UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

UNIDAD DE POSGRADO

K – Teoría de C* - Algebras

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magister en Matemática Pura

AUTOR

Wilfredo Mendoza Quispe

Lima – Perú

2014

K-Teoría de C^*-álgebras

Autor: Wilfredo Mendoza Quispe.

Tesis presentada a consideración del jurado examinador nombrado por la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos como parte de los requisitos para obtener el grado académico de **Magister en Matemática Pura**.

Aprobado por:

. . . .

Dr. Alfonzo Pérez Salvatierra

Presidente

. . . .

Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia

Miembro

. . . .

Mg. Tomás Alberto Núñez Lay

Miembro

. . . .

Mg. Mario Enrique Santiago Saldaña

Miembro

. . . .

Dr. Agripino García Armas

Miembro Asesor

Dedicatoria

A la memoria de mis padres que
fueron para mí ejemplos de vida.

Agradecimientos

- A Dios,, por derramar sus bendiciones en mi persona dándome vida, salud y perseverancia, y consiguiendo así, mi objetivo.

- A mi maestro, el Dr. Agripino García Armas por su valiosa orientación y supervisión en la realización de la tesis; en mucho debo sus aportes como investigador y como hombre probo en su relación humana. De él tengo una deuda eterna, del maestro, del académico y del amigo.

- Agradezco a mi esposa e hijas por la comprensión al haberles quitado el invalorable tiempo para desarrollar esta tesis.

- A los profesores de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM, que a través del tiempo han contribuido en mi formación académica.

- A todos las personas que directa o indirectamente, han motivado para la culminación de este trabajo.

Índice general

Índice de figuras

RESUMEN

El objetivo principal de esta tesis es calcular la K-Teoría de las C^*-Álgebras y con aplicación al cálculo de la K-Teoría del Álgebra de Cuntz y Álgebra de Toeplitz mediante la K-teoría de las C^*-Álgebras de grafos dirigidos.

Palabras claves: C^*-álgebras, K-Teoría algebraica, Álgebra de Grafos, Álgebra de Cuntz, álgebra de Toeplitz.

ABSTRACT

The main objective of this thesis is calculate the K-theory of C^*-Algebras, and with application to the calculation of the K-theory of algebra of Toeplitz and algebra of Cuntz by means of K-theory of C^*-Algebras of directed graphs.

Keywords: C^*-álgebras, K-Theory algebraic, Graph Algebras, Cuntz Algebra, Toeplitz algebra.

INTRODUCCIÓN

La K-teoría fué desarrollada por Atiyah-Hirzebruck en el año 1960 basado en los trabajos de Grothendieck sobre geometría algebraica.

A principios del año 1970 la K-teoría fué introducida como una herramienta en el estudio de C^*-álgebras. Cuntz en 1977 introduce una clase de C^*-álgebras conocida como el álgebra de Cuntz y otra C^*-álgebra también importante como el álgebra de Toeplitz. En el primer capítulo se hace una breve revisión de C^*-álgebra y se estudia la construcción de Gelfand, Naimark, Segal.

En el segundo capítulo se describe el comportamiento de las C^*-álgebras de grafos dirigidos.

En este trabajo nos centramos en desarrollar la K-teoría de C^*-álgebras que consiste en asociar a cada C^*-álgebra A dos grupos abelianos $K_0(A)$ y $K_1(A)$ los cuales reflejan propiedades importantes de A, el desarrollo de todo esto se realiza en el tercer capítulo.

El cuarto capítulo contiene la demostración de un resultado fundamental: el K_0-grupo de un C^*-álgebra A es isomorfico al K_1-grupo de la suspensión de A y por consiguiente, se demuestra el teorema de periodicidad de Bott, con lo que bastará calcular solamente los grupos $K_0(A)$ y $K_1(A)$.

Finalmente, en el quinto capítulo presentamos el resultado fundamental: El cálculo de la K-teoría de las álgebras de Cuntz y Toeplitz a través de la K-teoría de C^*-álgebra de grafos dirigidos.

Capítulo 1

C^*-álgebras

Este capítulo contiene algunos hechos básicos acerca de C^*-álgebras. Presentamos resultados de la teoría espectral, estudiamos la construcción de una representación de un C^*-álgebra A que puede ser vista como un C^*-álgebra de operadores en un espacio de Hilbert.

1.1. C^*-Álgebras

Definición 1.1.1 Un álgebra de Banach es un espacio de Banach complejo A junto con una multiplicación asociativa y distributiva tal que

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \text{ y } \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

para todo a, $b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$. Esta multiplicación es continua.
El álgebra A es llamada conmutativa (o abeliana) si $ab = ba$ para todo a, b en A; A es llamada unital si ella posee unidad (multiplicativa) también llamada identidad, la cual se denota por 1_A.
Si A tiene identidad, esta es única.

Ejemplo 1.1.1 Sea E un espacio de Banach complejo y

$$B(E) = \{f : E \longrightarrow E / f \text{ es un operador lineal acotado}\}$$

entonces $B(E)$ es una álgebra de Banach unital con la estructura lineal usual y el operador norma.

Ejemplo 1.1.2 Consideremos

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} / \int_{\mathbb{R}} |f| < \infty \right\}$$

Definamos el producto en este espacio como

$$(f \cdot g)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s-t)g(t)dt$$

claramente $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach verificando

$$\lambda(f \cdot g) = (\lambda f) \cdot g = f \cdot (\lambda g) \quad \forall\, f, g \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$$

Además

$$\begin{aligned}
\|f \cdot g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} |(f \cdot g)(s)|ds \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(s-t)g(t)|dt\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(s-t)|\ |g(t)|ds\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\ \|f\|_{L^1} dt \\
&= \|g\| \|f\|
\end{aligned}$$

Por tanto $L^1(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach.

Definición 1.1.2 Un álgebra * de Banach es un álgebra de Banach A junto con una **involución** $a \longmapsto a^*$ satisfaciendo

i) * es conjugada lineal, esto es $(\alpha a)^* = \overline{\alpha} a^*$ para $\alpha \in \mathbb{C}$, $a \in A$.

ii) $a^{**} = a$, para cada $a \in A$.

iii) $(ab)^* = b^* a^*$, para cualesquiera $a, b \in A$.

iv) $\|a^*\| = \|a\|$, para cada $a \in A$.

Observación 1.1.1 De la definición (1.1.2) parte (iv) claramente la aplicación involución $* : A \longrightarrow A$ es continua; mas aún es isométrica.

Definición 1.1.3 Una C^***-álgebra** es un álgebra * de Banach tal que verifica $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$.

Ejemplo 1.1.3 El espacio $B(H)$ donde H es un espacio de Hilbert es una C^***-álgebra** con la composición como producto y la involución $*$ está dada por el operador adjunto

Ejemplo 1.1.4 Sea K un espacio compacto entonces

$$C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{C}/f \text{ es continua}\}$$

es una C^***-álgebra** conmutativa con unidad, provisto de la norma del supremo $\| \cdot \|_\infty$ y la involución $*$ está dada como $f^*(t) = \bar{f}(t)$. Es claro ver que

$$\|f^*f\|_\infty = \|f\|_\infty^2$$

puesto que $f^*f = |f|^2$

Definición 1.1.4 Sea A un C^*-álgebra, un subconjunto no vacío $B \subset A$ es llamado **sub** C^***-álgebra**, si B es una C^*-álgebra respecto a las operaciones dadas en A.

Sea $F \subset A$, donde A es un C^*-álgebra. La sub C^*-álgebra de A generada por F y denotada por $C^*(F)$ es la menor sub C^*-álgebra de A que contiene F, es decir, $C^*(F)$ es la intersección de todas las sub C^*-álgebras de A que contienen F esto es

$$C^*(F) = \bigcap_{B \supset F} B$$

donde B es sub C^*-álgebra de A.

Definición 1.1.5 ***(Homomorfismos entre*** C^****-algebras)***

Sean A, B dos C^*-algebras con identidad, un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ es una aplicación lineal satisfaciendo:

1. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a, b \in A$.

2. $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ para todo $a \in A$.

3. $\varphi(1_A) = 1_B$.

A este homomorfismo llamaremos *-homomorfismo.

Una C^*-álgebra A diremos que es separable si existe $B \subset A$ tal que B es denso y numerable.

Ejemplo 1.1.5 Sea Ω un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea $C_\circ(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones complejas valuadas que se anulan en el infinito, i.e.; para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \Omega \setminus K$. Con la multiplicación puntual y la conjugación compleja como involución, $C_\circ(\Omega)$ es una $*$-álgebra. Y con la norma $||f|| := \sup\limits_{x\in\Omega}\{|f(x)|\}$ es una C^*-álgebra conmutativa.

Ejemplo 1.1.6 Sea A un C^*-álgebra, el espacio $M_n(A) = \{(a_{ij})_{n\times n} : \ a_{ij} \in A\}$ con las operaciones usuales de espacio vectorial, multiplicación de matrices y la operación $*$ dada como $(a_{ij})^*_{n\times n} = (a^*_{ij})_{n\times n}$ es una C^*-álgebra.
Para definir la norma en $M_n(A)$ elegimos un espacio de Hilbert H y un *-homomorfismo inyectivo $\varphi : A \longrightarrow B(H)$.
Sea $\varphi_n : M_n(A) \longrightarrow B(H^n)$ dada por $\varphi_n\left((a_{ij})_{n\times n}\right) : H^n \longrightarrow H^n$ como

$$\varphi_n\left((a_{ij})_{n\times n}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11})x_1 + ... + \varphi(a_{1n})x_n \\ \varphi(a_{21})x_1 + ... + \varphi(a_{2n})x_n \\ \vdots \\ \varphi(a_{n1})x_1 + ... + \varphi(a_{nn})x_n \end{pmatrix} ; x_j \in H, a_{ij} \in A$$

definimos una norma sobre $M_n(A)$ por $\|a\| = \|\varphi_n(a_{ij})_{n\times n}\|$ donde
$(a_{ij}) = a \in M_n(A)$. Entonces $B = \{(a_{ij})_{n\times n} : (a_{ij})_{n\times n}$ es triangular en $M_n(A)\}$ es una sub C^*-álgebra de $M_n(A)$

Observación 1.1.2

1. La norma $\| \cdot \|_{M_n(A)}$ es independiente de la elección de la representación φ con tal que sea inyectiva.

2. $\max\limits_{ij} \{\|a_{ij}\|\} \leq \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\| \leq \sum\limits_{ij} \|a_{ij}\|$.

   Para esto considerar $a = (a_{ij})_{n\times n}$ en $M_n(A)$ y sea $a^{(ij)} \in M_n(A)$ cuya (i,j)-ésima componente es a_{ij} y cuyas otras entradas son ceros; entonces $a = \sum\limits_{ij} a^{(ij)}$ y se puede mostrar que $\|a^{(ij)}\| = \|a_{ij}\|$ (ver [10], pág. 14)

Definición 1.1.6 ***(Ideales y Cocientes)***

- Sea A un C^***-álgebra**. Por un ideal en A entenderemos a un ideal bilatero cerrado

- Ahora si I es un ideal en un C^*-álgebra A el cociente de A por I es

$$\frac{A}{I} = \{a + I : \ a \in A\}$$

Observación 1.1.3

1. Si A es un C^*-álgebra, $\frac{A}{I}$ es una C^*-álgebra con la norma cociente

$$\|a + I\| = \inf \{\|a + x\| : \ x \in I\}$$

   donde la involución $*$ en A/I está dada como $(a + I)^* = a^* + I$

   En efecto. Por definición de infimo sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $a, b \in A$. Entonces $\varepsilon + \|a+I\| > \|a+a^{'}\|$ y $\varepsilon + \|b+I\| > \|b+b^{'}\|$ para algún $a^{'}, b^{'} \in I$. De aqui $(\varepsilon + \|a + I\|)(\varepsilon + \|b + I\|) \geq \|a + a^{'}\|\|b + b^{'}\| \geq \|ab + x\|$ donde $x = a^{'}b + ab^{'} + a^{'}b^{'} \in I$, asi

$$(\varepsilon + \|a + I\|)(\varepsilon + \|b + I\|) \geq \|ab + x\| \geq inf \{\|ab + x\| : \ x \in I\} = \|ab + I\|$$

   haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, obtenemos que $\|a + I\|\|b + I\| \geq \|ab + I\|$ es decir

$$\|(a + I)(b + I)\| = \|ab + I\| \leq \|a + I\|\|b + I\|$$

2. La aplicación $\pi : A \longrightarrow \frac{A}{I}$ tal que $\pi(a) = a + I$ es un *-homomorfismo llamado la aplicación cociente mas aún $I = ker(\pi)$.

3. Sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un *-homomorfismo, entonces $\|\varphi(a)\| \leq \|a\| \; \forall\, a \in A$; y φ es inyectivo si y solo si φ es isométrico.

4. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo entonces $ker(\varphi)$ es un ideal de A y $Im(\varphi)$ es un sub C^*-álgebra de B.

5. Una C^*-álgebra es llamada simple si esta solamente tiene como ideales a los triviales.

Definición 1.1.7 Un elemento a en un C^***-álgebra** A es positivo si y sólo si $a = h^2$ para algún elemento autoadjunto $(h = h^*)$ $h \in A$ y escribiremos $a \geq 0$ en este caso. También escribiremos $a \geq b$ si y sólo si $a - b \geq 0$.

Definición 1.1.8 ***(Sucesiones exactas cortas)***
Una sucesión de C^*-álgebras y *-homomorfismos

$$\ldots\ldots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \ldots\ldots$$

Se dice que es **exacta** si $Im(\varphi_n) = Ker(\varphi_{n+1})$, para todo n.
Una sucesión exacta de la forma

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O \tag{1.1}$$

es llamada **exacta corta**

Ejemplo 1.1.7 Si I es un ideal en A, entonces

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\mathbf{i}} A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{I} \longrightarrow O$$

es una sucesión exacta corta, donde $\mathbf{i}$ es la aplicación inclusión y π es la aplicación cociente. Recíprocamente dada la sucesión exacta corta

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

entonces $\varphi(I)$ es un ideal en A y claramente se tiene $\frac{A}{\varphi(I)} \cong B$ y tenemos el siguiente diagrama que conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{\psi} & B & \longrightarrow & O \\ & & \downarrow \cong & & \| \, I & & \downarrow & & \\ O & \longrightarrow & \varphi(I) & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{\pi} & \frac{A}{\varphi(I)} & \longrightarrow & O \end{array}$$

Si en la sucesión (1.1) existe un *-homomorfismo $\delta : B \longrightarrow A$ tal que $\psi\,\delta = 1_B$, entonces se dice que la sucesión exacta (1.1) escinde.

Observación 1.1.4 No toda sucesión exacta corta es sucesión exacta escindible. Pues basta considerar:

$$O \longrightarrow C_\circ(\langle 0,1\rangle) \xrightarrow{i} C([0,1]) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow O$$

la cual es una sucesión exacta corta, donde $\psi(f) = (f(0), f(1))$. Esta no es escindible.

1.2. Unitización de un álgebra

Si A no tiene unidad, podemos proporcionarle una como sigue

Lema 1.2.1 Un álgebra de Banach A sin unidad puede ser inmerso en un álgebra de Banach con unidad $\widetilde{A}$ como un ideal de codimensión uno.

Prueba. Sea $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ como espacio lineal y definamos una multiplicación en $\widetilde{A}$ por $(x,\lambda)(y,\mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu)$. Con esta operación en $\widetilde{A}$ se tiene:

1. Sea A un C^*-álgebra. Pongamos

$$\widetilde{A} = \{(a,\alpha) : \ a \in A, \ \alpha \in \mathbb{C}\}$$

En $\widetilde{A}$ definamos también

- $(a,\alpha) + (b,\beta) = (a+b, \alpha+\beta) \quad \forall\, a,b \in A;\ \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{C}$
- $z(a,\alpha) = (za, z\alpha) \quad \forall a \in A;\ \forall\, \alpha, z \in \mathbb{C}$
- $(a,\alpha)^* = (a^*, \bar{\alpha}) \quad \forall\, a \in A,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

Sean además $i : A \longrightarrow \widetilde{A}$ y $\pi : \widetilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ dos aplicaciones dadas por $i(a) = (a, 0)$ y $\pi(a, \alpha) = \alpha$ respectivamente entonces $\widetilde{A}$ es una *-álgebra con identidad y que i y π son *-homomorfismos mas aún i es inyectivo y π suryectivo.

En efecto. Claramente $\widetilde{A}$ con las operaciones dadas es un álgebra.

Veamos ahora que $\widetilde{A}$ es un *-álgebra. Sean $x = (a, \alpha)$, $y = (b, \beta) \in \widetilde{A}$

i) $(xy)^* = (ab + \beta a + \alpha b, \alpha\beta)^* = (b, \beta)^*(a, \alpha)^* = y^*x^*$

ii) $(x^*)^* = ((a, \alpha)^*)^* = (a^{**}, \bar{\bar{\alpha}}) = (a, \alpha) = x$

Ahora veamos que i y π son *-homomorfismos.

Es inmediato ver que i y π son lineales

Finalmente veamos que $\widetilde{A}$ tiene identidad es claro que $(0, 1) \in \widetilde{A}$ y sea $x = (a, \alpha) \in \widetilde{A}$, entonces

$$\begin{aligned} x(0,1) &= (a, \alpha)(0, 1) \\ &= (a, \alpha) \\ &= x \end{aligned}$$

similar se tiene $(0, 1)x = x$, escribamos $1_{\widetilde{A}} = (0, 1) = 1$ luego $\widetilde{A}$ es un *-álgebra con identidad.

Observación 1.2.1

Sea $x = (a, \alpha)$ un elemento en $\widetilde{A}$ entonces $x = (a, \alpha) = i(a) + \alpha 1_{\widetilde{A}}$ Ahora suprimiendo i tenemos $x = a + \alpha 1$; y asi $a = a + 0\,1 \in \widetilde{A}$.
Por tanto $A \subset \widetilde{A} = \{a + \alpha 1 :\ a \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}\}$

- Para cada $x \in \widetilde{A}$ pongamos $|||x|||_{\widetilde{A}} = \sup\{\|ax\|_A :\ a \in A,\ \|a\|_A \leq 1\}$ y definamos $\|x\|_{\widetilde{A}} = \max\left\{|||x|||_{\widetilde{A}};\ |\,\pi(x)|\right\}$

2. Para todo $a \in A$ se tiene que $\|a\|_{\widetilde{A}} = \|a\|_A$.

En efecto. Como $a \in A$; podemos escribirlo $a = i(a) = (a, 0)$ asi tenemos

$\|\varepsilon a\| \leq \|\varepsilon\|\|a\|$, para $\|\varepsilon\|_A \leq 1$ con $\varepsilon \in A$ se tiene

$\sup\{\|\varepsilon a\|_A :\ \varepsilon \in A,\ \|\varepsilon\|_A \leq 1\} \leq \sup\{\|\varepsilon\|_A\|a\|_A :\ \varepsilon \in A,\ \|\varepsilon\|_A \leq 1\}$ si y sólo si $\||a|\|_{\widetilde{A}} \leq \|a\|_A \sup\{\|\varepsilon\|_A :\ \varepsilon \in A,\ \|\varepsilon\|_A \leq 1\} \leq \|a\|_A$; entonces

$$\|a\|_{\widetilde{A}} \leq \|a\|_A \tag{1.2}$$

De manera análoga

$$\|a\|_A \leq \|a\|_{\widetilde{A}} \tag{1.3}$$

luego de (1.2) y (1.3) $\|a\|_A = \|a\|_{\widetilde{A}}\,,\ \forall\, a \in A$

3. Sea $x \in \widetilde{A}$. Si $\|x\|_{\widetilde{A}} = 0$ entonces $x = 0$

   En efecto. Como $x \in \widetilde{A}$, $x = (a, \alpha) \quad a \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

   Suponiendo que $x \neq 0$ entonces $a \neq 0$ o $\alpha \neq 0$.

   Si $a \neq 0$, $\|a\|_A = \|a\|_{\widetilde{A}}$ entonces $\|a\|_{\widetilde{A}} = \|a\|_A \neq 0$ y asi $\|x\|_{\widetilde{A}} \neq 0$ (contradicción), de manera análoga si $\alpha \neq 0$, claramente $\|x\|_{\widetilde{A}} \neq 0$. Tambien siendo $x \neq 0$ entonces puede ocurrir $a \neq 0$ y $\alpha \neq 0$ y en este caso tambien $\|x\|_{\widetilde{A}} \neq 0$.

