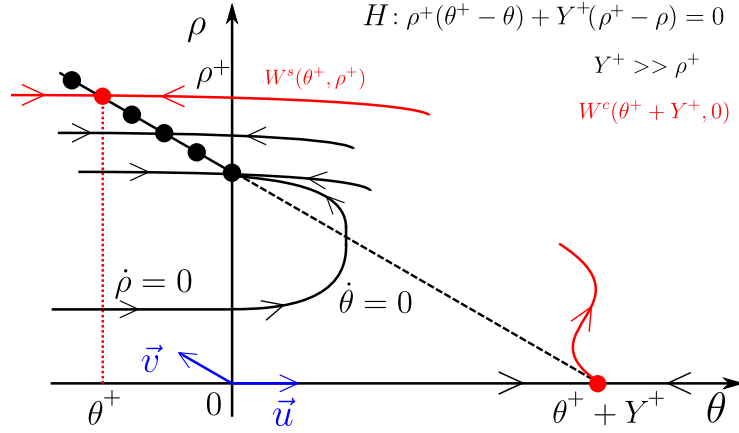
Fuente: elaboración propia.

que para  $Y^+ \gg \rho^+$  y como el flujo varía continuamente se tiene que la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra encima de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ . Ver la **figura 5.6**.

Para el caso (2) vamos a considerar el valor límite  $Y^+ = -\theta^+$  en el sistema (5.41), es decir sustituimos  $Y^+ = -\theta^+$  en el sistema (5.41) de manera que se obtenga que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a^2(\rho^+)^2(-\rho^+\theta + \theta^+\rho) \\ \dot{\rho} = (\theta^+ + \rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta) \end{cases} \quad (5.45)$$

**Figura 5.6:** Diagrama de fase asociado al sistema (5.36).



Fuente: elaboración propia.

El sistema (5.45) tiene los siguientes puntos de equilibrio:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ y } (\theta, \rho) = (0, 0).$$

Realizando la linealización del sistema (5.45) en el punto  $(\theta, \rho)$ , se obtiene que:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^3 & a^2(\rho^+)^2\theta^+ \\ (\theta^+ + \rho^+)^2\rho^2\dot{\Phi}(\theta) & 2(\theta^+ + \rho^+)^2\rho\dot{\Phi}(\theta) \end{pmatrix}_{2 \times 2}. \quad (5.46)$$

Sustituyendo  $(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+)$  en la matriz de linealización (5.46), se obtiene que:

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^3 & a^2(\rho^+)^2\theta^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad (5.47)$$

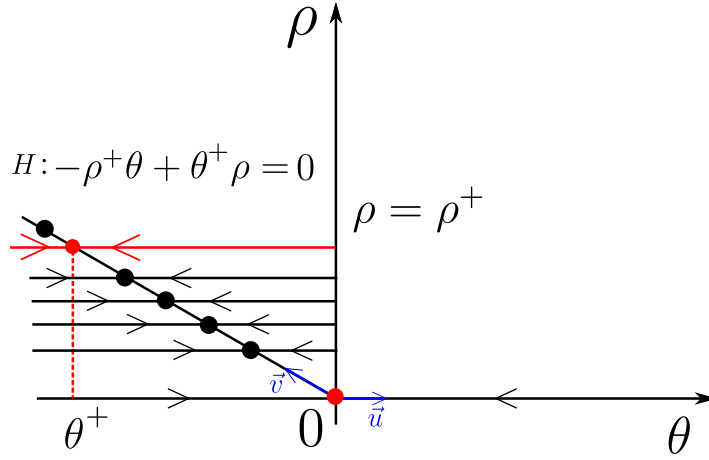
Entonces la matriz (5.47) tiene los siguientes valores propios:  $\lambda = -a^2(\rho^+)^3$  y  $\lambda = 0$ . Y estos valores propios están asociados a los vectores propios  $\vec{u} = (1, 0)$  y  $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{\theta^+})$ , respectivamente. En forma análoga sustituyendo  $(\theta, \rho) = (0, 0)$  en la matriz de linealización (5.46) se obtiene que:

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -a^2(\rho^+)^3 & a^2(\rho^+)^2\theta^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}. \quad (5.48)$$

Entonces la matriz (5.48) tiene los siguientes valores propios:  $\lambda = -a^2(\rho^+)^3$  y  $\lambda = 0$ . Y estos valores propios están asociados a los vectores propios  $\vec{u} = (1, 0)$  y  $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{\theta^+})$ , respectivamente.

