UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Sobre el álgebra geométrica del espacio-tiempo de Minkowski

TESIS

Para optar el título profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Victor Johnny Papuico Bernardo

Lima – Perú

2012

SOBRE EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DEL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

Victor Johnny Papuico Bernardo

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Mg. Tomás Núñez Lay
Presidente del Jurado

Dr. José Luyo Sánchez
Miembro del Jurado

Dr. Edgar Vera Saravia
Miembro Asesor

Lima – Perú

Noviembre – 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

PAPUICO BERNARDO, VICTOR JOHNNY

Sobre el álgebra geométrica del espacio-tiempo de Minkowski, (Lima) 2012.
viii, 73 p., 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2012)
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,
Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática
I. UNMSM-Facultad de Ciencias Matemáticas
II. Sobre el álgebra geométrica del espacio-tiempo de Minkowski (Álgebra Geométrica).

Agradecimientos

Este presente trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo y estímulo de mi profesor, asesor y amigo, Doctor Edgar Vera Saravia, bajo cuya supervisión y sugerencia escogí este hermoso tema.

También me gustaría agradecerle a los miembros del jurado de tesis, Mg. Tomás Nuñez y Dr. José Luyo, quienes me apoyaron con la revisión y sugerencias, y a través de sus dudas y comentarios me motivaron a seguir profundizando en el estudio del Álgebra Geométrica.

Agradecer a mis compañeros, amigos, colegas y ahora compañeros de trabajo por haber compartido este tiempo entre notas, libros y exámenes. Son recuerdos que se llevan siempre. Agradecer a los docentes de la facultad de Matemática, por todo su conocimiento y experiencia compartida, en especial a mi profesor y amigo Dr. Rolando Mosquera, a quien debo el interés por la Geometría Diferencial.

No puedo dejar de agradecer a mi familia, en especial a mis padres, en cuyo estímulo constante y amor he confiado a lo largo de mis años en la universidad. A mi esposa por todo su amor y comprensión. A mi hija Briseida, quien es la luz de mi vida y el motivo para ser mejor cada día.

Es a ellos a quienes dedico este trabajo.

Resumen

Sobre el Álgebra geométrica del espacio-tiempo

de Minkowski

PAPUICO BERNARDO VICTOR JOHNNY

DICIEMBRE-2012

Orientador: Dr. Edgar Vera Saravia

Título obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo presentamos $AG(4,1)$, el álgebra geométrica del espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{R}^{4,1}$, adaptando el caso euclidiano tridimensional. En este contexto $AG(4,1)$ contiene una subálgebra, $AG(4,1)^+$, isomorfa a $AG(3)$, y esto permite obtener varios resultados interesantes.

PALABRAS CLAVES: PRODUCTO GEOMÉTRICO

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

SUBÁLGEBRA PAR

Abstract

On the geometric algebra of Minkowski

space-time

PAPUICO BERNARDO VICTOR JOHNNY

DECEMBER-2012

Advisor: Dr. Edgar Vera Saravia

Degree: Licentiate in Mathematic

This work introduce $AG(4,1)$, the geometric algebra of Minkowski space-time $\mathbb{R}^{4,1}$, adapting the euclidean three dimensional case. In this context $AG(4,1)$ contain a subalgebra, $AG(4,1)^{+}$, isomorphic to $AG(3)$, and this permit to obtain many interesting resoults.

KEY WORDS: GEOMETRIC PRODUCT
GEOMETRIC ALGEBRA
MINKOWSKI SPACE-TIME
EVEN SUBÁLGEBRA

Índice general

Introducción

El álgebra geométrica es un modelo matemático que permite el estudio de la Mecánica relativista y de la Mecánica cuántica. Sus orígenes se remontan a la fusión, que en 1878 realizó Clifford, de los cuaterniones presentados, en 1844, por Hamilton y del álgebra de extensión de Grassmann en el mismo año [1, 3]. En relación a la Mecánica relativística, debemos mencionar que Minkowski fue profesor de Einstein. En 1907 colaboró con la sustentación matemática de su Teoría de la Relatividad dándole una forma geométrica definitiva.

En el presente trabajo, ofrecemos una introducción al álgebra geométrica asociada al espacio–tiempo de Minkowski y para tal fin:

En en Capítulo I, damos algunas propiedades de los espacios de Minkowski; finalmente nos enfocamos en las transformaciones de Lorentz, las cuales preservan las isometrías de los espacios de Minkowski[3].

En el Capítulo II, damos más detalles sobre los espacios de Minkowski; mostramos tres ejemplos concretos prestando mucha atención al caso $\mathbb{R}^{4,1}$, necesario para nuestro trabajo[2].

El Capítulo III, lo iniciamos definiendo el álgebra geométrica del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, denotada por $AG(3)$. Debemos mencionar a modo de comentario que $AG(3)$ ofrece un modelo matemático alternativo para el estudio de la mecánica cuántica usando la teoría de Pauli[6].

En el Capítulo IV, abordamos el tema central del presente trabajo: El álgebra geométrica del espacio seudoeclidiana de Minkowski $AG(4,1)$; su relación con $AG(3)$. Aquí debemos de comentar que $AG(4,1)$ resulta ser el ambiente natural para desarrollar la teoría de Dirac[4, 5, 7, 8].

En el Capítulo V, presentamos el concepto de espacio seudoeclidiano, que tiene al espacio canónico

$\mathbb{R}^{n,q}$ y a los espacios de Minkowski como casos particulares[1, 9].

En el capítulo VI, enfocamos nuestra atención en la construcción del álgebra de extensión de Grassmann, tomando como caso particular el espacio $\mathbb{R}^3$. Como consecuencia se obtiene de forma alternativa $AG(3)$.

Finalmente en el capítulo VII, se exponen comentarios y unas breves notas acerca del contexto histórico en el que se desarrolla las álgebras geométricas, el álgebra de extensión de Grassmann. Además de una breve discusión del porque el álgebra presentada por Gibbs no resultó ser un modelo matemático apropiado.

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Espacios de Minkowski

1.1. Generalidades

Definición 1.1. Dados $n \in \mathbb{N}$, $q \in \{\, 0, 1, 2, \ldots, n \,\}$ e $i, j \in \{\, 1, 2, \ldots, n \,\}$

$$\delta_{i,j}^{n,q} = \begin{cases} \ \ 1 & \text{, si} \quad 1 \leqslant i = j \leqslant n - q \\ \ \ 0 & \text{, si} \quad i \neq j \\ -1 & \text{, si} \quad n - q + 1 \leqslant i = j \leqslant n \end{cases}$$

se denomina $(n, q)-$delta de Kronecker.

Definición 1.2. El espacio métrico $\mathbb{R}^n$, provisto de la métrica euclidiana, cuya base canónica $\{\, e_1, e_2, \ldots, e_{n-q}, e_{n-q+1}, \ldots, e_{n-1}, e_n \,\}$ satisface la condición de Dirac

$$e_i \cdot e_j = \delta_{i,j}^{n,q}$$

se denomina espacio seudoeuclidiano canónico de dimensión n e índice q, denotada por $\mathbb{R}^{n,q}$ y el conjunto $\{\, e_1, e_2, \ldots, e_n \,\}$ se denomina $(n, q)-$base de $\mathbb{R}^{n,q}$.

Definición 1.3. Sea el espacio seudoeuclidiano canónico $\mathbb{R}^{n,q}$

- si $q = 0$ entonces $\mathbb{R}^{n,0} = \mathbb{R}^n$ se denomina **espacio euclidiano**.

- si $q \neq 0$ entonces $\mathbb{R}^{n,q}$ se denomina espacio propiamente seudoeuclidiano. Dentro de los espacios propiamente seudoeuclidianos se distinguen los siguientes:
  - si $q = n$, $\mathbb{R}^{n,n}$ se denomina espacio antieuclidiano.
  - si $q = 1$, $\mathbb{R}^{n,1}$ se denomina espacio de Minkowski.

Notación 1.1. La matriz asociada a la $(n, q)-$base de $\mathbb{R}^{n,q}$, denotada

$$I^{n,q} = (\delta^{n,q}_{i,j})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Cuya diagonal está escrita en el orden indicado y donde la cantidad de signos negativos es igual al índice de $\mathbb{R}^{n,q}$, es una forma alternativa de referirse a la signatura de $\mathbb{R}^{n,q}$ denotada por $(+ + \dots + + - - \dots - -)$, donde la cantidad de signos negativos es igual a q, la cual hace referencia a la $(n, q)-$base de $\mathbb{R}^{n,q}$.

1.2. Propiedades de los espacios de Minkowski

Definición 1.4. Los elementos de $\mathbb{R}^{n,1}$ se denominan eventos o sucesos. Una secuencia continua de puntos se denomina línea del universo.

Definición 1.5. Un evento $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ se expresa

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

Los x_i se denominan funciones coordenadas. Si $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ entonces x_i se denomina $i-$ésima función coordenada espacial y x_n se denomina coordenada temporal.

Observación 1.1.

- Sean dos vectores $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i$ pertenecientes a $\mathbb{R}^{n,1}$. El producto escalar se define

  $$v \cdot w = \left(\sum_{i=1}^{n-1} v_i w_i \right) - v_n w_n$$

  El cual se denomina producto escalar de Lorentz.

- El módulo de $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \in \mathbb{R}^{n,1}$ se define

  $$\|v\| = \sqrt{|v \cdot v|}$$

- La distancia entre dos eventos $a, b \in \mathbb{R}^{n,1}$, denotada por $d(a,b)$, se define

  $$d(a,b) = \|b - a\|$$

Definición 1.6. Sea $v \in \mathbb{R}^{n,1}$

- v se denomina vector temporal, si $v \cdot v < 0$.
- v se denomina vector espacial, si $v \cdot v > 0$.
- v se denomina vector luz, si $v \cdot v = 0$.

La existencia de vectores luz, distintos del vector nulo, está garantizada por la elección de la forma bilineal para el producto escalar. Por ejemplo, si $v = e_1 + e_n$

$$v \cdot v = (e_1 + e_n) \cdot (e_1 + e_n) = e_1^2 + e_n^2 = 1 + (-1) = 0$$

Definición 1.7. Sea x^0 es un punto arbitrario fijo de $\mathbb{R}^{n,1}$

$$\mathcal{C}_{x^0} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \,/\, d(x, x^0) = 0 \right\}$$

se denomina cono isotrópico o cono de luz de vértice x^0.

Intuitivamente, $\mathcal{C}_{x^0}$ consiste de todos los eventos para los cuales el vector desplazamiento $v = x - x^0$ es un vector luz, a esto se debe el nombre isotrópico. La recta que pasa por x^0 en la dirección de v se denomina rayo de luz. La recta que pasa por x^0 en la dirección de un vector temporal se denomina rayo temporal o recta temporal.

Definición 1.8. El interior del cono de luz $\mathcal{C}_{x^0} = \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \,/\, d(x, x^0) = 0 \}$, denotada por $Int\,\mathcal{C}_{x^0}$, se define

$$Int\,\mathcal{C}_{x^0} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \,/\, d(x, x^0) < 0 \right\}$$

El interior de $\mathcal{C}$ se divide en dos conjuntos disjuntos, que se denominan huecos

$$Int\,\mathcal{C}_{x^0} = \left\{ x \in Int\,\mathcal{C}_{x^0} \,/\, x_n > x_n^0 \right\} \cup \left\{ x \in Int\,\mathcal{C}_{x^0} \,/\, x_n < x_n^0 \right\}$$

Proposición 1.1. $\{ x \in Int\,\mathcal{C}_{x^0} \,/\, x_n > x_n^0 \}$ y $\{ x \in Int\,\mathcal{C}_{x^0} \,/\, x_n < x_n^0 \}$ son conjuntos convexos.

Proposición 1.2. El conjunto $\mathcal{T} = \{ v \in \mathbb{R}^{n,1} \,/\, v \cdot v < 0 \}$ de todos los **vectores temporales** forma un cono convexo con vértice en el origen de coordenadas. La frontera $\partial\mathcal{T}$, conformada por los vectores luz, es un cono no convexo.

$\mathbb{R}^{n,1} - \overline{\mathcal{C}_{x^0}}$ se denomina región presente(donde $\overline{\mathcal{C}_{x^0}}$ denota la cerradura del conjunto) y está conformada por los **vectores espaciales**.

Sea $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \in \partial\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2\right) - v_n^2 &= 0 \\ \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2} &= v_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

(1.1) define el cono de luz, del cual se obtienen los conjuntos

$$\mathcal{C}_{x^0\mathcal{F}} = \left\{ v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n,1} \,/\, \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2} = v_n \right\} \tag{1.2}$$

$$\mathcal{C}_{x^0\mathcal{P}} = \left\{ v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n,1} \,/\, -\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2} = v_n \right\} \tag{1.3}$$

$$\mathcal{C}_{x^0\mathcal{TF}} = \left\{ v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n,1} \,/\, \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2} < v_n \right\} \tag{1.4}$$

$$\mathcal{C}_{x^0\mathcal{TP}} = \left\{ v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n,1} \,/\, -\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2} > v_n \right\} \tag{1.5}$$

(1.2) y (1.3) se denominan cono de luz futuro y cono de luz pasado respectivamente; (1.4) y (1.5) se denominan cono temporal futuro y cono temporal pasado respectivamente.

Proposición 1.3 (Desigualdad de Schwarz invertida)**.** Sean $v, w \in \mathcal{T}$ se tiene

$$|v \cdot w| \geqslant \|v\| \, \|w\|$$

La igualdad se cumple si y solo si son paralelos.

Proposición 1.4 (Desigualdad de triangular invertida)**.** Sean $v, w \in \mathcal{T}$ se tiene

$$\|v + w\| \geqslant \|v\| + \|w\|$$

La igualdad se cumple si y solo si son paralelos.

Proposición 1.5 (Desigualdad de Schwarz)**.** Sean v y w vectores pertencientes a la región presente

$$|v \cdot w| \leqslant \|v\| \, \|w\|$$

La igualdad se cumple si y solo si son paralelos.

Proposición 1.6 (Desigualdad de triangular invertida)**.** Sean v y w vectores pertencientes a la región presente

$$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$$

La igualdad se cumple si y solo si son paralelos.

1.3. Grupo de Lorentz

Definición 1.9. Una aplicación, que lleva rectas en rectas, se denomina colineal; si además es una biyección se denomina transformación afín.

Proposición 1.7. Las funciones coordenadas $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de una aplicación colineal $g = (g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son lineales; es decir, son de la forma

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j + b_i \tag{1.6}$$

Donde los $b_i \in \mathbb{R}$ y $Q = (q_{ij}) \in GL(n)$.

Demostración. Véase [2]. □

Corolario 1.1. Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es colineal entonces g es lineal.