   Por tanto $x = 0$.

4. $\widetilde{A}$ es un C^*-álgebra, donde $\|x\|_{\widetilde{A}} = \text{máx}\left\{\||x|\|_{\widetilde{A}},\ |\pi(x)|\right\}$ y

   $$\||x|\|_A = \sup\{\|ax\|_A :\ a \in A,\ \|a\|_A \leq 1\}$$

   En efecto. Primero veamos que $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$ es una norma.

   Claramente $\|x\|_{\widetilde{A}} \geq 0,\ \forall\, x \in \widetilde{A}$, por (3) tambien $\|x\|_{\widetilde{A}} = 0$ entonces $x = 0$.

   Ahora si $x = 0$ entonces $\|x\|_{\widetilde{A}} = 0$.

   $$\begin{aligned}
   \|\lambda x\|_{\widetilde{A}} &= \text{máx}\left\{\||\lambda x|\|_{\widetilde{A}}\,,\ |\pi(\lambda x)|\right\} \\
   &= \text{máx}\left\{|\lambda|\||x|\|_{\widetilde{A}}\,,\ |\lambda|\ |\pi(x)|\right\} \\
   &= |\lambda|\ \text{máx}\left\{\||x|\|_{\widetilde{A}}\,,\ |\pi(x)|\right\} \\
   &= |\lambda|\ \|x\|_{\widetilde{A}}
   \end{aligned}$$

Observación 1.2.2 $\text{máx}\left\{a+a^{'}, b+b^{'}\right\} \leq \text{máx}\left\{a,b\right\} + \text{máx}\left\{a^{'}, b^{'}\right\}$,
$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^{+}_{\circ}$.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\widetilde{A}} &= \text{máx}\left\{|||x+y|||_{\widetilde{A}} :\ |\pi(x+y)|\right\} \\
&= \text{máx}\left\{|||x|||_{\widetilde{A}} + |||y|||_{\widetilde{A}} :\ |\pi(x)| + |\pi(y)|\right\} \\
&\leq \text{máx}\left\{|||x|||_{\widetilde{A}} :\ |\pi(x)|\right\} + \text{máx}\left\{|||y|||_{\widetilde{A}} :\ |\pi(y)|\right\} \text{(observación (1.2.2))} \\
&= \|x\|_{\widetilde{A}} + \|y\|_{\widetilde{A}}
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\|xy\|_{\widetilde{A}} \leq \|x\|_{\widetilde{A}}\, \|y\|_{\widetilde{A}},\ \forall\, x, y \in \widetilde{A} \tag{1.4}$$

Observación 1.2.3 $\text{máx}\left\{aa^{'}\ , bb^{'}\right\} \leq \text{máx}\left\{a,b\right\} \text{máx}\left\{a^{'}, b^{'}\right\}$

$$\begin{aligned}
\|x^{*}x\|_{\widetilde{A}} &= \text{máx}\left\{|||x^{*}x|||_{\widetilde{A}} :\ |\pi(x^{*}x)|\right\} \\
&= \text{máx}\left\{|||x|||^{2}_{\widetilde{A}} :\ |\pi(x)|^{2}\right\} \\
&\leq \text{máx}\left\{|||x||| :\ |\pi(x)|\right\} \text{máx}\left\{|||x||| :\ |\pi(x)|\right\} \text{(observación (1.2.3))} \\
&= \|x\|_{\widetilde{A}}\|x\|_{\widetilde{A}} \\
&= \|x\|^{2}_{\widetilde{A}}
\end{aligned}$$

Entonces $\|x^{*}x\|_{\widetilde{A}} \leq \|x\|^{2}_{\widetilde{A}}$

$$\|x\|^{2}_{\widetilde{A}} \leq \|x^{*}x\|_{\widetilde{A}} \quad \text{(verificación-usar (1.4))}$$

Luego $\|x^{*}x\|_{\widetilde{A}} = \|x\|^{2}_{\widetilde{A}}$.

Afirmación: $\widetilde{A}$ es completo con respecto a $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$. En efecto
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\widetilde{A}$ entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_{\circ} \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_{\widetilde{A}} < \varepsilon$, para todo $m, n \geq n_{\circ}$ si y sólo si

$$\text{máx}\left\{|||x_n - x_m|||_{\widetilde{A}} :\ |\pi(x_n - x_m)|\right\} < \varepsilon,\ \forall\, m, n \geq n_{\circ}$$

de donde $\|ax_n - ax_m\|_A < \varepsilon,\ \forall\, m, n \geq n_{\circ}$ y $\forall\, a \in A$, $\|a\|_A \leq 1$ de aqui $(ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_A$ pero A es completo entonces

$(ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente; análogamente $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tambien es convergente y por ende son ambos acotados de donde podemos inferir $\|ax_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, a \in A,\ \|a\|_A \leq 1$ y $|\pi(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, n$ entonces

$$\sup\{\|ax_n:\ a \in A,\ \|a\|_A \leq 1\} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |\pi(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, n$$

Luego $\text{máx}\{\{\sup\|ax_n\|:\ a \in A, \|a\|_A \leq 1\},\ \pi(x_n)\} < \varepsilon\ \forall\, n$ si y solo si

$$\|x_n\|_{\widetilde{A}} < \varepsilon,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

es decir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en $\widetilde{A}$ con respecto a $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$ asi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\widetilde{A}$ con respecto a $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$ y por lo tanto $\widetilde{A}$ es completo con respecto a $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$.

5. Sea $\pi : \widetilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ la aplicación dada por $\pi(a,\alpha) = \alpha$, y sea $\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{A}$ definida por $\lambda(\alpha) = \alpha 1_{\widetilde{A}}$ entonces la sucesión

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widetilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow O$$

escinde.

En efecto. Claramente la aplicación $\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{A}$ verifica que $\pi\,\lambda = 1_{\mathbb{C}}$ entonces $\widetilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$, asi A es un ideal de $\widetilde{A}$.
$\widetilde{A}$ se llama unitización de A.

1.3. Teoría espectral

Sea A un álgebra de Banach unital, un elemento $a \in A$ es invertible en A (no singular) si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$. Observe si tal b existe este es único, y es llamado elemento inverso de a el cual es denotado por a^{-1}. El conjunto de elementos inversibles es denotado $Inv(A)$.
Ahora escribamos $\mathbb{C}[z] = \{p = \lambda_\circ + \lambda_1 z + ... + \lambda_n z^n:\ \lambda_i \in \mathbb{C},\ i = 1,..,n\}$ si A es un álgebra unitaria $a \in A$ entonces $p(a) = \lambda_\circ 1 + \lambda_1 a + ... + \lambda_n a^n$, para $p \in \mathbb{C}[z]$ y la aplicación $\varphi : \mathbb{C}[z] \longrightarrow A$ tal que $\varphi(p) = p(a)$ es un homomorfismo de álgebras.

Definición 1.3.1 Sea A un álgebra unital y sea $a \in A$, el espectro de a se denota y define como

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (a - \lambda 1) \notin inv(A)\}$$

El conjunto resolvente $\rho_A(a)$ de a es el complemento del espectro de A, esto es $\rho_A(a) = \mathbb{C} - \sigma_A(a)$.
El radio espectral $r_A(a)$ de un elemento $a \in A$ esta definido como

$$r_A(a) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma_A(a)\}$$

Ejemplo 1.3.1 Sea Ω un espacio de Hausdorff compacto

$$A = C(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \text{ continua}\}$$

ahora sea $\lambda \in rang(f)$, para $f \in A$ si y sólo si existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = \lambda$ si y sólo si $f(x) - \lambda 1 = 0$ si y solo si $(f - \lambda 1)(x) = 0$ si y solo si $f - \lambda 1$ no es invertible si y solo si $\lambda \in \sigma_A(f)$ por tanto $\sigma_A(f) = rang(f) = f(\Omega)$

Observación 1.3.1 Sea A un C^*-álgebra unitaria las afirmaciones elementales acerca del espectro son:

1. Si $A = \{0\}$, entonces $\sigma_A(0) = \phi$
2. $\sigma_A(\lambda 1_A) = \{\lambda\}$, para $\lambda \in \mathbb{C}$
3. $0 \notin \sigma_A(a)$ si y solo si $a \in A$ es invertible
4. Si $a \in A$ es nilpotente, entonces $\sigma_A(a) = \{0\}$ (si $A \neq \{0\}$)
5. Si $(a, b) \in A \oplus B$ (suma directa de álgebras), entonces

$$\sigma_{A \oplus B}[(a, b)] = \sigma_A(a) \times \{0\} \cup \{0\}\sigma_B(b)$$

Para la justificación de esta observación ver [10], pág. 12.

Proposición 1.3.1 Sea A un C^*-álgebra unitaria, y sea $a \in A$

1. Si $p \in \mathbb{C}[z]$ entonces $\sigma_A(p(a)) = p(\sigma_A(a))$

2. Si a es inversible; $\sigma_A(a^{-1}) = \sigma_A(a)^{-1}$

3. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo, entonces $\sigma_B(\varphi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$

Prueba. Ver [12] página 7.

Teorema 1.3.1 Sea A un álgebra de Banach, $a \in A$ tal que $\|a\| < 1$, entonces $(1-a)$ es inversible; mas aún $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$

Prueba. Como $\sum_{n\geq 0} \|a^n\| \leq \sum_{n\geq 0} \|a\|^n = (1-\|a\|)^{-1} < \infty$, asi la serie $\sum_{n\geq 0} a^n$ es convergente en A, digamos que converge a b y puesto que $(1-a)(1+...+a^n) = 1-a^{n+1}$ converge a $(1-a)b = b(1-a)$ y a 1 cuando $n \to \infty$; por lo tanto $b = (1-a)^{-1}$. ■

Teorema 1.3.2 Para cualquier a en un álgebra de Banach unital, el espectro $\sigma_A(a)$es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$ con $\sigma_A(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$

Prueba. Si $|\lambda| > \|a\|$, entonces $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, asi $1 - \lambda^{-1}a$ es invertible y por lo tanto $\lambda - a$ de donde $\lambda \notin \sigma_A(a)$. Ahora $\lambda \in \sigma_A(a)$ implica que $|\lambda| \leq \|a\|$. El conjunto $\sigma_A(a)$ es cerrado, esto es; $\mathbb{C} - \sigma_A(a)$ es abierto. ■

Teorema 1.3.3 El conjunto $inv(A)$ de elementos invertibles en un álgebra A es abierto en A, y la aplicación inversa $a \longmapsto a^{-1}$ es una aplicación continua.

Prueba.

1. Sea $x \in inv(A)$ y $\|y-a\| < \|x^{-1}\|^{-1}$ entonces $\|yx^{-1}-1\| \leq \|y-x\|\|x^{-1}\| < 1$ de donde $yx^{-1} \in inv(A)$, y por lo tanto, $y \in inv(A)$ asi $inv(A)$ es abierto en A.

2. Sea $y \in A$ con $\|y\| < 1$, y escribamos $S_n = \sum_{k=0}^{n} y^k$, $n \in \mathbb{N}$ entonces $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en A y asi converge puesto que A es completo.

Sea $w = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n$ es decir $w = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$ asi afirmamos que $w = (1-y)^{-1}$.
En efecto tenemos $(1-y)w = \lim_{n \longrightarrow \infty}(1-y)S_n = \lim_{n \longrightarrow \infty}(1-y^{n+1}) = 1$ y $w(1-y) = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(1-y) = \lim_{n \longrightarrow \infty}(1-y^{n+1}) = 1$. Ahora, si $x \in A$ con $\|1-x\| < 1$, y escribiendo $x = 1-(1-x)$; por lo anterior vemos que x es invertible mas aún $x^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k$.
Para ver que $x \longmapsto x^{-1}$ es continua en $inv(A)$, supongamos que $x_\circ \in inv(A)$ y que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset inv(A)$ es una sucesión de Cauchy tal que $x_n \longrightarrow x_\circ$, cuando $n \longrightarrow \infty$ entonces para todo n suficientemente grande, $\|x_n - x_\circ\| < \|x_\circ^{-1}\|^{-1}$ y asi $\|x_n^{-1} - x_\circ^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}[x_\circ^{-1}(x_\circ - x_n)]^k x_\circ^{-1}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_\circ^{-1}\|\|x_\circ - x_n\|^k\|x_\circ^{-1}\|$ como $x_n \longrightarrow x_\circ$, entonces $\|x_\circ - x_n\|^k \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ por lo tanto $x_n^{-1} \rightarrow x_0^{-1}$ y así la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es continua.

Proposición 1.3.2 Sea A un espacio de Banach, $V \subseteq A$ un subespacio lineal y cerrado entonces $\frac{A}{V}$ es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|\widetilde{a}\| = \inf_{v\in V}\|a+v\|$.

Prueba. Sean $a \sim a'$ si y sólo si $a - a' \in V$. $\frac{A}{V}$ es un espacio lineal con las operaciones $\widetilde{a} + \widetilde{a'} = \widetilde{a+a'}$ y $\widetilde{\lambda a} = \lambda\widetilde{a}$, para todo $x, x' \in A, \lambda \in \mathbb{C}$. Ahora veamos que $\|\widetilde{a}\| = \inf_{v\in V}\|a+v\|$ es una norma pues si $\widetilde{a} = 0$ en $\frac{A}{V}$ entonces $a \in V$, tomando $v = -a$, pongamos $\|\widetilde{a}\| = \inf_{v\in V}\|a+v\| = 0$. De otro lado, si $\|\widetilde{a}\| = 0$, entonces existe una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ tal que $\|a+v_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ asi $-v_n \longrightarrow a$ en A. Como V es cerrado, entonces $a \in V$ y asi $\widetilde{a} = 0$ en $\frac{A}{V}$. Para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ y $a \in A$, $\|\widetilde{\lambda a}\| = \inf_{v\in V}\|\lambda a + v\| = \inf_{v'\in V}\|\lambda a + \lambda v'\| = |\lambda| \inf_{v'\in V}\|a+v'\| = |\lambda|\|\widetilde{a}\|$.
Para cualquier $a, b \in A$ $\|\widetilde{a} + \widetilde{b}\| = \inf_{v\in V}\|a+b+v\| = \inf_{v,w\in V}\|a+b+v+w\| \leq \inf_{v,w\in V}(\|a+v\| + \|b+w\|) = \|\widetilde{a}\| + \|\widetilde{b}\|$ luego $\|\cdot\|$ es una norma en $\frac{A}{V}$.
Afirmación. Sea A un espacio normado entonces A es completo si y sólo si este tiene la propiedad siguiente; si alguna $(b_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\sum_{m=1}^{\infty}\|b_m\| < \infty$, entonces existe $b \in A$ tal que $\sum_{m=1}^{n} b_m \longrightarrow b$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

En efecto. Si A es completo y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|y_k\|<\infty$ entonces claramente $(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto converge. Reciprocamente; sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ una sucesión de Cauchy. Construyamos una subsucesión como sigue sea $n_1\in\mathbb{N}$ tal que $\|a_{n_1}-a_m\|<\frac{1}{2}$ para todo $m>n_1$; y sea $n_2>n_1$ tal que $\|a_{n_2}-a_m\|<\frac{1}{4}$ para todo $m>n_2$ continuando en esta forma obtenemos una subsucesión (a_{n_k}) de (a_n) tal que $\|a_{n_k}-a_{n_{k+1}}\|<\frac{1}{2^k}$, $k=1,2,....$ pongamos $b_k=a_{n_k}-a_{n_{k+1}}$ para $k=1,2,...$; entonces $\sum\limits_{k>1}\|b_k\|=\sum\limits_{k>1}\|a_{n_k}-b_{n_{k+1}}\|<\sum\limits_{k>1}\dfrac{1}{2^k}<\infty$.
Por hipótesis existe algún $b\in A$ tal que $b=\lim\limits_{m\longrightarrow\infty}\sum\limits_{k=1}^{m} b_k=\lim\limits_{m\longrightarrow\infty}(a_{n_1}-a_{n_2})+(a_{n_2}-a_{n_3})+...+(a_{n_m}-a_{n_{m+1}})=\lim(a_{n_1}-a_{n_{m+1}})$ esto es, (a_{n_k}) converge en A al punto $(x_{n_1}-b)$. Pero si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en A y asi A es completo.
Ahora mostraremos que $\frac{A}{V}$ es un espacio de Banach. En efecto sea $(\widetilde{a}_n)$ cualquier sucesión en $\frac{A}{V}$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\widetilde{a}_n\|<\infty$. Por definición de infimo para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $v_n\in V$ tal que $\|a_n+v_n\|<\inf\limits_{v\in V}\|a_n+v\|+\dfrac{1}{2^n}=\|\widetilde{a}_n\|+\dfrac{1}{2^n}$; de aqui $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|a_n+v_n\|<\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\|\widetilde{a}\|+\dfrac{1}{2^n})<\infty$.
Como A es un espacio de Banach, entonces por la afirmación, se sigue que existe $b\in A$ tal que $b=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+v_k)$.

Queremos que $\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\longrightarrow\widetilde{b}$ en $\frac{A}{V}$ pues $\|\widetilde{b}-\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\|=\|\widetilde{b-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}\|=$ $\inf\limits_{v\in V}\|b-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+v\|\leq\|y-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}v_k\|=\|y-\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+v_k)\|\longrightarrow 0$, cuando $n\longrightarrow\infty$ de aqui $(\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k)_{n\in\mathbb{N}}\longrightarrow\widetilde{b}$ y asi $\frac{A}{V}$ es un espacio de Banach. ■

Observación 1.3.2 Si A es unitaria y $V\subsetneq A$ un ideal entonces $\frac{A}{V}$ es unitaria. Además la identidad de $\frac{A}{V}$ tiene norma uno.
En efecto. Si $V=A$, entonces $\frac{A}{V}$ es trivial esto es $\{0\}$.
Si V es propio, entonces $\frac{A}{V}\neq\{0\}$ y vemos que $[1_A]$ es la unidad (identidad) de $\frac{A}{V}$,

puesto que $[a][1_A] = [a1_A] = [a]$ también $[1_A][a] = [a]$.

- $\|[1_A]\| = \inf\limits_{v\in V} \|1 + v\| \leq \|1\|$ (tomando $v = 0$) entonces $\|[1_A]\| \leq 1$
- Tenemos $1 \leq \|1_A\|$ entonces $1 \leq \|1_A\| + \|v\|,\ v \in V$; tomando infimo $1 \leq \inf\limits_{v\in A} \|1_A + v\| + \inf\limits_{v\in A} \|0 + v\| = \|[1_A]\| + 0$ entonces $1 \leq \|[1_A]\|$.

Luego $\|[1_A]\| = 1$

Definición 1.3.2 Sea A un álgebra de Banach. Un homomorfismo $f : A \longrightarrow \mathbb{C},\ f \neq 0$ es llamado un caracter (o funcional lineal multiplicativo)

Definición 1.3.3 El conjunto de caracteres de un álgebra de Banach con unidad conmutativa A es llamada el espectro de A y es denotado por S_pA es decir

$$S_pA = \{f : A \longrightarrow \mathbb{C} :\ f \text{ es un caracter}\}$$

Recordemos la topología W^* sobre A^* donde A^* es el espacio dual de Banach de A.

Definición 1.3.4 La topología W^* en el dual de A es generada por las vecindades:

$$\eta(\varphi : S, \varepsilon) = \{\omega \in A^* :\ |\omega(a) - \varphi(a)| < \varepsilon,\ \forall\, a \in S\}$$

donde $\varphi \in A^*$, ε es cualquier número real positivo y S es cualquier subconjunto finito de A.

Observación 1.3.3 Un conjunto $G \subset A^*$ es abierto en la topología W^* si y solo si para cada $\psi \in G$ existe algún $\eta(\psi : s, \varepsilon)$ tal que $\eta(\psi : s, \varepsilon) \subseteq G$.
En terminos de redes la topología W^* $\omega_\alpha \longrightarrow \omega$ en A^* si y sólo si $\omega_\alpha(a) \longrightarrow \omega(a)$ para cada $a \in A$

Teorema 1.3.4 La bola unitaria cerrada de A^*, es compacto según la topología W^*

Prueba. Ver [11] página 19. ■

Proposición 1.3.3 Sea A un álgebra de Banach con unidad conmutativa, entonces el espectro S_pA es un subconjunto cerrado según W^* de la bola unitaria de A^* y por lo tanto es compacto.