En esta región no existe onda viajante con estado derecho en el punto  $(\theta^+, \rho^+)$  y que conecte los puntos  $(0, 0)$  y  $(\theta^+, \rho^+)$ , pues se tendría una contradicción con el teorema de

**Figura 5.7:** Diagrama de fase asociado al sistema (5.45)



Fuente: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam.  
Chapiro, G. ; Marchesin, D. ; Schecter, S.

existencia y unicidad para EDO's. Ver la **figura 5.7**.

Observe que para  $Y^+ \gg -\theta^+$  y como el flujo varía continuamente se tiene que la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra encima de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ . Ahora vamos a mostrar en cada caso, que para  $Y^+ \gg 0$ , existen órbitas que salen de la línea recta  $H : \rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho) = 0$ , las cuales separan la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  y la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ . Entonces, la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra abajo de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ . Ver la **figura 5.8**. En efecto: sea  $\epsilon$  fijo tal que  $0 < \epsilon < \rho^+$  y vamos a considerar el sistema (5.36) sobre el subconjunto  $[-\theta^+ + \epsilon, -\theta^+ + 2\epsilon] \times [\rho^+ - \epsilon, \rho^+]$ . Para  $(\theta, \rho)$  en esta región se tiene que.

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{a^2 \rho^+}{(Y^+ - \rho^+)^2} \frac{\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)}{\rho^2 \Phi(\theta)}.$$

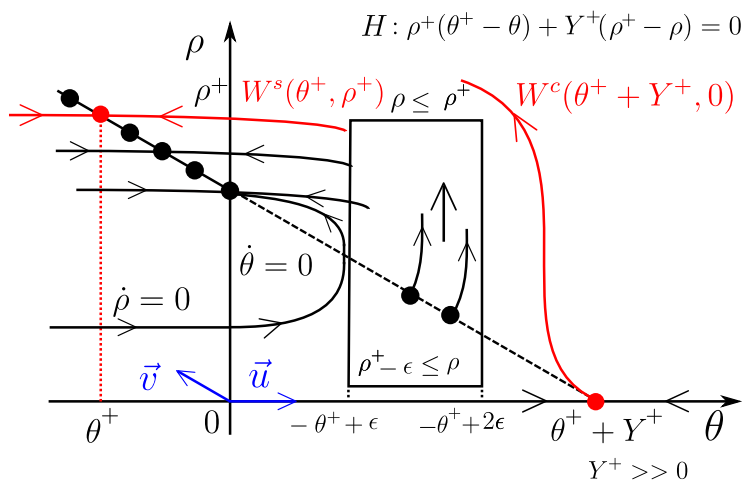
Para todo punto  $(\theta, \rho)$  en  $[-\theta^+ + \epsilon, -\theta^+ + 2\epsilon] \times [\rho^+ - \epsilon, \rho^+]$  se verifican las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} 2\theta^+ - 2\epsilon &\leq (\theta^+ - \theta) \leq 2\theta^+ - \epsilon \\ \frac{1}{\Phi(-\theta^+ + 2\epsilon)} &\leq \frac{1}{\Phi(\theta)} \leq \frac{1}{\Phi(-\theta^+ + \epsilon)} \\ 0 &\leq (\rho^+ - \rho) \leq \epsilon \\ \frac{1}{(\rho^+)^2} &\leq \frac{1}{(\rho)^2} \leq \frac{1}{(\rho^+ - \epsilon)^2}, \end{aligned}$$

con la utilización de estas desigualdades, se obtiene que:

$$\frac{a^2 \rho^+}{(Y^+ - \rho^+)^2} \frac{\rho^+(2\theta^+ - 2\epsilon)}{(\rho^+)^2 \Phi(-\theta^+ + 2\epsilon)} \leq \frac{d\theta}{d\rho} \leq \frac{a^2 \rho^+}{(Y^+ - \rho^+)^2} \frac{\rho^+((2\theta^+ - \epsilon) + Y^+ \epsilon)}{(\rho^+ - \epsilon)^2 \Phi(-\theta^+ + \epsilon)}.$$

**Figura 5.8:** Diagrama de fase asociado al sistema (5.36).



Fuente: elaboración propia

Observe que  $(2\theta^+ - 2\epsilon) < 0$  y  $(2\theta^+ - \epsilon) + Y^+\epsilon > 0$ . Por tanto el lado derecho de la desigualdad es positivo y el lado izquierdo es negativo.

Ahora haciendo que  $Y^+$  tienda para  $+\infty$  en la desigualdad anterior se obtiene que los lados izquierdo y derecho tienden a cero, luego por el **teorema del Sandwich**[7]. Sigue que  $\frac{d\theta}{d\rho}$  tiende a cero.

En este conjunto compacto se tiene que  $\frac{d\theta}{d\rho}$  apunta para arriba verticalmente, entonces para cualquier órbita basada en un punto de la línea recta  $H$  es dirigida para arriba verticalmente acompañando a  $\frac{d\theta}{d\rho}$  y separa la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ . Por tanto, la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$  se encuentra encima de la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$ .