Demostración. Véase [2]. $\square$

Proposición 1.8. $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n} = \{\, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,/\, f$ es una transformación afín $\}$ es un grupo, denominado grupo afín de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.10. Una aplicación $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se denomina isometría, si preserva la distancia entre puntos; es decir

$$\|x - y\| = \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \;\text{ , para todo } x, y \in \mathbb{R}^n$$

En otras palabras conserva la forma métrica de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.11. Sea g una transformación afín en $\mathbb{R}^{n,1}$. g se denomina movimiento, si g es una isometría en $\mathbb{R}^{n,1}$.

Proposición 1.9. El producto escalar es invariante bajo movimientos.

Demostración. Sean g un movimento en $\mathbb{R}^{n,1}$ y dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^{n,1}$ cualesquiera

$$\|u\| = \|g(u)\| \quad , \quad \|v\| = \|g(v)\| \qquad \text{y} \qquad \|u - v\| = \|g(u) - g(v)\|$$

$$\begin{aligned} (u - v)^2 &= (g(u) - g(v))^2 \\ \text{entonces } \; u \cdot v &= g(u) \cdot g(v) \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.1. Todo movimiento en $\mathbb{R}^{n,1}$ es una transformación lineal.

Demostración. Sean u, v y w vectores en $\mathbb{R}^{n,1}$

$$\begin{aligned}
g(w) \cdot [g(u) + g(v)] &= w \cdot (u + v) \\
&= w \cdot u + w \cdot v \\
&= g(w) \cdot g(u) + g(w) \cdot g(v) \\
&= g(w) \cdot [g(u) + g(v)] \\
g(w) \cdot [g(u + v) - g(u) - g(v)] &= 0 \\
g(u + v) &= g(u) + g(v)
\end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $(\alpha u) \cdot v = g(\alpha u) \cdot g(v)$ y $\alpha(u \cdot v) = \alpha\,[g(u) \cdot g(v)] = [\alpha g(u)] \cdot g(v)$

$$\begin{aligned}
g(\alpha u) \cdot g(v) &= [\alpha g(u)] \cdot g(v) \\
g(\alpha u) &= \alpha g(u)
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 1.2. Todo movimiento lleva una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n,1}$ en una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n,1}$.

Corolario 1.3. Sea g un movimiento en $\mathbb{R}^{n,1}$ y $x^0 \in \mathbb{R}^{n,1}$. Si $g(x^0) = x^0$ entonces $g\left(\mathcal{C}_{x^0}\right) \subseteq \mathcal{C}_{x^0}$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{C}_{x^0}$

$$\begin{aligned}
d(g(x), g(x^0)) &= d(x, x^0) \\
&= 0 \\
d(g(x), x^0) &= 0 \\
g(x) &\in \mathcal{C}_{x^0}
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.10. Sea una transformación afín

$$
\begin{aligned}
g : \mathbb{R}^{n,1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n,1} \\
x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\rightarrow g(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
y_i &= \sum_{k=1}^{n} q_{ik} x_k + c_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

g es un movimiento si y solo si $Q = (q_{ik}) \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ satisface $Q^T I^{n,1} Q = I^{n,1}$.

Demostración. Véase [2]. □

Proposición 1.11. El conjunto $\mathbf{M}_{\mathbb{R}^{n,1}} = \{ g : \mathbb{R}^{n,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n,1} \, / \, g \text{ es un movimiento} \}$ es un grupo, cuyo producto está dado por la composición de movimientos. $\mathbf{M}_{\mathbb{R}^{n,1}}$ se denomina grupo de movimientos de $\mathbb{R}^{n,1}$.

Proposición 1.12. Denotemos por $\mathbf{A}_{\mathbb{R}^{n,1}}$ al grupo de todas las transformaciones afines de $\mathbb{R}^{n,1}$, entonces $\mathbf{M}_{\mathbb{R}^{n,1}}$ es un subgrupo de $\mathbf{A}_{\mathbb{R}^{n,1}}$.

El movimiento g de la Proposición 2.10 se denomina transformación general no homogénea de Lorentz y la matriz Q asociada al movimiento se denomina matriz de Lorentz.

Proposición 1.13. Denotemos por $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n,1}}$ al conjunto de todas las transformaciones generales de Lorentz en $\mathbb{R}^{n,1}$, entonces $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n,1}}$ es un grupo llamado Grupo general de Lorentz.

Notación 1.2. Denotemos por $\mathcal{L}^{n \times n} = \left\{ Q \in GL(n) \, / \, Q^T I^{n,1} Q = I^{n,1} \right\}$ el conjunto de todas las matrices asociadas a transformaciones de Lorentz.

Proposición 1.14. $\mathcal{L}^{n \times n}$ es un subgrupo de $GL(n) \subseteq M^{n \times n}(\mathbb{R})$.

Proposición 1.15. $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n,1}} \cong \mathcal{L}^{n \times n}$

Definición 1.12. Sea g un movimiento en $\mathbb{R}^{n,1}$, el cual mantiene invariante cada uno de los huecos de un cono de luz, entonces g se denomina transformación de Lorentz.

Proposición 1.16. El conjunto de todas las transformaciones de Lorentz en $\mathbb{R}^{n,1}$, denotada por $\mathbf{L}_{\mathbb{R}^{n,1}}$ es un grupo llamado Grupo de Lorentz de $\mathbb{R}^{n,1}$.

1.3.1. Subgrupos del Grupo de Lorentz $\mathcal{L}^{4\times 4}$

Observación 1.2. Sea $Q = (q_{ij}) \in \mathcal{L}^{4\times 4}$

1. De $Q^T I^{4,1} Q = I^{4,1}$ se tiene

$$\begin{aligned} q_{14}^2 + q_{24}^2 + q_{34}^2 - q_{44}^2 &= -1 \\ q_{14}^2 + q_{24}^2 + q_{34}^2 + 1 &= q_{44}^2 \geqslant 1 \\ q_{44} \geqslant 1 \quad &\text{o} \quad q_{44} \leqslant -1 \end{aligned}$$

2. $Q^T = (q_{ji}) \in \mathcal{L}^{4\times 4}$, pues por lo anterior

$$q_{41}^2 + q_{42}^2 + q_{43}^2 - q_{44}^2 = -1$$

3. $det(Q) = 1$ o $det(Q) = -1$

4. $Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} & -q_{41} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} & -q_{42} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & -q_{43} \\ -q_{14} & -q_{24} & -q_{34} & q_{44} \end{pmatrix}$

Esto implica que $\mathcal{L}^{4\times 4}$ sea no conexo, conformada por cuatro componentes desconectadas entre sí, caracterizadas por los signos del $det(Q)$ y q_{11}.

Proposición 1.17. Los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u &= \left\{ Q \in \mathcal{L}^{4\times 4} \,/\, det(Q) = 1 \right\} \\ \mathcal{L}_t &= \left\{ Q = (q_{ij}) \in \mathcal{L}^{4\times 4} \,/\, q_{44} \geqslant 1 \right\} \\ \mathcal{L}_0 &= \left\{ Q \in \mathcal{L}^{4\times 4} \,/\, det(Q) = 1 \ , \ q_{44} > 0 \right\} \\ \mathcal{K}_0 &= \left\{ I^{4,3} \, , \, -I^{4,3} \, , \, -\left(I^{4,3}\right)^2 \, , \, I \right\} \end{aligned}$$

son grupos. Donde $I \in M^{4\times 4}(\mathbb{R})$ es la matriz identidad. $\mathcal{L}_u$ se denomina Grupo de Lorentz Unimodular, $\mathcal{L}_t$ Grupo de Loretz Ortócrono, $\mathcal{L}_0$ Grupo de Lorentz Propio y $\mathcal{K}_0$ Subgrupo Finito de Lorentz.

Demostración. Es evidente que $\mathcal{L}_u$ y $\mathcal{K}_0$ son grupos. Veamos para el caso de $\mathcal{L}_t$, es claro que $I \in \mathcal{L}_t$. Sean $Q, R \in \mathcal{L}_t$ entonces $q_{44} \geqslant 1$ y $r_{44} \geqslant 1$. Denotemos $S = QR = (s_{ij}) \in \mathcal{L}_t$. Por demostrar que $s \in \mathcal{L}_t$; es decir $s_{44} \geqslant 1$ o en forma equivalente $\sum_{i=1}^{4} q_{4i} r_{i4} \geqslant 1$.

$$(q_{41}r_{14} + q_{42}r_{24} + q_{43}r_{34})^2 \leqslant \left(q_{41}^2 + q_{42}^2 + q_{43}^2\right)\left(r_{14}^2 + r_{24}^2 + r_{34}^2\right) = (q_{44}^2 - 1)(r_{44}^2 - 1)$$

entonces

$$\begin{aligned} (q_{41}r_{14} + q_{42}r_{24} + q_{43}r_{34})^2 &< q_{44}^2 r_{44}^2 \\ |q_{41}r_{14} + q_{42}r_{24} + q_{43}r_{34}| &< q_{44}r_{44} \\ -q_{41}r_{14} - q_{42}r_{24} - q_{43}r_{34} &< q_{44}r_{44} \\ 0 < q_{41}r_{14} + q_{42}r_{24} + q_{43}r_{34} +_{44} r_{44} &= s_{44} \end{aligned}$$

Como Q y R son matrices de Lorentz, S también lo és y por tanto $s_{44} \geqslant 1$ o $s_{44} \leqslant -1$ y de la última igualdad se tiene $s_{44} \geqslant 1$.
Sea $Q \in \mathcal{L}_t$, hay que probar que para $Q^{-1} = (r_{ij})$ se cumple que $r_{44} \geqslant 1$, lo cual resulta de la última observación. □

El nombre ortócrono de $\mathcal{L}_t$ proviene del hecho que para un evento $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{4,1}$, x_4 representa la coordenada temporal y por tanto la última componente de los vectores es la componente en la dirección del eje temporal. Las transformaciones ortócronas son aquellas que llevan vectores temporales en vectores temporales y además conservan la orientación de estos; como veremos en el siguiente capítulo la orientación de un vector temporal está dada por el signo de su coordenada temporal; es decir, una transformación ortócrona preserva el signo de la coordenada temporal de un vector temporal.

$\mathcal{L}_t \subset \mathcal{L}_u$ y además $\mathcal{L}_u$ es no conexo al igual que $\mathcal{L}_t$, pues contiene transformaciones con determinante 1 o -1. Se puede demostrar que $\mathcal{K}_0$ es conexo y más específicamente $\mathcal{K}_0$ está constituido por toda la componente conexa del grupo de Lorentz que contiene a la matriz identidad (Ver, Hermann, *Lectures on mathematical Physics*, vol. II, Benjamin, Reading, 1972).

$\mathcal{L}_t$ es el grupo más importante de los subgrupos de Lorentz. Su importancia física radica en su conexidad y conservación de la orientación de los vectores temporales (es ortócrono).

Capítulo 2

Espacios de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ y $\mathbb{R}^{4,1}$

2.1. Espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$

Veamos el caso canónico; el cono de luz con vértice en el origen de coordenadas

$$\mathcal{C}_{(0,0)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2,1} \,/\, d\,(x,(0,0)) = 0 \right\}$$

del cual se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{(0,0)} &= \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^{2,1} \,/\, x_1 = x_2 \right\} \cup \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^{2,1} \,/\, x_1 = -x_2 \right\} \\
\mathcal{C}_{(0,0)_{\mathcal{TF}}} &= \left\{ x = (x_1,x_2) \in Int\,\mathcal{C}_{(0,0)} \,/\, x_2 > 0 \right\} \\
\mathcal{C}_{(0,0)_{\mathcal{TP}}} &= \left\{ x = (x_1,x_2) \in Int\,\mathcal{C}_{(0,0)} \,/\, x_2 < 0 \right\}
\end{aligned}$$

Observación 2.1.

1. Los vectores espaciales pertenecen a una hipérbola al igual que los vectores temporales, pues si $v = v_1 e_1 + v_2 e_1 \in \mathbb{R}^{2,1}$ es un vector espacial entonces

$$v_1^2 - v_2^2 = r^2 \;\; (r \in \mathbb{R} - \{0\})$$

lo cual nos lleva

$$\left(\frac{v_1}{r}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{r}\right)^2 = 1$$

y si $v = v_1e_1 + v_2e_1 \in \mathbb{R}^{2,1}$ es un vector temporal, entonces

$$v_1^2 - v_2^2 = -r^2 \ (r \in \mathbb{R} - \{0\})$$

de donde $\left(\frac{v_2}{r}\right)^2 - \left(\frac{v_1}{r}\right)^2 = 1.$

2. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^{2,1}$ y $p \in \mathcal{C}_{x_0}$ entonces el vector $\overrightarrow{x_0p} \in \mathcal{C}_{x_0\mathcal{P}}$ (o $\mathcal{C}_{x_0\mathcal{F}}$).

Para más detalles ver Figura 2.1.

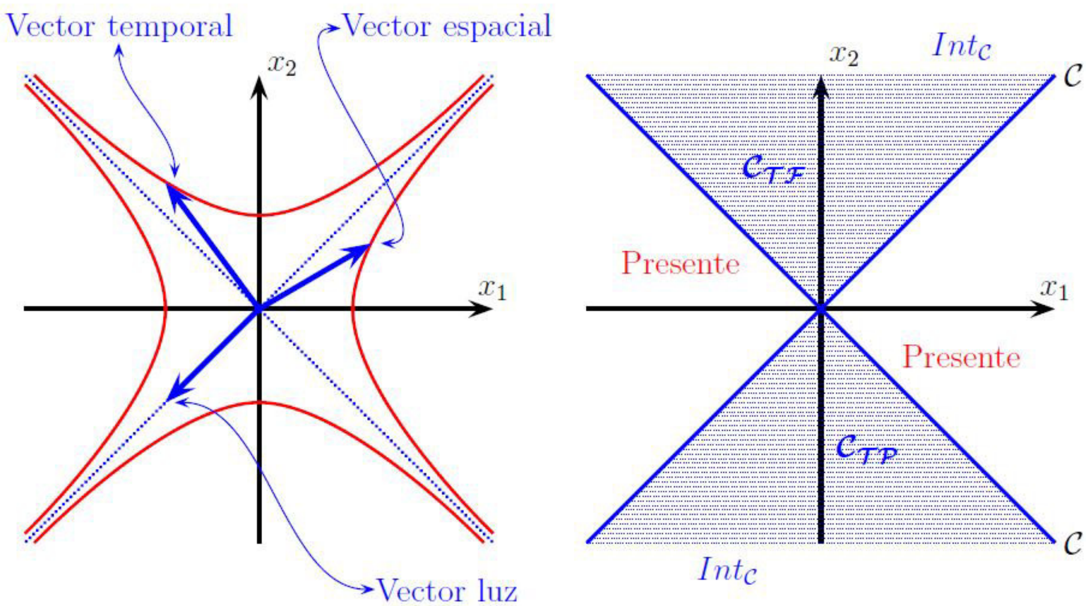

Figura 2.1: Espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$

2.2. Espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$

Ver Figura 2.2.

