



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

**Estabilidad lineal del sistema de Timoshenko**

**TESIS**

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

**AUTOR**

Félix Gregorio PARIONA VILCA

**ASESOR**

Dra. María Natividad ZEGARRA GARAY

Lima, Perú

2015



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Pariona, F. (2015). *Estabilidad lineal del sistema de Timoshenko*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE  
MAGÍSTER**

7(e)  
77

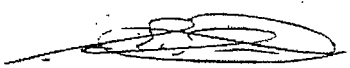
Siendo las, ~~16:20~~ horas del día viernes 10 de abril de 2015, en la Sala de Profesores de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra e integrado por los siguientes miembros, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa (Jurado Evaluador), Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini (Jurado Evaluador), Dra. Nancy Rosa Moya Lázaro (Jurado Informante) y la Dra. María Natividad Zegarra Garay como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: "ESTABILIDAD LINEAL DEL SISTEMA DE TIMOSHENKO" presentada por el Bachiller Félix Gregorio Pariona Vilca, para optar el Grado Académico de Magíster en ~~Matemática Pura~~.

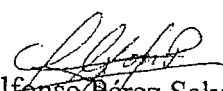
Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Félix Gregorio Pariona Vilca respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.


A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Félix Gregorio Pariona Vilca aprobado con el calificativo de ...18.....  
(dieciocho) muy bueno....

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del grado académico de **Magíster en Matemática Pura** al Bachiller Félix Gregorio Pariona Vilca.


Siendo las 17:20 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

  
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa  
Miembro

  
Dr. Alfonso Pérez Salvatierra  
Presidente

  
Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini  
Miembro

  
Dra. Nancy Rosa Moya Lázaro  
Miembro

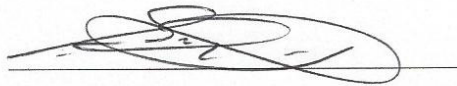
  
Dra. María Natividad Zegarra Garay  
Miembro Asesor

# ESTABILIDAD LINEAL DE SISTEMAS DE TIMOSHENKO

**Autor:** FÉLIX GREGORIO PARIONA VILCA

Tesis presentada a consideración del jurado examinador nombrado por la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos como parte de los requisitos para obtener el grado académico de **Magister en Matemática Pura**.

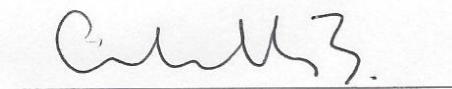
Aprobada por :



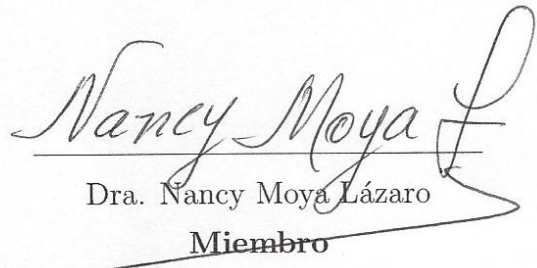
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa  
**Miembro**



Dr. Alfonso Pérez Salvatierra  
**Presidente**



Dr. Víctor Cabanillas Zanini  
**Miembro**



Dra. Nancy Moya Lázaro  
**Miembro**



Dra. María N. Zegarra Garay  
**Miembro Asesor**

# DEDICATORIA

- A mi esposa Luz, por su apoyo incondicional, su comprensión y aliento para culminar esta tesis.
- A mis hijos Alejandro y Araceli, quienes son el motor de mi vida.
- A mi querida mamá Tomasa, a mis hermanas Rosario y Mariangélica, a Godo, Carlos y Joel.
- A la Memoria de mi Papá Gregorio por ser mi ejemplo a seguir y a quien debo esta abnegada profesión.

# AGRADECIMIENTOS

- Agradezco a Dios, por haberme dado la vida y permitirme el haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación profesional.
- Agradezco a mi amiga y profesora, Dra. María Zegarra Garay, por su constante interés y paciencia en el desarrollo de la tesis y sobre todo que sin su ayuda no hubiera podido terminar este trabajo.

# RESUMEN

## Estabilidad Lineal del Sistema de Timoshenko

Félix Gregorio Pariona Vilca

Abril, 2015

**Asesor** : Dra. María N. Zegarra Garay.

**Título Obtenido** : Magister en Matemáticas.

---

En el presente trabajo, se estudia el problema de la estabilidad lineal para un sistema de Timoshenko. Este problema consiste en mostrar que el tipo de un semigrupo es igual a la cota superior del espectro asociado. Esta propiedad no se verifica en general para todo semigrupo, como es de conocimiento en las bibliografías especializadas. Esta es una propiedad que siempre es válida en espacios de dimensión finita. En dimensión infinita, el problema en general es un problema abierto. Esto es, se desconocen las propiedades que debe satisfacer un semigrupo para que la estabilidad lineal se verifique. En este trabajo se demuestra que esta propiedad es válida para el sistema de Timoshenko con disipación friccional, independientemente de las condiciones de frontera en las que el sistema esté subordinado. Este resultado, generaliza el resultado de Racke y Rivera.

### **Palabras Clave:**

Semigrupos.

Espacios de Sobolev.

Problema de Cauchy.

Estabilidad Polinomial.

Estabilidad Lineal.



# ABSTRACT

## Linear stability to Timoshenko system

Pariona, Felix  
December, 2014

**Adviser** : Dra. María Zegarra Garay.  
**Obtained Title** : Master in Mathematics.

---

In this thesis we study the linear stability of the Timoshenko system. This problem consists in to show that the type of the semigroup is equal to the upper bound of the spectrum of the infinitesimal generator. This property is not true in general as was showed by Pazy and in different international papers. This property is always valid in finite dimensional spaces. In infinite dimensional spaces this problem is open. That is to say it is not known the necessary and sufficient condition that a semigroup must verify in order to get the linear stability. In this thesis we will show that the linear stability holds to Timoshenko system with frictional dissipation, no matter the boundary condition the system verifies. This result improves the result obtained by Racke and Rivera.

### Keywords:

Semigroups.

Sobolev Spaces.

Cauchy Problem.

Polynomial Stability.

Linear Stability.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Modelo de Timoshenko . . . . .	2
1.2	La Energía del Sistema . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>11</b>
2.1	Semigrupos . . . . .	11
2.2	Teorema de Lummer Phillips . . . . .	13
2.3	Autovalores de $A$ y $T(t)$ . . . . .	21
2.4	Espectro y Resolvente . . . . .	23
2.5	Estabilidad Exponencial . . . . .	29
2.6	Estabilidad Polinomial . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Existencia y Unicidad</b>	<b>31</b>
3.1	Existencia del Semigrupo . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Decaimiento Exponencial: Método de la Energía</b>	<b>39</b>
4.1	Disipación Total . . . . .	39
4.2	Disipación Parcial . . . . .	43
4.3	Condición Suficiente: Método de Semigrupo . . . . .	45
4.4	Falta de Estabilidad Exponencial . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Decaimiento Polinomial</b>	<b>53</b>
5.1	Decaimiento Uniforme . . . . .	53
5.2	Decaimiento de la Energía . . . . .	55

<b>6</b>	<b>Estabilidad Lineal de Semigrupos <math>C_0</math></b>	<b>61</b>
6.1	Estabilidad Lineal del Sistema de Timoshenko . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>73</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En el presente trabajo se estudia las propiedades estabilizadoras del modelo de Vigas de Timoshenko. Este modelo es muy importante porque sustituye al modelo de Vigas de Euler Bernoulli, el cual es un modelo de vigas de cuarto orden. Además de la clara dificultad de ser de cuarto orden, la velocidad de propagación de las ondas dispersivas son infinitas, constituyendo esto, una deficiencia en el modelo.

Esto es claro, pues en la ecuación lineal de Schrödinger

$$u_{tt} - \alpha u_{xxxx} = 0$$

la parte real o la parte imaginaria verifica la ecuación de placas de Euler-Bernoulli, por lo tanto la ecuación de Euler-Bernoulli tiene velocidad de dispersión infinita.

Si bien es cierto este resultado posteriormente encontró asidero válido en la mecánica cuántica. Esta ecuación de placas de Euler-Bernoulli también no se encuadraba en la clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales, esto es, no es parabólica, hiperbólica ni elíptica, por estas características del modelo, el ingeniero ucraniano Stephen Timoshenko (1878) buscando encontrar un modelo coherente con la física de cuerpos elásticos presentó una opción para el modelo de Euler-Bernoulli consistente en un sistema de segundo orden en el cual, ya las oscilaciones se caracterizan por no ser tan rápidas, esto es, la velocidad de propagación de ondas no es infinita. También con este resultado se hizo viable un tratamiento numérico pues disminuyéndose a un sistema de segundo orden ya se permitía realizar aproximaciones adecuadas. En resumen, el modelo de Timoshenko es un modelo hiperbólico cuyas propiedades describen de mejor forma las oscilaciones de una viga.

El modelo de Timoshenko a ser estudiado es el siguiente:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + d\psi_t = 0. \quad (1.2)$$

El sistema de Timoshenko como estudiado en las referencias [2] y [29]. Las condiciones de frontera para  $t \geq 0$  son dadas por

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0. \quad (1.3)$$

Adicionalmente se tiene las condiciones iniciales,

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \text{ en } (0, L). \quad (1.4)$$

Se considera  $\rho_1, \rho_2, k, d$  y  $b$  constantes positivas.

## 1.1 Modelo de Timoshenko

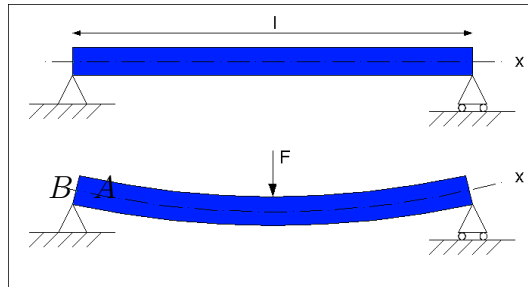
El sistema de Timoshenko está formado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que modelan el movimiento de la viga:

$$\begin{aligned} \rho A \varphi_{tt} &= S_x + F_1 \\ \rho I \psi_{tt} &= M_x - S + F_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

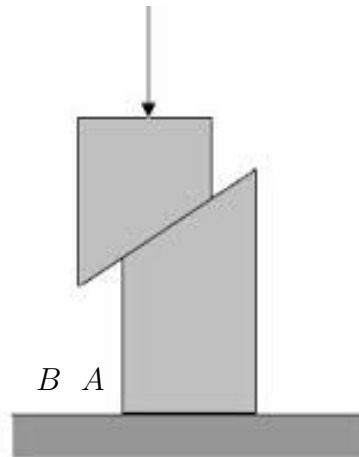
donde  $S$  y  $M$  representan la tensión de corte y el momento flector, los cuales son descritos por las siguientes relaciones de tensión-estiramiento para el comportamiento elástico de la viga

$$\begin{aligned} M &= EI\psi_x \\ S &= \kappa AG(\varphi_x - \psi) \end{aligned} \quad (1.6)$$

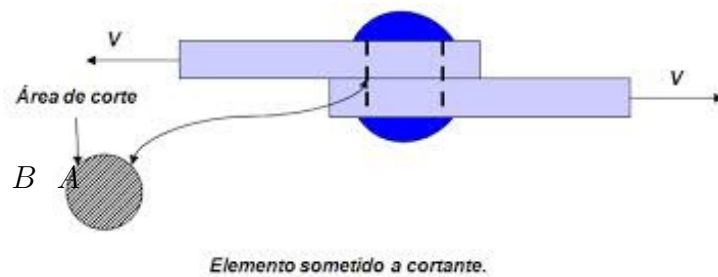
### Flexión de una viga simplemente apoyada



### Tensión de corte en una viga vertical



### Tensión de corte en una viga horizontal



Las variables  $\varphi$  y  $\psi$  representan los desplazamientos transversales y desviación angular respectivamente. Además,  $\rho$  denota la densidad de masa del material que compone la viga,  $E$  el módulo de elasticidad,  $G$  el módulo de corte,  $A$  es el área de la sección transversal e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal de la viga. Se asume una viga uniforme y todas las constantes anteriores positivas.

Acoplando las ecuaciones (1.5)–(1.6) para una viga de longitud  $L$ , el modelo de Timoshenko para  $(x, t) \in ]0, L[ \times ]0, \infty[$  puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= F_1 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= F_2\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde  $\rho_1 = \rho A$ ,  $\rho_2 = \rho I$ ,  $\kappa = k'GA$ ,  $b = EI$  y  $k'$  es el factor de corrección de corte.

Diversos trabajos han estudiado la estabilidad del sistema de Timoshenko. Tal es el caso de Raposo et al., [23] quienes usaron condiciones de frontera de tipo Dirichlet para demostrar que existe decaimiento de tipo exponencial para la solución del sistema (1.7) con dos amortiguamientos débiles o disipaciones friccionales en dos de las componentes del movimiento de la viga:

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \varphi_t &= 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \psi_t &= 0\end{aligned}$$

Soufyane y Wehbe [28] mostraron la estabilidad uniforme del sistema (1.7), usando condiciones de frontera de tipo Dirichlet y una única retroalimentación localmente distribuída, específicamente, ellos consideraron el modelo

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + h\psi_t &= 0\end{aligned}$$

donde  $h$  es una función continua y positiva que satisface

$$0 < h_0 \leq h(x), \quad \forall x \in [a_0, a_1] \subset [0, L]$$

De manera similar, Alabau [1] consideró el sistema

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \alpha(\psi_t) &= 0\end{aligned}\tag{1.8}$$

donde  $\alpha(\psi_t)$  es el término de amortiguamiento y  $\alpha$  es una función real no lineal y monótona creciente. Se usó condiciones de frontera de tipo Neumann para demostrar que el sistema (1.8) es exponencialmente estable sólo si, las velocidades de propagación de las ondas del modelo son las mismas. Además, se usó condiciones de frontera de tipo Dirichlet para establecer que el sistema es polinomialmente estable cuando las velocidades de propagación son diferentes.

Trabajos similares fueron realizados por Messaoudi y Mustafa [19]. Kim y Renardy [8] estabilizaron el sistema (1.7) ejerciendo control sobre la frontera, al igual que Bassam et al., [3] lo logró de manera indirecta.

Ammar-Khodja et al. [2], estudiaron el modelo de Timoshenko con memoria descrito por el sistema

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + g * \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0\end{aligned}\tag{1.9}$$

donde la convolución usual de funciones

$$g * \psi_{xx}(x, t) = \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x, s) ds$$

representa el efecto memoria de la función real  $g$  de clase  $C^2$ . Ellos usaron técnicas multiplicativas para demostrar que el sistema es uniformemente estable si y sólo si las velocidades de propagación son las mismas.

Fernández Sare y Muñoz Rivera [16] consideraron el modelo con memoria dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x, t-s) ds + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0\end{aligned}\tag{1.10}$$



y las siguientes hipótesis para el núcleo de  $g$

$$g(t) > 0; \exists k_0, k_1, k_2 > 0 : -k_0 g(t) \leq g'(t) \leq -k_1 g(t); |g''(t)| \leq k_2 g(t), \forall t \geq 0$$

Ellos demostraron que la disipación producida por el término que genera el efecto memoria es muy fuerte, y que por ende la solución de (1.10) va exponencialmente hacia cero si y sólo si las velocidades de propagación de las ondas son iguales. Mostraron además que el sistema es polinomialmente estable si estas velocidades difieren. Por su parte, Messaoudi y Said-Houari [11] estudiaron el sistema (1.10) con las condiciones de frontera

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

y para una constante positiva  $k_0$  y  $1 \leq p < \frac{3}{2}$ , consideraron las siguientes hipótesis para  $g$ ,

$$g(t) > 0 \quad \text{y} \quad g'(t) \leq -k_0 g^p(t)$$

De esta forma, Messaoudi y Said-Houari mostraron que si

$$\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$$

entonces la energía asociada al sistema (1.10) decae exponencialmente si  $p = 1$  y polinomialmente si  $p > 1$ .

