UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E. A. P. DE MATEMÁTICA

Teorema Normalización Poincaré Dulac en C^n

TESIS

Para optar el título profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Liliana Olga Jurado Cerrón

ASESOR

Renato Mario Benazic Tomé

Lima – Perú

2012

TEOREMA NORMALIZACIÓN POINCARÉ DULAC EN $\mathbb{C}^n$

Liliana Olga Jurado Cerrón

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad, como parte de los requisitos necesarios para obtener el Título Profesional de Licenciada de Matemática.

Aprobado por:

Dr. Edgar Vera Saravia
(Presidente)

Dr. Renato Mario Benazic Tomé
(Miembro Asesor)

Dr. Pedro Contreras Chamorro
(Miembro)

Lima-Perú

2012

Ficha Catalográfica

LILIANA OLGA JURADO CERRÓN.

Teorema Normalización Poincaré Dulac $\mathbb{C}^n$.

Lima-2012 (UNMSM, Licenciada, Matemática).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Facultad de Ciencias Matemáticas 1.Matemática.

I. UNMSM-Facultad de Ciencias Matemáticas.

II.Titulo(Serie).

A mis padres y hermanos por su apoyo incondicional durante todo este tiempo.

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi orientador el profesor Renato Benazic Tomé, y a los profesores Edgar Vera Saravia y Pedro Contreras Chamorro.
Quiero agradecer también a mi familia Olga Cerrón Lagos, Samuel Jurado Sanchez, Williams Jurado Cerrón y Alejandro Jurado Cerrón por su paciencia y confianza durante este tiempo, así como también a mis amigos cercanos de la UNMSM.

Resumen

LILIANA OLGA JURADO CERRON

MAYO-2012

Asesor : Dr. Renato Benazic Tomé.

Titulo Obtenido: Licenciada en Matemática.

El presente trabajo estudia Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Complejas y se demostrará los siguientes teoremas, Teorema de Linealización de Poincaré en $\mathbb{C}^n$ que dice que un campo con autovalores no resonantes es localmente equivalente con su parte lineal y el Teorema de Dulac en $\mathbb{C}^n$ que dice que un campo con autovalores resonantes es localmente equivalente a un campo polinomial.

PALABRAS CLAVES: CAMPOS VECTORIALES HOLOMORFOS
LINEALIZACIÓN
POINCARÉ-DULAC

Abstract

LILIANA OLGA JURADO CERRON

MAYO-2012

Adviser : Dr. Renato Benazic Tomé.

Obtained title: Graduate in Mathematics.

. . . .

This work studies Ordinary Differential Equations Systems Complex and prove the following theorems, Theorem Poincaré Linearization in $\mathbb{C}^n$ which says that a field with non-resonant eigenvalues is locally equivalent to its linear part and Theorem Dulac says will show that a field with eigenvalues resonant is locally equivalent to a polynomial field.

<u>KEYWORDS</u>: HOLOMORPHIC VECTOR FIELDS
LINEALIZATION
POINCARÉ-DULAC

Índice general

Introducción

La teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) se convierte en una disciplina Matemática de las más importantes no sólo en la Matemática sino en otras ramas del conocimiento, como la Física, Química, Biología, Ecología, Economía e Ingeniería. En la mayoría de las EDO no es posible obtener una solución explicita, por este motivo se tuvieron que crear técnicas y una base teórica adecuada para estudiar la existencia y el comportamiento de las soluciones de una EDO dada. La teoría de los Sistemas Dinámicos tiene por finalidad entender el comportamiento cualitativo de las soluciones de una EDO dada con el objetivo de predecir los resultados. Una técnica bien usada en los Sistemas Dinámicos es la clasificación de las Ecuaciones Diferenciales de acuerdo a ciertas propiedades que se desean estudiar (topológicas, diferenciales, analíticas, etc). La clasificación, en una vecindad de un punto regular de una EDO, esta determinado por el Teorema del Flujo Tubular y por tal razón la preocupación mayor es en los puntos singulares de dicha EDO. El comportamiento de las soluciones en un punto singular es muy rico en el sentido topológico y para su estudio se emplean otras teorías como : Análisis en Varias Variables Reales y Complejas, Topología Diferencial, Topología Algebraica y otros temas.

El problema de Linealización de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Complejas comenzó a estudiarse a finales del siglo **XIX** con los trabajos pioneros de H. Poincaré y Dulac (dimensión n=2) en la decada de los 50 del siglo XX, Siegel hizo contribuciones importantes al tema,estudiando los casos que Poincaré y Dulac habían dejado pendientes. En la decada de los 70 del siglo XX se trataron de extender los trabajos de Poincaré, Siegel y Dulac a dimensión n cualquiera. Las hipótesis más generales fueron obtenidas por Brujino (1971) .

En el primer capítulo del presente trabajo se introducirá conceptos y resultados de carácter general que serán utilizados a lo largo de la tesis.

En el segundo capítulo estudiaremos campos en $\mathbb{C}^2$ cuya parte lineal es no nula, se probará que para campos cuyos autovalores estan en el Dominio de Poincaré es localmente equivalente a su parte lineal o a un campo polinomial.

En el tercer capítulo estudiaremos ecuaciones diferenciales que podemos transformarlas a formas mas simples sin resolverlas. La reducción a formas normales es efectuado por medio de series de potencias. El método actúa sobre series que pueden o no ser convergentes y es útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el cuarto capítulo se probará los teoremas principales de este trabajo sobre campos holomorfos en el dominio de Poincaré: Teorema 4.1 (Teorema de Linealización de Poincaré en $\mathbb{C}^n$) que dice que un campo con autovalores no resonantes es localmente equivalente con su parte lineal y el Teorema 4.2 (Teorema de Dulac en $\mathbb{C}^n$) que dice que un campo con autovalores resonantes es localmente equivalente a un campo polinomial.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios normados y espacios de Banach

Definición 1.1 *Sea M un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una norma sobre M es una aplicación $x \to \|x\|$, de M en $\mathbb{R}$, verificando:*

- $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in M$
- $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in M$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in M$

En este contexto un *espacio normado* es llamado $(M, \|\cdot\|)$ con norma $\|\cdot\|$.
Por otro lado podemos definir una distancia en M. Concretamente podemos ver facilmente que la aplicación

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

es en virtud de las propiedades de la norma, una distancia en M, llamada *distancia inducida* por la norma $\|.\|$ y cumple:

- $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$

- $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in M$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in M$

Definición 1.2 *El par (M, d) es un espacio métrico si y sólo si M es un conjunto no vacío y $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una métrica sobre M.*

Los conceptos de función continua y función Lipschitz entre espacios métricos son definidos de manera natural. En efecto, sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) dos espacios métricos y consideremos una función $f : M_1 \longrightarrow M_2$. Decimos que f es *continua* en el punto $x_0 \in M_1$ si y sólo si si dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $d_1(x, x_0) < \delta$ entonces $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Se dice que f es *continua* en M_1 si y sólo si f es continua en x_0 para todo $x_0 \in M_1$. Decimos que f es *lipschitz* en M_1 si y sólo si existe una constante $K > 0$ tal que $d_2(f(x), f(y)) \leq K d_1(x, y)$, para todo $x, y \in M_1$. Cuando la constante K es menor que uno, decimos que f es *contracción* .

Una sucesión en el espacio métrico (M, d) es una función que a cada número natural n le asocia un elemento x de M llamado *n-ésimo* término de la sucesión. En símbolos:

$$\begin{array}{cccc} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & M \\ & \text{n} & \longrightarrow & x_{(n)} = x_n \end{array}$$

Como de costumbre, el símbolo $(x_n) \subseteq M$ significa que (x_n) es una sucesión en el espacio métrico M.

Sean $(x_n) \subseteq M$ y $x \in M$, decimos que x es el *límite* de la sucesión (x_n) cuando n tiende al infinito, lo que denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ si y sólo si dado un $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Una sucesión $(x_n) \subseteq M$ es llamada *convergente* si y sólo si tiene límite, es decir $\exists x \in M$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. En caso contrario, decimos que la sucesión (x_n) es *divergente.*

Una sucesión $(x_n) \subseteq M$ es llamada *sucesión* de *Cauchy* si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Es claro que toda sucesión convergente es de Cauchy, sin embargo el recíproco no siempre es cierto. Aquellos espacios métricos en los que toda sucesión de Cauchy es convergente, son llamados *espacios métricos completos*.

El siguiente es uno de los teoremas más importantes de los espacios metŕicos completos que sera de utilidad para prueba del teorema Poincaré-Dulac, una demostración del mismo puede encontrarse en [13].

Teorema 1.1 *(El Teorema del Punto Fijo para Contracciones) Sea (M, d) un espacio métrico completo y $F : M \longrightarrow M$ una contracción. Entonces existe un único punto $x_0 \in M$tal que:*

- $F(x_0) = x_0$ *(es decir, x_0 es punto fijo de F).*
- $\lim\limits_{n\to\infty} F^n(x) = x_0, \forall x \in M$ *(es decir, x_0 es un atractor de F).*

Definición 1.3 *Se dice que un espacio normado M es un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en M es convergente a un punto de M. En este caso diremos que la norma de M es completa.*

Veamos que la completitud de un espacio de Banach se transfiere a sus espacios cerrados. Las proposiciones q se pasan a enunciar se puede encontrar la prueba en [8]

Proposición 1.1 *Sea M un espacio de Banach y X un subespacio de M. Si X es cerrado en M, entonces X es un espacio de Banach.*

Proposición 1.2 *Sean M, N dos espacios normados y $F : M \longrightarrow N$ un isomorfismo. M es de Banach si y sólo si N es de Banach.*

1.2. Funciones holomorfas de varias variables complejas

Denotaremos por $\mathbb{C}^n$ al conjunto de todas las n-uplas (n$\geq$ 1) de n*ú*meros complejos, es decir:

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, ..., z_n); z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}\}$$

Los elementos $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ son llamados puntos de $\mathbb{C}^n$ y los números complejos $z_1, ..., z_n$ son las coordenadas complejas de z. Donde $z_j = x_j + iy_j$; x_j,$y_j \in \mathbb{R}$, asi $z = (z_1, ..., z_n)$ se puede expresar como

$$z = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

Sean $z = (z_1, ..., z_n)$ y $w = (w_1, ..., w_n)$ puntos de $\mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.
Definimos la suma y el producto por un escalar como:

$$z + w = (z_1 + w_1, ..., z_n + w_n)$$

$$\alpha z = (\alpha z_1, ..., \alpha z_n)$$

Es inmediato ver que con estas operaciones $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión compleja n.
Denotaremos a $\mathbb{C}^n$ de la topologia producto:
Un polidisco abierto (respectivamente cerrado) en $\mathbb{C}^n$ de centro $a = (a_1, ..., a_n); \in \mathbb{C}^n$ y poliradio $r = (r_1, ..., r_n) \in (\mathbb{R}^n)^+$, denotado por $\Delta(a; r)$ (respectivamente $\Delta[a; r]$), es el conjunto definido por:

$$\Delta(a; r) = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j - a_j| < r_j, \forall 1 \leq j \leq n\}$$

$$\text{respect.} \, (\Delta[a; r] = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j - a_j| \leq r_j, \forall 1 \leq j \leq n\})$$

Observe que

$$\Delta(a; r) = D_{r_1}(a_1) \times ... \times D_{r_n}(a_n) \;\; y \;\; \Delta[a; r] = D_{r_1}[a_1] \times ... \times D_{r_n}[a_n]$$

Donde:

$$D_{r_j}(a_j) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a_j| < r_j\} \;\; y \;\; D_{r_j}[a_j] = \{z \in \mathbb{C}; |z - a_j| \leq r_j\}$$

Es claro que $\mathbb{C}^n$ dotado de la topología cuya base es generada por los polidiscos abiertos es un espacio topológico quivalente a $\mathbb{R}^{2n}$ dotado de la topología cuya base es generada por las bolas abiertas. Asi todos los resultados conocidos de la topología de los espacios euclideanos $\mathbb{R}^{2n}$ pueden ser aplicados a $\mathbb{C}^n$.

Definición 1.4 *Un Multi-índice de dimensión n, es una n-upla de enteros no negativos* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$*, su NORMA se define como:*

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$$

Sea $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ *y* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ *definimos:*

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} ... z_n^{\alpha_n}$$

Definición 1.5 *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto y* $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ *decimos que* f *es Analítica en* $a = (a_1, a_2, ...a_n) \in \mathbb{U}$ *si y sólo si existe polidisco abierto* Δ *centrado en* a *tal que* f *tiene una expansión en serie de potencias.*

$$f(z) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=0}^{\infty} c_\alpha (z_1 - a_1)^{\alpha_1} (z_2 - a_2)^{\alpha_2} ..... (z_n - a_n)^{\alpha_n} \tag{1.1}$$

la cual es convergente $\forall z = (z_1, z_2, ...z_n) \in \Delta$

Notación:

$$A(\mathbb{U}) = \{f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}, f \;\; es \;\; analítica \;\; en \;\; \mathbb{U}\}$$

Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ como $\mathbb{C}^n$ puede ser identificado con $\mathbb{R}^{2n}$ via

$$z = (z_1, ..., z_n) = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$$

tenemos que $f(z) = u(z) + iv(z) = (u(z), v(z))$.
Las funciones :

$$u, v : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$$

son llamadas Parte Real y Parte Imaginaria de f
La prueba de la siguiente proposición se puede encontrar en [3].

Proposición 1.3 *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto y* $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ *tal que* $f(z) = u(z) + iv(z)$, f *es continua en* $\mathbb{U}$ *si y sólo si* $u, v \in C(\mathbb{U}, \mathbb{R})$.

Definición 1.6 *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto y* $f = (u, v) \in C^1(\mathbb{U})$*(en el sentido real) para j=1,....n definimos los operadores* $\frac{\partial}{\partial z_j}$ *y* $\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$ *como:*

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial y_j}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial y_j}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial y_j}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial y_j}\right)$$

Observación 1.1 *Si* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}$ *abierto y* $f = (u, v) \in C^1(\mathbb{U})$ *del análisis en una variable compleja sabemos que* f *es holomorfa si y sólo si* u *y* v *satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en* $\mathbb{U}$ *es decir:* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ *en* $\mathbb{U}$.
Usando los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ *y* $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ *tenemos: Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}$ *abierto y* $f = (u, v) \in C^1(\mathbb{U})$, f *es holomorfa en* $\mathbb{U}$ *si y sólo si* $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
Más aún en caso afirmativo se tiene que $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Definición 1.7 *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto y* $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$. *Decimos que* f *es Holomorfa en* $\mathbb{U}$ *si y sólo si* $f \in C^1(\mathbb{U})$ *y* $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = 0 \ \forall 1 \leq j \leq n$.

El siguiente teorema nos permite expresar toda función holomorfa como la expansión de una serie analítica. La prueba se puede encontrar en [3].

Teorema 1.2 *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto y* $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

1. $f \in O(\mathbb{U})$
2. f *es holomorfa en* $\mathbb{U}$

La siguiente proposición y corolario su prueba se puede encontrar en [3].

Proposición 1.4 (*Regla de la Cadena*) : *Sean* $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}^m$ *abiertos* $F = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$ *tales que* $f_1, ..., f_m \in C^1(\mathbb{U})$ *y* $g \in C^1(\mathbb{V})$. *Entonces* $goF \in C^1(\mathbb{U})$ *y para cada* $j = 1, .., n$ *se cumple:*

1. $\dfrac{\partial (goF)}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{m} \left[\dfrac{\partial g}{\partial w_k} \dfrac{\partial f_k}{\partial z_j} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{w}_k} \dfrac{\partial \overline{f}_k}{\partial z_j} \right]$

2. $\dfrac{\partial goF}{\partial \overline{z}_j} = \sum_{k=1}^{m} \left[\dfrac{\partial g}{\partial w_k} \dfrac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{w}_k} \dfrac{\partial \overline{f}_k}{\partial \overline{z}_j} \right].$

Corolario 1.1 *Sean $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$, $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}^m$ abiertos $F = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$ tales que $f_1, ..., f_m \in O(\mathbb{U})$ y $g \in O(\mathbb{V})$ entonces $goF(\mathbb{U})$.*

Dado $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, una función $F : \mathbb{U} \to \mathbb{C}^m$. Como $F(z) \in \mathbb{C}^m$ entonces existen m funciones $f_1, ..., f_m : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ llamadas funciones coordenadas de F tal que $F(z) = (f_1(z), ..., f_m(z))$.

Definición 1.8 *Con las notaciones anteriores, decimos que:*
$F = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{U} \to \mathbb{C}^m$ es una Función Holomorfa si y sólo si $f_1, ..., f_m \in O(\mathbb{U})$.

Notación:

$$O(\mathbb{U}, \mathbb{C}^m) = \{F : \mathbb{U} \to \mathbb{C}^m, \ \ F \ \ es \ \ holomorfa \ \ en \ \ \mathbb{U}\}$$

Proposición 1.5 *Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$, $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}^m$ abiertos $F \in O(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ y $G \in O(\mathbb{V})$ entonces $GoF \in O(U)$.*

Observación 1.2 *Podemos generalizar el resultado anterior. Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$, $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}^m$ abiertos, $F \in O(\mathbb{U}, \mathbb{V})$, $G \in O(\mathbb{V}, \mathbb{C}^p)$ entonces $G \circ F \in O(\mathbb{U}, \mathbb{C}^p)$.*

Definición 1.9 *Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $F = (f_1, ..., f_n) \in O(\mathbb{U}, \mathbb{C}^m)$. La Matriz Jacobiana de F en $a \in \mathbb{U}$, se define como:*

$$JF(a) = \frac{\partial (f_1, ..., f_m)}{\partial (z_1, ..., z_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

En la definición anterior como $f_i \in O(\mathbb{U})$ para $i = 1, ..., m$ existen $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}$ en $\mathbb{U}$ entonces existe la matriz jacobiana de F en $a \in \mathbb{U}$ $(JF(a))$.

Definición 1.10 *Si $m \leq n$ decimos que $a \in \mathbb{U}$ es un Punto Regular de F si y sólo si $ran(JF(a)) = m$ es decir el numero de vectores filas (o vectores columnas) son linealmente independientes de la matriz $JF(a)$ es m.*

Notaciones:

1. $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m; m \leq n$. En este caso un punto $z = (z_1, .., z_n) \in \mathbb{C}^n$ será escrito como: $z = (z', z'')$ donde $z' = (z_1, .., z_{n-m}), z'' = (z_{n-m+1}, ..., z_n)$

2. Escribiremos:

$$JF(a) = \left[JF'(a), JF''(a)\right] \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

donde:

$$JF'(a) = \frac{\partial (f_1, ..., f_m)}{\partial (z_1, .., z_{n-m})}(a) \in \mathbb{C}^{m \times n-m}$$
$$JF''(a) = \frac{\partial (f_1, ..., f_m)}{\partial (z_{n-m+1}, .., z_n)}(a) \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

El siguiente teorema nos servirá para la demostración del Teorema de la Función Inversa. Una demostración se puede encontrar en [3].

Teorema 1.3 *(Teorema de la Función Implícita) Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto conexo.* $F = (f_1, ..., f_m) \in O(\mathbb{U}, \mathbb{C}^m)$, $m \leq n$. *Si* $a \in \mathbb{U}$ *es un punto regular de* F *tal que:* *rang* $\left(JF''(a)\right) = m$ *entonces existe un polidisco* $\Delta(a, r) = \Delta\left(a', r'\right) \times \Delta\left(a'', r''\right) \subseteq U$ *y* $\exists G \in O\left(\Delta\left(a', r'\right), \Delta\left(a'', r''\right)\right)$ *tal que:*

1. $G\left(a'\right) = a''$

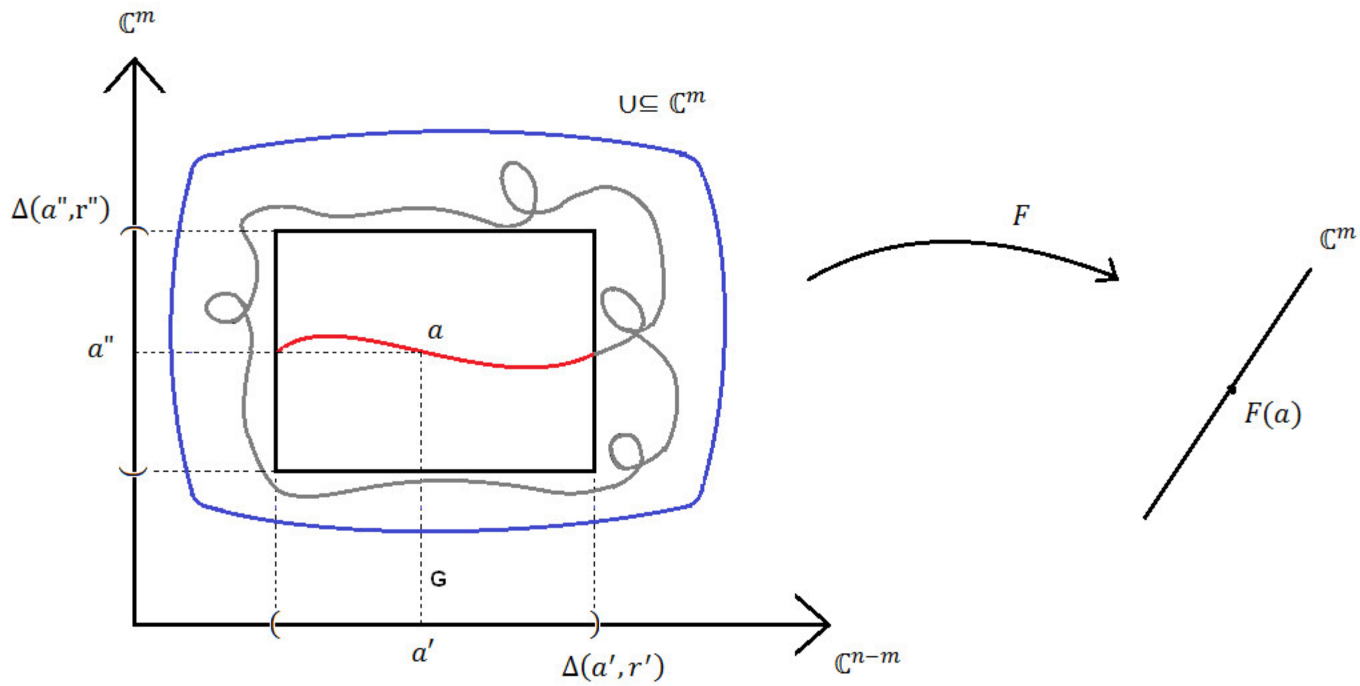
2. $F^{-1}(F(a)) \cap \Delta(a, r) = Graf(G)$

Definición 1.11 *Sean* $\mathbb{U}, \mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abiertos y* $F : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$. *Decimos que* F *es un Biholomorfismo entre* $\mathbb{U}$ *y* $\mathbb{V}$ *si y sólo si se cumplen:*

1. F *es una biyección entre* $\mathbb{U}$ *y* $\mathbb{V}$

2. $F \in O(\mathbb{U}, \mathbb{V})$

3. $F^{-1} \in O(\mathbb{V}, \mathbb{U})$



Denotamos por $Bihol(\mathbb{U},\mathbb{V})$ al conjunto de todos los biholomorfismo $\mathbf{F}$ entre $\mathbb{U}$ y $\mathbb{V}$.

Definición 1.12 *Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $F : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una función. Decimos que F es un Biholomorfismo Local si y sólo si $\forall z \in \mathbb{U}, \quad \exists_n \mathbb{V}_z \subseteq \mathbb{U}$ y $\mathbb{W}_z \subseteq \mathbb{C}^n$ abiertos con $z \in \mathbb{V}_z$ y $F(z) \in \mathbb{W}_z$ tales que $F \in Bihol(\mathbb{V}_z, \mathbb{W}_z)$.*

Un resultado importante es el siguiente Teorema del Mapeo Inverso, proporciona las condiciones suficientes para que un mapeo holomorfo sea biholomorfo en una vecindad de un punto. A continuación el enunciado y su prueba.

