UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P DE MATEMÁTICA

“ALGEBRAS DE OPERADORES TOEPLITZ”

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Bartleby Ordoñez Delgado

ASESOR

José del Carmen Pérez Arteaga

Lima – Perú

2015

Algebras de Operadores Toeplitz

Bartleby Ordoñez Delgado

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Univiversidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña

Presidente de jurado

Dr. Ricardo Fuentes Apolaya

Miembro de jurado

Mg. José del Carmen Pérez Arteaga

Miembro Asesor

Ficha Catalográfica

ORDOÑEZ DELGADO, Bartleby. Algebras de Operadores Toeplitz. Tesis para el título profesional de Licenciado en Matemática, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Peru, 2015, 60pp.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a los profesores Peter Haskell (asesor en Virginia Tech) y José Pérez Arteaga (asesor en UNMSM) por orientarme en este trabajo de tesis. He aprendido mucho del profesor José Pérez no solo de los cursos que me enseñó en pre-grado sino también de las conversaciones informales sobre matemáticas y sus consejos en como seguir mi carrera en el extranjero. También quisiera agradecer a los miembros del jurado de tesis: Dr. Moisés Izaguirre Maguiña y Dr. Ricardo Fuentes Apolaya, por tomarse el tiempo de leer este trabajo y sugerir correcciones.

Dedicación

Dedicado a mis padres: Raúl y Susana, y a mis hermanos: Salim, Zenem, Mijail y Zubin. También dedico este trabajo a mi gran amigo y colega Dr. Edgar Saenz Maldonado.

Algebras de Operadores Toeplitz

Bartleby Ordoñez Delgado

RESUMEN

En este trabajo examinamos los C^*-algebras de operadores Toeplitz sobre la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$ y en el polidisco unitario en $\mathbb{C}^2$. Los operadores Toeplitz son ejemplos interesantes de operadores que no son operadores normales y que generan C^*-algebras no conmutativas. Además, en los mejores casos de algebras de operadores Toeplitz (dependiendo de la geometría del dominio) podemos recuperar algunos resultados análogos al teorema espectral módulo operadores compactos. En este contexto, podemos capturar el índice de un operador Fredholm que es un invariante numérico fundamental en Teoría de Operadores.

Palabras Claves: Operador Fredholm, Operador Toeplitz, C^*-algebras.

Algebras of Toeplitz Operators

Bartleby Ordonez-Delgado

ABSTRACT

In this work we examine C^*-algebras of Toeplitz operators over the unit ball in $\mathbb{C}^n$ and the unit polydisc in $\mathbb{C}^2$. Toeplitz operators are interesting examples of non-normal operators that generate non-commutative C^*-algebras. Moreover, in the nice cases (depending on the geometry of the domain) of algebras of Toeplitz operators we can recover some analogues of the spectral theorem up to compact operators. In this setting, we can capture the index of a Fredholm operator which is a fundamental numerical invariant in Operator Theory.

Keywords: Fredholm Operators, Toeplitz Operators, C^*-algebras.

Índice general

1. Preliminares **1**

1.1. Introducción 1

1.2. Operadores Fredholm 4

1.3. C^*-algebras 5

2. Operadores Bergman-Toeplitz sobre el Disco Unitario $\mathbb{D}$ **7**

2.1. El Espacio de Bergman $H^2(\mathbb{D})$ 7

2.2. Operadores Toeplitz en $H^2(\mathbb{D})$ 13

2.3. Caracterización del Algebra de Toeplitz $\mathcal{T}(\mathbb{D})$ 16

3. Operadores Hardy-Toeplitz sobre el Disco Unitario $\mathbb{D}$ **25**

3.1. El Espacio de Hardy $H^2(S^1)$ 25

3.2. Operadores Toeplitz en $H^2(S^1)$ 29

3.3. Caracterización del Algebra de Toeplitz $\mathcal{T}(S^1)$ 31

4. Operadores Bergman-Toeplitz sobre la Bola Unitaria B_n **35**

4.1. El Espacio de Bergman $H^2(B_n)$ 36

4.2. Operadores Toeplitz en $H^2(B_n)$ 38

4.3. Caracterización del Algebra de Toeplitz $\mathcal{T}(B_n)$ 39

5. Operadores Hardy-Toeplitz sobre la Bola Unitaria $\mathbf{B_n}$ **46**

5.1. El Espacio de Hardy $H^2(\partial B_n)$ 46

5.2. Operadores Toeplitz en $H^2(\partial B_n)$ 47

5.3. Caracterización del Algebra de Toeplitz $\mathcal{T}(\mathbb{D})$ 49

6. Aplicación: Un Teorema de Índices para Operadores Toeplitz **53**

7. Apéndice **57**

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

El teorema espectral juega un rol fundamental en el estudio de operadores normales, especialmente autoadjuntos. De hecho, el teorema espectral puede ser aplicado (usando diagonalizaciones simultaneas) a C^*-algebras conmutativas. El espectro es una fuente rica de invariantes numéricos, tales como el índice y la traza, cuando estos están definidos. La versión del teorema espectral que muestra que un operador es unitáriamente equivalente a un operador multiplicación, es el fundamento del análisis funcional.

Algunas preguntas surgen luego de esta discusión. ¿Hay ejemplos "naturales" de operadores no normales? ¿Qué tipo de algebras generan este tipo de operadores? Claramente un operador no normal genera un C^*-algebra no conmutativo. Esto nos lleva a buscar familias de operadores que generan C^*-algebras no conmutativas. En teoría de funciones tenemos ejemplos bien naturales - operadores Toeplitz.

En el contexto de algebras de operadores Toeplitz, podemos preguntar bajo que condiciones o sobre que dominios podemos recuperar algunos análogos o consecuencias del teorema espectral. Resulta que para algunos "buenos" casos (algebra de operadores Toeplitz sobre dominios estrictamente pseudoconvexos) el ideal conmutador coincide con el espacio de operadores compactos; entonces, obtenemos una especie de "teorema espectral módulo operadores compactos". Esta similitud es suficiente para recuperar algunos resultados del teorema espectral módulo operadores compactos, por ejemplo el índice de un operador Fredholm, el cual es una de las invariantes numéricas primarias en teoría de operadores.

El domino donde los operadores Toeplitz están definidos juega un rol importante en la caracterización de los algebras de operadores Toeplitz. Resulta que si el dominio no es lo suficientemente "bueno" (dominio no estrictamente pseudo-convexo), el ideal conmutador del algebra de operadores Toeplitz contiene mas que operadores compactos. En este caso, el algebra no es "conmutativa módulo operadores compactos" y nuestro análogo del teorema espectral no es una fuente simple de invariantes. La última parte del capítulo final contiene algunos comentarios que apuntan hacia un desarrollo en esa dirección.

Este trabajo es un estudio de la estructura teórica de los algebras de operadores Toeplitz asociados con funciones escalares continuas. El paper organiza resultados conocidos de manera que motiva investigación reciente y futura. La principal fuente de este trabajo es la colección de papers [Upm]. La mayoría de los resultados en el presente trabajo son casos particulares de resultados mas generales que pueden ser encontrados en [Upm]. Sin embargo, varias de las pruebas han sido trabajadas de manera independiente usando técnicas accesibles y distintas a las encontradas en [Upm].

El primer dominio que consideramos es el disco unitario porque el disco es el dominio mas simple con frontera suave. Luego, consideramos las generalizaciones naturales del disco unitario, la bola unitaria y el polidisco unitario. En el caso del polidisco, no tenemos una "buena" frontera por tal razón este caso sera nuestro ejemplo de contraste con los casos anteriores donde podíamos aplicar nuestro análogo del teorema espectral.

También consideramos los espacios de Hardy y de Bergman en L^2 porque son los espacios mas simples donde los operadores Toeplitz están definidos y tienen propiedades interesantes. A lo largo de este trabajo discutiremos las similitudes y diferencias entre los C^*-algebras generados por los operadores Hardy-Toeplitz y Bergman-Toeplitz. Eventualmente probaremos que la única diferencia entre ellos es el ideal conmutador.

En el segundo capítulo estudiaremos el espacio de Bergman sobre el disco unitario. El espacio de Bergman esta definido como el espacio de Hilbert de funciones holomorfas que son cuadrado-integrables. En este contexto, mostraremos una base explícita para el espacio de Bergman. Esta base será muy útil para caracterizar la proyección ortogonal del espacio $L^2(\mathbb{D})$ sobre el espacio de Bergman, para encontrar el Bergman Kernel (kernel reproductor), y para encontrar una representación integral de las funciones en el espacio de Bergman. Además, haremos un análisis de los operadores Bergman-Toeplitz sobre el disco unitario, los cuales están definidos como las compresiones al espacio de Bergman de los operadores multiplicación con símbolos continuos. Nuestro resultado principal en este capítulo es la caracterización del C^*-algebra generado por los operadores Toeplitz. Resulta que el algebra de operadores compactos sobre el espacio de Bergman esta contenido en el C^*-algebra generado por los operadores Toeplitz y coincide con el ideal conmutador. Además, el C^*-algebra cociente (subalgebra del algebra de Calkin) que resulta en dividir el C^*-algebra de operadores Toeplitz por el algebra de operadores compactos es C^*-isomorfo a el algebra de funciones continuas sobre el circulo unitario. Concluimos este capítulo mostrando una bonita caracterización de los operadores Fredholm-Toeplitz.

En el capítulo tres estudiaremos el espacio de Hardy sobre el disco unitario. El espacio de Hardy esta definido como el subespacio cerrado de $L^2(S^1)$ generado por las funciones z^n donde n es un entero no negativo. Usando el kernel de Poisson podemos extender cada función en el espacio de Hardy a una función holomorfa sobre el disco unitario. Como en el capítulo dos, caracterizaremos el C^*-algebra de los operadores Hardy-Toeplitz sobre el disco unitario. Aquí la definición de operador Toeplitz es similar a la definición en el caso del espacio de Bergman. Obtendremos el mismo resultado que en el caso del espacio de Bergman, es decir, el algebra de operadores compactos en el espacio de Hardy es igual al ideal conmutador del C^*-algebra de operadores Hardy-Toeplitz y el C^*-algebra cociente (subalgebra del algebra de Calkin) que resulta en dividir resulting el C^*-algebra de operadores Toeplitz por el algebra de operadores compactos es otra vez C^*-isomorfo a el algebra de funciones continuas sobre el circulo unitario. En conclusión, el C^*-algebra de operadores Hardy-Toeplitz es isomorfo (modulo operadores compactos) a el C^*-algebra de operadores Bergman-Toeplitz.

En el capítulo cuatro comenzamos con las generalizaciones de los casos previos a dimensiones mas altas. Esta vez consideramos el espacio de Bergman sobre la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$, definido como en el caso uno-dimensional. En este caso, la buena geometría de la bola unitaria (dominio estrictamente pseudo-convexo) garantiza la existencia de funciones pico, los cuales juegan un rol importante en la caracterización de el C^*-algebra de operadores Toeplitz. En el final de este capítulo obtenemos el análogo a los casos previos de caracterización de C^*-algebra de operadores Toeplitz.

Para el espacio de Hardy sobre la bola unitaria, en el capítulo cinco, usamos mas herramientas de teoría de funciones de varias variables complejas e.g. la formula del kernel de Szego, el cual juega el mismo rol que la formula del kernel de Poisson en el caso uno-dimensional. A lo largo de este capítulo repetiremos varios argumentos usados en el caso del espacio de Bergman, y nuestra caracterización de C^*-algebra de operadores Toeplitz es similar en el casos del espacios de Bergman y Hardy.

El propósito del último capítulo es dar una aplicación de los resultados obtenidos en los capítulos previos. Resulta que en el caso de la bola unitaria los operadores Toeplitz que son Fredholm son aquellos en donde su símbolo nunca se anula en la frontera; entonces, el índice esta bien definido para estos operadores. Finalmente, probamos un teorema de índice para operadores Fredholm Toeplitz en el caso de la bola unitaria.

1.2. Operadores Fredholm

En esta sección mencionaremos algunas propiedades importantes de los operadores Fredholm que serán usadas a lo largo de este trabajo.

Notaciones: Sean X e Y espacios de Banach.

1. $B(X,Y)$ denota el espacio de operadores lineales acotados de X a Y. En el caso que $X=Y$, $B(X)=B(X,X)$.
2. $K(X,Y)$ denota el espacio de operadores compactos en $B(X,Y)$. En el caso que $X=Y$, $K(X)=K(X,X)$.
3. Recuerde que un operador $N \in B(X)$ es normal si $NN^* = N^*N$.

Definición 1.2.1. Sea $T \in B(X,Y)$. T es llamado un operador Fredholm si

1. $Ker(T)$ tiene dimensión finita.

2. $Ran(T)$ es cerrado en Y.

3. $Coker(T)$ tiene dimensión finita.

A continuación probaremos que la segunda condición de la definición de operador Fredholm es redundante pues es una consecuencia de la primera y tercera condición.

Lema 1.2.2. *Sea $T \in B(X,Y)$ y sea C un subespacio cerrado de Y tal que $Y = Ran(T) \oplus C$. Entonces $Ran(T)$ es cerrado en Y.*

Demostración. Por simplicidad, suponga que T es injectiva pues $Ker(T)$ es un subespacio cerrado y T puede ser reemplazado por el operador inducido sobre el cociente $X/Ker(T)$. Defina $U : X \oplus C \to Y$ como $U(x,c) = T(x)+c$. Note que U es un isomorfismo lineal acotado. Por el Teorema del Mapeo Abiero, U es un homeomorfismo. Por lo tanto $Ran(T) = U(X \oplus \{0\})$ es cerrado. □

El siguiente teorema nos da una caracterización de los operadores Fredholm.

Teorema 1.2.3. *$A \in B(X,Y)$ es Fredholm si y sólo si A es invertible modulo operadores compactos.*

Nota 1.2.1. El espacio de operadores Fredholm acotados, denotado por $\Phi(X)$, es el conjunto de elementos invertibles del algebra de Calkin $B(X)/K(X)$.

Definición 1.2.4. Sea T un operador Fredholm. El número $Ind(T) = Ker(T) - Coker(T)$ es llamado índice de T.

Ejemplo: Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert H. Considere el operador traslación a la derecha $S : H \to H$, $S(e_n) = e_{n+1}$, $n \geq 1$. Note que $dimKer(S) = 0$ y $dimCoKer(S) = 1$. Entonces, S es un operador Fredholm con $Ind(S) = -1$.

1.3. C^*-algebras

En esta sección repasaremos algunas propiedades sobre C^*-algebras que serán usadas en este trabajo.

Definición 1.3.1. Un C^*-algebra A es un algebra sobre $\mathbb{C}$ con una norma $a \mapsto \|a\|$ y una involución $a \mapsto a^*$, $a \in A$, tal que A es completa con respecto a la norma, y tal que $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|\|$ y $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a, b \in A$.

Ejemplos

1. $\mathbb{C}^n$ es un C^*-algebra con la norma euclidiana.

2. Sea H un espacio de Hilbert. $B(H)$ y $K(H)$ son C^*-algebras con la norma de operadores.

3. Sea N un operador normal en $B(H)$. El C^*-algebra generado por N, denotado por $C^*\langle N\rangle$ es conmutativo.

4. Sea $K \subseteq \mathbb{C}^n$ un conjunto compacto. El espacio de funciones continuas con valores complejos $C(K)$ es un C^*-algebra.

Nota 1.3.1. Sea $C^*(T)$ el C^*-algebra generado por el operador acotado T. Si T es un operador normal, el C^*-algebra $C^*(T)$ es conmutativo. Si T no es un operador normal, el C^*-algebra $C^*(T)$ no es conmutativo. En la próxima seccción, veremos que las C^*-algebras de operadores Toeplitz son ejemplos interesantes de C^*-algebras no conmutativas.