Por otra parte, la temperatura también ha jugado un papel importante en la estabilización de modelos evolutivos. Muñoz Rivera y Racke [17] consideraron el siguiente sistema de Timoshenko no lineal

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x &= 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x &= 0 \\ \rho_3 \theta_t - k\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} &= 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

donde  $\theta$  es un mecanismo disipativo cuyo efecto amortiguador se debe a la conducción del calor presente en la ecuación del ángulo de rotación. Ellos probaron que bajo la igualdad de las velocidades de propagación, el sistema (1.11) es exponencialmente estable. A su

vez, Messaoudi, Said-Houari y Mustafa [18, 12], complementaron el trabajo realizado en [15] y establecieron diferentes tipos de decaimiento para el sistema de Timoshenko con termoelasticidad del III tipo, a saber:

$$\begin{aligned}
\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x &= 0 \\
\rho_3 \theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \gamma\psi_{ttx} - k\theta_{txx} &= 0
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Grobbelaar [7] estudió un modelo híbrido elástico consistente en una viga de Timoshenko y una carga ubicada en el extremo libre de la viga. Dicha carga se conoce comúnmente como *Tip Body* la que consiste en un cuerpo rígido relleno parcialmente con algún material granular que genera una disipación mecánica de la energía. De este modo, el sistema estudiado por Grobbelaar es el siguiente

$$\begin{aligned}
\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

con las condiciones de Dirichlet en el extremo izquierdo de la viga ( $x = 0$ ) y con las siguientes condiciones de contorno en el extremo derecho

$$\begin{aligned}
m\varphi_{tt}(L, t) + \kappa_0\varphi_t(L, t) + \kappa(\varphi_x(L, t) + \psi(L, t)) &= 0 \\
I_m\psi_{tt}(L, t) + \kappa_1\psi(L, t) + b\psi_x(L, t) &= 0
\end{aligned} \tag{1.14}$$

donde (1.14) representa las ecuaciones del movimiento del tip gobernadas por las Leyes de Newton. Además,  $m$  e  $I_m$  representan la masa y el momento de inercia del *Tip*, respectivamente,  $\kappa_0$  y  $\kappa_1$  denotan los coeficientes de amortiguamiento en cada una de las componentes del movimiento de la viga.

De este modo, Grobbelaar prueba que el sistema (1.13)–(1.14) es uniformemente estable cuando la fuerza de control que actúa sobre el sistema es aplicada en el punto de contacto entre el *Tip* y la viga. Sin embargo, en dicho trabajo se obtiene que la estabilización alcanzada es débil y está sujeta a los datos de frontera iniciales en el extremo libre de la viga.

De manera similar, Zietsman [30] consideró un sistema híbrido con tip y utilizó el método de elementos finitos para mostrar que el amortiguamiento ubicado en la frontera no es suficiente para lograr la estabilización exponencial.

## 1.2 La Energía del Sistema

La energía asociada al sistema (1.1) y (1.2) es dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 + b |\psi_x|^2 dx \quad (1.15)$$

A seguir verifiquemos esto.

Considerando el multiplicador de primer orden,  $\varphi_t$ ,  $\psi_t$  en (1.1) y (1.2) respectivamente e integrando sobre  $[0, L]$ , esto es,

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx - \int_0^L k (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx &= 0 \\ \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx - \int_0^L b \psi_{xx} \psi_t dx + \int_0^L k (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \int_0^L d \psi_t \psi_t dx &= 0 \end{aligned}$$

luego integrando por partes adecuadamente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 dx - [k (\varphi_x + \psi) \varphi_t]_0^L + \int_0^L k (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 dx - [b \psi_x \psi_t]_0^L + \int_0^L b \psi_x \psi_{xt} dx + \int_0^L k (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \int_0^L d |\psi_t|^2 dx &= 0 \end{aligned}$$

sumando estas dos expresiones y de las condiciones de frontera se tiene

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + k (\varphi_x + \psi)^2 + b |\psi_x|^2] dx}_{:=E(t)} = - \int_0^L d |\psi_t|^2 dx$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -d \int_0^L |\psi_t|^2 dx$$

Si  $d = 0$  entonces (1.1) y (1.2) es un sistema hiperbólico para el cual la energía se conserva y por lo tanto permanece constante, esto es debido a la ausencia de un mecanismo disipativo. En efecto,

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(t) = E(0).$$

Por otra parte, Soufyane [29] demostró para las condiciones de frontera:  $\phi = \psi = 0$  y cuando  $d = d(x) > 0$ , que el sistema es exponencialmente estable si y solamente si, es válida la siguiente identidad,

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b} \tag{1.16}$$

Esto es, las velocidades de propagación asociadas a las ecuaciones (1.1) y (1.2), respectivamente, son iguales.

Un tipo más débil de disipación es dada cuando la hipótesis de disipación friccional es cambiada por un mecanismo de memoria del material. Matemáticamente esto significa cambiar el término friccional  $d\psi_t$  por la convolución

$$\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s,x)ds.$$

Para núcleos  $g$  del tipo exponencial, la solución del correspondiente modelo de Timoshenko decae exponencialmente si y solo si, las velocidades de propagación son iguales, esto es, si y solo si se verifica (1.16).

Adicionalmente a la caracterización del decaimiento exponencial, se mostrará que cuando no existe decaimiento exponencial, esto es cuando (1.16) no es válido, el correspondiente semigrupo no es exponencialmente estable, se mostrará que la solución decae polinomialmente.

Esto significa que la disipación a pesar de estar actuando en una de las ecuaciones es fuerte lo suficiente para que la solución decaiga polinomialmente para cero como  $1/t$ .

Se usarán métodos espectrales para mostrar la caracterización del decaimiento exponencial, encuanto que para mostrar el decaimiento polinomial, se usará el método de la energía.

En cuanto a la distribución del trabajo, este ha sido dividido en 7 capítulos, los primeros constan de la teoría necesaria que se aplicará en el decorrer del mismo, en el

capítulo 3 se estudia la existencia y unicidad del modelo, usando la teoría de semigrupos (teorema 3.1.2) en el contexto de los espacios de Sobolev.

En el capítulo 4 se hace un estudio de la disipación total usando el método de la energía y un estudio de la disipación parcial por el método de semigrupos y se concluye que el sistema de Timoshenko estudiado es exponencialmente estable si y solamente si las velocidades de propagación son iguales.

En el capítulo 5, se hace un estudio del decaimiento de la energía llegando a mostrar estabilidad de tipo polinomial.

En el capítulo 6, se estudia la estabilidad lineal del sistema de Timoshenko usando el Teorema de Renardy 6.0.2 llegando a mostrar que el tipo del semigrupo es igual a la cota superior del espectro (Principio de Estabilidad Lineal). Finalmente en el capítulo 7 se mencionan las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se presentarán resultados que serán de utilidad para demostrar la existencia y unicidad del problema de estabilidad de materiales parcialmente viscosos en estudio, por el método de la teoría de semigrupos asociado al sistema planteado. En este capítulo  $E$  denotará un espacio de Banach.

### 2.1 Semigrupos

**Definición 2.1.1.** Sea  $\mathcal{L}(E)$  un álgebra de operadores lineales acotados de  $E$ . Decimos que  $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(E)$  es un semigrupo de operadores lineales acotados de  $E$  si :

(i)  $S(0) = I$ , donde  $I$  es el operador identidad de  $E$

(ii)  $S(s) \circ S(t) = S(s+t) \quad \forall t; s \in \mathbb{R}^+$ .

Se dice que el semigrupo  $S$  es de clase  $C_0$  si además cumple,

(iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x ; \forall x \in E$

Esto es, el semigrupo es continuo en  $t = 0$ . Usando esto se verifica que el semigrupo debe ser continuo en toda la semirrecta  $\mathbb{R}^+$ .

En efecto

Sea  $t_0 \in \mathbb{R}^+; x \in E$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(t_0 + h)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t_0)S(h)x = S(t_0) \lim_{h \rightarrow 0^+} S(h)x = S(t_0)x$$

Es decir,

$$t \mapsto S(t)\omega \in \mathbb{C}([0; +\infty), E)$$

**Definición 2.1.2.**

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} S(t)x|_{t=0}, \quad \forall x \in D(A)$$

$$D(A) = \left\{ x \in E / \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \text{ existe en } E \right\}$$

donde  $A$  define el generador infinitesimal del semigrupo  $S(t)$ . De la definición anterior se puede reescribir el dominio del operador como

$$D(A) = \{x \in E / Ax \in E\}$$

algunas veces se denotará a  $S(t)$  por  $e^{At}$ .

En resumen, dado un semigrupo es simple encontrar su generador, es suficiente evaluar el límite de la definición de generador infinitesimal. El problema inverso es más complicado y se resuelve usando el teorema de Hille-Yosida, que se estudiará más adelante.

**Definición 2.1.3.** *Un semigrupo  $S(t)$  de operadores lineales es acotado, si (i)  $\|S(t)\| \leq M, \forall t > 0$  Si  $M = 1$ , decimos que  $S(t)$  es un semigrupo de contracciones.*

**Teorema 2.1.1.** *Un semigrupo  $e^{At}$  es uniformemente continuo si, y sólo si,  $A$  es acotado.*

**Demostración:** Ver [17] en las referencias bibliográficas. ■

**Teorema 2.1.2.** *Sea  $A$  el generador infinitesimal de un semigrupo de operadores entonces  $A$  conmuta con  $S$ , esto es, si  $\omega \in D(A)$  entonces*

$$S(t)\omega \in D(A), \quad S(t)A\omega = A S(t)\omega, \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

**Demostración:** Ver [17] en las referencias bibliográficas. ■

**Definición 2.1.4.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Un operador lineal  $A : H \rightarrow H$  es disipativo si*

$$\operatorname{Re}(A\omega, \omega) \leq 0, \quad \forall \omega \in D(A).$$

**Teorema 2.1.3.** *Si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $A : H \rightarrow H$  operador disipativo; entonces*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in D(A).$$

**Demostración:** Ver [17] en las referencias bibliográficas. ■

## 2.2 Teorema de Lummer Phillips

Antes de enunciar el teorema de Lummer Phillips, se consideran las siguientes definiciones.

**Definición 2.2.1.** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $T : D(T) \subset X \rightarrow X$  un operador lineal; no necesariamente acotado en  $X$ , el conjunto resolvente  $\rho(T)$  de  $T$  se define como

$$\rho(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - T) \text{ es invertible y } (\lambda I - T)^{-1} \text{ es un operador acotado en } X \}$$

El operador lineal acotado  $R(\lambda; T) := (\lambda I - T)^{-1}$  con  $\lambda \in \rho(T)$ , se llama Resolvente de  $T$ .

Se define también

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) \text{ se llama Espectro de } T.$$

**Observación 2.2.1.** Todo operador  $T$  acotado o no, conmuta con su operador resolvente.

**Demostración:**

$$\begin{aligned} T(\lambda I - T)^{-1} &= \lambda(\lambda I - T)^{-1} - (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} \\ &= \lambda(\lambda I - T)^{-1}I - (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} \\ &= \lambda I(\lambda I - T)^{-1} - (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} \\ &= (\lambda I - T)^{-1}\lambda I - (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T) \\ &= (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - (\lambda I - T)) \\ &= (\lambda I - T)^{-1}T \end{aligned}$$

■

**Teorema 2.2.1.** Sea  $X$  un espacio de Banach y  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  un operador lineal,  $D(A)$  un subespacio de  $X$  y  $S(t)$  el semigrupo generado por  $A$ . Entonces:

(a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s) x ds = S(t) x$ ,  $\forall x \in X$

(b)  $\int_0^t S(s) x ds \in D(A)$ ,  $\forall x \in D(A)$

(c)  $\forall x \in D(A)$ , tenemos

$$S(t)x \in D(A) \quad y \quad AS(t)x = S(t)Ax = \frac{d}{dt}S(t)x$$



(d)  $\forall x \in D(A)$ , tenemos

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(h)x dh = \int_s^t S(h)Ax dh$$

(e)  $\forall x \in X$ , tenemos

$$\int_0^t S(h)x dh \in D(A) \quad y \quad S(t)x - x = A \int_0^t S(h)x dh$$

**Demostración:** Ver [24] en las referencias bibliográficas. ■

**Teorema 2.2.2.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $A$  un generador infinitesimal del semigrupo  $S(t) = e^{At}$ . Entonces  $S(t)$  es de contracciones si, y solo si  $A$  es disipativo.

**Demostración:**

( $\Rightarrow$ )

Supongamos que  $S(t)$  es un semigrupo de contracciones, entonces  $\|S(t)\| \leq 1$ .

$$(S(t)w, w) \leq \|(S(t)w, w)\| \leq \|S(t)\| \|w\|^2 \leq \|w\|^2$$

es decir

$$(S(t)w, w) - \|w\|^2 \leq 0$$

Además

$$\begin{aligned} (S(t)w - w, w)_H &= (S(t)w, w)_H - (w, w)_H \\ &= (S(t)w, w)_H - \|w\|_H^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$(S(t)w - w, w)_H \leq 0.$$

Entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{S(t)w - w}{t}, w \right)_H \leq 0$$

$$(Aw, w) \leq 0$$

Por lo tanto  $A$  es disipativo.

( $\Leftarrow$ )

Sea  $U = S(t)w$ ;  $w \in D(A)$

$$U_t = \frac{d}{dt}S(t)w$$

Por el Teorema 2.2.3, tenemos

$$U_t = AS(t)w, \quad U(0) = w$$

entonces

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = w \end{cases}$$

pero  $(U_t, U) = (AU, U)$ .

Además

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U(t), U(t)) &= 2(U_t(t), U(t)) \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U(t)\|^2 &= (U_t, U) = (AU, U) \end{aligned}$$

Como  $A$  es disipativo, entonces  $(AU, U) \leq 0$ .

Luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|U(t)\|^2 &\leq 0 \\ \int_0^t \frac{d}{ds} \|U(s)\|^2 ds &= \|U(t)\|^2 - \|U(0)\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\|U(t)\|^2 \leq \|U(0)\|^2$$

$$\|S(t)w\| \leq \|w\|$$

$$\sup_{\|w\|=1} \|S(t)w\| \leq \sup_{\|w\|=1} \|w\|, \quad \forall w \in D(A)$$

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1.$$

Luego  $S(t)$  es de contracciones. ■

**Teorema 2.2.3.** *Sea  $A$  un generador infinitesimal del semigrupo  $S(t)$  de clase  $C_0$ . Entonces  $A$  es cerrado y  $\overline{D(A)} = X$ .*

**Demostración:** Ver [16] en las referencias bibliográficas. ■

**Observación 2.2.2.** *Un operador  $A$  es generador infinitesimal de solamente un semigrupo.*

**Demostración:**

Supongamos  $A$  es generador infinitesimal de  $S_1(t)$  y  $S_2(t)$  semigrupos ambos de clase  $C_0$ . Definimos para todo  $x \in D(A)$ :

$$\phi(s) = S_1(t-s)S_2(s)x \text{ para } s < t$$

Derivando,

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = -S_1(t-s)AS_2(s)x + S_1(t-s)AS_2(s)x = 0$$

Esto es,  $\phi(s)$  es constante  $\forall s > 0$  luego  $\phi(t) = \phi(0)$ , entonces  $S_2(t)x = S_1(t)x$ , en  $D(A)$ .

Por la densidad  $\overline{D(A)} = X$ , concluimos:

$$S_2 = S_1 \text{ en } X. \quad \blacksquare$$

**Lema 2.2.1.** *En las condiciones del teorema Hille-Yosida se cumple lo siguiente,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A)w = w, \quad \forall w \in X$$

**Demostración:** Sea  $w \in D(A)$  y  $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$

$$(\lambda I - A)R(\lambda; A) = I$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(\lambda; A)Aw &= \lambda R(\lambda; A)w - w \\ \|\lambda R(\lambda; A)w - w\| &= \|R(\lambda; A)Aw\| \\ &\leq \|R(\lambda; A)\| \|Aw\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|Aw\| \end{aligned}$$

Por la cerradura de  $A$ , entonces existe  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|Aw\|$ .

Tomando límite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda; A)w - w\| = 0 \quad \blacksquare$$

**Observación 2.2.3.** Sea  $A_\lambda := \lambda R(\lambda; A) A$ , las llamadas aproximaciones de Yosida;  $(A_\lambda)$  es una sucesión de operadores continuos y además  $A_\lambda \rightarrow A$ .

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda R(\lambda, A) A \\ &= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \end{aligned}$$

como  $R(\lambda, A)$  es continuo, entonces  $A_\lambda$  es continuo.

**Teorema 2.2.4.** (Hille- Yosida) Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $A$  un operador lineal no limitado es generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de contracciones, si y sólo si

(i)  $A$  es denso en  $X$  y  $A$  cerrado.