Teorema 1.4 *(Teorema de la Función Inversa) Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $F \in O(\mathbb{U}, \mathbb{C}^n)$ y $a \in \mathbb{U}$. Si $JF(a) \in GL(\mathbb{C}^n)$ entonces existen abiertos $\mathbb{V}_a \subseteq \mathbb{U}, \mathbb{W}_a \subseteq \mathbb{C}^n$ con $a \in \mathbb{V}_a$, $b = F(a) \in \mathbb{W}_b$ talque $F \in Bihol(\mathbb{V}_a, \mathbb{W}_b)$.*

Prueba:

Se define:

$H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}^n$; $H = (z', z'') = F(z'') - z'$. Haciendo $H = (h_1, ..., h_n)$ y $F = (f_1, ..., f_n)$

luego:

$H(z_1, ..., z_n) = F(z_{n+1}, ..., z_{2n}) - (z_1, ..., z_n) = (f_1(z_{n+1}, ..., z_{2n}) - z_1, ..., f_n(z_{n+1}, ..., z_{2n}) - z_n)$

luego $h_j(z_1, ..., z_n) = f_j(z_{n+1}, ..., z_{2n}) - z_j$ $(1 \leq j \leq n)$.

Se sigue que H es holomorfa en $\mathbb{C}^n \times \mathbb{U}$ ya que cada coordenada de H es holomorfa y $H(b, a) = F(a) - b = 0$.

Por otro lado :

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_{n+k}}(z_1, ..., z_{2n}) = \frac{\partial f_j}{\partial z_{n+k}}(z_1, ..., z_{2n}) \ \ \forall 1 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(h_1, .., h_n)}{\partial(z_{n+1}, ..., z_{2n})}(b, a) = \frac{\partial(f_1, .., f_n)}{\partial(z_{n+1}, ..., z_{2n})}(a) = JF(a) \in GL(\mathbb{C}^n)$$

$$\Rightarrow rang[\frac{\partial(h_1, .., h_n)}{\partial(z_{n+1}, ..., z_{2n})}(b, a)] = n$$

y por el teorema del mapeo implícito $\exists \ \ \Delta(b, \delta) \times \Delta(a, r) \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{U}$ polidisco abierto y $\exists G : \Delta(b, \delta) \longrightarrow \Delta(a, r)$ mapeo holomorfo tal que

$$G(b) = a \quad y \quad H^{-1}(0) \bigcap [\Delta(b, \delta) \times \Delta(a, r)] = Graf(G),$$

es decir: $z' = F(z'') \Longleftrightarrow z'' = G(z')$ en $\Delta(b, \delta) \times \Delta(a, r)$.
Por lo tanto : $G = (F \diagup \Delta(a, r))^{-1}$. ∎

1.3. Campos vectoriales holomorfos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Definición 1.13 *Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto. Un Campo Vectorial Holomorfo es una función*

$$Z : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

si $z \in \mathbb{U}$, $Z(z) = (Z_1(z), Z_2(z), ..., Z_n(z))$ tal que :

1. $Z_1, Z_2, ..., Z_n \in O(\mathbb{U})$

2. *Si* $z \in \mathbb{U}$ *entonces* $Z(z) \in \mathbb{C}^n$ *es un vector cuyo punto de aplicación es* z.

Notación:

$$\mathcal{X}(\mathbb{U}) = \{Z : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, Z \;\; es \;\; un \;\; campo \;\; vectorial \;\; holomorfo \;\; en \;\; \mathbb{U}\}$$

Definición 1.14 *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto y* $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$. *Un punto* $z_0 \in \mathbb{U}$ *es llamado Punto Singular de* Z *si y sólo si* $Z(z_0) = 0$, *caso contrario* z_0 *es llamado punto regular de* Z.

Notación:

$$Sing(Z) = \{z_0 \in \mathbb{U}, z_0 \;\; es \;\; punto \;\; singular \;\; de \;\; Z\}$$

Definición 1.15 *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto,* $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$, $z_0 \in \mathbb{U}$ *y su expansión en serie de potencias* Z *es*

$$Z(z) = \left(\sum_{|\alpha| \geq 0} c_{1\alpha} (z - z_0)^{\alpha}, \sum_{|\alpha| \geq 0} c_{2\alpha} (z - z_0)^{\alpha}, ..., \sum_{|\alpha| \geq 0} c_{n\alpha} (z - z_0)^{\alpha} \right)$$

Sea $k \geq 0$, *El Jet de Orden* k *o k-JET de* $Z =$ *en* z_0 *se define como:*

$$J^k_{z_0}(Z) = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{k} c_{1\alpha} (z - z_0)^{\alpha}, \sum_{|\alpha|=0}^{k} c_{2\alpha} (z - z_0)^{\alpha}, ..., \sum_{|\alpha|=0}^{k} c_{n\alpha} (z - z_0)^{\alpha} \right)$$

Observación 1.3

1. Si $J^0_{z_0}(Z) = \left(c_{1,(0,0,..,0)}, ..., c_{n,(0,0,..,0)}\right)$ luego : $z_0 \in Sing(Z)$ si y sólo si $J^0_{z_0}(Z) = 0$

2. $z_0 \in Sing(Z)$ entonces $J^1_{z_0}(Z) = Z'(z_0)(z - z_0)$, donde $J^1_{z_0}(Z)$ es llamado *Parte Lineal* de Z.

Definición 1.16 *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto,* $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$.

1. *La* ***EDO*** *asociada al campo holomorfo* Z *es dada por:*

$$z' = Z(z) \tag{1.2}$$

2. *Una solución de la* ***EDO*** *(1.2) es una función holomorfa* $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{U}$, *donde* $D \subseteq \mathbb{C}$ *es un disco abierto, tal que*

$$\varphi'(T) = Z(\varphi(T)), \quad \forall\, T \in D$$

Observación 1.4 1. $z' = \frac{dz}{dT}, T \in \mathbb{C}$

2. $Z = (Z_1, ..., Z_n) \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$ *y* $z = (z_1, ..., z_n)$ *entonces (1.2) es equivalente a:*

$$\left| \begin{array}{ccr} z_1' & = & Z_1(z_1, ..., z_n) \\ z_2' & = & Z_2(z_1, ..., z_n) \\ .. & .. & .. \\ z_n' & = & Z_n(z_1, ..., z_n) \end{array} \right.$$

3. $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ *es solución de (1.2) entonces:*

$$\left| \begin{array}{ccr} \varphi_1' & = & Z_1(\varphi_1(z), \varphi_2(z), .., \varphi_n(n)) \\ \varphi_2' & = & Z_2(\varphi_1(z), \varphi_2(z), .., \varphi_n(n)) \\ .. & .. & .. \\ \varphi_n' & = & Z_n(\varphi_1(z), \varphi_2(z), .., \varphi_n(n)) \end{array} \right.$$

Definición 1.17 *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto,* $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$, $z_0 \in \mathbb{U}$, $T_0 \in \mathbb{C}$

1. *El P.V.I asociado a* Z, z_0 *y* T_0 *es dado por:*

$$\left| \begin{array}{ccc} z_1' & = & Z(z) \\ z(T_0) & = & z_0 \end{array} \right. \tag{1.3}$$

2. *Una solución de (1.3) es una función holomorfa* $\varphi_{z_0} : D \longrightarrow \mathbb{U}$ *donde* $D \subseteq \mathbb{C}$ *donde* $D \subseteq \mathbb{C}$ *es un polidisco abierto tal que:*

   - $T_0 \in D$
   - $\varphi_{z_0}'(T) = Z(\varphi(T)), \forall T \in D$
   - $\varphi_{z_0}(T_0) = z_0$

1.4. Ecuaciones no lineales con parte lineal no nula

Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$ y $z_0 \in \mathbb{U}$ entonces podemos definir su flujo local

$$\varphi_Z : D_\delta [0] \times \Delta \left[z_0, r' \right] \longrightarrow \Delta [z_0, r]$$

$$(T, z_1) \longrightarrow \varphi_Z (T, z_1) = \varphi_{z_1} (T)$$

Definición 1.18 *Sean* $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto,* $Z_1 \in \mathcal{X}(\mathbb{U}_1), Z_2 \in \mathcal{X}(\mathbb{U}_2), p_1 \in \mathbb{U}_1, p_2 \in \mathbb{U}_2$ *y consideremos los flujos locales asociados*

$$\varphi_1 : D_\delta [0] \times \Delta \left[p_1, r' \right] \longrightarrow \Delta [p_1, r]$$

$$\varphi_2 : D_\delta [0] \times \Delta \left[p_2, r' \right] \longrightarrow \Delta [p_2, r]$$

Decimos que Z_1 *es localmente topológicamente (respect. analíticamente) conjugado a* Z_2 *alrededor de* p_1 *y* p_2*, lo que denotamos* $Z_1 \approx_{top} Z_2 \,(Z_1 \approx_{anal} Z_2)$ *si y sólo si existen vecindades abiertas* $V_1 \subseteq \Delta \left(p_1, r' \right), V_2 \subseteq \Delta \left(p_2, r' \right)$ *de* p_1 *y* p_2 *y* $\exists h : \mathbb{V}_1 \longrightarrow \mathbb{V}_2$ *homeomorfismo (respect. biholomorfismo) llamado* Conjugación Topológica *(respect.* Analítica*) local tal que :*

$$h(\varphi_1(T, z)) = \varphi_2(T, h(z)) \,\forall (T, z) \in D_\delta(0) \times \mathbb{V}_1$$

La siguiente proposición proporciona un criterio bastante útil para determinar si dos campos son conjugados, sin necesidad de usar los flujos.

Proposición 1.6 *Sean* $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \subseteq \mathbb{C}^n, Z_1 \in \mathcal{X}(\mathbb{U}_1), Z_2 \in \mathcal{X}(\mathbb{U}_2), p_1 \in \mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{U}_1, p_2 \in \mathbb{V}_2 \subseteq \mathbb{U}_2$ *y* $h : \mathbb{V}_1 \longrightarrow \mathbb{V}_2$ *biholomorfismo son equivalentes:*

1. *h es una conjugación analítica local entre Z_1 y Z_2 alrededor de p_1 y p_2*
2. $h'(z) Z_1(z) = Z_2(h(z)) \;\forall\; z \in \mathbb{V}_1$

Prueba:

1) $\Rightarrow$ 2) Por hipótesis :

$$h(\varphi_1(T, z)) = \varphi_2(T, h(z)) \quad \forall (T, z) \in D_\delta(0) \times \mathbb{V}_1$$

$$h^{'}\left(\varphi_1\left(T,z\right)\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}\left(T,z\right)=\frac{\partial\varphi_2}{\partial T}\left(T,h\left(z\right)\right)\ \ \forall\left(T,z\right)\in D_\delta\left(0\right)\times\mathbb{V}_1$$

$T=0$

$$h^{'}\left(\varphi_1\left(0,z\right)\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial T}\left(0,z\right)=\frac{\partial\varphi_2}{\partial T}\left(T,h\left(z\right)\right)\ \ \forall z\in\mathbb{V}_1$$

$$h^{'}\left(z\right)Z_1\left(\varphi_1\left(0,z\right)\right)=Z_2\left(\varphi_2\left(0,h\left(z\right)\right)\right)\ \ \forall z\in\mathbb{V}_1$$

$$h^{'}\left(z\right)Z_1\left(z\right)=Z_2\left(h\left(z\right)\right)\ \ \forall z\in\mathbb{V}_1$$

2) $\Rightarrow$ 1) Dado $z\in\mathbb{V}_1$ definimos :

$$\Psi:D_\delta\left(0\right)\longrightarrow\mathbb{V}_2\quad;\quad\Psi\left(T\right)=h\left(\varphi_1\left(T,z\right)\right)$$

$$\Psi:D_\delta\left(0\right)\longrightarrow\mathbb{V}_2\quad;\quad\Psi\left(T\right)=h\left(\varphi_1\left(T,z\right)\right)$$

$$\Psi\left(0\right)=h\left(\varphi_1\left(0,z\right)\right)=h\left(z\right)\ \ \textit{luego}\quad\Psi\quad\textit{es solucion del PVI}$$

$$w^{'}=Z_2\left(w\right)$$
$$w\left(0\right)=h\left(z\right)$$

cuya solución viene dada por $\varphi_2\left(T,h\left(z\right)\right)\quad\forall\ T\in D_\delta\left(0\right)$.

Por unicidad : $h\left(\varphi_1\left(T,z\right)\right)=\Psi\left(T\right)=\varphi_2\left(T,h\left(z\right)\right)\quad\forall T\in D_\delta\left(0\right)$

■

1.5. Series de potencias formales y convergentes

En la siguiente sección se definirá una serie formal de potencias, sus operaciones y proposiciones que utilizaremos más adelante en la demostración del Teorema Poincaré-Dulac en $\mathbb{C}^2$.

Definición 1.19 *Una serie formal de variables $X_1, X_2, ..., X_n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, es una expresión de la forma :*

$$A = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n}$$

Donde $a_\alpha \in \mathbb{C}, \forall \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ El conjunto de de tales series formales será denotado por $\mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$.

Observación 1.5 *Si denotamos $\mathbb{C}\left[X_1, X_2, ..., X_n\right]$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes complejos y variables $X_1 \;\; , X_2 \;\; , ... \;\; , X_n$ entonces:*

$$\mathbb{C}\left[X_1, X_2, ..., X_n\right] \subset \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$$

Sean $A, B \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$,

$$A = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n} \qquad B = \sum_{|\alpha| \geq 0} b_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n}$$

Definimos la suma y el producto como:

$$A + B = \sum_{|\alpha| \geq 0} \left(a_\alpha + b_\alpha\right) X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n}$$

$$AB = \sum_{|\alpha| + |\beta| \geq 0} a_\alpha b_\beta X_1^{\alpha_1 + \beta_1} X_2^{\alpha_2 + \beta_2} ... X_n^{\alpha_n + \beta_n}$$

Proposición 1.7 *Se cumple:*

1. $(AB)\, C = A\, (BC)\,, \;\; \forall A, B, C \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$

2. $A\,(B + C) = AB + AC$ *y* $(A + B)\, C = AC + BC, \;\; \forall A, B, C \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$

3. $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\, B = A\,(\alpha B)\,, \;\; \forall A, B, C \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right] \;\; \forall \alpha \in \mathbb{C}$

4. $AB = BA, \;\; \forall A, B, C \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$

5. $\exists \;\; E \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$ *talque* $AE = EA = A, \;\; \forall A \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$

Prueba:

3) Sean $A = \sum\limits_{|I|\geq 0} a_I X_1^{I_1}...X_n^{I_n}$, $B = \sum\limits_{|J|\geq 0} b_J X_1^{J_1}...X_n^{J_n}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\alpha(AB) = \alpha\left(\sum_{|I|\geq 0} a_I X_1^{I_1}...X_n^{I_n} \sum_{|J|\geq 0} b_J X_1^{J_1}...X_n^{J_n}\right) = \alpha\left(\sum_{|I|+|J|\geq 0} a_I b_J X^{I+J}\right)$$

$$= \sum_{|I|+|J|\geq 0} \alpha a_I b_J X^{I+J} = \sum_{|I|+|J|\geq 0} (\alpha a_I) b_J X^{I+J} = \sum_{|I|\geq 0} \alpha a_I X_1^{I_1}...X_n^{I_n} \sum_{|J|\geq 0} b_J X_1^{J_1}...X_n^{J_n}$$

$$= (\alpha A) B.$$

4)

$$AB = \sum_{|I|\geq 0} a_I X_1^{I_1}...X_n^{I_n} \sum_{|J|\geq 0} b_J X_1^{J_1}...X_n^{J_n} = \sum_{|I|+|J|\geq 0} a_I b_J X^{I+J} = \sum_{|J|+|I|\geq 0} b_J a_I X^{J+I} = BA$$

5) Sea $E = \sum\limits_{|J|\geq 0} b_J X^J$ tal que $b_J = 1$ si $J = (0,..,0)$ y $b_J = 0$ si $J \neq (0,..,0)$

$$AE = \sum_{|I|\geq 0} a_I X_1^{I_1}...X_n^{I_n} \sum_{|J|\geq 0} b_J X_1^{J_1}...X_n^{J_n} = \sum_{|I|+|J|\geq 0} a_I b_J X^{I+J} = \sum_{|I|\geq 0} a_I X_1^{I_1}...X_n^{I_n} = A$$

$\blacksquare$

Definición 1.20 *Dado* $A = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}..X_i^{\alpha_i}..X_n^{\alpha_n} \in \mathbb{C}[[X_1, X_2, ..., X_n]]$ *definimos* $\frac{\partial A}{\partial X_i} \in \mathbb{C}[[X_1, X_2, ..., X_n]]$ *como*

$$\frac{\partial A}{\partial X_i} = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha \alpha_i X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}..X_i^{\alpha_i - 1}...X_n^{\alpha_n}$$

Definición 1.21 *Definimos el operador* $\frac{\partial}{\partial X_i}$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial X_i}: & \mathbb{C}[[X_1, X_2, ..., X_n]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[X_1, X_2, ..., X_n]] \\ & A & \longrightarrow & \frac{\partial A}{\partial X_i} \end{array}$$

Proposición 1.8 *Se cumple:*

1. $\frac{\partial(A+B)}{\partial X_i} = \frac{\partial A}{\partial X_i} + \frac{\partial B}{\partial X_i}, \ \ \forall A, B \in \mathbb{C}[[X_1, X_2, ..., X_n]]$

2. $\frac{\partial(\alpha A)}{\partial X_i} = \alpha \frac{\partial A}{\partial X_i}, \forall A \in \mathbb{C}[[X_1, X_2, ..., X_n]], \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$

3. $\frac{\partial(AB)}{\partial X_i} = \frac{\partial A}{\partial X_i}B + A\frac{\partial B}{\partial X_i}, \ \ \forall A, B \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$

De manera análoga podemos definir las derivadas parciales de orden superior.

Definición 1.22 *Sea* $A = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha X_1^{\alpha_1}...X_1^{\alpha_1} \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$ *definimos:*

$$D_A = \left\{ (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z_1^{\alpha_1}...z_n^{\alpha_n} \in \mathbb{C} \right\}$$

D_A esta formado por los puntos en $\mathbb{C}^n$ tal que $\sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z_1^{\alpha_1}...z_n^{\alpha_n}$ es convergente. Donde $D_A \neq \varnothing$ ya que $(0, ..., 0) \in D_A$.

Vamos a buscar condiciones tal que D_A tenga interior no vacio y asi tener un abierto en D_A. Denotamos $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty\rangle$.

Definición 1.23 *Sea* $A = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha X_1^{\alpha_1}...X_1^{\alpha_1} \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$ *definimos el conjunto*

$$\Gamma_A = \left\{ (r_1, ..., r_n) \in \left(\mathbb{R}_0^+\right)^n; \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|\, r_1^{\alpha_1}...r_n^{\alpha_n} < +\infty \right\}$$

Observe que $\Gamma_A \neq \Phi$ ya que $(0, ..., 0) \in \Gamma_A$.

La siguiente proposición nos permite encontrar un abierto en D_A.

Proposición 1.9 *Si* $(r_1, ..., r_n) \in \Gamma_A$ *entonces* $\Delta\left[(0, ..., 0), (r_1, ..., r_n)\right] \subseteq D_A$.

Prueba: Sea $(z_1, ..., z_n) \in \Delta\left[(0, ..., 0), (r_1, ..., r_n)\right]$ y $k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\sum_{|\alpha|=0}^{k} |a_\alpha|\, |z_1|^{\alpha_1} ... |z_n|^{\alpha_n} \leq \sum_{|\alpha|=0}^{k} |a_\alpha|\, r_{r_1}^{\alpha_1}...r_{r_n}^{\alpha_n}$$

Luego la serie de números complejos $\sum_{\alpha\geq O} a_\alpha z_1^{\alpha_1}...z_n^{\alpha_n}$ es absolutamente convergente y por lo tanto convergente, luego $(z_1, ..., z_n) \in D_A$ ■

Definición 1.24 *Si* $A = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n} \in \mathbb{C}\left[[X_1, X_2, ..., X_n]\right]$ *definimos a la serie formal* $\widetilde{A}$ *de términos no negativos en* $X_1, X_2, ..., X_n$ *como*

$$\widetilde{A} = \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|\, X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n}$$

y definimos $\widehat{A}$ *a la serie formal de términos no negativos en* X *como*

$$\widehat{A} = \sum_{|\alpha| \geq 0} |a_\alpha| \, X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} ... X^{\alpha_n}.$$

Definición 1.25 *Definimos los siguientes operadores*

$$\Phi : \mathbb{C}\left[\left[X_1, X_2, ..., X_n\right]\right] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+\left[\left[X, X, ..., X\right]\right]$$

$$A \longrightarrow \Phi\left(A\right) = \widetilde{A}$$

$$\Psi : \mathbb{C}\left[\left[X_1, X_2, ..., X_n\right]\right] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+\left[\left[X\right]\right]$$

$$A \longrightarrow \Psi\left(A\right) = \widehat{A}$$

Proposición 1.10 *Si* $\Psi\left(A\right) = \widehat{A}$ *es convergente en* $D_R\left[0\right]$ *entonces* $\left(R, ..., R\right) \in \Gamma_A$.

Prueba: Dado $k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\sum_{|\alpha|=0}^{k} |a_\alpha| \, R^{q_1} ... R^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=0}^{k} |a_\alpha| \, R^{|\alpha|} = \sum_{n=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=0} |a_\alpha| \right) R^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=0} |a_\alpha| \right) R^n < +\infty$$

luego $\displaystyle\sum_{|\alpha| \geq 0} a_{|\alpha|} R^{\alpha_1} ... R^{\alpha_n} < +\infty$ y por tanto $\left(R, ..., R\right) \in \Gamma_A$. ■

Observación 1.6 *Por la proposición anterior tenemos, sea* $A \in \mathbb{C}\left[\left[X_1, ..., X_n\right]\right]$*, si* $\Psi\left(A\right) = \widehat{A}$ *es convergente en* $D_R\left[0\right] \longrightarrow \Delta\left[\left(0, ..., 0\right), \left(R, ..., R\right)\right] \subseteq D_A$*. luego* A *es convergente en* Δ.