Capítulo 2

Operadores Bergman-Toeplitz sobre el Disco Unitario $\mathbb{D}$

El punto de vista en este capítulo ha sido influenciado por [Upm] y [Zhu]. Algunas de las aserciones en este capítulo son casos particulares de resultados mas fuertes que pueden ser encontrados en la colección de papers [Upm]. En este capítulo mostraremos que los operadores Toeplitz con símbolos polinomiales no constantes son ejemplos naturales de operadores no normales que surgen en teoría de operadores y verifican que el algebra generada por estos operadores Toeplitz es conmutativa módulo operadores compactos. Desde esta caracterización podemos identificar que operadores son Fredholm (invertible módulo operadores compactos) y capturar la invariante numérica primaria en teoría de operadores, el índice de un operador Fredholm. (Vea el capítulo 6 para una discusión detallada del índice de operadores Fredholm-Toeplitz).

2.1. El Espacio de Bergman $H^2(\mathbb{D})$

Considere $L^2(\mathbb{D})$ el espacio de Lebesgue de funciones cuadrado-integrables sobre $\mathbb{D}$ con medida de Lebesgue $dA(z) = dxdy = rdrd\theta$, y producto interno,

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} \overline{f(z)} g(z) dA(z)$$

Convención: Productos internos serán considerados conjugados-lineáles en la primera variable.

Las siguientes dos proposiciones dan la base para probar que el espacio de Bergman es un espacio de Hilbert de funciones holomorfas y para mostrar la existencia de su kernel reproductor llamado Bergman Kernel. También, se puede probar que estas dos proposiciones son todavía ciertas si reemplazamos el disco unitario por la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$.

Proposición 2.1.1. *Sea $K \subset \mathbb{D}$ un conjunto compacto, entonces el mapeo restricción,*

$$R : L^2(\mathbb{D}) \cap O(\mathbb{D}) \to C(K),\ \ R(f) = f|_K$$

es continuo donde la métrica de $C(K)$ es la métrica inducida por la norma del infinito.

Demostración. Sea $a \in K$ y $2d = dist(K, \partial\mathbb{D}) > 0$, entonces tenemos

$$\bar{B}(a,d) \subset \mathbb{D}$$

Tome cualquier $f \in L^2(\mathbb{D}) \cap O(\mathbb{D})$. Como f es holomorfa, tenemos

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} c_j(z-a)^j \text{ convergiendo uniformemente sobre } \bar{B}(a,d)$$

Como para $j \neq k$

$$\int_{B(a,d)} \overline{(z-a)}^j (z-a)^k dA(z) = 0$$

entonces obtenemos

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) \geq \int_{B(a,d)} |f(z)|^2 dA(z) \geq \sum_{j\geq 0} \int_{B(a,d)} |c_j(z-a)^j|^2 dA(z)$$

$$\geq |f(a)|^2 Area(B(a,d))$$

Como $Area(B(a,d))$ es constante para todo a in K, entonces tenemos

$$\|f\|_2 \geq \|f|_K\|_\infty \sqrt{Area(B(a,d))}$$

Esto prueba la continuidad de R.

$\square$

Proposición 2.1.2. $L^2(\mathbb{D}) \cap O(\mathbb{D})$ *es un subespacio cerrado de* $L^2(\mathbb{D})$

Demostración. Tomemos (f_n) una sucesión L^2 de Cauchy en $L^2(\mathbb{D}) \cap O(\mathbb{D})$. Por la Proposición 2.1.1, (f_n) es una sucesión de Cauchy en $C(K)$ para todo subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces, existe $f \in O(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$ normalmente sobre $\mathbb{D}$ (i.e. converge sobre subconjuntos compactos).
Por otro lado, nosotros tenemos $\|f_n - h\|_2 \to 0$ para algún $h \in L^2(\mathbb{D})$ porque $L^2(\mathbb{D})$ es completo. Esto implica que (f_n) converge en medida a h; entonces, existe una subsucesión de (f_n) que converge c.s. (casi siempre) a h. Por lo tanto, $f = h$ c.s.; entonces, $f \in L^2(\mathbb{D}) \cap O(\mathbb{D})$. Esto prueba que $L^2(\mathbb{D}) \cap O(\mathbb{D})$ es completo; en consecuencia, un espacio de Hilbert. Por lo tanto $L^2(\mathbb{D}) \cap O(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$.

$\square$

Definición 2.1.3. $H^2(\mathbb{D}) := \overline{\{f \in C(\bar{\mathbb{D}}) : f \in O(\mathbb{D})\}}^{L^2}$ es llamado espacio de Bergman sobre el disco unitario.

Note que $H^2(\mathbb{D}) \subset L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert de funciones holomorfas.

La proyección ortogonal $P : L^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ es llamada la proyección de Bergman. Para cualquier $z \in \mathbb{D}$ fijo; por la Proposición 2.1.1, el map evaluación

$$eval : H^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$$

$$eval(f) = f(z)$$

es continuo. Luego, por el teorema de Riesz-Frechet, existe $K_z \in H^2(\mathbb{D})$ tal que

$$f(z) = \langle K_z, f\rangle = \int_{\mathbb{D}} \overline{K_z(w)} f(w) dA(w) \ \forall f \in H^2(\mathbb{D})$$

$K(z, w) := \overline{K_z(w)}$ llamado la función Bergman Kernel.

Notación: Para $0 < r < 1$ denotamos $\bar{D}_r = \{z \in D : |z| \leq r\}$. Ahora, para cualquier $f \in L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$ con $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j$ convergiendo normalmente sobre $\mathbb{D}$, definamos

$$f_r(z) := f(z)\chi_{\bar{\mathbb{D}}_r}$$

Luego, $f_r(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j$ converge uniformemente sobre $\bar{\mathbb{D}}_r$. Es claro que $f_r \in L^2(\mathbb{D})$

Las funciones "restricción" f_r son bien útilies para obtener información y aproximar $f \in H^2(\mathbb{D})$.
La prueba del siguiente lema solo requiere cálculos directos; por esta razón la omitiremos.

Lema 2.1.4.

$$\int_{\bar{\mathbb{D}}_r} |z|^{2n} dA(z) = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \ , \ \int_{\bar{\mathbb{D}}_r} z^n \bar{z}^m dA(z) = 0 \ \forall n \neq m$$

Lema 2.1.5. *$f_r \to f$ en norma $L^2(\mathbb{D})$ para cualquier $f \in L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$*

Demostración. Claramente $|f_r(z) - f(z)| \leq 2|f(z)|$, entonces $|f_r(z) - f(z)|^2 \leq 4|f(z)|^2$. Como $f_r \to f$ puntualmente y $4|f(z)|^2$ es integrable, por el Teorema de Convergencia de Lebesgue obtenemmos $f_r \to f$ en norma $L^2(\mathbb{D})$.

□

Lema 2.1.6. *Para cualquier $f \in L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$ con $f(z) = \sum_{j=o}^{\infty} d_j z^j$ convergiendo normalmente sobre $\mathbb{D}$*

$$\langle z^n, f_r \rangle = \frac{\pi}{n+1} d_n r^{2n+2}$$

Demostración.

$$\langle z^n, f_r \rangle = \int_{\mathbb{D}} f_r(z) \bar{z}^n dA(z) = \int_{\bar{\mathbb{D}}_r} \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j \bar{z}^n dA(z)$$

Por la convergencia uniforme,

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\bar{\mathbb{D}}_r} d_j z^j \bar{z}^n dA(z) = d_n \int_{\bar{\mathbb{D}}_r} z^n \bar{z}^m dA(z) = \frac{\pi}{n+1} d_n r^{2n+2}$$

□

Lema 2.1.7. *Sea $g \in L^2(\mathbb{D})$ y $f \in L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$, entonces*

$$\langle g, f_r \rangle \to \langle g, f \rangle$$

En particular

$$\langle z^n, f\rangle = \frac{\pi}{n+1} d_n$$

donde d_n *es el mismo antes mencionado.*

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Lema 2.1.5,

$$|\langle g, f_r\rangle - \langle g, f\rangle| = |\langle g, f_r - f\rangle| \leq \|g\|_2 \|f_r - f\|_2 \to 0$$

□

La próxima proposición muestra una base para $L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$. Resulta que los elementos de la base pertenecen al espacio de Bergman $H^2(\mathbb{D})$; por lo tanto, el espacio de Bergman coincide con $L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$.

Proposición 2.1.8. *Sea* $\phi_n(z) := c_n z^n$ *donde* $c_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$. *Entonces* $\{\phi_n\}$ *es una base ortonormal de* $L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$.

Demostración. Es fácil de chequear que $\{\phi_n\}$ es un conjunto ortonormal. Por el Lema 2.1.7, $\langle \phi_n, f\rangle = \frac{d_n}{c_n}$ para cualquier $f \in L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$ con $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j$ convergiendo normalmente.
No es difícil verificar que $\|f_r\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|d_n|^2}{c_n{}^2} r^{2n+2}$. Como $f_r \to f$ en norma L^2 y $f_r(z) \to f(z)$ puntualmente, nosotros tenemos $\|f_r\|^2 \to \|f\|^2$; por lo tanto, $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|d_n|^2}{c_n{}^2}$. Luego, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_n, f\rangle = \|f\|^2$$

Entonces $f \in span\{\phi_n\}$.
Por lo tanto $\{\phi_n\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{c_n} \phi_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ en norma L^2.

□

Corolario 2.1.9. *Sea* $f \in L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$ *con* $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j$ *convergiendo normalmente. Entonces,* $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j$ *converge en norma* L^2.

Nota 2.1.1. Como $\phi_n \in H^2(\mathbb{D})$, entonces $H^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}) \bigcap O(\mathbb{D})$.

Ahora tenemos las herramientas para calcular el Bergman Kernel y dar una representación explícita de la proyección de Bergman P.

Proposición 2.1.10. *Sea $f \in H^2(\mathbb{D})$ con $f(z) = \sum_{j=o}^{\infty} d_j z^j$ convergiendo normalmente sobre $\mathbb{D}$. Para $z \in \mathbb{D}$ fijo, entonces tenemos*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\bar{w}z)^2} dA(w)$$

Demostración. Usando serie de potencias

$$\frac{1}{(1-\bar{w}z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n z^n$$

converge uniformemente sobre $\bar{\mathbb{D}} \times \{z\}$. Note que

$$\frac{\bar{w}}{(1-\bar{w}z)^2} = \frac{d}{dz}(\frac{1}{1-\bar{w}z}) \Rightarrow \frac{1}{(1-\bar{w}z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{w}^n z^n$$

convergiendo uniformemente sobre $\bar{\mathbb{D}} \times \{z\}$. Por la convergencia uniforme de series, tenemos

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(w) \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{w}^n z^n dA(w) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(\int_{\mathbb{D}} f(w)(n+1)\bar{w}^n dA(w))z^n$$

Por el Lema 2.1.7

$$= \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = f(z)$$

□

Nota 2.1.2. Recuerde que

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \overline{K_z(w)} f(w) dA(w) \ \forall f \in H^2(\mathbb{D}) \ , \forall z \in \mathbb{D}$$

Entonces,

$$K(z,w) = \overline{K_z(w)} = \frac{1}{\pi(1-\bar{w}z)^2}$$

2.2. Operadores Toeplitz en $H^2(\mathbb{D})$

Definición 2.2.1. Para f, una función continua sobre $\bar{\mathbb{D}}$, el operador multiplicación con símbolo f, $m_f : L^2(\mathbb{D}) \to L^2(\mathbb{D})$, esta definido como $m_f(g) := fg$

Nota 2.2.1. $\|m_f(g)\|_2 = \|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2 \Rightarrow \|m_f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$

Nota 2.2.2. Como $\langle m_f(h), g\rangle = \langle h, \bar{f}g\rangle$ para todo $h, g \in L^2(\mathbb{D})$, ${m_f}^* = m_{\bar{f}}$

Definición 2.2.2. Para f, una función continua sobre $\bar{\mathbb{D}}$, el operador Bergman-Toeplitz con símbolo f, $T_f : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ esta definido como $T_f(g) := P \circ m_f(g)$

Nota 2.2.3. Usando la caracterización del kernel de Bergman, tenemos

$$T_f(g)(z) = P(fg)(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)g(w)}{(1-\bar{w}z)^2} dA(w) \ \forall g \in H^2(\mathbb{D})$$

Proposición 2.2.3. *Para todo* $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$ *tenemos*
(i) $\|T_f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$
(ii) ${T_f}^* = T_{\bar{f}}$
Si $\varphi \in A(\mathbb{D}) := O(\mathbb{D}) \cap C(\bar{\mathbb{D}})$, *entonces*
(iii) $T_f T_\varphi = T_{f\varphi}$
(iv) $T_{\bar{\varphi}} T_f = T_{\bar{\varphi} f}$

Demostración. (i) Recuerde que $\|P\|_{op} = 1$. Por lo tanto,

$$\|T_f\|_{op} = \|P \circ m_f\|_{op} \leq \|P\|_{op}\|m_f\|_{op} = \|m_f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$$

(ii) Recuerde que P es autoadjunto. Note que podemos escribir $T_f = Pm_fP$. Entonces, usando la Nota 2.2.2 tenemos ${T_f}^* = P^*{m_f}^*P^* = Pm_{\bar{f}}P = T_{\bar{f}}$

(iii) Es fácil de verificar que $A(\mathbb{D})$ es un algebra. Para cualquier $h \in H^2(\mathbb{D})$ entonces existe (h_n) en $A(\mathbb{D})$ tal que $\|h_n - h\|_2 \to 0$. Se sigue que $\|\varphi h_n - \varphi h\|_2 \to 0$; por lo tanto, $\varphi h \in H^2(\mathbb{D})$.
Además, $T_\varphi(h) = Pm_\varphi(h) = \varphi h$, i.e., $T_\varphi = m_\varphi P$. Entonces, $T_f T_\varphi = Pm_f m_\varphi P = Pm_{f\varphi}P = T_{f\varphi}$.

(iv) Usando (iii) tenemos $T_{\bar{f}}T_{\varphi} = T_{\bar{f}\varphi}$. Tomando adjuntos obtenemos $T_{\varphi}{}^{*}T_{\bar{f}}{}^{*} = T_{\bar{f}\varphi}{}^{*}$
Aplicando (ii) tenemos $T_{\bar{\varphi}}T_f = T_{\bar{\varphi}f}$

□

Definición 2.2.4. El C^*-algebra Bergman-Toeplitz sobre $\mathbb{D}$ esta definido como el C^*-algebra unitario $\mathcal{T}(\mathbb{D}) := C^*\langle T_f : f \in C(\bar{\mathbb{D}})\rangle$ generado por todos los operadores Toeplitz con símbolos continuos.

Proposición 2.2.5. *$\mathcal{T}(\mathbb{D}) = C^*\langle T_p : p \in P(\mathbb{C})\rangle$, donde $P(\mathbb{C})$ denota los polinomios sobre $\mathbb{C}$*

Demostración. Sea $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$. Aplicando el teorema de Stone-Weierstrass existe una sucesión de polinomios $p_n(z,\bar{z})$, que pueden ser escritos como $p_n(z,\bar{z}) = \sum_{j=1}^{m} \overline{p_j(z)}q_j(z)$ donde $p_j, q_j \in P(\mathbb{C})$, convergiendo uniformemente a f.
Entonces, usando la Proposición 2.2.3,

$$\|T_f - \sum_{j=1}^{m} T_{p_j}{}^{*}T_{q_j}\|_{op} = \|T_{f-\sum_{j=1}^{m}\overline{p_j}q_j}\|_{op} \leq \|f - \sum_{j=1}^{m}\overline{p_j}q_j\|_{\infty}$$

Pero cada $p_n(z,\bar{z})$ puede ser escrito como $p_n(z,\bar{z}) = \sum_{j=1}^{m}\overline{p_j(z)}q_j(z)$. Por lo tanto

$$T_f \in C^*\langle T_p : p \in P(\mathbb{C})\rangle$$

porque p_n converge uniformemente a f y $T_{p_j}{}^{*}T_{q_j} \in C^*\langle T_p : p \in P(\mathbb{C})\rangle$.