Prueba. Ver [11] página 25. $\blacksquare$

Teorema 1.3.5 Sea A un álgebra de Banach con unidad conmutativa. Para $x \in A$ y $l \in S_pA$, definimos $\widehat{x} : S_pA \longrightarrow \mathbb{C}$ como $\widehat{x}(l) = l(x)$. Entonces el rango de la función $\widehat{x}$ en S_pA satisface $rang(\widehat{x}) = \sigma_A(x)$.
Además la aplicación $\widehat{}$ es un homomorfismo $\widehat{} : A \longrightarrow \mathcal{C}(S_pA)$ y $\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|$, para $x \in A$.
$\widehat{}$ **es llamada la transformación Gelfand**.

Prueba. Para $x \in A$ y $l \in S_pA$ tenemos $l(x) \in \sigma_A(x)$; es decir $\widehat{x}(l) \in \sigma_A(x)$ y asi el rango de $\widehat{x}$ satisface la inclusión siguiente $ran\widehat{x} \subseteq \sigma_A(x)$.
Sea $\lambda \in \sigma_A(x)$ entonces $(x - \lambda 1)$ no es invertible y asi pertenece a algún ideal maximal J (En efecto, $(x - \lambda 1)$ pertenece al ideal propio $A(x - \lambda 1)$ el cual por el lema de Zorn está contenido en un ideal maximal).
Sea $l \in S_pA$ tal que $Ker(l) = J$ entonces $(x - \lambda 1) \in J$ implica que $l(x) = \lambda$. De aqui $\widehat{x}(l) = l(x) = \lambda$ y esto sigue que $rang\widehat{x} = \sigma_A(x)$.
Claramente $\widehat{}$ es un homomorfismo; en efecto $\widehat{xy}(l) = l(xy) = l(x)l(y) = \widehat{x}(l)\widehat{y}(l)$; para $x, y \in A$, $l \in S_pA$ y asi $\widehat{xy} = \widehat{x}\widehat{y}$. Análogamente $\widehat{x+y} = \widehat{x} + \widehat{y}$.
Para mostrar que $\widehat{x} \in \mathcal{C}(S_pA)$. Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ mostraremos que $\widehat{x}^{-1}(U)$ es abierto en S_pA. Si $\widehat{x}^{-1}(U) = \phi$; no hay nada que probar. Supongamos que $\widehat{x}^{-1}(U) \neq \phi$. Sea $l \in \widehat{x}^{-1}(U)$, entonces existe $\varsigma \in U$ tal que $\widehat{x}(l) = \varsigma$ como U es abierto en $\mathbb{C}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N_\varepsilon(\varsigma) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \varsigma| < \varepsilon\} \subseteq U$. Sea $V = \eta(l : \{x\}, \varepsilon) = \{\omega \in S_pA : |\omega(x) - l(x)| < \varepsilon\}$ entonces $\omega(x) = \widehat{x}(\omega) \in U$, para todo $\omega \in V$; es decir $l \in V \subseteq \widehat{x}^{-1}(U)$. Deducimos que $\widehat{x}^{-1}(U)$ es abierto en S_pA y de aqui $\widehat{x} : S_pA \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua; esto es $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{C}(S_pA)$. Finalmente, tenemos que $rang\widehat{x} = \sigma_A(x) \subseteq \{\lambda : |\lambda| \leq \|x\|\}$ y asi se sigue que $|\widehat{x}(l)| \leq \|x\|$, para todo $l \in S_pA$. Asi $\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ para cualquier $x \in A$. $\blacksquare$

Teorema 1.3.6 Cada C^*-álgebra A abeliana es isometricamente isomorfica al álgebra $C_\circ(X)$ para algún espacio de Hausdorff X localmente compacto

Prueba. Ver [11] página 35. $\blacksquare$

De este teorema se tiene adicionalmente lo siguiente

(i) $C_\circ(X)$ es separable si y sólo si X es separable.

(ii) X e Y son homeomorfos si y sólo si $C_\circ(X) \cong C_\circ(Y)$

Teorema 1.3.7 Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad generada por un único elemento a, si el conjunto de polinomios en A es denso en A entonces la aplicación $\widehat{a} : S_pA \longrightarrow \sigma_A(a)$ es un homeomorfismo.

Prueba. Sabemos que $\widehat{a}$ es una función continua en S_pA con $ran\widehat{a} = \sigma_A(a)$, es decir $\widehat{a} : S_pA \longrightarrow \sigma_A(a)$ es continua y sobre.

Ahora tanto S_pA y $\sigma_A(a)$ son de Hausdorff compacto, asi nosotros necesitamos solo mostrar que $\widehat{a}$ es inyectiva, supongamos que $\widehat{a}(l_1) = \widehat{a}(l_2)$ si y solo si $l_1(a) = l_2(a)$, usando la multiplicatividad de l_1 y l_2, vemos que para $n \in \mathbb{N}$ dado y $c_\circ, c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ se tiene

$$l_1\left(\sum_{k=0}^{n} c_k a^k\right) = l_2\left(\sum_{k=0}^{n} c_k a^k\right)$$

Puesto que l_1 y l_2 son continuas y el elemento a genera A entonces se sigue que $l_1 = l_2$ por tanto $\widehat{a}$ es inyectiva. $\blacksquare$

Proposición 1.3.4 La C^*-norma de un C^*-álgebra es única.

En efecto. Sea A un C^*-álgebra con norma original $\|\cdot\|$ y sea $|||\cdot|||$ otra norma definida en A, entonces

$$|||a|||^2 = |||a^*a||| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

Por tanto $|||\cdot||| = \|\cdot\|$. $\blacksquare$

Definición 1.3.5 Sea A un C^***-álgebra**. Un elemento $a \in A$ es llamado

1. normal si $aa^* = a^*a$

2. autoadjunto si $a = a^*$

3. unitario si A tiene identidad y $aa^* = a^*a = 1_A$

4. una proyección si $a = a^* = a^2$

Observación 1.3.4 Cualquier elemento $a \in A$ puedese escribir como

$$a = \frac{1}{2}(a + a^*) + i\frac{1}{2i}(a - a^*)$$

Recíprocamente, si h y k son autoadjuntos en A y $a = h + ik$, entonces $a^* = h - ik$ asi que $h = \frac{1}{2}(a + a^*)$ y $k = \frac{1}{2i}(a - a^*)$. En otras palabras, la descomposición $a = h + ik$ con $h = h^*$ y $k = k^*$ en A es única.

Proposición 1.3.5 Sea A un C^*-álgebra, $a \in A$ con $a = a^*$ entonces $a \geq 0$ si y solo si $\sigma_A(a) \subset [0, \infty\rangle$ donde $\sigma_A(a)$ es el espectro de a considerado como un elemento de $\widetilde{A}$ si A no tiene unidad

Prueba. Ver [12] página 15.

Proposición 1.3.6 Sea A un C^*-álgebra con identidad.

i) $\sigma_A(u) \subseteq T$, para $u \in A$ elemento unitario y donde $T = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$.

ii) Si $u \in A$ es un elemento normal y $\sigma_A(u) \subseteq T$ entonces u es unitario.

iii) $\sigma_A(a) \subseteq \mathbb{R}$; para $a \in A$ es autoadjunto.

iv) Si $p \in A$ es una proyección entonces $\sigma_A(p) \subseteq \{0, 1\}$

v) Sea $p \in A$ un elemento normal tal que $\sigma_A(p) \subseteq \{0, 1\}$, entonces p es un proyector.

Prueba.

i) Como $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1_A\| = 1$, entonces $\|u\| = 1$. De aqui para $\lambda \in \sigma_A(u)$, $|\lambda| \leq 1$.

Ahora por teorema de la aplicación espectral, $\lambda^{-1} \in \sigma_A(u^{-1}) = \sigma_A(u^*)$. También $\|u^*\| = 1$, de donde $|\lambda^{-1}| \leq 1$, asi $|\lambda| = 1$.

ii) Recordando que para un elemento normal $u \in A$ existe uno y solamente un *-isomorfismo $T : \mathcal{C}(\sigma_A)(u) \longrightarrow C^*(u, 1)$ tal que $T(f) = f(u)$ aplicando además $I_{\sigma_A(u)} \longmapsto u$ y $\overline{I}_{\sigma_A(u)} \longmapsto u^*$. De donde $1_{\sigma_A(u)} \longmapsto u^*u = uu^* = 1(1_A)$.

iii) $a \in A$ es invertible si y sólo si a^{-1} lo es, entonces $a - \lambda 1_A$ es invertible si y sólo si $a^* - \overline{\lambda} 1_A$ es invertible. De esta manera $\lambda \in \sigma_A(a)$ si y sólo si $\overline{\lambda} \in \sigma_A(a^*)$, y para $a = a^*$ el espectro es invariante bajo la conjugación compleja. De otro lado la serie $e^{ia} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!}$ es absolutamente convergente, su adjunta $\overline{e^{ia}} = e^{-ia} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ia)^n}{n!}$ también lo es y se cumple $e^{ia}\overline{e^{ia}} = 1_A = e^{-ia}e^{ia}$, asi esto es unitario en $C^*(a, 1)$ lo que implicaría que $e^{i\lambda} \in T$ para $\lambda \in \sigma_A(a)$ por tanto $\lambda \in \mathbb{R}$.

iv) Como $p = p^* = p^2$; entonces $\sigma_A(p) \subset \mathbb{R}$, y por el teorema de la aplicación espectral $\sigma_A(p)\sigma_A(p)\sigma_A(p) = \sigma_A^2(p)$ esto quiere decir que $\sigma_A(p) \subseteq [0, 1]$. Usando el isomorfismo $T : \mathcal{C}(\sigma_A(p)) \longrightarrow C^*(p, 1)$ se tiene $I_{\sigma_A(p)} = I^2_{\sigma_A(p)}$; asi $\sigma_A(p) \subseteq \{0, 1\}$.

v) Tenemos $pp^* = p^*p$; por (iv) $\sigma_A(p) \subseteq \{0, 1\}$ entonces $I_{\sigma_A(p)} = \overline{I}_{\sigma_A(p)} = I^2_{\sigma_A(p)}$ y usando el isomorfismo $T : \mathcal{C}(\sigma_A(p)) \longrightarrow C^*(a, 1)$ se tiene $p = p^* = p^2$. ■

Proposición 1.3.7 Sea A un C^*-álgebra con identidad; $a \in A$.

1. a es inversible si y sólo si aa^* y a^*a lo son, mas aún $a^{-1} = (a^*a)^{-1}a^* = a^*(aa^*)^{-1}$.

2. Sea $a \in A$ normal e inversible, entonces existe $f \in \mathcal{C}(\sigma_A(a))$ tal que $a^{-1} = f(a)$ es decir $a^{-1} \in C^*(a, 1)$.

3. Sea $a \in A$ un elemento inversible entonces $a^{-1} \in C^*(a,1)$. ($C^*(a,1)$ sub C^*-álgebra mas pequeña de A conteniendo a)

Prueba.

1. Si a^{-1} existe claramente $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$ y $(aa^*)^{-1} = (a^*)^{-1}a^{-1}$, $(a^*a)^{-1} = a^{-1}(a^{-1})^*$. Ahora si $(aa^*)^{-1}$ y $(a^*a)^{-1}$ existen, escribamos $x = a^*(aa^*)^{-1}$ y $z = (a^*a)^{-1}a^*$ entonces $ax = 1 = za$ entonces $zax = z$ y $x = zax$ asi $x = z = a^{-1}$.

2. Como a es inversible, entonces $0 \notin \sigma_A(a)$. Asi, la función $I_{\sigma_A(a)}$ corresponde a a bajo el isomorfismo $T : C(\sigma_A(a)) \longrightarrow C^*(a,1)$ es inversible y la inversa correspondiente está en $C^*(a,1)$.

3. Claramente aa^* y a^*a son normales (autoadjuntos) por (1) son inversibles pues $a \in A$ es inversible por (2) sus inversas son C^*-subálgebras generadas por $\{aa^*, 1\}$ y $\{a^*a, 1\}$, asi también en $C^*(a,1)$. Nuevamente usando (i) de la proposición (1.3.6) (considerando $C^*(a,1)$ en lugar de A). Tenemos $a^{-1} \in C^*(a,1)$. ■

Lema 1.3.1 Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío compacto y sea $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua, sea A una C^*-álgebra con unidad, y sea Ω_K el conjunto de elementos autoadjuntos de A con el espectro contenido en K; la función (inducida) $f : \Omega_K \longrightarrow A,\ a \longmapsto f(a)$ es continua.

Prueba. La aplicación $\varphi : A \longrightarrow A$ tal que $\varphi(a) = a^n$ es continua (continuidad de multiplicación). Asi cada polinomial compleja f induce un aplicación $h : A \longrightarrow A$ tal que $h(a) = f(a)$.

Ahora sea $f \in C(K)$ donde $C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{C} /\ f \text{ es continua}\}$, sea $a \in \Omega_K$, y sea $\varepsilon > 0$ por el teorema de **Stone-Weierstrass** existe un polinomial complejo g tal que $|f(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para cada $z \in K$. Por la continuidad discutida anteriormente, encontramos $\delta > 0$ tal que $\|g(a) - g(b)\| \leq \varepsilon$ siempre que $b \in A$ con $\|a - b\| \leq$

δ puesto que $\|f(c) - g(c)\| = \|(f-g)(c)\| = \sup\{|(f-g)(z) : \ z \in \sigma(c)|\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$
Para todo $c \in \Omega_K$. De aqui se sigue

$$\begin{aligned}\|f(a) - f(b)\| &= \|f(a) - g(a) + g(a) - g(b) + g(b) - f(b)\| \\ &\leq \|f(a) - g(a)\| + \|g(a) - f(b)\| + \|g(b) - f(b)\| \\ &\leq \varepsilon, \ \forall\, b \in \Omega_K\end{aligned}$$

Con $\|a - b\| \leq \delta$. ■

Álgebra de matrices y producto tensorial

Sean A_1, A_2 dos C^*-álgebras. El producto tensorial $A_1 \otimes A_2$ es una *-álgebra con multiplicación y adjunción dado por

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$$

$$(a_1 \otimes a_2)^* = a_1^* \otimes a_2^*$$

Nosotros principalmente necesitamos verificar la siguiente situación especial. Sea A un C^*-álgebra, y sea $M_n(\mathbb{C})$ $(n \in \mathbb{N})$ el álgebra de $n \times n$-matrices complejas. Entonces $A \otimes M_n(\mathbb{C})$ puede ser identificada con $M_n(A)$, el *-álgebra de $n \times n$-matrices con entradas de A, con producto y adjunto dado conforme a la estructura matricial. La única C^*-norma sobre $A \otimes M_n(\mathbb{C}) = M_n(A)$ es definida usando cualquier *-homomorfismo inyectivo $\varphi : A \longrightarrow B(H)$, y el *-homomorfismo inyectivo canónico $M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow B(\mathbb{C}^n)$ es decir $\|a \otimes m\| = \|\varphi(a) \otimes m\|$ es justamente la norma en $B(H) \otimes B(\mathbb{C}^n) = B(H \otimes \mathbb{C}^n)$.

1.4. Representación de C^*-álgebras

Definición 1.4.1 Sea A un C^*-álgebra, **una representación de** A es un par (H, φ) donde H es un espacio de Hilbert y $\varphi : A \longrightarrow B(H)$ es un *-homomorfismo.

Diremos que (H, φ) es fiel si φ es inyectiva. De este modo una representación fiel (H, φ) es uno a uno y por lo tanto isométrico. Recíprocamente, si φ es isométrica, entonces (H, φ) es una representación fiel.

Proposición 1.4.1 Si $(H_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de representaciones de A, su suma directa es la representación (H, φ) escrito $H = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$, y $\varphi(a)\left((x_\lambda)_\lambda\right) = \left(\varphi_\lambda(a)(x_\lambda)\right)_\lambda$ $\forall\, a \in A$, y $\forall\,(x_\lambda)_\lambda \in H$ pues

$$\varphi : A \longrightarrow B(H) = B(\bigoplus_{\lambda} H_\lambda)$$
$$a \longmapsto \varphi(a) : \bigoplus H_\lambda \longrightarrow \bigoplus H_\lambda$$
$$(x_\lambda)_\lambda \longmapsto \varphi(a)\left((x_\lambda)_\lambda\right) = \left(\varphi_\lambda(a)(x_\lambda)\right)_\lambda$$

donde $\varphi_\lambda : A \longrightarrow B(H_\lambda),\ \forall \lambda \in \Lambda$

$$a \longmapsto \varphi_\lambda(a) : H_\lambda \longrightarrow H_\lambda$$
$$x_\lambda \longmapsto \varphi_\lambda(a)(x_\lambda)$$

Claramente $(H, \varphi) = (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda, \varphi)$ es una representación de A.

Prueba. Como H_λ es un espacio de Hilbert para todo $\lambda \in \Lambda$ entonces $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ es un espacio de Hilbert. Ahora veamos que $\varphi : A \longrightarrow B(H) = B(\bigoplus H_\lambda)$ es un *-homomorfismo. Sean $a, b \in A$ probaremos que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ y $\varphi(a^*) = \varphi^*(a)$, para todo $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus H_\lambda$ se tiene

a) $\varphi(ab)\left((x_\lambda)_\lambda\right) = \left(\varphi_\lambda(ab)(x_\lambda)\right)_\lambda = \varphi(a)\varphi(b)\left((x_\lambda)_\lambda\right)$

Luego $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

b) $\varphi(a^*)\left((x_\lambda)_\lambda\right) = \left(\varphi_\lambda(a^*)(x_\lambda)\right)_\lambda = \left(\varphi_\lambda^*(a)(x_\lambda)\right)_\lambda = \varphi^*(a)\left((x_\lambda)_\lambda\right)$

Luego $\varphi(a^*) = \varphi^*(a)$.

Además es inmediato ver que; si para cada $a \in A \setminus \{0\}$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\varphi_\lambda(a) \neq 0$, entonces (H, φ) es fiel. $\blacksquare$

Observación 1.4.1 Para $A \neq 0$ su representación universal es definida por la suma directa de todas las representaciones $(H_\lambda, \varphi_\lambda)$

Teorema 1.4.1 Si H es un espacio pre Hilbert, $\langle , \rangle_H$ es un producto interno en H, y si $\mathbb{H}$ es la completación de H (es decir si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe $x \in \mathbb{H}$ tal que $h_n \longrightarrow x$). Entonces existe un producto interno $\langle , \rangle_{\mathbb{H}}$ sobre $\mathbb{H}$ tal que $\langle x, y\rangle_{\mathbb{H}} = \langle x, y\rangle_H$, para todo $x, y \in H$ y la métrica en $\mathbb{H}$ es inducida por este producto interno $\langle , \rangle_{\mathbb{H}}$

Prueba: Ver [3] página 5. ∎

Definición 1.4.2 Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es una aplicación lineal entre C^*-**álgebras**. Se dice que φ es positiva si $\varphi(A^+) \subseteq B^+$; donde

$$A^+ = \{\text{conjunto de elementos positivos de } A\}$$

Una funcional lineal positiva también se llama estado. Si A tiene unidad con $\varphi(1_A) = 1_B$, esto es $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es un estado si

i) φ es lineal.

ii) $a \in A$, $a \geq 0$ entonces $\varphi(a) \geq 0$.

iii) $\varphi(1) = 1$.

Teorema 1.4.2 Supongase que τ es un funcional lineal positivo sobre un C^*-**álgebra** A.

1. Para cada $a \in A$, $\tau(a^*a) = 0$ si y solo si $\tau(ba) = 0$, $\forall\, b \in A$
2. $\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b)$, $\forall\, a, b \in A$

Prueba. Ver [12] página 90. ∎

Teorema 1.4.3 Si, τ es una funcional lineal positiva sobre un C^*-álgebra A, entonces τ es acotada.