Sean: $A = \displaystyle\sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$; $\mathbf{B} = \displaystyle\sum_{|\alpha| \geq 0} b_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$ Definimos

$$\widehat{A} \leq \widehat{B} \longleftrightarrow |a_\alpha| \leq |b_\alpha|$$

Observación 1.7 *Sabemos que dado* $A \in \mathbb{C}\left[\left[X_1, ..., X_n\right]\right]$ *se puede escribir* $A = \sum_{n \geq 0} A_n$*, donde:*

$$A_n = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$$

es un polinomio homogéneo de grado n *en las variables* $X_1, ..., X_n$*. Se cumple:*

$$\widehat{A} \leq \widehat{B} \longleftrightarrow \widehat{A_n} \leq \widehat{B_n}, \qquad \forall n \geq 0.$$

Proposición 1.11 *Se cumple* $\forall A, B \in \mathbb{C}\left[\left[X_1, ..., X_n\right]\right]; \beta \in \mathbb{C}$

1. $\widehat{A+B} \leq \widehat{A} + \widehat{B}$

2. $\widehat{\beta A} = |\beta|\,\widehat{A}$

3. $\widehat{A_n B_m} \leq \widehat{A_n}\widehat{B_m}$

4. $\widehat{AB} \leq \widehat{A}\widehat{B}$

Prueba:

3) Sean $A_n = \sum\limits_{|I|=n} a_I X^I$ y $B_m = \sum\limits_{|J|=n} b_J X^J$

$$A_n B_m = \sum_{|I|+|J|=n+m} a_I b_J X^{I+J}$$

$$\widehat{A_n B_m} = \sum_{|I|+|J|=n+m} |a_I b_J|\, X^{I+J} \leq \sum_{|I|+|J|=n+m} |a_I|\,|b_J|\, X^{I+J} = \widehat{A_n}\widehat{B_m}$$

4) Como $(AB)_n = \sum\limits_{|I|+|J|=n} a_I b_J X^{I+J}$, se tiene

$$\widehat{(AB)}_n = \sum_{|I|+|J|=n} |a_I b_J|\, X^{I+J} \leq \sum_{|I|+|J|=n} |a_I|\,|b_J|\, X^{I+J} = \left(\widehat{A}\widehat{B}\right)_n$$

Se sigue que $\widehat{AB} \leq \widehat{A}\widehat{B}$ ∎

Capítulo 2

Teorema de Linealización y Poincaré-Dulac en $\mathbb{C}^2$

2.1. Conjugación formal y resonancias

Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in \mathbb{U}$, $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$ con singularidad aíslada en 0.

$$Z(z) = (\lambda_1 z_1 + \sum_{|\alpha| \geq 2} a_{1,\alpha} z^\alpha, \lambda_2 z_2 + \sum_{|\alpha| \geq 2} a_{2,\alpha} z^\alpha)$$

Z con parte lineal no nula, es decir:

$$Z'(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Su EDO asociado es:

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 + A_1(z) \qquad (2.1) \\ z_2' &= \lambda_2 z_2 + A_2(z) \end{aligned}$$

donde

$$A_j(z) = \sum_{|\alpha| \geq 2} a_{j,\alpha} z^\alpha ; (j = 1, 2)$$

A continuación se demostrará el teorema de linealización de Poincaré.Para la demostración de este teorema un cambio de coordenadas formal del tipo pertubación de la identidad .

Teorema 2.1 *Dada la EDO*

$$z_1' = \lambda_1 z_1 + \sum_{|\alpha|\geq 2} a_{1,\alpha} z^\alpha \tag{2.2}$$

$$z_2' = \lambda_2 z_2 + \sum_{|\alpha|\geq 2} a_{2,\alpha} z^\alpha$$

Existe un cambio formal de coordenadas del tipo perturbación de la identidad

$$z_1 = w_1 + \sum_{|\alpha|\geq 2} \xi_{1,\alpha} w^\alpha \tag{2.3}$$

$$z_2 = w_2 + \sum_{|\alpha|\geq 2} \xi_{2,\alpha} w^\alpha$$

que transforma (2.2) en la EDO

$$w_1' = \lambda_1 w_1 + \sum_{|\alpha|\geq 2} b_{1,\alpha} w^\alpha$$
$$w_2' = \lambda_2 w_2 + \sum_{|\alpha|\geq 2} b_{2,\alpha} w^\alpha$$

En donde $\xi_{j,\alpha}$ y $b_{j,\alpha}$ satisfacen la relación:

$$b_{j,\alpha} = 0,\ \ si\ \delta_{j,\alpha} = \lambda_j - \alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2 \neq 0$$

$$\xi_{j,\alpha} = 0,\ \ si\ \delta_{j,\alpha} = \lambda_j - \alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2 = 0.$$

Prueba: Sea $\xi(w) = (\xi_1(w), \xi_2(w)) = \left(\sum_{|\alpha|\geq 2} \xi_{1,\alpha} w^\alpha, \sum_{|\alpha|\geq 2} \xi_{2,\alpha} w^\alpha\right)$ Vamos a procurar que ξ transforme (2.2) en la EDO

$$w_1' = \lambda_1 w_1 + B_1(w)$$

$$w_2' = \lambda_2 w_2 + B_2(w).$$

Como $z_j = w_j + \xi_j(w)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_j z_j + A_j(z) &= z_j' \\
&= w_j' + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) w_k' \\
&= \lambda_j w_j + B_j(w) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w)(\lambda_k w_k + B_k(w)).
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lambda_j(w_j+\xi_j(w))+A_j(\xi(w))=\lambda_j w_j+B_j(w)+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\xi_j}{\partial w_k}(w)(\lambda_k w_k+B_k(w)).$$

Cancelando y reordenando tenemos

$$\lambda_j\xi_j(w)-\sum_{k=1}^{2}\lambda_k w_k\frac{\partial\xi_j}{\partial w_k}(w)-B_j(w)=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\xi_j}{\partial w_k}B_k(w)-A_j(\xi(w)), \tag{2.4}$$

como $w_k\frac{\partial\xi_j}{\partial w_k}(w)=\sum_{|\alpha|\geq 2}\alpha_k\xi_{j,\alpha}w^{\alpha}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_j\xi_j(w)-\sum_{k=1}^{2}\lambda_k w_k\frac{\partial\xi_j}{\partial w_k}(w)-B_j(w) &= \sum_{|\alpha|\geq 2}\lambda_j\xi_{j,\alpha}w^{\alpha}-\sum_{k=1}^{2}\lambda_k(\sum_{|\alpha|\geq 2}\alpha_k\xi_{j,\alpha}w^{\alpha})-\sum_{|\alpha|\geq 2}b_{j,\alpha}w^{\alpha}\\ &= \sum_{|\alpha|\geq 2}[(\lambda_j-\sum_{k=1}^{2}\lambda_k\alpha_k)\xi_{j,\alpha}-b_{j,\alpha}]w^{\alpha}.\end{aligned}$$

Denotando $\delta_{j,\alpha}=\lambda_j-\sum_{k=1}^{2}\lambda_k\alpha_k$ y reemplazando en (2.4) para $j=1,2$ obtenemos:

$$\sum_{|\alpha|\geq 2}(\delta_{j,\alpha}\xi_{j,\alpha}-b_{j,\alpha})w^{\alpha}=\frac{\partial\xi_j}{\partial w_1}(w)B_1(w)+\frac{\partial\xi_j}{\partial w_2}(w)B_2(w)-\mathbf{A}_j(\xi(w))=\sum_{|\alpha|\geq 2}c_{j,\alpha}w^{\alpha}. \tag{2.5}$$

Trabajando en el lado derecho de (2.5): $|\alpha|=2\Rightarrow c_{j,\alpha}=-a_{j,\alpha}$. Si $|\alpha|>2$ entonces $c_{j,\alpha}$ es funcion de $a_{1,\alpha'}$, $a_{2,\alpha'}$, $b_{1,\alpha'}$, $b_{2,\alpha'}$, $\xi_{1,\alpha'}$ y $\xi_{2,\alpha'}$, donde $|\alpha'|<|\alpha|$. Igualando terminos en (2.5) tenemos:

$$|\alpha|=2:\ \ \delta_{j,\alpha}\xi_{j,\alpha}-b_{j,\alpha}=-a_{j,\alpha}\ (j=1,2)$$

Si $\delta j,\alpha=0$ entonces hacemos $\xi_{j,\alpha}=0$ y $b_{j,\alpha}=a_{j,\alpha}$. Si $\delta j,\alpha\neq 0$ entonces hacemos $b_{j,\alpha}=0$ y $\xi_{j,\alpha}=-\dfrac{a_{j,\alpha}}{\delta_{j,\alpha}}$. Para $|\alpha|=3$ tenemos $\delta_{j,\alpha}\xi_{j,\alpha}-b_{j,\alpha}=c_{j,\alpha}$ $(j=1,2)$, donde $c_{j,\alpha}$ depende de $a_{1,\alpha'}$, $a_{2,\alpha'}$, $b_{1,\alpha'}$, $b_{2,\alpha'}$, $\xi_{1,\alpha'}$ y $\xi_{2,\alpha'}$, donde $|\alpha'|=2$, los cuales ya han sido calculados en el paso anterior. Si $\delta j,\alpha=0$ entonces hacemos $\xi_{j,\alpha}=0$ y $b_{j,\alpha}=-c_{j,\alpha}$. Si $\delta j,\alpha\neq 0$ entonces hacemos $b_{j,\alpha}=0$ y $\xi_{j,\alpha}=\dfrac{c_{j,\alpha}}{\delta_{j,\alpha}}$. Por inducción el se sigue. ■

Observación 2.1

- *Dada la EDO (2.2) el procedimiento anterior nos permite construir el cambio de coordenadas y la EDO transformada.*

- *El teorema anterior no nos da información sobre la convergencia de las series formales* $\sum_{|\alpha|\geq 2}\xi_{j,\alpha}w^{\alpha}$ *y* $\sum_{|\alpha|\geq 2}b_{j,\alpha}w^{\alpha}$.

- *Note la importancia de los* $\delta_{j,\alpha} = \lambda_j - \alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2$ *Si* $\delta_{j,\alpha} = 0; \forall j = 1,2; \forall\,|\alpha| \geq 2$ *entonces* $\xi_{j,\alpha} = 0; \forall j = 1,2; \forall\,|\alpha| \geq 2$ *luego el cambio de coordenadas es la identidad y no hemos ganado nada.*

  El otro extremo ocurre cuando $\delta_{j,\alpha} \neq 0; \forall j = 1,2; \forall\,|\alpha| \geq 2$*en este caso la EDO se convierte en*

$$w_1^{'} = \lambda_1 w_1,$$

$$w_2^{'} = \lambda_2 w_2.$$

  Es decir (2.2) se linealiza por un cambio de coordenadas formal.

Definición 2.1 *Decimos que* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ *es un* **par resonante** *si y solamente si,* $\exists_n\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ *con* $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$ *tales que* $\lambda_1 = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2$ *o* $\lambda_2 = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2$.

Ejemplo 2.1 *Sea* $(-1, 2i) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$*no es un par resonante.*
En efecto: Sea $\alpha = (\alpha, \alpha) \in \mathbb{N}^2$ *con* $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$
$\delta_{1,\alpha} = \lambda_1 - \alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2 = -1 + \alpha_1 - \alpha_2 2i = (-1 + \alpha_1) - \alpha_2 2i \neq 0$
$\delta_{2,\alpha} = \lambda_2 - \alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2 = 2i + \alpha_1 - \alpha_2 2i = (1 - \alpha_2)\, 2i + \alpha_1 \neq 0$

Definición 2.2 *Decimos que un par* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ *esta en el dominio de Poincaré si y sólo si* $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{R}^-$*, caso contrario decimos que* (λ_1, λ_2) *está en el dominio de Siegel.*

Denotaremos de la siguiente manera:

$$D_P = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*; \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{R}^- \right\},$$

$$D_S = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*; \lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}^- \right\}.$$

Proposición 2.1 *Si* $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_P$ *son equivalentes:*

1. (λ_1, λ_2) *es un par resonante.*
2. $\exists$ *único* $m \geq 2$ *tal que* $\lambda_1 = m\lambda_2$ *o* $\lambda_2 = m\lambda_1$.

Prueba:
$(1 \Rightarrow 2)$ Supongamos existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ con $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$ tal que $\lambda_1 = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2$;

$\lambda_2/\lambda_1 = (1-\alpha_1)/\alpha_2 \notin \mathbb{R}^-$ por tanto $\alpha_1 = 0$ y es único $\alpha_2 \geq 2$ y $\lambda_1 = \alpha_2\lambda_2$.
$(2 \Rightarrow 1)$ $\exists$ único $m \geq 2$ tal que $\lambda_1 = m\lambda_2$ o $\lambda_2 = m\lambda_1$. En el primer caso podemos escribir $\lambda_1 = 0\lambda_1 + m\lambda_2$,$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = m; \alpha_1 + \alpha_2 = m \geq 2$ en el segundo caso: $\lambda_2 = m\lambda_1 + 0\lambda_2$,$\alpha_1 = m, \alpha_2 = 0; \alpha_1 + \alpha_2 = m \geq 2$.

Proposición 2.2 *Si* $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_S$ *son equivalentes:*

1. (λ_1, λ_2) *es un par resonante.*

2. *Existen* $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ *talque:* $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 0$.

Prueba:
$(1 \Rightarrow 2)$ Supongamos existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ con $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$ tal que $\lambda_1 = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2$; $\lambda_2/\lambda_1 = (1-\alpha_1)/\alpha_2 \in \mathbb{R}^-$ por tanto $(\alpha_1 - 1) > 0$ y $0 = (\alpha_1 - 1)\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2$.
$(2 \Rightarrow 1)$ Por hipótesis existen $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que: $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 0$ entonces $\lambda_1 = (1+m_1)\lambda_1 + m_2\lambda_2$ donde $\alpha_1 = 1 + m_1, \alpha_2 = m_2$ entonces $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$ por lo tanto : (λ_1, λ_2) es un par resonante.

2.2. El teorema de linealización de Poincaré

En la presente sección, vamos a demostrar que si $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_P$ es un par no resonante, entonces existe un biholomorfismo que transforma la EDO.

$$\left| \begin{array}{lcl} z_1' & = & \lambda_1 z_1 + \sum_{|\alpha|\geq 2} a_{1,\alpha} z^\alpha \\ z_2' & = & \lambda_2 z_2 + \sum_{|\alpha|\geq 2} a_{2,\alpha} z^\alpha \end{array} \right.$$

en su parte lineal

$$\left| \begin{array}{lcl} z_1' & = & \lambda_1 z_1 \\ z_2' & = & \lambda_2 z_2 \end{array} \right.$$

Proposición 2.3 *Si* $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_P$ *es un par no resonante entonces* $\delta = inf\left\{|\delta_{j,\alpha}|, |\alpha| \geq 2; J = 1, 2\right\} > 0$ *donde* $\delta_{j,\alpha} = \lambda_j - \alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2$.

Prueba:
CASO 1: $Im\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \neq 0$ dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ con $|\alpha| \geq 2$ tenemos dos posibilidades:

- $\alpha_1 \neq 1; |\delta_{1,\alpha}| = |(1-\alpha_1)\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2| = |\lambda_2|\left|(1-\alpha_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \alpha_2\right|$
  $\geq |\lambda_2|\left|Im\left((1-\alpha_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \alpha_2\right)\right|$
  $= \left|(1-\alpha_1)\, Im\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right| = |1-\alpha_1|\left|Im\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right| \geq Im\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$

- $\alpha_1 = 1; |\delta_{1,\alpha}| = |\alpha_2\lambda_2| = \alpha_2|\lambda_2| \geq |\lambda_2|$
  Concluimos que : $|\delta_{1,\alpha}| \geq min\left\{|\lambda_2|, \left|Im\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right|\right\}.$
  Analogamente
  $$|\delta_{2,\alpha}| \geq min\left\{|\lambda_1|, \left|Im\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right|\right\}.$$

CASO 2: $Im\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = 0$. Como $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_P$ se tiene que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$ más aún como (λ_1, λ_2) es par no resonante $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \{2,3,4,...\}, |\delta_{1,\alpha}| = |\lambda_2|\left|(1-\alpha_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \alpha_2\right|$

- $\alpha_1 \succ 1, |\delta_{1,\alpha}| = |\lambda_2||1-\alpha_1|\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}\right| \geq |\lambda_2|\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}\right) \geq |\lambda_2|\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$

- $\alpha_1 = 1$ entonces $\alpha_2 \geq 1$ y se cumple
  $$|\delta_{1,\alpha}| = |\lambda_2||-\alpha_2| \geq |\lambda_2|$$

- $\alpha_1 = 0$ entonces $\alpha_2 \geq 2$ y se cumplen
  $$|\delta_{1,\alpha}| = |\lambda_2||\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \alpha_2|$$
  Denotemos $a = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ y $[a]$ =máximo entero de a. Si $a > \alpha_2$ entonces $\alpha_2 \leq [a] \leq a$
  $$|\lambda_2||\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \alpha_2| = |a - \alpha_2| = a - \alpha_2 = (a - [a]) + ([a] - \alpha_2) \geq a - [a] > 0$$
  Si $a < \alpha_2$ entonces $a < |a| + 1 \leq \alpha_2$, luego
  $$|\lambda_2||\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \alpha_2| = |a - \alpha_2| = \alpha_2 - a = (\alpha_2 - |a| - 1) + (1 + |a| - a) \geq 1 + |a| - a > 0$$
  Si hacemos $C_1 = min\{|\lambda_2|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, |\lambda_2|, |\lambda_2|(a - [a]), |\lambda_2|(1 + |a| - a)\} > 0$ entonces $|\delta_{1,\alpha}| > C_1$, $\forall|\alpha| \geq 2$.

Análogamente se prueba que existe $C_2 > 0$ tal que $|\delta_{2,\alpha}| > C_2$, $\forall|\alpha| \geq 2$. De estas dos últimas desigualdades, el resultado se sigue. ∎

Otro resultado que usaremos, proviene de la teoría de funciones de varias variables complejas y cuya demostración se puede encontrar en el libro de Gunning-Rossi.

Teorema 2.2 ***(Teorema de la Función Implícita)***
Sea $f : \Delta(z_0, r) \subseteq \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *función holomorfa en* $\Delta(z_0, r)$ *tal que:*$f(z_0) = 0$ *y* $\frac{\partial f(z_0)}{\partial z_2} \neq 0$. *Entonces* $\exists$ *polidisco abierto* $\Delta(z_0, R) = D_{R_1}(z_0^1) \times D_{R_2}(z_0^2) \subseteq \Delta(z_0, r)$ *y* $\exists$ *único función holomorfa tal que:*

$$\varphi : D_{R_1}\left(z_0^1\right) \longrightarrow D_{R_1}\left(z_0^2\right); tal \;\; que, \varphi\left(z_1^0\right) = z_2^0 \;\; y \;\; f(z, \varphi(z)) = 0; \;\; \forall z \in D_{R_1}\left(z_0^1\right).$$

Teorema 2.3 *Si* $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_P$ *es un par no resonante entonces el cambio formal de coordenadas dado en el teorema es convergente en una vecindad del origen.*

Prueba:

$$\sum_{|\alpha|\geq 2} (\delta_{j,\alpha}\xi_{j,\alpha} - b_{j,\alpha})w^\alpha = \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w)B_1(w) + \frac{\partial \xi_j}{\partial w_2}(w)B_2(w) - A_j(\xi(w))$$

Como $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_P$ es un par no resonante entonces $B_1(w) = B_2(w) = 0$

$$\sum_{|\alpha|\geq 2} \delta_{j,\alpha}\xi_{j,\alpha}w^\alpha = -A_j\left(w_1 + \xi_1(w_1, w_2), w_2 + \xi_a(w_1, w_2)\right).$$

Denotando: $P_j(w_1, w_2) = \sum_{|\alpha|\geq 2} \delta_{j,\alpha}\xi_{j,\alpha}w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2}$ tenemos:

$$\widehat{P_j}(w_1, w_2) \leq \widehat{A_j}\left(w_1 + \widehat{\xi_1}(w_1, w_2), w_2 + \widehat{\xi_2}(w_1, w_2)\right). \tag{2.6}$$

De la proposición , $\delta = inf\left\{|\delta_{j,\alpha}|, |\alpha| \geq 2; J = 1, 2\right\}$ entonces:
$\widehat{P_j}(w_1, w_2) = \sum_{|\alpha|\geq 2} |\delta_{j,\alpha}| |\xi_{j,\alpha}| w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2} \geq \delta \sum_{|\alpha|\geq 2} |\xi_{j,\alpha}| w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2} = \delta\widehat{\xi_j}(w_1, w_2)$
De (2.6) para $j = 1, 2$ tenemos :

$$\begin{aligned}
\delta\widetilde{\xi_j}(w) \;=\; \delta\widehat{\xi_j}(w, w) &\leq \widehat{A_j}\left(w + \widehat{\xi_1}(w, w), w + \widehat{\xi_2}(w, w)\right) \\
&= \widehat{A_j}\left(w + \widetilde{\xi_1}(w), w + \widetilde{\xi_2}(w)\right) \\
&\leq \widehat{A_j}\left(w + \widetilde{\xi_1}(w) + \widetilde{\xi_2}(w), w + \widetilde{\xi_2}(w) + \widetilde{\xi_2}(w)\right) \\
&= \widetilde{A_j}\left(w + \widetilde{\xi_1}(w), w + \widetilde{\xi_2}(w)\right)
\end{aligned}$$

entonces

$$\widetilde{\xi_1}(w) + \widetilde{\xi_2}(w) \leq \delta^{-1} \sum_{j=1}^{2} \widetilde{A_j}\left(w + \widetilde{\xi_1}(w), w + \widetilde{\xi_2}(w)\right). \tag{2.7}$$

Por lo visto anteriormente es suficiente probar que $\exists, R \succ 0$ talque $\widetilde{\xi_1}(w) + \widetilde{\xi_2}(w)$ sea convergente en $D_R(O)$.

Denotemos

$F\left(w\right)=\delta^{-1}\sum_{j=1}^{2}\widetilde{A_j}\left(w\right)=\sum_{n\geq 2}f_nw^n$; donde ;$f_n=\delta^{-1}\sum_{|q|=n}\left(|a_{1,\alpha}|+|a_{2,\alpha}|\right)$

$S\left(w\right)=\widetilde{\xi_1}\left(w\right)+\widetilde{\xi_2}\left(w\right)=\sum_{n\geq 2}\delta_nw^n$; donde ;$\delta_n=\delta^{-1}\sum_{|q|=n}\left(|\xi_{1,\alpha}|+|\xi_{2,\alpha}|\right)$

De esta manera por (2.7) tenemos: $S(w)\leq F(w+S(w))$

Observe que F es una función holomorfa en una vecindad del $0\in C$,mientra que S es una serie formal. En una vecindad del $0\in\mathbb{C}^2$, definimos f a valores complejos como:

$$f(w,v)=v-F(w+v).$$

Observe que:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial v}(w,v) &= 1-F'(w+v)\\ \Rightarrow\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= 1\neq 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema de la función implícita existe una función analítica

$\varphi:D_R(0)\to D_{R'}(0)$ tal que $R<\epsilon$ $\varphi(0)=0$ y $f(w,\varphi(w))=0\quad\forall w\in D_R(0)$.

$$\Rightarrow\varphi(w)=F(w+\varphi(w));\quad\forall w\in D_R(0).$$

Además

$$\begin{aligned} \varphi'(w) &= F'(w+\varphi(w))(1+\varphi'(w));\quad\forall w\in D_R(0)\\ \varphi'(0) &= F'(0+\varphi(0))(1+\varphi'(0))=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\varphi(w)=\sum_{n\geq 2}c_nw^n;\quad\forall w\in D_R(0),$$

luego tenemos

$$\sum_{n\geq 2}c_nw^n=\sum_{n\geq 1}f_n(w+c_2w^2+c_3w^3+\ldots)^n.$$

Igualando términos de orden n

$$\begin{aligned} c_2 &= f_2 \\ c_3 &= 2c_2f_2 + f_3 \\ c_4 &= c_2^2f_2 + 2f_2c_3 + 2f_3c_2 + f_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

entonces $c_n \geq f_n \ \forall n \geq 2$; $\varphi(w)$ es una serie de terminos no negativos.
Ahora como

$$S(w) \leq F(w + S(w))$$

se tiene que $\delta_n \leq f_n \leq c_n \quad , \forall n \geq 2$.
Como $\sum\limits_{n\geq 2} c_n w^n$ es convergente entonces $S(w) = \sum\limits_{n\geq 2} \delta_n w^n$ es convergente en $D_R(0)$.
Es decir $\tilde{\xi}_1(w) + \tilde{\xi}_2(w)$ es convergente en $D_R(0)$
$\Rightarrow \tilde{\xi}_1(w), \tilde{\xi}_2(w)$son convergentes en $D_R(0)$,
$\Rightarrow \xi_1(w_1, w_2)$ y $\xi_2(w_1, w_2)$ son convergentes en $\triangle((0,0),(R,R))$
$\Rightarrow \xi\,(w_1, w_2)$ es convergente, asi queda probado el Teorema. ■

Teorema 2.4 ***(Teorema de Linealización de Poincaré)*** *Sea* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^2$ *abierto,* $0 \in \mathbb{U}$ *y* $Z \in \mathcal{X}\,(\mathbb{U})$ *tal que 0 es una singularidad aíslada de* Z*. Si la parte lineal de* Z *en 0 es NO NULA y sus autovalores es un par no resonante en el dominio de POINCARÉ, entonces* Z *es localmente analítico conjugado a su parte lineal.*

Prueba: Ahora sea $\xi(w) = (w_1 + \xi_1(w), w_2 + \xi_2(w))$ el cambio de coordenadas tipo perturbación de la identidad que transforma la EDO asociada a Z a

$$(\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2)$$

Sabemos que ξ es holomorfa en una vecindad del 0 y $\xi'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^2)$
Por el Teorema de la función inversa; existen abiertos(polidiscos) $\triangle_1, \triangle_2 \subseteq \mathbb{C}^2$ de 0 tal que:

$$\xi|_{\triangle_1} : \triangle_1 \to \triangle_2 \quad \text{es un bioholomorfismo}$$

Si denotamos $h = \xi|_{\triangle_1}^{-1}$ como $w = h(z)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad w' = h'(z)z' \\ &\Rightarrow \quad (\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2) = h'(z)Z(z) \\ &\Rightarrow \quad W(w) = h'(z)Z(z) \end{aligned}$$

Entonces h es una conjugación analítica entre Z y W. ■

El Teorema de Linealización de Poincaré en $\mathbb{C}^2$ se puede extender a $\mathbb{C}^n$ cuya prueba se verá en el capítulo 4.