□

La siguiente proposición muestra que T_p es un operador no-normal para cualquier polinomio no constante p. Esto significa que hemos encontrado nuestro primer ejemplo de C^*-algebra no conmutativa generada (excepto por polinomios constantes) por operadores no-normales.
Si formamos el cociente de $\mathcal{T}(\mathbb{D})$ con su ideal conmutador obtendremos un C^*-algebra conmutativa que es mas fácil de estudiar. La idea clave para entender $\mathcal{T}(\mathbb{D})$ es la caracterización de su ideal conmutador.

Proposición 2.2.6. *T_p es un operador no-normal para cualquier polinomio no constante p. Además, $\mathcal{T}(\mathbb{D})$ es un C^*-algebra no conmutativa.*

Demostración. No es difícil de verificar que la integral sobre $\mathbb{D}$ de cualquier polinomio no constante es cero. Sea p cualquier polinomio no constante. Como $\phi_n p$ es un polinomio no constante para todo n, tenemos que $\langle \bar{p}, \phi_n \rangle = 0$. Esto significa que $\bar{p} \in H^2(\mathbb{D})^\perp$; entonces, $P(\bar{p}) = 0$. Por otro lado, $\langle 1, |p|^2 \rangle \neq 0$; entonces, $P(|p|^2) \neq 0$.
Poniendo estas cosas juntas tenemos

$$T_p T_{\bar{p}}(1) = T_p P(\bar{p}) = 0$$

y

$$T_{\bar{p}} T_p(1) = T_{\bar{p}}(p) = P(|p|^2) \neq 0$$

Por lo tanto T_p es un operador no-normal.

□

La siguiente proposición es crucial en la caracterización de $\mathcal{T}(\mathbb{D})$. Al final de la próxima sección probaremos, como una consecuencia de la siguiente proposición, el C^*-algebra de operadores compactos esta incluida en $\mathcal{T}(\mathbb{D})$.

Proposición 2.2.7. $\mathcal{T}(\mathbb{D})$ *actúa irreducíblemente sobre* $H^2(\mathbb{D})$

Demostración. Sea $B : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ una proyección ortogonal que conmuta con $\mathcal{T}(\mathbb{D})$. En particular, $T_f B = B T_f$ sobre $H^2(\mathbb{D})$ para todo $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$. Es claro que $p(z)B(1) \in H^2(\mathbb{D})$ para cualquier $p \in P(\mathbb{C})$. Entonces para cualquier $p, q \in P(\mathbb{C})$

$$B(q) = B(T_q(1)) = T_q B(1) = P(qB(1)) = qB(1) \qquad (2.2.1)$$

Luego, usando la ecuación 2.2.1

$$\langle B(1), \bar{p}q \rangle = \langle pB(1), q \rangle = \langle B(p), q \rangle$$

Por otro lado

$$\langle \overline{B(1)}, \bar{p}q \rangle = \langle p, qB(1) \rangle = \langle p, B(q) \rangle = \langle B(p), q \rangle$$

Entonces $\langle B(1) - \overline{B(1)}, \bar{p}q \rangle = 0$. Como $\{\sum_{j=1}^n \overline{p_j(z)} q_j(z) : p_j, q_j \in P(\mathbb{C})\}$ es uniformemente denso en $C(\bar{\mathbb{D}})$, $\{\sum_{j=1}^n \overline{p_j(z)} q_j(z) : p_j, q_j \in P(\mathbb{C})\}$ es denso en $L^2(\mathbb{D})$. Esto implica que $B(1) - \overline{B(1)} = 0$. Como $B(1)$ es holomorfo, $B(1)$ es una función constante. Además como $B^2 = B$ y $B(1)$ es constante, tenemos que $B(1) = B^2(1)$ y esto implica que $B(1) = 1$ o 0. Por lo tanto; por la ecuación 2.2.1, $B = 0$ o $B = Id$. □

2.3. Caracterización del Algebra de Toeplitz $\mathcal{T}(\mathbb{D})$

En la primera parte de esta sección estudiaremos los operadores Toeplitz compactos. Resulta que un operador Toeplitz es compacto si y solo si su símbolo se anula en la frontera de $\mathbb{D}$.

Lema 2.3.1. *Sea* $\{K_n\}$ *sea la exhausión de* $\mathbb{D}$ *por subconjuntos compactos, donde*
$K_n = \overline{B}(0, 1 - \frac{1}{n})$. *Entonces para cada* $K = K_n$*, la familia*

$$\mathcal{F} = \{h|_K : h \in H^2(\mathbb{D}), \|h\|_2 \leq 1\} \text{ tiene cerradura compacta en } C(K)$$

Demostración. Sea $K = K_n$ y $E = K_{n+1}$ para un n fijo pero arbitrario. Denote $2r = dist(K, \partial E)$. Aplicando la Proposición 2.1.1, $\exists c > 0$ tal que

$$sup|h(E)| \leq c\|h\|_2 \quad \forall h \in H^2(\mathbb{D})$$

Ahora para cualquier $z_1, z_2 \in K$ con $|z_1 - z_2| \leq r$, tenemos $[z_1, z_2] \subset K \subset E$ Aplicando el Teorema del Valor Medio:

$$|h(z_1) - h(z_2)| \leq sup_{w \in [z_1, z_2]}|h'(w)||z_1 - z_2| \quad ...(*)$$

Observe que para cualquier $w_0 \in [z_1, z_2]$, $\overline{B}(w_0, r) \subseteq E$. Por la Desigualdad de la Integral del Cauchy

$$|h'(w_0)| \leq \frac{sup\{|h(\overline{B}(w_0, r)|\}}{r} \leq \frac{\sup|h(E)|}{r}$$

Entonces

$$sup_{w \in [z_1, z_2]}|h'(w)| \leq \frac{\sup|h(E)|}{r} \leq \frac{c}{r}\|h\|_2$$

Usando (*) y el resultado anterior; obtenemos

$$|h(z) - h(w)| \leq \frac{c}{r}\|h\|_2|z - w| \leq \frac{c}{r}|z - w| \quad \forall h \in \mathcal{F}$$

Luego $\mathcal{F}$ es equicontinua. Además, para cualquier $z \in K$ y $h \in \mathcal{F}$, $|h(z)| \leq c$ Por el Teorema de Arzela-Ascoli, $\mathcal{F}$ tiene cerradura compacta en $C(K)$.

$\square$

Proposición 2.3.2. *Sea* $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$ *con* $f|_{\partial\mathbb{D}} = 0$. *Entonces,* T_f *es un operador compacto.*

Demostración. Considere $\{K_n\}$ y $\mathcal{F}$ como an el lema anterior. Sea $K = K_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo.
Por el lema previo, el mapeo restrcción

$$r : H^2(\mathbb{D}) \to C(K)\ ,\ r(h) := h|_K$$

es un operador compacto.
Note que el mapeo inclusión

$$i : C(K) \to L^2(\mathbb{D})\ ,\ i(g) := g\chi_K$$

es continuo porque

$$\|g\chi_K\|_2{}^2 = \int_{\mathbb{D}} |g\chi_K|^2 dA \leq \|g\|_\infty{}^2 Area(\mathbb{D})$$

Defina $m_{\chi_K} : H^2(\mathbb{D}) \to L^2(\mathbb{D})$ como $m_{\chi_K} = i \circ r$. Como i es continuo y r es un operador compacto, m_{χ_K} también es un operador compacto.
Ahora, observe que $m_{f\chi_K} : H^2(\mathbb{D}) \to L^2(\mathbb{D})$ definido como $m_{f\chi_K} := m_f \circ m_{\chi_K}$ es un operator compacto porque m_f es un operator acotado.
Note que $f\chi_K$ no es necesariamente continuo pero podemos denotar como $T_{f\chi_K} = P \circ m_{f\chi_K}$ el cual es un operator compacto.

Afirmación: $f\chi_{K_m} \to f$ en la norma $L^\infty(\bar{\mathbb{D}})$ cuando $m \to \infty$
Prueba:
Por la continuidad uniforme de f, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$|z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \epsilon\ \forall z, w \in \bar{\mathbb{D}}$$

Como $\{K_n\}$ es una exhausción de conjuntos compactos encajados de $\mathbb{D}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{B}(0, 1-\delta) \subseteq K_n$.
Entonces, si $z \in \bar{\mathbb{D}} \setminus K_n \Rightarrow \exists z_0 \in \partial\mathbb{D}$ tal que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| = |f(z)| < \epsilon$. Por lo tanto, $|f(z) - (f\chi_{K_n})(z)| < \epsilon\ \forall z \in \bar{\mathbb{D}}$.
Como $K_n \subseteq K_m$, $\forall m \geq n$, $\|f - (f\chi_{K_m})\|_\infty < \epsilon\ \forall m \geq n$.
En consecuencia $\|f - (f\chi_{K_m})\|_\infty \to 0$

Finalmente,

$$\|T_f - T_{f\chi_{K_m}}\|_{op} = \|T_{f - f\chi_{K_m}}\|_{op} \leq \|f - (f\chi_{K_m})\|_\infty \to 0$$

Como $T_{f\chi_{K_m}}$ son operadores compactos, T_f es un operator compacto.

$\square$

Para probar el resto de las caracterizaciones de operadores Toeplitz compactos, definiremos y usaremos algunas propiedades de transformaciones de Berezin. La tranformación de Berezin de un operador Toeplitz recupera información sobre el símbolo; de hecho, es una función continua que coincide con el símbolo en S^1.

Definición 2.3.3. Defina para un $a \in \mathbb{D}$ fijo, $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

Claramente φ_a definida previamente es un automorfismo (*Möbius* transformación) del disco unitario.

Nota 2.3.1. Note que $k_a(z) := \varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-z\bar{a})^2}$ y $k_a \in H^2(\mathbb{D})$. Además, $Jac_{\varphi_a}(z) = |k_a(z)|^2$.

Nota 2.3.2. Recuerde que el kernel de Bergman $K_a(z) = \frac{1}{\pi(1-z\bar{a})^2}$ y $K_a(a) = \langle K_a, K_a \rangle = \|K_a\|^2$. Por lo tanto, $k_a(z) = \pi(1-|a|^2)K_a$ tiene norma $\|k_a\| = \pi(1-|a|^2)\sqrt{K_a(a)} = \sqrt{\pi}$.

Definición 2.3.4. $\tilde{f}(z) := \frac{1}{\pi}\langle k_z, T_f(k_z)\rangle$ es llamado la transformación de Berezin de f.

Nota 2.3.3.

$$\langle k_z, T_f(k_z)\rangle = \langle k_z, P(fk_z)\rangle = \langle P(k_z), fk_z\rangle = \langle k_z, fk_z\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w)|k_z(w)|^2 dA(w)$$

Haciendo un cambio de variables,

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_z)(w) dA(w)$$

Proposición 2.3.5. *$\tilde{f} \in C(\bar{\mathbb{D}})$ y $\tilde{f} = f$ sobre $\partial\mathbb{D}$ para todo $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$*

Demostración. Note que para cualquier $a \in \partial\mathbb{D}$ tenemos $\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \to a$ cuando $z \to a$ $\forall w \in \mathbb{D}$.
Por la continuidad de f, $(f \circ \varphi_z)(w) \to f(a)$ cuando $z \to a$ $\forall w \in \mathbb{D}$; y, $|f \circ \varphi_z(w)| \leq \|f\|_\infty$ $\forall w \in \mathbb{D}$ $\forall z \in \mathbb{D}$.
Por el Teorema de Convergencia de Lebesgue,

$$\tilde{f}(a) := \lim_{z \to a} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi_z)(w) dA(w) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(a) dA(w) = f(a)$$

La continuidad de $\tilde{f}$ sobre $\mathbb{D}$ se prueba usando el mismo argumento.

□

Lema 2.3.6. *$k_a \to 0$ débilmente cuando $|a| \to 1$*

Demostración. Recuerde que $k_a(z) = \pi(1-|a|^2)K_a(z)$. Entonces

$$\langle k_a, z^n \rangle = \pi(1-|a|^2)\langle K_a, z^n \rangle = \pi a^n (1-|a|^2)$$

Luego

$$\langle k_a, z^n \rangle \to 0 \text{ cuando } |a| \to 1$$

Por lo tanto, $\langle k_a, \phi_n \rangle \to 0$ cuando $|a| \to 1$. Esto significa, $k_a \to 0$ débilmente $|a| \to 1$.

□

Teorema 2.3.7. *Sea $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$. T_f es un operador compacto si y solo si $f \in C_0(\mathbb{D})$*

Demostración. $f \in C_0(\mathbb{D})$ implica que T_f es un operador compacto (esto fue probado en Proposition 2.3.2).
Suponga que T_f es un operator compacto. Por la Nota 2.3.2

$$|\tilde{f}(z)| = \frac{1}{\pi}|\langle k_z, T_f(k_z)\rangle| \leq \frac{1}{\pi}\|k_z\|_2 \|T_f(k_z)\|_2 \leq \sqrt{\pi}\|T_f(k_z)\|_2$$

Como $k_z \to 0$ débilmente cuando $|z| \to 1$ y T_f es un operator compacto, $\|T_f(k_z)\|_2 \to 0$ cuando $z \to 1$.
En consecuencia, $\tilde{f}(z_0) = 0$, $\forall z_0 \in \partial\mathbb{D}$. Como $\tilde{f}$ y f son iguales sobre $\partial\mathbb{D}$, $f \in C_0(\mathbb{D})$. □

Recuerde que $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ es una base ortonormal para $H^2(\mathbb{D})$

$$\text{donde} \quad \phi_n(z) = c_n z^n, \quad c_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$$

Es también cierto que si $g \in H^2(\mathbb{D})$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n(z)$$

Sea $P : L^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ la proyección ortogonal sobre $H^2(\mathbb{D})$. Entonces, tenemos que para cualquier $g \in L^2(\mathbb{D})$,

$$P(g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle P(g), \phi_n \rangle \phi_n(z)$$

Como P es autoadjunto,

$$\begin{aligned} P(g)(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, P(\phi_n) \rangle \phi_n(z) \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n(z). \end{aligned}$$

Para probar que los semi-conmutadores $T_{fg} - T_f \circ T_g$ son operadores compactos, consideraremos varios casos divididos en los siguientes lemas.