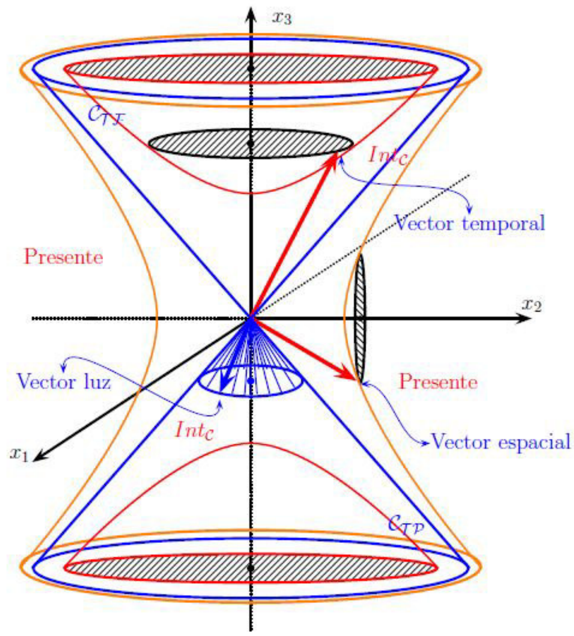

Figura 2.2: Espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$

2.3. Espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{4,1}$

El espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{4,1}$ se denomina en el ambiente físico espacio–tiempo de Minkowski. Sea $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ un evento en $\mathbb{R}^{4,1}$, x_i se denomina funciones coordenadas relativas a la base e_i para $i = 1, 2, 3, 4$. Nos referiremos a e_1, e_2 y e_3 como las direcciones espaciales unitarias, las cuales dirigen tres ejes denominados espaciales y a e_4 como dirección temporal unitaria la cual dirige un cuarto eje denominado temporal, así nos referiremos a x_4 como función coordenada temporal y a las restantes como funciones coordenadas espaciales.

Definición 2.1. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^{4,1}$, orientar temporalmente $\mathbb{R}^{4,1}$ es elegir uno de los conos temporales de $\mathcal{C}_{x_0}$.

Definición 2.2. Si $v \in \mathbb{R}^{4,1}$ es un vector temporal o luz, se denomina causal; es decir, v es causal, si $v^2 \leqslant 0$.

Teorema 2.1. Sean $v = \sum_{k=1}^{4} v_k e_k$ un vector temporal y $w = \sum_{k=1}^{4} w_k e_k$ un vector causal no nulo, en $\mathbb{R}^{4,1}$, entonces $v_4 w_4 > 0$ si y solo si $v \cdot w < 0$.

Demostración. Por hipótesis

$$
\begin{aligned}
v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 < 0 \ &\Rightarrow \ v_4^2 > v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\
w^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - w_4^2 \leqslant 0 \ &\Rightarrow \ w_4^2 \geqslant w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \\
v_4^2 w_4^2 \ &> \ \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)\left(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\right) \\
v_4^2 w_4^2 \ &> \ \left(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3\right)^2 \\
|v_4 w_4| \ &> \ |v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3|
\end{aligned}
$$

Si $v_4 w_4 > 0$

$$
\begin{aligned}
v_4 w_4 = |v_4 w_4| \ &> \ |v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3| > v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \\
0 \ &> \ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 - v_4 w_4
\end{aligned}
$$

Por tanto $v \cdot w < 0$.

Si $v_4 w_4 < 0$

$$
\begin{aligned}
-v_4 w_4 = |v_4 w_4| \ &> \ |v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3| > -\left(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3\right) \\
v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 - v_4 w_4 \ &> \ 0
\end{aligned}
$$

entonces $v \cdot w > 0$. En conclusión, $v_4 w_4 > 0$ si y solo si $v \cdot w < 0$. □

Corolario 2.1. Sean v un vector temporal en $\mathbb{R}^{4,1} - \{\theta\}$ y $v^{\perp} = \{\, w \in \mathbb{R}^{4,1} \,/\, v \cdot w = 0 \,\}$. Si $w \in v^{\perp}$ entonces w es espacial.

Demostración. Sea $w \in v^{\perp}$ entonces $v \cdot w = 0$, usando la recíproca del teorema anterior, w no es causal, por tanto w es espacial. □

Teorema 2.2. Sea $v = \sum_{k=1}^{4} v_i e_i$ un vector temporal en $\mathbb{R}^{4,1} - \{\theta\}$. Existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{4,1}$, tal que $v \in \mathcal{B}$.

Demostración. Como v es temporal $v^2 < 0$. El vector $\hat{v} = \dfrac{v}{\|v\|}$ satisface $\hat{v}^2 = -1 < 0$. Si $u = \sum_{k=1}^{4} u_i e_i \in \mathbb{R}^{4,1} - \{\theta\}$ es un vector ortogonal a $\hat{v}$, entonces

$$\hat{v} \cdot u = \hat{v}_1 u_1 + \hat{v}_2 u_2 + \hat{v}_3 u_3 - \hat{v}_4 u_4 = 0$$

plantearemos un sistema de ecuaciones, donde las variables a calcular serán las coordenadas de u

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 & -\hat{v}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como $v \neq \theta$, el rango de la matriz del sistema es 1, por tanto las soluciones del sistema forman un subespacio vectorial de dimensión 3 y podemos elegir una solución no nula $u = (0, 0, \hat{v}_4, \hat{v}_3)$. De manera análoga, si $p = \sum_{k=1}^{4} p_i e_i \in \mathbb{R}^{4,1} - \{\theta\}$ es un vector ortogonal a $\hat{v}$ y a u, es decir, $p \cdot \hat{v} = 0$ y $p \cdot u = 0$ entonces calcular las coordenadas de p implica resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 & -\hat{v}_4 \\ 0 & 0 & \hat{v}_4 & -\hat{v}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

las soluciones del sistema forman un subespacio vectorial de dimensión 2, así podemos elegir la solución $p = (0, \hat{v}_4^2 - \hat{v}_3^2\,,\ \hat{v}_2\hat{v}_3\,,\ \hat{v}_2\hat{v}_4)$. Finalmente, se debe de hallar un tercer vector w que satisfaga

$\hat{v} \cdot w = 0$, $u \cdot w = 0$ y $p \cdot w = 0$, lo cual implica resolver el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 & -\hat{v}_4 \\ 0 & 0 & \hat{v}_4 & -\hat{v}_3 \\ 0 & \hat{v}_4^2 - \hat{v}_3^2 & \hat{v}_2\hat{v}_3 & -\hat{v}_2\hat{v}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

las soluciones del sistema forman un subespacio vectorial de dimensión 1, una solución no nula es $w = (-\hat{v}_2^2 - \hat{v}_3^2 + \hat{v}_4^2\,,\ \hat{v}_2\hat{v}_1\,,\ \hat{v}_3\hat{v}_1\,,\ \hat{v}_4\hat{v}_1)$. El conjunto $\{\, u, p, w, \hat{v}\,\}$ está formado por vectores linealmente independientes ortogonales dos a dos, además por el corolario anterior u, p y w son vectores espaciales. Así el conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \dfrac{u}{\|u\|}\,, \dfrac{p}{\|p\|}\,, \dfrac{w}{\|w\|}\,, \dfrac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|} \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{4,1}$. $\square$

Proposición 2.1. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^{4,1}$, donde e_4 denota la dirección temporal, se tiene

$$\mathbb{R}^{4,1} = \mathcal{L}(e_4) \oplus e_4^{\perp}$$

donde $\mathcal{L}(e_4)$ denota el subespacio de $\mathbb{R}^{4,1}$ generado por e_4.

Demostración. Sea $w \in \mathcal{L}(e_4)$ entonces w es temporal, pues $w = \lambda e_4$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) y por tanto $w^2 = -\lambda^2 < 0$, además todo vector de $e_4^{\perp}$ es espacial. $\mathcal{L}(e_4) \cap e_4^{\perp} = \{(0,0,0,0)\}$. Sea $v \in \mathbb{R}^{4,1}$, consideremos el vector $u = v + (v \cdot e_4)\, e_4 \in \mathbb{R}^{4,1}$ entonces

$$u \cdot e_4 = v \cdot e_4 + (v \cdot e_4) e_4 \cdot e_4 = 0$$

así $u \in e_4^{\perp}$ y $v = (-v \cdot e_4)e_4 + u \in \mathcal{L}(e_4) \oplus e_4^{\perp}$ $\square$

Definición 2.3. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^{4,1}$ y consideremos $\mathcal{C}_{x_0}$. El conjunto

$$\mathcal{L} = \left\{\, x \in \mathbb{R}^{4,1} \,/\, x = x_0 + tv\,,\ t \in \mathbb{R} \,\right\}$$

, donde v es un vector temporal, se denomina rayo temporal.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^{4,1}$, el $Int\mathcal{C}_{x_0}$ está constituido por rayos temporales.

Proposición 2.2. Dos vectores luz en $\mathbb{R}^{4,1} - \{\theta\}$ son colineales si y solo si son ortogonales.

Demostración. Si v y w son vectores luz tales que $v = \lambda w$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) entonces $v \cdot w = v \cdot \lambda v = \lambda v^2 = 0$. Recíprocamente, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v = (v_1, v_2, v_3, 1)$ y $w = (w_1, w_2, w_3, 1)$. Por hipótesis $v^2 = w^2 = v \cdot w = 0$, así

$$\begin{aligned} 1 &= v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 \\ 1 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ 1 &= w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \\ v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^3$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(v_1, v_2, v_3) = \lambda(w_1, w_2, w_3)$, luego

$$\|(v_1, v_2, v_3)\| = |\lambda| \, \|(w_1, w_2, w_3)\|$$

de donde $|\lambda| = 1$. Si $\lambda = -1$ entonces $1 = (-w_1)w_1 + (-w_2)w_2 + (-w_3)w_3 = -1$ lo cual es absurdo, por lo tanto $\lambda = 1$ y así $v = w$. □

Proposición 2.3. Si dos vectores causales son ortogonales entonces son vectores luz y colineales.

Demostración. Sean v y w vectores causales ortogonales. Si v es temporal, $w \in v^{\perp}$ y por tanto w es espacial, lo cual es una contradicción; lo mismo ocurre si suponemos que w es temporal. En conclusión, v y w son vectores luz y por la proposición anterior son colineales. □

Denotemos por $\mathcal{T}$ al conjunto de todos los vectores causales en $\mathbb{R}^{4,1} - \{\theta\}$. Se define la siguiente relación en $\mathcal{T}$

$$v \sim w \text{ si y solo si } v \cdot w < 0 \text{ , para todo } v, w \in \mathcal{T}$$

Proposición 2.4. La relación $\sim$ definida en $\mathcal{T}$ es de equivalencia y $\dfrac{\mathcal{T}}{\sim}$ está formado por solo dos clases de equivalencia.

Demostración. Por demostrar que $\sim$ es de equivalencia. Sean u, v y $w \in \mathcal{T}$, tales que $u \sim v$, como $u^2 = u \cdot u < 0$ y $u \cdot v = v \cdot u < 0$ se tiene $u \sim u$ y $v \sim u$. Supongamos que $u \sim v$ y $v \sim w$, entonces $u \cdot v < 0$ y $v \cdot w < 0$, así $u_4 v_4 > 0$ y $v_4 w_4 > 0$, donde u_4, v_4 y w_4 son las coordenadas temporales de u, v y w respectivamente. Esto implica que u_4 y w_4 tienen el mismo signo, es decir, $u_4 w_4 > 0$. Del Teorema 2.1 $u \cdot w < 0$ de donde $u \sim w$. Además $[v] = \{\, w \in \mathcal{T} \,/\, v \sim w \,\} = \{\, w \in \mathcal{T} \,/\, v_4 w_4 > 0 \,\}$, es decir, $[v]$ está formado por todos los vectores temporales cuya coordenada temporal tiene el mismo signo de v_4; el cual satisface $v_4 > 0$ o $v_4 < 0$. Así las clases de equivalencia se reducen a las siguientes

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^{+} &= \{\, v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathcal{T} \,/\, v_4 > 0 \,\} \\
\mathcal{T}^{-} &= \{\, v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathcal{T} \,/\, v_4 < 0 \,\} \\
\frac{\mathcal{T}}{\sim} &= \mathcal{T}^{+} \cup \mathcal{T}^{-}
\end{aligned}
$$

□

Orientar el espacio de Minkowski es elegir uno de los conos temporales, por tanto todos los vectores que se encuentran en $\mathcal{T}^{+}$ o $\mathcal{T}^{-}$ tienen la misma orientación. Los elementos de $\mathcal{T}^{+}$ se denominan vectores causales (si están en el interior del cono se denominan vectores temporales) en dirección futura, mientras que los vectores en $\mathcal{T}^{-}$ se denominan vectores causales en dirección pasada.

Proposición 2.5. $\mathcal{T}^{+}$ y $\mathcal{T}^{-}$ son conjuntos convexos.

Demostración. Sean v, w vectores en $\mathbb{R}^{4,1}$ y $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$. $v \in \mathcal{T}^{+}$ si y solo si $v_4 > 0$ si y solo si $\lambda v_4 > 0$ si y solo si $\lambda v \in \mathcal{T}^{+}$. Además $v, w \in \mathcal{T}^{+}$ si y solo si $v_4 > 0$ y $w_4 > 0$ si y solo si $v_4 + w_4 > 0$ si y solo si $v + w \in \mathcal{T}^{+}$. □

Notación 2.1. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^{4,1}$

$$
\begin{aligned}
(Int\, \mathcal{C}_{x_0})^{+} &= \left\{\, x \in \mathbb{R}^{4,1} \,/\, x - x_0 \in \mathcal{T}^{+} \,\right\} = Int\, \mathcal{C} \cap \mathcal{T}^{+} \\
(Int\, \mathcal{C}_{x_0})^{-} &= \left\{\, x \in \mathbb{R}^{4,1} \,/\, x - x_0 \in \mathcal{T}^{-} \,\right\} = Int\, \mathcal{C} \cap \mathcal{T}^{-}
\end{aligned}
$$

Proposición 2.6. Sea v un vector luz, no nulo y fijo en $\mathbb{R}^{4,1}$. Si existe $w \in \mathcal{T}^+$ tal que $v \cdot w > 0$, entonces $v \cdot u > 0$ para todo $u \in \mathcal{T}^+$. Si existe $w \in \mathcal{T}^+$ tal que $v \cdot w < 0$, entonces $v \cdot u < 0$ para todo $u \in \mathcal{T}^+$. De forma análoga se cumple para $\mathcal{T}^-$.