El siguiente teorema fue publicado en PESQUIMAT XII, cuya prueba fue realizada en el curso de Tesis 2, con el profesor Renato Benazic y los alumnos Claudio Espinoza y Liliana Jurado.

2.3. Teorema Poincaré-Dulac en $\mathbb{C}^2$

Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto ,$0 \in \mathbb{U}$ y $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$ tal que 0 es una singularidad aíslada de Z. Si la parte lineal de Z en 0 es no nula y sus autovalores $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_P$ es un par resonante, entonces ya no es posible transformar la EDO asociada a Z en una EDO lineal.

Teorema 2.5 *(Poincaré-Dulac en $\mathbb{C}^2$) Sea $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in \mathbb{U}$, $\boldsymbol{Z} \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$ tal que 0 es singularidad aíslada de Z. Si la parte lineal de Z en 0 ($Z'(0,0) = diag[\lambda_1, \lambda_2]$) es no nula y sus autovalores $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_p$ es un par resonante entonces $\boldsymbol{Z}$ es localmente analítico conjugado al campo $W \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$ definido por:*

$$W(w_1, w_2) = (\lambda_1 w_1 + a w_2^m, \lambda_2 w_2)$$
$$W(w_1, w_2) = (\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2 + b w_1^m)$$

en donde $m \geq 2$ es tal que $\lambda_1 = m\lambda_2$ o $(\lambda_2 = m\lambda_1)$.

Prueba: De acuerdo al teorema anterior tenemos que existe un cambio formal de coordenadas

$$\sum_{|\alpha| \geq 2} \delta_{j,\alpha}\xi_{j,\alpha} - b_{j,\alpha} w^\alpha = \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w) B_1(w) + \frac{\partial \xi_j}{\partial w_2}(w) B_2(w) - A_j(\xi(w)).$$

Como $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_p$ es un par resonante, $\exists\ !\ m \geq 2$ tal que $\lambda_1 = m\lambda_2$ o $\lambda_2 = m\lambda_1$. Trabajando en el primer caso y denotando $\alpha_0 = (0, m)$ tenemos que $\delta_{1,\alpha} \neq 0, \forall \alpha \neq \alpha_0$ y $\delta_{2,\alpha} \neq 0, \forall |\alpha| \geq 2$. Esto implica que $b_{1,\alpha} = 0, \forall |\alpha| \geq 2, \alpha \neq \alpha_0$ y $b_{2,\alpha} = 0, \forall |\alpha| \geq 2$. Entonces

$$B_1(w) = \sum_{|\alpha|\geq 2} b_{1,\alpha} w^\alpha = b_{1,\alpha_0} w^{\alpha_0}$$

$$B_2(w) = \sum_{|\alpha|\geq 2} b_{2,\alpha} w^\alpha = 0.$$

Además como $\delta_{1,\alpha_0} = \lambda_1 - 0 \cdot \lambda_1 - m\lambda_2 = 0 \Rightarrow \xi_{1,\alpha_0} = 0$. Reemplazando en la igualdad inicial tenemos:

$$j = 1 : \sum_{|\alpha|\geq 2} \delta_{1,\alpha}\xi_{1,\alpha} w^\alpha - b_{1,\alpha_0} w^{\alpha_0} = \frac{\partial \xi_1}{\partial w_1}(w) b_{1,\alpha_0} w^{\alpha_0} - A_1(\xi(w))$$

$$j = 2 : \sum_{|\alpha|\geq 2} \delta_{2,\alpha}\xi_{2,\alpha} w^\alpha = \frac{\partial \xi_2}{\partial w_1}(w) b_{1,\alpha_0} w^{\alpha_0} - A_2(\xi(w)).$$

Como

$$\xi_j(w) = \sum_{|\alpha|\geq 2} \xi_{j,\alpha} w^\alpha \Rightarrow \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w) = \sum_{|\alpha|\geq 2} \xi_{j,\alpha}\alpha_1 w_1^{\alpha_1 - 1} w_2^{\alpha_2}$$

$$\Rightarrow w_1 \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w) = \sum_{|\alpha|\geq 2} \xi_{j,\alpha} q_1 w^\alpha \Rightarrow \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w) = \sum_{|\alpha|\geq 2} \xi_{j,\alpha} \frac{\alpha_1}{w_1} w^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w) b_{1,\alpha_0} w^{\alpha_0} = \sum_{|\alpha|\geq 2} \alpha_1 b_{1,\alpha_0} \frac{w_2^m}{w_1} \xi_{j,\alpha} w^\alpha,$$

reemplazando y ordenando obtenemos:

$$j = 1 : \sum_{|\alpha|\geq 2} (\delta_{1,\alpha} - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} \frac{w_2^m}{w_1}) \xi_{1,\alpha} w^\alpha = b_{1,\alpha_0} w^{\alpha_0} - A_1(\xi(w))$$

$$j = 2 : \sum_{|\alpha|\geq 2} (\delta_{2,\alpha} - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} \frac{w_2^m}{w_1}) \xi_{2,\alpha} w^\alpha = -A_2(\xi(w)),$$

denotando

$$P_j(w_1, w_2) = \sum_{|\alpha|\geq 2} (\delta_{j,\alpha} - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} \frac{w_2^m}{w_1}) \xi_{j,\alpha} w^\alpha$$

$$\Rightarrow P_1(w_1, w_2) = b_{1,\alpha_0} w^{\alpha_0} - A_1(\xi(w)) \text{ y } P_2(w_1, w_2) = -A_2(\xi(w)).$$

Afirmación: $\hat{A}_j(\xi(w)) \leq \hat{A}_j(w_1+\hat{\xi}_1, w_2+\hat{\xi}_2(w))$.

Es trivial pues

$$\hat{A}_j(\xi(w)) = \sum_{|\alpha|\geq 2} |a_{j,\alpha}|(w_1+\xi_1(w))^{\alpha_1}(w_2+\xi_2(w))^{\alpha_2}$$

$$\leq \sum_{|\alpha|\geq 2} |a_{j,\alpha}|(w_1+\hat{\xi}_1(w))^{\alpha_1}(w_2+\hat{\xi}_2(w))^{\alpha_2} = \hat{A}_j(w_1+\hat{\xi}_1, w_2+\hat{\xi}_2(w)).$$

Entonces:

$$\hat{P}_1(w_1,w_2) =\leq \widehat{b_{1,\alpha_0} w^{\alpha_0}} + A_1(\hat{\xi}(w))$$

$$\leq |b_{1,\alpha_0}|w^{\alpha_0} + \hat{A}_1(w_1+\hat{\xi}_1, w_2+\hat{\xi}_2(w))$$

$$\hat{P}_2(w_1,w_2) = -\widehat{A_2(\xi(w))} = \hat{A}_2(\xi(w)) \leq \hat{A}_2(w_1+\hat{\xi}_1(w), w_2+\hat{\xi}_2(w)),$$

luego, tomando $w_1 = w_2 = w$, tenemos

$$\tilde{P}_1(w) = \hat{P}_1(w,w) \leq |b_{1,\alpha_0}|w^m + \hat{A}_1(w+\tilde{\xi}_1(w), w+\tilde{\xi}_2(w))$$

$$\tilde{P}_2(w) = \hat{P}_2(w,w) \leq \hat{A}_2(w+\tilde{\xi}_1(w), w+\tilde{\xi}_2(w))$$

Sumando ambas expresiones tenemos

$$\tilde{P}_1(w)+\tilde{P}_2(w) \leq |b_{1,\alpha_0}|w^m + \hat{A}_1(w+\tilde{\xi}_1, w+\tilde{\xi}_2) + \hat{A}_2(w+\tilde{\xi}_1, w+\tilde{\xi}_2)$$

$$\leq |b_{1,\alpha_0}|w^m + \hat{A}_1(w+\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2, w+\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2) + \hat{A}_2(w+\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2, w+\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2)$$

$$= |b_{1,\alpha_0}|w^m + \tilde{A}_1(w+\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2) + \tilde{A}_2(w+\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2).$$

En conclusión, tenemos

$$\tilde{P}_1(w)+\tilde{P}_2(w) \leq |b_{1,\alpha_0}|w^m + \tilde{A}_1(w+\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2) + \tilde{A}_2(w+\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2).$$

Luego:

$$\sum_{j=1}^{2} \tilde{P}_j(w) \leq |b_{1,\alpha_0}|w^m + \sum_{k=1}^{2} \tilde{A}_k\left(w + \sum_{j=1}^{2}\tilde{\xi}_j(w)\right) ...(1)$$

Recordemos que

$$\tilde{P}_j(w) = \sum_{|\alpha|\geq 2} |\delta_{j,\alpha} - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} w^{m-1}||\xi_{j,\alpha}|w^{|\alpha|} ...(*)$$

Para continuar probaremos el siguiente Lema.

Lema 2.1 *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que*

$$inf\left\{\left|\delta_{j,\alpha} - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} w^{m-1}\right|; (j,\alpha) \neq (1,\alpha_0) \quad \wedge \quad |w| < \epsilon\right\} > 0.$$

Prueba: Tomando

$$\epsilon = \left|\frac{2\lambda_2}{b_{1,\alpha_0}}\right|^{\frac{1}{m-1}} > 0; \text{ tenemos que } |w| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{b_{1,\alpha_0} w^{m-1}}{\lambda_2}\right| < \frac{1}{2}.$$

Sea $K = Re\left(\frac{b_{1,\alpha_0} w^{m-1}}{\lambda_2}\right) \Rightarrow |K| < \frac{1}{2}$.

Caso **1** *Si $j = 2$*

Entonces $\quad (j,\alpha) \neq (1,\alpha_0)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left|S_{j,\alpha} - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} w^{m-1}\right| &= \left|\lambda_2 - \alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2 - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} w^{m-1}\right| \\
&= |\lambda_2|\left|1 - \alpha_1 m - \alpha_2 - \alpha_1\frac{b_{1,\alpha_0}}{\lambda_2} w^{m-1}\right| \\
&\geq |\lambda_2|\left|Re(1 - \alpha_1 m - \alpha_2 - \alpha_1\frac{b_{1,\alpha_0}}{\lambda_2} w^{m-1})\right| \\
&= |\lambda_2|\left|1 - \alpha_1 m - \alpha_2 - \alpha_1 K\right| \\
&\geq |\lambda_2|\left(\alpha_1 m + \alpha_1 K + \alpha_2 - 1\right) \\
&\geq |\lambda_2|\left(\alpha_1(m + K) + \alpha_2 - 1\right) \\
&\geq |\lambda_2|\left(\alpha_1\left(2 - \frac{1}{2}\right) + \alpha_2 - 1\right) \\
&= |\lambda_2|\left(\frac{3}{2}\alpha_1 + \alpha_2 - 1\right) \\
&\geq |\lambda_2|\left(\alpha_1 + \alpha_2 - 1\right) \\
&\geq |\lambda_2|
\end{aligned}$$

Caso **2** *Si $j = 1$*

Entonces $\alpha \neq \alpha_0 = (0, m)$

Analicemos el valor de $|m - \alpha_1 m - \alpha_2 - \alpha_1 K|$

Si $\alpha_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \neq \alpha \quad &\Rightarrow \quad \alpha_2 \neq m \\
&\Rightarrow \quad |m - \alpha_1 m - \alpha_2 - \alpha_1 K| \\
&= \quad |m - \alpha_2| \geq 1
\end{aligned}$$

Si $\alpha_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
|m - \alpha_1 m - \alpha_2 - \alpha_1 K| &= |\alpha_2 + K| \\
&\geq \alpha_2 + K \\
&\geq \alpha_2 - \frac{1}{2} \\
&\geq \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2} - 1 \\
&\geq 2 - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si $\alpha_1 \geq 2$:

$$\begin{aligned}
|m - \alpha_1 m - \alpha_2 - \alpha_1 K| &\geq \alpha_1 m + \alpha_2 + \alpha_1 K - m \\
&= m(\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \alpha_1 K \\
&\geq 2(\alpha_1 - 1) + \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{2} \\
&= \frac{3\alpha_1}{2} - 2 + \alpha_2 \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 - 2 + \frac{\alpha_1}{2} \\
&\geq \frac{\alpha_1}{2} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\delta_{j,\alpha} - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} w^{m-1}\right| &= \left|\lambda_1 - \alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2 - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} w^{m-1}\right| \\
&= |\lambda_2| \left| m -_1 m - \alpha_2 - \alpha_1 \frac{b_{1,\alpha_0}}{\lambda_2} w^{m-1} \right| \\
&\geq |\lambda_2| \left| Re\left(m - \alpha_1 m - \alpha_2 - \alpha_1 \frac{b_{1,\alpha_0}}{\lambda_2} w^{m-1} \right) \right| \\
&= |\lambda_2| \, |m - \alpha_1 m - \alpha_2 - \alpha_1 K| \\
&\geq \frac{|\lambda_2|}{2} \quad \text{(Por el paso anterior).}
\end{aligned}$$

En conclusión; si $\epsilon = \left|\frac{2\lambda_2}{b_{1,\alpha_0}}\right|^{\frac{1}{m-1}}$, entonces:

$$inf\left\{\left|\delta_{j,\alpha} - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} w^{m-1}\right| ; (j,\alpha) \neq (1,\alpha_0) \quad \wedge \quad |w| < \epsilon\right\} \geq \frac{|\lambda_2|}{2} > 0 \qquad \square$$

En $(*)$ veamos el Lema:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_j(w) &= \sum_{|\alpha|\geq 2} \left|\delta_{j,\alpha} - \alpha_1 b_{1,\alpha_0} w^{m-1}\right| |\xi_{j,\alpha}| \, w^{|\alpha|} \\
&\geq \sum_{|\alpha|\geq 2} \frac{|\lambda_2|}{2} |\xi_{j,\alpha}| \, w^{|\alpha|} \\
&= \frac{|\lambda_2|}{2} \tilde{\xi}_j(w)
\end{aligned}$$

Esto es válido pues cuando $(j,\alpha) = (1,\alpha_0)$ tenemos que $\tilde{\xi}_{1,\alpha_0} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{2} \tilde{P}_j(w) \geq \frac{|\lambda_2|}{2} \sum_{j=1}^{2} \tilde{\xi}_j(w) \qquad (2).$$

Usando (1) y (2):

$$\frac{|\lambda_2|}{2} \sum_{j=1}^{2} \tilde{\xi}_j(w) \leq |b_{1,\alpha_0}| \, w^m + \sum_{j=1}^{2} \tilde{A}_j \left(w + \sum_{j=1}^{2} \tilde{\xi}_j(w) \right)$$

Denotando $b = \dfrac{2\,|b_{1,\alpha_0}|}{|\lambda_2|}, S(w) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \tilde{\xi}_j(w)$ y $F(w) = \dfrac{2}{|\lambda_2|} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \tilde{A}_j(w)$

$$\Rightarrow S(w) \leq bw^n + F(w + S(w)) \qquad ; \lambda > 0$$
$$\forall\, |w| < \epsilon = \left|\frac{2\lambda_2}{b_{1,\alpha_0}}\right|^{\frac{1}{m-1}}$$

Como $S(w) \leq F(w + S(w)) + bw^m$.

En una vecindad del $0 \in \mathbb{C}^2$, definimos f a valores complejos como:

$$f(w,v) = v - F(w+v) - bw^m.$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial v}(w,v) &= 1 - F'(w+v) \\
\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Por el Teorema de la función implícita existe una función analítica

$\varphi : D_R(0) \to D_{R'}(0)$ tal que $R < \epsilon$ $\varphi(0) = 0$ y $f(w, \varphi(w)) = 0 \quad \forall w \in D_R(0)$.

$$\Rightarrow \varphi(w) = F(w + \varphi(w)) + bw^m; \quad \forall w \in D_R(0).$$

Además

$$\begin{aligned} \varphi'(w) &= F'(w + \varphi(w))(1 + \varphi'(w)) + bmw^{m-1}; \quad \forall w \in D_R(0) \\ \varphi'(0) &= F'(0 + \varphi(0))(1 + \varphi'(0)) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\varphi(w) = \sum_{n \geq 2} c_n w^n; \quad \forall w \in D_R(0).$$

Luego tenemos

$$\sum_{n \geq 2} c_n w^n = \sum_{n \geq 1} f_n (w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \ldots)^n + bw^m$$

Igualando términos de orden “ n ”

$$\begin{aligned} c_2 &= f_2 \qquad \vee \qquad c_2 = f_2 + b \\ c_3 &= 2c_2 f_2 \qquad \vee \qquad c_3 = 2c_2 f_2 + b \\ c_4 &= c_2^2 f_2 + 2f_2 c_3 + 2f_3 c_2 + f_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

entonces $c_n \geq f_n$ $\forall n \geq 2$; $\varphi(w)$ es una serie de términos no negativos.

Ahora como

$$S(w) \leq F(w + S(w)) + bw^m$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_2 &\leq f_2 \qquad \vee \qquad S_2 \leq f_2 + b = c_2 + b \\ S_3 &\leq 2S_2 f_2 \leq 2c_2 f_2 = c_3 \qquad \vee \qquad S_3 \leq c_3 + b \\ S_4 &\leq S_2^2 f_2 + 2f_2 S_3 + 2f_3 S_2 + f_4 \leq c_2^2 f_2 + 2f_2 c_3 + 2f_3 c_2 + f_4 = c_4 \end{aligned}$$

Prosiguiendo tenemos $S_n \leq c_n \quad \forall n \geq 2$.

Como $\sum_{n \geq 2} c_n w^n$ es convergente entonces $S(w) = \sum_{n \geq 2} S_n w^n$ es convergente en $D_R(0)$.

Es decir $\tilde{\xi}_1(w) + \tilde{\xi}_2(w)$ es convergente en $D_R(0)$

$\Rightarrow \tilde{\xi}_1(w), \tilde{\xi}_2(w)$son convergentes en $D_R(0)$

$\Rightarrow \xi_1(w_1, w_2)$ y $\xi_2(w_1, w_2)$ son convergentes en $\triangle((0,0),(R,R))$

Ahora sea $\xi(w) = (w_1 + \xi_1(w), w_2 + \xi_2(w))$ el cambio de coordenadas tipo perturbación de la identidad que transforma la EDO asociada a Z a

$$\left(\lambda_1 w_1 + b_{1,(0,m)} w_2^m, \lambda_2 w_2\right)$$

Sabemos que ξ es holomorfa en una vecindad del 0 y $\xi'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^2)$

Por el Teorema de la función inversa; existen abiertos(polidiscos) $\triangle_1, \triangle_2 \subseteq \mathbb{C}^2$ de 0 tal que:

$$\xi|_{\triangle_1} : \triangle_1 \to \triangle_2 \quad \text{es un biholomorfismo}$$

Si denotamos $h = \xi|_{\triangle_1}^{-1}$ como $w = h(z)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad w' = h'(z) z' \\ &\Rightarrow \quad (\lambda_1 w_1 + b_{1,\alpha_0} w_2^m, \lambda_2 w_2) = h'(z) Z(z) \\ &\Rightarrow \quad W(w) = h'(z) Z(z) \end{aligned}$$

Entonces h es una conjugación analítica entre Z y W. ■

El Teorema de Linealización de Poincaré-Dulac en $\mathbb{C}^2$ se puede extender a $\mathbb{C}^n$ cuya prueba se verá en el capítulo 4.

Capítulo 3

Formas Normales de Ecuaciones Diferenciales Formales

3.1. Campos vectoriales formales

Definición 3.1 *La n-upla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ de autovalores de A es llamada* **resonante**, *si existe $j \in \{1, 2, .., n\}$ y existe $\beta = (\beta_1, \beta_2, .., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ con $|\beta| \geq 2$ tal que:*

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i$$

donde utilizaremos la notación $\langle \beta, \lambda \rangle$ para expresar $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i$ por tanto $\lambda_j = \langle \beta, \lambda \rangle$

El número $|\beta| = \sum \beta_i$ es llamado el orden de la resonancia de la relación $\lambda_j = \langle \beta, \lambda \rangle$; $|\beta| \geq 2$

Ejemplo 3.1 *Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$*

1. $0 = \lambda_1 + \lambda_2$ *es una resonancia de orden 3 ya que* $0 = \lambda_1 + \lambda_2$ *si* $\lambda_3 = 1 \times \lambda_1 + 1 \times \lambda_2 + 1 \times \lambda_3$ *tal que* $\lambda_3 = \langle \beta, \lambda \rangle$ *donde* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *y* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, 1, 1)$

2. $3\lambda_1 = 2\lambda_3$ *no es una resonancia ya que no es posible expresar* $\lambda_j = \langle \beta, \lambda \rangle$ *para algun j y* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

Retomando a la serie de potencias valuadas formales, denotamos con $\mathbb{C}\left[\left[z_1,z_2,..,z_n\right]\right]$ al conjunto de todas las series de potencias formales con coeficientes en $\mathbb{C}$.

$$S\left(z\right)\in\mathbb{C}\left[\left[z_1,z_2,..,z_n\right]\right];z=\left(z_1,z_2,..,z_n\right)$$

y sólo si $S\left(z\right)$ es de la forma:

$$S\left(z\right)=\sum_{|\alpha|\geq 0}s_\alpha z^\alpha\quad\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$$

Definimos por polinomio homogéneo en las variables $z_1,z_2,...,z_n$ y de grado k a una expresión de la forma :

$$S_k\left(z\right)=\sum_{|\alpha|=k}p_\alpha z^\alpha$$

Denotemos por $H_k\left[\left[z_1,z_2,..,z_n\right]\right]$ el conjunto de todos los polinomios homogéneos en las variables $z_1,z_2,...,z_n$ de grado k, es decir:

$$H_k\left[\left[z_1,z_2,..,z_n\right]\right]=\left\{\sum_{|\alpha|=k}h_\alpha z^\alpha;\ h_\alpha\in\mathbb{C}\right\}$$

Por lo tanto toda serie de potencias formal puede ser escrita como una suma infinita de polinomios homogéneos, es decir:

$$S\left(z\right)=\sum_{k\geq 0}S_k\left(z\right);\qquad S_k\left(z\right)\in H_k\left[\left[z_1,z_2,..,z_n\right]\right]$$

El orden de $S\left(z\right)\in\mathbb{C}\left[\left[z_1,z_2,..,z_n\right]\right];S\left(z\right)\neq 0$ será denotado por $ord\left(S\right)$ y es el menor número entero no negativo r tal que $S_r\in H_r$ no es identicamente cero, es decir :

$$ord\left(S\right)=r\quad si\ \ y\ \ sólo\ \ si\quad S_0\equiv...\equiv S_{r-1}\equiv 0\ \ y\ \ S_r\neq 0$$

Si $S\left(z\right)=0$ diremos que $ord\left(S\right)=-\infty$

Se cumplen las siguientes propiedades :

1. $ord\left(S+T\right)\geq min\left\{ord\left(S\right),ord\left(T\right)\right\};\ \ \forall S\left(z\right),T\left(z\right)\in\mathbb{C}\left[\left[z_1,z_2,..,z_n\right]\right]$

2. $ord\left(cS\right)=ord\left(S\right);\forall S\left(z\right)\in\mathbb{C}\left[\left[z_1,z_2,..,z_n\right]\right]\ \ no\ nulo\ y\ \forall\ \ c\in\mathbb{C}\ \ no\ \ nulo$

3. $ord\left(ST\right)=ord\left(S\right)+ord\left(T\right);\ \ \forall\ \ S\left(z\right),T\left(z\right)\in\mathbb{C}\left[\left[z_1,z_2,..,z_n\right]\right]$

Denotemos por $P[[z_1, ..., z_n]]$ el conjunto de todos los polinomios en las variables $z_1, ..., z_n$ es decir:

$$P[[z_1, ..., z_n]] = \left\{ \sum_{k=0}^{m} P_k(z) \, ; P_k(z) \in H_k[[z_1, z_2, .., z_n]] \, , \ \forall \, 0 \leq k \leq m \right\}$$

Denotaremos por $\mathbb{C}^n[[z_1, ..., z_n]]$ al conjunto de todos los campos vectores valuados formales, es decir:

$$\mathbb{C}^n[[z_1, ..., z_n]] = \mathbb{C}[[z_1, ..., z_n]] \times ... \times \mathbb{C}[[z_1, ..., z_n]] \quad (n \ \ veces)$$

Sea $Z(z) \in \mathbb{C}^n[[z_1, ..., z_n]]$ es una n-upla

$$Z(z) = (Z_1(z), ..., Z_n(z)) \, ; \ \ Z_j(z) \in \mathbb{C}[[z_1, ..., z_n]] \ \ \forall \, 1 \leq j \leq n$$

Definición 3.2 *Definimos el siguiente operador,*

$$\begin{array}{rcl} ' : \ \mathbb{C}^n[[Z_1, ..., Z_n]] & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n \times n}[[Z_1, Z_2, ..., Z_n]] \\ Z & \longrightarrow & Z' = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial Z_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Z_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial Z_n}{\partial z_n}. \end{pmatrix} \end{array}$$

El orden de $Z(z) = (Z_1(z), Z_2(z), ..., Z_n(z))$, $Z(z) \neq 0$ denotado por $ord(Z)$ y es el mínimo de los $ord(Z_i)$, es decir:

$$ord(Z) = min\{ord(Z_1), ord(Z_2), ..., ord(Z_n)\}.$$

Sea $Z_j(z) \in \mathbb{C}[[z_1, ..., z_n]] \ \forall \, 1 \leq j \leq n$ entonces podemos escribir $Z_j(z) = \sum_{k \geq 0} P_{j,k}(z)$, donde cada $P_{j,k}(z)$ es un polinomio de grado k.