Prueba. Supóngase que τ no es acotada entonces $\sup\limits_{a\in A^+} \tau(a) = +\infty$ para $\|a\| < 1$, de aqui existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^+$ tal que $2^n \leq \tau(a_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ pongamos $a = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{2^n} \in A^+$. Ahora $1 \leq \tau\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ y por consiguiente para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$k \leq \sum_{n=0}^{k-1} \tau\left(\frac{a_n}{2^n}\right) = \tau\left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{2^n}\right) \leq \tau(a)$$

de aquí $\tau(a)$ es una cota superior para el conjunto $\mathbb{N}$ lo cual es una contradicción. Por tanto τ es acotada. ∎

Definición 1.4.3 Una aproximación unitaria para una C^***-álgebra** A es una sucesión creciente $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos positivos en la bola unitaria cerrada de A tal que $a = \lim a\, u_\lambda,\ \forall\, a \in A$

Teorema 1.4.4 Sea τ una funcional lineal positiva sobre un C^*-álgebra A, entonces

$$\tau(a^*) = \overline{\tau(a)} \text{ y } |\tau(a)|^2 \leq \|\tau\|\, \tau(a^*a),\ \forall\, a \in A$$

Prueba. Sea $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una aproximación unitaria para A, entonces

$$\tau(a^*) = \lim \tau(a^* u_\lambda) = \lim \overline{\tau(u_\lambda\, a)} = \overline{\tau(a)}$$

También; $|\tau(a)|^2 = \lim |\tau(u_\lambda\, a)|^2 \leq \sup \tau(u_\lambda^2)\tau(a^*a) \leq \|\tau\|\, \tau(a^*a)$ ■

Teorema 1.4.5 Sea A un C^*-álgebra, $a \in A$ normal, entonces existe un estado τ de A tal que $\|a\| = |\tau(a)|$

Prueba. Ver [12] página 90. ■

Consideremos

$$A_{sa} = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} :\ f \text{ función real-valuada}\}$$

Observación 1.4.2 Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es una aplicación lineal positiva, entonces $\varphi(A_{sa}) \subseteq B_{sa}$ y la aplicación restricción $\varphi/_{A_{sa}} : A_{sa} \longrightarrow B_{sa}$ es creciente ($\|\varphi(a)\| \leq \|a\|,\ a \in A_{sa}$). También cada *-homomorfismo es positivo.
De cada funcional lineal positiva, existe una representación asociada. Supóngase que $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal positiva en un C^*-álgebra A. Pongamos

$$N_\tau = \{a \in A :\ \tau(a^*a) = 0\}$$

Claramente $N_\tau \leq A$ (ideal izquierdo) mas aún la aplicación $\mathcal{F} : \frac{A}{N_\tau} \times \frac{A}{N_\tau} \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\mathcal{F}(a + N_\tau, b + N_\tau) = \tau(b^*a) = \langle a + N_\tau, b + N_\tau\rangle$ es un producto interno bien definido sobre $\frac{A}{N_\tau}$. Escribamos por H_τ la completación Hilbert de $\frac{A}{N_\tau}$, es decir

$$H_\tau = \frac{\widetilde{A}}{N_\tau}$$

Si $a \in A$ definimos un operador $\varphi(a) \in \frac{A}{N_\tau}$ es decir $\varphi(a) : \frac{A}{N_\tau} \longrightarrow \frac{A}{N_\tau}$ como

$$\varphi(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau$$

Observación 1.4.3

1. $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$

   En efecto. $\|\varphi(a)\| = \sup \left\{ \|\varphi(a)(b + N_\tau)\| : \ b + N_\tau \in \frac{A}{N_\tau} \right\}$

$$= \text{ínf} \left\{ \|ab + n\| : \ n \in N_\tau \right\} \leq \|a\|$$

2. $\|\varphi(a)(b + N)\|^2 = \langle \varphi(a)(b + N_\tau), \varphi(a)(b + N_\tau) \rangle$

$$= \tau \left(b^*(a^*a)b \right)$$

$$\leq \|a\|^2 \tau(b^*b)$$

$$= \|a\|^2 \|b + N_\tau\|^2$$

   Entonces $\|\varphi(a)(b + N_\tau)\|^2 = \tau(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \tau(b^*b) = \|a\|^2 \|b + N_\tau\|$.

Teorema 1.4.6 ***(Gelfand-Naimark).***
Si A es un C^*-álgebra entonces ésta tiene una representación fiel, específicamente, su representación universal es fiel.

Prueba. Sea (H, φ) la representación universal de A y supongamos que $a \in A$ es tal que $\varphi(a) = 0$ entonces existe un estado τ en A tal que $\|a^*a\| = \tau(a^*a)$.
De aqui, si $b = (a^*a)^{\frac{1}{4}}$, entonces $\|a\|^2 = \tau(a^*a) = \tau(b^4) = \|\varphi_\tau(b)(b + N_\tau)\|^2 = 0$ (pues $\tau_\tau(b^4) = \varphi_\tau(a^*a) = 0$, asi $\varphi_\tau(b) = 0$) de donde $a = 0$ por tanto φ es inyectiva. $\blacksquare$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $M_n(A)$ denota el álgebra de todas las matrices $n \times n$ con entradas en A.

Afirmación: Si A es un *-álgebra, entonces $M_n(A)$ es un *-álgebra

En efecto. Basta definir la involución $* : M_n(A) \longrightarrow M_n(A)$ como $A^* = \overline{A^t}$ ■

Afirmación: El álgebra $M_n(A)$ es un C^*-álgebra con la norma

$$\|A_{ij}\| = \sup \|g'(A_{ij})\|$$

donde

$$g' : M_n(A) \longrightarrow B(H^n)$$

$$(A_{ij}) \longmapsto g'(A_{ij}) = g(A_{ij})$$

y (g, H) es la representación universal de A con $g : A \longrightarrow B(H)$ (*-homomorfismo)

En efecto. Basta aplicar la definición de representación de un C^*-álgebra (representación universal). ■

Ahora si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo entre *-álgebras su inducido es un *-homomorfismo que lo denotamos $\varphi_n = \widetilde{\varphi} : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$

$$\widetilde{\varphi}\left((a_{ij})\right) = (\varphi(a_{ij})) = \varphi_n\left((a_{ij})\right)$$

Si H es un espacio de Hilbert, escribimos $H^n = H \oplus ... \oplus H$ (n-copias). Sea $u \in M_n\left(B(H)\right)$, definimos $\varphi(u) \in B(H^n)$ como sigue

$$\varphi : M_n\left(B(H)\right) \longrightarrow B(H^n)$$

$$u \longmapsto \varphi(u) : \quad H^n \quad \longrightarrow \quad H^n$$

$$(x_1, .., x_n) \longmapsto \varphi(u)(x_1, .., x_n) = (\sum_{j=1}^{n} u_{1j}(x_j), .., \sum_{j=1}^{n} u_{nj}(x_j))$$

Fácilmente se verifica que φ es un *-isomorfismo al cual se le llama *-isomorfismo canónico, así escribimos $M_n\left(B(H)\right) = B(H^n)$. Ahora si $v \in B(H^n)$ es un operador entonces existe $u \in M_n\left(B(H)\right)$, tal que $v = \varphi(u)$; u es llamado el operador matriz de v.

Definimos una norma en $M_n\left(B(H)\right)$ haciendo este un C^*-álgebra poniendo

$$\|u\| = \|\varphi(u)\|$$

Observación 1.4.4 Sea $u \in M_n(B(H))$ fácilmente se verifica que

$$\|u_{ij}\| \leq \|u\| \leq \sum_{k,l=1}^{n} \|u_{kl}\| \ (i,j = 1,2,..,n)$$

Teorema 1.4.7 Si A es un C^*-álgebra, entonces existe una única norma sobre $M_n(A)$ haciendo esta una C^*-álgebra.

Prueba. Sea (H, φ) la representación universal de A (es decir $\varphi : A \longrightarrow B(H)$ es un *-homomorfismo) asi tenemos el inducido $\widetilde{\varphi} : M_n(A) \longrightarrow M_n(B(H))$ un *-homomorfismo el cual es inyectivo (pues recuerde que si para cada $a \in A \backslash \{0\}$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\varphi_\lambda(a) \neq 0$ entonces (H, φ) es fiel).
Definimos una norma en $M_n(A)$ haciendo este un C^*-álgebra poniendo $\|a\| = \|\varphi(a)\|$, para $a \in M_n(A)$ usando la desigualdad de la observación (1.4.4) facilmente se verifica que $M_n(A)$ es un C^*-álgebra.
Unicidad: Sean $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre la C^*-álgebra $M_n(A)$ entonces

$$\begin{aligned}\|a\|_j^2 &= \|a^*a\|_j \\ &= \|\varphi(a^*a)\|_j \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\in H} \{\|\varphi(a^*a)(x)\|\},\ j = 1,2\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ ∎

Observación 1.4.5 Si A es un C^*-álgebra y $a \in M_n(A)$ entonces

$$\|a_{ij}\| \leq \|a\| \leq \sum_{k,l=1}^{n} \|a_{kl}\| \ (i,j = 1,..,n)$$

La Construcción de Gelfand, Naimark, Segal

Consideremos ahora la construcción de una representación de un estado de un C^*-álgebra A sobre A. Esto llevará a la conclusión de que cualquier álgebra C^* puede ser visto como un álgebra C^* de operadores sobre un espacio de Hilbert.

Definición 1.4.4 Sea A un álgebra C^* con unidad y (H, π) una representación de A. Un vector $\xi \in H$ es llamado vector cíclico (para la representación) si $\pi(A)\xi$ es denso en H. Si (H, π) tiene un vector cíclico, entonces esta es llamada una representación cíclica.

Ahora, dada cualquier representación (H, π) de A y cualquier vector unitario $\xi \in H$, la aplicación $x \longmapsto \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle$ es claramente un estado sobre A. (Observar que si $x > 0$, entonces existe $a \in H$ tal que $x = a^*a$ entonces $\pi(x) = \pi(a)^*\pi(a)$, $\langle \pi(x)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)^*\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle \geq 0$).
Así pues, dada cualquier representación podemos construir fácilmente estados sobre un álgebra C^*. La siguiente construcción establece la recíproca.

Teorema 1.4.8 ***(Gelfand, Naimark, Segal)***
Sea A un álgebra C^* con unidad y ω un estado en A. Entonces existe una representación cíclica (H, π) de A con vector cíclico unitario $\Omega \in H$ tal que $\omega(a) = \langle \pi(a)\Omega, \Omega \rangle$, para toda $a \in A$.
La tripleta (H, π, Ω) es única salvo equivalencia unitaria, es decir si (H', π', Ω') es otra tripleta, entonces existe un operador unitario $\mathcal{U} : H' \longrightarrow H$ tal que $\mathcal{U}(\Omega') = \Omega$ y $\mathcal{U}\pi'(a)\mathcal{U}^{-1} = \pi(a)$, $\forall\, a \in A$.

Prueba. Sea $N = \{x \in A : \omega(x^*x) = 0\}$. Entonces para cualquier $a \in A$ y $x \in N$, la desigualdad de Schwarz nos da $\omega((ax)^*ax) = \omega(x^*a^*ax) \leq \omega(x^*x)^{1/2}\omega(y^*y)^{1/2} = 0$, con $y = a^*ax$ lo cual muestra que $ax \in N$. Por tanto N es un ideal izquierdo en A.
Sea $K = \frac{A}{N}$ como espacio vectorial, y para cada $\xi, \eta \in K$ definimos $\langle \xi, \eta \rangle = \omega(y^*x)$, donde $x \in \xi$ y $y \in \eta$. Es directo verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una forma sesquilineal bien definida sobre K es decir define un producto interno.
En efecto. $\langle \eta, \xi \rangle = \omega(x^*y) = \omega(y^*x)^* = \overline{\omega(y^*x)} = \overline{\langle \xi, \eta \rangle}$ observar que si $\|\xi\|_\omega^2 = \langle \xi, \xi \rangle = 0$, entonces $\omega(x^*x) = 0$ para cualquier $x \in \xi$. De aqui $x \in N$ y por tanto $\xi = 0$ en $K = \frac{A}{N}$. En otras palabras $\| \cdot \|_\omega$ es una norma en K.
Definimos una acción de A en K por $L_a\xi = clax$ para $a \in A$ y donde $x \in \xi$

observar que si $a \in A, x_1, x_2 \in \xi$, entonces $x_1 - x_2 \in N$ asi $clax_1 = clax_2$.
Además $\|L_a\xi\|_\omega^2 = \langle L_a\xi, L_a\xi\rangle = \langle clax, clax\rangle = \omega((ax)^*(ax)) = \omega(x^*a^*ax)$, con $x \in \xi$, luego

$$\|L_a\xi\|_\omega^2 = \omega(x^*a^*ax) \tag{1.5}$$

Pongamos $\rho(b) = \omega(x^*bx)$ para cualquier $b \in A$. Entonces vemos que ρ es lineal y también si $b \geq 0$, entonces $x^*bx \geq 0$ luego $\rho(b) \geq 0$. De aqui que $\rho(b)$ es un funcional lineal positivo sobre A y por tanto $\|\rho\| = \rho(1)$.
Es decir $|\rho(b)| \leq \rho(1)\|b\|$, para todo $b \in A$. Entonces, tomando $b = a^*a$ tenemos $|\omega(x^*a^*ax)| \leq \omega(x^*x)\|a^*a\| = \omega(x^*x)\|a\|^2 = \langle\xi,\xi\rangle\,\|a\|^2$ luego

$$|\omega(x^*a^*ax)| \leq \langle\xi,\xi\rangle\,\|a\|^2 \tag{1.6}$$

De (1.5) y (1.6) se tiene $\|L_a\xi\|_\omega^2 \leq \|\xi\|^2\|a\|^2$ es decir $\|L_a\xi\|_\omega \leq \|\xi\|_\omega\|a\|$. De aqui, L_a define un operador lineal acotado en $K = \frac{A}{N}$ se verifica inmediatamente la relaciones

$$L_{a+b} = L_a + L_b$$

$$L_{ab} = L_aL_b$$

$$L_1 = 1_K$$

y $\langle L_{a^*}\xi,\eta\rangle = \omega(y^*a^*x) = \omega((ay)^*x) = \langle\xi, L_a\eta\rangle$, donde $x \in \xi$, $y \in \eta$.
Sea H la completación de K con respecto a la norma $\|\cdot\|_\omega$. Entonces H es un espacio de Hilbert y contiene (una copia isomorfa) de K como un subconjunto denso. Sea $\Omega \in K$ dado por $\Omega = cl1$. Entonces si $\xi \in K$ debe existir $x \in A$ tal que $\xi = clx = clx1 = L_x\Omega$ de aqui que $K = \{L_x\Omega : x \in A\}$.
Para cada $a \in A$, L_a es una aplicación lineal acotada de K en K y por tanto tiene una única extensión lineal acotada digamos $\pi(a)$ de H en H. Las relaciones anteriores permanecen válidas y por tanto vemos que

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow B(H) \\ a &\longmapsto \pi(a) \end{aligned}$$

es una representación de A en H. Desde que $K = \{L_x\Omega : x \in A\} = \{\pi(x)\Omega : x \in A\}$ es denso en H, se sigue que Ω es un vector cíclico para la representación (H, π) notar que, para cualquier $a \in A$, $\langle \pi(a)\Omega, \Omega\rangle = \langle L_a cl1, cl1\rangle = \langle cla, cl1\rangle = \omega(1^*a) = \omega(a)$.
Para establecer la unicidad, salvo equivalencia unitaria, supongamos que (H', π', Ω') es otra tal tripleta.
Definimos $\mathcal{U} : H' \longrightarrow H$ por $\mathcal{U}(\pi'(a)\Omega') = \pi(a)\Omega$. Entonces $\|\mathcal{U}\pi'(a)\Omega'\|_H^2 = \|\pi(a)\Omega\|_H^2 = \|L_a\Omega\|_H^2 = \langle cla, cla\rangle = \omega(a^*a) = \langle \pi'(a^*a)\Omega', \Omega'\rangle = \langle \pi'(a)^*\pi'(a)\Omega', \Omega'\rangle = \langle \pi'(a)\Omega', \pi'(a)\Omega'\rangle = \|\pi'(a)\Omega'\|_{H'}^2$.
Por tanto, $\mathcal{U}$ es un operador lineal isométrico de un conjunto denso en H' a un conjunto denso en H y de este modo podemos definir una extensión unitaria de H' sobre H.
Veamos que $\mathcal{U}$ satisface las condiciones requeridas $\mathcal{U}\pi'(a)\mathcal{U}^{-1}\pi(b)\Omega = \mathcal{U}\pi'(a)\pi'(b)\Omega' = \mathcal{U}\pi'(ab)\Omega' = \pi(ab)\Omega = \pi(a)\pi(b)\Omega$ entonces $(\mathcal{U}\pi'(a)\mathcal{U}^{-1})(\pi(b)\Omega) = \pi(a)(\pi(b)\Omega)$ para todo $a, b \in A$.
Como $\pi(A)\Omega$ es denso en H, deducimos que $\mathcal{U}\pi'(a)\mathcal{U}^{-1} = \pi(a)$, para todo $a \in A$ claramente $\mathcal{U}(\Omega') = \Omega$. ■

Observación 1.4.6 (H, π, Ω) es llamada la representación (o tripleta) de Gelfand, Naimark, Segal (GNS) asociada con ω en A.

Ejemplo 1.4.1 Sea $H_\circ$ un espacio de Hilbert y sea $\xi \in H_\circ$ un vector unitario. Sea ω el estado sobre $B(H_\circ)$ dado por $x \mapsto \langle x\xi, \xi\rangle$, $x \in B(H_\circ)$. Entonces la tripleta GNS (H, π, Ω) es la representación con $H = H_\circ$, $\Omega = \xi$ y $\pi(x) = x$, para todo $x \in B(H_\circ)$. Esto se sigue de la unicidad.

$$\begin{aligned} \pi : A = B(H_\circ) &\longrightarrow B(H_\circ) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

donde $\omega(x) = \langle x\xi, \xi\rangle = \langle \pi(x)\xi, \xi\rangle$

Teorema 1.4.9 Cualquier álgebra C^*, A, es isométricamente isomorfo * a un álgebra C^* de operadores sobre un espacio de Hilbert.

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A tiene unidad (si no tuviera, consideramos $\widetilde{A}$ en vez de A). Sea S_A el conjunto de estados de A y para cada $\omega \in S_A$ sea $(H_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ la correspondiente representación GNS de A. Sea (H, π) su suma directa, $H = \bigoplus_{\omega \in S_A} H_\omega$ y $\pi = \bigoplus_{\omega \in S_A} \pi_\omega$. Sea Ω el vector $\bigoplus \Omega_\omega$.
Supongamos que $\pi(a) = \pi(b)$ para algún $a, b \in A$. Entonces $(\pi(a) - \pi(b))\Omega = 0$ entonces $(\pi(a-b))\Omega = 0$ luego $\bigoplus_{\omega \in A} \pi_\omega(a-b)\Omega_\omega = 0$. Por lo tanto $\pi_\omega(a-b)\Omega_\omega = 0$, para todo $\omega \in S_A$.
En particular, $\omega(a-b) = \langle \pi_\omega(a-b)\Omega_\omega, \Omega_\omega \rangle = 0$, para todo $\omega \in S_A$. Pero S_A separa puntos de A, luego $a = b$ de modo que π es fiel (inyectiva) y por tanto A es isometricamente isomorfo * a $\pi(A)$. ∎

1.5. Productos y sumas de C^*-álgebras

Sea $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de C^*-álgebras asociaremos las C^*-álgebras producto $\prod_{i\in\Lambda} A_i$ y suma $\sum_{i\in\Lambda} A_i$ donde $\prod_{i\in\Lambda} A_i = \left\{ a : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{i\in\Lambda} A_i \;/\; a(i) \in A_i,\ \forall\, i \in \Lambda \right\}$ y $\|a\| = \sup\{\|a(i)\|_{A_i} : i \in \Lambda\}$ con $a \in \prod_{i\in\Lambda} A_i$. Escribiremos $\|a(i)\|$ en lugar de $\|a(i)\|_{A_i}$ y para un elemento $a \in \prod_{i\in\Lambda} A_i$ escribimos $(a_i)_{i\in\Lambda}$ o simplemente (a_i), con $a(i) = a_i$.

Proposición 1.5.1 El producto $\prod A_i$ es un C^*-álgebra.