Demostración. Supongamos que existen $\tilde{u}$ y $\tilde{w}$ vectores en $\mathcal{T}^+$ tales que

$$v \cdot \tilde{u} > 0 \ \text{ y } \ v \cdot \tilde{w} < 0$$

En primer lugar, de darse el caso que $|v \cdot \tilde{w}| = v \cdot \tilde{u}$, entonces

$$\begin{aligned} -v \cdot \tilde{w} &= |v \cdot \tilde{w}| = v \cdot \tilde{u} \\ v \cdot \tilde{w} + v \cdot \tilde{u} &= 0 \\ v \cdot (\tilde{w} + \tilde{u}) &= 0 \end{aligned}$$

como $\tilde{w} + \tilde{u} \in \mathcal{T}^+$ entonces v debe ser temporal, lo cual es una contradicción y por tanto la proposición está probada. En segundo lugar, si $|v \cdot \tilde{w}| \neq v \cdot \tilde{u}$, podemos reemplazar $\tilde{w}$ por $\lambda\tilde{w}$ el cual pertenece a $\mathcal{T}^+$, donde $\lambda = \dfrac{v \cdot \tilde{u}}{|v \cdot \tilde{w}|} = \dfrac{v \cdot \tilde{u}}{-(v \cdot \tilde{w})}$

$$\begin{aligned} v \cdot \lambda\tilde{w} &= \lambda(v \cdot \tilde{w}) \\ &= -v \cdot \tilde{u} < 0 \end{aligned}$$

$|v \cdot \lambda\tilde{w}| = v \cdot \tilde{u}$. Análogamete para $\mathcal{T}^-$. □

Definición 2.4. Sea w un vector luz en $\mathbb{R}^{4,1}$, se dice que w está en dirección futura, si $w \cdot v < 0$ para todo $v \in \mathcal{T}^+$ y en dirección pasada, si $w \cdot v > 0$ para todo $v \in \mathcal{T}^+$.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^{4,1}$, los conjuntos definen los vectores en dirección futura y pasada

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{x_0\mathcal{F}} &= \left\{ x \in \mathcal{C}_{x_0} \,/\, (x - x_0) \cdot v < 0 \,, \forall\, v \in \mathcal{T}^+ \right\} \\ \mathcal{C}_{x_0\mathcal{P}} &= \left\{ x \in \mathcal{C}_{x_0} \,/\, (x - x_0) \cdot v > 0 \,, \forall\, v \in \mathcal{T}^+ \right\} \end{aligned}$$

Proposición 2.7. Sean v y w dos vectores luz, no nulos, no paralelos y no ortogonales en $\mathbb{R}^{4,1}$. v y w tienen la misma orientación si y solo si $v \cdot w < 0$.

Demostración. Supongamos que v y w tienen la misma orientación, entonces v y w pertenecen a $\mathcal{T}^+$ o $\mathcal{T}^-$. Si $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ están en $\mathcal{T}^+$ entonces $v_4 > 0$ y $w_4 > 0$. Además como son vectores luz se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} &= v_4 \\ \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} &= w_4\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}v_4 w_4 &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \\ &\geqslant |v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3| \\ &\geqslant v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \\ 0 &\geqslant v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 - v_4 w_4 \\ 0 &\geqslant v \cdot w\end{aligned}$$

como v y w no son ortogonales $v \cdot w < 0$. Recíprocamente, si $v \cdot w < 0$ entonces $v \sim w$, con lo cual v y w tienen la misma orientación. □

Teorema 2.3 (Desigualdad de Schwarz invertida)**.** Sean v y w vectores temporales en $\mathbb{R}^{4,1}$, entonces

$$|v \cdot w| \geqslant \|v\| \, \|w\|$$

La igualdad se da si y solo si v y w son vectores paralelos.

Demostración. Si uno de los vectores fuese el vector nulo la igualdad es inmediata, por tanto supongamos que ambos vectores son no nulos. Además $v \cdot w \neq 0$, pues si $v \cdot w = 0$ uno de los vectores sería espacial lo cual es una contradicción. El vector $\lambda v - \phi w$, donde $\lambda = v \cdot w$ y $\phi = v^2$, es espacial o nulo, pues

$$\begin{aligned}(\lambda v - \phi w) \cdot v &= \lambda v^2 - \phi w \cdot v \\ &= (v \cdot w) v^2 - v^2 (w \cdot v) \\ &= 0\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}0 &\leqslant (\lambda v - \phi w)^2 \\ 0 &\leqslant \lambda^2 v^2 + \phi^2 w^2 - 2\lambda\phi(v \cdot w) \\ 2\lambda\phi(v \cdot w) &\leqslant \lambda^2 v^2 + \phi^2 w^2 \\ 2(v \cdot w) v^2 (v \cdot w) &\leqslant (v \cdot w)^2 v^2 + (v^2)^2 w^2 \\ 2(v \cdot w)^2 &\geqslant (v \cdot w)^2 + v^2 w^2 \\ (v \cdot w)^2 &\geqslant v^2 w^2 = \left|v^2\right| \left|w^2\right| \\ \sqrt{(v \cdot w)^2} &\geqslant \sqrt{|v^2| \, |w^2|} \\ |v \cdot w| &\geqslant \|v\| \, \|w\|\end{aligned}$$

La igualdad se cumple si y solo si $u = \theta$; es decir, $\lambda u = \phi w$.

Recíprocamente, si $v = \lambda w \ (\lambda \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\|v\| \, \|w\| &= |\lambda| \, \|w\|^2 \\ &= |v \cdot w|\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4 (Desigualdad triangular invertida)**.** Sean v y w vectores temporales en $\mathbb{R}^{4,1}$, los cuales tienen la misma orientación, entonces

$$\|v + w\| \geqslant \|v\| + \|w\|$$

La igualdad se da si y solo si v y w son vectores paralelos.

Demostración. Por hipótesis, v y w pertenecen al mismo cono y por la convexidad $v+w$ pertenece al mismo cono que los anteriores y es temporal

$$0 > (v+w)^2 = v^2 + 2v \cdot w + w^2$$

como v y w tienen la misma orientación $v \cdot w < 0$; es decir, $|v \cdot w| = -v \cdot w$

$$0 > (v+w)^2 \quad = \quad v^2 + 2v \cdot w + w^2$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left|(v+w)^2\right| &= -v^2 - 2v \cdot w - w^2 \\
&= \left|v^2\right| + 2\left|v \cdot w\right| + \left|w^2\right| \\
&\geqslant \left|v^2\right| + 2\left\|v \cdot w\right\| + \left|w^2\right| = (\|v\| + \|w\|)^2 \\
\sqrt{\left|(v+w)^2\right|} &\geqslant \|v\| + \|w\| \\
\|v+w\| &\geqslant \|v\| + \|w\|
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Álgebra geométrica del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$: $AG(3)$

Definición 3.1. El álgebra geométrica del espacio euclidiano tridimensional, denotada por $AG(3)$, es el $\mathbb{R}$-subespacio vectorial, de dimensión 8, del anillo de polinomios $\mathbb{R}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$

$$AG(3) = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant 3} a_{ij}\sigma_i\sigma_j + a_{123}\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \,/\, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

donde el producto de polinomios se procesa bajo la identidad de Dirac

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{i,j}^{3,0}$$

con el cual recibe el nombre de producto geométrico. Los elementos de $AG(3)$ se denominan multivectores.

Notación 3.1.

- $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k = \sigma_{12\ldots k}$
- $\sigma_{123} = I$ y es tal que $I^2 = -1$.
- $AA\ldots AA = A^k$, para todo $A \in AG(3)$.

$AG(3)$ posee los siguientes subespacios

$$\begin{aligned}
AG^{(0)}(3) &= \{A \in AG(3) \,/\, A = a1 \,,\, a \in \mathbb{R}\} \text{ (0-vectores o escalares)} \\
AG^{(1)}(3) &= \left\{A \in AG(3) \,/\, A = \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_i \,,\, a_i \in \mathbb{R}\right\} \text{ (vectores)} \\
AG^{(2)}(3) &= \left\{A \in AG(3) \,/\, A = \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant 3} a_{ij} \sigma_{ij} \,,\, a_{ij} \in \mathbb{R}\right\} \text{ (2-vectores o bivectores)} \\
AG^{(3)}(3) &= \{A \in AG(3) \,/\, A = aI \,,\, a \in \mathbb{R}\} \text{ (3-vectores o trivectores)}
\end{aligned}$$

La $dim\left(AG^{(k)}(3)\right) = C_k^3$ para $k = 0, 1, 2, 3$. De la definición $AG(3) = \bigoplus_{k=0}^{3} AG^{(k)}(3)$ se tiene que $dim\,(AG(3)) = 2^3 = 8$.

Notación 3.2. A_k denota la parte k-vectorial de $A = a + a_i\sigma_i + a_{ij}\sigma_{ij} + a_I I \in AG(3)$ para $k = 0, 1, 2, 3$, es decir

$$A_0 = a \;,\; A_1 = a_i\sigma_i \;,\; A_2 = a_{ij}\sigma_{ij} \;,\; A_3 = a_I I$$

Por tanto un multivector $A \in AG(3)$ se escribe de manera compacta $A = \sum_{i=0}^{3} A_i$, donde $A_i \in AG^{(i)}(3)$.

De la igualdad de polinomios, dos multivectores $A = \sum_{i=0}^{3} A_i$ y $B = \sum_{i=0}^{3} B_i$ son iguales si y solo si $A_i = B_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

3.1. Automorfismos en $AG(3)$

Definición 3.2. La aplicación

$$\begin{aligned}
\langle\ \rangle_k : AG(3) &\to AG^{(k)}(3) \\
A = \sum_{i=0}^{3} A_i &\to \langle A \rangle_k = A_k \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3
\end{aligned}$$

se denomina proyección sobre $AG^{(k)}(3)$.

Propiedades 3.1. Sean $A, B \in AG(3)$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\langle \alpha A \pm B \rangle_k = \alpha \langle A \rangle_k \pm \langle B \rangle_k$
- Si $A \in AG^{(r)}(3)$, $\langle A \rangle_k = \delta_{kr} A$

Definición 3.3. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} ^{-}: AG(3) & \to & AG(3) \\ A = \sum_{i=0}^{3} A_i & \to & \overline{A} = \sum_{i=0}^{3} (-1)^k A_k \end{array}$$

se denomina conjungación espacial.

Propiedades 3.2. Sean $A, B \in AG(3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\overline{\alpha A + B} = \alpha \overline{A} + \overline{B}$
- $\overline{\overline{A}} = A$

Definición 3.4. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} ^{\dagger}: AG(3) & \to & AG(3) \\ A = \sum_{i=0}^{3} A_i & \to & A^{\dagger} = \sum_{i=0}^{3} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} A_k \end{array}$$

se denomina reversión.

Propiedades 3.3. Sean $A, B \in AG(3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

- $(\alpha A + B)^{\dagger} = \alpha A^{\dagger} + B^{\dagger}$
- $\left(A^{\dagger}\right)^{\dagger}$

Definición 3.5. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \tilde{} : AG(3) & \rightarrow & AG(3) \\ A & \rightarrow & \tilde{A} = (\overline{A})^\dagger \end{array}$$

se denomina transposición o conjugación de Clifford.

La transposición satisface las mismas propiedades que las anteriores aplicaciones.

Proposición 3.1. La conjugación espacial es una automorfismo. La reversión y la conjugación de Clifford son antiautomorfismos. Es decir, si $A, B \in AG(3)$

$$\begin{array}{rcl} \overline{AB} & = & \overline{A}\,\overline{B} \\ (AB)^\dagger & = & A^\dagger\, B^\dagger \\ \tilde{AB} & = & \tilde{A}\,\tilde{B} \end{array}$$

3.2. Producto escalar y módulo en $AG(3)$

Definición 3.6. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \cdot : AG(3) \times AG(3) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\,A\,,\,B\,) & \rightarrow & A \cdot B = \left\langle A^\dagger B \right\rangle_0 \end{array}$$

se denomina producto escalar de multivectores.

Propiedades 3.4. Sean $A, B, C \in AG(3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha(A \cdot B)$

Definición 3.7. La aplicación

$$\begin{aligned} \| \ \| : AG(3) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ A &\rightarrow \|A\| = \sqrt{A \cdot A} \end{aligned}$$

se denomina módulo.

Para todo $A \in AG(3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$.

Definición 3.8. Sean $A, B \in AG(3)$. Si $A \cdot B = 0$ entonces A y B se denominan multivectores ortogonales.

Definición 3.9. Sea $A \in AG(3)$. Si $\|A\| = 1$ entonces A se denomina multivector unitario o normal.

Proposición 3.2. El conjunto $\mathcal{B} = \{ 1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, I \} \subseteq AG(3)$ es una base ortonormal de $AG(3)$.

Demostración. Ver [8, Teorema de Riesz]. □

Proposición 3.3. Sean $A, B \in AG(3)$ entonces

$$|A \cdot B| \leqslant \|A\| \, \|B\|$$

La igualdad se cumple si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A = \lambda B$.

Proposición 3.4. Sean $A, B \in AG(3)$ entonces

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

La igualdad se cumple si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A = \lambda B$.

3.3. Dualidad

La dualidad se define de forma análoga a la dualidad de Hodge. La cual es usada en la teoría de Formas diferenciales y debido a esto se seguirá usando la misma notación. La dualidad fue introducida por W.V.D Hodge, esta establece una correspondencia entre los k-vectores y los $(n-k)$-vectores, la cual resuelve la definición de un producto cruz en el álgebra del espacio tridimensional.

Definición 3.10. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \star : AG^{(k)}(3) & \rightarrow & AG^{(3-k)}(3) \\ A & \rightarrow & \star A = A^{\dagger} I \end{array}$$

se denomina dual o dual de Clifford.

Proposición 3.5. La dualidad es un isomorfismo entre espacios vectoriales.

Proposición 3.6. El dual de un k-vector A es el $(3-k)$-vector $\star A$, ortogonal a A.

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle A, \star A \rangle &= \left\langle A^{\dagger} A^{\dagger} I \right\rangle_0 \\ &= \left\langle (-1)^{(k-1)k} A (-1)^{(k-1)k} A I \right\rangle_0 \\ &= \left\langle A^2 I \right\rangle_0 \quad , \quad A^2 \in \mathbb{R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Por ejemplo, el dual de σ_1 es $\star\sigma_1 = \sigma_1^{\dagger} I = \sigma_1 I = \sigma_2\sigma_3$, en donde se hace evidente la propiedad geométrica.

Teorema 3.1. $AG^{(0)}(3)$ y $AG^{(1)}(3)$ son isomorfos a $AG^{(3)}(3)$ y $AG^{(2)}(3)$ respectivamente, como espacios vectoriales.

Demostración. La prueba se sigue de lo antes expuesto y de la dimensión de $AG^{(k)}(3)$ para $k = 0, 1, 2, 3$. $\square$

Observación 3.1.

- Sea $a_{12}\sigma_{12} + a_{13}\sigma_{13} + a_{23}\sigma_{23} \in AG^{(2)}(3)$ entonces

$$\begin{aligned} a_{12}\sigma_{12} + a_{13}\sigma_{13} + a_{23}\sigma_{23} &= a_{12}\sigma_3 I + a_{13}\sigma_2 I + a_{23}\sigma_1 I \\ &= (a_{12}\sigma_3 + a_{13}\sigma_2 + a_{23}\sigma_1)I \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} AG^{(0)}(3) \oplus AG^{(3)}(3) &= \left\{ \alpha + \beta I \in AG(3) \,/\, \alpha, \beta \in AG^{(0)}(3) \right\} \\ AG^{(1)}(3) \oplus AG^{(2)}(3) &= \left\{ v + wI \in AG(3) \,/\, v, w \in AG^{(1)}(3) \right\} \end{aligned}$$

- $AG^{(0)}(3) \oplus AG^{(3)}(3) \cong \mathbb{C}$

3.4. Subálgebra $AG(3)^+$

Definición 3.11. Sea $A \in AG(3)$. A se denomina multivector par, si $\overline{A} = A$ y multivector impar, si $\overline{A} = -A$.