Denotamos:

$$Z_{(k)}(z) = (P_{1,k}(z), .., P_{n,k}(z))$$

entonces se cumple:

$$Z(z) = \sum_{k \geq 0} Z_{(k)}(z).$$

La parte lineal de $Z(z)$ es el campo homogéneo $Z_{(1)}(z) = (P_{1,1}(z), ..., P_{n,1}(z))$ y puede ser representado por Az; $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es decir $Z_1(z) = Az$.

Por otro lado denotaremos $H_k^n[[z_1, ..., z_n]]$ como:

$$H_k^n[[z_1, ..., z_n]] = H_k[[z_1, ..., z_n]] \times ... \times H_k[[z_1, ..., z_n]].$$

Las pruebas de las siguientes proposiciones se puede encontrar en [14].

Proposición 3.1 *Si* $Z_{(k)}(z) \in H_k^n[[z_1,...,z_n]]$ *y* $Q_{(r)}(z) \in H_r^n[[z_1,...,z_n]]$ *con* $k,r>1$ *entonces*

$$Z_{(k)}o\left(I+Q_{(r)}\right)(z) = Z_{(k)}(z) + W(z)$$

donde $W(z) \in P^n[[z_1,...,z_n]]$*;* $ord(W) > max\{k,r\}$.

Proposición 3.2 *Si* $Z(z) = \sum_{k\geq r} Z_{(k)}(z) \in X[[z_1,...,z_n]]$*;* $ord(Z) = r$ *y* $Q_{(r)}(z) \in H_r^n[[z_1,...,z_n]]$ *entonces*

$$Zo\left(I+Q_{(r)}\right)(z) = Z_{(r)}(z) + W(z)$$

donde $W(z) \in X[[z_1,...,z_n]]$*;* $ord(W) > r$.

3.2. Ecuaciones diferenciales formales

Dado un campo vector formal Z, consideremos la ecuación diferencial ordinaria:

$$z' = Z(z); \qquad z' = \frac{dz}{dT}, \;\; T \in \mathbb{C}$$

donde $Z(z) = (Z_1(z), Z_2(z), ..., Z_n(z))$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$. Asumiremos en todo lo sucesivo que $ord(Z) = 1$. Escribamos entonces:

$$Z(z) = Az + \sum_{k\geq 2} Z_{(k)}(z)$$

Proposición 3.3 *La ecuación diferencial*

$$z' = Az + \sum_{k\geq r} Z_{(k)}(z); \;\; r \geq 2$$

puede ser transformada en la ecuación diferencial :

$$w^{'} = Aw + \left[Z_{(r)}(w) - \left(Q_{(r)}^{'}(w)\,Aw - AQ_{(r)}(w)\right)\right] + \widetilde{W}(w)$$

por el cambio de variables:

$$z = w + Q_{(r)}(w); Q_{(r)}(w) \in H_r^n[[w_1,...,w_n]] \quad ; \quad (r>1)$$

donde $ord\left(\widetilde{W}\right) \geq r+1$.

Prueba: Sea $z = w + Q_{(r)}(w)$ entonces: $z' = \left(I + Q'_{(r)}(w)\right) w'$

$$\left(I + Q'_{(r)}(w)\right) w' = Aw + AQ_{(r)}(w) + \sum_{k \geq r} Z_{(k)}\left(w + Q_{(r)}(w)\right)$$

$$= Aw + AQ_{(r)}(w) + \sum_{k \geq r}\left[Z_{(k)} o \left(I + Q(r)\right)\right](w)$$

$$= Aw + AQ_{(r)}(w) + Z_{(r)}(w) + W(w)$$

tal que $W(z) \in X[[z_1, ..., z_n]]$; $ord(W) > r$ multipliquemos por la izquierda a ambos lados de la ecuación; la matriz $\left(I + Q'_{(r)}(w)\right)^{-1}$

$$\left(I + Q'_{(r)}(w)\right)^{-1} = I - Q'_{(r)}(w) + \left(Q'_{(r)}(w)\right)^2 - ...$$

tenemos entonces:

$$\begin{aligned} w' &= Aw + AQ_{(r)}(w) + Z_{(r)}(w) + W(w) - Q'_{(r)}(w)\, Aw - Q'_{(r)}(w)\, AQ_{(r)}(w) \\ &\quad - Q'_{(r)}(w)\, Z_{(r)}(w) - Q'_{(r)}(w)\, W(w) + ... \\ &= Aw + \left[Z_{(r)}(w) - \left(Q'_{(r)}(w)\, Aw - AQ_{(r)}(w)\right)\right] + \widetilde{W}(w) \end{aligned}$$

donde $\widetilde{W}(w) = W(w) - Q'_{(r)}(w)\, \mathbf{A}Q_{(r)}(w) - Q'_{(r)}(w)\, Z_{(r)}(w) - Q'_{(r)}(w)\, W(w) + ...$ es un campo vectorial formal con $ord\left(\widetilde{W}\right) \geq r + 1$.

Corolario 3.1 *La ecuación diferencial ordinaria:*

$$z' = Az + Z_{(2)}(z) + ... + Z_{(r-1)}(z) + Z_{(r)}(z) + \sum_{k \geq r+1} Z_{(k)}(z)$$

puede ser transformada en :

$$w' = Aw + Z_{(2)}(w) + ... + Z_{(r-1)}(w) + \left[Z_{(r)}(w) - \left(Q'_{(r)}(w)\, Aw - AQ_{(r)}(w)\right)\right] + \widetilde{W}(w)$$

por el cambio de variables:

$$z = w + Q_{(r)}(w); \quad Q_{(r)}(w) \in H_r^n[[w_1, .., w_n]]\ (r > 1)$$

donde $ord\left(\widetilde{W}\right) \geq r + 1$.

Prueba: Se sigue la misma idea de la prueba de la proposición anterior.

Observación 3.1 *Un cambio de coordenadas del tipo $z = w + H(w)$ es llamado pertubación de la identidad.*

La Proposición 3.2.1 y su corolario nos dice que $H(w)$ es un campo polinomial de grado r; el cambio de coordenadas $z = w + Q_{(r)}(w)$ transforma el cambio polinomial $Z_{(r)}(w)$ en $\left[Z_{(r)}(w) - \left(Q'_{(r)}(w)\, Aw - AQ_{(r)}(w)\right)\right]$ y deja invariante a $Z_{(2)}, ..., Z_{(r-1)}$. Es decir si queremos que la ecuación transformada no posea términos de grado r, necesitamos elegir un apropiado $Q_{(r)}(w) \in H_r^n[[w_1, w_2, ..w_n]], (r > 1)$.

Definición 3.3 *Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $r > 1$ definimos:*

$$L_A : H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]] \longrightarrow H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]]$$

$$Q_r(z) \longrightarrow L_A(Q_r(z))$$

donde $L_A\left(Q_{(r)}(z)\right) = Q'_{(r)}(z)\, Az - AQ_{(r)}(z)\, ; z = (z_1, z_2, .., z_n)$
$H_r[[z_1, z_2, .., z_n]]$ es un $\mathbb{C}$- espacio vectorial generado por $\{z^\alpha; |\alpha| = r\}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$
De esta manera $H_r^n[[z_1, z_2, .., z_n]]$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial cuya base es dada por $\{z^\alpha e_s\ ;\ |\alpha| = r, s = 1, 2, ..., n\}$; donde e_s es el vector canónico de $\mathbb{C}^n$. Es facil verfificar que L_A es una transformación lineal $H_r^n[[z_1, z_2, .., z_n]]$ en $H_r^n[[z_1, z_2, .., z_n]]$.

Lema 3.1 *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonal entonces la matriz asociada a la transformacion linal $L_A : H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]] \longrightarrow H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]]$ tambien es diagonal.Los autovectores de L_A son los monomios $z^\alpha e_s$, y sus autovalores dependen linealmente de los autovalores de A, es decir:*

$$L_A z^\alpha e_s = [\langle \alpha, \lambda \rangle - \lambda_s]\, z^\alpha e_s$$

donde $\lambda_1, ...\lambda_n$ son los autovalores de A y $\langle \alpha, \lambda \rangle = \sum \alpha_j \lambda_j$

Prueba: Como $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es matriz diagonal con autovalores $\lambda_1, ...\lambda_n$, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Por definición:

$$L_A\left(z^\alpha e_s\right)=\left(z^\alpha e_s\right)' A\left(z\right)-A\left(z^\alpha e_s\right);|\alpha|=r,s=1,..,n$$

$$\left(z^\alpha e_s\right)' A\left(z\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\alpha_1}{z_1}z^\alpha & \frac{\alpha_2}{z_2}z^\alpha & \cdots & \frac{\alpha_n}{z_n}z^\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \lambda_s z_s \\ \vdots \\ \lambda_n z_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \left(\alpha_1\lambda_1+...+\alpha_n\lambda_n\right)z^\alpha \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\langle\alpha,\lambda\rangle z^\alpha e_s$$

Por otro lado tenemos, $A\left(z^\alpha e_s\right)=z^\alpha\left(Ae_s\right)=z^\alpha\lambda_s e_s=\lambda_s z^\alpha e_s$

Luego reemplazamos y tenemos:

$$L_A\left(z^\alpha e_s\right)=\langle\alpha,\lambda\rangle z^\alpha e_s-\lambda_s z^\alpha e_s=\left[\langle\alpha,\lambda\rangle-\lambda_s\right]z^\alpha e_s$$

Como $\{z^\alpha e_s \quad |\alpha|=r,s=1,2,...,n\}$ es una base de $H_r^n\left[[z_1,z_2,..z_n]\right]$, se sigue que la matriz asociada a la transformación lineal $L_A$es diagonal.

Observación 3.2 *Si todos los autovaloreеs de L_A son diferentes de cero, entonces es inversible.*

Corolario 3.2 *Si $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$es una matriz diagonal cuyos autovalores son no resonantes entonces la transformación lineal*

$$L_A:H_r^n\left[[z_1,z_2,..z_n]\right]\longrightarrow H_r^n\left[[z_1,z_2,..z_n]\right]$$

es inversible para todo $r>1$.

Prueba: Sea $S(z) \in H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]]$ $\qquad S(z) = \sum_{|\alpha|=r} \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha,s} z^{\alpha} e_s$

$$L_A S(z) = \sum_{|\alpha|=r} \sum_{i=1}^{n} L_A(a_{\alpha,s} z^{\alpha} e_s)$$

$$L_A S(z) = \sum_{|\alpha|=r} \sum_{i=1}^{n} (\langle \alpha, \lambda \rangle - \lambda_s) a_{\alpha,s} z^{\alpha} e_s$$

Los autovalores son no resonantes entonces $\langle \alpha, \lambda \rangle - \lambda_s \neq 0$. Existe L_A^{-1} tal que:

$$L_A^{-1} S(z) = \sum_{|\alpha|=r} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{\alpha,s}}{(\langle \alpha, \lambda \rangle - \lambda_s)} z^{\alpha} e_s$$

Corolario 3.3 *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonalizable y sus autovalores no presentan resonancias de orden $r \geq 2$ entonces dado $P_r \in H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]]$ existe una única solución $Q_r \in H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]]$ de la ecuación*

$$L_A(Q_r(z)) = P_r(z)$$

para todo $r > 1$.

Prueba: Sea $S(z) \in H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]]$. Como

$$L_A L_A^{-1} S(z) = \sum_{|\alpha|=r} \sum_{i=1}^{n} (\langle \alpha, \lambda \rangle - \lambda_s) a_{\alpha,s} z^{\alpha} e_s = S(z)$$

$$L_A^{-1} L_A S(z) = L_A^{-1} \sum_{|\alpha|=r} \sum_{i=1}^{n} (\langle \alpha, \lambda \rangle - \lambda_s) a_{\alpha,s} z^{\alpha} e_s = S(z).$$

Por tanto L_A es biyectivo por lo tanto sobreyectivo entonces dado un $P_r \in H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]]$ existe un $Q_r \in H_r^n[[z_1, z_2, ..z_n]]$ tal que:

$$L_A(Q_r(z)) = P_r(z)$$

3.3. Dominio de Poincaré y Siegel en $\mathbb{C}^n$

Consideremos el espacio complejo n-dimensional

$$\mathbb{C}^n = \{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n); \lambda_j \in \mathbb{C}, \forall\, 1 \leq j \leq n\}$$

estamos considerando $\mathbb{C}^n$ como el conjunto formado por todas las posibles n-uplas de autovalores de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, donde A es cualquier matriz compleja cuadrada de orden n.

Definición 3.4 *Dados $s \in \{1, ..., n\}$ y $m = (m_1, .., m_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos el conjunto*

$$H_{s,m} = \left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n ; \lambda_{(s)} = \langle m, \lambda \rangle , \sum_{j=1}^{n} m_j \geq 2, m_j \geq 0\right\}$$

*que es llamado el **plano resonante**.*

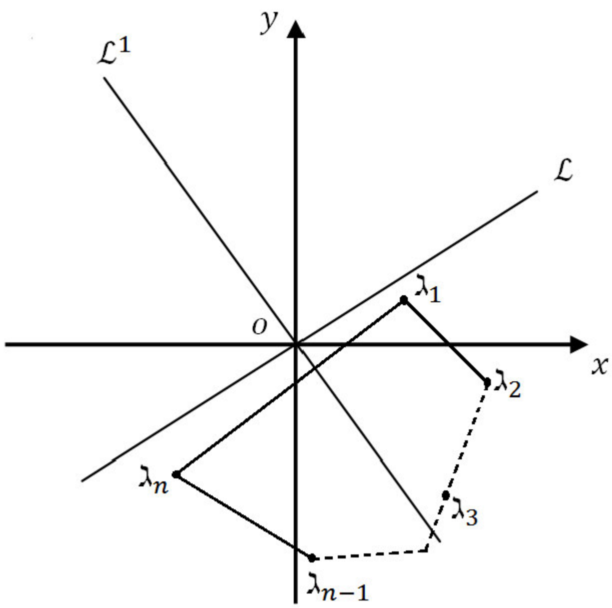
Observe que haciendo variar m y el indice s, se obtiene un conjunto numerable de planos resonantes.

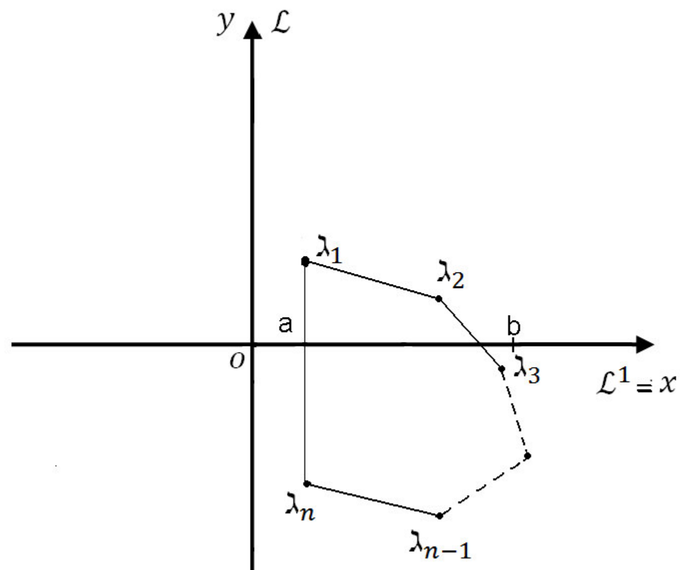
Definición 3.5 *Una n-upla λ de autovalores de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pertenece al* **dominio de Poincaré***, si la capsula convexa formada por los n-autovalores $\lambda_1, ...\lambda_n$ en el plano complejo no contiene al cero.*

Definición 3.6 *Una n-upla λ de autovalores de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pertenece al* **dominio de Siegel***, si la capsula convexa formada por los n-autovalores $\lambda_1, ...\lambda_n$ en el plano complejo contiene al cero.*

Teorema 3.1 *Asumamos que la n-upla $\lambda = (\lambda_1, ..\lambda_n)$ de autovalores de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pertenece al Dominio de Poincaré. Cada punto del dominio de Poincaré satisface no mas un número finito de relaciones resonantes $\lambda_s = \langle m, \lambda \rangle$; $m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \geq 2$ y tiene una vecindad que no intersecta los otros planos resonantes.*

Prueba: En el plano de números complejos existe una recta L ,que pasa por el origen de tal manera que la capsula convexa formada por los autovalores de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no contiene al cero y no intersecta a la recta L. Sea $L^{\perp}$ la recta ortogonal de L. Consideremos las proyecciones ortogonales de los autovalores sobre $L^{\perp}$, que se encuentra a una distancia $d > 0$, del plano de números complejos. Por una rotación de coordenadas adecuada hacemos que la recta L es el eje Y y la recta $L^{\perp}$ es el eje X.





Observe que todos los autovalores tienen parte real positiva. Dado $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in D_P$ sea $Proy_X\,(Aut_A) = [a, b]\,;\quad a > 0, b > 0\;\; a \leq Proy_X \lambda_j \leq b;\quad \forall 1 \leq j \leq n$. Sea $\lambda_j = (\alpha_j, \beta_j)\,, a \leq \alpha_j, \forall 1 \leq j \leq n$

$$\langle m, \lambda \rangle = \left(\sum_{j=1}^{m} m_j \alpha_j, \sum_{j=1}^{m} m_j \beta_j \right) : m \in \mathbb{N}^n$$

Entonces $Proy_{L^\perp} \langle m, \lambda \rangle = Proy_X \langle m, \lambda \rangle = \sum_{j=1}^{m} m_j \alpha_j$

Afirmamos:

$Proy_X \langle m, \lambda \rangle > Proy_X \lambda_j$; para cada $1 \leq j \leq n, m \in \mathbb{N}^n, |m| \geq N$ donde N es suficientemente grande.

En Efecto: Como $a > 0$ y $b > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ talque $Na > b$

$$\sum_{j=1}^{n} a m_j \leq \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j$$

entonces: $a\,|m| \leq Proy_X \langle m, \lambda \rangle$ como $b < aN \leq a\,|m|$, tenemos que:$Proy_X \langle m, \lambda \rangle > b$; sabemos que $Proy_X \lambda_j \leq b$ para cada $1 \leq j \leq n$ luego: $Proy_X \langle m, \lambda \rangle > Proy_X \lambda_j$; para cada $1 \leq j \leq n$; $m \in N^n,\quad |m| \geq N$. Concluimos que si existe $j \in \{1, .., n\}$ tal que $\lambda_j = \langle m, \lambda \rangle\,;\; m \in N^n,\quad |m| \geq N$ entonces $Proy_X \langle m, \lambda \rangle = Proy_X \lambda_j,\quad m \in \mathbb{N}^n, |m| \geq N\,(contradicion)$.

Veamos ahora que tiene una vecindad que no intersecta a los otros planos resonantes.

Dado $\epsilon > 0$; definimos $L_\epsilon = \cup B_\epsilon(x)\,; x \in Cap_A$.

Afirmación: L_ϵ es convexo.

En efecto: Sean p,q$\in L_\epsilon$ entonces:

$$p \in B_\epsilon(x) \quad ; \quad x \in Cap_A$$

$$p \in B_\epsilon(y) \quad ; \quad y \in Cap_A$$

Sea $z = (1-t)\,x + ty \in Cap_A$; para $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |(1-t)\,p + tq - z| &= |(1-t)\,(p-x) + t\,(q-y)| \\ &\leq (1-t)\,|p-x| + t\,|q-y| \\ &< (1|-t)\,\epsilon + t\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Entonces $(1-t)\,p + tq \in B_\epsilon(z)$; para cada $t \in [0,1]$

$(1-t)\,p + tq \in L_\epsilon$; para cada $t \in [0,1]$.

Afirmación: $Proy_X Cap_A = [a,b]$ entonces $Proy_X L_\epsilon \subset \langle a-\epsilon, b+\epsilon\rangle$

En Efecto:

Sea $p \in L_\epsilon$ Entonces existe $x \in Cap_A$ tal que $p \in B_\epsilon(x)$

$|Rep - Rex| \leq |p-x| < \epsilon$

Para cada $\lambda \in Cap_A$ $a \leq Proy_X \lambda \leq b$ $Proy_X \lambda = Re\lambda$ por lo tanto $a \leq Re\lambda \leq b$; para cada $\lambda \in Cap_A$ tenemos $-\epsilon + Rex < Rep < Rex + \epsilon$ $x \in Cap_A$

Por lo tanto: $a - \epsilon \leq Rex - \epsilon \prec Rep \prec \epsilon + Rex \prec \epsilon$

De ahi tenemos que $a - \epsilon < Rep < \epsilon + b$; $p \in L_\epsilon$, esto prueba finalmente que $Proy_X L_\epsilon \subset \langle a-\epsilon, b+\epsilon\rangle$.