(ii) El conjunto resolvente  $\rho(A)$  de  $A$  contiene a  $\mathbb{R}^+$  y para todo  $\lambda > 0$ , se cumple

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

**Demostración:** Ver [17] Teorema 2.7.2. ■

Además

$$\|A_\lambda w - Aw\| = \|\lambda RAw - Aw\|$$

Por el lema 2.2.1, tenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda w = Aw, \quad \forall w \in D(A)$$

Por hipótesis,  $\overline{D(A)} = X$ , entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda w = Aw, \quad \forall w \in X$$

luego, existe una sucesión de operadores continuos  $A_\lambda$  que aproximan a  $A$  no continuo.

**Teorema 2.2.5.** (Teorema de Lummer Phillips) Sea  $X$  un espacio de Banach o Hilbert y  $A$  un operador lineal con  $\overline{D(A)} = X$ . Entonces,

(i) Si  $A$  es disipativo y existe un  $\lambda_0 > 0$  tal que  $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ , entonces  $A$  es generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de contracciones.

(ii) Si  $A$  es el generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de contracciones sobre  $X$ , entonces  $\text{Im}(\lambda I - A) = X$  para todo  $\lambda > 0$  y  $A$  disipativo.

**Demostración:** Sea  $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ / \text{Im}(\lambda I - A) = X\}$  probaremos que  $\Lambda$  es abierto y cerrado.

En efecto

- $\Lambda$  es un conjunto abierto

Sea  $\lambda \in \Lambda$ , como  $A$  es disipativo, entonces  $(\lambda I - A)$  es inyectiva pues,

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, A \text{ es disipativo}$$

$x = 0$ , luego  $(\lambda I - A)$  es inyectiva.

Por definición de  $\Lambda$ ,  $(\lambda I - A)$  es sobreyectiva.

Luego

$$(\lambda I - A) \text{ es biyección.}$$

Entonces

$$(\lambda I - A)^{-1} \text{ es lineal y continuo}$$

pues todo operador disipativo es cerrado, entonces  $A$  es cerrado.

Pero

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

Como  $\Lambda \subset \rho(A)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $B_\varepsilon(\lambda) \subset \rho(A)$

entonces  $B_\varepsilon(\lambda) \cap \mathbb{R}^+ \subset \Lambda$ .

Luego  $\Lambda$  es abierto relativo en  $\mathbb{R}^+$ .

- $\Lambda$  es un conjunto cerrado.

Sea  $\lambda$  un punto de acumulación de  $\Lambda$ , entonces  $\exists \lambda_u \in \Lambda / \lambda_u \rightarrow \lambda$ .

Mostraremos que  $\lambda \in \Lambda$ . Sea  $y \in X$ , entonces  $\exists x_u \in D(A)$  tal que

$$\lambda_u x_u - Ax_u = y \tag{*}$$

Como  $A$  es disipativo:

$$\|y\| = \|\lambda_\mu x_\mu - Ax_\mu\| \geq \lambda_\mu \|x_\mu\|$$

entonces

$$\|x_\mu\| \leq \frac{1}{\lambda_\mu} \|y\| \leq C$$

- Veamos que  $(x_\mu)_{\mu \geq 1}$  es de Cauchy.

De (\*)

$$\begin{aligned}\lambda_\mu x_\mu - Ax_\mu &= y, \quad \forall \mu \\ \lambda_\nu x_\nu - Ax_\nu &= y\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\lambda_\mu x_\mu - Ax_\mu &= \lambda_\nu x_\nu - Ax_\nu = y \\ \lambda_\mu x_\mu &= Ax_\mu + \lambda_\nu x_\nu - Ax_\nu\end{aligned}$$

Como  $A$  es disipativo:

$$\begin{aligned}\lambda \|x_\nu - x_\mu\| &\leq \|\lambda_\mu (x_\nu - x_\mu) - A(x_\nu - x_\mu)\| \\ &= \|\lambda_\mu x_\nu - \lambda_\mu x_\mu - Ax_\nu + Ax_\mu\| \\ &= \|\lambda_\mu x_\nu - Ax_\mu - \lambda_\nu x_\nu + Ax_\nu - Ax_\nu + Ax_\mu\| \\ &= \|x_\nu\| |\lambda_\mu - \lambda_\nu| \\ &= C |\lambda_\mu - \lambda_\nu|\end{aligned}$$

Como  $\lambda_\mu$  es convergente, entonces  $(\lambda_\mu)$  es de Cauchy y también  $\lambda_\mu$  es limitado.

Entonces

$$\|x_\nu - x_\mu\| \rightarrow 0$$

Por lo tanto,  $(x_\mu)$  es de Cauchy.

- Veamos que  $\lambda x - Ax = y$

Tenemos  $\lambda_\mu \rightarrow \lambda$  cuando  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $x_\nu \rightarrow x$ , para algún  $x$ .

Además

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} Ax_\mu = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\lambda_\mu x_\mu - y) = \lambda x - y$$

entonces

$$\lambda x - y = z, \text{ donde } z = \lim_{\mu \rightarrow \infty} Ax_\mu$$

como  $A$  es cerrado, entonces  $z = Ax$

$$\lambda x - y = Ax$$

esto es

$$(\lambda I - A)x = y$$

Pero  $(\lambda I - A)$  es sobreyectiva, entonces  $\lambda \in \Lambda$ .

Entonces

$$\{\text{todos sus puntos de acumulación}\} \subset \Lambda$$

$\Lambda$  es cerrado relativo a  $\mathbb{R}^+$ , i.e.,  $\Lambda \cap \mathbb{R}^+$  es cerrado.

Luego  $\Lambda = \mathbb{R}^+$

Como  $A$  es disipativo, se cumple:  $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$

pero  $y = (\lambda I - A)x$ , entonces  $x = (\lambda I - A)^{-1}y$ .

entonces

$$\|y\| \geq \lambda \|(\lambda I - A)^{-1}y\|.$$

tomando sup tenemos:  
 $\sup_{\|y\| \leq 1}$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Luego

$$R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$$

En las hipótesis de Hille-Yosida, se tiene que  $A$  es generador infinitesimal de un semigrupo de clase  $C_0$  de contracciones.

■

**Proposição 2.2.1.** *Sea  $S : X \rightarrow X$  un operador lineal y contínuo con inversa contínua. Sea  $B \in L(X)$  tal que  $\|B\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}$ . Entonces  $S + B$  es lineal, contínuo e inversible.*

**Teorema 2.2.6.** *Sea  $X$  un espacio de Banach y  $A$  un operador lineal (no acotado), disipativo y con dominio denso en  $X$ . Si  $0 \in \rho(A)$  entonces  $A$  es el generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de contracciones .*

**Demostración:** Ver [17] Teorema 2.12.3. ■

**Definición 2.2.2.** *Sea  $A$  un operador definido sobre un espacio de Hilbert  $H$ .*

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H$$

*Diremos que  $A^*$  es el operador adjunto de  $A$  si*

$$(Au, v) = (u, A^*v), \quad \forall u \in D(A)$$

*donde*

$$D(A^*) = \{v \in H; \exists w \in H; (Au, v) = (u, w)\}$$

**Definición 2.2.3.** *Diremos que un operador es normal si este operador conmuta con su adjunto.*

**Teorema 2.2.7.** *Todo operador normal es generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones*

## 2.3 Autovalores de $A$ y $T(t)$

En los espacios de dimensión finita es siempre válido

$$e^{\sigma(A)t} = \sigma(T(t)) \tag{2.1}$$

Contrariamente en los espacios de dimensión infinita esto no se verifica y en general sólo tenemos

$$e^{\sigma(A)t} \subset \sigma(T(t)) \tag{2.2}$$

válido para todo espacio de Banach.

**Lema 2.3.1.** *Sea  $A$  el generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  denotado por  $T(t) = e^{At}$ , entonces la desigualdad (2.2) es válida.*



**Demostración:** Denotemos por

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x \, ds.$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x \, ds &= T(t)x + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x \, ds \\ &= T(t)x + \lambda B_\lambda(t)x. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por otro lado, para

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda s}T(t-s)x \, ds$$

derivando en relación a  $t$  para  $x \in D(A)$  y usando las propiedades de semigrupos tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{\lambda s}T(t-s)x \, ds &= e^{\lambda t}x + \int_0^t e^{\lambda s}T(t-s)Ax \, ds \\ &= e^{\lambda t}x + A \int_0^t e^{\lambda s}T(t-s)x \, ds \\ &= e^{\lambda t}x + A \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x \, ds \\ &= e^{\lambda t}x + AB_\lambda(t)x \end{aligned} \tag{2.4}$$

de las identidades (2.3) y (2.4), se tiene

$$T(t)x + \lambda B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x + AB_\lambda(t)x.$$

luego

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x.$$

Finalmente, si  $e^{\lambda t} \in \varrho(T(t))$ , encontramos

$$(e^{\lambda t} - T(t))^{-1}(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = x.$$

Como estos operadores conmutan, se tiene que  $\lambda \in \varrho(A)$ , esto es,

$$e^{\lambda t} \in \varrho(T(t)) \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \varrho(A)$$

o equivalentemente

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda t} \in \sigma(T(t))$$

de donde se sigue el resultado. ■

## 2.4 Espectro y Resolvente

Recordemos algunos conceptos

**Definición 2.4.1.** Sea  $S$  un operador definido sobre un espacio de Banach  $X$ . Denotemos por  $\rho(S)$ , al conjunto resolvente de  $S$  definido como

$$\rho(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - S)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Denotemos por  $\sigma(S)$  el espectro de  $S$ , definido como el complemento de  $\rho(S)$  respecto a  $\mathbb{C}$ , esto es,  $\sigma(S) = \mathbb{C} \setminus \rho(S)$ .

**Lema 2.4.1.** Sea  $S$  un operador de  $X$ , entonces  $\rho(S)$  es un conjunto abierto y por lo tanto el espectro de  $S$ ,  $\sigma(S)$  es un conjunto cerrado en  $\mathbb{C}$ .

**Demostración:** Sea  $\lambda \in \rho(S)$ , mostraremos que existe una vecindad de  $\lambda$  de la forma

$$V_\epsilon(\lambda) = \{z; \|z - \lambda\| < \epsilon\},$$

tal que  $V_\epsilon(\lambda) \subset \rho(S)$ . En efecto, sea  $\epsilon > 0$  tal que

$$\epsilon < \|(\lambda I - S)^{-1}\|$$

tomemos  $z = \lambda + \omega \in \mathbb{C}$ , con  $\|\omega\| < \epsilon$ . De la Proposición 2.2.1, concluimos que  $z \in \rho(S)$ , por lo tanto  $V_\epsilon(\lambda) \subset \rho(S)$  lo que completa la demostración. ■

**Definición 2.4.2.** Un elemento  $\lambda$  pertenece al espectro  $\sigma(S)$  si una de las siguientes propiedades se verifica

- El operador  $\lambda I - S$  no es inyectivo.
- El operador  $\lambda I - S$  es inyectivo mas no es sobre.

Este último caso puede ser descompuesto en dos casos, dependiendo de las propiedades de la imagen del operador. Esto es, cuando la imagen es densa o no. Con estas consideraciones, podemos denotar y definir lo siguiente,

$$\begin{aligned}\sigma_d(S) &= \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - S) \text{ no es inyectivo}\} \\ \sigma_c(S) &= \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - S) \text{ es inyectivo, no es sobre, mas la imagen es densa en } X\} \\ \sigma_r(S) &= \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - S) \text{ es inyectivo mas la imagen no es densa}\}.\end{aligned}$$

El conjunto  $\sigma_d$  es llamado de *Espectro Discreto*, el conjunto  $\sigma_c$  es llamado de *Espectro Continuo* y finalmente  $\sigma_r$  es llamado de *Espectro Residual*. Claramente estos tres subconjuntos del espectro de  $S$  son disjuntos y su unión es igual a  $\sigma(S)$ . Muchos autores acostumbran llamar de *Espectro Continuo* a la unión de  $\sigma_c \cup \sigma_r$ .

**Lema 2.4.2.** *Sea  $S$  un operador continuo, entonces el espectro de  $S$  es un conjunto cerrado y limitado, esto es, un conjunto compacto. Más precisamente*

$$\sigma(S) \subset B_{\|S\|}(0) = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| \leq \|S\|\}.$$

**Demostración:** Tomemos un elemento  $\lambda \in \mathbb{C}$ , supongamos

$$|\lambda| > \|S\|, \quad \Rightarrow \quad \frac{\|S\|}{\lambda} < 1.$$

De esta forma concluimos que  $(\lambda I - S)$  es inversible y con inversa continua. Por lo tanto  $\lambda \in \rho(S)$ , esto es,

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > \|S\|\} \subset \rho(S)$$

lo que implica

$$\sigma(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|S\|\}.$$

■

**Definición 2.4.3.** *Sea  $T$  un operador en un espacio de Banach. Llamaremos de Cota Superior del Espectro de  $T$ , al valor*

$$\omega_\sigma(T) = \sup \{\operatorname{Re} \lambda; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

**Definición 2.4.4.** *Diremos que  $R_\sigma(T)$  es el radio espectral del operador  $T$  si este es el radio del menor círculo complejo, centrado en el origen, que contiene todos los elementos del espectro de  $T$ .*

A seguir mostraremos la fórmula de Gelfand para el radio espectral.

**Lema 2.4.3.** *Sea  $T$  un operador lineal y continuo. Denotemos por  $R_\sigma(T)$  el radio espectral de  $T$  entonces se verifica*

$$R_\sigma(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k}.$$

**Demostración:** Del Lema 2.4.2 sabemos

$$R_\sigma(T) \leq \|T\|.$$

Por otro lado, si  $\lambda \in \sigma(T)$ , entonces  $\lambda^l \in \sigma(T^l)$ , pues

$$\lambda^l I - T^l = (\lambda I - T)(I + T + T^2 + \dots + T^{l-1})$$

de donde concluimos que si  $\lambda^l I - T^l$  tuviese inversa entonces

$$(I + T + T^2 + \dots + T^{l-1})(\lambda^l I - T^l)^{-1}$$

sería la inversa de  $(\lambda I - T)$ , note que estos operadores conmutan entre sí. Lo que contradice el hecho de  $\lambda \in \sigma(T)$ .

Aplicando el Lema 2.4.2 al operador  $T^l$ , encontramos

$$R_\sigma(T)^l \leq \|T^l\| \quad \Rightarrow \quad R_\sigma(T) \leq \|T^l\|^{1/l}$$

tomando límite ínfimo, encontramos

$$R_\sigma(T) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \|T^l\|^{1/l}. \tag{2.5}$$

Por otro lado, sea  $\epsilon > 0$  es simple verificar que  $\|T\| + \epsilon \in \rho(T)$ . Por lo tanto, podemos escribir

$$(I - \mu T)^{-1} = I + \mu T + \mu^2 T^2 \dots + \mu^m T^m + \dots,$$

para todo  $\mu < 1/\|T\|$ .