$A \in AG(3)$, podemos expresarlo de la siguiente manera

$$\overline{A} = \langle A \rangle_0 - \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3$$

Observación 3.2. Para $k = 0, 1$ los elementos de $AG^{(2k)}(3)$ son multivectores pares y los elementos de $AG^{(2k+1)}(3)$ son multivectores impares.

Notación 3.3.

- Sea $A \in AG(3)$. $A^+ = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_2$ y $A^- = \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_3$ denotan a los multivectores par e impar respectivamente, asociados a A. Por tanto podemos escribir $A = A^+ + A^-$.

- $AG(3)^+$ y $AG(3)^-$ denotan al conjunto de todos los multivectores pares e impares, respectivamente, de $AG(3)$. Así

$$AG(3) = AG(3)^+ \oplus AG(3)^-$$

Teorema 3.2. $AG(3)^+$ es un subálgebra de $AG(3)$ denominada subálgebra par.

Demostración. La prueba se realizará para el caso $AG(4,1)$ en el siguiente capítulo. $\square$

Capítulo 4

Álgebra geométrica del espacio-tiempo $\mathbb{R}^{4,1}$: $AG(4,1)$

Definición 4.1. $AG(4,1)$ es el $\mathbb{R}$-subespacio vectorial de dimensión 16 del anillo de polinomios $\mathbb{R}\left[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\right]$

$$AG(4,1) = \{a_0 + a_i\gamma_i + a_{ij}\gamma_{ij} + a_{ijk}\gamma_{ijk} + a_{1234}\gamma_{1234} \,/\, 1 \leqslant i < j < k \leqslant 4\}$$

El producto geométrico en $AG(4,1)$ es el producto de polinomios, el cual se rige por la identidad de Dirac

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}\left(\gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\nu\mu}\right) = \delta^{4,1}_{\mu,\nu}$$

$AG(4,1)$ se denomina álgebra geométrica del espacio–tiempo y sus elementos se denominan multivectores o números de Dirac. $\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^{4,1}$, donde γ_4 se denomina vector unitario temporal y los restantes vectores unitarios espaciales. Denotaremos $\gamma_5 = \gamma_{1234}$ y se denomina unidad seudoescalar.

Observación 4.1.

- $\gamma_5^2 = -1$
- γ_5 anticommuta con los vectores y trivectores, y commuta con los escalares y bivectores.

- $AG(4,1) = \bigoplus_{k=0}^{4} AG^{(k)}(4,1)$; $AG^{(0)}(4,1) = \mathbb{R}$.
- Un multivector $A \in AG(4,1)$ se escribe $A = \sum_{k=0}^{4} \langle A_k \rangle$.

Sea $A \in AG(4,1)$. Se tiene

- Conjugación espacial o involución graduada: $\overline{A} = \langle A \rangle_0 - \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4$
- Reversión o conjugación hermitiana: $A^{\dagger} = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4$
- Transposición o conjugación de Clifford: $\tilde{A} = \left(\overline{A}\right)^{\dagger}$

4.1. Producto escalar y módulo en $AG(4,1)$

Definición 4.2. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \cdot : AG(4,1) \times AG(4,1) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\,A\,,\,B\,) & \rightarrow & A \cdot B = \left\langle A^{\dagger} B \right\rangle_0 \end{array}$$

se denomina producto escalar de multivectores.

Definición 4.3. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \|\ \| : AG(4,1) & \rightarrow & \mathbb{R}^{+} \\ A & \rightarrow & \|A\| = \sqrt{A \cdot A} \end{array}$$

se denomina módulo.

4.2. Subálgebra $AG(4,1)^{+}$ y su relación con $AG(3)$

Definición 4.4. Sea $A \in AG(4,1)$. A se denomina multivector par, si $\overline{A} = A$ y multivector impar, si $\overline{A} = -A$.

Para $k = 0, 1, 2$ los elementos de $AG^{(2k)}(4,1)$ son multivectores pares, mientras que para $k = 0, 1$ los elementos de $AG^{(2k+1)}(4,1)$ son multivectores impares.

Notación 4.1.

- Sea $A \in AG(4,1)$.

$$\overline{A} = (\langle A\rangle_0 + \langle A\rangle_2 + \langle A\rangle_4) - (\langle A\rangle_1 + \langle A\rangle_3)$$

  Así $A = A^+ + A^-$. Donde $A^+ = \langle A\rangle_0 + \langle A\rangle_2 + \langle A\rangle_4$ y $A^- = \langle A\rangle_1 + \langle A\rangle_3$ denotan la parte par e impar, respectivamente, de A.

- $AG(4,1)^+$ y $AG(4,1)^-$ denotan el conjunto de todos los multivectores pares e impares, respectivamente, en $AG(4,1)$.

$AG^{(i)}(4,1) \cap AG^{(j)}(4,1) = \{0\}$ para $i \neq j$. Además

$$\begin{aligned} AG(4,1)^+ &= \bigoplus_{k=0}^{2} AG^{(2k)}(4,1) \\ AG(4,1)^- &= \bigoplus_{k=0}^{1} AG^{(2k+1)}(4,1) \end{aligned}$$

Recordemos que $AG(4,1) = \bigoplus_{k=0}^{4} AG^{(k)}(4,1)$, así

$$AG(4,1) = AG(4,1)^+ \oplus AG(4,1)^-$$

Proposición 4.1. $AG(4,1)^+$ y $AG(4,1)^-$ son espacios vectoriales reales.

Proposición 4.2. $AG(4,1)^+$ y $AG(4,1)^-$ satisfacen las siguientes relaciones, con respecto al producto geométrico

$$\begin{aligned} AG(4,1)^+AG(4,1)^+ &= AG(4,1)^+ && (4.1)\\ AG(4,1)^+AG(4,1)^- &= AG(4,1)^- && (4.2)\\ AG(4,1)^-AG(4,1)^+ &= AG(4,1)^- && (4.3)\\ AG(4,1)^-AG(4,1)^- &= AG(4,1)^+ && (4.4) \end{aligned}$$

Demostración. comenzamos con 4.1. Sea $A = a_0 + a_{ij}\gamma_{ij} + a_5\gamma_5$ y $B = b_0 + b_{ij}\gamma_{ij} + b_5\gamma_5$ pertenecientes a $AG(4,1)^+$, $AB = c_0 + c_{ij}\gamma_{ij} + c_5\gamma_5$, donde $c_0 = c_0(a_0, b_0, a_5, b_5)$, $c_{ij} = c_ij(a_0, b_0, a_{ij}, b_{ij}, a_5, b_5)$ y $c_5 = c_0(a_{ij}, b_{ij})$ son obtenidos a través del producto geométrico. Así $AG(4,1)^+AG(4,1)^+ \subseteq AG(4,1)^+$. Ahora $1 \in AG(4,1)^+$ y para cualquier $A \in AG(4,1)^+$ se tiene $A = A1 \in AG(4,1)^+$ entonces $AG(4,1)^+ \subseteq AG(4,1)^+AG(4,1)^+$, luego $AG(4,1)^+AG(4,1)^+ = AG(4,1)^+$. De la misma forma podemos demostrar 4.2 y 4.3. Sean $A = a_i\gamma_i + a_{ijk}\gamma_{ijk}$ y $B = b_i\gamma_i + b_{ijk}\gamma_{ijk}$ pertenecientes a $AG(4,1)^-$, $AB = c_0 + c_{ij}\gamma_{ij} + c_5\gamma_5 \in AG(4,1)^+$, luego $AG(4,1)^-AG(4,1)^- \subseteq AG(4,1)^+$. Sea $A \in AG(4,1)^+$

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_{12}\gamma_{12} + a_{13}\gamma_{13} + a_{14}\gamma_{14} + a_{23}\gamma_{23} + a_{24}\gamma_{24} + a_{34}\gamma_{34} + a_5\gamma_5\\ A &= a_0\gamma_{11} + a_{12}\gamma_{12} + a_{13}\gamma_{13} + a_{14}\gamma_{14} + a_{23}\gamma_{1123} + a_{24}\gamma_{1124} + a_{34}\gamma_{1134} + a_5\gamma_{1234}\\ A &= \gamma_1\left(a_0\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}\gamma_3 + a_{14}\gamma_4 + a_{23}\gamma_{123} + a_{24}\gamma_{124} + a_{34}\gamma_{134} + a_5\gamma_{234}\right) \end{aligned}$$

entonces $A \in AG(4,1)^-AG(4,1)^-$, luego $AG(4,1)^-AG(4,1)^- = AG(4,1)^+$. □

Proposición 4.3. $AG(4,1)^+$ es un subálgebra de $AG(4,1)$, denominada subálgebra par.

Demostración. La prueba resulta de la proposición 4.1 y 4.2. □

4.2.1. Cuatro isomorfismos especiales

Teorema 4.1. $AG(4,1)^+$ es isomorfo a $AG(3)$.

Demostración. $AG(4,1)^+$ y $AG(3)$ son $\mathbb{R}$–espacios vectoriales de dimensión 8, entonces podemos definir en forma natural un isomorfismo entre ellas que preserve las propiedades del producto en ambas. La aplicación

$$\psi : AG(4,1)^+ \quad \to \quad AG(3)$$

definida

$$\psi(a_0 + a_{12}\gamma_{12} + a_{13}\gamma_{13} + a_{14}\gamma_{14} + a_{23}\gamma_{23} + a_{34}\gamma_{34} + a_5\gamma_5) =$$
$$a_0 + a_{12}\sigma_{12} + a_{13}\sigma_{13} + a_{14}\sigma_1 + a_{23}\sigma_{23} + a_{24}\sigma_2 + a_{34}\sigma_3 + a_5 I$$

es una biyección. De la tabla del producto geométrico $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$ para todo $A, B \in AG(4,1)^+$. Por tanto $AG(4,1)^+ \cong AG(3)$. $\square$

Cabe mencionar que este isomorfismo proviene de haber fijado la coordenada temporal γ_4 y luego hacer la identificación, para $k = 1, 2, 3$.

$$\sigma_k \longleftrightarrow \gamma_{k4}$$

Denotemos

$$\mathbb{H} = \left\{\alpha_0 + \alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j} + \alpha_3\boldsymbol{k} \,/\, \alpha_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1, \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}\right\}$$

y $\mathbb{H} = \mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^-$, donde

$$\mathbb{H}^+ \;=\; \{\alpha_0 + \alpha_1(\boldsymbol{ij}) \,/\, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{H}^- \;=\; \{\alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j} \,/\, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Teorema 4.2. $AG(3)^+$ es isomorfo al álgebra no commutativa de los cuaterniones $\mathbb{H}$.

Demostración. La aplicación

$$\begin{aligned} \phi : AG(3)^+ &\rightarrow \mathbb{H} \\ a + a_{12}\sigma_{12} + a_{13}\sigma_{13} + a_{23}\sigma_{23} &\rightarrow a - a_{23}\boldsymbol{i} + a_{13}\boldsymbol{j} - a_{12}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

satisface $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ para todo $A, B \in AG(3)^+$, por tanto $AG(3)^+ \cong \mathbb{H}$. □

Teorema 4.3. $\mathbb{H}^+$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.

Demostración. La aplicación

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{H}^+ &\rightarrow \mathbb{C} \\ \alpha_0 + \alpha_3\boldsymbol{ij} &\rightarrow \alpha_0 + \alpha_3\boldsymbol{i} \end{aligned}$$

satisface $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ para todo $A, B \in AG(3)^+$, por tanto $\mathbb{H}^+ \cong \mathbb{C}$. □

Teorema 4.4. $\mathbb{C}^+$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Demostración. $\mathbb{C} = \mathbb{C}^+ \oplus \mathbb{C}^- = \mathbb{R} \oplus \boldsymbol{i}\mathbb{R}$, donde $\boldsymbol{i}^2 = -1$. La aplicación identidad $Id : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es un isomorfismo. □

<table>
<tr><td colspan="5">$AG(4,1)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$AG(4,1)^+ \cong AG(3)$</td><td rowspan="4">$AG(4,1)^-$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$AG(3)^+ \cong \mathbb{H}$</td><td>$AG(3)^-$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbb{H}^+ \cong \mathbb{C}$</td><td>$\mathbb{H}^-$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\mathbb{C}^+ \cong \mathbb{R}$</td><td>$\mathbb{C}^-$</td><td></td></tr>
</table>

Cuadro 4.1: Isomorfismo de subálgebras pares

4.3. Dualidad

Definición 4.5. La aplicación:

$$\begin{aligned} \star : AG^{(k)}(4,1) &\rightarrow AG^{(4-k)}(4,1) \\ A &\rightarrow \star = A^{\dagger}\gamma_5 \end{aligned}$$

se denomina dual.

Proposición 4.4. La aplicación $\star$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

De la proposición anterior $AG^{(0)}(4,1) \cong AG^{(4)}(4,1)$ y $AG^{(1)}(4,1) \cong AG^{(3)}(4,1)$, de donde a los elementos de $AG^{(4)}(4,1)$ se les denomina seudoescalares y a los elementos de $AG^{(3)}(4,1)$ seudovectores.

Proposición 4.5. Sea $A \in AG^{(k)}(4,1)$. Se tiene $A \cdot \star A = 0$.

Demostración.

$$A \cdot \star A = \left\langle A^{\dagger} A^{\dagger} \gamma_5 \right\rangle_0 = \left\langle (-1)^{(k-1)k} A^2 \gamma_5 \right\rangle_0 = 0$$

□

4.4. Subespacio de bivectores: $AG^{(2)}(4,1)$

Observación 4.2.

- $\gamma_{i4}^2 = 1$ para $i = 1,2,3$ y $\gamma_{ij}^2 = -1$ para $i \neq j \neq 4$.
- A través del isomorfismo del teorema 4.1 $AG^{(2)}(4,1) = \mathcal{L}\left\{\gamma_{14}, \gamma_{24}, \gamma_{34}\right\} \oplus \mathcal{L}\left\{\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}\right\}$

Notación 4.2. Denotemos

$$\begin{aligned} AG^{(2)}(4,1)_E &= \mathcal{L}\{\gamma_{14},\gamma_{24},\gamma_{34}\} \quad \text{bivectores espaciales} \\ AG^{(2)}(4,1)_T &= \mathcal{L}\{\gamma_{12},\gamma_{13},\gamma_{23}\} \quad \text{bivectores temporales} \end{aligned}$$

Proposición 4.6. Sean $B_1 \in AG^{(2)}(4,1)_E$ y $B_2 \in AG^{(2)}(4,1)_T$. Se tiene

$$B_1 \cdot B_1 \geqslant 0 \ , \ B_2 \cdot B_2 \leqslant 0$$

4.5. Bivectores simples

Los bivectores surgen del producto exterior de dos vectores, los cuales determinan un segmento de plano, pero en dimensiones mayores a dos existen bivectores obtenidos por la suma de otros bivectores, que no se pueden expresar como el producto exterior de dos vectores (ver [9, página 24]).