Lema 2.3.8.

$$P(z^n \overline{z}^m) = \begin{cases} 0, \; n < m \\ \\ \frac{c_{n-m}}{c_n^2} \phi_{n-m}, \; n \geq m. \end{cases}$$

Demostración. Por la fórmula anterior:

$$\begin{aligned}
P(z^n\overline{z}^m) &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\langle z^n\overline{z}^m,\phi_k\rangle\phi_k \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\langle z^n, z^m\phi_k\rangle\phi_k \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\langle \frac{1}{c_n}\phi_n, \frac{c_k}{c_{m+k}}\phi_{m+k}\rangle\phi_k \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{c_k}{c_n c_{m+k}} < \phi_n, \phi_{m+k} > \phi_k \\
&= \begin{cases} 0, \ n < m \\ \\ \frac{c_{n-m}}{c_n^2}\phi_{n-m}, \ n \geq m. \end{cases}
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.3.9. *$T_{z^p\overline{z}^q} - T_{z^p}\circ T_{\overline{z}^q}$ es un operador compacto.*

Demostración. Por el lema anterior $T_{z^p\overline{z}^q}(\phi_k) = P(c_k z^{p+k}\overline{z}^q) = \begin{cases} 0, \ p+k < q \\ \\ \frac{c_k c_{p+k-q}}{c_{p+k}^2}\phi_{p+k-q}, \ p+k \geq q. \end{cases}$

$T_{\overline{z}^q}(\phi_k) = P(c_k z^k\overline{z}^q) = \begin{cases} 0, \ k < q \\ \\ \frac{c_{k-q}}{c_k}\phi_{k-q}(z), \ k \geq q. \end{cases}$

$T_{z^p}(T_{\overline{z}^q}(\phi_k)) = \begin{cases} 0, \ k < q \\ \\ P(\frac{c_{k-q}}{c_k}z^p c_{k-q}z^{k-q}), \ k \geq q. \end{cases}$

$= \begin{cases} 0, \ k < q \\ \\ \frac{c_{k-q}^2}{c_k c_{p+k-q}}\phi_{p+k-q}(z), \ k \geq q. \end{cases}$

Para $k \geq q$:

$(T_{z^p\overline{z}^q} - T_{z^p}\circ T_{\overline{z}^q})(\phi_k) = (\frac{c_k c_{p+k-q}}{c_{p+k}^2} - \frac{c_{p-q}^2}{c_k c_{p+k-q}})\phi_{p+k-q}(z)$

$a_k := (\frac{c_k c_{p+k-q}}{c_{p+k}^2} - \frac{c_{p-q}^2}{c_k c_{p+k-q}}) = \frac{c_k^2 c_{p+k-q}^2 - c_{k-q}^2 c_{p+k}^2}{c_{p+k}^2 c_k c_{p+k-q}} = \frac{1}{\pi^2}\frac{(k+1)(p+k-q+1)-(k-q+1)(p+k+1)}{c_{p+k}^2 c_k c_{p+k-q}}$

$a_k = \frac{pq}{\pi^2 c_{p+k}^2 c_k c_{p+k-q}}$

$$\Longrightarrow \sum_k^{+\infty} a_k \text{ converge}$$

Sea a_k definida anteriormente. Denote $A = T_{z^p\overline{z}^q} - T_{z^p}\circ T_{\overline{z}^q}$, $A(\phi_k) =$

$a_k\phi_{p+k-q},\ a_k \geq 0.$

Defina $B_r(\phi_k) = \begin{cases} a_k\phi_{p+k-q},\ k \leq r \\ \\ 0,\ k > r \end{cases}$

Sea $h \in H^2(D)$ con $\|h\|_2 = 1$ y $h(z) = \sum \alpha_k\phi_k$

$$\Longrightarrow |\ \alpha_k\ |\leq 1$$

$\|\ (A - B_r)(\sum \alpha_k\phi_k)\ \|=\|\ \sum_{k>r} \alpha_k a_k \phi_{p+k-q}\ \|\leq \sum_{k>r} \|\ \alpha_k a_k \phi_{p+k-q}\ \|$

$$\leq \sum_{k>r} |\ \alpha_k\ |\ a_k \leq \sum_{k>r} a_k$$

Entonces

$$\|\ A - B_r\ \|_{op} \leq \sum_{k>r} a_k$$

Como $\sum a_k$ converge,

$$\sum_{k>r} a_k \to 0 \quad \textit{cuando} \quad r \to +\infty$$

Entonces $B_r \xrightarrow{op} A$.

Por lo tanto A es un operador compacto.

$\square$

Lema 2.3.10. *$T_{z^p\overline{z}^q} \circ T_{z^r\overline{z}^l} - T_{(z^pz^r)(\overline{z}^q\overline{z}^l)}$ es un operator compacto.*

Demostración. $T_{z^p\overline{z}^q} = T_{\overline{z}^q z^p} = T_{\overline{z}^q} \circ T_{z^p}$

$T_{z^r\overline{z}^l} = T_{\overline{z}^l z^r} = T_{\overline{z}^l} \circ T_{z^r}$

$T_{(z^pz^r)(\overline{z}^q\overline{z}^l)} = T_{\overline{z}^q} \circ T_{z^p\overline{z}^l z^r} = T_{\overline{z}^q} \circ T_{z^p\overline{z}^l} \circ T_{z^r}$

$T_{z^p\overline{z}^q} \circ T_{z^r\overline{z}^l} - T_{(z^pz^r)(\overline{z}^q\overline{z}^l)} = T_{\overline{z}^q} \circ T_{z^p} \circ T_{\overline{z}^l} \circ T_{z^r} - T_{\overline{z}^q} \circ T_{z^p\overline{z}^l} \circ T_{z^r} = T_{\overline{z}^q} \circ (T_{z^p} \circ T_{\overline{z}^l} - T_{z^p\overline{z}^l}) \circ T_{z^r}$

Por el lema previo, $T_{z^p\overline{z}^q} \circ T_{z^r\overline{z}^l} - T_{(z^pz^r)(\overline{z}^q\overline{z}^l)}$ es un operador compacto.

$\square$

Lema 2.3.11. *Sean $\varphi(z,\bar{z})$ y $\psi(z,\bar{z})$ polinomios, entonces*

(a) $T_\varphi \circ T_{z^p\overline{z}^q} - T_{\varphi z^p\overline{z}^q}$ es un operador compacto.

(b) $T_{z^p\overline{z}^q} \circ T_\varphi - T_{\varphi z^p\overline{z}^q}$ es un operador compacto.

(c) $T_\varphi \circ T_\psi - T_{\varphi\psi}$ es un operator compacto.

Demostración. **(a)** Sea $\varphi(z,\bar{z}) = \sum b_{i,j} z^{\alpha_i} \bar{z}^{\beta_j}$
Entonces

$$T_\varphi \circ T_{z^p \overline{z}^q} - T_{\varphi z^p \overline{z}^q} = \sum b_{i,j} (T_{z^{\alpha_i} \overline{z}^{\beta_j}} \circ T_{z^p \overline{z}^q} - T_{z^p \overline{z}^q z^{\alpha_i} \overline{z}^{\beta_j}})$$

La prueba se sigue usando el lema anterior.
(b) y **(c)** se prueban de manera similar.

$\square$

Teorema 2.3.12. *Sean* φ, $\psi \in C(\bar{D})$, *entonces* $T_\varphi \circ T_\psi - T_{\varphi\psi}$ *es un operador compacto.*

Demostración. Primero, sea $p(z,\bar{z})$ un polinomio. Como ψ es continuo, existe una sucesión $q_n(z,\bar{z}) \to \psi$ uniformemente. Entonces

$$\|T_p \circ T_{q_n} - T_p \circ T_\psi - (T_{pq_n} - T_{p\psi})\|_{op} = \|T_p \circ T_{q_n - \psi} - T_{p(q_n-\psi)}\|_{op} \leq \|T_p\|_{op} \|T_{q_n \psi}\|_{op} + \|T_{p(q_n-\psi)}\|_{op}$$

$$\leq \|p\|_\infty \|q_n - \psi\|_\infty + \|p\|_\infty \|q_n - \psi\|_\infty \ \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

En consecuencia $T_p \circ T_{q_n} - T_{pq_n} \to T_p \circ T_\psi - T_{p\psi}$ en norma de operator.
Por el lema previo, $T_p \circ T_{q_n} - T_{pq_n}$ son operadores compactos; entonces, $T_p \circ T_\psi - T_{p\psi}$ es un operator compacto.
De la misma manera, podemos mostrar que $T_\varphi \circ T_\psi - T_{\varphi\psi}$ es un operador compacto, fijando ψ y aproximando φ (uniformemente) usando polinomios.

$\square$

Ahora estamos listos para probar el teorema principal de este capítulo, la caracterización de $\mathcal{T}(\mathbb{D})$.

Teorema 2.3.13. *El Bergman-Toeplitz* C^**-algebra* $\mathcal{T}(\mathbb{D})$ *tiene como ideal conmutador* $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{D}))$ *(operadores compactos), y existe un* C^**-isomorphism*

$$\nu : \mathcal{T}(\mathbb{D})/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{D})) \to C(S^1)$$

tal que para todo $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$,

$$\nu(T_f + \mathcal{K}(H^2(\mathbb{D}))) = f|_{S^1}$$

Demostración. El conmutador

$$[T_f, T_g] := T_f T_g - T_g T_f = (T_f T_g - T_{fg}) - (T_g T_f - T_{gf})$$

es un operador compacto, por el teorema anterior.
Luego, el ideal conmutador $\mathcal{T}'(\mathbb{D})$ generado por los conmutadores $[T_f, T_g]$ esta contenido en $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{D}))$
Sabemos que $\mathcal{T}(\mathbb{D})$ no es conmutativo, entonces $\mathcal{T}'(\mathbb{D}) \neq 0$
Como $\mathcal{T}(\mathbb{D})$ actúa irreducíblemente sobre $H^2(\mathbb{D})$ y por el Corolario 2 de [Arv, p. 18], tenemos que $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{D})) \subseteq \mathcal{T}(\mathbb{D})$. Luego $\mathcal{T}'(\mathbb{D})$ es un ideal distinto de zero de $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{D}))$. Por el Corolario 1 de [Arv, p. 18] $\mathcal{T}'(\mathbb{D}) = \mathcal{K}(H^2(\mathbb{D}))$.
Entonces,

$$\rho : C(\bar{\mathbb{D}}) \to \mathcal{T}(\mathbb{D})/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{D})) \ , \ \rho(f) := T_f + \mathcal{K}(H^2(\mathbb{D}))$$

es un C^*-homomorfismo (bien definido) que es sobreyectivo.
Note que el mapeo restricción

$$r : C(\bar{\mathbb{D}}) \to C(S^1) \ , \ r(f) := f|_{S^1}$$

es un C^*-homomorphism sobreyectivo. En efecto, para cualquier $f \in C(S^1)$ podemos definir

$$\tilde{f}(z) := |z| f(\frac{z}{|z|}) \text{ si } z \neq 0 \text{ y } \tilde{f}(0) := 0$$

Claramente, $\tilde{f}(z) \in C(\bar{\mathbb{D}})$ y $\tilde{f}|_{S^1} = f$.
Si $f \in Ker(r)$ i.e. se elimina sobre S^1, entonces T_f es un operador compacto (usando el Teorema 2.3.7). Luego, existe $\bar{\rho}$ un C^*-homomorfismo sobreyectivo tal que $\bar{\rho} \circ r = \rho$.
Ahora, tomemos $f \in Ker(\bar{\rho})$ i.e. $T_{\tilde{f}}$ operador compacto. Por el Teorema 2.3.7, $\tilde{f}$ se anula sobre S^1. Esto implica que $f \equiv 0$. En consecuencia $\bar{\rho}$ es inyectivo; por lo tanto, es un C^*-isomorphism.

□

Capítulo 3

Operadores Hardy-Toeplitz sobre el Disco Unitario $\mathbb{D}$

El punto de vista en las primeras dos secciones de este capítulo son influenciados por [Yng], y las últimas dos secciones siguen la linea de razonamiento de [Upm]. Como en el caso de espacios de Bergman (Capítulo 2) mostraremos que los operadores Toeplitz con símbolos polinomiales no constantes son operadores no normales y verifican que el algebra generado por estos operadores Toeplitz es conmutativa módulo operadores compactos. También, en este caso podemos identificar que operadores son Fredholm. Discutiremos el índice de estos operadores en el capítulo 6. Además, observamos que el C^*-algebra de operadores Bergman-Toeplitz es C^*-isomorfo (módulo operadores compactos) a el C^*-algebra de operadores Hardy-Toeplitz.

3.1. El Espacio de Hardy $H^2(S^1)$

El propósito de esta sección es definir y mostrar una base ortonormal del espacio de Hardy sobre el disco unitario. Una vez mas las funciones "radiales"son bien útiles para obtener información sobre las funciones en el espacio de Hardy.

Considere $L^2(S^1) \approx L^2(0, 2\pi)$ el espacio de Lebesgue de funciones cuadrado-integrables sobre S^1 con medida de Haar $dm(z) = \frac{d\theta}{2\pi}$, y producto interno,

$$\langle f, g\rangle = \int_{S^1} \overline{f(z)} g(z) dm(z)$$

Nota 3.1.1.

$$\int_{S^1} f(z) dm(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$$

Definición 3.1.1. $H^2(S^1)$ definido como la $L^2(S^1)$ cerradura de $\{f|_{S^1} : f \in C(\bar{\mathbb{D}}) \cap O(\mathbb{D})\}$ es llamado espacio de Hardy sobre $\mathbb{D}$

Teorema 3.1.2. $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal de* $L^2(S^1)$

Demostración. Se sabe que $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(0, 2\pi)$. Se sigue por identificación que $L^2(S^1) \approx L^2(0, 2\pi)$ that $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$.

□

Lema 3.1.3. *Sea* $f \in C(\bar{\mathbb{D}}) \cap O(\mathbb{D})$*. Defina para cualquier* $r \in (0, 1)$ $f_r(z) := f(rz)$ $\forall z \in \bar{\mathbb{D}}$*. Entonces* $f_r|_{S^1} \to f|_{S^1}$ *en la norma* $L^2(S^1)$ *cuando* $r \to 1$.

Demostración. Para cada $z \in S^1$ tenemos que $f_r(z) \to f(z)$ puntualmente y $|f_r(z) - f(z)|^2 \leq 4\|f\|_\infty^2$ (la norma del infinito en la derecha es considerada sobre $\bar{\mathbb{D}}$). La prueba se sigue por el Teorema de Convergencia de Lebesgue.

□

Teorema 3.1.4. *Sea* $f \in C(\bar{\mathbb{D}}) \cap O(\mathbb{D})$ *con* $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ *convergiendo normalmente sobre* D*. Entonces* $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ *en norma* $L^2(S^1)$.

Demostración. Note que $f_r(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j z^j$ convergiendo uniformemente sobre $\bar{D}$. Entonces, por el lema anterior, $f_r(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j z^j$ converge en norma $L^2(S^1)$ cuando $r \to 1$.
Como $f_r \to f$ en norma $L^2(S^1)$ y por la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\langle z^n, f_r\rangle \to \langle z^n, f\rangle$ cuando $r \to 1$.
Pero $\langle z^n, f_r\rangle = a_n r^n$ $\forall n \geq 0$ y 0 en otros casos. En consecuencia, $\langle z^n, f\rangle = a_n$ $\forall n \geq 0$ y 0 en otros casos. Por lo tanto, $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ en norma L^2, porque $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$.

□

Corolario 3.1.5. $(z^n)_{n\geq 0}$ *es una base ortonormal de* $H^2(S^1)$.

Demostración. Por el lema anterior, $\{f|_{S^1} : f \in C(\bar{\mathbb{D}}) \cap O(\mathbb{D})\} \subseteq clos\{(z^n)_{n\geq 0}\}$, donde *clos* significa cerradura en $L^2(S^1)$. Como $clos\{(z^n)_{n\geq 0}\}$ es un subespacio cerrado de $L^2(S^1)$, tenemos que $H^2(S^1) \subseteq clos\{(z^n)_{n\geq 0}\}$.
Por otro lado, $z^n \in H^2(S^1)$. Por lo tanto $clos\{(z^n)_{n\geq 0}\} \subseteq H^2(S^1)$. □

Ahora investigaremos mas el espacio de Hardy. Probaremos que podemos extender funciones en el espacio de Hardy a funciones holomorfas definidas sobre el disco unitario. Además, gracias al kernel de Poisson mostraremos una fórmula explícita para esta extensión.

Teorema 3.1.6. *Sea $f \in H^2(S^1)$ con $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ en norma $L^2(S^1)$. Entonces $\tilde{f}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ define una función holomorfa en $\mathbb{D}$, i.e., convergiendo normalmente sobre $\mathbb{D}$*

Demostración. Note que $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 = \|f\|^2 < \infty$. Entonces $|a_j| \to 0$. Esto implica que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_j| < 1\ \forall j > n_0$; en consecuencia, $\limsup \sqrt[j]{|a_j|} \leq 1$.
Por la fórmula de Cauchy-Hadamard,

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[j]{|a_j|}} \geq 1$$

Por lo tanto, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ define una función holomorfa $\forall |z| < R$; en consecuencia, $\tilde{f}(z)$ es holomorfo en $\mathbb{D}$.