Recordemos también que el resolvente es una función holomorfa sobre el conjunto  $\{z \in \mathbb{C}; \|z\| < 1/R_\sigma(T)\}$ . Por lo tanto, su serie de Taylor es convergente en este conjunto. Como esta serie es uniformemente convergente tenemos

$$\|T^m \mu^m\| \rightarrow 0,$$

por lo tanto existe una constante  $K$  tal que

$$\begin{aligned} \|T^m \mu^m\| \leq K &\Rightarrow \|T^m\| \leq \frac{1}{\|\mu\|^m} K \\ &\Rightarrow \|T^m\|^{1/m} \leq \frac{1}{\|\mu\|} K^{1/m} \end{aligned}$$

tomando límite cuando  $m \rightarrow \infty$ , encontramos

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \frac{1}{\|\mu\|}, \quad \forall \mu \in \{z \in \mathbb{C}; \|z\| < 1/R_\sigma(T)\}$$

lo que implica

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq R_\sigma(T).$$

De (2.5), encontramos

$$R_\sigma(T) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \|T^l\|^{1/l} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq R_\sigma(T).$$

de donde se sigue el resultado. ■

## El Problema de Cauchy

Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $A$  el generador infinitesimal de un semigrupo en  $X$ . Entonces el correspondiente semigrupo  $S(t) = e^{At}$  es un semigrupo fuertemente continuo sobre el espacio de fase  $X$ , esto quiere decir que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)u_0 = u_0$$

Para  $u_0 \in X$ . Esto es, el semigrupo  $S$  es continuo en cero. Por las propiedades de semigrupos sabemos que si es continuo en cero, entonces la función

$$t \mapsto S(t)u_0$$

es continua en  $\mathbb{R}$ . Portanto, si definimos  $u$  como

$$u(t) = S(t)u_0$$

tendremos que  $u$  es una función continua. Esto es,

$$u \in C(0, \infty; X)$$

Por otro lado, si tomamos  $u_0 \in D(A)$ , es simple verificar que

$$S(t)u_0 \in D(A)$$

pues de la definición tenemos que

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe en } X \right\}$$

y

$$Au_0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h}$$

por lo tanto como  $u_0 \in D(A)$ , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} \text{ existe en } X,$$

de donde sigue

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t) \frac{[S(h)u_0 - u_0]}{h} \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[S(h)u_0 - u_0]}{h} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = S(t)Au_0. \quad (2.6)$$

de la definición de derivada, la identidad anterior implica que

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = S(t)Au_0.$$

Como el semigrupo conmuta con su generador, concluimos que la relación anterior puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = AS(t)u_0.$$

Como  $u(t) = S(t)u_0$  verificamos que  $u$  satisface

$$(PC_1) \begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) & ; t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De lo discutido anteriormente, se concluye que si  $u_0 \in D(A)$  entonces  $S(t)u_0$  también pertenece al  $D(A)$ , lo que quiere decir que la función es diferenciable, por lo tanto se puede afirmar

$$S(t)u_0 \in C^1([0, +\infty); X)$$

pues el límite converge en  $X$ . Finalmente cuando  $u_0 \in D(A)$  se tiene

$$S(t)u_0 \in C([0, +\infty); D(A)).$$

**Definición 2.4.5.** Se dice que el problema  $(PC_1)$  es autónomo, si  $A$  es un operador independiente de  $t$ .

**Definición 2.4.6.** Se dice que  $u$  es solución (clásica) de  $(PC_1)$  si  $u$  verifica

$$u \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

y satisface  $(PC_1)$ .

Con estas consideraciones, se tiene el resultado a seguir.

**Teorema 2.4.1.** Si  $u_0 \in X$ , entonces el problema de Cauchy  $(PC_1)$  posee una única solución débil, que es llamada de mild solution, verificando

$$u \in C([0, +\infty); X)$$

y además satisface

$$\|u(t)\|_X = \|S(t)u_0\|_X \leq C\|u_0\|_X$$

Si  $u_0 \in D(A)$ , entonces el problema de Cauchy  $(PC_1)$  posee una única solución fuerte del problema verificando

$$u \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

y además satisface

$$\|u(t)\|_{D(A)} + \|u_t(t)\|_X \leq \|S(t)Au_0\|_X \leq C\|u_0\|_{D(A)}.$$

**Demostración:** Ver [17]. ■

## 2.5 Estabilidad Exponencial

En esta sección estableceremos las condiciones necesarias y suficientes para que un semigrupo de clase  $C_0$  sea exponencialmente estable.

**Definición 2.5.1.** *Sea  $A$  el generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$ , se dice que el semigrupo es Exponencialmente Estable si existe una constante  $\alpha$  positiva y una constante  $M \geq 1$  tal que*

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

**Teorema 2.5.1.** (Prüss). *Sea  $S(t) = e^{At}$  un semigrupo  $C_0$  de contracciones definido en un espacio de Hilbert. Entonces  $S(t)$  es exponencialmente estable si, y sólo si*

$$i\mathbb{R} \equiv \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A)$$

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$$

**Demostración:** Ver [12]. ■

## 2.6 Estabilidad Polinomial

Los primeros autores en demostrar la estabilidad polinomial de semigrupos  $C_0$  de contracciones fueron Liu - Rao y Prüss, los que mostraron condiciones suficientes sobre el operador resolvente para obtener decaimiento polinomial para el correspondiente semigrupo. Estos resultados se enuncian a seguir

**Teorema 2.6.1** (Liu - Rao). *Sea  $A$  generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  uniformemente acotado donde  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\alpha$  real positivo. Supongamos que*

$$\frac{1}{\lambda^\alpha} \|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C$$



Entonces para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe una constante  $C_k$  que satisface

$$\|T(t)w\| \leq C_k \left(\frac{\ln(t)}{t}\right)^{k/\alpha} \ln(t) \|w\|_{D(A^k)}.$$

**Teorema 2.6.2** (Prüss). . Sea  $A$  generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  uniformemente limitado donde  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$  y  $\alpha$  real positivo. Entonces

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}A^{-\alpha}\| \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists C_\epsilon > 0 \quad \|T(t)A^{-\alpha-\epsilon}\| \leq \frac{C_\epsilon}{t}.$$

Recíprocamente,

$$\|T(t)A^{-\alpha}\| \leq \frac{C}{t} \quad \Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists C_\epsilon > 0 \quad \|(\lambda I - A)^{-1}A^{-\alpha-\epsilon}\| \leq C_\epsilon, \quad \forall \operatorname{Re} \lambda \geq 0$$

**Demostración:** Ver [17]. ■

Estos resultados tienen una deficiencia. En el teorema de Liu-Rao la presencia del  $\ln$  en el numerador retarda el decaimiento polinomial. Ya que el resultado de Prüss introduce un  $\epsilon > 0$  en los operadores de  $A$ , lo que también retarda el decaimiento polinomial. Estas deficiencias fueron superadas en un resultado reciente (2009) de Borichev-Tomilov, [4], en el que, inclusive, los autores establecen una condición necesaria y suficiente para obtener decaimiento polinomial del correspondiente semigrupo.

**Teorema 2.6.3.** (Borichev-Tomilov). Sea  $S(t)$  un semigrupo  $C_0$  de contracciones generado por  $A$  y definido sobre el espacio de fase  $X$  de Hilbert, tal que  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$  y  $\alpha$  positivo. Entonces

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C|\lambda|^\alpha, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \|S(t)A^{-1}\|_{D(A)} \leq \frac{C}{t^{1/\alpha}}$$

**Demostración:** Ver [5]. ■

Esto es, si el operador resolvente está limitado por un polinomio de grado  $\alpha$  real positivo entonces el decaimiento polinomial del semigrupo es de la forma  $t^{-1/\alpha}$ .

# Capítulo 3

## Existencia y Unicidad

### 3.1 Existencia del Semigrupo

Para demostrar tanto la existencia de soluciones así como las propiedades asintóticas del modelo se usará la teoría de semigrupos. Para tal se redefine el modelo inicial como un sistema de primer orden en el tiempo. Esto es, reescribiendo el problema de valor inicial (1.1)–(1.4) denotando

$$V := (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)'$$

donde la tilde es usada para definir el operador transpuesto. De esta forma se tiene que  $V$  formalmente verifica

$$V_t = AV, \quad V(0) = V_0 \tag{3.1}$$

donde

$$V_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)'$$

y  $A$  es el operador diferencial asociado al sistema (1.1)–(1.4), dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_x^2 & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x & 0 & [\frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I] & -\frac{dI}{\rho_2} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Se introduce, a partir de la energía, el espacio de fase denotado por

$$H := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L)$$

donde

$$\begin{aligned} L_*^2(0, l) &:= \left\{ v \in L^2(0, l) : \int_0^l v \, dx = 0 \right\}, \\ H_*^1(0, l) &:= \left\{ v \in H^1(0, l) : \int_0^L v \, dx = 0 \right\}, \end{aligned}$$

Se define la norma como

$$\begin{aligned} \|V\|_H^2 &= \|(V_1, V_2, V_3, V_4)'\|_H^2 \\ &\equiv \rho_1 \|V_2\|_{L^2}^2 + b \|V_{3,x}\|_{L^2}^2 + k \|V_{1,x} + V_3\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|V_4\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Observe que con esta definición el espacio  $H$  es un espacio de Hilbert. Para definir completamente el operador  $A$  necesitamos definir su dominio. Formalmente el dominio de un operador es definido como el conjunto sobre el cual el operador está bien definido sobre el espacio de fase; esto es,

$$D(A) = \{V \in H; AV \in H\}.$$

Note que

$$AV = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_x^2 & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x & 0 & [\frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I] & -\frac{dI}{\rho_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

equivalentemente

$$AV = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) - \frac{d\psi_t}{\rho_2} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Por lo tanto, el dominio de  $A$  es definido a partir de (3.2), con las definiciones previas de los subespacios en cuestión, como siendo,

$$D(A) := \{V = (V_1, V_2, V_3, V_4)' \in H : V_1 \in H^2(0, L), V_2 \in H_0^1(0, L), V_3 \in H^2(0, L), \\ V_{3,x} \in H_0^1(0, L), V_4 \in H^1(0, L)\}$$

A seguir se mostrará que el operador  $A$  definido anteriormente es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones. Para esto se empleará el Teorema de Lumer-Phillips, que establece que todo operador cerrado, disipativo con dominio denso en el espacio de fase es generador infinitesimal si el 0 pertenece al resolvente del operador. El primer paso será demostrar que el operador  $A$  es disipativo, esto es,

$$(AV, V) = - \int_0^L d|V_4|^2 dx \leq 0, \quad \forall V \in D(A). \quad (3.5)$$

**Lema 3.1.1.** *Con las notaciones anteriores, el operador  $A$  es disipativo, esto es, verifica la relación (3.5) anterior.*

**Demostración:** El vector  $V$  se define como

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

En estas condiciones se tiene

$$AV = \begin{pmatrix} V_2 \\ \frac{k}{\rho_1}(V_{1,x} + V_3)_x \\ V_4 \\ \frac{b}{\rho_2}V_{3,xx} - \frac{k}{\rho_2}(V_{1,x} + V_3) - \frac{d}{\rho_2}V_4 \end{pmatrix}.$$

Recordando que el espacio de fase es dado por

$$H := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L)$$

donde su primera y tercera componente son los espacios  $H_0^1(0, L)$ , encunanto que la segunda y cuarta componentes son los espacios  $L^2(0, L)$ . Por lo tanto en el producto de las primeras

y terceras componentes será el producto interno definido en  $H_0^1(0, L)$ , encuanto que el producto de las segundas y cuartas componentes será el producto interno definido en  $L^2(0, L)$ . Llevando en consideración esto se obtiene,

$$(AV, V) = \left( \left( \begin{array}{c} V_2 \\ \frac{k}{\rho_1}(V_{1,x} + V_3)_x \\ V_4 \\ \frac{b}{\rho_2}V_{3,xx} - \frac{k}{\rho_2}(V_{1,x} + V_3) - \frac{d}{\rho_2}V_4 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} \right) \right)$$

equivalentemente

$$(AV, V) = \int_0^L k(V_{2,x} + V_4)(V_{1,x} + V_3) + k(V_{1,x} + V_3)_x V_2 + bV_{4,x}V_{3,x} dx + \int_0^L (bV_{3,xx} - k(V_{1,x} + V_3) - dV_4) V_4 dx$$

Usando integración por partes se obtiene (3.5).

**Teorema 3.1.1.** *Con las notaciones anteriores, el operador  $A$  es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones.*

**Demostración:** En virtud del Teorema 2.2.6 bastará mostrar que el 0 pertenece al conjunto resolvente de  $A$ . Recordando que el conjunto resolvente se define como

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\}$$

donde  $\mathcal{L}(H)$  es el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas definidas sobre  $H$ . Por lo tanto, demostrar que  $0 \in \varrho(A)$  es equivalente a mostrar que  $A$  tiene inversa continua en  $H$ . Para esto bastará demostrar que para todo  $F \in H$  el problema

$$AV = F$$

posee una única solución. En efecto, si el problema anterior posee una única solución, entonces  $A$  es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto  $A$  es un operador biyectivo.

En términos de las componentes de  $A$  se tiene

$$\begin{aligned} V_2 &= F_1 \\ \frac{k}{\rho_1}(V_{1,x} + V_3)_x &= F_2 \\ V_4 &= F_3 \\ \frac{b}{\rho_2}V_{3,xx} - \frac{k}{\rho_2}(V_{1,x} + V_3) - \frac{d}{\rho_2}V_4 &= F_4 \end{aligned}$$

Observe que  $V_2$  y  $V_4$  están dadas explícitamente en términos de los datos  $F_1$  y  $F_3$ , de esta forma el sistema anterior es dado por

$$V_2 = F_1 \tag{3.6}$$

$$k(V_{1,x} + V_3)_x = \rho_1 F_2 \tag{3.7}$$

$$bV_{3,xx} - k(V_{1,x} + V_3) = \rho_2 F_4 + dF_3 \tag{3.8}$$

Luego, el problema se reduce a demostrar que el sistema anterior posee existencia y unicidad. Para esto se usará el Teorema de Representación de Riesz para espacios de Hilbert.

Considere el espacio

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$$

con la siguiente norma

$$\|V\|_{\mathcal{H}}^2 = b\|V_{3,x}\|_{L^2}^2 + k\|V_{1,x} + V_3\|_{L^2}^2.$$

Claramente esta norma esta inducida por el siguiente producto interno

$$(V, W)_{\mathcal{H}} = \int_0^L bV_{3,x}W_{3,x} + k(V_{1,x} + V_3)(W_{1,x} + W_3) dx$$

donde

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_3 \end{pmatrix}.$$

Note ahora que el operador

$$T(W) = - \int_0^L \rho_1 F_2 W_1 + (\rho_2 F_4 + dF_3) W_3 dx$$

Claramente esta es una forma lineal continua sobre  $\mathcal{H}$ , pues

$$\begin{aligned}
\|T(W)\| &= \left| \int_0^L \rho_1 F_2 W_1 + (\rho_2 F_4 + \rho_2 dF_3) W_3 \, dx \right| \\
&\leq \left| \int_0^L \rho_1 F_2 W_1 \right| + \left| \int_0^L (\rho_2 F_4 + dF_3) W_3 \, dx \right| \\
&\leq \rho_1 \left( \int_0^L |F_2|^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_0^L |W_1|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \left( \int_0^L |\rho_2 F_4 + dF_3|^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_0^L |W_3|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_0^L |W_1|^2 \, dx \right)^{1/2} + C \left( \int_0^L |W_3|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_0^L |W_{1,x}|^2 \, dx \right)^{1/2} + C \left( \int_0^L |W_3|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_0^L |W_{1,x} + W_3 - W_3|^2 \, dx \right)^{1/2} + C \left( \int_0^L |W_3|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_0^L |W_{1,x} + W_3|^2 \, dx \right)^{1/2} + C \left( \int_0^L |W_3|^2 \, dx \right)^{1/2} + C \left( \int_0^L |W_3|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_0^L |W_{1,x} + W_3|^2 \, dx \right)^{1/2} + C \left( \int_0^L |W_{3,x}|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq C_1 \|W\|_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

Por el Teorema de la Representación de Riesz sigue que existe  $V \in \mathcal{H}$  tal que

$$(V, W)_{\mathcal{H}} = T(W)$$

De esta forma, haciendo  $W_3 = 0$  se tiene

$$(V, W)_{\mathcal{H}} = \int_0^L k(V_{1,x} + V_3) W_{1,x} \, dx = T(W) = - \int_0^L \rho_1 F_2 W_1 \, dx$$

de donde sigue

$$\int_0^L k(V_{1,x} + V_3) W_{1,x} \, dx = - \int_0^L \rho_1 F_2 W_1 \, dx \quad \forall W_1 \in H_0^1(0, L)$$

usando integración por partes

$$\int_0^L k(V_{1,x} + V_3)_x W_1 dx = \int_0^L \rho_1 F_2 W_1 dx \quad \forall W_1 \in H_0^1(0, L)$$

Por lo tanto,

$$\int_0^L [k(V_{1,x} + V_3)_x + \rho_1 F_2] W_1 dx = 0 \quad \forall W_1 \in H_0^1(0, L)$$

luego

$$k(V_{1,x} + V_3)_x = \rho_1 F_2$$

De esta forma  $V_1$  verifica la ecuación (3.7).