Por tanto, para el sistema (5.36) existe  $Y^*$  con  $\rho^+ < Y^* < \infty$  para el caso (1) y  $-\theta^+ < Y^* < \infty$  para el caso (2) tal que, para el sistema (5.36), la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  contiene una rama de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^*, 0)$ .

### Unicidad de la solución para el sistema (5.36).

Ahora vamos a mostrar que existe un único  $Y^*$ ; en efecto, supongamos que existe  $Y^+ \neq Y^*$ , de modo que el punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, 0)$  y el punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  esten conectados mediante una órbita, luego utilizando la **función de Melnikov** dada por

la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
M &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\int_0^\tau r(\eta)d\eta\right](-\dot{\rho}, \dot{\theta}) \frac{\partial}{\partial Y^+} \begin{pmatrix} F_1(\theta, \rho) \\ F_2(\theta, \rho) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\int_0^\tau r(\eta)d\eta\right](-\dot{\rho}, \dot{\theta}) \begin{pmatrix} a^2\rho^+(\rho^+ - \rho) \\ 2(Y^+ - \rho^+)\rho^2\Phi(\theta) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\int_0^\tau r(\eta)d\eta\right] (2(Y^+ - \rho^+)\rho^2\Phi(\theta)\dot{\theta} - a^2\rho^+(\rho^+ - \rho)\dot{\rho}) d\tau,
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{pmatrix} F_1(\theta, \rho) = a^2\rho^+(\rho^+(\theta^+ - \theta) + Y^+(\rho^+ - \rho)) \\ F_2(\theta, \rho) = (Y^+ - \rho^+)^2\rho^2\Phi(\theta) \end{pmatrix},$$

$$(\theta, \rho)(\tau) \text{ la órbita de conexión y } r(\tau) = \operatorname{div}F(\theta, \rho)(\tau).$$

Como cualquier conexión del punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, 0)$  con el punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra en el primer cuadrante del plano  $\theta\rho$  y por encima de la línea recta  $H$ , entonces  $\rho^+ > \rho, \dot{\rho} > 0$  y  $\dot{\theta} < 0$ . Luego se tiene que  $M < 0$ , y como  $M < 0$ , entonces la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$  cruza de abajo hacia arriba a la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  cuando  $Y^+ > Y^*$ . Luego existe un  $Y_1^+$ , con  $Y^* < Y_1^+ < Y^+$  y existe conexión de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y_1^+, 0)$  y la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$ . Sin embargo la función de Melnikov es positiva, siendo una contradicción, pues  $M < 0$ . Por tanto  $Y^*$  es único.

## Estudio del sistema (5.32) en la región 1.

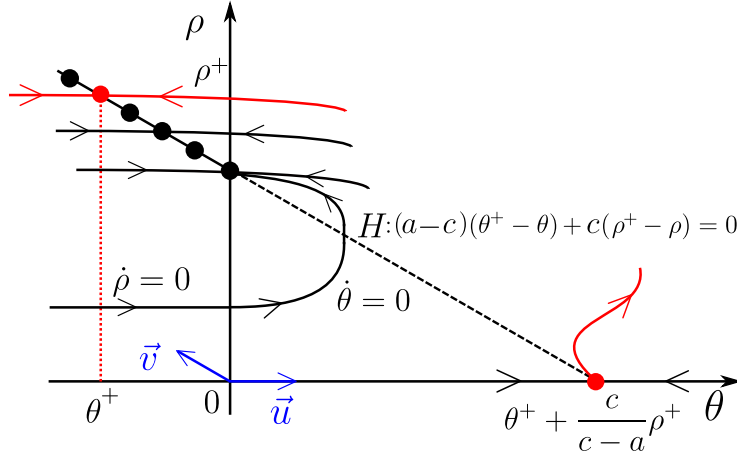
En la región 1, la línea recta  $Y = 0$  se encuentra abajo de la línea recta  $\rho = 0$ . Ver la **figura 5.9**. Una onda viajante con estado derecho en el punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  existe, si la variedad central del punto de equilibrio  $(\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+, 0)$  se encuentra con la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$ .