Prueba. Se verifica fácilmente que $\prod A_i$ es un *-álgebra. Mostraremos la desigualdad triangular, que $\|a^*a\| = \|a\|^2$ y que $\prod A_i$ es completo. Sean $a = (a_i)_{i\in\Lambda}$ y $b = (b_i)_{i\in\Lambda}$ en $\prod_{i\in\Lambda} A_i$ dados. claramente $\|a_i\| \leq \|a\|$ y $\|b_i\| \leq \|b\|$, $\forall\, i \in \Lambda$. Ahora $\|(a+b)i\| = \|a_i + b_i\| \leq \|a_i\| + \|b_i\| \leq \|a\| + \|b\|$; $\forall\, i \in \Lambda$.
Por consiguiente $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$. Como $\|(a^*a)i\| = \|a_i^* a_i\| = \|a_i\|^2$ para cada $i \in \Lambda$, concluímos que $\|a^*a\| = \|a\|^2$.
Sea $\{a^{(n)}\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\prod A_i$ entonces $\left\{a_i^{(n)}\right\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en A_i con un límite a_i en A_i para cada $i \in \Lambda$ fijo. Pongamos $a = (a_i)_{i\in\Lambda}$

dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^{(n)} - a^{(m)}\| \leq \varepsilon$ siempre que $m, n \geq n_\circ$ entonces para cada $n \geq n_\circ$ y cada $i \in \Lambda$ se tiene

$$\|a_i^{(n)} - a_i\| = \lim_{m \longrightarrow \infty} \|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}\| \leq \varepsilon$$

De aqui $\|a_i\| \leq \|a_i^{(n_\circ)}\| + \varepsilon \leq \|a^{(n_\circ)}\| + \varepsilon$. Para todo $i \in \Lambda$, y esto muestra que $a \in \prod A_i$. Se sigue entonces que $\|a^{(n)} - a\| \leq \varepsilon \; \forall n \geq n_\circ$, probando de esta manera que $a^{(n)} \longrightarrow a$ por consiguiente $\prod A_i$ es completo.

Escribamos $\mathcal{I} = \left\{ a \in \prod\limits_{i \in \Lambda} A_i \; : \; a(i) = 0, \text{ salvo un número finito de elementos } i \in \Lambda \right\}$ y sea $\sum\limits_{i \in \Lambda} A_i$ la clausura de $\mathcal{I}$ la siguiente proposición entonces es fácilmente verificable. ■

Proposición 1.5.2 El conjunto $\mathcal{I}$ es un ideal bilatero (no necesariamente cerrado) de $\prod\limits_{i \in \Lambda} A_i$, y $\sum\limits_{i \in \Lambda} A_i$ es un ideal bilatero cerrado en $\prod\limits_{i \in \Lambda} A_i$ en particular, $\sum\limits_{i \in \Lambda} A_i$ es un C^*-álgebra.

Sea $\pi : \prod\limits_{i \in \Lambda} A_i \longrightarrow \dfrac{\prod A_i}{\sum A_i}$ la aplicación cociente. Considerando $\Lambda = \mathbb{N}$ damos el siguiente

Lema 1.5.1 Sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de C^*-álgebras, y sea $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ entonces $\|\pi(a)\| = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sup \|a_n\|$ en particular, $a \in \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ si y sólo si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|a_n\| = 0$

Prueba. Puesto que $\mathcal{I}$ es denso en $\sum A_n$, tenemos $\|\pi(a)\| = \inf \{\|a - b\| \; : \; b \in \mathcal{I}\}$ por continuidad de la aplicación $b \longrightarrow \|a - b\|$. Cada $b = (b_n)$ en $\mathcal{I}$ tiene la propiedad que $b_n = 0$ eventualmente, y por consiguiente $\|a - b\| \geq \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sup \|a_n - b_n\| = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sup \|a_n\|$ esto muestra que $\|\pi(a)\| \geq \limsup \|a_n\|$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $b^{(k)} = (b_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{I}$ dado por

$$b_n^{(k)} = \begin{cases} a_n, & n \leq k \\ 0, & n > k \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[d, "\phi ij"'] & A_\infty \\ A_i \arrow[ur, "\phi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Morfismo canónico del límite directo A_∞ de $*$-álgebras.

entonces $\|\pi(a)\| \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a - b^{(k)}\| = \lim_{k\in\mathbb{N},\, k<n} \sup \|a_n\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \|a_n\| \quad \blacksquare.$

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de C^*-álgebra tal que $A_i \subseteq A_{i+1}$ entonces $A_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es una *-álgebra normada satisfaciendo todos los axiomas de un C^*-álgebra excepto talves la de completitud. Sea A la completación de A_∞ entonces A es un C^*-álgebra, llamado limite creciente de A_n escribamos $A = \lim A_n$.

1.6. Límites directos de *-álgebras

Sea A_i una sucesión infinita de *-álgebras. Supóngase que para cada par $j \leq i$ existe un *-homomorfismo $\phi_{ij} : A_j \longrightarrow A_i$, y que la siguiente condición guarda coherencia $\phi_{ij} = \phi_{ik}\, \phi_{kj}$ siempre que $j \leq k \leq i$, y $\phi_{ii} = 1$. Pongamos

$$A_\infty = \pi\left(\left\{(a_i) \in \prod A_i \;/\; \exists i_\circ\ \forall i :\ i \geq i_\circ \Rightarrow a_i = \phi_{ii_\circ}(a_{i_\circ})\right\}\right)$$

donde $\pi : \prod A_i \longrightarrow \frac{\prod A_i}{\sum A_i}$ es la proyección canónica. A_∞ es llamado **limite directo** del sistema dirigido $\{A_i,\ \phi_{ij}\}$ y denotado $\varinjlim \{A_i,\ \phi_{ij}\}$.

Por definición, A_∞ es un *-álgebra, y existe un morfismo canónico $\phi_i : A_i \longrightarrow A_\infty$ tal que $A_\infty = \bigcup_i \phi_i(A_i)$ y para todo $j \leq i$ el siguiente diagrama conmuta Verdaderamente, para $x \in A_j$ definimos $\phi_j(x) = \pi((a_i))$, donde $a_i = 0$ si $i < j$ y $a_i = \phi_{ij}(x)$ si $i \geq j$.

El limite directo $A_\infty = \varinjlim \{A_i, \phi_{ij}\}$ tiene la siguiente propiedad universal. Si B es un *-álgebra y para cada i existe un *-homomorfismo $\psi_i : A_i \longrightarrow B$ tal que $\psi_i\, \phi_{ij} = \psi_j$ para cada $j \leq i$, entonces existe un único *-homomorfismo $\tau : A_\infty \longrightarrow B$ tal que el diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[d, "\phi_{ij}"'] \arrow[dr] & A_\infty \arrow[d, "\tau"] \\
A_i \arrow[r, "\psi_i"'] \arrow[ur] & B
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.2: Propiedad universal de A_∞.

$$
\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[d, "\phi_{ij}"'] & A_\infty \\
A_i \arrow[ur, "\phi_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.3: Límite inductivo de C^*-álgebras.

Observación 1.6.1 El límite inductivo $\varinjlim \{A_i,\, \phi_{ij}\}$ se define como la clausura del conjunto $\pi\left(\{(a_i) \in \prod A_i \;/\; \exists i_\circ\ \forall i:\ i \geq i_\circ \Rightarrow a_i = \phi_{ii_\circ}(a_{i_\circ})\}\right)$ pues esta definición esta bien dada, los *-homomorfismos entre C^*-álgebras son decrecientes en norma. Por lo anterior existen *-homomorfismos $\phi_i : A_i \longrightarrow A_\infty$ tal que el diagrama conmuta y satisfacen la propiedad universal.

Proposición 1.6.1 Sea A un C^*-álgebra, entonces:

1. Si $a = a^*,\ a \in A$ y $\|a - a^2\| < \frac{1}{4}$ entonces existe una proyección p en A tal que $\|a - p\| < \frac{1}{2}$

2. Sea $p \in \mathcal{P}(A)$, y $a \in A$ tal que $a = a^*$. Si $\delta = \|a - p\|$ entonces $\sigma_A(a) \subseteq [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta]$.

3. Si $p, q \in \mathcal{P}(A)$ tal que existe un elemento $x \in A$ con $\|x^*x - p\| < \frac{1}{2}$ y $\|xx^* - q\| < \frac{1}{2}$, entonces $p \sim q$.

Prueba. Ver [12] página 165

Definición 1.6.1 *Sea A un C^*-álgebra, $v \in A$ es una isometría parcial si v^*v es una proyección*

Capítulo 2

C^*-álgebra de grafos

En este capítulo desarrollamos una clase específica de C^*-álgebra que es la C^*-álgebra de grafos, la cual puede ser asociada con un grafo.Primeramente enlazamos la estructura de un grafo a la de un ideal de un C^*-álgebra generado, mostrandose que cada ideal determina un único subgrafo.

2.1. Álgebra de grafos

Definición 2.1.1 (grafo dirigido)

Un grafo dirigido es una cuaterna $G = (E^\circ, E^1, r, s)$ donde E° y E^1 son conjuntos contables cuyos elementos son llamados vértices y arcos respectivamente y $s, r : E^1 \longrightarrow E^\circ$ son funciones llamadas respectivamente el origen $\boldsymbol{s}$ y extremo $\boldsymbol{r}$ de un arco $e \in E$, es decir, para cada arco $e \in E^1$ *s(e)* es el origen de e y $r(e)$ es el extremo de e. Si $s(e) = v$ decimos que v emite e y si $r(e) = \omega$ se dice que ω recibe a e.

Un grafo dirigido fila-finita es un grafo dirigido tal que

$$r^{-1}(v) = \left\{e \in E^1 :\ r(e) = v\right\} \text{ es finito} \; \forall\, v \in E^\circ$$

Nota: Los grafos dirigidos también se suelen llamar digrafos y se representan dibujando, para cada vértice $v \in E^\circ$ un punto P_v, y para cada arco e, por s_e, con

origen v y extremo w una flecha (o segmento dirigido) desde P_v hasta P_w.
Un grafo dirigido fila-finita simplemente se entenderá por grafo.

Ejemplo 2.1.1 Sean $E^\circ = \{u, v, \omega\}$, $E^1 = \{e, f, g, h\}$.
$s, r : E^1 \longrightarrow E^\circ$ definidos por: $r(e) = r(h) = r(f) = u,\ r(g) = v\ s(e) = u,\ s(h) = s(g) = w,\ s(f) = v$. Gráficamente

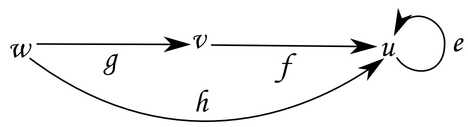


Figura 2.1: Grafo con tres vértices y cuatro arcos.

Observación 2.1.1 Un arco que empieza y termina en un mismo vértice v se llama **lazo** basado en v. Un vértice en el cual no recibe ningún arco se llama *sink*

Ejemplo 2.1.2

1. Consideremos,

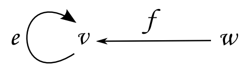


Figura 2.2: Grafo con dos vértices y dos arcos.

Vemos que e es un lazo basado en v y ω es un vértice *sink*

2. Si $E^\circ = \{v\}$, $E^1 = \{e, f\}$, $r(e) = s(e) = v = r(f) = s(f)$, e,f son lazos basados en v.

Gráficamente

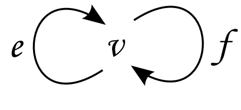


Figura 2.3: Grafo con dos lazos basados en un vértice.

Ejemplo 2.1.3 (grafo infinito)

Sea $G = (E^\circ, E^1, r_E, s_E)$ un grafo dirigido donde $E^\circ = \{v_n : \ n \geq 0\}$, $E^1 = \{e\} \cup \{e_i : \ i \geq 1\}$, $r, s : E^\circ \longrightarrow E^1$ definidos con el gráfico siguiente:

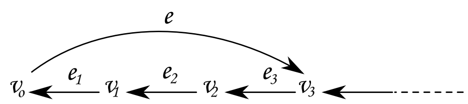


Figura 2.4: Grafo infinito con ciclo.

G asi definido es un grafo infinito

Nosotros ahora buscaremos representar un grafo dirigido por operadores en un espacio de Hilbert.
Los vértices serán representados por proyecciones ortogonales y los arcos o aristas por isometrías parciales en un espacio de Hilbert H.

Definición 2.1.2 ***(álgebra de grafos).***

Sea $E = (E^\circ, E^1, r, s)$ un grafo dirigido fila-finita. Una colección de isometrías parciales $\{s_e : \ e \in E^1\}$ y una colección de proyecciones mutuamente ortogonales $\{p_v \ : \ v \in E^\circ\}$ en un C^*-álgebra B es llamado una familia Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ o simplemente CK-familia si se satisface:

(CK 1.) $s_e^* s_e = p_{s(e)}$, $\forall \, e \in E^1$

(CK 2.) $p_v = \sum\limits_{\substack{r(e)=v \\ e \in E^1}} s_e s_e^*$, siempre que $r^{-1}(v) \neq \phi$

La C^*-álgebra (sobre $\mathbb{C}$) generada por s_e y p_v es un álgebra de grafo la cual es denotada como $C^*(S, P)$.

Ejemplo 2.1.4 Consideremos el grafo dirigido del ejemplo (2.1.2) parte (2) de donde se tiene $s_e^* s_e = p_v = s_f^* s_f$, $p_v = s_e s_e^* + s_f s_f^*$. Tomemos $H = l^2(\mathbb{N}) = span \{e_n : \ n \geq 0\}$ donde $span \{e_n : \ n \geq 0\}$, denota la clausura del espacio $\{e_n : \ n \geq 0\}$, p_v es el operador identidad 1, $s_e(e_n) = e_{2n}$ y $s_f(e_n) = e_{2n+1}$. Entonces $\{S, P\}$ es una familia *Cuntz-Krieger* para este grafo.

Definición 2.1.3 Un camino es una sucesión de arcos (aristas) $u := u_1u_2....u_n$ con $u_i \in E^1$ tal que $s(u_i) = r(u_{i+1})$, $|u| = n$ es la longitud del camino, $s(u) = s(u_{|n|})$ y $r(u) = r(u_1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, E^n es definido como la colección de caminos de longitud "n".

Extendemos esto para incluir E° y simplificamos llamándolo camino de longitud cero a los vértices para lo cual $r(v) = s(v) = v$ denotemos $E^* = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} E^n$. Para cada $u \in \prod\limits_{i=1}^{n} E^1$.

Definimos $s_u = s_{u_1}s_{u_2}...s_{u_n}$, con $u = u_1u_2...u_n$ i.e. $s_{u_1u_2...u_n} = s_{u_1}s_{u_2}...s_{u_n}$, y para $v \in E^\circ$, definimos $s_v = p_v$. Si u es un camino entonces:
$s_u^*s_u = (s_{u_1}...s_{u_n})^*(s_{u_1}...s_{u_n}) = s_{u_n}^*...s_{u_1}^*s_{u_1}...s_{u_n} = s_{u_n}^*...s_{u_2}^*p_{s(u_1)}s_{u_2}...s_{u_n} =$
$s_{u_n}^*...s_{u_2}^*p_{r(u_2)}s_{u_2}...s_{u_n} = s_{u_n}^*...s_{u_3}s_{u_2}^*s_{u_2}s_{u_3}^*...s_{u_n} = ... = p_{s(u_n)} = p_{s(u)}$. Por tanto

$$s_u^*s_u = P_{s(u)} \text{ Así } p_{r(u)}s_us_u^* = s_us_u^*$$

Proposición 2.1.1 Supóganse que E es un grafo fila-finita y $\{S, P\}$ una familia de Cuntz-Krieger en un C^*-álgebra B entonces:

1. Las proyecciones $\{s_es_e^* \,/\, e \in E^1\}$ son mutuamente ortogonales.
2. Si $s_e^*s_f \neq 0$, entonces $e = f$.
3. Si $s_es_f \neq 0$, entonces $s(e) = r(f)$.
4. Si $s_es_f^* \neq 0$, entonces $s(e) = s(f)$

Prueba.

1. Primero supongamos que $r(e) = r(f)$ entonces por (CK 2) se tiene que $p_{r(e)} = s_es_e^* + s_fs_f^* +$ otras proyecciones, y como $p_{r(e)}$ es una proyección entonces $s_es_e^*$ y $s_fs_f^*$ son mutuamente ortogonales. Ahora si $r(e) \neq r(f)$; y siendo $s_e = p_{r(e)}s_e = s_ep_{s(e)}$ entonces se tiene $(s_es_e^*)(s_fs_f^*) = s_es_e^*p_{r(e)}s_fs_f^* = 0$, pues $p_{r(e)}p_{r(f)} = 0$.

2. Supongamos que $e \neq f$; entonces $s_e^* s_f = (s_e^* s_e s_e^*)(s_f s_f^* s_f) = s_e^*(s_e s_e^* s_f s_f^*) s_f = 0$ lo cual es una contradicción por lo tanto $e = f$.

3. Supongamos que $s(e) \neq r(f)$; entonces $s_e s_f = (s_e p_{s(e)})(p_{r(f)} s_f) = s_e(p_{s(e)} p_{r(f)}) s_f = s_e 0 s_f = 0$ nuevamente esto es una contradicción; luego $r(f) = s(e)$.

4. Supongamos que $s(e) \neq s(f)$; entonces $s_e s_f^* = (s_e p_{s(e)})(p_{s(f)} s_f^*) = s_e(p_{s(e)} p_{s(f)}) s_f^* = s_e 0 s_f^* = 0$ contradicción luego $s(e) = s(f)$

Corolario 2.1.1 Supóngase que E es un grafo fila-finita y $\{S, P\}$ es una E-familia de Cuntz-Krieger en un C^*-álgebra B y sean $u, v \in E^*$ entonces $(s_u s_u^*)(s_v s_v^*) = 0$; para $u \neq v$ con $|u| = |v|$.

Prueba. Sea k el menor entero tal que $u_k \neq v_k$. Por la definición de camino para $u_1 u_2 ... u_{k-1}$ dado, se tiene:
$s_u^* s_v = (s_{u_1} ... s_{u_n})^*(s_{v_1} ... s_{v_n}) = s_{u_n}^* ... s_{u_k}^* \left[(s_{u_{k-1}}^* ... s_{u_1}^*)(s_{u_1} s_{u_2} ... s_{u_{k-1}})\right] s_{v_k} ... s_{v_n} = s_{u_n}^* ... s_{u_k}^* p_{s(u_{k-1})} s_{v_k} ... s_{v_n} = s_{u_n}^* ... s_{u_k}^* p_{r(u_k)} s_{v_k} ... s_{v_n} = s_{u_n}^* ... s_{u_k}^* s_{v_k} ... s_{v_n}$ por la parte (2) de la proposición (2.1.1) se tiene que $s_{u_k}^* s_{v_k} = 0$. Asi $s_u^* s_v = 0$ finalmente $(s_u s_u^*)(s_v s_v^*) = 0$.

2.2. Estructura de álgebra de grafos

Existe una forma elegante de expresar elementos arbitrarios del álgebra $C^*(S, P)$.

Teorema 2.2.1 $C^*(S, P) = \overline{span}\,\{s_u s_v^* : \ u, v \in E^*\ ,\ s(u) = s(v)\}$, donde $\overline{span}\,\{s_u s_v^*\}$ denota la clausura del espacio de todos los elementos de tipo $s_u s_v^*, u, v \in E^*$, con $s(u) = s(v)$.

Prueba.
Antes de probar el teorema (2.2.1), probaremos un conjunto de lemas. El primero de los cuales es necesario para probar que $span\,\{s_u s_v^* : \ u, v \in E^*\ ,\ s(u) = s(v)\}$ es un subálgebra de $C^*(S, P)$.

En los siguientes cálculos suponemos que todas las proyecciones asociadas a un grafo son no cero. Una extensión para el caso general es trivial.

Lema 2.2.1

1. Si $u \notin E^*$ entonces $s_u = 0$

2. s_u es una isometría parcial

3. $s_u s_v = s_{uv}$, si $s_u s_v \neq 0$

4. $s_u^* s_v^* = s_{vu}^*$

Prueba.
1.- Si $u \notin E^* = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} E^n$ entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $s(u_i) \neq r(u_{i+1})$ entonces

$$s_{u_i} s_{u_{i+1}} = (s_{u_i} s_{u_i}^* s_{u_i})(s_{u_{i+1}} s_{u_{i+1}} s_{u_{i+1}}^* s_{u_i} = s_{u_i} p_{s(u_i)} p_v s_{u_i} = s_{u_i} p_{s(u_i)} p_{r(u_{i+1})} s_{u_i} = 0$$

Entonces $s_{u_i} s_{u_{i+1}} = 0$ asi tenemos que $s_u = 0$.

2.-
- Si $u \notin E^*$ entonces por (1) se tiene que $s_u = 0$, así $s_u^* s_u = 0$.
  Por lo tanto se tiene el resultado.