Análogamente, en particular haciendo  $W_1 = 0$ , se tiene

$$(V, W)_{\mathcal{H}} = \int_0^L bV_{3,x}W_{3,x} + k(V_{1,x} + V_3)W_3 dx = - \int_0^L (\rho_2 F_4 + dF_3)W_3 dx$$

repetiendo los mismos argumentos se obtiene

$$\int_0^L [bV_{3,xx} - k(V_{1,x} + V_3) - (\rho_2 F_4 + dF_3)] W_3 dx = 0 \quad \forall W_3 \in H_0^1(0, L)$$

usando el Lema de Du Bois Raymond se tiene

$$bV_{3,xx} - k(V_{1,x} + V_3) = (\rho_2 F_4 + dF_3)$$

quedando verificada la ecuación (3.8). Por lo tanto existe una única solución del problema.

Por otro lado, multiplicando la ecuación (3.7) y (3.8) por  $V_1$  y  $V_3$  respectivamente y sumando los productos resultantes se obtiene

$$- \int_0^L k|V_{1,x} + V_3|^2 + b|V_{3,x}|^2 dx = \int_0^L \rho_1 F_2 V_1 + (\rho_2 F_4 + dF_3)V_3 dx$$

Usando la desigualdad de Cauchy Schwarz sigue que existe una constante positiva  $C$  tal que



$$\int_0^L k|V_{1,x} + V_3|^2 + b|V_{3,x}|^2 dx \leq C \int_0^L |F_2|^2 + |F_3|^2 + |F_4|^2 dx$$

de donde

$$\|V\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \int_0^L |F_2|^2 + |F_3|^2 + |F_4|^2 dx$$

como  $A$  es inversible

$$AV = F \quad \Rightarrow \quad V = A^{-1}F$$

sustituyendo en la desigualdad anterior se tiene

$$\|A^{-1}F\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \int_0^L |F_2|^2 + |F_3|^2 + |F_4|^2 dx$$

de donde sigue que  $A^{-1}$  es continua. Por lo tanto  $0 \in \rho(A)$ . Con lo que se deduce que  $A$  es el generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de contracciones y se le denota como  $S(t) = \{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ .

**Teorema 3.1.2.** *Sea*

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^2(0, L) \times H_0^1(0, L)$$

*Entonces existe una única solución del sistema de Timoshenko (1.1)-(1.4) satisfaciendo*

$$\varphi \in C(0, T; H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \cap C^1(0, T; H_0^1(0, L))$$

$$\psi \in C(0, T; H_0^2(0, L)) \cap C^1(0, T; H_0^1(0, L))$$

**Demostración:**

El sistema (1.1)-(1.4) es equivalente a

$$V_t = AV, \quad V(0) = V_0 \tag{3.9}$$

donde  $V = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)'$  y  $V_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)'$  por el teorema anterior el operador  $A$  es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones, con lo que se obtiene el resultado; ver [21].

# Capítulo 4

## Decaimiento Exponencial: Método de la Energía

### 4.1 Disipación Total

Se dice que el sistema de Timoshenko tiene disipación total cuando los mecanismos disipativos actúan en todas sus ecuaciones. Por ejemplo, el siguiente sistema dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + d_1 \varphi_t = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + d_2 \psi_t = 0, \quad (4.2)$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  son positivos; es totalmente disipativo.

Unido a las siguientes condiciones de frontera para  $t \geq 0$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0. \quad (4.3)$$

y a las condiciones iniciales dadas por

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x)$$

La disipación total del sistema es debido a la disipación en la primera ecuación dada por el término  $d_1 \varphi_t$  y en la segunda ecuación dada por el término  $d_2 \psi_t$ .

Note que la energía en este caso es la misma que aquella definida en (1.15),

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 + b |\psi_x|^2 dx \quad (4.4)$$

Multiplicando la ecuación (4.1) por  $\varphi_t$  y la ecuación (4.2) por  $\psi_t$ , integrando sobre  $[0, L]$  y sumando los resultados se encuentra

$$\frac{d}{dt}E(t) = -d_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - d_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx \quad (4.5)$$

Si  $d_1 = d_2 = 0$  entonces (4.1), (4.2) es un sistema hiperbólico para el cual la energía se conserva y por lo tanto permanece constante. En efecto

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(t) = E(0).$$

Cuando la disipación es total el sistema siempre decae exponencialmente para cero. Se mostrará esto usando el método de la energía.

Este método consiste en construir un funcional, que se denotará por  $\mathcal{L}$  que es equivalente a la energía, esto es,

$$c_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_1 E(t)$$

que verifica la desigualdad

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\gamma\mathcal{L}(t)$$

Usando una desigualdad de tipo Gronwall se obtiene

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\gamma t}.$$

Como  $\mathcal{L}$  es equivalente a la energía sigue que

$$E(t) \leq \frac{c_1}{c_0} E(0)e^{-\gamma t}.$$

El primer paso para construir  $\mathcal{L}(t)$  es introducir el siguiente funcional

$$J(t) = \int_0^L \rho_1 \varphi \varphi_t + \rho_2 \psi \psi_t dx + \frac{1}{2} \int_0^L d_1 |\varphi|^2 + d_2 |\psi|^2 dx.$$

El siguiente Lema juega un papel importante en la demostración del decaimiento exponencial.

**Lema 4.1.1.** *Sean los datos iniciales*

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L)$$

entonces se verifica que el funcional  $J$  satisface

$$|J(t)| \leq CE(t)$$

para algún  $C > 0$ .

**Demostración:** Note que

$$|J(t)| = \left| \int_0^L \rho_1 \varphi \varphi_t + \rho_2 \psi \psi_t dx + \frac{1}{2} \int_0^L d_1 |\varphi|^2 + d_2 |\psi|^2 dx \right|$$

usando la desigualdad de Cauchy Schwarz se obtiene

$$|J(t)| \leq c \|\varphi\|_{L^2} \|\varphi_t\|_{L^2} + c \|\psi\| \|\psi_t\|_{L^2} + c \|\varphi\|_{L^2}^2 + c \|\psi\|_{L^2}^2$$

usando la desigualdad de Poincaré se obtiene

$$|J(t)| \leq c \|\varphi_x\|_{L^2} \|\varphi_t\|_{L^2} + c \|\psi_x\| \|\psi_t\|_{L^2} + c \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + c \|\psi_x\|_{L^2}^2$$

de donde se sigue

$$|J(t)| \leq c \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + c \|\varphi_t\|_{L^2}^2 + c \|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|_{L^2}^2$$

finalmente

$$\begin{aligned} |J(t)| &\leq c \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + c \|\varphi_t\|_{L^2}^2 + c \|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|_{L^2}^2 \\ &\leq c \|\varphi_x + \psi - \psi\|_{L^2}^2 + c \|\varphi_t\|_{L^2}^2 + c \|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|_{L^2}^2 \\ &\leq c \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + c \|\psi\|_{L^2}^2 + c \|\varphi_t\|_{L^2}^2 + c \|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

usando la desigualdad de Poincaré nuevamente se obtiene

$$|J(t)| \leq c \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + c \|\varphi_t\|_{L^2}^2 + c \|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|_{L^2}^2$$

de donde sigue el resultado.

**Lema 4.1.2.** Sean los datos iniciales

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L)$$

entonces se verifica

$$\frac{d}{dt} J(t) = \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 dx - \int_0^L b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 dx$$

**Demostración:** Multiplicando la ecuación (4.1) por  $\varphi$  y la ecuación (4.2) por  $\psi$  e integrando sobre  $[0, L]$  y sumando los resultados se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 \varphi \varphi_t + \rho_2 \psi \psi_t dx &= \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 dx - \int_0^L b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad - \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L d_1 |\varphi|^2 dx - \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L d_2 |\psi|^2 dx \end{aligned}$$

de donde sigue

$$\frac{d}{dt} J(t) = \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 dx - \int_0^L b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 dx$$

De esta forma se obtiene el decaimiento exponencial.

**Teorema 4.1.1.** *Para datos iniciales verificando*

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L)$$

*existe una constante positiva  $c$  tal que*

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\gamma t}, \quad t > 0.$$

**Demostración:** Definiendo el funcional

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + J(t)$$

usando el Lema 4.1.1 , sigue que para  $N$  suficientemente grande

$$(N - C)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + C)E(t)$$

tomando  $N > C$  sigue que existen constantes positivas  $c_0$  y  $c_1$  tales que

$$c_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_1 E(t). \tag{4.6}$$

Por otro lado, derivando este funcional se obtiene

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = N \frac{d}{dt} E(t) + \frac{d}{dt} J(t)$$

Usando la identidad (4.5) y el Lema 4.1.2 se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &= -Nd_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - Nd_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 dx \\
&\quad - \int_0^L b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&= -(Nd_1 - \rho_1) \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - (Nd_2 - \rho_2) \int_0^L |\psi_t|^2 dx \\
&\quad - \int_0^L b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 dx
\end{aligned}$$

Tomando  $N$  grande, existe una constante positiva  $N_0$  tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -N_0 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - N_0 \int_0^L |\psi_t|^2 dx - \int_0^L b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 dx$$

de donde se sigue

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C_0 E(t)$$

usando la desigualdad (4.6) se encuentra

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\gamma \mathcal{L}(t)$$

donde  $\gamma > 0$ , luego

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\gamma t}$$

usando nuevamente la desigualdad (4.6) se encuentra

$$c_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\gamma t} \leq c_1 E(0)e^{-\gamma t}$$

De donde sigue el resultado.

## 4.2 Disipación Parcial

El modelo con disipación parcial es mucho más complejo. Esto es debido a que la disipación está actuando solamente en la ecuación (1.2). El problema consiste en encontrar condiciones sobre los coeficientes de tal forma que el efecto disipativo sobre la ecuación

(1.2) haga efectiva también la ecuación (1.1). En otras palabras se quiere que el mecanismo disipativo de  $\psi_t$  sea efectivo sobre la ecuación en  $\varphi$ . Se mostrará que esto solo será posible cuando las velocidades de propagación de estas dos ecuaciones sean iguales. Caso contrario no existirá decaimiento exponencial.

En este capítulo caracterizará el decaimiento exponencial del sistema de Timoshenko con disipación parcial. Para esto se usarán los Teoremas de Prüss.

El principal resultado de este capítulo es mostrar que la energía total asociada al sistema (1.1)–(1.4), dada por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b \psi_x^2 + k |\varphi_x + \psi|^2)(t, x) dx. \quad (4.7)$$

decae exponencialmente para cero si y solamente si las velocidades de propagación son iguales. Esto es, la relación dada en (1.16)

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$$

es válida.

**Observación 4.2.1.** *Para mostrar el decaimiento exponencial en el caso de las condiciones de Neumann, es necesario tener una desigualdad de Poincaré para  $\psi$  del tipo*

$$\int_0^L |\psi|^2 dx \leq c_p \int_0^L |\psi_x|^2 dx$$

para esto es necesario tomar una clase de datos iniciales verificando

$$\int_0^L \psi_0 dx = 0, \quad \int_0^L \psi_1 dx = 0 \quad (4.8)$$

Note que en este caso la solución  $\psi$  verifica

$$\int_0^L \psi(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0$$

en efecto, integrando la ecuación (1.2) se encuentra

$$\rho_2 \int_0^L \psi_{tt} dx + k \int_0^L \psi dx + d \int_0^L \psi_t dx = 0$$

denotando por

$$g(t) = \int_0^L \psi \, dx$$

se obtiene

$$\rho_2 g''(t) + kg(t) + dg'(t) = 0$$

con las condiciones iniciales

$$g(0) = \underbrace{\int_0^L \psi_0 \, dx}_{:=g_0}, \quad g'(0) = \underbrace{\int_0^L \psi_1 \, dx}_{:=g_1}.$$

Claramente es un problema de valor inicial que posee una única solución. Si los datos iniciales tienen media nula, entonces  $g(t) = 0$  para todo  $t$ .

### 4.3 Condición Suficiente: Método de Semigrupo

En esta sección demostraré que el sistema parcialmente disipativo es exponencialmente estable si las velocidades de propagación son iguales. Esto es, el efecto de ser las velocidades de propagación iguales es una condición suficiente para estabilizar exponencialmente la solución del sistema. En la siguiente sección se demostrará que esta condición también es necesaria. A diferencia de la sección anterior, se usará el Teorema 2.5.1 de Prüss.

Con este objetivo, se consideran los datos iniciales con media nula. Esto es, datos iniciales verificando (4.8). Por lo tanto se consideran los siguientes espacios,

$$L_*^2(0, L) = \left\{ f \in L^2(0, L); \int_0^L f(x) \, dx = 0 \right\}$$

de forma análoga

$$H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L)$$

$$H_*^2(0, L) = H^2(0, L) \cap L_*^2(0, L)$$

Note que

$$\int_0^L |f|^2 \, dx \leq c_p \int_0^L |f_x|^2 \, dx, \quad \forall f \in H_*^1(0, L)$$



por lo tanto el espacio de fase que consideraremos es dado por

$$H_* = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L).$$

En estas condiciones tenemos el siguiente resultado

**Teorema 4.3.1.** *Sea*

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L).$$

*Entonces si la relación (1.16) es válida, existen constantes positivas  $C$  y  $\kappa > 0$  independientes de los datos iniciales tales que*

$$E(t) \leq C E(0) e^{-2\kappa t} \quad t \geq 0$$

**Demostración:** Para demostrar el resultado se usará el teorema [9, Theorem 1.3.2]) que caracteriza el decaimiento exponencial de semigrupos de contracciones. Para esto se mostrará que se verifican las siguientes condiciones.

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(A) \tag{4.9}$$

y

$$\|(iwI - A)^{-1}\|^2 \leq C, \quad \forall w \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

para esto se usará la ecuación resolvente

$$(iwI - A)V = F$$

tomando el producto interno en  $H$  se obtiene

$$((iwI - A)V, V)_H = (F, V)_H$$

de donde sigue que

$$iw\|V\|_H^2 - (AV, V)_H = (F, V)_H \tag{4.11}$$

Recordando que el operador  $A$  es disipativo (6.14) se obtiene

$$(AV, V)_H = -d \int_0^L |v^4|^2 dx$$

sustituyendo en (4.11) sigue que

$$iw\|V\|_H^2 + d \int_0^L |v^4|^2 dx = (F, V)_H$$

luego, tomando la parte real

$$d \int_0^L |v^4|^2 dx = \operatorname{Re} (F, V)_H$$

De esta forma existe una constante positiva tal que

$$\int_0^L |v^4|^2 dx \leq C\|F\|_H\|V\|_H$$

Escribiendo la ecuación resolvente en términos de sus componentes, considerando  $V = (v^1, v^2, v^3, v^4)'$ , i.e.:

$$i w v^1 - v^2 = f^1, \quad (4.12)$$

$$i w v^2 - \alpha(v_{xx}^1 + v_x^3) = f^2, \quad (4.13)$$

$$i w v^3 - v^4 = f^3, \quad (4.14)$$

$$i w v^4 - \beta v_{xx}^3 + \gamma(v_x^1 + v^3) + \frac{d}{\rho_2} v^4 = f^4, \quad (4.15)$$

donde

$$\alpha := \frac{k}{\rho_1}, \quad \beta := \frac{b}{\rho_2}, \quad \gamma := \frac{k}{\rho_2}. \quad (4.16)$$

multiplicando (4.15) por  $\overline{v^3}$  se obtiene, usando (4.14),

$$\begin{aligned} - \int_0^L |v^4|^2 dx + \beta \int_0^L |v_x^3|^2 dx + \gamma \int_0^L v_x^1 \overline{v^3} dx + \gamma \int_0^L |v^3|^2 dx + \int_0^L \frac{d}{\rho_2} v^4 \overline{v^3} dx \\ = \int_0^L f^4 \overline{v^3} + v^4 \overline{f^3} dx \end{aligned} \quad (4.17)$$

denotando por  $w$  la solución de

$$-w_{xx} = v_x^3, \quad w(0) = w(L) = 0,$$

esto es,

$$w(x) = - \int_0^x v^3(y)dy + \frac{x}{L} \int_0^L v^3(y)dy \equiv G(v_x^3)(x).$$

Multiplicando (4.13) por  $\bar{w}$  se obtiene

$$\alpha \int_0^L v_x^1 \bar{w}_x dx = \alpha \int_0^L |w_x|^2 dx + \int_0^L v^2 \left( \overline{G(v_x^4)} + \overline{G(f_x^3)} \right) dx + \int_0^L f^2 \bar{w} dx. \quad (4.18)$$