**Proposición 3.** Sea  $a > 0$  y  $\theta^+ \leq 0$ . Sea  $Y^*$  dado por la **proposición 2**.

- (1) Supongamos que  $\rho^+ \geq -\theta^+$ . Para  $Y^* < Y^+ < \infty$ , todos los puntos  $(Y^+, c)$  en la **región 1** son tales que  $\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+ > 0$ , (por tanto el diagrama de fase del sistema (5.32) es dado por la **figura 5.9**.) Para cada  $Y^+$  existe una velocidad  $c, \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+} < c < \infty$ , de modo que la variedad central del punto de equilibrio  $(\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+, 0)$  interseca a la variedad estable del punto de equilibrio degenerado  $(\theta^+, \rho^+)$ .
- (2) Supongamos que  $\rho^+ < -\theta^+$ . Para  $Y^* < Y^+ < \infty$ , todos los puntos  $(Y^+, c)$  en la **región 1** son tales que  $\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+ > 0$ , (por tanto el diagrama de fase del sistema (5.32) es dado por la **figura 5.9**.) si y solamente si  $\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+} < c < \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}$ , Para cada  $Y^+$  existe la velocidad  $c, \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+} < c < \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}$ , de modo que la variedad central del punto de equilibrio  $(\theta^+ + \frac{c}{c-a}\rho^+, 0)$  interseca a la variedad estable del punto de equilibrio degenerado  $(\theta^+, \rho^+)$ .



**Figura 5.9:** Diagrama de fase asociado a la región 1.



Fuente: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam.  
Chapiro, G. ; Marchesin, D. ; Schecter, S.

### Demostración:

Fijando  $Y^+ > Y^*$ .

Para el caso (1), vamos a estudiar el sistema (5.32) cuando  $c \rightarrow \infty$ , es decir, dividiendo a los dos lados del sistema (5.32) por  $c$ , se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\dot{\theta}}{c} = \frac{(a-c)}{c}(\theta - \theta^+) - (\rho - \rho^+) \\ \frac{\dot{\rho}}{c} = \left(\frac{(\rho - \rho^+)}{c(c-a)} + \frac{Y^+}{c^2}\right)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \quad (5.49)$$

Ahora realizando un cambio de escala para el sistema (5.49), es decir, haciendo  $\tau = \frac{t}{c}$  entonces  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{c}$ , luego se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{1}{c} = \frac{(a-c)}{c}(\theta - \theta^+) - (\rho - \rho^+) \\ \frac{d\rho}{d\tau} \frac{1}{c} = \left(\frac{(\rho - \rho^+)}{c(c-a)} + \frac{Y^+}{c^2}\right)\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Haciendo en el sistema anterior que  $c \rightarrow \infty$ , se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -(\theta - \theta^+) - (\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

Ahora el sistema (5.50) tiene los siguientes puntos de equilibrio:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ y } (\theta, \rho) = (\theta^+ + \rho^+, 0),$$

Note que el sistema (5.50), es el sistema (5.41) dividido por  $a^2(\rho^+)^2$ . Luego, en esa región se tiene que todas las órbitas son líneas rectas atractoras conforme a la figura 5.5, siendo

imposible la existencia de una conexión de la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  y la variedad central del punto de equilibrio  $(\theta^+ + \rho^+, 0)$ . Como el flujo varia continuamente vemos que para un  $c$  muy grande, la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra encima de la variedad central del punto de equilibrio  $(\theta^+ + \rho^+, 0)$ . Por otro lado, vamos a estudiar el sistema (5.32) cuando  $c = \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}$ , es decir, sustituyendo  $c = \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}$  en el sistema (5.32), se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+})(\theta - \theta^+) - \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = (\frac{(\rho - \rho^+)}{\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+} - a} + \frac{Y^+}{\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}})\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Luego factorizando el factor  $(Y^+ - \rho^+)$  en el lado derecho del sistema anterior, se obtiene que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{1}{Y^+ - \rho^+}(-a\rho^+(\theta - \theta^+) - aY^+(\rho - \rho^+)) \\ \dot{\rho} = (Y^+ - \rho^+)(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+})\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Ahora multiplicando el sistema anterior por  $(Y^+ - \rho^+)$ , se obtiene que:

$$\begin{cases} (Y^+ - \rho^+)\dot{\theta} = (-a\rho^+(\theta - \theta^+) - aY^+(\rho - \rho^+)) \\ (Y^+ - \rho^+)\dot{\rho} = (Y^+ - \rho^+)^2(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+})\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Haciendo un cambio de escala, esto es, se hace  $\tau = \frac{t}{(Y^+ - \rho^+)}$  y  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{(Y^+ - \rho^+)}$ , entonces el sistema encima se transforma en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (-a\rho^+(\theta - \theta^+) - aY^+(\rho - \rho^+)) \\ \dot{\rho} = (Y^+ - \rho^+)^2(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+})\rho\Phi(\theta). \end{cases} \quad (5.51)$$

Luego los puntos de equilibrio del sistema (5.51) son:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ y } (\theta, \rho) = (\theta^+ + Y^+).$$