Intuitivamente, un bivector B es un bivector simple, si existen $v, w \in AG^{(1)}(4,1)$ no nulos tales que $B = v \wedge w$. Por ejemplo, los bivectores de la base son bivectores simples.

Definición 4.6. Sea $B \in AG^{(2)}(4,1)$. B se denomina bivector simple, si $B^2 \in \mathbb{R}$.

En dimensión dos y tres, según la anterior definición, todos los bivectores son simples (ver [9, página 24]), pero en cuatro y más dimensiones no todo bivector es simple, pues su cuadrado no es un número real.

Proposición 4.7. Sea $B \in AG^{(2)}(4,1)$. Existen B_1 y B_2 bivectores simples, tales que

$$B_1 \cdot B_2 = 0 \ , \ B_1^2 \geqslant 0 \ , \ B_2^2 \leqslant 0 \text{ y } B = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$$

los bivectores B_1 y B_2 se denominan componentes simples de B.

Pr. Geomt.		1-vector				2-vector						3-vector				4-vector
		1	**2**	**3**	**4**	**12**	**13**	**14**	**23**	**24**	**34**	**123**	**124**	**134**	**234**	**5**
1-vector	**1**	1	12	13	14	2	3	4	123	124	134	23	24	34	5	234
	2	-12	1	23	4	-1	-123	-124	3	4	234	-13	-14	-5	34	-134
	3	-13	-23	1	34	123	-1	-134	-2	-234	4	12	5	-14	-24	124
	4	-14	-24	-34	-1	124	134	1	234	2	3	-5	-12	-13	-23	123
2-vector	**12**	-2	1	123	124	-1	-23	-24	13	14	5	-3	-4	-234	134	-34
	13	-3	-123	1	134	23	-1	-34	-12	-5	14	2	234	-4	-124	24
	14	-4	-124	-134	11	24	34	1	5	12	13	-234	-2	-3	-123	23
	23	123	-3	2	234	-13	12	5	-1	-34	24	-1	-134	124	-4	-14
	24	124	-4	-234	-2	-14	-5	-12	34	1	23	134	1	123	-3	-13
	34	134	234	-4	-3	5	-14	-13	-24	-23	1	-124	-123	1	2	12
3-vector	**123**	23	-13	12	134	-3	2	234	-1	-134	124	-1	-34	24	-14	-4
	124	24	-14	-5	-12	-4	-234	-2	134	1	123	34	1	23	-13	-3
	134	34	5	-14	-13	-324	-4	-3	-124	-123	1	-24	-23	1	12	2
	234	-5	34	-24	-23	-134	124	123	-4	-3	2	14	13	-12	1	-1
4-vector	**5**	-234	134	-124	-123	-34	24	23	-14	-13	12	4	3	-2	1	-1

Cuadro 4.2: Producto geométrico en $AG(4,1)$

Capítulo 5

Espacios seudoeuclidianos

5.1. Generalidades

V hará referencia a un espacio vectorial real n-dimensional con base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y θ denota al vector nulo de V.

Definición 5.1. La aplicación $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ se denomina

- Forma bilineal, si es lineal en cada una de sus variables, es decir

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w) \\ \varphi(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, w) \end{aligned}$$

  para cualesquiera u, v y $w \in V$ y cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Simétrica, si $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$ para todo $v, w \in V$.

- No degenerada, si para $v \in V$ fijo y para todo $w \in V$

$$\varphi(v, w) = 0 \text{ entonces } v = \theta$$

Definición 5.2. Una forma bilineal, simétrica y no degenerada $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$, se denomina producto escalar en V.

Notación 5.1.

- $\varphi(u, v) = u \cdot v$, donde φ es un producto escalar fijo y arbitrario en V.
- Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V$ base de V, denotaremos $e_i \cdot e_j = g_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ y por $G_{\mathcal{B}} = (g_{ij}) \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$, la cual se denomina matriz asociada al producto escalar asociada a la base $\mathcal{B}$.

Observación 5.1.

- La definición anterior determina la existencia de $v \in V$, tal que $v \cdot v < 0$.
- Para todo $v \in V$, se tiene $\theta \cdot v = 0$.
- Sean $v = \sum_{i=1}^{n} e_i v_i$ y $w = \sum_{j=1}^{n} e_j w_j$ vectores en V

  $$v \cdot w = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v_i w_j$$

  el lado derecho de esta igualdad constituye una forma n-lineal.

Proposición 5.1. Sea $G_{\mathcal{B}}$ la matriz asociada al producto escalar, entonces $(G_{\mathcal{B}}) \in GL(n)$.

Demostración. Supongamos que $det\,(G_{\mathcal{B}}) = 0$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ consideremos el sistema lineal $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v_i = 0$ cuyo determinante es nulo y por tanto el sistema posee infinitas soluciones; podemos considerar un vector solución no nulo $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \in V$ tal que para todo $w = \sum_{j=1}^{n} e_j w_j \in V$

$$\begin{aligned} v \cdot w &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v_i w_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} g_{ij} v_i \right) w_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

dado que el producto escalar es no degenerado $v = \theta$, lo cual es una contradicción. Así $det\,(G_{\mathcal{B}}) \neq 0$ y por tanto $G_{\mathcal{B}} \in GL(n)$. $\square$

Proposición 5.2. Una condición suficiente para que la aplicación $\psi : V \times V \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} v_i w_j$, donde $v = \sum_{i=1}^{n} e_i v_i$ y $w = \sum_{j=1}^{n} e_j w_j$ sea un producto escalar, es que la matriz $H = (h_{ij})$ sea simétrica y $H \in GL(n)$.

Demostración. Es evidente que ψ es una forma bilineal y simétrica. Para la tercera condición, sea $v \in V$ tal que $\psi(v,w) = 0$ para cualquier $w \in V$, entonces

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} v_i w_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} h_{ij} v_j \right) w_j = 0$$

considerando $w = (1,0,0,\ldots,0)$, $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} v_i = 0$ para $j = 1,2,\ldots,n$; como $det(H) \neq 0$, el sistema posee una única solución, luego $v_i = 0$ para $i = 1,2,\ldots,n$; por tanto $v = \theta$. $\square$

El hecho que un producto escalar sea no degenerado equivale a la regularidad de la matriz $G_{\mathcal{B}}$, debido a esto dicha condición se denomina condición de regularidad.

Definición 5.3. $v, w \in V$ se denominan ortogonales, si $v \cdot w = 0$.

Definición 5.4 (Forma Métrica)**.** La aplicación

$$\begin{aligned} k : V &\to \mathbb{R} \\ v &\to k(v) = v \cdot v \end{aligned}$$

se denomina forma métrica de V.

Definición 5.5. El módulo de un vector $v \in V$, denotada por $\|v\|$, se define como $\|v\| = \sqrt{|k(v)|}$.

Definición 5.6. La distancia entre dos puntos $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en V, denotada por $d(a,b)$, se define como

$$d(a,b) = \|b - a\|$$

Definición 5.7. Un vector $v \in V$ se denomina

- Unitario, si $v \cdot v = 1$.
- Unitario imaginario, si $v \cdot v = -1$.
- Isotrópico, si siendo $v \neq 0$ se tiene que $v \cdot v = 0$.

Definición 5.8. La forma métrica k de V, se denomina

- De signo definido
    - Si $k(v) > 0$ para todo $v \in V$. La forma métrica se denomina **definida positiva**.
    - Si $k(v) < 0$ para todo $v \in V$. La forma métrica se denomina **definida negativa**.
- De signo variable, si $k(v)$ toma valores positivos y negativos.

De la teoría de formas cuadráticas se tiene la siguiente equivalencia.

Proposición 5.3. Si existe una base $\hat{\mathcal{B}}$ de V, que diagonalice la matriz $G_{\mathcal{B}}$ en una matriz $D = (d_{ij})_{n\times n}$, tal que $d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, si } \quad i \neq j \\ r \neq 0 & \text{, si } \quad i = j \end{cases}$, entonces la forma métrica de V se denomina

- definida positiva si y solo si $d_{ii} > 0$.
- definida negativa si y solo si $d_{ii} < 0$.
- de signo variable si y solo si d_{ii} toma valores de distintos signos.

Proposición 5.4. Sea $x^0 \in V$ un punto arbitrario y fijo, denotemos por

$$B_{x^0} = \left\{ x \in V \,/\, d(x, x^0) = 0 \right\}$$

Si k es de signo definido, $B_{x^0} = \{x^0\}$ y si k es de signo variable, B_{x^0} es un cono con vértice x^0.

Demostración. $B_{x^0} \neq \emptyset$, pues $x^0 \in B_{x^0}$. Sea $x \in B_{x^0}$, entonces $d(x, x^0) = 0$

$$k(x - x^0) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) = 0$$

k es de signo definido, podemos suponer que k es definida positiva, es decir, existe una base $\mathcal{B}$ de V para la cual $G_{\mathcal{B}}$ es diagonal y los elementos de la diagonal son positivas, así

$$k(x - x^0) = \sum_{i=1}^{n} g_{ii}(x_i - x_i^0)^2 = 0 \ , \ g_{ii} > 0$$

de donde $x_i - x_i^0 = 0$ para todo i, lo cual implica que $x = x^0$. Supongamos que k es de signo variable entonces existe $a \in B_{x^0}$, $a \neq x^0$ tal que $k(a - x^0) = 0$. Denotemos por $\mathcal{L}_{a,x^0}$ a la recta que pasa por los puntos a y x^0

$$\mathcal{L}_{a,x^0} = \left\{ p \in V \,/\, p = x^0 + \lambda(x^0 - a), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $y \in B_{x^0} \cap \mathcal{L}_{a,x^0}$ entonces $\mathcal{L}_{a,x^0} = \mathcal{L}_{y,x^0}$. Debemos probar que $B_{x^0} = \bigcup_{x \in B_{x^0}} \mathcal{L}_{x,x^0}$. En efecto, sea $p \in \bigcup_{x \in B_{x^0}} \mathcal{L}_{x,x^0}$ entonces existe $x \in B_{x^0}$ tal que $p \in \mathcal{L}_{x,x^0}$; es decir $p = x^0 + \lambda(x^0 - x)$

$$\begin{aligned} k\left(p - x^0\right) &= k\left(\lambda\left(x - x^0\right)\right) \\ &= \lambda k\left(x - x^0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $p \in B_{x^0}$, de donde $B_{x^0} \cap \mathcal{L}_{a,x^0} \subseteq B_{x^0}$. Sea $x \in B_{x^0}$, $x = x^0 + (-1)(x^0 - x) \in \mathcal{L}_{x,x^0} \subseteq \bigcup_{x \in B_{x^0}} \mathcal{L}_{x,x^0}$, por tanto $B_{x^0} = \bigcup_{x \in B_{x^0}} \mathcal{L}_{x,x^0}$. Así B_{x^0} está formada por todas las rectas que pasan por x^0, por lo cual B_{x^0} es un cono con vértice en x^0. $\square$

Definición 5.9. Una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V$ se denomina base ortonormal, si los vectores de la base son ortogonales dos a dos y unitarios o unitarios imaginarios.

Definición 5.10. $W \subseteq V$ subespacio vectorial, se denomina el complemento ortogonal de W al conjunto $W^{\perp} = \{v \in V \,/\, v \cdot w = 0$ para todo $w \in W\}$

Proposición 5.5. Sea W un subespacio vectorial de V, el complemento ortogonal $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.

5.2. Estructura de los espacios seudoeuclidianos

Teorema 5.1. Sea V un espacio métrico. Existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V, tal que $e_i \cdot e_j = 0$. Si $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ y $e_i \cdot e_i = \pm 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Además el número $q \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, de vectores de la base para los cuales $k(e_i) = -1$, no depende de la base.

Demostración. Dado que el producto escalar es no degenerado, existe un par de vectores v y w en V, para los cuales $v \cdot w \neq 0$. Existe un vector $u \in V$ para el cual $u^2 \neq 0$; en efecto, si $v^2 \neq 0$ o $w^2 \neq 0$ entonces podemos considerar $u = v$ o $u = w$ y si $v^2 = w^2 = 0$ entonces $(v + w)^2 = 2v \cdot w \neq 0$, así podemos considerar $u = v + w$.
La prueba del teorema será por inducción sobre n. Si $n = 1$ por lo anterior, existe $u \in V$ tal que $u^2 \neq 0$. Podemos definir el vector $e_1 = \dfrac{u}{\sqrt{|u^2|}} \in V$, para el cual $e_1^2 = \pm 1$ entonces $\{e_1\} = \mathcal{B}$ es la base requerida. Supongamos que $n > 1$ y que para todo espacio métrico de dimensión menor que n, existe una base que satisface las condiciones mencionadas. Como la dimensión de V es n, comencemos eligiendo un vector $u \in V$, tal que $u^2 \neq 0$ y consideremos el vector $e_n = \dfrac{u}{\sqrt{|u^2|}} \in V$, para el cual $e_n^2 = \pm 1$. Denotemos por $W = \mathcal{L}\{e_n\}$ el subespacio de V generado por e_n entonces $dim\,(W) = 1$ y $e_n \notin W^{\perp}$, pues de lo contrario $e_n^2 = 0$. Así $r = dim\left(W^{\perp}\right) < n$. La restricción del producto escalar a $W^{\perp} \times W^{\perp}$ es un producto escalar, luego la hipótesis inductiva nos asegura la existencia de una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ de $W^{\perp}$ para el cual $e_j \cdot e_k = 0$ para $1 \leqslant j \neq k \leqslant r$ y $e_i^2 = \pm 1$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.
El conjunto $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_r, e_n\}$ es base de V. En efecto, observemos que $r + 1 \leqslant n$; supongamos que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente dependiente; es decir, existen $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$

no todos ceros y $r+1 \neq 0$, tales que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i + \alpha_{r+1} e_n = 0$ luego

$$e_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i + \alpha_{r+1} e_n \right) = 0 \ \ , \ \ j = 1, 2, \ldots, r$$

entonces $\alpha_i = 0$ lo cual es una contradicción por tanto $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente.
Sea $v \in V$ un vector fijo y arbitrario. Definamos el vector

$$w = v - \left[e_n^2 \left(v \cdot e_n \right) \right] e_n$$

entonces $w \in W^{\perp}$, pues $w \cdot e_n = \{ v - [e_n^2 \left(v \cdot e_n \right)] e_n \} \cdot e_n = 0$. Por tanto el vector w se puede escribir $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_r e_r$. Luego

$$v = w + \left[e_n^2 \left(v \cdot e_n \right) \right] e_n = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_r e_r + \left[e_n^2 \left(v \cdot e_n \right) \right] e_n$$

por tanto $\mathcal{B}$ genera V. Teniendo en cuenta la observación inicial, $r+1 = n$ entonces $\mathcal{B}$ es base de V.
Para probar que el número q de vectores $e_i \in \mathcal{B}$ para los cuales $e_i^2 = -1$ no depende de la base, procedemos como sigue:
Si $q = 0$ entonces V posee subespacios sobre los cuales la forma métrica es definida negativa y por tanto tendrá un subespacio de dimensión maximal al cual denotamos $\mathcal{H}$, sobre el cual la forma métrica es definida negativa.
Por demostrar que $dim \left(\mathcal{H} \right) = q$, para ello ordenemos los elementos de $\mathcal{B}$ de la siguiente manera $\{ e_1, e_2, \ldots, e_{n-q+1}, e_{n-q+2}, \ldots, e_n \}$ tales que

$$e_i^2 = 1 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n-q$$
$$e_i^2 = -1 \ , \ i = n-q+1, n-q+2, \ldots, n$$