Afirmación: $|\beta_i - \lambda_i| < \epsilon$; para cada $1 \leq i \leq n$ entonces $Cap_{\beta_1,\ldots,\beta_n} \subset L_\epsilon$

En efecto:

Sea $\beta \in Cap_A$ entonces $\beta = t_1\beta_1 + \ldots + t_n\beta_n$; $t_i \geq o$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$

Sea $x \in Cap_A$; $x = t_1\lambda_1 + \ldots + t_n\lambda_n$ y $|\beta_i - \lambda_i| < \epsilon$

$$\begin{aligned}|\beta - x| &= |t_1(\beta_1 - \lambda_1) + ... + t_n(\beta_n - \lambda_n)| \\ &\leq t_1|\beta_1 - \lambda_1| + ... + t_n|\beta_n - \lambda_n| \\ &< t_1\epsilon + ... + t_n\epsilon \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

entonces $\beta \in B_\epsilon(x)$, luego $\beta \in L_\epsilon$

De las afirmaciones tenemos :

$|\beta_i - \lambda_i| < \epsilon$; para cada $1 \leq i \leq n$ entonces $Cap_{\beta_1,...,\beta_n} \subset L_\epsilon$

Entonces $Proy_X Cap_{\beta_1,...,\beta_n} \subset Proy_X L_\epsilon \subset \langle a - \epsilon, b + \epsilon\rangle$

Afirmación: Si $\beta = (\beta^1, ..., \beta_n) \in D_P$ tal que $|\beta_i - \lambda_i| < \epsilon$; para cada $1 \leq i \leq n$ entonces $\beta \notin H_{j,m}$ para ningun $m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \geq N$.

En efecto:

Sea $\beta_i = (\alpha_i, \chi_i)$; para cada $1 \leq i \leq n$ entonces:

$a - \epsilon < Proy_X \beta_i < b + \epsilon$; tomemos $\epsilon < \frac{Na-b}{N+1}$

Si $m = (m_1, ..., m_n) \in N^n$, $|m| \geq N$

$$Proy_X \langle m, \beta\rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i > \sum_{i=1}^{n} m_i(a - \epsilon) = |m|(a - \epsilon) \geq N(a - \epsilon) > b + \epsilon.$$

Supongamos que existe $i \in \{1, .., n\}$ y existe $m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \geq N$ tal que $\beta \in H_{i,m}$ entonces: $\beta_i = \langle m, \beta\rangle$; $|m| \geq N$ luego $Proy_X \beta_i = Proy_X \langle m, \beta\rangle > b+\epsilon$ lo que es una contraddicción

Por lo tanto queda probado que $\beta \notin H_{i,m}$

Teorema 3.2 *Asumamos que la n-upla $\lambda = (\lambda_1, ..\lambda_n)$ de autovalores de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pertenece al Dominio de Siegel Dado $\lambda = (\lambda_1, ...\lambda_n)$ en el Dominio de Siegel y dado $\epsilon > 0$, existe un plano resonante H tal que $dist(\lambda, H) < \epsilon$.*

PRUEBA: Una demostración de este resultado se puede encontrar en [1]

Capítulo 4

Teorema Normalización Poincaré-Dulac en $\mathbb{C}^n$

4.1. Preliminares

En el contexto de la sección 1.5 denotaremos por:

$$\mathbb{C}\left[[Z_1,...,Z_n]\right]=\left\{f=\sum_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha Z^\alpha;\ \ a_\alpha\in\mathbb{C};\ \ f\ \ es\ \ una\ \ serie\ \ formal\right\}$$

$$\mathbb{C}^n\left[[Z_1,...,Z_n]\right]=\left\{F=\left(\sum_{|\alpha|\geq 1} a^1_\alpha Z^\alpha,...,\sum_{|\alpha|\geq 1} a^n_\alpha Z^\alpha\right);a^i_\alpha\in\mathbb{C};\ F\ es\ una\ serie\,(vector)\ \ formal\right\}$$

De ahora en adelante vamos a utilizar $z_1,z_2,...,z_n$ en vez de $Z_1,Z_2,...,Z_n$.

Definición 4.1 *El operador mayorante es un operador no lineal que actúa sobre las series formales y series (vector) formales reemplazando todos los coeficientes por sus módulos.*

$$M:\mathbb{C}^n\left[[z_1,z_2,...,z_n]\right]\longrightarrow\mathbb{C}^n\left[[z_1,z_2,...,z_n]\right]$$

para n=1

$$M:\sum_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha z^\alpha\longrightarrow\sum_{|\alpha|\geq 1}|c_\alpha|z^\alpha$$

para n>1

$$M:\left(\sum_{|\alpha|\geq 1} a^1_\alpha z^\alpha,\sum_{|\alpha|\geq 1} a^2_\alpha z^\alpha,...,\sum_{|\alpha|\geq 1} a^n_\alpha z^\alpha\right)\longrightarrow\left(\sum_{|\alpha|\geq 1}\left|a^1_\alpha\right|z^\alpha,\sum_{|\alpha|\geq 1}\left|a^2_\alpha\right|z^\alpha,...,\sum_{|\alpha|\geq 1}\left|a^n_\alpha\right|z^\alpha\right)$$

Definición 4.2 *La norma mayorante* ρ $\|.\|_\rho$ *sobre el espacio de las series formales* $\mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ *definido como:*

$$\|f\|_\rho = Mf(\rho, \rho, ..., \rho) < \infty.$$

Denotemos por B_ρ al conjunto de todas las series formales que tiene norma mayorante finita, es decir

$$B_\rho = \left\{ f \in \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]] ; \ \ \|f\|_\rho < \infty \right\}.$$

No es difícil probar que B_ρ es un subespacio.

Observación: Sea $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$, f se puede escribir como $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n(z)$ donde $f_n(z) = \sum\limits_{|\alpha|=n} a_\alpha z^\alpha$ es un polinomio homogéneo de grado n.

$$\|f\|_\rho = \left\| \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha z^\alpha \right) \right\|_\rho = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{|\alpha|=n} |a_\alpha| \rho^\alpha \right) = \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\rho$$

Definición 4.3 *La norma mayorante* ρ $\|\cdot\|_\rho$ *sobre el espacio de las series (vector) formales* $\mathbb{C}^n[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ *es definido como:*

$$\|F\|_\rho = \|F_1\|_\rho + \|F_2\|_\rho + ... + \|F_n\|_\rho$$

$$para \quad F(z) = (F_1(z), F_2(z), ..., F_n(z)) = \left(\sum_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha^1 z^\alpha, \sum_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha^2 z^\alpha, ..., \sum_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha^n z^\alpha \right).$$

Denotemos por $\mathcal{B}_\rho$ al conjunto de campos formales que tiene norma mayorante finita, es decir

$$\mathcal{B}_\rho = \left\{ F(z) \in \mathbb{C}^n[[z_1, z_2, ..., z_n]] ; \ \ \|F\|_\rho < \infty \right\}$$

No es difícil probar que $\mathcal{B}_\rho$ es un subespacio.

Proposición 4.1 *El espacio* $\mathcal{B}_\rho$ *con norma* $\|\cdot\|_\rho$ *es completo.*

Prueba: Primero probemos B_ρ con norma $\|\cdot\|_\rho$ es completo. Previamente recordemos el espacio l_1

$$l_1 = \left\{ x = (x_i)_{i=1}^\infty ; x_i \in \mathbb{C} \wedge \sum_{i=1}^\infty |x_i| < \infty \right\}.$$

Se define la norma en l_1

$$|x| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| .$$

Se demuestra que l_1 es completo con la norma $|\cdot|$. La demostración la puede encontrar en [8].

Por otro lado consideremos una biyección$\psi : \mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyección.

Para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ existe un $\beta_i \in \mathbb{N}$ tak que $\psi(\alpha) = \beta_i$ entonces $\alpha = \psi^{-1}(\beta_i)$.

Dado $f \in \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ entonces $f(z_1, z_2, ..., z_n) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha z^\alpha$

Para $(z_1, z_2, ..., z_n) = (1, 1, ..., 1)$ tenemos:

$f(1,1,...,1) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_{\psi^{-1}(\beta_i)} \left(\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \left| a_{\psi^{-1}(\beta_i)} \right| < \infty \right)$. De $f(1,1,...,1)$ se tiene la sucesión infinita $\left(a_{\psi^{-1}(\beta_1)}, a_{\psi^{-1}(\beta_2)}, ..., a_{\psi^{-1}(\beta_n)}, ... \right)$.

Si $\rho = 1$, sea la función Φ definida:

$$\begin{array}{rlll} \Phi : & B_1 & \longrightarrow & l_1 \\ & f & \to & \Phi(f) = \left(a_{\psi^{-1}(\beta_1)}, a_{\psi^{-1}(\beta_2)}, ..., a_{\psi^{-1}(\beta_n)}, ... \right) . \end{array}$$

Sea $f, g \in B_1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces:

$$f(z_1, ..., z_n) = \sum_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha z^\alpha \;\; y \;\; g(z_1, ..., z_n) = \sum_{|\alpha|\geq 1} b_\alpha z^\alpha$$

$$(f+g)(z_1, ..., z_n) = \sum_{|\alpha|\geq 1} (a_\alpha + b_\alpha) z^\alpha \;\; y \;\; (\lambda f)(z_1, ..., z_n) = \sum_{|\alpha|\geq 1} (\lambda a_\alpha) z^\alpha$$

Evaluando en $(z_1, ..., z_n) = (1, ..., 1)$

$f(1, ..., 1) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_{\psi^{-1}(\beta_i)}$, se tiene la sucesión infinita $\left(a_{\psi^{-1}(\beta_1)}, ..., a_{\psi^{-1}(\beta_n)}, ... \right)$

$g(1, ..., 1) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} b_\alpha = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} b_{\psi^{-1}(\beta_i)}$, se tiene la sucesión infinita $\left(b_{\psi^{-1}(\beta_1)}, ..., b_{\psi^{-1}(\beta_n)}, ... \right)$

$(f+g)(1, ..., 1) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} (a_\alpha + b_\alpha) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha + \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} b_\alpha$, esta igualdad se cumple ya que cada serie es absolutamente convergente por lo tanto convergente.

$(f+g)(1, ..., 1) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_{\psi^{-1}(\beta_i)} + \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} b_{\psi^{-1}(\beta_i)} = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \left(a_{\psi^{-1}(\beta_i)} + b_{\psi^{-1}(\beta_i)} \right)$ se tiene la sucesión infinita $\left(a_{\psi^{-1}(\beta_1)} + b_{\psi^{-1}(\beta_1)}, a_{\psi^{-1}(\beta_2)} b_{\psi^{-1}(\beta_2)}, ... \right) = \left(a_{\psi^{-1}(\beta_1)}, a_{\psi^{-1}(\beta_2)}, ... \right) + \left(b_{\psi^{-1}(\beta_1)}, b_{\psi^{-1}(\beta_2)}, ... \right)$

$(\lambda f)(1,...,1) = \sum_{|\alpha|\geq 1} \lambda a_\alpha = \lambda \sum_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha = \lambda \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{\psi^{-1}(\beta_i)} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda a_{\psi^{-1}(\beta_i)}$ se tiene la sucesión infinita $\left(\lambda a_{\psi^{-1}(\beta_1)}, \lambda a_{\psi^{-1}(\beta_2)}, ..., \lambda a_{\psi^{-1}(\beta_n)}, ...\right) = \lambda \left(a_{\psi^{-1}(\beta_1)}, a_{\psi^{-1}(\beta_2)}, ..., a_{\psi^{-1}(\beta_n)}, ...\right)$.

Que cumple:

- $\Phi(f+g) = \left(a_{\psi^{-1}(\beta_1)} + b_{\psi^{-1}(\beta_1)}, a_{\psi^{-1}(\beta_2)} b_{\psi^{-1}(\beta_2)}, ...\right) = \Phi(f) + \Phi(g)$

- $\Phi(\lambda f) = \left(\lambda a_{\psi^{-1}(\beta_1)}, \lambda a_{\psi^{-1}(\beta_2)}, ...\right) = \lambda \Phi(f)$

- $\Phi(f) = 0 \leftrightarrow \left(a_{\psi^{-1}(\beta_1)}, ...\right) = (0,0,...) \leftrightarrow a_{\psi^{-1}(\beta_i)} = 0; i = 1,2,..,n \leftrightarrow f \equiv 0.$

- Sea $(c_1, c_2, ...) \in l_1$ tal que $\sum_{i\in\mathbb{N}} |c_i| < \infty$. Como $\exists \psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ biyección . Dado $i \in \mathbb{N}$ $\exists\ \alpha^i = (\alpha_1^i, ..., \alpha_n^i) \in \mathbb{N}^n$ tal que $\psi(\alpha^i) = i$ entonces $\alpha^i = \psi^{-1}(i)$ y $|\alpha^i| \geq 1$. Sea la serie formal $f(z_1, ..., z_n) = \sum_{|\alpha^i \geq 1|} c_{\alpha^i} z^{\alpha^i}$ tal que $\sum_{|\alpha^i \geq 1|} |c_{\alpha^i}| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |c_i| < \infty$.
  Por lo tanto es Φ sobreyectiva.

Como l_1 es de Banach y Φ es un isomorfismo entonces B_1 es de Banach. Para el caso general para un ρ arbitrario, definimos la función Ω.

$$\begin{array}{rccc} \Omega: & B_1 & \longrightarrow & B_\rho \\ & f & \to & \Omega(f) = f(\rho z) \end{array}$$

Que cumple:

- $\Omega(f+g)(z) = (f+g)(\rho z) = \Omega(f)(z) + \Omega(g)(z)$

- $\Omega(\lambda f)(z) = (\lambda f)(\rho z) = \lambda \Omega(f)(z)$

- $\Omega(f)(z) = 0 \leftrightarrow f(\rho z) = 0 \leftrightarrow f(\rho z_1, ..., \rho z_n) = \sum_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha (\rho z_1)^{\alpha_1} ... (\rho z_n)^{\alpha_n} = 0 \leftrightarrow$ $f(\rho z_1, ..., \rho z_n) = \sum_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha \rho^{|\alpha|\geq 1} z^\alpha \leftrightarrow \rho^{|\alpha|\geq 1} \sum_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha z^\alpha = 0 \leftrightarrow f = 0$

- Sea $\widetilde{f} \in B_\rho \to$ sea $f(z) = \widetilde{f}\left(\frac{z}{\rho}\right) \to \Omega(f)(z) = \widetilde{f}(\rho z)$

Como B_1 es de Banach y Ω es un isomorfismo entonces B_ρ es de Banach.

Lema 4.1 *$\mathcal{B}_\rho$ con norma $\|.\|_\rho$ es completo.*

Prueba: Sea $(F_m) \subseteq \mathcal{B}_\rho$ una sucesión de Cauchy $\forall\epsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, r > k_0$
$\|F_k - F_r\|_\rho < \epsilon$
$\|F_k^i - F_r^i\|_\rho < \|(F_k^1, F_k^2, ..., F_k^n) - (F_k^1, F_k^2, ..., F_k^n)\|_\rho = \|F_k - F_r\|_\rho < \epsilon$
$(F_m^i) \in B_\rho$ es de cauchy $\rightarrow \exists F^i \in B_\rho$.
Por lo tanto $\forall\epsilon > 0$, $\exists s_i \in \mathbb{N}$ tal que $m > s_i \rightarrow \left\|F_{s_i}^i - F^i\right\|_\rho < \frac{\epsilon}{n}$; $\forall 1 \leq i \leq n$ tomemos $s = max\{s_1, s_2, .., s_n\}$; $\|F_s^i - F^i\|_\rho < \epsilon/n$.
Entonces $\forall\epsilon > 0$; $m > s$ $\|F_m - F\|_\rho = \|(F_m^1, F_m^2, ..., F_m^n) - (F^1, F^2, ..., F^n)\|_\rho$
$= \|F_m^1 - F^1\|_\rho - \|F_m^2 - F^2\|_\rho - ... \|F_m^n - F^n\|_\rho < \epsilon/n + \epsilon/n + ... + \epsilon/n = \epsilon$.
Por tanto $\mathcal{B}_\rho$ con norma $\|.\|_\rho$ es completo. ∎

Para los siguientes cálculos veamos las siguientes definiciones.

- Sean $a = (a_1, a_2, ..., a_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$
  Definimos $a \leq b$ si y sólo si $a_i \leq b_i$; $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

- Sean $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} a_\alpha z^\alpha$, $g(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} b_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[[z]]$ con coeficientes positivos.
  Definimos $f \leq g$ si y sólo si $a_\alpha \leq b_\alpha$; $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n$

- Sean $F(z) = (F_1, F_2, ..., F_n)(z)$, $G(z) = (G_1, G_2, .., G_n)(z) \in \mathbb{C}^n[[z]]$ con coeficientes positivos.
  Definimos $F \leq G$ si y sólo si $F_i \leq G_i$; $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

- Sea $F(z) \in \mathbb{C}^n[[z]]$ con coeficientes no negativos. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$
  Definimos $F(a) \leq F(b)$ si y sólo si $a \leq b$.

Sea $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Definimos en operador D^α

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} ... \partial z_n^{\alpha_n}} : \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]] \longrightarrow \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$$

$$\sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha \longrightarrow D^\alpha \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha D^\alpha z^\alpha$$

Sea $f(z) \in \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ su expansión es

$$f(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0} D^\alpha f(0) z^\alpha; \qquad z = (z_1, z_2, ..., z_n)$$

Sea $g(z), h(z) \in \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ la derivada del producto es

$$D^{\alpha}(gh) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} g D^{\beta} h$$

Lema 4.2 *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Para dos series $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ y para algún ρ*

$$\|fg\|_{\rho} \leq \|f\|_{\rho} \|g\|_{\rho}$$

   donde todas las normas son finitas.

2. *Si $f(z) \in \mathbb{C}[[z_1, z_2]]$ y $G(z) = (g_1, g_2)(z) \in \mathbb{C}^2[[z_1, z_2]]$ entonces se cumple*

$$M(foG) \leq ((Mf)\, o\, (MG))$$

3. *Si $F(z) \in \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ y $G(z) = (g_1, ..., g_n)(z) \in \mathbb{C}^n[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ entonces se cumple*

$$M(FoG) \leq ((MF)\, o\, (MG))$$

4. *Si $G(z), \overline{G}(z) \in \mathbb{C}^n[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ dos series formales entonces para la composición tenemos*

$$\|F \circ G\|_{\rho} \leq \|F\|_{\sigma}, \quad donde \ \ \sigma = \|G\|_{\rho}$$

Prueba.

1. Sea

$$f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_{\alpha} z^{\alpha} \qquad y \qquad g(z) = \sum_{|\beta| \geq 0} b_{\beta} z^{\beta}$$

   f y g se puede escribir como :

   $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ y $g = \sum_{n \geq 0} g_n$. Donde $f_n = \sum_{|\alpha|=n} a_{\alpha} z^{\alpha}$ y $g_n = \sum_{|\alpha|=n} b_{\alpha} z^{\alpha}$

Afirmación: $\|f_m g_s\|_\rho \leq \|f_m\|_\rho \|g_s\|_\rho$.

En efecto:

Sea $f_m = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$ empezemos suponiendo que g_s sólo tiene dos términos $g_s = \left(b_I z^I + b_J z^J\right)$ tal que $I \neq J$ y $|I| = |J| = s$.

Donde todas las n-uplas $\alpha + I$ son diferentes dos a dos y las n-uplas $\alpha + J$ son diferentes dos a dos disjuntas tal que $|\alpha + I| = m + s$ y $|\alpha + J| = m + s$. Se agrupará los términos homogéneos y se tendrá:

$$\left\|f_m\left(b_I z^I + b_J z^J\right)\right\|_\rho = \left\|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha b_I z^{\alpha+I} + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha b_J z^{\alpha+J}\right\|_\rho$$

$$= \left\|\sum_{|\overline{\alpha}|=m+s} \left(a_{\overline{\alpha}-I} b_I + a_{\overline{\alpha}-J} b_J\right) z^{\overline{\alpha}} + \sum_{|\alpha|=m+s} a_\alpha z^\alpha\right\|_\rho$$

$$= \sum_{|\overline{\alpha}|=m+s} \left|a_{\overline{\alpha}-I} b_I + a_{\overline{\alpha}-J} b_J\right| \rho^{\overline{\alpha}} + \sum_{|\alpha|=m+s} |a_\alpha| \rho^\alpha$$

$$\leq \sum_{|\overline{\alpha}|=m+s} \left|a_{\overline{\alpha}-I} b_I\right| + \left|a_{\overline{\alpha}-J} b_J\right| \rho^{\overline{\alpha}} + \sum_{|\alpha|=m+s} |a_\alpha| \rho^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha| \rho^\alpha \left(|b_I| \rho^I + |b_J| \rho^J\right) = \|f_m\|_\rho \|g_s\|_\rho$$

Para g_s en general $g_s = \sum\limits_{|\alpha|=s} b_\alpha z^\alpha$ en el producto de $f_m g_s$ agrupando los términos homogéneos de manera análoga al caso particular y aplicando la definición de $\|.\|_\rho$ y la desigualdad triangular seguirá que:

$$\|f_m g_s\|_\rho \leq \|f_m\|_\rho \|g_s\|_\rho$$

Luego:

$$\|fg\|_\rho = \left\|\sum_{m\geq o}\left(\sum_{j=0}^{m} f_{m-j} g_j\right)\right\|_\rho = \sum_{m\geq o}\left\|\left(\sum_{j=0}^{m} f_{m-j} g_j\right)\right\|_\rho \leq \sum_{m\geq o}\sum_{j=0}^{m} \|f_{m-j} g_j\|_\rho$$

$$\leq \sum_{m\geq o}\sum_{j=0}^{m} \|f_{m-j}\|_\rho \|g_j\|_\rho = \left(\sum_{n\geq o} \|f_n\|_\rho\right)\left(\sum_{n\geq o} \|g_n\|_\rho\right) = \|f\|_\rho \|g\|_\rho$$

2. Sea $f(z)=\sum\limits_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(0)\,z^{\alpha}$ y $g_i(z)=\sum\limits_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}g_i(0)\,z^{\alpha}$ para $i\in\{1,2\}$

$$s(z)=(fo\,(g_1,g_2))(z)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(0)\left(\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}g_1(0)\,z^{\alpha}\right)^{\alpha_1}\left(\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}g_2(0)\,z^{\alpha}\right)^{\alpha_2}$$

$$s(z)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}s(0)\,z^{\alpha}$$

$$r(z)=MFoMG(z)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\left|\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(0)\right|\left(\sum_{|\alpha|\geq 0}\left|\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}g_1(0)\right|z^{\alpha}\right)^{\alpha_1}\left(\sum_{|\alpha|\geq 0}\left|\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}g_2(0)\right|z^{\alpha}\right)^{\alpha_2}$$

$$r(z)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}r(0)\,z^{\alpha}$$

Afirmación: $M(s)\leq r$ es decir $\left|\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}s(0)\right|\leq\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}r(0)$; $\forall\alpha\in\mathbb{N}^2$.