Realizando la linealización del sistema (5.51) en el punto  $(\theta, \rho)$ , se obtiene la siguiente matriz de linealización:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & -aY^+ \\ (Y^+ - \rho^+)^2(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+})\rho\dot{\Phi}(\theta) & (Y^+ - \rho^+)^2(\frac{2\rho - \rho^+}{a\rho^+} + \frac{Y^+}{aY^+})\Phi(\theta). \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Ahora evaluando el punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  en la matriz de linealización anterior, se obtiene:

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & -aY^+ \\ 0 & 0. \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Y los valores propios asociado a la matriz de linealización anterior son:

$$\lambda = -a\rho^+ < 0 \text{ y } \lambda = 0.$$

Luego el vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  está asociado al valor propio  $\lambda = -a\rho^+ < 0$  y el vector propio  $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$  está asociado al valor propio  $\lambda = 0$ . En forma similar evaluando el punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, 0)$  en la matriz de linealización, se obtiene que:

$$DF(\theta^+ + Y^+, 0) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & -aY^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Los valores propios asociados a la matriz de linealización son:

$$\lambda = -a\rho^+ < 0 \text{ y } \lambda = 0.$$

Luego el vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  está asociado al valor propio  $\lambda = -a\rho^+ < 0$  y el vector propio  $\vec{v} = (1, -\frac{\rho^+}{Y^+})$  está asociado al valor propio  $\lambda = 0$ .

Como para  $c = \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}$ , se tiene que existe un único  $Y^*$  tal que la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$ ,  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se intersecta con la variedad central del punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, 0)$ ,  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ . Como el flujo varía continuamente, se tiene que para  $c > \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}$ , la variedad estable  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra abajo de la variedad central  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ .

Por tanto, para un valor de  $c$ , con  $\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+} < c < \infty$ , se tiene que la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  intersecta la variedad central del punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, 0)$ .

En el caso (2) vamos a estudiar el sistema (5.32) cuando  $c = \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}$ , esto es, vamos a sustituir el valor de  $c = \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}$  en el sistema (5.32), se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (a - \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+})(\theta - \theta^+) - \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = (\frac{(\rho - \rho^+)}{\frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+} - a} + \frac{Y^+}{\theta^+ + \rho^+})\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Luego factorizando el término  $(\theta^+ + \rho^+)$  en el lado derecho del sistema anterior, se obtiene que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{1}{(\theta^+ + \rho^+)}(a\rho^+(\theta - \theta^+) - a\theta^+(\rho - \rho^+)) \\ \dot{\rho} = (\theta^+ + \rho^+)(\frac{(\rho - \rho^+)}{-a\rho^+} + \frac{Y^+}{a\theta^+})\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Ahora multiplicando al sistema anterior por  $-(\theta^+ + \rho^+) > 0$ , se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -(\theta^+ + \rho^+)\dot{\theta} = (-a\rho^+(\theta - \theta^+) + a\theta^+(\rho - \rho^+)) \\ -(\theta^+ + \rho^+)\dot{\rho} = (\theta^+ + \rho^+)^2(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+})\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Haciendo un cambio de escala  $\tau = -(\theta^+ + \rho^+)t$ , luego  $\frac{d\tau}{dt} = -(\theta^+ + \rho^+)$ , en el sistema anterior:

$$\begin{cases} -\frac{d\theta}{d\tau}(\theta^+ + \rho^+) = -a\rho^+(\theta - \theta^+) + a\theta^+(\rho - \rho^+) \\ -\frac{d\rho}{d\tau}(\theta^+ + \rho^+) = (\theta^+ + \rho^+)^2(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+})\rho\Phi(\theta) \end{cases}$$

luego, se obtiene que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -a\rho^+(\theta - \theta^+) + a\theta^+(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = (\theta^+ + \rho^+)^2(\frac{(\rho - \rho^+)}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+})\rho\Phi(\theta). \end{cases} \quad (5.52)$$

El sistema (5.52) tiene los siguientes puntos de equilibrio:

$$(\theta, \rho) = (\theta^+, \rho^+) \text{ y } (\theta, \rho) = (0, 0).$$

Luego linealizando el sistema (5.52) en el punto  $(\theta, \rho)$ , se obtiene:

$$DF(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & aY^+ \\ (\theta^+ + \rho^+)^2 \left( \frac{\rho - \rho^+}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+} \right) \rho \dot{\Phi}(\theta) & (\theta^+ + \rho^+)^2 \left( \frac{2\rho - \rho^+}{a\rho^+} - \frac{Y^+}{a\theta^+} \right) \Phi(\theta) \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Ahora evaluando el punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  en el sistema linealizado anterior, se obtiene que:

$$DF(\theta^+, \rho^+) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & aY^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Luego los valores propios asociados al sistema linealizado son:

$$\lambda = -a\rho^+ < 0 \text{ y } \lambda = 0.$$

Entonces el vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  está asociado al valor propio  $\lambda = -a\rho^+ < 0$  y el vector propio  $\vec{v} = (1, \frac{Y^+}{\rho^+})$  está asociado al valor propio  $\lambda = 0$ .