Denotemos por $\mathcal{X} = \mathcal{L} \left(e_{n-q+1}, e_{n-q+2}, \ldots, e_n \right)$ el subespacio de V generado por los e_i. Como la forma métrica es definida negativa en $\mathcal{X}$ y $dim\,(\mathcal{X}) = q$, tenemos $q \leqslant dim\,(\mathcal{H})$. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H} \subseteq V &\rightarrow \mathcal{X} \\ w = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i &\rightarrow T(w) = \sum_{i=n-q+1}^{n} w_i e_i \end{aligned}$$

T es lineal. Sea $w \in \mathcal{H}$; tal que $T(w) = \displaystyle\sum_{i=n-q+1}^{n} w_i e_i = \theta$, entonces $w_i = 0$ para $i = n-q+1, n-q+2, \ldots, n$ de donde $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-q} w_i e_i$. Por tanto

$$w^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-q} w_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-q} w_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n-q} w_i^2 \geqslant 0$$

como la forma métrica es definida negativa en $\mathcal{H}$, entonces $w_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n-q$; con lo cual $w = \theta$. Así $Ker\,(T) = \{\theta\}$ lo que implica que T es inyectiva, luego T es un isomorfismo de $\mathcal{H}$ sobre un subconjunto de $\mathcal{X}$. Por tanto $dim\,(\mathcal{H}) \leqslant dim\,(\mathcal{X}) = q$, así $q = dim\,(\mathcal{H})$. $\square$

Definición 5.11. Del teorema anterior, el número q se denomina índice de V. En este contexto V se denomina espacio seudoeuclidiano de dimensión $n \in \mathbb{N}$ e índice $q \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ y denotada por $V^{n,q}$.

Corolario 5.1. Sea V un espacio métrico. V es isométrico al espacio seudoeuclidiano canónico $\mathbb{R}^{n,q}$, para $q \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Observación 5.2.

- El teorema anterior garantiza que todo espacio seudoeclidiano $V^{n,q}$ admite una base ortonormal, tal que si $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ y $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ pertenecen a V entonces $u \cdot v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}^{n,q} u_i v_j$.
- Fijado $q \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, si en lugar de considerar $\delta_{ij}^{n,q}$ consideramos $\delta_{ij}^{n,n-q}$ se generan álgebras geométricas que no son isomorfas; solo por mencionar $AG(4, 3)$ es isomorfa al

espacio de las matrices 2×2 con entradas cuaterniónicas $M^{2\times 2}(\mathbb{H})$ y $AG(4,1)$ es isomorfa al espacio de las matrices 4×4 con entradas reales $M^{4\times 4}(\mathbb{R})$ (Ver [7, página 37]).

Capítulo 6

Álgebra de extensión de Grassmann

Consideremos el espacio tridimensional real $\mathbb{R}^3$ provisto del producto escalar.

Notación 6.1. $\bigwedge^2 (\mathbb{R}^3)$ denota el conjunto de todos los segmentos de plano en $\mathbb{R}^3$.

Definición 6.1 (Producto exterior)**.** Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \bigwedge^2 (\mathbb{R}^3) \\ (v, w) & \to & v \wedge w \end{array}$$

se denomina producto exterior.

El producto exterior asigna a cada par de vectores (v, w) el segmento de plano generado por v al barrer w, cuya orientación está dada por la regla de la mano derecha.

Proposición 6.1. Sean u, v y w vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- $u \wedge w = -w \wedge u$
- $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$
- $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$
- $(\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v) = \lambda(v \wedge v)$

- $\|u \wedge v\|$ denota la magnitud del segmento de plano formado por los vectores u y v, la cual está dada por el área del paralelogramo de lados dichos vectores. Así $\|u \wedge v\| = \|u\| \, \|v\| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el menor ángulo formado por los vectores.

Como consecuencia para cualquier par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$

$$u \wedge v = \alpha_{12} \left(e_1 \wedge e_2\right) + \alpha_{13} \left(e_1 \wedge e_3\right) + \alpha_{23} \left(e_2 \wedge e_3\right)$$

Es decir, cualquier bivector puede ser escrito como combinación lineal de los elementos del siguiente conjunto $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$. Además

$$\|e_i \wedge e_j\| = \begin{cases} 1 & \text{, si} \quad i \neq j \\ 0 & \text{, si} \quad i = j \end{cases}$$

Cuando hablamos de vectores paralelos hacemos referencia a vectores de la forma v y λv con $\lambda \in \mathbb{R}$, los cuales se denominan vectores linealmente dependientes. En el mismo sentido se dice que dos bivectores B_1 y B_2 son paralelos si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $B_1 = \lambda B_2$.
El producto por un escalar y la suma de bivectores se definen en forma natural.

Proposición 6.2. $\bigwedge^2 \left(\mathbb{R}^3\right)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión tres, cuya base es

$$\mathcal{B}_2 = \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$$

Notación 6.2. $\bigwedge^3 \left(\mathbb{R}^3\right)$ denota el conjunto de todos los segmentos de volumen (paralelepípedos) en $\mathbb{R}^3$.

Definición 6.2. Sean u, v y w vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. El producto exterior del bivector $u \wedge v$ con el vector w, denotado por $(u \wedge v) \wedge w$, se denomina trivector o segmento de volumen, y viene hacer el paralelepípedo de lados estos tres vectores.

El produto exterior tiene la propiedad de la asociatividad

$$(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w) = u \wedge v \wedge w$$

$\|u \wedge v \wedge w\|$ denota la magnitud (volumen) del paralelepípedo de lados u, v y w.

Sean u, v y w vectores en $\mathbb{R}^3$

$$u \wedge v \wedge w = \alpha_{123}\,(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \quad , \quad \alpha_{123} \in \mathbb{R}$$

Proposición 6.3. $\overset{3}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión uno, cuya base es

$$\mathcal{B}_3 = \{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$$

Notación 6.3.

- $\overset{0}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathbb{R}$ denota el espacio de los 0-vectores con base $\mathcal{B}_0 = \{1\}$.
- $\overset{1}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathbb{R}^3$ denota el espacio de los 1-vectores con base $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Definición 6.3. Sea $A \in \overset{k}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$. A se denomina k-vector simple y k se denomina el grado de A.

En el caso de los elementos de $\overset{1}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)$, se dice que dos vectores son iguales si tienen el mismo sentido, dirección y magnitud; pero en el caso de los elementos de $\overset{2}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)$ esta definición de igualdad no se cumple. Por ejemplo, sean $v, w \in \overset{1}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)$ y $u = v + \lambda w \in \overset{1}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$u \wedge w = (v + \lambda w) \wedge w = v \wedge w + \lambda(w \wedge w) = v \wedge w$$

Proposición 6.4. $dim\left(\overset{k}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} = dim\left(\overset{3-k}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$

Definición 6.4. Sean $A \in \overset{r}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)$ y $B \in \overset{s}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)$ $(r, s = 1, 2, 3)$. El producto exterior $A \wedge B \in \overset{k}{\bigwedge}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $k = 1, 2, 3$, se define de forma natural como el producto exterior de los vectores que los forman.

Veamos un ejemplo

$$(u \wedge v) \wedge (a) = u \wedge v \wedge a$$

Podemos extender nuestra definición del producto exterior, de forma que podamos considerar los elementos de $\bigwedge^0 (\mathbb{R}^3)$ (escalares), a través de la siguiente convención.
Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in \bigwedge^1 (\mathbb{R}^3)$

$$\alpha \wedge v = v \wedge \alpha = \alpha v$$

Definición 6.5. Sean $a \in \bigwedge^1 (\mathbb{R}^3)$ y $A \in \bigwedge^r (\mathbb{R}^3)$ $(r = 1, 2, 3)$. El producto escalar $a \cdot A \in \bigwedge^{r-1} (\mathbb{R}^3)$, $r = 1, 2, 3$. La definición del producto escalar se basa en la siguiente fórmula

$$v \cdot (a \wedge b \wedge c) = (v \cdot a)(b \wedge c) + (v \cdot b)(a \wedge c) + (v \cdot c)(a \wedge b) \in \bigwedge^{r-1} (\mathbb{R}^3)$$

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in \bigwedge^1 (\mathbb{R}^3)$, consideremos la siguiente convención

$$\alpha \cdot v = v \cdot \alpha = 0$$

Para extender el producto escalar al producto entre dos multivectores, tengamos en cuenta el siguiente ejemplo

$$\begin{aligned}(v \wedge w) \cdot (a \wedge b) &= v \cdot (w \cdot (a \wedge b)) \\ &= v \cdot ((w \cdot a)b - (w \cdot b)c) \\ &= (w \cdot a)(v \cdot b) - (w \cdot b)(v \cdot c) \in \bigwedge^0 (\mathbb{R}^3)\end{aligned}$$

Donde el grado del multivector resultante está dado por la diferencia positiva de los grados de cada multivector.

6.1. Álgebra de extensión de Grassmann $\mathcal{G}_3$

Consideremos el espacio $\bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right) = \bigoplus_{k=0}^{3} \bigwedge^{k}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Sean $A, B \in \bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. La suma $A + B \in \bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right)$ y $\lambda A \in \bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right)$ se definen de forma natural.

Proposición 6.5. $\bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, de dimensión 8.

La aplicación

$$\begin{aligned} \wedge\ : \bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right) \times \bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right) &\rightarrow \bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right) \\ (A, B) &\rightarrow A \wedge B \end{aligned}$$

se denomina producto exterior de multivectores, el cual posee la propiedad de la distributividad respecto a la suma de multivectores.

Definición 6.6. $\left(\bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right), \wedge\right)$ se denomina álgebra de extensión de Grassmann asociada a $\mathbb{R}^3$ y se denota por $\mathcal{G}_3$.

$\mathcal{G}_3$ es un álgebra graduada o también llamada $\mathbb{Z}_2$-graduada, la cual se puede descomponer en una suma directa de subespacios homogéneos de grado definido y menor o igual a 3.

6.2. Producto geométrico

Definición 6.7. La aplicación:

$$\begin{aligned} \bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right) \times \bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right) &\rightarrow \mathcal{G}_3 \\ (a, b) &\rightarrow a\, b = a \cdot b + a \wedge b \end{aligned}$$

se denomina producto geométrico.

El producto geométrico es no conmutativo. Además en base a ella podemos escribir el producto exterior y escalar

$$\begin{aligned} 2\,(a \cdot b) &= (a\,b + b\,a) \\ 2\,(a \wedge b) &= (a\,b - b\,a) \end{aligned}$$

El producto geométrico contiene información geométrica relevante.

Proposición 6.6. Dos vectores son colineales si y solo si su producto geométrico es conmutativo. Dos vectores son perpendiculares si y solo si su producto geométrico es anticonmutativo.

Propiedades 6.1. Sean $a, b, c \in \bigwedge^{1}\left(\mathbb{R}^3\right)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene

- $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$ y $(a + b)\,c = a\,c + b\,c$
- $\lambda(a\,b) = (\lambda a)\,b = a\,(\lambda b)$
- $a(b\,c) = (a\,b)c = a\,b\,c$

Definición 6.8. Sean $a \in \bigwedge^{1}\left(\mathbb{R}^3\right)$ y $A \in \mathcal{G}_3$, entonces

$$a\,A = a \cdot A + a \wedge A$$

Observación 6.1. Sean $A, B \in \mathcal{G}_3$, debemos de tener en cuenta lo siguiente

$$A\,B \neq A \cdot B + A \wedge B$$

Definición 6.9. El álgebra geométrica asociada a $\mathbb{R}^3$: $AG(3)$, se define como el espacio vectorial $\mathcal{G}_3$ provisto del producto geométrico.

Capítulo 7

Comentarios y notas históricas

Según la teoría de la relatividad, el espacio donde ocurren los eventos es un espacio cuadrimensional llamado espacio–tiempo. Compuesto por las tres direcciones espaciales ya conocidas y una cuarta de carácter temporal. Además el espacio–tiempo no posee estructura euclidiana como la del espacio tridimensional. El espacio–tiempo posee una estructura seudoeclidiana. El pensar en cuatro dimensiones nos dificulta el pleno entendimiento y apreciación de una teoría de la relatividad. Por ejemplo, la imposibilidad de la visualización. La única manera de poder explorar este mundo cuadrimensional es a través de un modelo matemático. A través de ella surge la necesidad de formalizar adecuadamente los conceptos para su plena comprensión e interpretación. Además podremos generalizar dichos conceptos en un sentido que puedan ser utilizados para estudiar espacios de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Este es el caso del álgebra vectorial de Gibbs, presentada en 1901 en su trabajo *Vector Analysis*. El cual es un espacio vectorial provisto del producto vectorial o cruz de vectores; qla cual no existe ni en dos ni en cuatro dimensiones. Por tanto, la estructura de Gibbs no es útil, ya que no puede ser generalizada a través de comparaciones. El álgebra de Gibbs fue presentada como una unificación y posterior generalización de los sistemas de Grassmann y Hamilton en 1866. Además existe otra desventaja; en una estructura cerrada como en el caso de un álgebra, el resultado del producto de dos elementos debe de seguir siendo un elemento del álgebra, lo cual no ocurre en el álgebra de Gibbs. El producto vectorial de dos vectores no es un vector. Debido a esto se debe la denominación de seudovector. Lo que necesitamos es una estructura matemática basada en la definición de un nuevo producto vectorial, sobre la cual podamos formular los conceptos y teorías físicas que tienen lugar en el espacio tridimensional, pero que no se limiten solo a ella. El ágebra de Clifford o álgebra geométrica es una alternativa para el estudio de la teoría de la relatividad. Antes del avance del álgebra vectorial de Gibbs, W. R. Clifford presentó su estructura en 1878; el cual no tenía los problemas del álgebra de Gibbs. Además de no limitarse solo a tres dimensiones. La diferencia entre ambas álgebras está en la definición del producto de vectores. El producto geométrico ya había sido descubierto por Grassmann en forma independiente. Su motivación para introducir un nuevo producto fue mostrar que el álgebra de los cuaterniones de Hamilton podía ser incrustada en su propia álgebra de extensión. El producto geométrico se puede definir en cualquier espacio vectorial independiente de su dimensión. Además contiene mayor información y propiedades que el producto de Gibbs. Por ejemplo la asociatividad, la existencia de un elemento inverso, orientación, etc.