Observando

$$\int_0^L v_x^1 \bar{w}_x dx = - \int_0^L v_x^1 \bar{v}^3 dx$$

se concluye de (4.17) y (4.18)

$$\begin{aligned} & -\varrho_2 \int_0^L |v^4|^2 dx + b \int_0^L |v_x^3|^2 dx - k \left( \int_0^L |w_x|^2 dx - \int_0^L |v^3|^2 dx \right) \\ & - \varrho_1 \int_0^L v^2 (\overline{G(v_x^4)} + \overline{G(f_x^3)}) dx - \varrho_1 \int_0^L f^2 \bar{w} dx + \int_0^L dv^4 \bar{v}^3 dx \\ & = \varrho_2 \int_0^L f^4 \bar{v}^3 dx + \varrho_2 \int_0^L v^4 \bar{f}^3 dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^L |w_x|^2 dx \leq \int_0^L |v^3|^2 dx$$

se obtiene

$$\begin{aligned} b \int_0^L |v_x^3|^2 dx \leq & \varrho_2 \int_0^L |v^4|^2 dx + \operatorname{Re} \left\{ \int_0^L \varrho_1 v^2 (\overline{G(v_x^4)} + \overline{G(f_x^3)}) + \varrho_1 f^2 \bar{w} \right. \\ & \left. - dv^4 \bar{v}^3 + \varrho_2 f^4 \bar{v}^3 + \varrho_2 v^4 \bar{f}^3 dx \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Multiplicando (4.15) por  $\overline{v_x^1 + v^3}$  se obtiene

$$\begin{aligned} iw \int_0^L v^4 \overline{v_x^1} dx + iw \int_0^L v^4 \overline{v^3} dx + \beta \int_0^L v_x^3 \overline{(v_x^1 + v_x^3)} dx \\ + \gamma \int_0^L |v_x^1 + v^3|^2 dx + \int_0^L dv^4 \overline{(v_x^1 + v^3)} dx = \int_0^L f^4 \overline{(v_x^1 + v^3)} dx, \end{aligned}$$

y usando (4.13),

$$\begin{aligned} iw \int_0^L v^4 \overline{v_x^4} dx + iw \int_0^L v^4 \overline{v^3} dx - i \frac{\beta w}{\alpha} \int_0^L v_x^3 \overline{v^2} dx - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^L v_x^3 \overline{f^2} dx \\ + \gamma \int_0^L |v_x^1 + v^3|^2 dx + \frac{d}{\rho_2} \int_0^L v^4 \overline{(v_x^1 + v^3)} dx = \int_0^L f^4 \overline{(v_x^1 + v^3)} dx. \end{aligned}$$

de (4.12), (4.14) se obtiene

$$-iw \int_0^L v^4 \overline{v_x^1} dx = -iw \int_0^L v_x^3 \overline{v^2} dx + iw \int_0^L v^3 \overline{f_x^1} dx + \int_0^L \overline{v^2} f_x^3 - f^3 \overline{f_x^1} dx$$

Luego, usando la hipótesis (1.16), y de (4.14) se sigue que

$$\begin{aligned} iw \underbrace{(1 - \beta/\alpha)}_{=0} \int_0^L v_x^3 \overline{v^2} dx + \gamma \int_0^L |v_x^1 + v^3|^2 dx + \int_0^L dv^4 \overline{(v_x^1 + v^3)} dx \\ - \int_0^L |v^4|^2 dx - \int_0^L v^4 \overline{f^3} dx + \frac{\beta}{\alpha} \int_0^L v_x^3 \overline{f_x^2} \\ - iw \int_0^L v^3 \overline{f_x^1} dx - \int_0^L \overline{v^2} f_x^3 + f^3 \overline{f_x^1} dx - \int_0^L f^4 \overline{(v_x^1 + v^3)} dx = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Finalmente, multiplicando (4.13) por  $\overline{v^1}$  y el conjugado de (4.12) por  $v^2$ , se obtiene

$$\int_0^L |v^2|^2 dx = \alpha \int_0^L (v_x^1 + v^3) \overline{v_x^1} - \int_0^L f^2 \overline{v^1} dx - \int_0^L v^2 \overline{f^1} dx. \quad (4.21)$$

tomando la parte real de

$$N_1 \cdot (4.19) + N_2 \cdot (4.20) + N_3 \cdot (4.21) \quad (4.22)$$

se encuentra para números grandes  $N_1 \gg N_2 \gg N_3 \gg 1$ .

$$\|V\|_H^2 \leq C\|F\|_H^2,$$

donde  $C$  es una constante positiva independiente de  $w$  (y  $V$ ), esto demuestra (4.10) y por lo tanto el Teorema 4.3.1.  $\square$

## 4.4 Falta de Estabilidad Exponencial

En esta sección se probará que la condición (1.16) es también necesaria para el decaimiento exponencial. Para tal se usará nuevamente la caracterización dada por (4.9), (4.10) .

**Teorema 4.4.1.** *Sea*

$$\frac{\rho_1}{k} \neq \frac{\rho_2}{b}$$

*entonces el sistema dado por (1.1)–(1.4) no es exponencialmente estable.*

**Demostración:** De acuerdo con el Teorema de Prüss es suficiente demostrar que existe una sucesión de números reales  $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$  y sucesiones de funciones  $(V_n)_n \subset D(A)$ ,  $(F_n)_n \subset H$  tales que  $(i\lambda_n I - A)V_n = F_n$  sea limitada y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n\|_H = \infty.$$

Escojamos  $F \equiv F_n$  tal que

$$F = (0, f^2, 0, f^4)',$$

donde

$$\begin{aligned} f^2(x) &:= \sin \frac{n\pi x}{L} = \sin(\delta\lambda x), \\ f^4(x) &:= \cos \frac{n\pi x}{L} = \cos(\delta\lambda x), \end{aligned}$$

y

$$\delta := \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \lambda \equiv \lambda_n = \frac{\sqrt{\alpha} n\pi}{L}.$$

Entonces se obtiene

$$\|F_n\|_H^2 = L$$

y las soluciones  $V = (v^1, v^2, v^3, v^4)'$  de  $(i\lambda I - A)V = F$  verifican

$$i\lambda v^1 - v^2 = f^1, \quad (4.23)$$

$$i\lambda v^2 - \alpha(v_{xx}^1 + v_x^3) = f^2, \quad (4.24)$$

$$i\lambda v^3 - v^4 = f^3, \quad (4.25)$$

$$i\lambda v^4 - \beta v_{xx}^3 + \gamma(v_x^1 + v^3) + \frac{d}{\rho_2} v^4 = f^4, \quad (4.26)$$

eliminando  $v^2, v^4$  se obtiene  $v^1, v^3$ :

$$-\lambda^2 v^1 - \alpha v_{xx}^1 - \alpha v_x^3 = f^2, \quad (4.27)$$

$$-\lambda^2 v^3 - \beta v_{xx}^3 + \gamma(v_x^1 + v^3) + i\frac{d}{\rho_2} \lambda v^3 = f^4. \quad (4.28)$$

luego se puede suponer que la solución es de la forma

$$v^1(x) = A \sin(\delta \lambda x), \quad v^3(x) = B \cos(\delta \lambda x) \quad (4.29)$$

Resolviendo (4.27), (4.28) para  $A = A(\lambda)$ ,  $B = B(\lambda)$ , se obtiene

$$(\alpha \delta^2 - 1)\lambda^2 A + \alpha \delta \lambda B = 1, \quad (4.30)$$

$$(\beta \delta^2 - 1)\lambda^2 B + \gamma \delta \lambda A + \gamma B + i d \lambda B = 1. \quad (4.31)$$

tomando  $\alpha \delta^2 = 1$ , se concluye de (4.30),

$$B = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\lambda} \quad (4.32)$$

y por lo tanto de (4.31),

$$A = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\gamma} (\sqrt{\alpha} - i\frac{d}{\rho}) \frac{1}{\lambda} - (\beta/\alpha - 1) \frac{1}{\gamma}. \quad (4.33)$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned}
v^1(x) &= \left( -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\gamma}(\sqrt{\alpha} - i\frac{d}{\rho}\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma}(\beta/\alpha - 1)) \right) \sin(\delta\lambda x), \\
v^2(x) &= \left( -\frac{i}{\lambda} + \frac{1}{\gamma}(i\sqrt{\alpha} + \frac{d}{\rho}) - \frac{i}{\gamma}(\beta/\alpha - 1)\lambda \right) \sin(\delta\lambda x), \\
v^3(x) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\lambda} \cos(\delta\lambda x), \\
v^4(x) &= \frac{i}{\sqrt{\alpha}} \cos(\delta\lambda x).
\end{aligned}$$

Recordando que  $\alpha$  y  $\beta$  están dados en (4.16). Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^L |v^2|^2 dx &= \frac{L}{2} \left| -\frac{i}{\lambda} + \frac{1}{\gamma}(i\sqrt{\alpha} + \frac{d}{\rho}) - \frac{i}{\gamma}(\beta/\alpha - 1)\lambda \right|^2 \\
&\geq -\frac{L}{2} \left| -\frac{i}{\lambda} + \frac{1}{\gamma}(i\sqrt{\alpha} + \frac{d}{\rho}) \right|^2 + \frac{L}{4} \left| \frac{1}{\gamma}(\beta/\alpha - 1) \right|^2 \lambda^2
\end{aligned}$$

se encuentra que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|V_n\|_H \geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^L |v^2|^2 dx = \infty$$

Lo que completa la prueba. □

En conclusión, se puede afirmar que en el caso parcialmente disipativo, el sistema de Timoshenko es exponencialmente estable si y solamente si las velocidades de propagación son iguales. Esto es,

**Teorema 4.4.2.** *El Sistema de Timoshenko, parcialmente disipativo es exponencialmente estable si y sólo si las velocidades de propagación son iguales.*

# Capítulo 5

## Decaimiento Polinomial

### 5.1 Decaimiento Uniforme

Un punto importante para desarrollar este capítulo es entender bien el tipo de decaimiento por analizar. Es importante observar que el modelo que se está estudiando es un modelo lineal. Se denota por  $S(t)$  el semigrupo generado por el operador  $A$ , definido en el espacio de fase  $H$ . Esto es,  $S(t) = e^{At}$  y

$$S(t) : H \rightarrow H$$

**Lema 5.1.1.** *Sea  $S(t)$  un semigrupo definido sobre el espacio de fase  $H$ , tal que*

$$\|S(t_0)w\|_X \leq 1$$

*para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$ , entonces  $S(t)$  decae exponencialmente para zero.*

**Demostración:** En efecto, sea  $\alpha$  como sigue

$$\alpha = \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1,$$

por el algoritmo de la división, todo número  $t$  puede ser escrito en la forma

$$t = mt_0 + r$$

donde  $m \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq r < t_0$ . Como  $S$  es un operador continuo, existe  $M > 0$ , tal que



$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \forall t \in [0, t_0]$$

Sea  $t \in \mathbb{R}_+$ , usando las propiedades de semigrupos se tiene

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(mt_0 + r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(mt_0)S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(t_0)^m S(r)\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

de donde

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)}^m = M \alpha^m.$$

recordando la definición de  $m$ , se sigue que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \alpha^{(t-r)/t_0} = \underbrace{M \alpha^{-r/t_0}}_{:=M_1} \alpha^{\gamma t},$$

donde  $\gamma = 1/t_0$ . Recordando que

$$\alpha^\gamma = e^{\gamma \ln(\alpha)} = e^{-\beta}, \quad \beta > 0$$

pues  $\alpha < 1$ , se tiene entonces

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_1 e^{-\beta t}.$$

Lo que significa que  $S$  decae exponencialmente.

**Corolario 5.1.1.** *Sea  $S$  un semigrupo que decae polinomialmente, entonces  $S(t)$  decae exponencialmente.*

**Demostración:** Por hipótesis, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists t_0 \in \mathbb{R} \quad \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$$

aplicando el Lema 5.1.1, se concluye que  $S(t)$  es exponencialmente estable.

El corolario anterior dice que todo semigrupo que decae para cero, debe decaer exponencialmente. Esto es porque el decaimiento polinomial es dado en la norma uniforme del espacio  $\mathcal{L}(X)$ . En este capítulo se estudiará el decaimiento polinomial en normas de

espacios  $\mathcal{L}(D(A^\alpha), X)$ , con  $\alpha \neq 0$ . Esto es, los resultados de decaimiento serán de la forma

$$\|S(t)w\|_X \leq \frac{C}{t} \|w\|_{D(A^\alpha)}$$

Este decaimiento no es uniforme y por lo tanto esto no implica el decaimiento exponencial.

## 5.2 Decaimiento de la Energía

Se denota por

$$E(t) \equiv E(t, \varphi, \psi) \equiv E_1(t)$$

la energía definida en (4.7), y

$$E_2(t) := E(t, \varphi_t, \psi_t)$$

la energía de segundo orden. El principal resultado de este capítulo está resumido en el siguiente teorema.

**Teorema 5.2.1.** *Sean los datos iniciales en el dominio del operador*

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)' \in D(A).$$

*Entonces la energía de primer orden verifica*

$$E(t) \leq C(E_2(0) + E_1(0))t^{-1} \quad \forall t > 0$$

para  $C > 0$ .

**Demostración:**

Derivando la energía y usando el sistema de Timoshenko se tiene

$$\frac{d}{dt} E_1(t) = -d \int_0^L |\psi_t|^2 dx, \quad \frac{d}{dt} E_2(t) = -d \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dx \quad (5.1)$$

por otro lado,

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \varrho_2 \psi \psi_t dx = \varrho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx + b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx - d \int_0^L \psi_t \psi dx. \quad (5.2)$$

Sea  $w$  la solución del siguiente problema

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(L) = 0,$$

derivando,

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \varrho_1 \varphi_t w dx = -k \int_0^L \varphi \psi_x dx + k \int_0^L |w_x|^2 dx + \varrho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx. \quad (5.3)$$

Sumando las expresiones (5.2) y (5.3),

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left\{ \int_0^L \varrho_2 \psi \psi_t + \varrho_1 \varphi_t w + \frac{d}{2} |\psi|^2 dx \right\}}_{:= F_1(t)} \leq \varrho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx - b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \varrho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx,$$

por lo tanto, usando (5.1), para  $N_1 > 0$

$$\frac{d}{dt} \{N_1 E(t) + F_1(t)\} \leq -(Nd - \varrho_2) \int_0^L |\psi_t|^2 dx - b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \varrho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx. \quad (5.4)$$

Además,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^L \varrho_2 \psi_t (\varphi_x + \psi) dx &= -b \int_0^L \psi_x (\varphi_x + \psi)_x - k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - d \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx \\
&+ \varrho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t \varphi_x dx - \varrho_2 \int_0^L \psi_{tt} \varphi_x dx + \varrho_2 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx \\
&= -\frac{b\varrho_1}{k} \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx - k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - d \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx \\
&+ \varrho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t \varphi_x dx - \varrho_2 \int_0^L \psi_{tt} \varphi_x dx + \varrho_2 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Notando que

$$\int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx = \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^L \psi_x \varphi_t - \psi_{xt} \varphi dx \right\} - \int_0^L \psi_{tt} \varphi_x dx$$

se concluye que el funcional

$$F_2(t) := \int_0^L \varrho_2 \psi_t (\varphi_x + \psi) - \varrho_2 \psi_t \varphi_x + \frac{b\varrho_1}{k} (\psi_x \varphi_t - \psi_{xt} \varphi) dx$$

satisface

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F_2(t) &= \left( \frac{b\varrho_1}{k} - \varrho_2 \right) \int_0^L \psi_{tt} \varphi_x dx - k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&- d \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx + \varrho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Para  $N_2 > 0$ , sea

$$F_3(t) := N_2(N_1 E(t) + F_1(t)) + F_2(t).$$

Entonces (5.4) y (5.6) implican

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_3(t) &\leq -\left(N_2(Nd - \varrho_2) - \left(\varrho_2 + \frac{d^2}{2k}\right)\right) \int_0^L |\psi_t|^2 dx \\
&\quad - \left(N_2b - \frac{kL^2}{\pi^2}\right) \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \varrho_1 N_2 \int_0^L \varphi_t w_t dx \\
&\quad + \left(\frac{b\varrho_1}{k} - \varrho_2\right) \int_0^L \psi_{tt} \varphi_x dx - \frac{k}{4} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - \frac{k}{8} \int_0^L |\varphi_x|^2 dx. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\{ - \int_0^L \varrho_1 \varphi_t \varphi dx \right\} &= -\varrho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx \\
&\leq -\varrho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x|^2 dx + \frac{3kL^2}{2\pi^2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Combinando (5.7) y (5.8),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\{ F_3(t) - \frac{\varrho_1}{8} \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right\} &\leq -\left(N_2(Nd - \varrho_2) - \left(\varrho_2 + \frac{d^2}{2k}\right)\right) \int_0^L |\psi_t|^2 dx \\
&\quad - \left(N_2b - \frac{19}{16} \frac{kL^2}{\pi^2}\right) \int_0^L |\psi_x|^2 dx + N_2 \varrho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx + \left(\frac{b\varrho_1}{k} - \varrho_2\right) \int_0^L \psi_{tt} \varphi_x dx \\
&\quad - \frac{k}{8} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - \frac{k}{16} \int_0^L |\varphi_x|^2 dx - \frac{\varrho_1}{8} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx.
\end{aligned}$$

Como

$$\left(\frac{b\varrho_1}{k} - \varrho_2\right) \left| \int_0^L \psi_{tt} \varphi_x dx \right| \leq c_1 \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dx + \frac{k}{32} \int_0^L |\varphi_x|^2 dx$$

y

$$\varrho_1 N_0 \left| \int_0^L \varphi_t w_t dx \right| \leq \frac{\varrho_1}{16} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + c_1 N_2^2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx$$

Para una constante  $c_1 > 0$  se concluye,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ F_3(t) - \frac{\varrho_1}{8} \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right\} &\leq - \left[ N_2(Nd - \varrho_2) - (\varrho_2 + \frac{d^2}{2k} + c_1 N_2^2) \right] \int_0^t |\psi_t|^2 dx \\ &\quad - \left[ N_2 b - \frac{19}{16} \frac{kL^2}{\pi^2} \right] \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \frac{k}{8} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad - \frac{k}{32} \int_0^L |\varphi_x|^2 dx - \frac{\varrho_1}{16} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + c_1 \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dx \end{aligned}$$

Para  $N_2$  y  $N$  suficientemente grandes los coeficientes entre las llaves se vuelven positivos y por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left\{ F_3(t) - \frac{\varrho_1}{8} \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right\} \leq c_1 \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dx - c_2 E_1(t), \quad (5.9)$$

para una constante  $c_2 > 0$ .