en forma análoga evaluando el punto de equilibrio  $(0, 0)$  en el sistema linealizado, se obtiene que:

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -a\rho^+ & aY^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Luego los valores propios asociados al sistema linealizado son:

$$\lambda = -a\rho^+ < 0 \text{ y } \lambda = 0.$$

Luego el vector propio  $\vec{u} = (1, 0)$  está asociado al valor propio  $\lambda = -a\rho^+ < 0$  y el vector propio  $\vec{v} = (1, \frac{Y^+}{\rho^+})$  está asociado al valor propio  $\lambda = 0$ .

Como  $\theta^+ \leq 0$ , entonces en esa región las órbitas son líneas rectas atractoras, en particular en esa región, se tiene que la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  es la línea recta  $\rho = \rho^+$  y la variedad central del punto de equilibrio  $(0, 0)$  está contenida en la línea recta  $H$  definida por  $H : -a\rho^+(\theta - \theta^+) + a\theta^+(\rho - \rho^+) = 0$ , con  $\theta < 0$ . Luego como el flujo varía continuamente se tiene que la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra encima de la variedad central del punto de equilibrio  $(0, 0)$ .

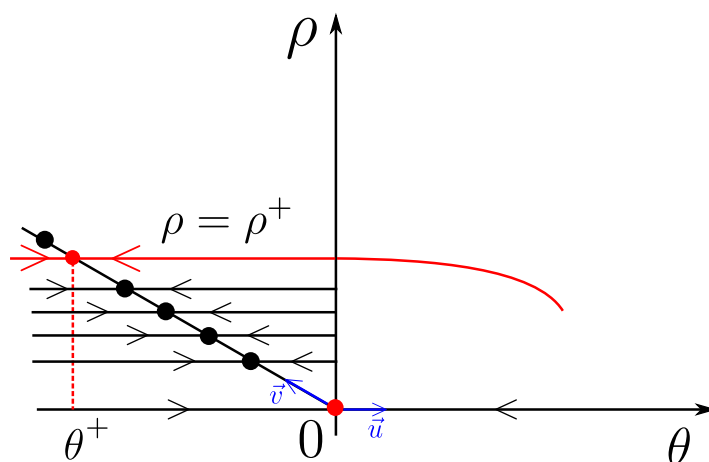
El diagrama de fase se muestra en la **figura 5.10**.

Por otro lado, se tiene que: para el valor de  $c$ , con  $c > \frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+}$  la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra abajo de la variedad central del punto de equilibrio  $(\theta^+ + \rho^+, 0)$ .

Por tanto, para  $Y^+ > Y^*$  existe un valor de  $c$ , con  $\frac{aY^+}{Y^+ - \rho^+} < c < \frac{a\theta^+}{\theta^+ + \rho^+}$  tal que la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  se intersecta con la variedad central del punto de equilibrio  $(0, 0)$ .

En ambos casos, usando la **proposición 2**, se muestra que para  $Y^* < Y^+ < \infty$ , las configuraciones de las variedades invariantes para  $c$  muy grande y en la **región C** son opuestos. Es decir, se muestra la existencia de  $c$ .

**Figura 5.10:** Diagrama de fase asociado al sistema (5.52).



Fuente: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam.

Chapiro, G. ; Marchesin, D. ; Schecter, S.

### Estudio del sistema (5.32) en la región 2.

Para  $(Y^+, c)$  en la región 2, la línea recta  $Y = 0$  se encuentra entre las líneas rectas  $\rho = 0$  y  $\rho = \rho^+$ . Ver la **figura 5.11**. Se tiene que  $(\rho \geq \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+ > 0)$ , es decir, en  $Y \geq 0$ ), suponiendo que  $\theta^+ + Y^+ > 0$ . Una onda viajante con estado derecho en el punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  existe, si la variedad inestable del punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$  se interseca con la variedad estable del punto de equilibrio degenerado  $(\theta^+, \rho^+)$ .

**Proposición 4.** Para  $a > 0$ ,  $\theta^+ \leq 0$ , y  $-\theta^+ < Y^+ < Y^*$ ,  $Y^*$  dado por la **proposición 2**, existe una velocidad  $c > a$  tal que el punto  $(Y^+, c)$  que pertenece a la **región 2** y la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  contiene una rama de la variedad inestable del punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$ .