En efecto:

Para $\alpha=0$

$$\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}s(z)=s(z)$$

$$\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}s(0)=s(0)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(0)\,(g_1(0))^{\alpha_1}\,(g_2(0))^{\alpha_2}$$

$$\left|\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}s(0)\right|=\left|\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(0)\,(g_1(0))^{\alpha_1}\,(g_2(0))^{\alpha_2}\right|$$

Por otro lado:

$$\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}r(z)=r(z)$$

$$\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}r(0)=r(0)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\left|\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(0)\right|(|g_1(0)|)^{\alpha_1}\,(|g_2(0)|)^{\alpha_2}\,.$$

Por lo tanto: Para $\alpha=0$ $\left|\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}s(0)\right|\leq\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}r(0)$. Para $\alpha=(1,0)$

$$\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}s(z)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(0)\,D^{(1,0)}\left[(g_1)^{\alpha_1}\,(g_2)^{\alpha_2}\right],$$

donde:

$$D^{(1,0)}\left[(g_1)^{\alpha_1}\,(g_2)^{\alpha_2}\right]=\binom{(1,0)}{(0,0)}D^{(1,0)}\,(g_1)^{\alpha_1}\,D^{(0,0)}\,(g_2)+\binom{(1,0)}{(1,0)}D^{(0,0)}\,(g_1)^{\alpha_1}\,D^{(1,0)}\,(g_2)$$

$$= \alpha_1 \left(\sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} g_1 (0)\, z^{\alpha} \right)^{\alpha_1 - 1} \left(\sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} g_1 (0)\, \alpha_1 z_1^{\alpha_1 - 1} z_2^{\alpha_2} \right) g_2$$

$$+ g_1 \alpha_2 \left(\sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} g_2 (0)\, z^{\alpha} \right)^{\alpha_2 - 1} \left(\sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} g_2 (0)\, \alpha_1 z_1^{\alpha_1 - 1} z_2^{\alpha_2} \right)$$

$$\left| \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} s (0) \right| =$$

$$\left| \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f (0) \left[\alpha_1 \left(g_1 (0) \right)^{\alpha_1 + 1} \left(D^{(1,0)} g_1 (0) \right) g_2 (0) + g_1 (0)\, \alpha_2 \left(g_2 (0) \right)^{\alpha_2 - 1} \left(D^{(1,0)} g_2 (0) \right) \right] \right|$$

Por otro lado:

$$\frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} r (z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \left| \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f (0) \right| D^{(1,0)} \left[(M g_1)^{\alpha_1} (M g_2)^{\alpha_2} \right]$$

$$\frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} r (0) =$$

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} \left| \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f (0) \right| \left[\alpha_1 \left(|g_1 (0)| \right)^{\alpha_1 - 1} \left(D^{(1,0)} |g_1 (0)| \right) |g_2 (0)| + |g_1 (0)|\, \alpha_2 \left(|g_2 (0)| \right)^{\alpha_2 - 1} \left(D^{(1,0)} |g_2 (0)| \right) \right]$$

Por lo tanto: Para $\alpha = (1, 0)$ $\left| \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} s (0) \right| \leq \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} r (0)$

Veamos en general la prueba sea $\alpha \in \mathbb{N}^2$

$$\left| \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} s (0) \right| \leq \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} r (0)$$

O que es lo mismo probar

$$|D^{\alpha} s (0)| \leq D^{\alpha} r (0)$$

Antes probemos la siguiente afirmación

Afirmación:

$$|D^{\alpha} g^{v_1}|(0) \leq D^{\alpha} (M g)^{v_1} (0) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \forall v_1 \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

En efecto: Por inducción sobre $v_1 \in \mathbb{N}$

$v_1 = 1$

$$g = \sum_{|\beta| \geq 0} g_{\alpha} z^{\beta}$$

$$Mg = \sum_{|\beta|\geq 0} |g_\beta| z^\alpha$$

Se tiene $|D^\alpha g|(0) = |g_\alpha|$ y $D^\alpha Mg(0) = |g_\alpha|$

Supongamos se cumple para un $v_1 \in \mathbb{N}$ es decir $|D^\alpha g^{v_1}|(0) \leq D^\alpha (Mg)^{v_1}(0)$

Veamos para $v_1 + 1$

$$\begin{aligned}
|D^\alpha g^{v_1+1}|(0) &= |D^\alpha g^{v_1} g|(0) \\
&= |\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} g^{v_1} D^\beta g|(0) \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^{\alpha-\beta} g^{v_1}|(0) |D^\beta g|(0)
\end{aligned}$$

Por hipotesis

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} (Mg)^{v_1}(0) D^\beta (Mg)(0) \\
&= D^\alpha (Mg)^\alpha (Mg)(0) \\
&= D^\alpha (Mg)^{v_1+1}.
\end{aligned}$$

Ahora veamos la prueba en general: En efecto

$$\begin{aligned}
|D^\alpha s\,(0)\,| &= |\sum_{|v|\geq 0} D^v f\,(0)\, D^\alpha (g_1^{v_1} g_2^{v_2})\,(0)\,| \\
&\leq \sum_{|v|\geq 0} |D^v f\,(0)\,||D^\alpha (g_1^{v_1} g_2^{v_2})\,(0)\,| \\
&= \sum_{|v|\geq 0} |D^v f\,(0)\,||\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} g_1^{v_1}(0) D^\beta g_2^{v_2}(0)| \\
&\leq \sum_{|v|\geq 0} |D^v f\,(0)\,|\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^{\alpha-\beta} g_1^{v_1}(0) D^\beta g_2^{v_2}(0)| \\
&= \sum_{|v|\geq 0} |D^v f\,(0)\,|\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^{\alpha-\beta} g_1^{v_1}(0)||D^\beta g_2^{v_2}(0)|
\end{aligned}$$

Por (4.1)

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{|v|\geq 0} |D^v f\,(0)\,|\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} (Mg_1)^{v_1}(0) D^\beta (Mg_2)^{v_2}(0) \\
&= \sum_{|v|\geq 0} |D^v f\,(0)\,| D^\alpha ((Mg_1)^{v_1} (Mg_2)^{v_2})\,(0) = D^\alpha r(0).
\end{aligned}$$

3. Antes de ver la prueba veamos la siguiente afirmación

   Afirmación:

$$|D^{\alpha}(g_1^{v_1}g_2^{v_2}..g_n^{v_n})|(0) \leq D^{\alpha}(Mg_1)^{v_1}(Mg_2)^{v_2}..(Mg_n)^{v_n}(0) \qquad \forall v_i \in \mathbb{N} \qquad (4.2)$$

   En efecto: Por inducción sobre n

   n=1; Por (4.1) se tiene

$$|D^{\alpha}g_1^{v_1}|(0) \leq D^{\alpha}(Mg_1)^{v_1}(0).$$

   Supongamos que se cumple para un n es decir

$$|D^{\alpha}(g_1^{v_1}g_2^{v_2}..g_n^{v_n})|(0) \leq D^{\alpha}(Mg_1)^{v_1}(Mg_2)^{v_2}..(Mg_n)^{v_n}(0).$$

   Veamos para $n+1$

$$|D^{\alpha}(g_1^{v_1}..g_n^{v_n}g_{n+1}^{v_{n+1}})|(0) = |D^{\alpha}(g_1^{v_1}..g_n^{v_n})(g_{n+1}^{v_{n+1}})|(0)$$
$$= |\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}(g_1^{v_1}g_2^{v_2}..g_n^{v_n})D^{\beta}(g_{n+1}^{v_{n+1}})|(0)$$
$$\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|D^{\alpha-\beta}(g_1^{v_1}g_2^{v_2}..g_n^{v_n})||D^{\beta}(g_{n+1}^{v_{n+1}})|(0).$$

   Por hipotesis

$$\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}((Mg_1)^{v_1}(Mg_2)^{v_2}..(Mg_n)^{v_n})(0)D^{\beta}(Mg_{n+1})^{v_{n+1}}(0)$$

$$= D^{\alpha}((Mg_1)^{v_1}(Mg_2)^{v_2}..(Mg_n)^{v_n})(Mg_{n+1})^{v_{n+1}})(0)$$
$$= D^{\alpha}(Mg_1)^{v_1}(Mg_2)^{v_2}..(Mg_n)^{v_n}(Mg_{n+1})^{v_{n+1}})(0).$$

   Ahora veamos la prueba de 3; siguiendo las notaciones de la prueba de 2

$$|D^{\alpha}s()0| = |\sum_{v\geq 0}D^{v}f(0)D^{\alpha}(g_1^{v_1}g_2^{v_2}..g_n^{v_n})|(0)$$
$$\leq \sum_{v\geq 0}|D^{v}f(0)||D^{\alpha}(g_1^{v_1}g_2^{v_2}..g_n^{v_n})|(0)$$
$$\leq \sum_{v\geq 0}|D^{v}f(0)|\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|D^{\alpha-\beta}(g_1^{v_1}g_2^{v_2}..g_{n-1}^{v_{n-1}})|(0)|D^{\beta}(g_n^{v_n})|(0)$$
$$= D^{\alpha}r(0).$$

4. $MG(\rho) = (MG_1, ..., MG_n)(\rho) = (MG_1(\rho), ..., MG_n(\rho)) = y \leq \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$,
$\sigma_i = \|G\|_\rho$
$\|FoG\|_\rho = \|F_1 oG\|_\rho + ... + \|F_n oG\|_\rho \leq ((MF_1)\, o\, (MG))_\rho + ... + ((MF_n)\, o\, (MG))_\rho$
$= MF_1(y) + ... + MF_n(y) \leq MF_1(\sigma) + ... + MF_n(\sigma) = \|F_1\|_\sigma + ... + \|F_n\|_\sigma = \|F\|_\sigma$

Lema 4.3 *Si $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ es una matriz diagonal de autovalores no resonantes en el dominio de Poincaré entonces el operador L_A tiene inversa acotada en el espacio de campos vectores con la norma mayorante.*

Prueba.

$$L_A : \mathbb{C}^n[[z_1, z_2, ..., z_n]] \longrightarrow \mathbb{C}^n[[z_1, z_2, ..., z_n]]$$

$$\sum_{k,\alpha} c_{k\alpha} z^\alpha e_k \longrightarrow \sum_{k,\alpha} c_{k\alpha}(<\alpha, \lambda> - \lambda_k)\, z^\alpha e_k.$$

Entonces:
$$L_A^{-1} : \mathbb{C}^n[[z_1, z_2, ..., z_n]] \longrightarrow \mathbb{C}^n[[z_1, z_2, ..., z_n]]$$

$$\sum_{k,\alpha} c_{k\alpha} z^\alpha e_k \longrightarrow \sum_{k,\alpha} \frac{c_{k\alpha}}{(<\alpha, \lambda> - \lambda_k)} z^\alpha e_k$$

$$L_A^{-1}\left(\sum_{k,\alpha} c_{k\alpha} z^\alpha e_k\right) = \sum_{k,\alpha} \frac{c_{k\alpha}}{<\alpha, \lambda> - \lambda_k} z^\alpha e_k$$

$$\left\| L_A^{-1}\left(\sum_{k,\alpha} c_{k\alpha} z^\alpha e_k\right)\right\|_\rho = \left\|\sum_\alpha \frac{c_{1\alpha}}{(<\alpha, \lambda> - \lambda_1)} z^\alpha\right\|_\rho + ... + \left\|\sum_\alpha \frac{c_{1\alpha}}{(<\alpha, \lambda> - \lambda_n)} z^\alpha\right\|_\rho$$

$$\leq \frac{1}{inf_\alpha |<\alpha, \lambda> - \lambda_k|}\left(\left\|\sum_\alpha c_{1\alpha} z^\alpha\right\|_\rho + ... + \left\|\sum_\alpha c_{n\alpha} z^\alpha\right\|_\rho\right)$$

$$= \frac{1}{inf_\alpha |<\alpha, \lambda> - \lambda_k|}\left\|\sum_{k,\alpha} c_{k\alpha} z^\alpha e_k\right\|_\rho.$$

Entonces:

$$\left\|L_A^{-1}\right\|_\rho \leq \frac{1}{inf_{k,\alpha} |<\alpha, \lambda> - \lambda_k|}$$

como los autovalores se encuentran en el dominio de Poincaré se puede acotar por un $\beta > 0$ por el Teorema 3.1 por lo tanto : entonces:

$$\left\|L_A^{-1}\right\|_\rho \leq \frac{1}{inf_{k,\alpha} |<\alpha, \lambda> - \lambda_k|} < \infty$$

Definición 4.4 *Sea* $F = (F_1, F_2, ..., F_2) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *un campo holomorfo definido en algún disco cerca al origen;* $F(0) = 0$ *El operador **ARGUMENTO SHIFT** es el operador:*

$$S_F : \mathbb{C}^n [[z]] \longrightarrow \mathbb{C}^n [[z]]$$
$$h(z) \longrightarrow F(z + h(z))$$

S_F *actua sobre la serie (vector)* h *que no posee término independiente;* $h(0) = 0$.

Consideremos el espacio de Banach $\mathcal{B}_\rho$ indexado con el parámetro real $\rho \in R_+$. Sea $\mathcal{B}_\rho$ un subespacio de $\mathcal{B}_\sigma$, $\forall\ 0 < \rho < \sigma$ es natural considerar la inclusión $id_{\rho\sigma} : \mathcal{B}_\rho \longrightarrow \mathcal{B}_\sigma$ que es continua. Sea S un operador definido en todo espacio para un suficiente valor pequeño ρ; consideremos una familia de operadores $S_\rho : \mathcal{B}_\rho \longrightarrow \mathcal{B}_\rho$, vamos a omitir el subíndice en la notación $S_\rho = S$.

NOTACIÓN:$O(x_n) = \sum\limits_{i \geq n} a_i x^i; a_i \in \mathbb{R}_0^+$

Definición 4.5 *El operador* $S_\rho = S$ *es una contracción fuerte si:*

1. $\|S(0)\|_\rho = O(\rho^2)$.
2. S *es Lipschitz sobre la bola* $\boldsymbol{A}_\rho = \left\{\|h\|_\rho \leq \rho\right\} \subset \mathcal{B}_\rho$ *con la* $\rho-$*norma mayorante para algún* ρ *con la constante de Lipschitz no mayor que* $O(\rho)$.

Lema 4.4 *Sea* $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *es holomorfa cerca al origen tal que* $F(0) = 0$ *y* $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)(0) = 0$. *Entonces el argumento de shift es una contracción fuerte.*

Prueba:

1. $h = 0$ y $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)(0) = 0$

$$\|S_F(0)\|_\rho = \|F(z)\|_\rho = \left\| \left(\sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha^1 z^\alpha, \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha^2 z^\alpha, ..., \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha^n z^\alpha \right) \right\|_\rho$$

$$= \left\| \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha^1 z^\alpha \right\|_\rho + \left\| \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha^2 z^\alpha \right\|_\rho + ... + \left\| \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha^n z^\alpha \right\|_\rho = O(\rho^2)$$

para ρ un suficientemente pequeño.

2. Sea $h,\overline{h} \in \mathbf{A}_\rho = \{\|h\| \leq \rho\} \subset \mathcal{B}_\rho$, dos campos de vectores.

$$g = S_F h - S_F \overline{h} = F \circ (id + h) - F\left(id + \overline{h}\right) \tag{4.3}$$

puede representar como:

$$g(z) = \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(z + th(z) + (1-t)\,\overline{h}(z)\right)\left(h(z) - \overline{h}(z)\right) dz$$

por el Lema 4.2, desde que $t \in [0,1]$, tenemos:

$$\|g\|_\rho \leq \left\|\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right\|_\sigma \left\|h - \overline{h}\right\|_\rho \tag{4.4}$$

donde:

$$\sigma = \left\|z + th(z) + (1-t)\,\overline{h}(z)\right\|_\rho \leq \|z\|_\rho + \left\|th(z) + (1-t)\,\overline{h}(z)\right\|_\rho \leq \|z\|_\rho + max\left(\|h\|_\rho, \left\|\overline{h}\right\|_\rho\right)$$

Donde $\|h\|_\rho \leq \rho$, $\left\|\overline{h}\right\|_\rho \leq \rho$ entonces $\sigma \leq \rho n + \rho = (n+1)\,\rho$

$\frac{\partial F}{\partial z}$ es una matriz cuyos términos son de orden ≥ 1 por lo tanto aplicando la norma de una matriz .

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial z}\right\|_\sigma \leq C\sigma$$

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial z}\right\|_\sigma \leq C(n+1)\,\rho = O(\rho) \tag{4.5}$$

De (4.3),(4.4) y (4.5) se tiene

$$\left\|S_F h - S_F \overline{h}\right\|_\rho \leq O(\rho)\left\|h - \overline{h}\right\|_\rho. \tag{4.6}$$

De esta manera queda probado el Lema.

■

En $\mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ definimos el subconjunto $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} = \{f \in \mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]\,;\, f(0) = 0\} = \left\{\sum_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha z^\alpha\right\}$$

Afirmación: $\mathbf{m}$ es un ideal maximal.

En efecto: Sean $f, g \in \mathbf{m}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \sum_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha z^\alpha$ $g(z) = \sum_{|\alpha|\geq 1} d_\alpha z^\alpha$

- $(f+g)(z) = f(z) + g(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha z^\alpha + \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} d_\alpha z^\alpha = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} (c_\alpha + d_\alpha) z^\alpha \in \mathbf{m}$
- Sea $r(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha z^\alpha \in \mathbf{m}$
  $(rf)(z) = r(z) f(z) = r(z) \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha z^\alpha$; $(rf)(0) = r(0) f(0) = 0$ entonces $rf \in \mathbf{m}$.

Por tanto $\mathbf{m}$ es un ideal en $\mathbb{C}[[z]]$. Además, es un ideal maximal, pues si un ideal U contiene a $\mathbf{m}$ y $U \neq \mathbb{C}[[z]]$, entonces hay una función $g(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} d_\alpha z^\alpha \in U$ $g(z) \notin \mathbf{m}$. Como $g(z) \notin \mathbf{m}$, $g(0) = \beta \neq 0$. Entonces $h(z) = g(z) - \beta$ es tal que $h(0) = g(0) - \beta = 0$, luego $h(z) \in \mathbf{m} \subset U$. Pero $g(z)$ está también en U; luego $\beta = g(z) - h(z) \in U$ y por lo tanto $1 = \beta\beta^{-1} \in U$. Luego para cualquier $t(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, $t(z) = 1.t(z) \in U$, por tanto $U = \mathbb{C}[[z]]$. ∎

En $\mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$ definimos el subconjunto $\mathbf{m}^{k+1}$

$$\mathbf{m}^{k+1} = \left\{ f \in \mathbb{C}[[z]]\,; f(z) = \sum_{|\alpha|\geq k+1} c_\alpha z^\alpha \right\}$$

es un ideal en $\mathbb{C}[[z_1, z_2, ..., z_n]]$.

Para algún finito $k \in \mathbb{N}$ el **k-orden jet** ser describe como el cociente.

$$J^k\mathbb{C}^n = \frac{\mathbf{C}[[z]]}{\mathbf{m}^{k+1}}$$

Donde $J^k\mathbb{C}^n$ es un anillo cociente. Como $\mathbb{C}[[z]]$ es conmutativo y tiene elemento de unidad $J^k\mathbb{C}^n$ también es conmutativo y tiene elemento unidad.

Definición 4.6 *La truncación de una serie formal de orden k-finito es la proyección canónica:*

$$j^k : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow J^k\mathbb{C}^n$$

$$f \longrightarrow f mod \boldsymbol{m}^{k+1}$$

Es decir sea : $f = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} c_\alpha z^\alpha$ tal que g=$f mod \mathbf{m}^{k+1}$

$$g = f + \mathbf{m}^{k+1}$$

$$g = \sum_{|\alpha| \geq 0}^{k} c_\alpha z^\alpha + \mathbf{m}^{k+1}.$$

El nombre natural proviene de la identificación de $J^k\mathbb{C}^n$ con un polinomio de grado $\leq k$ en variables $z_1, ..., z_n$.

Sea $g, h \in \mathbb{C}\left[[z]\right]$ y $a \in \mathbb{C}$ se cumple:

$$j^k (g+h) = j^k (g) + j^k (h)$$

$$j^k (ag) = a j^k (g)$$

Lema 4.5 *Sea* $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ *y el conjunto* $\boldsymbol{C} = \{F; j^m F_i = 0\}$ *entonces* $\boldsymbol{C}$ *es cerrado.*

Prueba.

$$j^k : \mathbb{C}\left[[z]\right] \longrightarrow J^k\mathbb{C}^n$$

$$f = \sum_{|\alpha| \geq 0}^{n} c_\alpha z^\alpha \longrightarrow j^k (f) = \left[\sum_{|\alpha| \geq 0}^{k} c_\alpha z^\alpha\right]$$

Entonces si $F^m = (F_1^m, F_2^m, ..., F_n^m)$ tal que $F^m \in \mathbf{C}$ es decir $j^k (F_i^m) = 0$ donde $j^k (lim F_i^m) = lim \left(j^k F_i^m\right) = 0$

Por lo tanto

$$lim (F^m) = (lim F_1^m, lim F_2^m, ..., lim F_n^m) \in \mathbf{C}$$

$\blacksquare$

4.2. Teoremas Principales Poincaré - Dulac en $\mathbf{C}^n$

Teorema 4.1 *(**Teorema de Linealización de Poincaré**) Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto;* $0 \in U$ *y* Z *un campo holomorfo en* U *tal que* 0 *es una singularidad aíslada de* Z*. Cuando la parte lineal de* Z *en 0 es no nula y sus autovalores* $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in D_P$ *determinan una n-upla no resonante. Entonces* Z *es localmente equivalente a su parte lineal.*

Prueba: Sea $Z(z) = A(z) + F(z)\,; \quad z \in U$. Donde $A(z) = (\lambda_1 z_1, ..., \lambda_n z_n)\,; \quad ord(F) \geq 2$ Sabemos que probar Z localmente equivalente a su parte lineal A es equivalente a probar que existe $H = I + h$ biholomorfismo tal que:

$$\frac{\partial H}{\partial z} A(z) = Z(H(z)) \tag{4.7}$$

$$\left(id + \frac{\partial h}{\partial z}\right) A(z) = Z(z + h(z))$$

$$A(z) + \frac{\partial h}{\partial z} A(z) = A(z + h(z)) + F(z + h(z))$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} Ah(z) - Ah(z) = F(z + h(z))$$

$$L_A h = S_F h$$

$$h = L_A^{-1} o S_F(h)\,. \tag{4.8}$$

Para que se cumple (4.8) será suficiente probar que $L_A^{-1} o S_F : \mathcal{B}_\rho \longrightarrow \mathcal{B}_\rho$ es una contracción fuerte.

Afirmación: $L_A^{-1} S_F : \mathcal{B}_\rho \longrightarrow \mathcal{B}_\rho$ es una contracción fuerte para un ρ suficientemente pequeño.

En efecto: Veamos primero que $L_A^{-1} o S_F$ esta bien definido

1. Por el Lema 4.4 S_F es una contracción fuerte para un $\rho < r$ y L_A^{-1} es un operador acotado cuya cota es independiente de ρ.

   Sea $h \in \mathcal{B}_\rho$

$$\left\| L_A^{-1} o S_F(h) \right\|_\rho \leq O(1) \left\| S_F(h) \right\|_\rho \leq O(1)\, O(\rho) \left\| h \right\|_\rho = O(\rho) \left\| h \right\|_\rho . \tag{4.9}$$

   Por otro lado como

$$\lim_{x \to 0} O(x) = 0 \quad para \quad \epsilon = c < 1, \exists \delta_0 > 0 \quad tal \quad que \quad x < \delta_0 \quad se \quad tiene \quad O(x) < c \tag{4.10}$$

   Por (4.9) y (4.10) sea $\rho < \{\delta_0, r\}$ se tiene

$$\left\| L_A^{-1} o S_F(h) \right\|_\rho \leq O(\rho) \left\| h \right\|_\rho < c \left\| h \right\|_\rho < \infty.$$

Entonces $L_A^{-1}oS_F$ esta bien definido sobre $\mathcal{B}_\rho$.

Veamos que $L_A^{-1}oS_F$ es lipschtiz, sean $h_1, h_2 \in \mathcal{B}_\rho$

$$\left\|L_A^{-1}oS_F\left(h_1\right)-L_A^{-1}oS_F\left(h_2\right)\right\|_\rho=\left\|L_A^{-1}oS_F\left(h_1-h_2\right)\right\|_\rho \leq O\left(1\right)\left\|S_F\left(h_1-h_2\right)\right\|_\rho$$

$$\leq O\left(1\right)O\left(\rho\right)\left\|h_1-h_2\right\|_\rho=O\left(\rho\right)\left\|h_1-h_2\right\|_\rho$$

Por lo tanto:

$$\left\|L_A^{-1}oS_F\left(h_1\right)-L_A^{-1}oS_F\left(h_2\right)\right\|_\rho \leq O\left(\rho\right)\left\|h_1-h_2\right\|_\rho . \tag{4.11}$$

Como L_A^{-1} preserva el orden

$$\left\|L_A^{-1}oS_F\left(0\right)\right\|_\rho=O\left(\rho^2\right). \tag{4.12}$$

Para $\rho < \{\delta_0, r\}$ por (4.11) y (4.12) tenemos que $L_A^{-1}oS_F$ es una contracción fuerte.