Finalmente, se introduce el funcional  $L$  definido como

$$L(t) := N_1 E_2(t) + F_3(t) - \frac{\varrho_1}{8} \int_0^L \varphi_t \varphi dx.$$

Entonces (5.1) y (5.9) implica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &\leq -(N_1 d - c_1) \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx - c_2 E_1(t) \\ &\leq -c_2 E_1(t) \quad \text{para } N_1 \geq \frac{c_1}{d}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^t E_1(r) dr \leq \frac{1}{c_2}(L(0) - L(t)).$$

Para  $N_1$  suficientemente grande se obtiene

$$\exists c_3, c_4 > 0 \forall t \geq 0 : c_3(E_1(t) + E_2(t)) \leq L(t) \leq c_4(E_1(t) + E_2(t))$$

se obtiene para  $t \geq 0$

$$\int_0^t E_1(r) dr \leq \frac{c_4}{c_2}(E_1(0) + E_2(0)).$$

Note que

$$\frac{d}{dt}(tE_1(t)) \leq E_1(t)$$

integrando

$$E_1(t) \leq \frac{c_4}{c_2}(E_1(0) + E_2(0))t^{-1}.$$

De donde sigue el resultado. □

# Capítulo 6

## Estabilidad Lineal de Semigrupos $C_0$ para Perturbaciones Continuas de Operadores Normales

Un estudio inicial básico sobre la estabilidad del sistema  $y' = Ay$  de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes es determinado por los autovalores de la matriz  $A$ . Cuando se pasa a considerar espacios de dimensión infinita, este estudio pasa a ser más complejo. Dentro de un contexto abstracto, lo apropiado es considerar el semigrupo de operadores lineales  $C_0$  definido sobre un espacio de Banach.

**Definición 6.0.1.** *Sea  $e^{At}$  un semigrupo  $C_0$  y  $A$  su generador infinitesimal asociado. Se define el Tipo de un Semigrupo como*

$$w_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|e^{At}\| / t \quad (6.1)$$

*y la Cota Superior del Espectro como*

$$r_0 = \text{Sup}\{\text{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} \quad (6.2)$$

donde  $\sigma(A)$  denota el Espectro de  $A$ . Se dice que el Principio de Estabilidad Lineal se verifica si  $w_0 = r_0$ .

El principio de estabilidad lineal es importante porque establece un criterio práctico para evaluar la estabilidad de un problema de evolución. En la mayoría de los casos esto no puede hacerse solo con criterios analíticos, ya que se requieren cálculos numéricos.



Si se llega a obtener el tipo de un semigrupo a partir de su definición, el resultado sería directo, portanto formidable, pero esto en la práctica no se cumple, por la dificultad que encierra este cálculo, por tal motivo se halla el tipo de un semigrupo usando el espectro del operador respectivo.

Existen contraejemplos que demuestran que el principio de estabilidad lineal no se cumple para todo semigrupo  $C_0$ . Por otro lado, esta propiedad se verifica para una amplia clase de semigrupos, por ejemplo semigrupos analíticos y compactos. Estas clases, sin embargo, no cubren las aplicaciones a las ecuaciones diferenciales hiperbólicas. En el presente trabajo, se establece un resultado que es aplicable a las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas en espacios de dimensión uno. El siguiente resultado debido a Prüss [22] será el que se usará, en este se demuestra que si  $A$  es un generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  en un espacio de Hilbert, siempre se cumple lo siguiente

$$w_0 = \inf\{\mu \in \mathbb{R} : \max_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(A - \gamma - i\lambda)^{-1}\| < \infty, \forall \gamma \geq \mu\} \quad (6.3)$$

Para mostrar el Principio de Estabilidad Lineal, es suficiente probar la limitación del resolvente sobre toda la recta:  $Re\lambda = \gamma$ , donde  $\gamma > r_0$ . Resultados anteriores sobre las implicancias de la limitación del resolvente se pueden encontrar también en Slemrod [26].

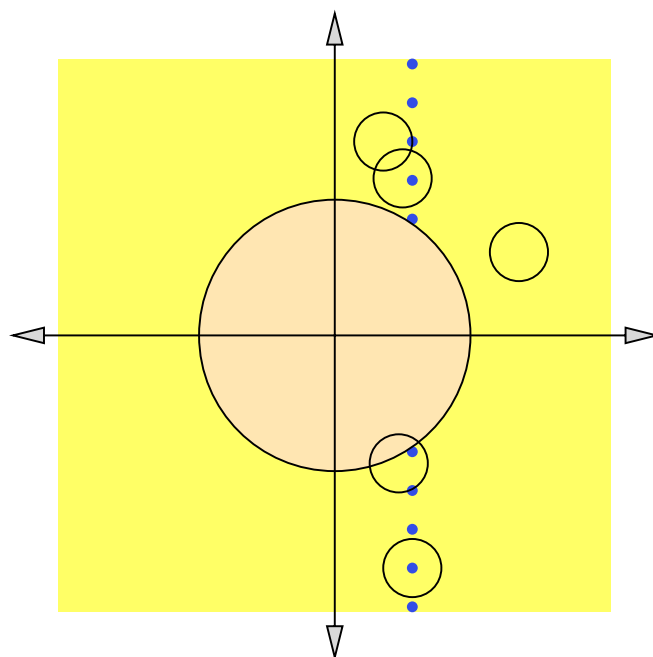
A seguir se establece el siguiente resultado.

**Teorema 6.0.2.** *(M. Renardy) Sea  $H$  un espacio de Hilbert, y sea  $A = A_0 + B$  el generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de operadores en  $H$ . Asuma que  $A_0$  es normal y  $B$  acotado y existe un número  $M > 0$  y un entero  $n$  tal que se cumple lo siguiente*

1. *Si  $\lambda \in \sigma(A_0)$  y  $|\lambda| > M - 1$ , entonces  $\lambda$  es un autovalor aislado de multiplicidad finita.*
2. *Si  $|z| > M$ , entonces el número de autovalores de  $A_0$  en el disco unitario centrado en  $z$  (considerando las multiplicidades) no excede a  $n$ .*  
*Entonces se cumple el Principio de Estabilidad Lineal.*

**Observación 6.0.1.** *La primera hipótesis quiere decir que fuera de una bola, todos los elementos del espectro deben ser autovalores de multiplicidad finita.*

La segunda hipótesis significa que existe un número  $R > 0$ , de tal forma para cualquier bola de radio  $R$  existen a lo más  $n$  autovalores del espectro que están fuera de la misma bola de la hipótesis,



Interpretación Gráfica de las Hipótesis

**Demostración:**

Sea  $\gamma > r_0$ . De acuerdo a un resultado de Prüss, es suficiente mostrar que el resolvente de  $A$  es uniformemente acotado sobre la recta  $Re\lambda = \gamma$ . Claramente existe una cota uniforme sobre todo segmento compacto de la recta, luego es suficiente considerar el caso  $|\lambda| > M + K$ , donde  $K$  es escogido suficientemente grande. Se denota el siguiente conjunto como

$$\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda = \gamma, |\lambda| > M + K\}.$$

Considere ahora la ecuación

$$A_0u - \lambda u + Bu = h \tag{6.4}$$

para  $\lambda \in \Gamma$ . Sea  $P$  la proyección ortogonal sobre el espacio generado por todos los autovectores de  $A_0$  los cuales están situados en un disco de radio  $K$  centrado en  $\lambda$  y sea

$Q = 1 - P$  (donde  $P$  y  $Q$  efectivamente dependen de  $\lambda$ ). Considere

$$Pu = x, \quad Qu = y, \quad Ph = f, \quad Qh = g$$

luego reescribiendo (6.4)

$$A_0x - \lambda x + PBx + PBy = f \quad (6.5)$$

$$A_0y - \lambda y + QBy + QBx = g \quad (6.6)$$

Si  $K$  es escogido suficientemente grande, se puede resolver la segunda ecuación para  $y$ . Insertando el resultado a la primera ecuación se obtiene

$$A_0x - \lambda x + PBx + PB(A_0 - \lambda + QBQ)^{-1}QBx = f - PB(A_0 - \lambda + QBQ)^{-1}g \quad (6.7)$$

De lo supuesto antes, el operador en el lado izquierdo de (6.7) es inversible para todo  $\lambda \in \Gamma$ . Además el rango de  $P$  tiene una cota uniforme. Se puede dividir  $\Gamma$  en un número finito de subconjuntos  $\Gamma_i$  tal que el rango de  $P$  sea  $i$  para  $\lambda \in \Gamma_i$ . Sea  $\lambda \in \Gamma_i$  se define

$$\phi_\lambda(\mu) = \det[A_0 - \lambda - \mu + P(\lambda)BP(\lambda) - P(\lambda)B(A_0 - \lambda - \mu + Q(\lambda)BQ(\lambda))^{-1}Q(\lambda)B]. \quad (6.8)$$

Consecuentemente se puede pensar que el lado derecho de la igualdad anterior es como una matriz  $i \times i$  relativa a la base ortonormal dada por los autovectores de  $A_0$ . Suponiendo  $\phi_\lambda(\mu)$  es diferente de cero para  $\lambda \in \Gamma_i$  y  $\mu$  suficientemente pequeño, esto es,  $|\mu| \leq \epsilon$ . La prueba acaba si se consigue mostrar que  $|\phi_\lambda(0)|$  es acotado inferiormente para  $\lambda \in \Gamma_i$ , desde que una cota inferior sobre el determinante da una cota superior sobre la norma de la matriz inversa. Por esto se supone que  $\phi_{\lambda_n}(0) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Las funciones  $\phi_{\lambda_n}$  son analíticas y uniformemente acotadas en el disco  $|\mu| \leq \epsilon$ . Luego se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente a una función  $\phi$  en el disco  $|\mu| \leq \epsilon/2$ . Como  $\phi(0) = 0$  y ninguna de las funciones  $\phi_{\lambda_n}$  tienen raíces próximas al cero luego el argumento principal implica que  $\phi$  es idénticamente cero. Si  $K$  es escogido suficientemente grande y  $\delta$  es suficientemente pequeño entonces las funciones  $\phi_\lambda$  están definidas sobre el conjunto

$$S_\delta = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\mu \geq 0, \quad -\delta < \operatorname{Im}\mu < \delta\}$$

y estas son uniformemente acotadas para  $\lambda \in \Gamma_i$  y  $\mu$  está en cualquier subconjunto compacto de  $S_\delta$ . Finalmente se concluye que  $\phi_{\lambda_n}(\mu) \rightarrow 0$  para cada  $\mu \in S_\delta$ . Pero esto claramente no es el caso para  $\mu$  grande, lo que viene a ser una contradicción. r

## 6.1 Estabilidad Lineal del Sistema de Timoshenko

En esta sección se probará que el sistema de Timoshenko posee la propiedad de la estabilidad lineal. Esto es, el tipo del semigrupo debe ser igual a la cota superior del espectro. La idea es descomponer el operador  $\mathcal{A}$  definido en la sección anterior como una perturbación continua de un operador normal.

El modelo de Timoshenko a estudiar es el siguiente:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + a(x)\varphi_t = 0 \quad (6.9)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + d(x)\psi_t = 0. \quad (6.10)$$

Las condiciones de frontera a considerar son

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = 0. \quad (6.11)$$

Adicionalmente se considera las siguientes condiciones iniciales.

$$\varphi(0, \cdot) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0, \cdot) = \varphi_1, \quad \psi(0, \cdot) = \psi_0, \quad \psi_t(0, \cdot) = \psi_1 \text{ en } (0, L). \quad (6.12)$$

donde  $a(x), b(x)$  son funciones continuas y positivas, esto es  $a(x) \geq a > 0$  y  $b(x) \geq b > 0$ . En este caso el generador infinitesimal del semigrupo es dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_x^2 & -aI & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 \\ \rho_1 & \rho_1 & \rho_1 & I \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x & 0 & [\frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I] & \frac{-dI}{\rho_2} \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Como fue visto en el capítulo anterior se puede demostrar que el operador  $\mathcal{A}$  definido anteriormente es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones. En efecto, note que si

$$a(x) \geq 0, \quad d(x) \geq 0$$

es simple verificar que el operador  $\mathcal{A}$  es disipativo, i.e.:

$$(\mathcal{A}V, V) = - \int_0^L a|V_2|^2 dx - \int_0^L d|V_4|^2 dx \leq 0, \quad \forall V \in D(\mathcal{A}). \quad (6.14)$$

Por lo tanto se tiene el siguiente resultado,

**Teorema 6.1.1.** *Con las notaciones anteriores, el operador  $\mathcal{A}$  es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones.*

La demostración es idéntica a aquella hecha en el primer capítulo, por lo tanto no se repetirá.

Nuestro objetivo es mostrar que el operador  $\mathcal{A}$  puede ser descompuesto en la siguiente forma

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$$

donde  $\mathcal{B}$  es un operador continuo y  $\mathcal{A}_0$  es un operador normal satisfaciendo las hipótesis del Teorema de Renardy 6.0.2.

El operador  $\mathcal{A}$  es dado por

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_x^2 & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x & 0 & [\frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I] & 0 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

y  $\mathcal{B}$  es dado por

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-aI}{\rho_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-dI}{\rho_2} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Para  $V = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)' \in \mathcal{H}$ , entonces se tiene

$$\mathcal{A}_0 V = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Es simple verificar que su adjunto es dado por

$$\mathcal{A}_0^* V = - \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Claramente este operador conmuta con  $\mathcal{A}_0$ , luego se cumple el siguiente Lema.

**Lema 6.1.1.** *El operador  $\mathcal{A}_0$  es normal.*

**Lema 6.1.2.** *El operador  $\mathcal{B}$  es un operador continuo.*

**Demostración:** De la definición del operador  $\mathcal{B}$  se tiene

$$\mathcal{B}V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -aI & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_1}{\rho_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -dI \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-dI}{\rho_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -aV_2 \\ \rho_1 \\ 0 \\ -dV_4 \\ \frac{-dV_4}{\rho_2} \end{pmatrix}$$

de donde sigue

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}V\|^2 &= \int_0^L \frac{a^2}{\rho_1^2} |V_2|^2 dx + \int_0^L \frac{d^2}{\rho_2^2} |V_4|^2 dx \\ &\leq c \int_0^L |V_2|^2 + |V_4|^2 dx \\ &\leq c_1 \int_0^L \rho_1 |V_2|^2 + \rho_2 |V_4|^2 + k |V_{1,x} + V_3|^2 + b |V_{3,x}|^2 dx \\ &\leq c_1 \|V\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{B}$  es un operador continuo.