□

Corolario 3.1.7. *Sea $f \in H^2(S^1)$, entonces $\|\tilde{f}_r\|_2$ crece con $r \in (0,1)$ y $\lim_{r\to 1} \|\tilde{f}_r\|_2 = \|f\|_2$.*

Demostración. Sea $f \in H^2(S^1)$ con $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ en norma L^2. Entonces $\tilde{f}_r(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j z^j$ converge uniformemente, entonces converge en norma L^2. Esto implica que

$$\|\tilde{f}_r\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j r^j|^2 \Rightarrow \lim_{r\to 1} \|\tilde{f}_r\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 = \|f\|_2^2$$

□

Definición 3.1.8. $\log^+(x) := \log(x)$ si $x \geq 1$ y 0 en otro caso.

Teorema 3.1.9 (Teorema de Fatou)**.** *Sea* $f \in H^2(S^1)$*, entonces* $\lim_{r\to 1} \tilde{f}_r(z) = f(z)$ *c.s.*

Demostración. Observe que

$$\log^+ |\tilde{f}_r(z)| = \frac{1}{2}\log^+ |\tilde{f}_r(z)|^2 \leq \frac{1}{2}|\tilde{f}_r(z)|^2$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_{S^1} \log^+ |\tilde{f}_r(z)| dm(z) &\leq \frac{1}{2}\int_{S^1} |\tilde{f}_r(z)|^2 dm(z)\\ &= \frac{1}{2}\|\tilde{f}_r\|_2^2 \leq \frac{1}{2}\|f\|_2^2\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{S^1} \log^+ |\tilde{f}_r(z)| dm(z) \leq \frac{1}{2}\|f\|_2^2 < \infty$$

Por Teorema 3.3.3 de [Rd3, p. 45], $f^*(z) = \lim_{r\to 1} \tilde{f}_r(z)$ existe c.s. Por lo tanto f^* es una función medible.
Por el lema de Fatou

$$\begin{aligned}\int_{S^1} |f^*(z)|^2 dm(z) = \int_{S^1} \lim_{r\to 1} |\tilde{f}_r(z)|^2 dm(z) &\leq \liminf_{r\to 1}\int_{S^1} |\tilde{f}_r(z)|^2 dm(z)\\ &= \liminf_{r\to 1} \|\tilde{f}_r(z)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2\end{aligned}$$

Por lo tanto $f^* \in L^2(S^1)$. Ahora, usando el Problema 17 de [Roy, p. 127] tenemos

$$\langle z^n, \tilde{f}_r\rangle \to \langle z^n, f^*\rangle \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Como $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$ y

$$\langle z^n, \tilde{f}_r\rangle \to \langle z^n, f\rangle \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$f = f^*$ en $L^2(S^1)$. □

Nota 3.1.2. Se puede probar que $\tilde{f}_r \to f$ en norma $L^2(S^1)$ (vea el Teorema 3.4.3. [Rd3, p. 51]).

Teorema 3.1.10 (Fórmula del Kernel de Poisson)**.** *Sea $f \in H^2(S^1)$. Para $0 \leq r < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\tilde{f}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)dt$$

donde

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

Demostración. Vea [Yng, p. 161] .

□

Definición 3.1.11. Defina

$$P : L^2(S^1) \to H^2(S^1)$$

$$P(g) := \sum_{n=0}^{\infty}\langle z^n, g\rangle z^n \text{ en } L^2 \text{ norma}$$

Nota 3.1.3. P es claramente bien definida y es la proyección ortogonal de $L^2(S^1)$ sobre $H^2(S^1)$

3.2. Operadores Toeplitz en $H^2(S^1)$

El resultado más importante de esta sección es que el C^*-algebra de operadores Hardy-Toeplitz actúa irreducíblemente sobre el espacio de Hardy. Los dos ingredientes mas importantes para esta prueba son la fórmula del kernel de Poisson y el teorema de Fatou.
Comenzamos con algunas definiciones y propiedades análogas a aquellas que aparecen en el caso del espacio de Bergman.

Definición 3.2.1. Para una función continua f sobre S^1, el operador multiplicación con símbolo f, denotado como $m_f : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$, esta definido como $m_f(g) := fg$

Nota 3.2.1. $\|m_f(g)\|_2 = \|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2 \Rightarrow \|m_f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$.

Nota 3.2.2. Como $\langle m_f(h), g\rangle = \langle h, \bar{f}g\rangle$ para todo $h, g \in L^2(S^1)$, tenemos que ${m_f}^* = m_{\bar{f}}$

Definición 3.2.2. Para cada función continua f sobre S^1, el operador Hardy-Toeplitz con símbolo f, denotado como $T_f : H^2(S^1) \to H^2(S^1)$, esta definido como $T_f(g) := P \circ m_f(g)$

Proposición 3.2.3. *Para todo $f \in C(S^1)$, tenemos*
(i) $\|T_f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$
(ii) ${T_f}^* = T_{\bar{f}}$
Si $\varphi \in H^2(S^1) \cap C(S^1)$ *, entonces*
(iii) $T_f T_\varphi = T_{f\varphi}$
(iv) $T_{\bar{\varphi}} T_f = T_{\bar{\varphi} f}$

Demostración. La prueba es similar a la del caso del espacio de Bergman (vea la Proposición 2.2.3.) □

Definición 3.2.4. El C^*-algebra Hardy-Toeplitz sobre S^1 esta definido como el C^*-algebra unitario $\mathcal{T}(S^1) := C^*\langle T_f : f \in C(S^1)\rangle$ generado por todos los operadores Toeplitz con símbolos continuos.

Proposición 3.2.5. $\mathcal{T}(S^1) = C^*\langle T_p : p \in P(\mathbb{C})\rangle$, *donde* $P(\mathbb{C})$ *es el conjunto de polinomios sobre* $\mathbb{C}$

Demostración. La prueba es similar a la del caso del espacio de Bergman (vea la Proposición 2.2.5). □

Proposición 3.2.6. T_p *es un operador no-normal para cualquier polinomio no constante* p*. Además,* $\mathcal{T}(S^1)$ *es un* C^**-algebra no conmutativa.*

Demostración. Un argumento similar a el usado en la Proposition 2.2.6 funciona en esta prueba.

□

Proposición 3.2.7. $\mathcal{T}(S^1)$ *actúa irreducíblemente sobre* $H^2(S^1)$

Demostración. Sea $B : H^2(S^1) \to H^2(S^1)$ sea una proyección ortogonal que conmuta con $\mathcal{T}(S^1)$. En particular, $T_f B = B T_f$ on $H^2(S^1)$ para todo $f \in C(S^1)$.
Note que para cualquier $p \in P(\mathbb{C})$ tenemos que $p(z)B(1) \in H^2(S^1)$. Entonces, para cualquier $p, q \in P(\mathbb{C})$

$$B(q) = B(T_q(1)) = T_q B(1) = P(qB(1)) = qB(1) \tag{3.2.1}$$

Además

$$\langle B(1), \bar{p}q \rangle = \langle pB(1), q \rangle = \langle B(p), q \rangle$$

Por otro lado

$$\langle \overline{B(1)}, \bar{p}q \rangle = \langle p, qB(1) \rangle = \langle p, B(q) \rangle = \langle B(p), q \rangle$$

Luego $\langle B(1) - \overline{B(1)}, \bar{p}q \rangle = 0$. Ahora, si escogemos $p(z) = z^n$ y $q(z) = 1$ y vice versa para $n \geq 0$, obtenemos para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\langle B(1) - \overline{B(1)}, z^n \rangle = 0$$

Denote $f = B(1)$, entonces $f = \bar{f}$,i.e., f es real sobre S^1.
Usando la fórmula del kernel de Poisson, vemos que

$$\tilde{f}_r(e^{i\theta}) = \tilde{f}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)dt$$

Como $f(e^{it})$ y $P_r(\theta - t)$ son reales, $\tilde{f}$ es real sobre D. En consecuencia, $\tilde{f}$ es una función real constante porque es holomorfa.
Ahora, por el Teorema de Fatou, $f \equiv a \in \mathbb{R}$ c.s. Como estamos trabajando en $L^2(S^1)$, podemos asumir $f \equiv a$.
Desde que $B^2 = B$ y $B(1)$ es constante, $B(1) = B^2(1) = B(B(1)) = B(a{,}1) = a.B(1)$ implica $B(1) = 1$ o 0.
Por lo tanto, usando la equación 3.2.1, $B = 0$ o $B = Id$. □

3.3. Caracterización del Algebra de Toeplitz $\mathcal{T}(S^1)$

El siguiente teorema muestra que los operadores Hankel con símbolos continuos (que serán definidos luego) son compactos. Como consecuencia de este teorema veremos que los operadores semi-conmutadores son compactos también. Por lo tanto el conmutador ideal esta contenido en el C^*-algebra de operadores compactos.

Teorema 3.3.1 (El Teorema de Hartman). *Para todo $f \in C(S^1)$, el operador Hankel*

$$H_f := (I - P) \circ m_f : H^2(S^1) \to H^2(S^1)^{\perp}$$

es compacto.

Demostración. Por el Teorema de Stone-Weierstrass, podemos aproximar f uniformemente por polinomios $p_n(z,\bar{z})$. La idea de la prueba es para mostrar que los operadores Hankel H_{p_n} son compactos; entonces, usando la convergencia uniforme de los símbolos obtendremos que H_f es un operator compacto. Dividiremos la prueba en tres casos.

Caso 1: $f = z^k$ **,** $k \geq 0$
Considere $h \in H^2(S^1)$ con $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge en norma L^2. Entonces

$$m_f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+k} \Rightarrow (I-P) \circ m_f(h) = 0$$

porque $(I-P) \perp P$, entonces $I-P$ proyecta sobre $clos(z^n)_{-\infty}^{-1}$.
Por lo tanto $(I-P) \circ m_f = 0$. es un operador compacto.

Caso 2: $f = z^{-k}$ **,** $k > 0$
Considere h como en el primer caso. Entonces

$$m_f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n-k} \Rightarrow (I-P) \circ m_f(h) = \sum_{n=0}^{k-1} c_n z^{n-k}$$

Por lo tanto $(I-P) \circ m_f$ tiene rango finito, entonces es un operador compacto.

Caso 3: Caso General
Usando los casos 1 y 2, tenemos que H_{p_n} es un operador compacto. Como $p_n \to f$ uniformemente, tenemos

$$\begin{aligned}\|(I-P) \circ m_f - (I-P) \circ m_{p_n}\|_{op} &= \|(I-P) \circ m_{f-p_n}\|_{op} \leq \|I-P\|_{op} \|m_{f-p_n}\|_{op} \\ &\leq \|I-P\|_{op} \|f-p_n\|_{\infty} \to 0 \text{ cuando } k \to 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $(I-P) \circ m_f$ es un operador compacto.

□

Corolario 3.3.2. *Sean φ, $\psi \in C(S^1)$, entonces $T_\varphi \circ T_\psi - T_{\varphi\psi}$ es un operador compacto.*

Demostración.

$$T_\varphi \circ T_\psi - T_{\varphi\psi} = Pm_\varphi P m_\psi - Pm_{\varphi\psi} = Pm_\varphi (P-I) m_\psi$$

Se sigue del hecho de que Pm_φ es un operador acotado y del teorema previo que $T_\varphi \circ T_\psi - T_{\varphi\psi}$ es un operador compacto. □

Teorema 3.3.3. *Sea $f \in C(S^1)$. Si T_f es un operador compacto entonces $f \equiv 0$.*

Demostración. Claramente $f \in L^2(S^1)$. Entonces, $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ converge en norma L^2.
Para $k \geq 0$, tenemos que

$$m_f(z^k) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^{n+k} \Rightarrow T_f(z^k) = P \circ m_f(z^k) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} z^m$$

Entonces la matriz Toeplitz $[T_f] = (b_{i,j})$ tiene entradas constantes a_{i-j} en las diagonales. En consecuencia, para un $n \in \mathbb{Z}$ fijo, tenemos que $b_{i+n,i} = a_n$.
Como T_f es un operador compacto, $b_{i+n,i} \to 0$ cuando $i \to \infty$. Por lo tanto $a_n = 0$; implicando, $f \equiv 0$.

$\square$

Ahora, tenemos todas las herramientas para probar nuestro teorema principal. La prueba básicamente sigue el mismo patron que en el caso del espacio Bergman.

Teorema 3.3.4. *El C^*-algebra Hardy-Toeplitz $\mathcal{T}(S^1)$ tiene como ideal conmutador $\mathcal{K}(H^2(S^1))$ (operadores compactos), y existe un C^*-isomorfismo*

$$\nu : \mathcal{T}(S^1)/\mathcal{K}(H^2(S^1)) \to C(S^1)$$

tal que para todo $f \in C(S^1)$,

$$\nu(T_f + \mathcal{K}(H^2(S^1))) = f$$

Demostración. El conmutador

$$[T_f, T_g] := T_f T_g - T_g T_f = (T_f T_g - T_{fg}) - (T_g T_f - T_{gf})$$

es un operador compacto por el Corolario 3.3.2 .
Entonces, el ideal conmutador $\mathcal{T}'(S^1)$ generado por los conmutadores $[T_f, T_g]$ esta contenido en $\mathcal{K}(H^2(S^1)))$
Sabemos que $\mathcal{T}(S^1)$ no es conmutativo, entonces $\mathcal{T}'(S^1) \neq 0$
Como $\mathcal{T}(S^1)$ actúa irreducíblemente sobre $H^2(S^1)$ y por el Corolario 2 de [Arv, p. 18] , $\mathcal{K}(H^2(S^1)) \subseteq \mathcal{T}(S^1)$. Entonces $\mathcal{T}'(S^1)$ es un ideal no zero

$\mathcal{K}(H^2(S^1)))$. Por el Corolario 1 of [Arv, p. 18], $\mathcal{T}'(S^1) = \mathcal{K}(H^2(S^1))$.
Luego,

$$\rho : C(S^1) \to \mathcal{T}(S^1)/\mathcal{K}(H^2(S^1)) \ , \ \rho(f) := T_f + \mathcal{K}(H^2(S^1))$$

es un C^*-homomorfismo (bien definido) que es sobreyectivo.
Ahora tome $f \in Ker(\rho)$ i.e. T_f es un operador compacto. Por el Teorema 3.3.3, f se anula sobre S^1. Por lo tanto ρ es inyectivo; implicando, que es un $C*$-isomorfismo.

$\square$

Capítulo 4

Operadores Bergman-Toeplitz sobre la Bola Unitaria B_n

En los capítulos siguientes nos enfocaremos nuestra atención en la discusión de operadores Fredholm y sus índices.

Este capítulo sigue la linea de razonamiento del Capítulo 2. La bola unitaria es la generalización natural del unitario y probaremos que para este caso el algebra de operadores Bergman-Toeplitz tiene básicamente la misma estructura que en el caso uno-dimensional. Note que la bola unitaria tiene una buena frontera, que nos permite usar funciones pico y obtener una clara caracterización del ideal conmutador. Nos podemos preguntar que tanto podemos extender el uso de este argumento para obtener resultados paralelos entre el disco unitario y la bola unitario. La respuesta a esta pregunta puede ser encontrada en el contexto del apéndice, el caso del polidisco, para el cual la frontera no es buena. El último corolario de este capítulo es fundamental para nuestra discusión del índice de operadores Fredholm desarrollado en el capítulo 6.

Mucha de las aserciones en este capítulo son simples generalizaciones del caso uno-dimensional (vea el capítulo 2); por lo tanto, omitiremos algunas pruebas que solo requieren repetir un argumento previo.