- De otro lado tomemos $s_u^* s_u$ calculemos

$$s_u^* s_u = s_{u_1 \ldots u_n}^* s_{u_1 \ldots u_n} = p_{s(u_n)} = p_{s(u)}$$

Entonces $s_u^* s_u$ es una proyección, en consecuencia s_u es una isometría.
3.- Sean $u, v \in E^* = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} E^n$ entonces $u = u_1 u_2 \ldots u_k,\ v = v_1 v_2 \ldots v_r,\ k, r \in \mathbb{N}^*$, ahora

$$s_u s_v = s_{u_1 \ldots u_k} s_{v_1 \ldots v_r} = s_{uv}$$

Por lo tanto $s_u s_v = s_{uv}$.
4.- $s_u^* s_v^* = (s_v s_u)^* = (s_{vu})^* = s_{vu}^*$ Por lo tanto $s_u^* s_v^* = s_{vu}^*$. ∎

Lema 2.2.2 Si $s_u s_v^* \neq 0$ entonces $s(u) = s(v)$

Demostración. Si $u, v \in E^1$, supongamos que $s(u) \neq s(v)$ entonces calculemos $s_u s_v^*$

$$s_u s_v^* = (s_u p_{s(u)})(p_{s(v)} s_v^*) = s_u(p_{s(u)})(p_{s(v)}) s_v^* = s_u 0 s_v^* = 0$$

Por lo tanto $s(u) = s(v)$. ∎

Lema 2.2.3

$$s_u^* s_v = \begin{cases} s_{u'}^* & \text{si}\, u = vu'\, \text{para algún}\, u' \in E^* \\ s_{v'} & \text{si}\, v = uv'\, \text{para algún}\, v' \in E^* \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Prueba. Si $s_u^* s_v = 0$; no hay nada que probar.

Veamos el caso $s_u^* s_v \neq 0$ y asumamos que $|v| \leq |u|$ elijamos un α tal que $u = \alpha u'$ con $|\alpha| = |v|$. Entonces $s_u^* s_v = s_{\alpha u'}^* s_v = (s_\alpha s_{u'})^* s_v = s_{u'}^* (s_\alpha^* s_v)$.

1. Si $\alpha = v$, entonces

   $$s_u^* s_v = s_{u'}^* (s_\alpha^* s_v) = s_{u'}^* (s_v^* s_v) s_{u'}^* p_{s(v)} = s_{u'}^* p_{r(u')} = s_{u'}^*$$

   En un camino $u = u_1 ... u_n$ se tiene que $s(u_i) = r(u_{i+1})$ en nuestro caso $u = \alpha u' = vu'$ entonces $s(v) = r(u')$

   Por lo tanto $s_u^* s_v = s_{u'}^*$

2. Si $\alpha \neq v$; por corolario (2.1.1) se tiene que $s_\alpha^* s_v = 0$ de donde $s_u^* s_v = s_{u'}^* (s_\alpha^* s_v) = 0$. Por lo tanto $s_u^* s_v = 0$

Veamos ahora el caso $|u| \leq |v|$, elijamos un β tal que $v = \beta v'$ con $|\beta| = |u|$; entonces

$$s_u^* s_v = s_u^* s_{\beta v'} = (s_u^* s_\beta) s_{v'}$$

1. Si $\beta = u$, entonces se tiene

   $$s_u^* s_v = (s_u^* s_\beta) s_{v'} = (s_u^* s_u) s_{v'} = P_{s(u)} s_{v'} = P_{r(v')} s_{v'} = s_{v'}$$

   Por lo tanto $s_u^* s_v = s_{v'}$. ∎

Corolario 2.2.2 Supóngase que E es un grafo fila-finita y $\{S, P\}$ es una E-familia Cuntz-Krieger en un C^*-álgebra B. Para $u, v, \alpha, \beta \in E^*$ se tiene

$$(s_u s_v^*)(s_\alpha s_\beta^*) = \begin{cases} s_{u\alpha'} s_\beta^* & \text{si } \alpha = v\alpha' \\ s_u s_{\beta v'}^* & \text{si } v = \alpha v' \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.1}$$

En particular, se sigue que cada producto finito no cero de las isometrías parciales s_e y s_f^* tienen la forma $s_u s_v^*$ para algún $u, v \in E^*$ con $s(u) = s(v)$.

Prueba.

$$\begin{aligned}(s_u s_v^*)(s_\alpha s_\beta^*) &= s_u(s_v^* s_\alpha) s_\beta^* \\ &= \begin{cases} s_u s_{v'}^* s_\beta^* & \text{si } v = \alpha v' \\ s_u s_{\alpha'} s_\beta^* & \text{si } \alpha = v\alpha' \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \\ &= \begin{cases} s_u (s_\beta s_{v'})^* & \text{si } v = \alpha v' \\ s_u s_{\alpha'} s_\beta^* & \text{si } \alpha = v\alpha' \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \\ &= \begin{cases} s_u (s_{\beta v'})^* & \text{si } v = \alpha v' \\ s_{u\alpha'} s_\beta^* & \text{si } \alpha = v\alpha' \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(s_u s_v^*)(s_\alpha s_\beta^*) = \begin{cases} s_u s_{\beta v'}^* & \text{si } v = \alpha v' \\ s_{u\alpha'} s_\beta^* & \text{si } \alpha = v\alpha' \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

■

Demostración del teorema (2.2.1)

Por la ecuación (2.1) se tiene que el conjunto $H = span\,\{s_u s_v^* :\ u, v \in E^*,\ s(u) = s(v)\}$

es un subálgebra de $C^*(S,P)$ y por ende H es una *-subálgebra de $C^*(S,P)$ de aqui $\overline{H} \subset \overline{C^*(S,P)} = C^*(S,P)$ i.e. $\overline{span}\{s_u s_v^* : \ u,v \in E^*, \ s(u)=s(v)\} \subset C^*(S,P)$ asi $\overline{span}\{s_u s_v^* : \ u,v \in E^*, \ s(u)=s(v)\}$ es una *-subálgebra de $C^*(S,P)$ y por tanto este H contiene los generadores $s_e = s_e s^*_{s(e)}$ y $P_v = s_v s_v^*$ y estos son todos los generadores de $C^*(S,P)$ i.e. $C^*(S,P) \subset \overline{H}$.
Por lo tanto $\overline{H} = C^*(S,P)$, esto es $\overline{span}\{s_u s_v^* : \ u,v \in E^*, \ s(u)=s(v)\} = C^*(S,P)$.

Ejemplo 2.2.1 Definamos $M_n(\mathbb{C}) = \{A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \ A \text{ es lineal}\}$ el cual es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial; la multiplicación es dada por la multiplicación usual de matrices. Dotamos a este espacio del operador norma $\|A\| = \{\|Ax\| : \ \|x\| = 1\}$ con respecto al producto interno en $\mathbb{C}^n$ la involución es dada por $A^* = \overline{A}^t$; las proyecciones en $M_n(\mathbb{C})$ son las matrices con unos sobre la diagonal y ceros en otro lugar. Elijamos una base $\{e_{ij} : \ i,j = 1,...,n\}$ para $M_n(\mathbb{C})$ donde e_{ij} es una matriz de orden $n \times n$ con "1" sobre (i,j) y "0" en el resto.
Note que e_{ij} es una isometría parcial para todos los pares i,j :

- $e_{ij}e_{ij}^* = e_{ij}e_{ji} = e_{ii}$
- $e_{ij}^*e_{ij} = e_{ji}e_{ij} = e_{jj}$

Por consiguiente podemos formar la *-álgebra A_n generada por $\{e_{11}, e_{12}, .., e_{1n}\}$ de isometrías parciales de aqui se sigue que $M_n(\mathbb{C}) = span(A_n)$
Así encontramos un grafo E, un conjunto de isometrías parciales S y un conjunto de proyecciones P los cuales generan $C^*(S,P) \cong M_n(\mathbb{C})$ entonces por definición E tiene un número finito de arcos.
Además para cualquier morfismo entre $C^*(S,P) \cong M_n(\mathbb{C})$ respecto a la composición necesitamos la propiedad (CK 2) para reducir la relación

$$(s_\mu s_\nu^*)(s_\alpha s_\beta^*) = s_{\nu,\alpha} s_\mu s_\beta^*$$

esto implica que α' y ν' son siempre vértices, es decir cuando

$$(s_\mu s_\nu^*)(s_\alpha s_\beta^*) \neq 0, \ s(\mu) = s(\beta)$$

Así en general un grafo correspondiente a $M_n(\mathbb{C})$ tiene n-diferentes isometrías parciales que emana del mismo origen. Puesto que cada proyección en $M_n(\mathbb{C})$ es de la forma $e_{ij}e_{ij}^*$ cada vértice en el grafo recibe al menos un arco que hace al grafo conexo.

Ejemplo 2.2.2 Sea $\{S, P\}$ una familia Cuntz-Krieger para el siguiente gráfico dirigido E

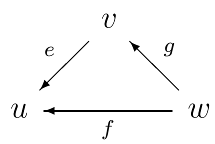


Figura 2.5: Álgebra de grafo con tres vértices y tres arcos.

Cuando $s(\mu) = s(\nu)$ tenemos $s_\mu s_\nu^* = s_\mu p_{s(\mu)} s_\nu^*$; a menos $s(\mu) = \omega$. Nosotros podemos aplicar la relación Cuntz-Krieger en $s(\mu)$, y manteniendo los caminos que empiezan en ω. Por ejemplo

$$\begin{aligned} p_u &= \sum_{\substack{u=r(e)\\ e\in E^1}} s_e s_e^* \\ &= s_e s_e^* + s_f s_f^* \\ &= s_e(p_v s_e^*) + s_f s_f^* \quad \text{por (CK 1)} \\ &= s_e(p_v s_e^*) + s_f s_f^* \\ &= s_e(s_g s_g^*) s_e^* + s_f s_f^* \quad \text{por (CK 2)} \\ &= s_{eg} s_{eg}^* + s_f s_f^* \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} C^*(S,P) &= \overline{span}\,\{s_\mu s_\nu^* :\ \mu,\nu \in E^*,\ s(\mu) = s(\nu) = \omega\} \\ &= span\,\{s_\mu s_\nu^* :\ \mu,\nu \in \{\omega, f, g, eg\}\} \end{aligned}$$

Puesto que ω es un origen, dos caminos μ y ν con $s(\mu) = \omega = s(\nu)$ no pueden satisfacer $\nu = \mu\nu'$ a menos que $\mu = \nu$. De aqui

$$(s_\mu s_\nu^*)(s_\alpha s_\beta^*) = \begin{cases} s_\mu s_\beta^*, & \text{si } \alpha = \nu \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Así $H = \{s_\mu s_\nu^* : \ \mu, \nu \in \{\omega, f, g, eg\}\}$ es un conjunto de matrices unitarias cuyo "*spans*" es $C^*(S, P)$.

Ejemplo 2.2.3 *[Álgebra multimatricial]*

Una álgebra multimatricial se denota y se define como sigue para $m \in \mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times .... \times \mathbb{N}$ (n-veces) definimos el álgebra multimatricial $M(\vec{m})$.

$$M(\vec{m}) = \bigoplus_{i=1}^{n} M_{m(i)}(\mathbb{C})$$

lo cuál es una extensión directa del álgebra de matrices.

Proposición 2.2.1 Sea E un grafo dirigido finito sin ciclos y sea $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ la colección de orígenes en E, entonces para cada E-familia CK; $\{S, P\}$ en la cual cada p_v es no cero; se tiene

$$\mathbb{C}^*(S, P) \cong \bigoplus M_{\#\{s^{-1}(\omega_i)\}}(\mathbb{C}),$$

donde $s^{-1}(\omega_i) = \{\mu \in E^* : \ s(\mu) = \omega_i\}$.

Prueba. Como en el ejemplo (2.2.2), muchas aplicaciones finitas de las relaciones de Cuntz-Krieger muestran que

$$C^*(S, P) = span\,\{s_\mu s_\nu^* : \ s(\mu) = s(\nu) = \omega_i, \text{ para algún } i\}$$

y $A_i = span\,\{s_\mu s_\nu^* : \ s(\mu) = s(\nu) = \omega_i\}$ es isomorfo a $M_{|s^{-1}(\omega_i)|}(\mathbb{C})$.
Ahora cuando $\mu \in s^{-1}(\omega_i)$ y $\alpha \in s^{-1}(\omega_j)$ para algún $j \neq i$, μ no puede extender α y viceversa. Asi $A_i A_j = 0$ y $C^*(S, P) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A_i = \bigoplus_{i=1}^{n} span\,\{s_\mu s_\nu^* : \ s(\mu) = s(\nu) = \omega_i\} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_{|s^{-1}(\omega_i)|}(\mathbb{C})$ es decir $C^*(s, P) \cong \bigoplus M_{|s^{-1}(\omega_i)|}(\mathbb{C})$. ■

Ejemplo 2.2.4 Consideremos una familia $\{S, P\}$ Cuntz Krieger para el siguiente grafo dirigido

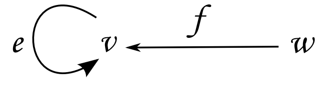


Figura 2.6: Álgebra de grafo con dos vértices y dos arcos.

las relaciones Cuntz-Krieger dicen que:

(CK-1) $s_e^* s_e = p_{s(e)} = p_v, \; s_f^* s_f = p_{s(f)} = p_\omega$

(CK-2) $p_v = \sum_{\substack{r(e)=v \\ e\in E^1}} s_e s_e^* = s_e s_e^* + s_f s_f^*$

El elemento $p_\nu + p_\omega$ es una identidad para $C^*(S, P)$.

En efecto. Probaremos que $(p_\nu + p_\omega)s_\mu s_\nu^* = s_\mu s_\nu^* = s_\mu s_\nu^*(p_\nu + p_\omega)$ para $\mu, \nu \in E^*$. En este caso el único camino que satisface es $\mu = \nu = e$, así

$$
\begin{aligned}
s_e s_e^*(p_\nu + p_\omega) &= s_e s_e^*(s_e s_e^* + s_f s_f^* + s_f^* s_f) \\
&= s_e s_e^* s_e s_e^* + s_e s_e^* s_f s_f^* + s_e s_e^* s_f^* s_f \\
&= s_e s_e^* + s_e(s_e^* p_{r(e)})(p_{s(f)} s_f^*) s_f \\
&= s_e s_e^*
\end{aligned}
$$

Análogamente $(p_\nu + p_\omega)s_e s_e^* = (s_e s_e^* + s_f s_f^* + s_f^* s_f)s_e s_e^* = s_e s_e^*$. También el elemento $s_e + s_f$ es una isometría parcial. Veamos esto:

1. $(s_e + s_f)^*(s_e + s_f) = s_e^* s_e + s_e^* s_f + s_f^* s_e + s_f^* s_f = p_\nu + p_\omega$

2. $(s_e + s_f)(s_e + s_f)^* = s_e s_e^* + s_e s_f^* + s_f s_e^* + s_f s_f^* = p_\nu$

Podemos recuperar los elementos p_v, p_ω, s_e y s_f.

$p_\nu = s_e s_e^* + s_f s_f^*$

$p_\omega = (s_e + s_f)^*(s_e + s_f) - p_\nu$

$s_e = (s_e + s_f)p_\nu$

$s_f = (s_e + s_f)p_\omega$ del único elemento $s_e + s_f$. Asi $C^*(S, P)$ es generado por la isometría parcial $s_e + s_f = \nu$

Recíprocamente: Si ν es una isometría, entonces tenemos

- $\nu\nu^* = (s_e + s_f)(s_e^* + s_f^*) = s_e s_e^* + s_e s_f^* + s_f s_e^* + s_f s_f^* = p_\nu$ entonces $p_\nu = \nu\nu^*$.

- $1 = p_\nu + p_\omega$ entonces $p_\omega = 1 - p_\nu = 1 - \nu\nu^*$ luego $p_\omega = 1 - \nu\nu^*$.

- $s_e = \nu p_\nu$

- $s_f = \nu p_\omega$

Se define una familia de Cuntz-Krieger tal que:

$$C^*(S,P) = \mathcal{C}^*(v). \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.2.5 (Operadores compactos sobre espacios de Hilbert)
La generalización correcta del álgebra de matrices (lo cual actua sobre un espacio finito dimensional) a espacios de dimensión infinita (pero contables) son los operadores compactos.
El álgebra de operadores compactos $B_\circ(H)$ es un ideal algebraicamente cerrado de $B(H)$; y asi un C^*-álgebra. Como álgebra de grafo $B_\circ(H)$ es ascendente, es decir, el grafo

$$.... \longrightarrow u_2 \longrightarrow u_1 \longrightarrow \omega$$

genera $B_\circ(H)$. Sea $\{E_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ bases de H y definamos el operador lineal $E_i \otimes E_j : H \longrightarrow H$ como $E_i \otimes E_j(h) := E_{ij}(h) = \langle h, E_j \rangle\, E_i$. Esto obviamente es un operador de rango finito, asi $A_n = span\,\{E_{ij} :\ i,j \in \{1,2,...,n\}\} \subset B_\circ(H)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Nosotros podemos obtener dos identidades muy provechosas.

1. $E_{ij}(E_{kl}(h)) = E_{ij}(h,E_l)E_k = (h,E_l)(E_k,E_j)E_i = \delta_{jk}(h,E_l)E_i = \delta_{jk}E_{il}(h)$.

2. $(g, E_{ij}h) = (g,(h,E_j)E_i) = (E_j,h)\overline{(E_i,g)} = ((E_i,g)E_j,h) = (E_{ji}g,h)$

Esto quiere decir que podemos construir un isomorfismo $\varphi : A_n \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ tan solo identificando $\varphi(E_{ij}) = e_{ij}$; entonces usando resultados de álgebra de matrices podemos concluir que el álgebra generada por $... \longrightarrow u_2 \longrightarrow u_1 \longrightarrow \omega$ es igual a

$$\overline{span}\,\{e_{ij} :\ i,j \in \mathbb{N}\} = \overline{span}\,\{E_{ij} :\ i,j \in \mathbb{N}\}$$

puesto que cada elemento en $B_\circ(H)$ es el límite de alguna serie de operador de rango finito, y $span\,\{E_{ij} :\ i,j \in \mathbb{N}\}$ contiene cada operador de rango finito, concluímos $\overline{span}\,\{E_{ij} :\ i,j \in \mathbb{N}\} = B_\circ(H)$.

Nota: El álgebra de operadores compactos es un ejemplo de un álgebra aproximadamente finita.

Ejemplo 2.2.6 (AF-álgebras)

Un AF-álgebras A es definida por $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ con $\{A_n\}$ una sucesión de álgebras multimatriciales ordenados por inclusión. Por el momento, si nosotros incluímos $M_n(\mathbb{C}) \subset M_{n+1}(\mathbb{C})$ de $M_n(\mathbb{C} \oplus 0) \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ vemos que

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(\mathbb{C})} = B_{\circ}(H)$$

En general, las AF-álgebras son generadas por grafos de álgebras multimatriciales con un camino infinito agregado a cada *sink*.

2.3. Aspectos categóricos de álgebra de grafos

2.3.1. La construcción universal

Para estudiar la K-Teoría propiamente tenemos que sondear sobre la naturaleza funtorial de la construcción de un álgebra de grafo. De este modo examinaremos las aplicaciones siguientes

$$\{\text{grafos}\} \xrightarrow{C^*} \{C^* - \textbf{álgebra}\} \xrightarrow{K_i} \{\text{grupos abelianos}\}, \; i = 0, 1$$

Como observamos que existe una ambiguedad en nuestra elección para un álgebra de grafo lo cual primero necesitamos resolver.

Observación 2.3.1 Para construir la C^*-álgebra universal generado por una E-familia Cuntz-Krieger. Simulamos el comportamiento del conjunto *span* $\{s_u s_v^*\}$. En la siguiente proposición los simbolos $d_{\mu,\nu}$ son puramente formales, pero todos finitos muchos coeficientes $z_{u,v} \in \mathbb{C}$ son cero en cada suma, y las operaciones de espacio vectorial sobre las sumas formales son definidos por:

$$a\left(\sum w_{\mu,\nu} d_{\mu,\nu}\right) + b\left(\sum z_{\mu,\nu} d_{\mu,\nu}\right) = \sum \left[a w_{\mu,\nu} + b z_{\mu,\nu}\right] d_{\mu,\nu} \qquad (2.2)$$

Los elementos $d_{\alpha,\beta}$ serán obtenidos poniendo $z_{\alpha,\beta} = 1$ y $z_{\mu,\nu} = 0$ en otro caso, entonces los $d_{\alpha,\beta}$ forman una base para V.