El álgebra de Clifford es de cierta forma la fusión de dos sistemas: los cuaterniones de Hamilton y el álgebra de extensión de Grassmann. Los cuaterniones de Hamilton son una generalización natural del sistema de los números complejos, el cual surgió en 1844. La disputa entre adeptos y críticos de los cuaterniones no llevó a nada fructífero, por el contrario desvió la atención del sistema de Grassmann; quien entendió el concepto de vector en el sentido en que este objeto se define por las relaciones que satisface y no por su naturaleza en sí.

En relación con la física, resulta particularmente importante el espacio de Minkowski de dimensión cuatro con signatura $(+++-)$ al cual se denomina el espacio–tiempo de Minkowski. El concepto de espacio–tiempo dentro de la teoría de la relatividad, fue introducida por Hernann Minkowski en 1908 y por eso es común usar la denominación espacio–tiempo de Minkowski.

El producto geométrico de $AG(n)$ une el producto escalar de $\mathbb{R}^n$ y el producto exterior de $\mathcal{G}_n$, uniendo la información geométrica de ambas; de ahí el carácter unificador del álgebra geométrica. $AG(3)$ sirve como ambiente natural al estudio de la mecánica cuántica; a través de la teoría de Pauli, donde podemos redefinir el producto vectorial del álgebra de Gibbs mediante la dualidad. $AG(4,1)$ sirve de ambiente a la teoría de Dirac que abarca el estudio de la mecánica cuántica y la electrodinámica cuántica.

Hermann Minkowski, matemático alemán, profesor de Albert Einstein en Zurich, en 1907 dio la forma geométrica definitiva a la teoría de la relatividad. La cual empezó a ver la luz con los trabajos de Lorentz y Poincairé. La geometría a la que más se adecuaba la teoría era la de una no euclidiana tetradimensional donde el espacio y el tiempo están íntimamente ligadas, Minkowski le dio el nombre de espacio–tiempo.

La teoría de la relatividad especial usa como ambiente de trabajo el espacio tetradimensional de Minkowski. Este a su vez usa la métrica de Lorentz o de Minkowski; la cual a diferencia de lo que ocurre en los espacios euclidianos, los cuales son invariantes bajo rotaciones y traslaciones, es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Minkowski descubrió que si a un evento $s = (x, y, z, t)$, el cual mediante la métrica euclidana $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, se le agrega la unidad imaginaria $\boldsymbol{i}$, de la siguiente manera $s = (x, y, z, \boldsymbol{i}t)$ entonces $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (\boldsymbol{i}t)^2$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Como consecuencia directa de esto se obtiene la fórmula para la métrica del espacio–tiempo

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

7.1. Algo del álgebra de extensión de Grassmann

El matemático alemán H. G. Grassmann generalizó una construcción, la cual tuvo origen en su trabajo denominado Cálculo del Baricentro de Möbius. Donde la expresión AB fue usada para denotar la línea que une el punto A con el punto B y ABC para denotar el triángulo definido por los puntos A, B y C; algo que rescató fue lo siguiente: si en la expresión AB se intercambia el orden entonces BA representa la misma línea, pero en sentido opuesto al inicial. Grassmann pensó en la línea AB como el producto de los puntos A y B; luego al pensar en A y B como vectores el resultado AB será el paralelogramo de lados A y B. Así no solo se tiene puntos, segmentos de recta, segmentos de plano; también segmentos de volumen tridimensionales. Además de considerar entre estos conjuntos al campo de los escalares sobre los cuales se está trabajando.

El producto escalar y el producto exterior expresan nociones geométricas que ayudaron a responder una pregunta: *¿cuál es la diferencia entre escalares y vectores*?, una respuesta es *sus interpretaciones geométricas*. El producto escalar de vectores está ligado al segmento de recta orientada obtenida al dilatar la proyección de un vector sobre la magnitud de otro. La magnitud y la orientación del segmento de recta resultante es un escalar al que conocemos como producto escalar. Grassmann definió originalmente este producto haciendo uso de la correspondencia con la proyección ortogonal; así el producto escalar puede ser definido abstractamente como una regla que relaciona escalares con vectores, el cual tiene la propiedad de ser commutativa. El producto escalar se relaciona con direcciones relativas, pero no puede expresar el hecho geométrico: *dos segmentos de recta no paralelas determinan un paralelogramo*, esto es solucionado por el producto exterior de Grassmann. El producto exterior y el escalar se complementan describiendo relaciones geométricas independientes. Existen muchos productos que tratan de expresar nociones geométricas, por ejemplo el producto vectorial o cruz. El producto geométrico o producto de Clifford simplifica y sintetiza los productos mencionados y por tanto reúne sus significados geométricos.

Apéndice A

Sobre el caso $AG(n, q)$

Considere el conjunto de los polinomios de n variables $\mathbb{R}\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$ el cual es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial y un subespacio vectorial de este, denotado por

$$AG(n, q) \subseteq \mathbb{R}\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$$

Usando la convención de la suma, podemos escribir los polinomios de grado k, tenemos

$$AG(n, q) = \{a_0 + a_i x_i + a_{ij} x_{ij} + a_{ijk} x_{ijk} + \ldots + a_{12\ldots n} x_{12\ldots n} \,/\, a_r \in \mathbb{R}\}$$

El producto en $AG(n, q)$, al que denominaremos producto geométrico, satisface la identidad de Dirac

$$x_i x_j + x_j + x_i = 2\delta_{ij}^{n,q}$$

Definición .1. $AG(n, q) \subseteq \mathbb{R}\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$ dotado del producto geométrico, define un álgebra al que denominaremos presentación polinomial del álgebra geométrica o de Clifford asociada al espacio seudoeclidiano $\mathbb{R}^{n,q}$.

Cabe destacar que las propiedades y resultados obtenidos no dependen de la forma como se presentan las álgebras geométricas; sino de las operaciones a usar y esto es lo que permite extender nuestros resultados a espacios vectoriales de mayor dimensión.

$AG(n, q) = \bigoplus_{r=0}^{n} AG^{(r)}(n, q)$, donde $AG^{(0)}(n, q) = \mathbb{R}$ y $AG^{(1)}(n, q) = \mathcal{L}\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] \cong \mathbb{R}^n$.

Proposición .1. Sea V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión n, entonces el álgebra geométrica, asociada a V, $AG(n,q)$ tiene dimensión 2^n.

Demostración. $AG(n,q) = \bigoplus_{r=0}^{n} AG^{(r)}(n,q)$, como $dim\left(AG^{(r)}(n,q)\right) = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$, entonces

$$dim\left(AG(n,q)\right) = \sum_{r=0}^{n}\left(dim\left(AG^{(r)}(n,q)\right)\right) = 2^n$$

□

Proposición .2. Sea V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión n, entonces la subálgebra par $AG(n,q)^+$, asociada a $AG(n,q)$, tiene dimensión 2^{n-1}.

Demostración. Se sabe que $(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}y^k$, haciendo $x=1$ e $y=-1$ tenemos $0 = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left(-1^k\right)$, entonces $\sum_{k\ par}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \sum_{k\ impar}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, por lo tanto $dim\left(AG(4,1)^+\right) = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$. □

Notación .1. Sean $u, v \in AG^{(1)}(n,q)$, denotaremos

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \frac{uv+vu}{2} \\ u \wedge v &= \frac{uv-vu}{2} \end{aligned}$$

donde $u \cdot v$ se denomina parte simétrica y $u \wedge v$ se denomina parte antisimétrica del producto geométrico.

El producto geométrico de dos vectores se puede escribir en función de sus partes simétricas y antisimétricas de la siguiente manera

$$uv = u \cdot v + u \wedge v$$

Ápéndice B
Álgebras matriciales de Pauli y Dirac

$AG(3)$ es isomorfo al álgebra de las matrices de Pauli $\mathcal{P}$, a través de la siguiente identificación entre sus elementos de la base

$$e_1 \leftrightarrow \sigma_1 \ , \ e_2 \leftrightarrow \sigma_2 \ , \ e_3 \leftrightarrow \sigma_3 \tag{1}$$

donde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se denominan matrices de Pauli.

$\mathcal{P}$ es usado en Mecánica Cuántica y las matrices de Pauli generan $M^{2\times 2}(\mathbb{C})$; es decir

$$AG(3) \cong \mathcal{P} \cong M^{2\times 2}(\mathbb{C}) \tag{2}$$

este es un isomorfismo como álgebras asociativas y no como álgebras de Clifford, pues el producto de dos elementos de $AG(3)$ puede ser un número real; mientras que en $M^{2\times 2}(\mathbb{C})$ el producto de dos matrices sigue siendo una matriz. Debido a esto $AG(3)$ se le denomina álgebra de Pauli y sus elementos se denominan p-números.

$AG(4,1)$ es isomorfo al álgebra de las matrices de Dirac $\mathcal{D}$, a través de la siguiente identificación entre los elementos de sus bases

$$e_1 \leftrightarrow \gamma_1 \ , \ e_2 \leftrightarrow \gamma_2 \ , \ e_3 \leftrightarrow \gamma_3 \ , \ e_4 \leftrightarrow \gamma_4 \tag{3}$$

donde

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se denominan matrices de Dirac.

Las matrices de Dirac generan $M^{4\times4}(\mathbb{C})$, de la siguiente manera

$$AG(4,1) \cong \mathcal{D} \subset M^{4\times4}(\mathbb{C}) \tag{4}$$

el cual es un isomorfismo de álgebras asociativas. Debido a esto a $AG(4,1)$ se denomina álgebra de Dirac y sus elementos se denominan d-números.

Ápéndice C

Producto vectorial ante la conjugación espacial

Como se mencionó el producto vectorial o cruz del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, posee desventajas, por ejemplo no puede ser extendida a más dimensiones o en dos dimensiones no podemos hablar de vector ortogonal a dos vectores cualesquiera. Aquí presentamos otra desventaja, para ello haremos uso de la conjugación espacial.

Sean dos vectores $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ en $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial se define como

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

el cual es ortogonal a ambos vectores.

Definición .2. Se define la aplicación

$$\begin{aligned} {}^{-} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\rightarrow \bar{v} = -v \end{aligned}$$

denominada conjugación espacial, la cual es un automorfismo que revierte el sentido de los vectores en el espacio.

Este automorfismo nos dice lo siguiente: «todo vector, en el espacio, cambia de sentido al aplicársele la conjugación espacial». En base a esto veamos cual es defecto del producto vectorial. Sean v

y w dos vectores en el espacio

$$\bar{v} \times \bar{w} = v \times w$$

como

$$\overline{v \times w} = \bar{v} \times \bar{w}$$

se tiene

$$v \times w = \overline{v \times w}$$

lo cual nos lleva a concluir que $v \times w$ no es un vector, ya que no cambia de sentido ante una conjugación espacial. El problema radica en la definición del producto vectorial, para describir **un vector** ortogonal al plano generado por otros dos vectores.

Definición .3. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \times : AG^{(1)}(3) \times AG^{(1)}(3) & \to & AG^{(1)}(3) \\ (v, w) & \to & v \times w = \star(v \wedge w) \end{array}$$

Se denomina producto vectorial.

Por lo visto en capítulos anteriores $v \times w = -(v \wedge w)I$. Con esta definición $v \times w$ es un vector ortogonal a v y w, pues es el dual de un bivector en $AG(3)$. Por tanto $v \times w$ está bien definida. La definición del producto vectorial no depende de la dimensión, es por ello que es aplicable en cualquier espacio $n-$dimensional. Ahora vamos a ver como soluciona el problema que existe con el producto vectorial

$$\begin{aligned}
\overline{v \times w} &= \overline{-(v \wedge w)I} \\
&= -(-v \wedge -w)(-I) \\
&= (v \wedge w)I \\
&= -(-(v \wedge w)I) \\
&= -(v \times w)
\end{aligned}$$

La definición del producto vectorial proviene de lo siguiente

$$v \times w = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \,,\; v \wedge w = \begin{pmatrix} \sigma_2 \wedge \sigma_3 & \sigma_3 \wedge \sigma_1 & \sigma_1 \wedge \sigma_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

a través de la dualidad

$$\begin{aligned}
v \times w &= \begin{pmatrix} \star(\sigma_2 \wedge \sigma_3) & \star(\sigma_3 \wedge \sigma_1) & \star(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \\
v \times w &= \star(v \wedge w)
\end{aligned}$$

Aunque parezcan semejantes, las expresiones de la última igualdad, la diferencia radica en que el producto exterior no requiere de una métrica; mientras que el producto vectorial requiere o induce una. La métrica está involucrada en la posición que toma $v \times w$ respecto al plano $v \wedge w$.

Ápéndice D
Producto geométrico y rotaciones

Un número $x + \boldsymbol{i}y \in \mathbb{C}$ puede ser identificado con un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Al multiplicar $x + \boldsymbol{i}y$ con la unidad imaginaria se obtiene un vector $(-y, x) = -y + \boldsymbol{i}x$ ortogonal a este. El inconveniente es como saber si este vector ortogonal fue obtenido al rotar $x + \boldsymbol{i}y$ en sentido horario o antihorario. Para ilustrar esto consideremos $AG(2)$ e $I = e_1e_2$.

$$\begin{aligned} e_1I = e_2 \quad &, \quad Ie_1 = -e_2 \\ e_2I = -e_1 \quad &, \quad Ie_2 = e_1 \end{aligned}$$

En el caso de e_1 se puede obtener dos vectores ortogonales e_2 y $-e_2$, donde el primero fue obtenido al hacer rotar e_1 90° en sentido antihorario y e_2 al rotar 90° en sentido horario. Lo mismo ocurre en el caso de e_2. Por tanto el producto geométrico describe mucho mejor la forma en la que se obtienen estos resultados haciendo uso de I como un operador.

Bibliografía

[1] Hestenes David. *New Foundations for Classical Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[2] Nicolái Vladíminovich Efimov. *Geometría Superior.* Editorial MIR Moscú, 1978.

[3] Naber L. Gregory. *The Geometry of Minkowski Space. An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity.* Springer–Verlag New York, Inc. 1992.

[4] Flanders Harley. *Diferential Form with aplications to the Physical Sciences.* Dover Publication, Inc. New York, 1989.

[5] Jayme Vaz Jr. *A álgebra geométrica do espaço euclideano e a teoría de Pauli.* Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 19, n° 2:234-238, juhno, 1997.

[6] Jayme Vaz Jr. *A álgebra geométrica do espaço-tempo e a teoría da relatividade.* Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 22 n° 1:14-23, março, 2000.

[7] Lounesto, P. *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, 2001.

[8] Snigg, J. *Clifford Algebra a Computacional tool for Physicists*. Oxford University Press, 1997.

[9] Rafal Ablamowics y Garret Sobczyk. *Lectures on Clifford(Geometric) Algebras and Aplications.* Library of congress cataloging-in-Publication data, 2003.