Por el teorema del punto fijo existe un $h \in \mathcal{B}_\rho$ que verifica (4.8).

Por lo tanto existe $H = id + h$ holomorfa que conjuga el campo Z y su parte lineal, además como $\frac{\partial H}{\partial z}(0) \neq 0 \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ por el Teorema de la función inversa H en una vecindad cercana al origen es un biholomorfismo.

Entonces H es una conjugación análitica por lo tanto Z y su parte lineal son localmente equivalentes. ∎

En el caso resonante consideremos el campo $Z\left(z\right)=A\left(z\right)+F\left(z\right)$; $ord(F) \geq 2$ con A que tiene autovalores en el dominio de Poincaré

Sin perdida de generalidad si es necesario podemos tomar el campo cZ $(c \neq 0)$ tal que los autovalores de A satisfacen a condición :

$$1 < Re\lambda_j < r; \quad \forall j = 1, 2.., n \tag{4.13}$$

para algun $r \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2 ***(Dulac)*** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto; $0 \in U$ y Z un campo holomorfo en U tal que 0 es una singularidad aíslada de Z que cumple (4.13). Cuando la parte lineal de Z en 0 es no nula y sus autovalores $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in D_P$ determinan una n-upla resonante. Entonces Z es localmente equivalente a un campo polinomial m-jet; $m \geq r+1$.*

Prueba: Supongamos que los autovalores de A cumplen la condición (4.13).
$H = h + I$ es una conjugación analítica de Z y $Z + g$ si se cumple:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)(Z) = (Z + g) H \tag{4.14}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) A(z) - Ah = (F(id + h) - F) + g(id + h) - \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) F. \tag{4.15}$$

Consideremos ahora los tres operadores :

$$T_F : h \longrightarrow F(id + h) - F$$

$$S_g : h \longrightarrow g(id + h)$$

$$\psi : h \longrightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) F.$$

Entonces la ecuación diferencial (4.15) puede escribirse de la forma siguiente:

$$L_A h = T_F h + S_g h + \psi h$$

donde : $T_F = T, S_g = S$, tenemos

$$h = \left(L_A^{-1} T_F + L_A^{-1} S_g + L_A^{-1} \psi\right) h.$$

Estrategia: En este caso a diferencia del caso anterior L_A no es invertible, para eso haremos nuestros calculos en un subespacio de banach en el que L_A sea invertible y $\left(L_A^{-1} T_F + L_A^{-1} S_g + L_A^{-1} \psi\right)$ sea una contracción.
Sea **C** del Lema 4.5, consideremos el conjunto

$$\mathcal{B}_{m,\rho} = \mathbf{C} \cap \mathcal{B}_\rho = \{F = (F_1, F_2, ..., F_n) / j^m F_i = 0\} \cap \mathcal{B}_\rho$$

Observemos que es un subespacio en el espacio de Banach $\mathcal{B}_\rho$ con la norma mayorante $||.||_\rho$. Como **C** es cerrado por el Lema 4.5, $\mathcal{B}_{m,\rho}$ es de Banach.
Afirmación: Si g es un campo holomorfo cerca al origen cuyo $ord(g) \geq m + 1$ entonces

$$\begin{array}{rccc} S : & \mathcal{B}_{m,\rho} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{m,\rho} \\ & h & \longrightarrow & g(id + h) \end{array}$$

es una contracción fuerte para un ρ suficientemente pequeño.
En efecto : Veamos primero que S esta bien definido

1. g es un campo holomorfo existe un $r>0$ talque $g(z)=(\sum\limits_{|\alpha|\geq m+1} a_{\alpha}^{1}z^{\alpha},...,\sum\limits_{|\alpha|\geq m+1} a_{\alpha}^{n}z^{\alpha})$ es absolutamente convergente en $B_r\left(0\right)=\{w;|w|<r\}$ entonces

$$\|g\|_s<\infty \quad para \quad s<\frac{r}{2} \tag{4.16}$$

Sea $h\left(z\right)=(\sum\limits_{|\alpha|\geq m+1} b_{\alpha}^{1}z^{\alpha},...,\sum\limits_{|\alpha|\geq m+1} b_{\alpha}^{n}z^{\alpha})$

$$z+h\left(z\right)=(\sum_{|\alpha|\geq m+1} z_1+b_{\alpha}^{1}z^{\alpha},...,z_n+\sum_{|\alpha|\geq m+1} b_{\alpha}^{n}z^{\alpha})$$

$$T\left(x\right)=\|z+h\left(z\right)\|_x=x+\sum_{|\alpha|\geq m+1}\left|b_{\alpha}^{1}\right|x^{|\alpha|}+...+x+\sum_{|\alpha|\geq m+1}\left|b_{\alpha}^{n}\right|x^{|\alpha|}$$

$$\lim_{x\to 0^+}T\left(x\right)=0 \;\; para \;\; \epsilon=\frac{r}{4},\exists\delta_0 \;\; tal \;\; que \;\; x<\delta_0 \;\; se \;\; tiene \;\; T\left(x\right)<\epsilon=\frac{r}{4}. \tag{4.17}$$

Tomemos $\rho<menor\left\{\frac{r}{2},\frac{r}{4},\delta_0\right\}$

$$\|S\left(h\right)\|_{\rho}=\|g\left(id+h\right)\|_{\rho}=\|g\|_{\sigma} \quad donde \quad \sigma=\|z+h\left(z\right)\|_{\rho}.$$

Como $\rho<\delta_0$ por (4.16) y (4.17) $\sigma=T\left(\rho\right)=\|z+h\left(z\right)\|_{\rho}<\epsilon=\frac{r}{4}$ y $\|g\left(id+h\right)\|_{\rho}=\|g\|_{\sigma}<\infty$.

2. Sea $h\in\mathcal{B}_{m,\rho}$ entonces $ord\left(S\left(h\right)\right)=ord\left(g\left(id+h\right)\right)\geq m+1$.

Por (1) y (2) $S=S_g$ esta bien definido. Por otro lado por el Lema 4.4 S es una contracción fuerte.

Afirmación:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{B}_{m,\rho} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{m,\rho} \\ & h & \longrightarrow & F(id+h)-F \end{array}$$

es una contracción fuerte para un ρ suficientemente pequeño.

En efecto :Veamos primero que T esta bien definido

1. F es un campo holomorfo existe un $r_1 > 0$ talque $F(z) = (\sum_{|\alpha|\geq 2} a_\alpha^1 z^\alpha, ..., \sum_{|\alpha|\geq 2} a_\alpha^n z^\alpha)$ es absolutamente convergente en $B_{r_1}(0)$ entonces

$$\|F\|_s < \infty \quad para \quad s < \frac{r_1}{2} \tag{4.18}$$

Sea $h(z) = (\sum_{|\alpha|\geq m+1} b_\alpha^1 z^\alpha, ..., \sum_{|\alpha|\geq m+1} b_\alpha^n z^\alpha)$

$$z + h(z) = (\sum_{|\alpha|\geq m+1} z_1 + b_\alpha^1 z^\alpha, ..., z_n + \sum_{|\alpha|\geq m+1} b_\alpha^n z^\alpha)$$

$$T(x) = \|z + h(z)\|_x = x + \sum_{|\alpha|\geq m+1} \left|b_\alpha^1\right| x^{|\alpha|} + ... + x + \sum_{|\alpha|\geq m+1} \left|b_\alpha^n\right| x^{|\alpha|}$$

$$\lim_{x\to 0^+} T(x) = 0 \;\; para \;\; \epsilon = \frac{r_1}{4}, \exists \delta_0 \;\; tal \;\; que \;\; x < \delta_0 \;\; se \;\; tiene \;\; T(x) < \epsilon = \frac{r_1}{4} \tag{4.19}$$

Tomemos $\rho < menor\left\{\frac{r_1}{2}, \frac{r_1}{4}, \delta_0\right\}$

$$\|T(h)\|_\rho = \|F(id + h) - F\|_\rho = \|F\|_\sigma + \|F\|_\rho \quad donde \quad \sigma = \|z + h(z)\|_\rho .$$

Como $\rho < \delta_0$ por (4.18) y (4.19) $\sigma = \|z + h(z)\|_\rho < \epsilon = \frac{r_1}{4}$, $\|F\|_\sigma < \infty$ y $\|F\|_\rho < \infty$ entonces

$$\|F(id + h) - F\|_\rho < \infty$$

2. Sea $h \in \mathcal{B}_{m,\rho}$ entonces $ord(T(h)) = ord(F(id + h) - F) \geq m + 1$

Por (1) y (2) $T = T_F$ esta bien definido.

Por otro lado sea $h_1, h_2 \in \mathcal{B}_{m,\rho}$

$$\|T(h_1) - T(h_2)\|_\rho = \|S(h_1) - S(h_2)\|_\rho \tag{4.20}$$

Por (4.20) y el Lema 4.4 T es una contracción fuerte.

Afirmación: El operador L_A^{-1} preserva el orden de los monomios, y sobre el espacio $\mathcal{B}_{m,\rho}$, es invertible para un m suficiente grande.

En efecto :

$$L_A^{-1}(\mathcal{B}_m, \rho) : \sum_{|\alpha|\geq m+1,k} c_{k\alpha} z^\alpha e_k \longrightarrow \sum_{|\alpha|\geq m+1,k} \frac{c_{k\alpha}}{< \alpha, \lambda > -\lambda_j} z^\alpha e_k \tag{4.21}$$

preserva el orden. Sea $|\alpha| > r+1$, donde r es fijo y por (4.13):

$$1 < Re\lambda_j$$

$$\alpha_j < Re\,(\alpha_j\lambda_j)$$

$$|\alpha| < Re\,(<\alpha,\lambda>)$$

$$Re\lambda_j < r < r+1 < |\alpha| < Re\,(\alpha\lambda)$$

$$0 < Re\,(<\alpha,\lambda> -\lambda_j)\,.$$

Por tanto $<\alpha,\lambda> -\lambda_j \neq 0$. Entonces L_A^{-1} es invertible y es acotado sobre $\mathcal{B}_{m,\rho}$ siguiendo el mismo procedimiento del Lema 4.3.

Tambien

$$Re\lambda_j < m < |\alpha| < Re\,(<\alpha,\lambda>)$$

$$|\alpha| - m < |Re\,(<\alpha,\lambda> -\lambda_j)\,| \leq |\alpha,\lambda> -\lambda_j| \tag{4.22}$$

Por la desigualdad del Lema 4.3 y (4.22) se tendrá:

$$\left\|L_A^{-1}h\right\|_\rho \leq O\left(\frac{1}{m}\right)\|h\|_\rho \tag{4.23}$$

para todo $h \in \mathcal{B}_{m,\rho}$ y $m \geq r+1$.

Afirmación:

$$L_A^{-1}oS : \mathcal{B}_{m,\rho} \longrightarrow \mathcal{B}_{m,\rho}$$

es una contracción fuerte para un $m \geq r+1$ y un ρ suficientemente pequeño.

En efecto :Veamos primero que $L_A^{-1}oS$ esta bien definido.

1. S es una contracción fuerte sobre $\mathcal{B}_{m,\rho}$ con cota $O\,(\rho)$ para un $\rho < r_2$ y L_A^{-1} es acotado por (4.18) por una cota independiente de ρ.

   Por otro lado

$$\lim_{x\to 0^+} O\,(x) = 0 \;\; para \;\; \epsilon = c_1 < \frac{1}{4}, \exists\delta_1 \;\; tal \;\; que \;\; x < \delta_1 \;\; se \;\; tiene \;\; O\,(x) < \epsilon = c_1. \tag{4.24}$$

Sea $h \in \mathcal{B}_{m,\rho}$

$$\left\| L_A^{-1} oS\left(h\right)\right\|_{\rho} \leq O\left(1\right) \left\|S\left(h\right)\right\|_{\rho} \leq O\left(1\right) O\left(\rho\right) \left\|h\right\|_{\rho} = O\left(\rho\right) \left\|h\right\|_{\rho}. \tag{4.25}$$

Por (4.24) y (4.25) para $\rho < menor \left\{r_2, \delta_1\right\}$ se tiene

$$\left\| L_A^{-1} oS\left(h\right)\right\|_{\rho} \leq O\left(\rho\right) \left\|h\right\|_{\rho} < c_1 \left\|h\right\|_{\rho} < \infty. \tag{4.26}$$

2. Sea $h \in \mathcal{B}_{m,\rho} \Longrightarrow S\left(h\right) \in \mathcal{B}_{m,\rho}$, como L_A^{-1} preserva el orden $ord(L_A^{-1} oS\left(h\right)) \geq m+1$

De (1) y (2) $L_A^{-1} oS_F$ esta bien definido sobre $\mathcal{B}_{m,\rho}$.
Sea $h_1, h_2 \in \mathcal{B}_{m,\rho}$ y por (4.26) tenemos

$$\left\| L_A^{-1} oS\left(h_1\right) - L_A^{-1} oS\left(h_2\right)\right\|_{\rho} \leq O\left(\rho\right) \left\|h_1 - h_2\right\|_{\rho} \leq c_1 \left\|h_1 - h_2\right\|. \tag{4.27}$$

Por otro lado,

$$\left\| L_A^{-1} oS\left(0\right)\right\|_{\rho} = O\left(\sigma^{m+1}\right) = O\left(\rho^2\right) \quad donde \;\; \sigma = O\left(\rho^2\right) \tag{4.28}$$

De (4.27) y (4.28) $L_A^{-1} oS$ es una contracción fuerte.
Afirmación:

$$L_A^{-1} oT : \mathcal{B}_{m,\rho} \longrightarrow \mathcal{B}_{m,\rho}$$

es una contracción fuerte para un $m \geq r+1$ y ρ suficientemente pequeño.
En efecto: Siguiendo el mismo procedimiento de la afirmación anterior, para $\rho < \left\{r_3, \delta_0, \right\}$ se tiene $L_A^{-1} oT$ es una contracción con cota $c_2 < \frac{1}{4}$.
Solo queda probar que

$$L_A^{-1} o\psi : \mathcal{B}_{m,\rho} \longrightarrow \mathcal{B}_{m,\rho}$$

es una contracción para un $m \geq r+1$. Consideremos los vectores normalizadores : $h_{k\beta} = \rho^{-|\beta|} z^{\beta} e_k \;\; \forall k = 1, 2, .., n \;\; ; \;\; \forall \left|\beta\right| \geq m$ y de ahi espanderemos en el espacio $\mathcal{B}_{m,\rho}$.
Afirmación:

$$\left\| L_A^{-1} \psi h_{k\beta}\right\|_{\rho} \leq O\left(\rho\right) \left\|h_{k\beta}\right\|_{\rho} \tag{4.29}$$

para $|\beta| \geq m$ y todo k donde $\|h_{k\beta}\|_\rho = 1$.

En efecto:

$$\psi h_{k\beta} = \left(\frac{\partial h_{k\beta}}{\partial z}\right) F = \rho^{-|\beta|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\beta_1}{z_1} z^\beta & \frac{\beta_2}{z_2} z^\beta & \cdots & \frac{\beta_n}{z_n} z^\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \rho^{-|\beta|} \frac{\beta_i}{\partial z_i} z^\beta F_i e_k$$

donde $\|F_i\|_\rho = O\left(\rho^2\right)$ sustituyendo en la definición de la norma mayorante tenemos:

$$\|\psi h_{k\beta}\|_\rho \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i \rho^{-1} O\left(\rho^2\right) \|h_{k\beta}\| = \beta O\left(\rho\right) \|h_{k\beta}\|$$

Desde que el operador $\frac{z^\beta}{z_i} F_i$ de orden no menor a $|\beta| + 1$ por (4.23) se tiene:

$$\left\|L_A^{-1} \psi h_{k\beta}\right\|_\rho \leq \frac{\beta}{|\beta|} O\left(\rho\right) \|h_{k\beta}\| = O\left(\rho\right) \|h_{k\beta}\|$$

uniformemente para todo β con $|\beta| \geq m \geq r+1$. Por lo tanto queda probado (4.29).

Afirmación: ψ y L_A^{-1} es lineal.

En Efecto:

- $\psi\left(h+g\right) = \left(\frac{\partial(h+g)}{\partial z}\right) F = \frac{\partial h}{\partial z} F + \frac{\partial g}{\partial z} F = \psi\left(h\right) + \psi\left(g\right)$
- $\psi\left(ch\right) = \left(\frac{\partial(ch)}{\partial z}\right) F = c \frac{\partial h}{\partial z} F = c\psi\left(h\right)$
- $L_A^{-1}\left(ah+bg\right) = L_A^{-1}\left(a \sum_{|\alpha| \geq m} c_{k\alpha} z^\alpha e^s + b \sum_{|\alpha| \geq m} d_{k\alpha} z^\alpha e^s\right) = \sum_{|\alpha| \geq m} \frac{ac_{k\alpha} + bd_{k\alpha}}{< \alpha, \lambda > -\lambda_j} z^\alpha e^s =$
  $a \sum_{|\alpha| \geq m} \frac{c_{k\alpha}}{< \alpha, \lambda > -\lambda_j} z^\alpha e^s + b \sum_{|\alpha| \geq m} \frac{d_{k\alpha}}{< \alpha, \lambda > -\lambda_j} z^\alpha e^s = aL_A^{-1}\left(h\right) + bL_A^{-1}\left(g\right)$

Así tenemos que ψ y L_A^{-1} es lineal por lo tanto se tiene $L_A^{-1}\psi$ es lineal.

Afirmación:

$$L_A^{-1} o\psi : \mathcal{B}_{m,\rho} \longrightarrow \mathcal{B}_{m,\rho}$$

para un ρ suficientemente pequeño $L_A^{-1} o\psi$ esta bien definido.

En Efecto: Veamos primero que $L_A^{-1} o\psi$ esta bien definido

1. $$h=\sum_{s,|\alpha|\geq m+1} c_{k\alpha}z^{\alpha}e_k=\sum_{k,|\beta|\geq m+1} d_{k\beta}h_{k\beta}$$

$$\|h\|_{\rho}=\sum_{k,|\beta|\geq m+1}|d_{k\beta}|\|h_{k\beta}\|_{\rho}$$

$$\|L_A^{-1}\psi\left(h\right)\|_{\rho}=\|L_A^{-1}\psi\left(\sum_{k,|\alpha|\geq m} c_{k\alpha}z^{\alpha}e_k\right)\|_{\rho}=\|L_A^{-1}\psi\left(\sum_{k,|\beta|\geq m} d_{k\beta}h_{k\beta}\right)\|_{\rho}$$

$$=\|\sum_{k,|\beta|\geq m} d_{k\beta}L_A^{-1}\psi\left(h_{k\beta}\right)\|_{\rho}\leq\sum_{k,|\beta|\geq m}|d_{k\beta}|\|L_A^{-1}\psi\left(h_{k\beta}\right)\|_{\rho}$$
$$\leq\sum_{k,|\beta|\geq m}|d_{k\beta}|O(\rho)\|h_{k\beta}\|_{\rho}=O(\rho)\|h\|_{\rho}.$$

   Como $\|h\|_{\rho}<\infty$ para un $\rho<\{\delta_1\}$ existe un $c_3<\frac{1}{4}$.

$$\|L_A^{-1}\psi\left(h\right)\|_{\rho}<c_3\|h\|_{\rho}.$$

2. Sea $h\in\mathcal{B}_{m,\rho}$ como $ord(h)\geq m+1$ se tiene $ord\psi(h)=ord\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)F\geq m+2$ por lo tanto como L_A^{-1} preserva el orden

$$ord(L_A^{-1}\psi h)\geq m+1.$$

De (1) y (2) $L_A^{-1}o\psi$ esta bien definido. Por otro lado $L_A^{-1}\psi$ es lineal lo que implica que $L_A^{-1}o\psi$ es una contracción.

Por las afirmaciones anteriores para $\rho<\left\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\frac{1}{2}\right\}$ se tiene:

$L_A^{-1}oS:\mathcal{B}_{m,\rho}\longrightarrow\mathcal{B}_{m,\rho}$ es una contracción con cota c_1

$L_A^{-1}oT:\mathcal{B}_{m,\rho}\longrightarrow\mathcal{B}_{m,\rho}$ es una contracción con cota c_2

$L_A^{-1}o\psi:\mathcal{B}_{m,\rho}\longrightarrow\mathcal{B}_{m,\rho}$ es una contracción con cota c_3

Entonces $L_A^{-1}o\left(T+S+\psi\right):\mathcal{B}_{m,\rho}\longrightarrow\mathcal{B}_{m,\rho}$ es una contracción.

Por el Teorema del punto fijo para contracciones entonces existe un único $h\in\mathcal{B}_{m,\rho}$ tal que verifica:

$$h=L_A^{-1}o\left(T+S+\psi\right)h.$$

Por lo tanto existe $H = id + h$ holomorfa que conjuga el campo Z y $Z + g$, además como $\frac{\partial H}{\partial z}(0) \neq 0 \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ por el teorema de la función inversa H en una vecindad cercana al origen es un biholomorfismo.

Donde :

$$Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_{r-1} + Z_r + ... + Z_{m-1} + Z_m + Z_{m+1} + Z_{m+2} + ...$$

$$g = \qquad -Z_{m+1} - Z_{m+2} - ...$$

$$Z + g = Z_1 + Z_2 + ... + Z_{r-1} + Z_r + ... + Z_{m-1} + Z_m.$$

Entonces H es una conjugación análitica por lo tanto el campo Z y el campo polinomial $Z + g$, son localmente equivalentes cerca al origen. ■

Conclusiones

Como conclusiones de este trabajo de tesis podemos decir lo siguiente:
Para la prueba de el teorema de linealización de Poincaré y el teorema de Dulac se uso formas normales y resultados de Análisis Funcional como Espacios de Banach, obeservar que existen otras técnicas de probar estos teoremas.

La importancia de estos teoremas está que cuando uno estudia una EDO compleja si sus autovalores cumplen ciertas condiciones es equivalente a estudiar su parte lineal o un campo polinomial y así evitamos estudiar con la EDO original que podría tener infinitos términos.

Bibliografía

[1] ARNOLD, V., *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer, 1983.*

[2] BENAZIC, R., *Notas de clase, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,Perú 2009.*

[3] CARTAN, H., *Elementary theory of Analytic Functions of one or Several Complex Variables, Dover Publications, INC, New York, 1995.*

[4] CHURCHILL, R., *Variable compleja y Aplicaciones, Mc Grawhill, Espana, 1990.*

[5] GUNNING, R., *Introduction to holomorphic Functions of Several Variables,Vol.I,Function Theory,Wadsworth Brooks/Cole,California 1990.*

[6] GUNNING, R., *Introduction to holomorphic Functions of Several Variables,Vol.II,Local Theory,Wadsworth Brooks/ Cole,California 1990.*

[7] GUNNING, R.,ROSSI, H., *Analytic Functions of Several Complex Variables,Prentice Hall,New York ,1965.*

[8] KOLMOROV, A.,ROSSI, H., *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional .*

[9] LIMA, E., *Algebra Lineal,Textos del IMCA,PERÚ,1999.*

[10] LIMA, E., *Curso de Analisé,Vol.2,Projeto Euclides ,IMPA,Rio de Janeiro, 1981.*

[11] LINS NETO, A., *Funcões de uma Variavél Complexa ,Projeto Euclides,IMPA,Rio de Janeiro,1993.*

[12] Benazic, R.,Espinoza, C., Jurado, L., *Revista de Investigación de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM,PESQUIMAT VOL.XII-2009.*

[13] Sotomayor, J., *Licões de Equacões Diferenciais Ordinárias, 22 Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1999.*

[14] Yakovenko, S., Ilyashenko, Y., *Lectures on Analytic Differential Equations,Graduate Studies in Mathematics,Vol 86,American Mathematical Society.*