Proposición 2.3.1 Sea E un grafo dirigido fila-finita. Entonces el espacio vectorial V de las combinaciones lineales formales

$$V = \left\{ \sum z_{\mu,\nu} d_{\mu,\nu} : \ \mu, \nu \in E^*, \ s(\mu) = s(\nu) \right\}$$

es un *-álgebra con las definiciones

$$(d_{\mu,\nu})^* = d_{\nu,\mu} \qquad \text{y}$$

$$d_{\mu,\nu} \odot d_{\alpha,\beta} = \begin{cases} d_{\mu\alpha',\beta}, & \text{si } \alpha = \nu\alpha' \\ d_{\mu,\beta\nu'}, & \text{si } \nu = \alpha\nu' \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.3}$$

Prueba. De (2.2) y (2.3) vemos claramente que $(V, \odot)$ es una álgebra; salvo la asociatividad. Para que la pareja $(V, *)$ sea un *-álgebra donde

$$\begin{aligned} * : \ V &\longrightarrow V \\ d_{\mu,\nu} &\longmapsto d_{\nu,\mu} = d^*_{\mu,\nu} \end{aligned}$$

Falta ver entonces que el producto $\odot$ sea asociativo y compatible con la operación involución " $*$ ".

1. $(d_{\mu,\nu} \odot d_{\alpha,\beta})^* = d^*_{\alpha,\beta} \odot d^*_{\mu,\nu}$

2. $(d_{\mu,\nu} \odot d_{\alpha,\beta}) \odot d_{x,y} = d_{\mu,\nu} \odot (d_{\alpha,\beta} \odot d_{x,y})$

Veamos (1)

$$\begin{aligned} (d_{\mu,\nu} \odot d_{\alpha,\beta})^* &= \left[\begin{cases} d_{\mu\alpha',\beta}, & \alpha = \nu\alpha' \\ d_{\mu,\beta\nu'}, & \nu = \alpha\nu' \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \right]^* \\ &= \begin{cases} d_{\beta,\mu\alpha'}, & \alpha = \nu\alpha' \\ d_{\beta\nu',\mu}, & \nu = \alpha\nu' \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

De otro lado

$$d^*_{\alpha,\beta} \odot d^*_{\mu,\nu} = d_{\beta,\alpha} \odot d_{\nu,\mu} = \begin{cases} d_{\beta\nu',\mu}, & \text{si } \nu = \alpha\nu' \\ d_{\beta,\mu\alpha'}, & \text{si } \alpha = \nu\alpha' \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.5}$$

Comparando (2.4) con (2.5) tenemos $(d_{\mu,\nu} \odot d_{\alpha,\beta})^* = d^*_{\alpha,\beta} \odot d^*_{\mu,\nu}$

(2) Análogamente la asociatividad desarrollando y comparando ambos miembros. ■

Observación 2.3.2 Para cada familia Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ sobre H. Por corolario (2.2.2), los operadores $\{s_u s_v^*\}$ satisfacen las relaciones impuestas por $\{d_{\mu,\nu}\}$ generando una C^*-álgebra A. De aqui por el teorema de Gelfand-Naimark existe una *-representación $\pi_{s,p}$ de V, sobre H, i.e. $\pi_{s,p} : V \xrightarrow{\text{*-homomorfismo}} B(H)$ tal que $\pi_{s,p}(d_{\mu,\nu}) = s_\mu s_\nu^*$.

Puesto que la norma de una proyección p satisface

$$\|p\|^2 = \|p^*p\| = \|pp\| = \|p^2\| = \|p\|$$

De aqui claramente vemos que cada proyección p no cero tiene norma 1 esto es $\|p\| = 1$; y asi para cada isometría parcial no nula ω se tiene que

$$\|\omega\|^2 = \|\omega^*\omega\| = 1 \tag{2.6}$$

pues $\omega^*\omega$-proyección y asi se tiene que

$$\begin{aligned} \|\pi_{s,p}(\sum z_{\mu,\nu} d_{\mu,\nu})\| &= \|\sum z_{\mu,\nu}\pi_{s,p}(d_{\mu,\nu})\| \\ &\leq \sum |z_{\mu,\nu}| \|s_\mu s_\nu^*\| \\ &\leq \sum |z_{\mu,\nu}| \quad \text{por (2.6)} \end{aligned}$$

i.e. $\|\pi_{s,p}(\sum z_{\mu,\nu} d_{\mu,\nu})\| \leq \sum |z_{\mu,\nu}| \equiv k$ donde k es una constante, entonces tomando supremo $\sup \|\pi_{s,p}(\sum z_{\mu,\nu} d_{\mu,\nu})\| \leq \sup \sum |z_{\mu,\nu}| = k$, de aqui se sigue que

$$\|v\|_1 = \sup \{\|\pi_{s,p}(v)\| : \ \{S, P\} \text{ es una } E - \text{familia CK}\}$$

es finito para cada $v \in V$ y además se tiene

$$\|v^*v\|_1 = \sup\{\|\pi_{s,p}(v^*v)\| : \{S,P\} \text{ es } E - \text{familia CK}\}$$

$$= \|v\|_1\|v\|_1$$

$$= \|v\|_1^2$$

Entonces

$$\|v^*v\|_1 = \|v\|_1^2$$

Afirmación: $\|\cdot\|_1$ es una seminorma en V

En efecto.

1. $\|\lambda v\|_1 = \sup\{\|\pi_{s,p}(\lambda v)\| : \{S,P\} \text{ es CK-familia}\}$

$$= \sup\{\|\lambda\, \pi_{s,p}(v)\| : \{S,P\} \text{ es CK-familia}\}$$

$$= |\lambda| \sup\{\|\pi_{s,p}(v)\| : \{S,P\} \text{ es CK-familia}\}$$

$$= |\lambda|\|v\|_1$$

2. $\|v+u\|_1 = \sup\{\|\pi_{s,p}(v+u)\| : \{S,P\} \text{ es CK-familia}\}$

$$= \sup\{\|\pi_{s,p}(v) + \pi_{s,p}(u)\| : \{S,P\} \text{ es CK-familia}\}$$

$$\leq \sup\{\|\pi_{s,p}(v)\| + \|\pi_{s,p}(u)\| : \{S,P\} \text{ es CK-familia}\}$$

$$= \sup\{\|\pi_{s,p}(v)\| : \{s,p\} \text{ es CK-familia}\} + \sup\{\|\pi_{s,p}(u)\| : \{S,P\} \text{ es CK-familia}\}$$

$$= \|v\|_1 + \|u\|_1$$

Por lo tanto $\|v+u\|_1 \leq \|v\|_1 + \|u\|_1$. ■

Sea $I = \{u \in V : \|u\|_1 = 0\}$. Claramente I es un ideal bilatero de V y así es un *-ideal bilatero.

Ahora consideremos $V_\circ = \frac{V}{I} = \{v + I : v \in V\}$ asi $V_\circ$ es una *-álgebra, más aún es un C^*-álgebra ■

Luego tenemos que la completación $\overline{V}_\circ$ es una C^*-álgebra a la cual llamamos $C^*(E)$ i.e. $\overline{V}_\circ = C^*(E)$.

Observación 2.3.3 Cada $\pi_{s,p}$ es $\|\cdot\|_\circ$-continua

Pues $\|\pi_{s,p}(\sum z_{\mu,\nu}d_{\mu,\nu})\| \leq \sum |z_{\mu,\nu}|\|\pi_{s,p}(d_{\mu,\nu})\| = \|s_\mu s_\nu^*\| \leq \|s_\mu\|\,\|s_\nu^*\| = 1$

Observación 2.3.4 Si $s_e = d_{e,s(e)}$ entonces

$$s_e^* s_e = d_{e,s(e)}^* d_{e,s(e)} = d_{s(e),e} d_{e,s(e)}$$

$$= \begin{cases} d_{s(e)e',s(e)} & \text{si } e = ee' \\ d_{s(e),s(e)e'} & \text{si } e = ee' \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} d_{s(e),s(e)} & \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Proposición 2.3.2 Para cualquier grafo fila-finita E, existe una C^*-álgebra $C^*(E)$ generado por una E-familia $\{S,P\}$ Cuntz-Krieger tal que para cada E-familia $\{T,Q\}$ Cuntz-Krieger en un C^*-álgebra B existe un morfismo $\pi_{T,Q} : C^*(E) \longrightarrow B$ satisfaciendo $\pi_{T,Q}(s_e) = T_e$ para cada $e \in E^1$ y $\pi_{T,Q}(p_v) = Q_v$ para cada $v \in E^\circ$.

Prueba. Tomemos $C^*(E) = \overline{V}_\circ$, y comprobemos que $s_e = d_{e,s(e)}$, $p_v = d_{v,v}$ forman una E-familia Cuntz-Krieger la cual genera $V_\circ$.

En efecto. Veamos entonces que $\{s_e, p_v\}$ es una E-familia CK.

1. s_e isometría parcial su verificación es rutinaria

2. p_v proyección $\forall\, v \in E^\circ$; pues $p_v^* = d_{v,v}^* = d_{v,v} = p_v$, $\quad p_v^2 = d_{v,v}\, d_{v,v} = d_{v,v} = p_v$.

Ahora verifiquemos que se cumplan:

(CK-1) $s_e^* s_e = d_{s(e),s(e)} = p_{s(e)}$ por observación (2.3.4)

(CK-2) $p_v = \displaystyle\sum_{\substack{e \in E^1 \\ r(e)=v}} s_e s_e^*$; cada vez que v no es origen y recuerde que $V_\circ = \frac{V}{I}$,

$I = \{v \in V : \|v\|_1 = 0\}$ y donde $V = \{\sum z_{\mu,\nu} d_{\mu,\nu} :\ \mu,\nu \in E^*,\ s(\mu) = s(\nu)\}$ la cual se probó que es un *-álgebra entonces estas isometrías $s_e = d_{e,s(e)}$ y proyecciones $p_v = d_{vv}$ claramente se ve que generan $V_\circ$.

Para obtener $\pi_{T,Q}$, lo hacemos del modo siguiente. Por el teorema de Gelfand-Naimark encontramos una representación fiel (representación inyectiva) $\rho : B \longrightarrow$

$B(H)$, para algún espacio de Hilbert, y asi la composición siguiente

$$C^*(E) \overset{\pi_{\rho(T),\rho(Q)}}{\longrightarrow} B(H) \overset{\rho^{-1}}{\longrightarrow} B$$

Tomando $\pi_{T,Q} = \rho^{-1}\ \pi_{\rho(T),\rho(Q)}$ y recordemos que todos los generadores de $C^*(S,P)$ son $s_e = s_e s^*_{s(e)}$ y $p_v = s_v s^*_v$ observemos también $\pi_{s,p} : V \longrightarrow B(H)$ tal que

$$\pi_{s,p}(d_{\mu,\nu}) = s_\mu s^*_\nu \tag{2.7}$$

entonces

1. $\pi_{\rho(T),\rho(Q)}(s_e) = \pi_{\rho(T),\rho_Q}(d_{e,s(e)})$

   $= \rho(T)_e \rho^*(T)_{s(e)}$ por (2.7)

   $= \rho(T_e)\rho(T^*_{s(e)})$

   $= \rho(T_e T^*_{s(e)})$

   $= \rho(T_e)$

   Luego $\pi_{T,Q}(s_e) = \rho^{-1}\ \pi_{\rho(T),\rho(Q)} = \rho^{-1}(\rho(T_e)) = T_e$

2. $\pi_{\rho(T),\rho(Q)}(p_v) = \pi_{\rho(T),\rho(Q)}(d_{v,v}) = \rho(T)_v \rho(T^*)_v = \rho(Tv)\rho(T^*v) = \rho(TvT^*v) = \rho(P_v)$ luego $\pi_{T,Q}(p_v) = \rho^{-1}\ \pi_{\rho(T),\rho(Q)}(p_v) = \rho^{-1}(\rho(p_v)) = p_v$

Corolario 2.3.1 Supóngase que E es un grafo dirigido fila-finita y C es un C^*-álgebra generada por una E-familia Cuntz-Krieger $\{w, r\}$ tal que para cada E-familia Cuntz-Krieger $\{T, Q\}$ en un C^*-álgebra B, existe un homomorfismo $\rho_{T,Q} : C \longrightarrow B$ satisfaciendo $\rho_{T,Q}(w_e) = T_e$ para cada $e \in E^1$ y $\rho_{T,Q}(r_v) = Q_v$ para cada $v \in E^\circ$, entonces existe un isomorfismo $\phi : C^*(E) \longrightarrow C$ tal que $\phi(s_e) = w_e$ para cada $e \in E^1$ y $\phi(p_v) = r_v$ para cada $v \in E^\circ$.

Demostración. Por la proposición (2.3.2) para la familia Cuntz-Krieger existe una aplicación $\pi_{w,r} : C^*(E) \longrightarrow C$ llamemos $\phi = \pi_{w,r}$. Probaremos que ϕ es un isomorfismo, claramente el $rang(\pi_{w,r})$ es un C^*-álgebra conteniendo $\{w_e, r_v\}$ generadores de C; pero $C = gen\,\{w_e, r_v\}$ entonces $\pi_{w,r}$ es sobre.

Reciprocamente consideremos el homomorfismo $\rho_{s,p} : C \longrightarrow C^*(E)$; que por hipótesis existe verificando; $\rho_{s,p}(w_e) = s_e$ y $\rho_{s,p}(r_v) = p_v$ luego tenemos

$$C^*(E) \xrightarrow{\pi_{w,r}} C \xrightarrow{\rho_{s,p}} C^*(E)$$

$$\rho_{s,p}\ \pi_{w,r}(s_e) = \rho_{s,p}(\pi_{w,r}(s_e)) = \rho_{s,p}(w_e) = s_e$$

$$\rho_{s,p}\ \pi_{w,r}(p_v) = \rho_{s,p}(\pi_{w,r}(p_v)) = \rho_{s,p}(r_v) = p_v$$

y como $\{s_e, p_v\}$ generan $C^*(E)$ entonces $\rho_{s,p}\ \pi_{w,r} = I_{C^*(E)}$.
Ahora veamos la inyectividad de $\phi = \pi_{w,r}$; $\pi_{w,r} : C^*(E) \longrightarrow C$ pues sea $a \in C^*(E)$ tal que $a \in ker(\pi_{w,r})$ entonces $\pi_{w,r}(a) = 0$ i.e. $\phi(a) = 0$ luego $\rho_{s,p}(\pi_{w,r}(a)) = I_{C^*(E)}(a) = a$ pero $\pi_{w,r}(a) = 0$ entonces $\rho_{s,p}(\pi_{w,r}(a)) = 0$, luego $a = 0$. Por lo tanto ϕ es inyectiva. ■

Corolario 2.3.2 Si E es un grafo para lo cual cada ciclo tiene una entrada, entonces cada familia $\{T, Q\}$ de Cuntz-Krieger definida sobre E tiene la propiedad universal.

Ejemplo 2.3.1 Si E es un grafo con un único vértice, entonces existe un único generador $p = p^2 = p^*$ y asi claramente $C^*(E) = \mathbb{C}$ puesto que $C^*(E)$ es un **$\mathbb{C}$-álgebra** generado por el único elemento "p".

Ejemplo 2.3.2 Para el grafo E lo cual consiste de un único lazo en un único vértice "v" las familias de E-Cuntz Krieger $\{S, P\}$ son determinados por el único operador s_e, lo cual es un operador unitario de P_vH en P_vH es decir:

$$s_e : P_vH \longrightarrow P_vH$$

El operador P_v es una identidad para $C^*(S, P)$, y s_e es un elemento unitario de $C^*(S, P)$. Asi $(C^*(E), s_e)$ es universal para C^*-álgebras generadas por un elemento unitario.
Ahora si u es un elemento unitario de un C^*-álgebra B, entonces por proposición (2.3.2) existe un homomorfismo $\pi_u : C^*(E) \longrightarrow B$ tal que $\pi(S_e) = u$. Por teoría

espectral sabemos que si $T = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ y $l : T \longrightarrow \mathbb{C}$ es la aplicación $l(z) = z$, entonces $(C(T), l)$ tiene una propiedad universal asi por el corolario (2.3.1) se tiene un isomorfismo $\phi : C^*(E) \longrightarrow C(T)$ tal que $\phi(s_e) = l$.
Es decir:
Si E un grafo con un único vértice y una única arista (lazo)

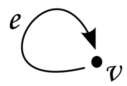
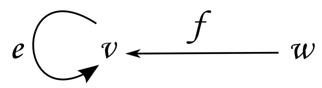


Figura 2.7: Lazo.

entonces se tiene que la familia de Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ son determinados por el operador unitario s_e y $p_v = v = 1_{(v)}$ donde $p_v = p_v^2 = p_v^*$; asi p_v es una identidad en $C^*(S, P)$ y también se tiene por las relaciones de CK que $s_e^* s_e = p_{s(e)} = p_v = s_e s_e^*$; asi como $sp = ps$, $s_e = s_e s_e^* s_e$ entonces $C^*(E) = C^*(s_e, p_v) = C^*(s_e, 1) = C^*(s^1)$ donde $s_e = u$ es un elemento unitario.

Ejemplo 2.3.3 Para el grafo E descrito como



(2.8)

Figura 2.8: Álgebra de grafo de Toeplitz ($\mathcal{T}$).

se considera la familia de Cuntz-Krieger $\{S, P\}$, y se vió que la C^*-álgebra $C^*(S, P)$ es generada por la isometría $s_e + s_f$, y que cada isometría sobre un espacio de Hilbert da una E-familia de Cuntz-Krieger. Asi $(C^*(E), s_e + s_f)$ es la C^*-álgebra universal (A, a) generada por una isometría a. En el análisis de la teoría de representaciones de (A, a) se tiene que si π es una representación de A y $\pi(a)$ es no unitario, entonces π es inyectiva sobre A.
En otras palabras si E es un grafo con dos vértices y dos generadores entonces se tiene que

$$p_v = p_v^2 = p_v^* \ , \quad p_w = p_w^2 = p_w^*$$

y por las relaciones de CK:

$$s_e^* s_e = p_v, \qquad s_f^* s_f = p_w$$

$$p_v = s_e s_e^* + s_f s_f^*$$

entonces $C^*(E) = gen\{s_e + s_f\} \equiv \mathcal{T}$ (álgebra de Toeplitz)

Ejemplo 2.3.4 Sea G un grafo con tres vértices y tres aristas

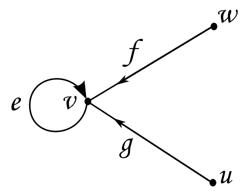


Figura 2.9: Álgebra de grafo con dos vértices y un lazo.

entonces tenemos que:

$$p_v = p_v^2 = p_v^* \ , \quad p_w = p_w^2 = p_w^* \ , \quad p_u = p_u^2 = p_u^*$$

$$p_v p_w = 0 = p_v p_u = p_u p_w$$

$$p_v = p_{s(e)} = s_e{*}s_e \ , \quad p_w = p_{s(f)} = s_f^* s_f \ , \quad p_u p_{s(g)} = s_g^* s_g$$

$$p_v = \sum_{\substack{v=r(e)\\ e\in E^1}} s_e s_e^* = s_e s_e^* + s_f s_f^* + s_g s_g^*$$

entonces $C^*(E)$ es isomorfico a la **esfera cuantica** $S^2_{0\infty}$: $B^*B = 1 - A^2,\ A = A^*,\ BB^* = 1,\ BA = 0$ i.e. $S_{0\infty} = gen\{A, B\}$ y el isomorfismo es dado por

$$A \longmapsto p_w - p_u$$

$$B \longmapsto s_e^* + s_f^* + s_g^*$$

Escribamos su grafo como $E_{S^2_{0\infty}}$ luego $C^*(E) = C(S^2_{0\infty})$

Ejemplo 2.3.5 Sea E un grafo con un vértice y n-aristas asi como se muestra en la figura siguiente

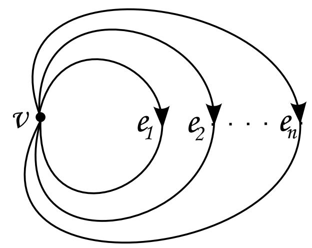


Figura 2.10: Álgebra de grafo de Cuntz (O_n).