4.1. El Espacio de Bergman $H^2(B_n)$

Considere $L^2(B_n)$ el espacio de Lebesgue de funciones cuadrado-integrables sobre B_n con medida de Lebesgue $dV(z)$, y producto interno,

$$\langle f, g\rangle = \int_{B_n} \overline{f(z)} g(z) dV(z)$$

Lema 4.1.1. *Sean $\alpha \neq \beta$ multi-índices no-negativos, entonces*

$$\langle z^\alpha, z^\beta \rangle = 0$$

Demostración. Asumamos por simplicidad que $\alpha_1 \neq \beta_1$ y denote $w = (z_2, ..., z_n)$, $\alpha_0 = (\alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\beta_0 = (\beta_2, ..., \beta_n)$ entonces

$$\int_{B_n} \bar{z}^\alpha z^\beta dV(z) = \int_{|w|\leq 1} \bar{w}^{\alpha_0} w^{\beta_0} \left(\int_{|z_1| \leq \sqrt{1-|w|^2}} \bar{z_1}^{\alpha_1} z_1^{\beta_1} dV(z_1) \right) dV(w)$$

Claramente

$$\int_{|z_1| \leq \sqrt{1-|w|^2}} \bar{z_1}^{\alpha_1} z_1^{\beta_1} dV(z_1) = 0$$

Por lo tanto el lema se sigue.

□

Proposición 4.1.2. *Sea $K \subset B_n$ un conjunto compacto, entonces el mapeo restricción*

$$R : L^2(B_n) \cap O(B_n) \to C(K), \ R(f) = f|_K$$

es continuo.

Demostración. Aplicando el Lema 4.1.1 y usando el mismo argumento que la prueba de la Proposición 2.1.1.

□

Proposición 4.1.3. *$L^2(B_n) \cap O(B_n)$ es un subespacio cerrado de $L^2(B_n)$*

Definición 4.1.4. $H^2(B_n) := L^2(B_n) \cap O(B_n)$ es llamado espacio de Bergman.

Proposición 4.1.5. *Denote $c_\alpha = \frac{1}{\|z^\alpha\|_2}$ para cualquier multi-índice no-negativo α y defina $\phi_\alpha(z) := c_\alpha z^\alpha$. Entonces $\{\phi_\alpha\}$ es una base ortonormal de $H^2(B_n)$.*

Demostración. Por el Lema 4.1.1 tenemos que $\{\phi_\alpha\}$ es un conjunto ortogonal. Ahora tomemos que $f \in H^2(B_n)$ con

$$f(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{\infty} d_\alpha z^\alpha$$

convergiendo normalmente sobre B_n. Aplicando un argumento similar a el caso uno-dimensional podemos mostrar que

$$f(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{\infty} d_\alpha z^\alpha$$

converge en norma $L^2(B_n)$.
Por lo tanto $\{\phi_\alpha\}$ es una base ortonormal de $H^2(B_n)$.

□

Definición 4.1.6. La proyección ortogonal $P : L^2(B_n) \to H^2(B_n)$ es llamado proyección Bergman.

Nota 4.1.1. Para cualquier $z \in B_n$ fijo; usando la Proposición 4.1.2, tenemos que el mapeo evaluación $eval : H^2(B_n) \to \mathbb{C}$, $eval(f) = f(z)$ es continuo. Entonces, por el Teorema Riesz-Frechet, existe $K_z \in H^2(B_n)$ tal que

$$f(z) = \langle K_z, f\rangle = \int_{B_n} \overline{K_z(w)} f(w) dV(w) \ \forall f \in H^2(B_n)$$

Definición 4.1.7. $K(z, w) := \overline{K_z(w)}$ es llamado Kernel de Bergman.

Nota 4.1.2. Es posible encontrar una representación explícita del kernel de Bergman para la bola unitaria (vea por ejemplo [Ran, p. 183]). El kernel de Bergman para la bola unitaria es dado por

$$K(z, w) = \frac{n!}{\pi^n (1 - \langle z, w\rangle)^{n+1}}$$

4.2. Operadores Toeplitz en $H^2(B_n)$

En esta sección todavía podemos usar la mayoría de los argumentos usados en el caso uno-dimensional y tenemos generalizaciones de los resultados obtenidos in el capítulo 2. Sin embargo, en algunos casos nuevos problemas técnicos surgen por la dimensión.

Definición 4.2.1. Sea f una función continua sobre $\bar{B_n}$. El operador multiplicación con símbolo f, denotado por $m_f : L^2(B_n) \to L^2(B_n)$ esta definido como $m_f(g) := fg$

Nota 4.2.1. $\|m_f(g)\|_2 = \|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2 \Rightarrow \|m_f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$.

Nota 4.2.2. Como $\langle m_f(h), g\rangle = \langle h, \bar{f}g\rangle$ para todo $h, g \in L^2(B_n)$, entonces ${m_f}^* = m_{\bar{f}}$

Definición 4.2.2. Sea f una función continua sobre $\bar{B_n}$. El operador Bergman-Toeplitz con símbolo f, denotado por $T_f : H^2(B_n) \to H^2(B_n)$, esta definido por $T_f(g) := P \circ m_f(g)$

Proposición 4.2.3. *Para todo $f \in C(\bar{B_n})$, tenemos*
(i) $\|T_f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$
(ii) ${T_f}^* = T_{\bar{f}}$
Si $\varphi \in A(B_n) := O(B_n) \cap C(\bar{B_n})$ *, entonces*
(iii) $T_f T_\varphi = T_{f\varphi}$
(iv) $T_{\bar{\varphi}} T_f = T_{\bar{\varphi} f}$

Definición 4.2.4. El C^*-algebra Bergman-Toeplitz sobre B_n esta definido como el C^*-algebra unitario $\mathcal{T}(B_n) := C^*\langle T_f : f \in C(\bar{B_n})\rangle$ generado por todos los operadors Toeplitz con símbolos continuos.

Proposición 4.2.5. $\mathcal{T}(B_n) = C^*\langle T_p : p \in P(\mathbb{C}^n)\rangle$*, donde* $P(\mathbb{C}^n)$ *es el conjunto de polinomios sobre* $\mathbb{C}^n$

Proposición 4.2.6. T_p *es un operador no-normal para cualquier polinomio no constante* p*. Además,* $\mathcal{T}(B_n)$ *es un* C^**-algebra no conmutativo.*

Demostración. Un argumento similar al usado en la Proposición 2.2.6 funciona aquí, pero necesitamos aplicar el Lema 4.1.1 y usar la base ortonormal $\{\phi_\alpha\}$.

$\square$

Proposición 4.2.7. *$\mathcal{T}(B_n)$ actúa irreducíblemente sobre $H^2(B_n)$*

Demostración. Sea $B : H^2(B_n) \to H^2(B_n)$ una proyección ortogonal que conmuta con $\mathcal{T}(B_n)$. Entonces $T_f B = BT_f$ sobre $H^2(B_n)$ para todo $f \in C(B_n)$.
Note que $pB(1) \in H^2(B_n)$ para cualquier $p \in A(B_n)$, entonces para cualquier $p, q \in A(B_n)$

$$B(q) = B(q.1) = B(T_q(1)) = T_q B(1) = P(qB(1)) = qB(1)$$

$$\begin{aligned}\langle B(1), \bar{p}q\rangle &= \langle pB(1), q\rangle = \langle T_p(B(1)), q\rangle = \langle (T_p \circ B)(1), q\rangle \\ &= \langle (B \circ T_p)(1), q\rangle = \langle B(p), q\rangle\end{aligned}$$

$$\langle B(p), q\rangle = \langle p, B(q)\rangle = \langle p, qB(1)\rangle = \langle \overline{B(1)}, \bar{p}q\rangle \;\Rightarrow\; \langle B(1) - \overline{B(1)}, \bar{p}q\rangle = 0$$

Como el algebra generado por $\{\bar{p}q : p, q \in P(\mathbb{C}^n) \subset A(B_n)\}$ es denso en $C(B_n)$ y $C(B_n)$ es denso en $L^2(B_n)$, el algebra generado por $\{\bar{p}q : p, q \in P(\mathbb{C}^n)\}$ es denso en $L^2(\partial B_n)$. En consecuencia,

$$B(1) - \overline{B(1)} = 0$$

Denote $f = B(1)$, entonces $f = \bar{f}$,i.e., f es real sobre ∂B_n. Por lo tanto, $f \equiv a$ es una función real constante.
Como $B^2 = B$ y $f = B(1)$ es constante, $B(1) = B^2(1) = B(B(1)) = B(a.1) = a.B(1)$ implica $B(1) = 1$ o 0.
Por lo tanto $B = 0$ o $B = Id$. □

4.3. Caracterización del Algebra de Toeplitz $\mathcal{T}(B_n)$

En esta sección nos enfocamos en identificar el ideal conmutador de $\mathcal{T}(B_n)$. Introducimos el concepto de operador Hankel el cual es una especie de "complemento ortogonal"de un operador Toeplitz. Propiedades de operadores Hankel implican propiedades de operadores Toeplitz, y vice versa. Para nuestros propósitos usaremos solo un resultado sobre operadores Hankel, pero estos operadores son estudiados tanto como los operadores Toeplitz (e.g. vea [Pel]).

Lema 4.3.1. *Sea $\{K_m\}$ la exhaución de B_n por subconjuntos compactos donde*
$K_m = \overline{B}(0, 1 - \frac{1}{m})$. Entonces para cada $K = K_m$, la familia

$$\mathcal{F} = \{h|_K : h \in H^2(B_n), \|h\|_2 \leq 1\}$$

tiene cerradura compacta.

Proposición 4.3.2. *Sea $f \in C(\bar{B}_n)$ con $f|_{\partial B_n} = 0$. Entonces T_f es un operador compacto.*

Nota 4.3.1. Para cada $a \in B_n$ existe un automorfismo (transformación de *Möbius*) de B_n satisfaciendo:
(1) $\varphi_a(a) = 0$ y
(2) $\varphi_a \circ \varphi_a = Id_{B_n}$
Además para cada $z_0 \in \partial B_n$ tenemos

$$\lim_{a \to z_0} \varphi_a(z) = z_0 \; \forall z \in B_n$$

(vea [Rd2]).

Proposición 4.3.3. *Sea $f \in C(\bar{B}_n)$. Entonces el operador Hankel*

$$H_f := (I - P)m_f : H^2(B_n) \to L^2(B_n)$$

es un operador compacto.

Demostración. Para cualquier $z_0 \in \partial B_n$ tenemos que

$$f \circ \varphi_a \to f(z_0) \text{ uniformemente cuando } a \to z_0$$

En particular

$$f \circ \varphi_a \to f(z_0)$$

en norma $L^2(B_n)$. Entonces

$$(I - P)(f \circ \varphi_a) \to 0$$

en norma $L^2(B_n)$ porque $I - P$ es continuo.
Por lo tanto, por el Teorema 7 de [StZ] H_f es un operador compacto. □

Corolario 4.3.4. *Sea f, $g \in C(\bar{B}_n)$, entonces $T_f \circ T_g - T_{fg}$ es un operador compacto.*

Las funciones pico, definidas en el próximo párrafo, juegan un rol fundamental en esa sección. Estas funciones son muy útiles para obtener estimaciones de normas. La existencia de las funciones pico depende del dominio y es un resultado bien conocido en la teoría de funciones de variables complejas.

Definición 4.3.5. Sea $w \in \partial B_n$. $h_w \in A(B_n)$ es una función pico si $|h_w(z)| < 1$ para cualquier $z \in \bar{B_n}$ con $z \neq w$, y $h_w(w) = 1$

Lema 4.3.6. *Existe una función*

$$\partial B_n \to A(B_n) \subset H^2(B_n)$$

$$w \mapsto h_w$$

donde h_w es una función pico en w.

Demostración. Es claro que B_n es un dominio estrictamente (fuertemente) pseudo-convexo con frontera C^∞. El lema se sigue por el Teorema 5.2.15 de [Kra, p. 188].

□

Nota 4.3.2. Por la continuidad de h_w y su propiedad de función pico en w, para cada vecindad abierta $U \subset \bar{B_n}$ de $w \in \partial B_n$ existe una vecindad abierta $V \subset U$ de w relativamente compacta en U tal que

$$\sup_{z \in B_n \setminus U} |h_w(z)| < \inf_{z \in V} |h_w(z)|$$

Proposición 4.3.7. *Para todo $f \in C(\bar{B_n})$ y todo $w \in \partial B_n$*

$$\frac{\int_{B_n} f(z)|h_w(z)|^{2n} dV(z)}{\int_{B_n} |h_w(z)|^{2n} dV(z)} \to f(w) \ \textit{cuando} \ n \to \infty$$

Demostración. Podemos asumir que f es una función de valores reales porque podemos repetir el mismo argumento para la parte real e imaginaria de f. También, corrigiendo con una contante, podemos asumir que $f(w) = 0$.
En consecuencia, dado $\epsilon > 0$ existe una vecindad abierta $U \subset \bar{B_n}$ de $w \in \partial B_n$ tal que $\sup_{z \in U} |f(z)| < \epsilon$. Por la nota anterior, existe una vecindad abierta $V \subset U$ de w relativamente compacta en U tal que

$$\sup_{z \in B_n \setminus U} |h_w(z)| < \inf_{z \in V} |h_w(z)|$$

$$\left|\int_{B_n} f(z)|h_w(z)|^{2n}dV(z)\right| \leq \int_U |f(z)||h_w(z)|^{2n}dV(z)+\int_{B_n\setminus U} |f(z)||h_w(z)|^{2n}dV(z)$$
$$< \epsilon \int_{B_n} |h_w(z)|^{2n}dV(z) + Vol(B_n \setminus U)\|f\|_\infty \sup_{z\in B_n\setminus U} |h_w(z)|^{2n}$$

Por otro lado

$$\int_{B_n} |h_w(z)|^{2n}dV(z) \geq \int_V |h_w(z)|^{2n}dz \geq Vol(V) \inf_{z\in V} |h_w(z)|^{2n}$$

Entonces

$$\left|\frac{\int_{B_n} f(z)|h_w(z)|^{2n}dV(z)}{\int_{B_n} |h_w(z)|^{2n}dV(z)}\right| < \epsilon + \frac{Vol(B_n \setminus U)}{Vol(V)}\|f\|_\infty \left(\frac{\sup_{z\in B_n\setminus U} |h_w(z)|}{\inf_{z\in V} |h_w(z)|}\right)^{2n}$$

En consecuencia

$$\frac{\sup_{z\in B_n\setminus U} |h_w(z)|}{\inf_{z\in V} |h_w(z)|} < 1 \Rightarrow \frac{\int_{B_n} f(z)|h_w(z)|^{2n}dV(z)}{\int_{B_n} |h_w(z)|^{2n}dV(z)} \to 0 \text{ cuando } n\to\infty$$

□

Corolario 4.3.8. *Sea $f \in C(\bar{B_n})$ una función de valores reales no-negativos. Entonces para cada $w \in \partial B_n$ existe una sucesión $(h_n) \subset H^2(B_n)$ donde*

$$h_n(z) := \frac{{h_w}^n(z)}{\|{h_w}^n\|_2}$$

tal que

$$\|fh_n\|_2 \to f(w) \text{ cuando } n \to \infty$$

Proposición 4.3.9. *Sea p un polinomio en k variables no-conmutativas. Entonces*

$$\|p(T_{f_1}, ..., T_{f_k})\|_{op} \geq \|p(f_1|_{\partial B_n}, ..., f_k|_{\partial B_n})\|_\infty$$

donde $f_j \in C(\bar{B_n})$ for $1 \leq j \leq k$

Demostración. Sea $(b_1, ..., b_k) \in Im(f_1|_{\partial B_n}, ..., f_k|_{\partial B_n})$. Defina

$$f(z) = \left(\sum_{j=1}^{k} |f_j(z) - b_j|^2\right)^{1/2} \in C(\bar{B_n})$$

Claramente f tiene un cero en ∂B_n. Usando el corolario anterior, dado $\epsilon > 0$ existe $h \in H^2(B_n)$ con normal igual a 1 tal que $\|fh\|_2 < \epsilon$. Entonces para cualquier $1 \leq j \leq k$

$$\|T_{f_j}(h) - b_j h\|_2{}^2 = \|P(f_j h - b_j h)\|_2{}^2 \leq \|f_j h - b_j h\|_2{}^2 \leq \|fh\|_2{}^2 < \epsilon^2$$