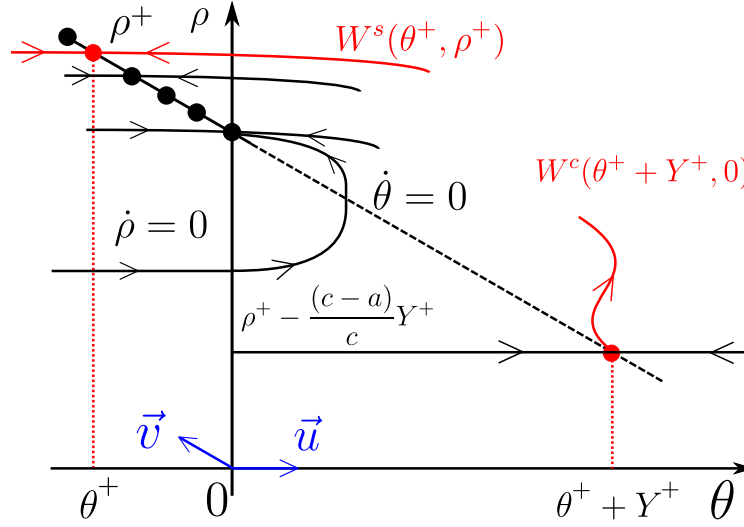
### Demostración:

Se asume que  $\rho^+ > -\theta^+$ . La **proposición 2 (1)** da la posición relativa de la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  y de la variedad central del punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, 0)$ , esto es, la  $W^s(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra encima de la  $W^c(\theta^+ + Y^+, 0)$ .

para  $(Y^+, c)$  en la **región C**.

Para  $-\theta^+ < Y^+ < \rho^+$ , cuando  $c \rightarrow \infty$ , el punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$  se aproxima del punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - Y^+)$ . Usando el argumento análogo en la demostración de la **proposición 2 (1)**, se muestra que para un  $c$  muy grande la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  se encuentra encima de la variedad inestable del

**Figura 5.11:** Diagrama de fase del sistema (5.36) en la región 2.



Fuente: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam.  
Chapiro, G. ; Marchesin, D. ; Schecter, S.

punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$ .

Ahora para estudiar el sistema cuando  $c \rightarrow a$  positivamente para un  $Y$  arbitrario, multiplicamos el sistema (5.32) por  $(c - a)$  y se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (c - a)\dot{\theta} = -(a - c)^2(\theta - \theta^+) + (c - a)(\rho - \rho^+) \\ (c - a)\dot{\rho} = [(\rho - \rho^+) + (c - a)\frac{Y^+}{c}]\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

Luego haciendo un cambio de escala en el sistema anterior, es decir, sea  $\tau = \frac{t}{(c-a)}$  de modo que  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{(c-a)}$  de manera que :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -(a - c)^2(\theta - \theta^+) + (c - a)(\rho - \rho^+) \\ \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = [(\rho - \rho^+) + (c - a)\frac{Y^+}{c}]\rho\Phi(\theta). \end{cases}$$

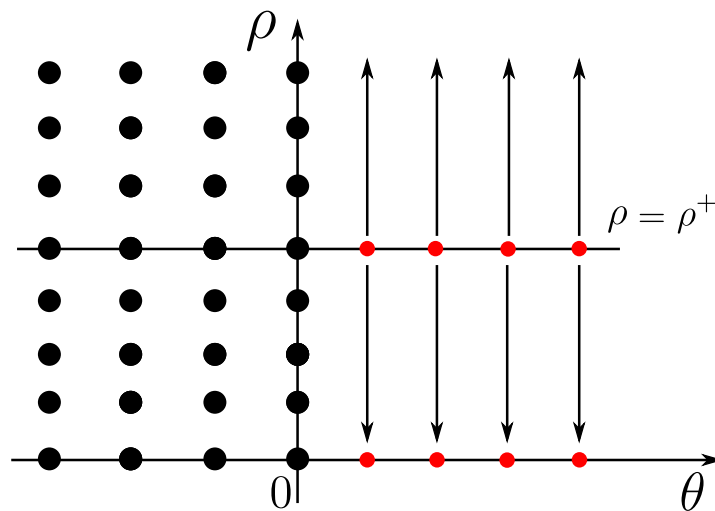
Finalmente haciendo que  $c = a$  en el sistema anterior, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\rho} = (\rho - \rho^+)\rho\Phi(\theta). \end{cases} \quad (5.53)$$