Finalmente para obtener todas las hipótesis del Teorema de Renardy es suficiente verificar la condición 2 del Teorema. Para esto se tiene que calcular el espectro de  $\mathcal{A}_0$ . Los siguientes Lemas son importantes para este cálculo

**Lema 6.1.3.** *El espectro del operador  $\mathcal{A}_0$  está formado exclusivamente por sus autovalores.*

**Demostración:** Note que  $\mathcal{A}_0$  es un operador normal, que verifica

$$\operatorname{Re} (\mathcal{A}_0 V, V) \leq 0$$

por lo tanto  $\mathcal{A}_0$  es un generador infinitesimal de semigrupos de contracciones. Es simple verificar que  $0 \in \varrho(\mathcal{A}_0)$  por lo tanto  $\mathcal{A}_0$  es un operador tal que

$$\mathcal{A}_0 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

es una biyección con inversa continua. Esto es

$$\mathcal{A}_0^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A}_0).$$

Claramente para todo conjunto limitado de  $\mathcal{H}$  las imagenes por el operador  $\mathcal{A}_0^{-1}$  son limitadas en  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ . Note que  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$  es un subespacio compacto de  $\mathcal{H}$ . Portanto,  $\mathcal{A}_0^{-1}$  es un operador que lleva conjuntos limitados de  $\mathcal{H}$  en conjuntos relativamente compactos de  $\mathcal{H}$ . Esto es,  $\mathcal{A}_0^{-1}$  es un operador compacto de  $\mathcal{H}$ . Luego el espectro de  $\mathcal{A}_0^{-1}$  esta formado por los autovalores de  $\mathcal{A}_0^{-1}$ , que es un conjunto numerable, con  $\lambda = 0$  el único punto de acumulación. De esta forma se concluye que el espectro de  $\mathcal{A}_0$  está formado por

$$\sigma(\mathcal{A}_0) = \{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda^{-1} \text{ es un autovalor de } \mathcal{A}_0^{-1} \}$$

**Lema 6.1.4.** *El espectro del operador  $\mathcal{A}_0$  es dado por*

$$\sigma(\mathcal{A}_0) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 = \frac{-[(k\rho_2 + b\rho_1)\theta_j^2 + k\rho_1] \pm \sqrt{[(k\rho_2 + b\rho_1)\theta_j^2 + k\rho_1]^2 - 4\rho_1\rho_2bk\theta_j^4}}{2\rho_1\rho_2} \right\}$$

donde  $\theta_j := (j\pi)/L$

**Demostración:** Por el Lema anterior el espectro del operador  $\mathcal{A}_0$  está formado por el conjunto de sus autovalores. Esto es los valores  $\lambda \in \mathbb{C}$  que verifican

$$\mathcal{A}_0 W = \lambda W. \tag{6.19}$$

Recordando que

$$\mathcal{A}_0 W = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

donde

$$W^t = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi).$$

Por lo tanto la ecuación (6.19) puede ser reescrita de la forma

$$\begin{aligned} \lambda\varphi - \Phi &= 0 \\ \rho_1\lambda\Phi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\ \lambda\psi - \Psi &= 0 \\ \rho_2\lambda\Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0 \end{aligned}$$

eliminando las variables  $\Phi$  y  $\Psi$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_1\lambda^2\varphi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\ \rho_2\lambda^2\psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \rho_1\lambda^2\varphi - \kappa\varphi_{xx} &= \kappa\psi_x \\ \rho_2\lambda^2\psi - b\psi_{xx} + \kappa\psi + \kappa\varphi_x &= 0. \end{aligned}$$

de donde se tiene

$$\rho_1\lambda^2\varphi - \kappa\varphi_{xx} = \kappa\psi_x \quad (6.21)$$

$$\rho_2\lambda^2\psi_x - b\psi_{xxx} + \kappa\psi_x + \kappa\varphi_{xx} = 0. \quad (6.22)$$

Sustituyendo  $\psi_x$  en la ecuación (6.22) y reduciendo términos semejantes se obtiene la siguiente ecuación de cuarto orden.



$$bk\varphi_{xxxx} - [(k\rho_2 + b\rho_1)\lambda^2]\varphi_{xx} + (\rho_2\lambda^2 + k)\rho_1\lambda^2\varphi = 0, \quad (6.23)$$

En el caso de condiciones de Dirichlet-Neumann se obtiene las siguientes condiciones de frontera.

$$\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi_{xx}(0) = \varphi_{xx}(L) = 0. \quad (6.24)$$

De las ecuaciones (6.23) y (6.24), se concluye que existe una base ortonormal y completa de autovectores del operador  $\mathcal{A}_0$ , dados por

$$\varphi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\theta_j x)$$

donde  $\theta_j := (j\pi)/L$ . Sustituyendo  $\varphi$  por  $\varphi_j(x)$  en (6.23), se obtiene

$$(\rho_1\rho_2\lambda^4 + [(k\rho_2 + b\rho_1)\theta_j^2 + k\rho_1]\lambda^2 + bk\theta_j^4) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\theta_j x) = 0.$$

De esta forma se define el polinomio,

$$P(\lambda, \theta_j) \equiv \rho_1\rho_2\lambda^4 + [(k\rho_2 + b\rho_1)\theta_j^2 + k\rho_1]\lambda^2 + bk\theta_j^4.$$

Por lo tanto  $\lambda_j$  es un autovalor de  $\mathcal{A}_0$  si

$$P(\lambda, \theta_j) = 0.$$

esto es

$$\rho_1\rho_2\lambda^4 + [(k\rho_2 + b\rho_1)\theta_j^2 + k\rho_1]\lambda^2 + bk\theta_j^4 = 0.$$

Observe que esta es una ecuación bicuadrática y puede ser resuelta de la siguiente forma

$$\lambda^2 = \frac{-[(k\rho_2 + b\rho_1)\theta_j^2 + k\rho_1] \pm \sqrt{[(k\rho_2 + b\rho_1)\theta_j^2 + k\rho_1]^2 - 4\rho_1\rho_2bk\theta_j^4}}{2\rho_1\rho_2}$$

De donde sigue la demostración.

**Lema 6.1.5.** *Los autovalores del operador  $\mathcal{A}_0$  son simples y verifican*

$$\lambda_j \approx cj\sqrt{-1}, \quad \forall j \geq N.$$

**Demostración:** Cada autovalor de  $\lambda_j$  está asociado al autovector

$$\varphi_j(x) = \sin(\theta_j x),$$

por lo tanto todo autovalor es simple. Finalmente se mostrará la hipótesis 2 del Teorema de Renardy. De hecho, cada  $\lambda_j$  verifica

$$\lambda_j^2 = \frac{-[(k\rho_2 + b\rho_1)\theta_j^2 + k\rho_1] \pm \sqrt{[(k\rho_2 + b\rho_1)\theta_j^2 + k\rho_1]^2 - 4\rho_1\rho_2bk\theta_j^4}}{2\rho_1\rho_2}$$

recordando que

$$\theta_j := j\frac{\pi}{L}$$

se encuentra

$$\lambda_j^2 = j^2 \frac{-[(k\rho_2 + b\rho_1)\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{k\rho_1}{j^2}] \pm \sqrt{[(k\rho_2 + b\rho_1)\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{k\rho_1}{j^2}]^2 - 4\rho_1\rho_2bk\frac{\pi^4}{L^4}}}{2\rho_1\rho_2}$$

Tomando  $j \geq N$ , con  $N$  grande se obtiene

$$\lambda_j^2 \approx j^2 \frac{-[(k\rho_2 + b\rho_1)\frac{\pi^2}{L^2}] \pm \sqrt{[(k\rho_2 + b\rho_1)\frac{\pi^2}{L^2}]^2 - 4\rho_1\rho_2bk\frac{\pi^4}{L^4}}}{2\rho_1\rho_2}$$

De donde sigue que

$$\begin{aligned} \lambda_j^2 &\approx j^2 \frac{-[(k\rho_2 + b\rho_1)\frac{\pi^2}{L^2}] \pm \sqrt{[(k\rho_2 - b\rho_1)\frac{\pi^2}{L^2}]^2}}{2\rho_1\rho_2} \\ &\approx j^2 \frac{-[(k\rho_2 + b\rho_1)\frac{\pi^2}{L^2}] \pm [(k\rho_2 - b\rho_1)\frac{\pi^2}{L^2}]}{2\rho_1\rho_2} \\ &\approx -c^2 j^2. \end{aligned}$$

De donde sigue el resultado.

Finalmente estando en condiciones de mostrar el resultado principal de este trabajo, se tiene el siguiente teorema

**Teorema 6.1.2.** *El semigrupo asociado al sistema de Timoshenko, verifica la propiedad de la Estabilidad Lineal.*

Recordando la descomposición

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$$

Por los lemas anteriores se concluye  $\mathcal{B}$  es un operador continuo y  $\mathcal{A}_0$  es un operador normal cuyos autovalores son simples y aislados. Para verificar que la segunda hipótesis del Teorema de Renardy se cumple, tomando  $R = N + 1$ . Luego fuera de la bola  $B(0, R)$  todos los autovalores satisfacen

$$\lambda \approx cj\sqrt{-1}.$$

Por lo tanto, toda bola de radio  $R_0 = c/2$ , contiene a lo más un autovalor de  $\mathcal{A}_0$ . Luego todas las hipótesis del Teorema de Renardy se verifican, lo que significa que el semigrupo asociado al sistema de Timoshenko verifica la propiedad de Estabilidad Lineal.

# Capítulo 7

## Conclusiones y Recomendaciones

Demostrar que un semigrupo posea la propiedad de la estabilidad lineal es equivalente a caracterizar el tipo del semigrupo de una forma tal que sea posible su cálculo numérico. Este problema tiene muchas aplicaciones, sobre todo en el estudio del problema llamado de diseño óptimo o en inglés *optimal design*. Este problema consiste en encontrar la posición donde deben ser insertados los mecanismos disipativos para que la correspondiente tasa de decaimiento sea la mejor posible.

Una aplicación importante de este resultado para la ecuación de ondas, fue demostrar que la conjetura de la constante es falsa. La conjetura de la constante fue formulada de la siguiente forma:

*La mejor tasa que se puede obtener en la ecuación de ondas es cuando la ecuación es de coeficientes constantes*

P. Freitas [6] demostró que esta conjetura es falsa. Su método fue basado en la propiedad de estabilidad lineal probada para la ecuación de ondas. Esto nos abre las puertas para el estudio de la misma conjetura para otros modelos. Por ejemplo para nuestro caso.

*La mejor tasa de decaimiento del sistema de Timoshenko se obtiene cuando los coeficientes son constantes*

Este es un asunto que se desarrollará posteriormente.

Finalmente, se debe observar que el teorema de Renardy caracteriza la estabilidad lineal en operadores que son perturbaciones continuas de operadores normales, es válido esencialmente para sistemas de ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales. Queda en abierto el problema de extender este resultado para ecuaciones diferenciales de dimen-

siones mayores que uno.

En resumen, se ha encontrado una condición general que caracteriza el tipo del semigrupo como siendo igual a la cota superior del espectro, esto es, la propiedad de estabilidad lineal es válida. Esto permite inclusive calcular numéricamente el tipo del semigrupo, así como responder a preguntas de diseño óptimo y de la conjetura de la constante.

# Bibliografía

- [1] Alabau-Boussouira, F. **Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control.** NoDEA Nonlin. Diff. Eq. Appl. 14 (2007) 643 - 669.
- [2] Ammar Khodja, F.; Benabdallah, A.; Muñoz Rivera, J. and Racke, R. **Energy decay for Timoshenko systems of memory type.** Konstanzer Schriften Math. Inf., 131 (2000).
- [3] Bassam, M.; Mercier, D.; Nicaise, S. and Wehbe, A. **Indirect boundary stabilization of the Timoshenko system.** C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 379–384.
- [4] Borichev, A. and Tomilov, Y. **Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups.** Mathematische Annalen Vol. 347, (2), pages 455- 478, (2009).
- [5] Brézis, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** Springer New York Dordrecht Heidelberg London (2011).
- [6] Freitas, P. **Optimizing the rate of decay of solutions of the wave equation using generic algori counterexample to the constant damping conjecture.** SIAM Journal of Control and Optimization Vol. 37, (1), pages 376- 387, (1998).
- [7] Grobbelaar-Van Dalsen, M. **Uniform stability for the Timoshenko beam with tip load.** Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 361, (1), pages 392- 400, (2010)
- [8] Kim, J. U. and Renardy, M. **Boundary control of the Timoshenko beam.** SIAM J. Control Optim. 25 (1987) 1417–1429.

- [9] Liu, Z. and Zheng, S. **Semigroups associated with dissipative system.** II Research Notes Math. 398 Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, 1999.
- [10] Ma, Z.; Zhang, L. and Yang, X. **Exponential stability for a Timoshenko-type system with history.** J. Math. Anal. Appl. 380 (2011) 299–312.
- [11] Messaoudi, S. A. and Said-Houari, B. **Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history.** J. Math. Anal. Appl. 360 (2009) 459–475.
- [12] Messaoudi, S. A. and Mustafa, M. I. **On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation.** Math. Meth. Appl. Sci. 2009; 32:454–469.
- [13] Muñoz Rivera, J. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.** Textos Avanzados. LNCC, Petrópolis 1999
- [14] Muñoz Rivera J. **Estabilização de Semigrupos e Aplicações.** Textos avanzados. 233 páginas. LNCC, Petrópolis 2007.
- [15] Muñoz Rivera, J. and Racke, R. **Global stability for damped Timoshenko systems, Discrete and continuous Dynamical Systems.** Vol. 9, (6), pages 1625-1639, (2003).
- [16] Muñoz Rivera, J. and Fernandez Sare, H. **Stability of Timoshenko systems with past history.** J. Math. Anal. Appl. 339 (2008) 482–502.
- [17] Muñoz Rivera, J. and Racke, R. **Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems - global existence and exponential stability.** J. Math. Anal. Appl. 276 (2002), 248–278.
- [18] Messaoudi, S. A. and Said-Houari, B. **Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III.** J. Math. Anal. Appl. 348 (2008) 298–307.
- [19] Mustafa, M. I. and Messaoudi, S. A. **General energy decay rates for a weakly damped Timoshenko system.** Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 16, No. 2, (2010) 211–226.

- [20] Neves, A. F.; Ribeiro, H. de S. and Lopes, O. **On the spectrum of evolution operators generated by hyperbolic systems.** *J. Functional Anal.*, 67 (1986), 320–344.
- [21] Pazy, A. **Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations.** Springer-Verlag. New York 1983.
- [22] Prüss, J. **On the spectrum of  $C_0$  semigroups.** *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 284, pages 847-857, (1984).
- [23] Raposo C. A.; Ferreira, J.; Santos, M. L. N. and Castro, N. O. **Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings.** *Applied Mathematics Letters* 18 (2005) 535–541.
- [24] Renardy, M. **On linear stability of hyperbolic PDEs and viscoelastic flows.** *Z. Angew Math. Phys.* Vol. 45, (1), pages 854- 865, (1994).
- [25] Renardy, M. **On the type of certain  $C_0$ -semigroups.** *Communications in Partial Differential Equations* Vol. 18, (7-8), pages 1299-1307, (1993).
- [26] Slemrod, M. **Asymptotic behavior of  $C_0$  - semigroups as determined by the spectrum of the generator.** *Indiana Univ. Math. J.*25 (1976), pages 783-792.
- [27] Soriano, J. A. and Wenden, Charles and Schulz, R. **Asymptotic stability for Bresse systems.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 412, (1), pages 369- 380, (2014). doi:10.1016/j.jmaa.2013.10.019
- [28] Soufyane A. and Wehbe, A. **Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping.** *Electron. J. Diff. Eq.*, Vol. 2003, No. 29, pp. 1-14, 2003.
- [29] Soufyane, A. **Stabilisation de la poutre de Timoshenko.** *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 328 (1999), 731–734.
- [30] Zietsman, L. ; Van Rensburg, N. F. J. and Van Der Merwe, A. J. **A Timoshenko beam with tip body and boundary damping,** *Wave Motion* 39 (2004) 199 - 211.