Por lo tanto

$$\|T_{f_j}(h) - b_j h\|_2 < \epsilon \text{ para todo } 1 \leq j \leq k$$

Considere los operadores de la forma $T_{f_{j_1}}...T_{f_{j_m}} - b_{j_1}...b_{j_m}$ donde $1 \leq j_l \leq k$ para $1 \leq l \leq m$. Note que

$$T_{f_{j_1}}...T_{f_{j_m}} - b_{j_1}...b_{j_m} = \sum_{l=1}^{m} T_{f_{j_1}}...T_{f_{j_{l-1}}}(T_{f_{j_l}} - b_{j_l})b_{j_{l+1}}...b_{j_m}$$

Podemos asumir que $\|f_j\|_\infty \leq 1$, asi $|b_j| \leq 1$, para $1 \leq j \leq k$ para reducir los cálculos. Entonces

$$\|T_{f_{j_1}}...T_{f_{j_m}}(h) - b_{j_1}...b_{j_m}h\|_2 \leq \sum_{l=1}^{m} \|T_{f_{j_1}}...T_{f_{j_{l-1}}}(T_{f_{j_l}}(h) - b_{j_l}h)b_{j_{l+1}}...b_{j_m}\|_2$$

$$\leq \sum_{l=1}^{m} \|T_{f_{j_l}}(h) - b_{j_l}h\|_2 \leq m\epsilon$$

Para cualquier $\eta > 0$ podemos escoger $\epsilon > 0$ tal que

$$\|p(T_{f_1}...T_{f_k})(h) - p(b_1, ..., b_k)h\|_2 \leq \eta$$

Usando la desigualdad triangular

$$|p(b_1, ..., b_k)| \leq \|p(T_{f_1}...T_{f_k})(h)\|_2 + \eta \leq \|p(T_{f_1}...T_{f_k})\|_{op} + \eta$$

Como η era arbitrario, tenemos que

$$|p(b_1, ..., b_k)| \leq \|p(T_{f_1}...T_{f_k})\|_{op}$$

Finalmente, como $(b_1, ..., b_k) \in Im(f_1|_{\partial B_n}, ..., f_k|_{\partial B_n})$ era arbitrario, tenemos que

$$\|p(f_1|_{\partial B_n}, ..., f_k|_{\partial B_n})\|_\infty \leq \|p(T_{f_1}, ..., T_{f_k})\|_{op}$$

$\square$

Ahora tenemos toda la maquinaria necesaria para obtener nuestra caracterización del algebra de operadores Toeplitz. De nuevo, básicamente usamos el mismo argumento que el caso uno-dimensional; sin embargo, la prueba de la inyectividad de ρ, definida próximamente, requiere un argumento diferente, el cual es sostenido por la proposición anterior.

Teorema 4.3.10. *El C^*-algebra Bergman-Toeplitz $\mathcal{T}(B_n)$ tiene como ideal conmutador $\mathcal{K}(H^2(B_n))$ (operadores compactos), y existe un C^*-isomorfismo*

$$\nu : \mathcal{T}(B_n)/\mathcal{K}(H^2(B_n)) \to C(\partial B_n)$$

Demostración. El conmutador

$$[T_f, T_g] := T_f T_g - T_g T_f = (T_f T_g - T_{fg}) - (T_g T_f - T_{gf})$$

es un operador compacto porque cada semi-conmutador es un operador compacto.
Entonces, el ideal conmutador $\mathcal{T}'(B_n)$ generado por los conmutadores $[T_f, T_g]$ esta contenido en $\mathcal{K}(H^2(B_n)))$
Sabemos que $\mathcal{T}(B_n)$ no es conmutativo, entonces $\mathcal{T}'(B_n) \neq 0$
Como $\mathcal{T}(B_n)$ actúa irreducíblemente sobre $H^2(B_n)$ y por el Corolario 2 de [Arv, p. 18], $\mathcal{K}(H^2(B_n)) \subseteq \mathcal{T}(B_n)$. Entonces $\mathcal{T}'(B_n)$ es un ideal no-zero de $\mathcal{K}(H^2(B_n)))$. Por el Corolario 1 de [Arv, p. 18], $\mathcal{T}'(B_n) = \mathcal{K}(H^2(B_n))$.
En consecuencia,

$$\rho : C(\bar{B_n}) \to \mathcal{T}(B_n)/\mathcal{K}(H^2(B_n)) \ , \ \rho(f) := T_f + \mathcal{K}(H^2(B_n))$$

es un C^*-homomorfismo (bien definido) que es sobreyectivo.
Note que el mapeo restricción

$$r : C(\bar{B_n}) \to C(\partial B_n) \ , \ r(f) := f|_{\partial B_n}$$

es un C^*-homomorphism sobreyectivo. En efecto, para cualquier $f \in C(\partial B_n)$ podemos definir

$$\tilde{f}(z) := |z| f(\frac{z}{|z|}) \text{ si } z \neq 0 \text{ y } \tilde{f}(0) := 0$$

Claramente $\tilde{f}(z) \in C(\bar{B_n})$ y $\tilde{f}|_{\partial B_n} = f$.
Si $f \in C(\bar{B_n})$ se anula sobre ∂B_n, entonces T_f es un operator compacto

(por la Proposición 4.3.2). En consecuencia, existe $\bar{\rho}$ un C^*-homomorfismo sobreyectivo tal que $\bar{\rho} \circ r = \rho$.
Ahora tome $f \in Ker(\bar{\rho})$ i.e. $T_{\tilde{f}}$ operador compacto.
Sea $A \in \mathcal{K}(H^2(B_n))$. Entonces A esta en el C^*-ideal generado por los semi-conmutadores; en consecuencia, $A = lim A_n$ donde A_n es una suma finita de operadores de la forma

$$T_{f_1}, ..., T_{f_k}(T_F T_G - T_{FG})T_{g_1}, ..., T_{g_m}$$

Considere el polinomio de variables no-conmutativas con términos de la misma forma que los términos de A_n, i.e., con términos de la forma $x_1 x_2 ... x_k(z_1 z_2 - z_3)y_1 ... y_m$.
Usando la proposición anterior y

$$f_1|_{\partial B_n} ... f_k|_{\partial B_n}(F|_{\partial B_n} G|_{\partial B_n} - F|_{\partial B_n} G|_{\partial B_n})g_1|_{\partial B_n} ... g_m|_{\partial B_n} = 0$$

tenemos que

$$\|\tilde{f}|_{\partial B_n}\|_\infty \leq \|T_{\tilde{f}} + A_n\|_{op}$$

En consecuencia $\|\tilde{f}|_{\partial B_n}\|_\infty \leq \|T_{\tilde{f}} + A\|_{op}$
Como $f \in Ker(\bar{\rho})$, $\tilde{f}|_{\partial B_n} \equiv 0$.
Por lo tanto $f \equiv 0$

□

Corolario 4.3.11. *T_f es Fredholm si y solo si $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial B_n$.*

Demostración. El anterior teorema implica que $f|_{\partial B_n}$ es invertible en $C(\partial B_n)$ si y solo si T_f es invertible módulo operadores compactos. Por lo tanto el corolario se sigue. □

Capítulo 5

Operadores Hardy-Toeplitz sobre la Bola Unitaria $\mathbf{B_n}$

No hay muchas dificultades adicionales en seguir el mismo razonamiento usado en el caso del espacio de Bergman, excepto por la aserción de que los operadores Hankel son compactos. Solo mencionaremos este resultado porque su prueba requiere argumentos sofisticados. Por otro lado, notamos que las algebras de operadores Bergman-Toeplitz y Hardy-Toeplitz sobre la bola unitaria son todavía C^*-isomorfas modulo operadores compactos. En el contexto del teorema espectral podemos todavía calcular el invariante numérico que es invariante bajo perturbaciones compactas, el índice de un operador Fredholm (vea el capítulo 6).

Varias de las aserciones a lo largo de este capítulo son simples generalizaciones de el caso uno-dimensional (vea el capítulo 3); por lo tanto, omitiremos algunas pruebas que solo requieren repetir argumentos usados previamente.

5.1. El Espacio de Hardy $H^2(\partial B_n)$

Considere $L^2(\partial B_n)$ el espacio de Lebesgue de funciones cuadrado-integrables sobre ∂B_n con medida de superficie $d\sigma(z)$, y producto interno,

$$\langle f, g\rangle = \int_{\partial B_n} \overline{f(z)} g(z) d\sigma(z) \tag{5.1.1}$$

Definición 5.1.1. $H^2(\partial B_n)$ definido como la $L^2(\partial B_n)$ cerradura de $\{f|_{\partial B_n} : f \in A(B_n)\}$ es llamado espacio de Hardy sobre B_n.

Definición 5.1.2. La proyección ortogonal $P : L^2(\partial B_n) \to H^2(\partial B_n)$ es llamada proyección de Cauchy-Szëgo.

5.2. Operadores Toeplitz en $H^2(\partial B_n)$

Definición 5.2.1. Para una función continua f sobre ∂B_n, el operador multiplicación con símbolo f, denotado por $m_f : L^2(\partial B_n) \to L^2(\partial B_n)$, esta definido como $m_f(g) := fg$

Nota 5.2.1. $\|m_f(g)\|_2 = \|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$. Por lo tanto $\|m_f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$.

Nota 5.2.2. Como $\langle m_f(h), g\rangle = \langle h, \bar{f}g\rangle$ para todo $h, g \in L^2(B_n)$, entonces ${m_f}^* = m_{\bar{f}}$

Definición 5.2.2. para una función continua f sobre ∂B_n, el operador Hardy-Toeplitz con símbolo f, denotado por $T_f : H^2(\partial B_n) \to H^2(\partial B_n)$, esta definido como $T_f(g) := P \circ m_f(g)$

Proposición 5.2.3. *Para todo $f \in C(\partial B_n)$, tenemos que*
(i) $\|T_f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$
(ii) ${T_f}^* = T_{\bar{f}}$
Si $\varphi \in H^2(\partial B_n) \cap C(\partial B_n)$ *, entonces*
(iii) $T_f T_\varphi = T_{f\varphi}$
(iv) $T_{\bar{\varphi}} T_f = T_{\bar{\varphi} f}$

Definición 5.2.4. El C^*-algebra Hardy-Toeplitz sobre ∂B_n esta definido como el C^*-algebra unitario $\mathcal{T}(\partial B_n) := C^*\langle T_f : f \in C(\partial B_n)\rangle$ generado por todos los operadores Toeplitz con símbolo continuo.

Proposición 5.2.5. $\mathcal{T}(\partial B_n)$ *no es conmutativo.*

Demostración. Como $f(z) = z_1 \in H^2(\partial B_n)$, tenemos que

$$T_f(1) = P(f) = f$$

No es difícil verificar que $\bar{f} = \bar{z_1} \in H^2(\partial B_n)^{\perp}$ pues basta con verificar $\langle \bar{f}, p\rangle = 0$ para cualquier polinomio $p \in P(\mathbb{C}^n)$ porque $P(\mathbb{C}^n)$ es denso en $A(B_n)$.
Entonces tenemos que

$$T_{\bar{f}}(1) = P(\bar{f}) = 0$$

Note que $|f|^2$ no esta en $H^2(\partial B_n)^{\perp}$, porque $\langle |f|^2, 1\rangle = \int_{\partial B_n} |f^2(z)| d\sigma(z) \neq 0$.
En consecuencia

$$T_f T_{\bar{f}}(1) = 0 \; T_{\bar{f}} T_f(1) = T_{\bar{f}}(f) = P(|f|^2) \neq 0$$

Por lo tanto $\mathcal{T}(\partial B_n)$ no es conmutativo.

$\square$

Proposición 5.2.6. *$\mathcal{T}(\partial B_n) = C^*\langle T_p : p \in P(\mathbb{C}^n)\rangle$, donde $P(\mathbb{C}^n)$ es el conjunto de polinomios sobre $\mathbb{C}^n$*

Proposición 5.2.7. *$\mathcal{T}(\partial B_n)$ actúa irreducíblemente sobre $H^2(\partial B_n)$*

Demostración. Sea $B : H^2(\partial B_n) \to H^2(\partial B_n)$ una proyección ortogonal que conmuta con $\mathcal{T}(\partial B_n)$. Entonces $T_f B = B T_f$ sobre $H^2(\partial B_n)$ para todo $f \in C(\partial B_n)$.
Note que $pB(1) \in H^2(\partial B_n)$ para cualquier $p \in P(\mathbb{C}^n)$, entonces para cualquier $p, q \in P(\mathbb{C}^n)$

$$B(q) = B(q1) = B(T_q(1)) = T_q B(1) = P(qB(1)) = qB(1)$$

$$\begin{aligned}\langle B(1), \bar{p}q\rangle = \langle pB(1), q\rangle = \langle T_p(B(1)), q\rangle &= \langle (T_p \circ B)(1), q\rangle \\ &= \langle (B \circ T_p)(1), q\rangle = \langle B(p), q\rangle\end{aligned}$$

$$\langle B(p), q\rangle = \langle p, B(q)\rangle = \langle p, qB(1)\rangle = \langle \overline{B(1)}, \bar{p}q\rangle \;\Rightarrow\; \langle B(1) - \overline{B(1)}, \bar{p}q\rangle = 0$$

Como el algebra generada por $\{\bar{p}q : p, q \in P(\mathbb{C}^n)\}$ es denso en $C(\partial B_n)$ y $C(\partial B_n)$ es denso en $L^2(\partial B_n)$, el algebra generada by $\{\bar{p}q : p, q \in P(\mathbb{C}^n)\}$ es denso en $L^2(\partial B_n)$. En consecuencia,

$$B(1) - \overline{B(1)} = 0$$

Denote $f = B(1)$, entonces $f = \bar{f}$,i.e., f es real sobre ∂B_n.
Usando la fórmula integral de Poisson extendemos f a una función holomorfa sobre B_n (vea [Kra, p. 55])

$$Pf(z) := \int_{\partial B_n} f(w)S(z,w)d\sigma(w)\ \forall z \in B_n$$

define una función holomorfa sobre B_n donde $S(z,w)$ es el kernel de Szego.
Pero nosotros sabemos que f es real sobre ∂B_n, se sigue que Pf es real sobre B_n; entonces, Pf es constante. Por lo tanto $f \equiv a$ es una función constante de valor real.
Como $B^2 = B$ y $B(1) = a$ es constante, entonces

$$a = B(1) = B^2(1) = B(B(1)) = B(a,1) = a.B(1) = a^2$$

Esto implica que $B(1) = 1$ o $B(1) = 0$.
Por lo tanto $B = 0$ o $B = Id$. □

5.3. Caracterización del Algebra de Toeplitz $\mathcal{T}(\mathbb{D})$

Proposición 5.3.1. *Sea $f \in C(\bar{B_n})$. Entonces*

$$H_f := (I - P)m_f : H^2(\partial B_n) \to L^2(\partial B_n)$$

es un operador compacto.

Demostración. Vea el Teorema 4.2.17 of [Upm, p. 253].