El diagrama de fase del sistema (5.53) es dado por la **figura 5.12**. En particular la línea recta de equilibrios  $\rho = \rho^+$ , con  $\theta > 0$  es una línea recta hiperbólica y la variedad inestable de un punto de equilibrio  $(\rho^+, \theta^\Delta)$  sobre el semi eje  $\rho = \rho^+$  es la línea recta  $\theta = \theta^\Delta$ , con  $\rho > 0$ . Sin embargo cuando  $\theta \leq 0$  no existen equilibrios. Se sigue que, para un  $c > a$ , pero muy cerca de  $a$ , la variedad inestable de  $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$  se encuentra cerca de la línea recta vertical, y por tanto la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  se

encuentra abajo de la variedad inestable del punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$ . Luego como el flujo varia continuamente, se tiene que existe un  $c > a$  de modo que la variedad estable del punto de equilibrio  $(\theta^+, \rho^+)$  contiene una rama de la variedad inestable del punto de equilibrio  $(\theta^+ + Y^+, \rho^+ - \frac{c-a}{c}Y^+)$ .  $\square$

**Figura 5.12:** Diagrama de fase asociado al sistema (5.53).



Fuente: Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam.

Chapiro, G. ; Marchesin, D. ; Schecter, S.

# Capítulo 6

## Conclusiones y recomendaciones.

### 6.1. Conclusiones.

- a) En el presente trabajo, se realizó el estudio sobre la Integral de Melnikov para un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Hamiltoniano, siendo necesario la utilización de importantes resultados tales como los **teoremas:** de la **aplicación implícita**, de **Hartman-Grobman**, de la **variedad estable e inestable para un punto de equilibrio hiperbólico** y el **lema de Gronwall generalizado**. Resultados que permitieron que la Función de Melnikov  $M(t_0)$  asociada a un sistema de EDO's Hamiltoniano que tiene un punto de equilibrio hiperbólico de tipo silla se exprese mediante la siguiente igualdad

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt,$$

donde,  $q^0(t)$  es la órbita homoclínica del sistema no perturbado  $\dot{x} = f(x)$  y cuando este sistema estudiado ya no es Hamiltoniano, se obtiene que la Función de Melnikov se exprese mediante la siguiente igualdad

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\int_{t_0}^t \text{div} f(q^0(r-t_0)) dr} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt.$$

- b) Así mismo permitió mostrar como parte principal del trabajo, que si la función de Melnikov  $M(t_0)$  tiene un cero simple y es independiente del parámetro  $\epsilon$ ; entonces para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño la variedad estable  $W^s(p_\epsilon)$  y la variedad inestable  $W^u(p_\epsilon)$ , se intersectan transversalmente. Resultado que se utiliza para determinar la existencia o no existencia de puntos homoclínicos transversales cerca de la separatriz del sistema de EDO's no perturbado.
- c) Así también se mostró que la función de Melnikov es una herramienta fundamental para probar la unicidad de una solución de tipo onda viajante en el estudio de la aplicación en combustión en un medio poroso.



## **6.2. Recomendaciones.**

Ahora a través del presente trabajo, se hace la recomendación de aplicar la Integral de Melnikov al estudio de los sistemas de EDO's Hamiltonianos, así mismo se recomienda a los Centros de Investigación del país realizar las gestiones necesarias con el objetivo de desarrollar cursos, conferencias y talleres para la divulgación de los alcances del presente trabajo en el estudio de sistemas de EDO's Hamiltonianos y su aplicación en la combustión en un medio poroso.

# Bibliografía

- [1] CHAPIRO, G. ; MARCHESIN, D. ; SCHECTER, S. *Combustion Waves and Riemann Solutions in Light Porous Foam*, USA: Journal of Hiperbolic Differential Equations vol 11 N 2, pp. 295-328, 2014.
- [2] CHOW, S. N; HALE, J. K. *Methods of Bifurcation Theory* New York: Springer-Verlag, 1982.
- [3] CODDINGTON, E. A; LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York: McGraw-Hill, pp. 37, 1955.
- [4] GUCKENHEIMER, JOHN; HOLMES, PHILIP. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, Texts in Applied Mathematics 42, 1985.
- [5] HUSSEIN, ALBOUDWAREJ et al. *Highlighting Heavy Oil*, Canadá: Oilfield Review vol 18 N 2, pp. 34-53, 2006.
- [6] LIMA, E. L. *Curso de Análise II*, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1981.
- [7] LIMA, E. L. *Análise Real I*, Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 2014.
- [8] LIMA, E. L. *Variiedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, pp. 123-155, 1973.
- [9] MUNKRES R., JAMES. *Topología* , España Prentice Hall, pp. 85-88, 2000.
- [10] OLIVA, W. M. *Equações Diferenciais Ordinárias*, São Paulo, pp 1-70, 1971.
- [11] PERKO, LAWRENCE. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York, Texts in Applied Mathematics 7, pp. 1-490, 2001.
- [12] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, 1979.
- [13] VOLPERT, A. I; VOLPERT, V. A; VOLPERT V. A *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, Translations of mathematical Monographs, vol 140 USA: AMS, 2000.