□

Corolario 5.3.2. *Sea f, $g \in C(\bar{B_n})$, entonces $T_f \circ T_g - T_{fg}$ es un operador compacto.*

Nota 5.3.1. Recuerde que para cualquier función $g \in A(B_n) = O(B_n) \cap C(\bar{B_n})$, la función restricción $g|_{\partial B_n} \in H^2(\partial B_n)$. Por esta razón vamos a permitir el abuso de notación $A(B_n) \subset H^2(\partial B_n)$ en el siguiente lema.

Lema 5.3.3. *Existe una función*

$$\partial B_n \to A(B_n) \subset H^2(\partial B_n)$$

$$w \mapsto h_w$$

donde h_w es una función pico en w.

Demostración. Es claro que B_n es un dominio estrictamente (fuertemente) pseudo-convexo con frontera C^∞. El teorema se sigue usando el Teorema 5.2.15 de [Kra, p. 188].

□

Nota 5.3.2. Por la continuidad de h_w y su propiedad de función pico en w, para cada vecindad abierta $U \subset \partial B_n$ of $w \in \partial B_n$ existe una vecindad abierta $V \subset U$ de w relativamente compacta en U tal que

$$\sup_{z \in \partial B_n \setminus U} |h_w(z)| < \inf_{z \in V} |h_w(z)|$$

Proposición 5.3.4. *Para todo $f \in C(\partial B_n)$ y todo $w \in \partial B_n$*

$$\frac{\int_{\partial B_n} f(z)|h_w(z)|^{2n} d\sigma(z)}{\int_{\partial B_n} |h_w(z)|^{2n} d\sigma(z)} \to f(w) \text{ cuando } n \to \infty$$

Demostración. El argumento usado en la Proposición 4.3.7 funciona para esta prueba.

□

Corolario 5.3.5. *Sea $f \in C(\partial B_n)$ una función de valores reales no-negativa. Entonces para cada $w \in \partial B_n$ existe una sucesión $(h_n) \subset H^2(\partial B_n)$ donde*

$$h_n(z) := \frac{{h_w}^n(z)}{\|{h_w}^n\|_2}$$

tal que

$$\|f h_n\|_2 \to f(w) \text{ cuando } n \to \infty$$

Proposición 5.3.6. *Sea p un polinomio en k variables no conmutativas. Entonces*

$$\|p(T_{f_1}, ..., T_{f_k})\|_{op} \geq \|p(f_1, ..., f_k)\|_\infty$$

donde $f_j \in C(\partial B_n)$ para $1 \leq j \leq k$

Demostración. El argumento usado en el caso del espacio Bergman puede ser fácilmente adaptada a esta prueba.

□

Teorema 5.3.7. *El C^*-algebra Hardy-Toeplitz $\mathcal{T}(\partial B_n)$ tiene como ideal conmutador $\mathcal{K}(H^2(\partial B_n))$ (operadores compactos), y existe un C^*-isomorfismo*

$$\rho : C(\partial B_n) \to \mathcal{T}(\partial B_n)/\mathcal{K}(H^2(\partial B_n)) \ , \ \rho(f) := T_f + \mathcal{K}(H^2(\partial B_n))$$

Demostración. El conmutador

$$[T_f, T_g] := T_f T_g - T_g T_f = (T_f T_g - T_{fg}) - (T_g T_f - T_{gf})$$

es un operador compacto porque cada semi-conmutador es un operador compacto.
Entonces, el ideal conmutador $\mathcal{T}'(B_n)$ generado por los conmutadores $[T_f, T_g]$ es contenido en $\mathcal{K}(H^2(\partial B_n))$
Sabemos que $\mathcal{T}(\partial B_n)$ no es conmutativo, entonces $\mathcal{T}'(B_n) \neq 0$
Como $\mathcal{T}(\partial B_n)$ actúa irreducíblemente sobre $H^2(\partial B_n)$ y por el Corolario 2 de [Arv, p. 18], $\mathcal{K}(H^2(\partial B_n)) \subseteq \mathcal{T}(\partial B_n)$. Entonces $\mathcal{T}'(B_n)$ es un ideal no-cero de $\mathcal{K}(H^2(\partial B_n))$. Por el Corolario 1 de [Arv, p. 18], $\mathcal{T}'(B_n) = \mathcal{K}(H^2(\partial B_n))$.
En consecuencia,

$$\rho : C(\partial B_n) \to \mathcal{T}(\partial B_n)/\mathcal{K}(H^2(\partial B_n)) \ , \ \rho(f) := T_f + \mathcal{K}(H^2(\partial B_n))$$

es un C^*-homomorfismo (bien definido) que es sobreyectivo.

Sea $f \in Ker(\rho)$ i.e. T_f es un operador compacto.
Sea $B \in \mathcal{K}(H^2(\partial B_n))$. Entonces B esta en el C^*-ideal generado por los semi-conmutadores; por lo tanto, $A = lim A_n$ donde A_n es una suma finita de operadores de la forma

$$T_{f_1}, ..., T_{f_k}(T_F T_G - T_{FG}) T_{g_1}, ..., T_{g_m}$$

Considere el polinomio de variables no-conmutativas con términos de la misma forma que los términos de A_n, i.e., con términos de la forma $x_1 x_2 ... x_k (z_1 z_2 - z_3) y_1 ... y_m$.
Usando la proposición anterior y

$$f_1 ... f_k (FG - FG) g_1 ... g_m = 0$$

tenemos

$$\|f\|_\infty \leq \|T_f + A_n\|_{op}$$

En consecuencia $\|f\|_\infty \leq \|T_f + A\|_{op}$
Como $f \in Ker(\rho)$, tenemos que $f \equiv 0$. $\square$

Corolario 5.3.8. *T_f es Fredholm si y solo si $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial B_n$.*

Demostración. La prueba es la misma que en el *Corolario* 4,4,6. $\square$

Capítulo 6

Aplicación: Un Teorema de Índices para Operadores Toeplitz

La lectura de [StZ] ha sido la motivación para este capítulo. En este capítulo mostraremos un teorema de índices para operadores Bergman-Toeplitz y Hardy-Toeplitz sobre la bola unitaria. En dimensión uno, este teorema nos da una relación entre el índice (analítico) de un operador Freholm-Toeplitz y el número de vueltas de su símbolo. Sucede que en dimensiones mayores que uno el índice de un operador Toeplitz (con símbolo scalar) es cero. Comenzaremos dando las propiedades básicas de operadores Fredholm y de los índices de estos operadores. La prueba de estos resultados pueden ser encontrados en [BsB] y [BoS].

Teorema 6.0.9 (Teorema de Atkinson)**.** *El espacio de operadores Fredholm es cerrado bajo la composición, la operación adjunto y la adición de operadores compactos.*

Corolario 6.0.10. *Sean A, B operadores Fredholm y K un operador compacto, entonces*
(i) $Ind(A^*) = -Ind(A)$
(ii) $Ind(AB) = Ind(A) + Ind(B)$
(iii) $Ind(A + K) = Ind(A)$

Teorema 6.0.11 (Teorema de Dieudonne)**.** *Sea $\mathcal{F}$ el espacio de operadores Fredholm. El índice es constante sobre cada componente conexa de $\mathcal{F}$.*

Corolario 6.0.12. *Sea D la bola unitaria B_n o ∂B_n. Entonces, el índice del operador (Hardy or Bergman)-Toeplitz T_{f_t} sobre B_n es constante bajo la homotopía*

$$f_t : D \to \mathbb{C}$$

donde f_t no se anula en ∂B_n.

Demostración. La hipósesis que f_t no se anula ∂B_n garantiza que los operadores Toeplitz T_{f_t} son Fredholm. En consecuencia la homotopía, f_t define un camino continuo

$$t \mapsto T_{f_t}$$

en $\mathcal{F}$ porque la norma de un operador Toeplitz es menor que la norma del infinito de su símbolo.
Por lo tanto, la prueba del corolario se sigue por el Teorema de Dieudonne. □

Lema 6.0.13. *Sea $f(z) = z^m \in C(S^1)$. Entonces $Ind(T_f) = -m$*

Demostración. Suponga que m es no-negativo. Para cualquier $h \in H^2(S^1)$ con $h = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ en norma L^2, tenemos que

$$z^m h = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{m+j}$$

$$T_f(h) = P(z^m h) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{m+j}$$

En consecuencia $dim(Ker(T_f)) = 0$ y $dim(Coker(T_f)) = m$. Por lo tanto $Ind(f) = -m$.
Si m es negativo, $f(z) = \bar{z}^{-m}$. Por la parte (i) en el Corolario 6.0.10 tenemos que $Ind(T_f) = -(m) = -m$. □

Teorema 6.0.14. *Sea $f \in C(\partial B_n)$ y $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \partial B_n$. Entonces*

$$Ind(T_f) = -wind(f) \text{ if } n = 1$$

y

$$Ind(T_f) = 0 \text{ if } n > 1$$

Demostración. Suponga que $n = 1$. Sea m el número de vueltas de f. Entonces f es homotópico a z^m con imagen en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Como cualquiera de las funciones (o caminos) f_t en la homotopía no toma el valor cero, T_{f_t} es Fredholm para todo t.
Por otro lado, por el Corolario 6.0.12 el índice de T_f es invariante bajo la homotopía anterior. Esto significa que

$$Ind(T_f) = Ind(T_{z^m})$$

Por lo tanto $Ind(T_f) = -m$.
Si $n > 1$, $\partial B_n = S^{2n-1}$ es simplemente conexo. Note que usando la homotopía radial tenemos que $f : S^{2n-1} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es homotópica a $g(z) := \frac{f(z)}{|f(z)|}$.
Entonces tenemos que

$$g : S^{2n-1} \to S^1$$

y

$$p : \mathbb{R} \to S^1$$

son espacios cubrimiento de S^1.
Por la Proposición 1.33 de [Htc] existe un levantamiento $\tilde{g} : S^{2n-1} \to \mathbb{R}$ de g porque

$$g_*(\pi_1(S^{2n-1})) = \{0\} \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R})) = \{0\}$$

Claramente $\tilde{g}$ es homotópico a la función constante cero. Entonces $g : S^{2n-1} \to S^1$ es homotópico a una función constante $a \in S^1$.
Además, $f : S^{2n-1} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es homotópico a la función constante a.
Por el Corolario 6.0.12, tenemos $Ind(T_f) = Ind(T_a) = 0$.

□

Ahora daremos un teorema de índice para operadores Bergman-Toeplitz (que son Fredholm) que es similar al resultado obtenido para el caso de espacio de Hardy.

Lema 6.0.15. *Sea $f(z) = z^m \in C(\bar{\mathbb{D}})$. Entonces $Ind(T_f) = -m = -wind(f|_{S^1})$*

Demostración. Aplique la misma idea que el lema anterior.

□

Teorema 6.0.16. *Sea $f \in C(\bar{B_n})$ y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial B_n$. Entonces*

$$Ind(T_f) = -wind(f|_{S^1}) \ \textit{si } n = 1$$

y

$$Ind(T_f) = 0 \ si \ n > 1$$

Demostración. Suponga que $n = 1$. Sea m el número de vueltas de $f|_{S^1}$. Entonces existe una homotopía f_t con imagenes en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entre $f|_{S^1}$ y z^m (como función definida sobre S^1). Podemos extender la homotopía f_t to g_t una homotopía sobre $\bar{\mathbb{D}}$ tal que $g_t|_{S^1} = f_t$. Esta homotopía esta definida como

$$g_t(z) := |z| f_t(\frac{z}{|z|}) \text{ si } z \neq 0$$

$$= 0 \text{ si } z = 0$$

Como cualquiera de las funciones (o caminos) $g_t|_{S^1} = f_t$ en la homotopía no toma el valor cero, T_{g_t} es un operador Fredholm para todo t.
Como $g_0(z) = f(z)$ y $g_1(z) = z^m \ \forall z \in S^1$,

$$Ind(T_{g_0}) = Ind(T_f) \text{ y } Ind(T_{g_1}) = Ind(T_{z^m})$$

Por Corolario 6.0.12 y el lema anterior, tenemos que $Ind(T_f) = -m$.
Si $n > 1$ $\partial B_n = S^{2n-1}$ es simplemente conexo. Como en la prueba del teorema precedente, existe una homotopía $f_t : S^{2n-1} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entre $f|_{S^{2n-1}}$ y $f(p)$ donde p es cualquier punto en S^{2n-1}.
Podemos extender la homotopía f_t a g_t, una homotopía sobre $\bar{B}_n$ tal que $g_t|_{S^{2n-1}} = f_t$ como arriba.
Se sigue que

$$Ind(T_f) = Ind(T_{f(p)}) = 0$$

□

Capítulo 7

Apéndice

En lo que sigue mencionaremos algunos resultados (no cubiertos en este trabajo) y referencias en donde estas aserciones están demostradas.
Para calcular el índice de un operador Toeplitz sobre $\Delta(0,1) \subset \mathbb{C}^n$ para $n > 1$ necesitamos caracterizar los operadores Fredholm-Toeplitz.
Para el caso del espacio de Hardy y para $n = 2$, tenemos que

Corolario 7.0.17. *Sea $f \in C(T^2)$. Entonces T_f es Fredholm sobre $H^2(T^2)$ si y solo si*

$$f(z_1, z_2) \neq 0 \ \forall (z_1, z_2) \in T^2$$
$$wind_1(f) = wind_2(f) = 0$$

donde $wind_j(f)$ es el número de vueltas de la función obtenida fijando la variable j.
Además, si T_f es Fredholm entonces $Ind(T_f) = 0$.

La prueba de este corolario puede ser encontrada en [BoS, p. 353].

Por el caso del espacio Bergman, asumiendo compacidad del operador Hankel H_f y T_f Fredholm, tenemos un teorema de índice análogo al de la bola unitaria (vea [StZ]).

La anulación de los índices de los operadores Fredholm Toeplitz en dominios de dimensión alta es consecuencia de nuestro enfoque en operadores Toeplitz con símbolos que son funciones escalares. En estos dominios, los operadores Toeplitz con símbolos que son funciones matriciales pueden tener índices no nulos (vea [Upm] para los detalles).

Para C^*-algebras cuyos ideales conmutadores no son contenidos en el ideal de operadores compactos, puede ser útil generalizar el índice de un operador Fredholm a un índice que vive en la K-teoría de un C^*-algebra. Algunos detalles son encontrados en [Upm, Ch. 5].

Bibliografía

[Arv] Arveson,William., *An Invitation to C*-algebras*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[BsB] Boos, B., Bleecker D.D., *Topology and Analysis: Atiyah-Singer. Index formula Gauge theoretic Physics*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[BoS] Böttcher, A., Silbermann B., *Analysis of Toeplitz Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Dou] Douglas, Ronald G., *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, New York, 1972.

[Htc] Hatcher, Allen., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Hof] Hoffman, K., *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.

[Kra] Krantz, Steven G., *Function Theory of Several Complex Variables*, Wiley, New York, 1982.

[Pel] Peller V., *Hankel Operators and Their Applications*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[Ran] Range, Michael R., *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[RRo] Rosenblum M., Rovnyak J., *Hardy Classes and Operator Theory*, Oxford University Press, New York, 1985.

[Roy] Royden, H.L., *Real Analysis*, Prentice-Hall, New York, 1988.

[Rud] Rudin,W., *Function Theory in Polydiscs*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[Rd2] Rudin,W., *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer, Berlin, 1980.

[Rd3] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[StZ] Stroethoff Karel; Zheng Dechao. *Toeplitz and Hankel Operators on Bergman Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.329, No.2. (Feb., 1992), pp.773-794.

[Upm] Upmeier, Harald., *Toeplitz Operators and Index Theory in Several Complex Variables*, Operator Theory; Vol.81, *Birkhäuser*, Basel, 1996.

[Yng] Young,N., *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, New York, 1988.

[Zhu] Zhu, K., *Operator Theory in Function Spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1990.