Claramente $r(e_j) = s(e_j)$, $\forall\, j = 1, 2, ..., n$.

$$p_v = p_{s(e_j)} = s^*_{e_j} s_{e_j} \quad \text{(por CK-1)}$$

$$p_v = \sum_{\substack{v=r(e_j) \\ e_j \in E^1\ j=1}}^{n} s_{e_j} s^*_{e_j} \quad \text{(por CK-2)}$$

Ahora si $p = 1$; entonces se tiene que $C^*(E) = O_n$ (álgebra de cuntz) la C^*-álgebra universal para las relaciones $s^*_j s_j = 1 = \sum_{j=1}^{n} s_j s^*_j$.

Ejemplo 2.3.6 Sea E un grafo con $n+1$-vértices y n-aristas mostrado en la figura siguiente

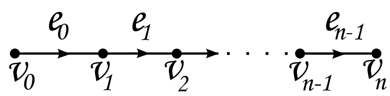


Figura 2.11: Álgebra de grafo de n-arcos y $(n+1)$-vértices.

Claramente $s(e_j) = v_j$, $j = 0, 1, ..., n-1$ y $r(e_j) = v_{j+1}$, $j = 0, 1, ..., n-1$. $p_{v_j} = p_{s(e_j)} = s^*_{e_j} s_{e_j}$, $\quad p_v = \sum_{v=r(e_j)} s_{e_j} s^*_{e_j} \iff p_{v_{j+1}} = \sum_{v_{j+1}=r(e_j)} s_{e_j} s^*_{e_j} \iff p_{v_{j+1}} = s_{e_j} s^*_{e_j}$, pero $s^*_{e_j} s_{e_i} = 0$ para todo $i \neq j$, luego $C^*(E) = M_n(\mathbb{C})$.

Ejemplo 2.3.7 Sea E un grafo con n-vértices y n-aristas formando un ciclo como se muestra en la figura siguiente.

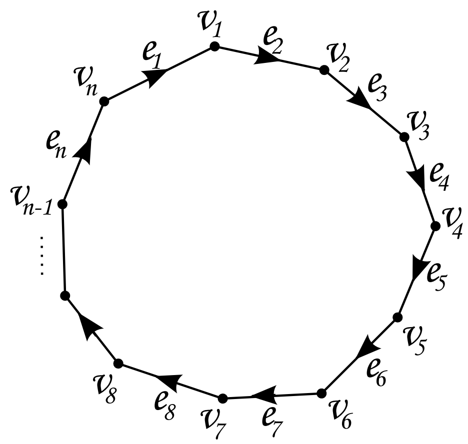


Figura 2.12: Álgebra de grafo de matrices.

Se observa que:

$$s(e_j) = v_j \ , \quad r(e_j) = v_{j+1} \text{ para } j = 1, 2, ..., n-1 \ , \quad r(e_n) = v_1,$$

$$p_{s(e_j)} = s_{e_j}^* s_{e_j} \Rightarrow p_{v_j} = s_{e_j}^* s_{e_j}$$

$$p_v = \sum_{r(e_j)=v} s_{e_j} s_{e_j}^* \Longleftrightarrow p_{r(e_j)} = s_{e_j} s_{e_j}^* \Rightarrow v_{j+1} = s_{e_j} s_{e_j}^*$$

$$s_{e_i}^* s_{e_r} = 0 \text{ para } i \neq r.$$

Asi nosotros obtenemos el álgebra de matrices sobre el álgebra de funciones en el círculo luego $C^*(E) = M_n(C(s^1))$.

Ejemplo 2.3.8 Sea E el grafo con vértices y aristas infinitas asi como se muestra en la figura siguiente

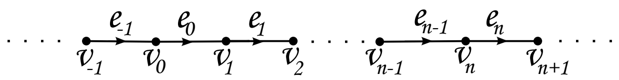


Figura 2.13: Álgebra de grafo de vértices y aristas infinitas.

Claramente $s(e_j) = v_j$, $r(e_j) = v_{j+1}$, $\forall\, j \in \mathbb{Z}$

$$p_{s(e_j)} = s_{e_j}^* s_{e_j} \Longleftrightarrow p_{v_j} = s_{e_j}^* s_{e_j}$$

$$p_v = \sum_{v=r(e_j)} s_{e_j} s_{e_j}^* \Longleftrightarrow p_{r(e_j)} = s_{e_j} s_{e_j}^* \Rightarrow p_{v_{j+1}} = s_{e_j} s_{e_j}^*$$

$$s_{e_i}^* s_{e_j} = 0 \ , \quad \forall\, i \neq j$$

Obtenemos asi el álgebra de operadores compactos $\mathcal{K}$ es decir

$$C^*(E) = \mathcal{K}$$

2.4. El funtor C^*

Denotemos por $DGrph$ la categoría de grafos. Sus objetos son grafos y sus morfismos son definidos como sigue:
$\varphi : E \longrightarrow F$ es un morfismo de grafo si

- $\varphi(v)$ es un vértice en F para cada $v \in E^\circ$
- $\varphi(e)$ es un arco en F para cada $e \in E^1$
  tal que $r(\varphi(e)) = \varphi(r(e))$ y $s(\varphi(e)) = \varphi(s(e))$

Sean E, F, G tres grafos, $\varphi : E \longrightarrow F$ y $\psi : F \longrightarrow G$ dos morfismos de grafo. La composición de φ y ψ es definida como

$$\psi\, \varphi : E \longrightarrow G$$

es decir:

- $(\psi\, \varphi)(v)$ es un vértice en G para cada $v \in E^\circ$
- $(\psi\, \varphi)(e)$ es un arco en G; para cada $e \in E^1$

finalmente si $\mu \in E^* = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E^n$, E^ncolección de caminos de longitud"n" con $\mu = \mu_1 \mu_2 .....\mu_n$, $\varphi(\mu) = \pi\, \varphi(u_i) \in F^*$.
Denotemos por $CAlg$ la categoría de C^*-álgebras, sus objetos las C^*-álgebras y sus morfismos son los morfismos entre C^*-álgebras

Proposición 2.4.1 Existe un funtor $C^* : DGrph \longrightarrow CAlg$ añadiendo a cada grafo por contrucción universal el álgebra de grafo.

Demostración. Sea $\varphi : E \longrightarrow F$ un morfismo de grafos esto es

- $\varphi(v) \in F^{\circ}$, $\forall\, v \in E^{\circ}$ y $\varphi(e) \in F^1$, $\forall\, e \in E^1$
- $r(\varphi(e)) = \varphi(r(e))$ y $s(\varphi(e)) = \varphi(s(e))$

tal que $\{S, P\}$ y $\{T, P\}$ son las familias de Cuntz-Krieger generando $C^*(E)$ y $C^*(F)$ respectivamente.

Definamos

$$\begin{aligned} C^*(\varphi) : C^*(E) &\longrightarrow C^*(F) \\ s_u &\longmapsto C^*(\varphi)(s_u) = T_{\varphi(u)} \end{aligned}$$

entonces $C^*(\varphi)(\alpha s_u + \beta s_v) := \alpha\, T_{\varphi(u)} + \beta\, T_{\varphi(v)}\ \forall\, u, v \in E^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Asi $C^*(\varphi)$ está bien definida. ■

Afirmación: $C^*(\varphi)$ es un *-homomorfismo

En efecto.

1. $C^*(\varphi)(s_u\, s_v) = C^*(\varphi)(s_{uv}) = T_{\varphi(uv)} = T_{\varphi(u)\,\varphi(v)} = T_{\varphi(u)} T_{\varphi(v)} = C^*(\varphi)(s_u) C^*(\varphi)(s_v)$
2. $C^*(\varphi)(s_u^*) = T^*_{\varphi(u)} = (T_{\varphi(u)})^* = (C^*(\varphi)(s_u))^*$

Ahora usando el hecho que $C^*(F) = \overline{V}_{\circ}$, por continuidad podemos extender $C^*(\varphi)$ a cualquier elemento $a \in C^*(E)$.

Sea $1_E : E \longrightarrow E$ la identidad sobre el grafo E, entonces $C^*(1_E)(s_u) = s_{1_E(u)} = s_u = 1_{C^*(E)}(s_u)$. Para $\psi : F \longrightarrow G$ un morfismo de grafos con $C^*(G)$ generado por $\{s, r\}$ tenemos

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F & \xrightarrow{\psi} & G \\ u & \longmapsto & \varphi(u) & \longmapsto & \psi(\varphi(u)) \end{array}$$

$C^*(\psi) C^*(\varphi)(s_u) = C^*(\psi)(T_{\varphi(u)}) = \Gamma_{\psi(\varphi(u))} = \Gamma_{\psi\,\varphi(u)} = C^*(\psi)(s_{\varphi(u)}) = C^*(\psi)\ C^*(\varphi)(s_u)$

Por lo tanto $C^*(\psi)\, C^*(\varphi) = C^*(\psi\, \varphi)$. ■

Proposición 2.4.2 ***(suma directa de grafos).***

Sean E, F dos grafos, entonces $E \oplus F$ es construído poniendo tanto E y F en un mismo plano sin tocar uno del otro y asi

$$C^*(E \oplus F) = C^*(E) \oplus C^*(F)$$

Prueba: Aplicando definición del funtor C^* al álgebra $*\,(E \oplus F)$. ■

2.5. La estructura de ideal de un álgebra de grafos

Definición 2.5.1 ***(preorden de vértices).***

Sean $v, w \in E^{\circ}$ diremos que v esta antes de w, y escribiremos $v \leq w$ si existe $u \in E^{*}$ tal que $s(u) = w$ y $r(u) = v$

Definición 2.5.2 ***(Cofinalidad).***

Sea $E^{\leq\infty}$ la colección de caminos infinitos juntamente con caminos finitos iniciandose en un origen.

Un grafo E es cofinal si para cada $\mu \in E^{\leq\infty}$ y cada $v \in E^{\circ}$, existe un vértice $w \in \mu$ tal que $v \leq w$.

Teorema 2.5.1 ***(Simplificación).***

Sea E un grafo tal que E es cofinal y cada ciclo tiene una entrada. Entonces el álgebra de grafo es un álgebra simple.

Prueba. Ver [13] página 34

Corolario 2.5.2 El álgebra de matrices y $B_{\circ}$ son simples, donde

$$B_0 = \{\text{álgebra de operadores compactos generado por } \cdots \to u_2 \to u_1 \to w\}$$

Prueba. Los grafos de $B_{\circ}$ y del álgebra de matrices que son C^{*}-álgebras no tienen ciclo entonces debemos mostrar que estos grafos son cofinales.

Para $B_{\circ}$; $E^{\leq\infty} \equiv$ consiste de todos los caminos extendiendo de $-\infty$ a un vértice arbitrario pues recuerde que el grafo E que genera $B_{\circ}$ es $E : ...... \longrightarrow u_2 \longrightarrow u_1 \longrightarrow w$.

Ahora veamos que el grafo E es cofinal.

En efecto. Elijamos $\mu \in E^{\leq\infty}$ un camino que finaliza en v y un elemento arbitrario $u_i \in E^{\circ}$. Ahora si este vértice u_i está en μ claramente hemos finalizado y si u_i está a la derecha de v, entonces existe un camino empezando en v y finalizando en u_i por tanto E es cofinal y por consiguiente usando el teorema (2.5.1) se tiene que E es un grafo cofinal.

El álgebra de matrices no tienen caminos infinitos asi $E^{\leq\infty} \equiv$ son todos los caminos empezando en el origen w. Para un vértice arbitrario v, existe un camino μ empezando en w y terminando en v de donde es inmediato observar que el grafo es cofinal.

Observación 2.5.1

1. El álgebra multimatricial no son simples; pues ellos tienen multiples origenes lo cual directamente implica que no existe forma para conectar caminos de un origen a otro origen.

2. El grafo $E_{\mathcal{T}}$ del álgebra de Toeplitz es ejemplo de un grafo lo cual satisface la condición que cada ciclo tiene entrada pero no se exibe cofinalidad pues $E_{\mathcal{T}}$:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[loop left, "e"] & v \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

   Puesto que $I = \overline{span}\,\{p_v, s_e\}$ es un ideal de τ. Al examinar la multiplicación de los generadores de I con los generadores de τ se puede extender este resultado por linealidad y continuidad.

3. Un álgebra de grafo es simple si y sólo si cada ciclo tiene una entrada y el grafo es cofinal.

Lema 2.5.1 Si I es un ideal del álgebra de grafo $C^*(S,P)$ sobre el grafo E el conjunto $E - H_I$ genera $\frac{C^*(S,P)}{I}$, donde $H_I := \{v \in E^0 \ : \ p_v \in I\}$.

Prueba. El álgebra cociente $\frac{C^*(S,P)}{I}$, define la aplicación cociente
$q : C^*(S,P) \longrightarrow \frac{C^*(S,P)}{I}$ tal que $q(x) = x + I$; $\forall\, x \in C^*(S,P)$ entonces $q(I) = 0$ esto prueba que $\{q(p_v) : \ v \notin H_I\}$ es un conjunto de proyecciones no cero. Esto implica para $s(e) \notin H_I$ que $0 \neq q(p_{s(e)}) = q(s_e^* s_e) = q(s_e)^* q(s_e)$.
Puesto que $p_{r(e)} = s_e s_e^* + \underbrace{(\text{algunas otras proyecciones})}_{\Delta}$ entonces $q(p_{r(e)}) = q(s_e)q^*(s_e) +$

Δ_*; ($\Delta_* = q(\Delta)$ proyección).
De este último podemos escribir

$$q(p_{r(e)}) \geq q(s_e)q^*(s_e) > 0$$

Entorno a otra vía; si $r(e) \notin H_I$ entonces $q(s_e)q^*(s_e) = 0$ asi $q(p_{s(e)}) = 0$ luego $E - H_I = \{E^\circ - H_I,\ s^{-1}(E^\circ - H_I), r, s\}$ es un grafo, fácilmente se puede verificar que $\{q(p_v), q(s_e)\}$ genera el álgebra de grafo de $E - H_I$, de la cual algunos son isomorficos a $\frac{C^*(S,P)}{I}$ y por lo tanto el resultado. ■

Teorema 2.5.3 Si I es un ideal no cero en el álgebra de grafo $C^*(S,P)$ del grafo E se tiene

1. Si $w \in H_I$ y $w \leq v$, entonces $v \in H_I$ (H_I es hereditario)

2. Si $r^{-1}(v) \neq \phi$ y $\{s(e) :\ r(e) = v\} \subset H_I$, entonces $v \in H_I$ (H_I es saturado)

Prueba.
1.- Si $w \in H_I$ y como $w \leq v$ entonces existe un camino $\mu \in E^*$ tal que $s(\mu) = v$ y $r(\mu) = w$.
Probamos que si $r(\mu_1) = w$ entonces $s(\mu_1) \in H_I$ y de aqui se sigue que $v \in H_I$ (se repite el argumento para mostrar que $s(\mu_2) \in H_I,\ s(\mu_3) \in H_I$ etc).
Como $w \in H_I,\ p_w \in I$ entonces $p_w s_{\mu_1} \in I$ (I-ideal) esto quiere decir que

$$p_w s_{\mu_1} = p_{r(\mu_1)} s_{\mu_1} = s_{\mu_1} \in I$$

2.- Si $v \in E^\circ$ tal que $r^{-1}(v) \neq \phi$ y además por hipótesis también $\{s(e) : r(e) = v\} \subset H_I$. Puesto que para cada e con $r(e) = v$; sabemos que $s_e = s_e p_{s(e)} \in I$,
$p_v = \sum_{\substack{r(e)=v \\ e\in E^1}} s_e s_e^* \in I$. ■

Teorema 2.5.4 Para un grafo E, si $H \subseteq E^\circ$ es hereditario, saturado y E no tiene ciclos, entonces H determina un ideal I.

Prueba. Ver [13] página 36

Capítulo 3

K-Teoría en C^*-álgebras

La idea básica de la K-teoría en C^*-álgebras es asociar a cada C^*-álgebra A dos grupos abelianos $K_\circ(A)$ y $K_1(A)$. Esto se hace en términos de clases de equivalencia de sus proyecciones y clases de equivalencia de sus elementos unitarios. En este capítulo estudiaremos los hechos necesarios acerca de proyecciones y elementos unitarios haciendo énfasis sobre la relación de equivalencia; tambien estudiamos los funtores K_0 y K_1. Se desarrolla la estabilización de una C^*-algebra y se formula la propiedad de estabilidad de K-teoría. Se construye además la llamada estabilización de la C^*-algebra A.

3.1. Construcción de Grothendieck

Es posible asociar a cada semigrupo abeliano un grupo abeliano tal como se obtiene los enteros de los naturales.
Sea $(S, +)$ un semigrupo abeliano.
Definamos, una relación de equivalencia " $\sim$ " en $S \times S$, de la siguiente manera.

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y sólo si existe } z \in S \text{ tal que } x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z \quad (3.1)$$

Claramente la relación dada en (3.1) es de equivalencia.

Denotemos por $\mathcal{G}(S)$ al conjunto cociente $\frac{S\times S}{\sim}$, y por $[x,y]$ la clase de equivalencia de (x,y). En $\mathcal{G}(S)$ definamos una operación binaria

$$\begin{aligned} +: \quad \mathcal{G}(S)\times\mathcal{G}(S) &\longrightarrow \mathcal{G}(S) \\ ([x_1,y_1],[x_2,y_2]) &\longmapsto [x_1,y_1]+[x_2,y_2]=[x_1+x_2,y_1+y_2] \end{aligned}$$

Esta operación está bien definida en efecto si $([x_1,y_1],[x_2,y_2])=([x_1',y_1'],[x_2',y_2'])$ si y sólo si $[x_1,y_1]=[x_1',y_1']$ y $[x_2,y_2]=[x_2',y_2']$ si sólo si $[x_1,y_1]+[x_2,y_2]=[x_1',y_1']+[x_2',y_2']$ por lo tanto la operación "+" está bien definida. De esta definición es fácil verificar lo siguiente

Afirmación: $(\mathcal{G}(S),+)$ es un grupo abeliano, llamado grupo de Grothendieck de S.

Sea $y\in S$ fijo. Definamos una función $\gamma_s: S\longrightarrow\mathcal{G}(S)$ como

$$\gamma_s(x)=[x+y,y], \text{para todo } x\in S$$

Afirmación: γ_s es aditiva e independiente de y

En efecto.

a) Sean $x_1,x_2\in S$, entonces $\gamma_s(x_1+x_2)=[x_1+x_2+y,y]$

$$\begin{aligned} &= [x_1+x_2+y+y,y+y] \\ &= [x_1+y,y]+[x_2+y,y] \\ &= \gamma_s(x_1)+\gamma_s(x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto γ_s-aditiva.

b) Es inmediato ver que γ_s es independiente de y. $\blacksquare$

Afirmación: Si $x=x'$, entonces $\gamma_s(x)=\gamma_s(x')$. En efecto es inmediato de la definición de γ_s

La función γ_s se llama función de Grothendieck.

Definición 3.1.1 El semigrupo $(S,+)$ se dice que tiene la propiedad de cancelación si dados $x,y\in S$ con $x+z=y+z$ entonces $x=y$

Proposición 3.1.1 La construcción de Grothendieck tiene las siguientes propiedades.

1. **Propiedad universal:** Sea G un grupo abeliano y $\varphi : S \longrightarrow G$ una función aditiva, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\psi : \mathcal{G}(S) \longrightarrow G$ tal que $\psi\,\gamma_s = \varphi$.

   En efecto. Definamos $\psi : \mathcal{G}(S) \longrightarrow G$ como

$$\psi([x, y]) = \varphi(x - y),\ x, y \in S$$

2. **Funtorialidad:** Para cualquier función aditiva $f : S \longrightarrow T$ entre semigrupos existe un homomorfismo de grupos $\mathcal{G}(f) : \mathcal{G}(S) \longrightarrow \mathcal{G}(T)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_s"'] & T \arrow[d, "\gamma_{\mathrm{T}}"] \\ \mathcal{G}(S) \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}(T) \end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Funtorialidad de Grothendieck.

   En efecto. Llamemos $\varphi = \gamma_{\mathrm{T}}\, f$ (aditiva), $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{G}(T)$ observemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\gamma_s"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{G}(S) \arrow[d, "f^*"] \\ & G = \mathcal{G}(T) \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

   De donde f^* existe y es único, haciendo conmutativo el diagrama (3.2) . Asi bastará tomar $g(f) = f^*$, por lo tanto $g(f)\,\gamma_s = f^*\,\gamma_s = \varphi = \gamma_{\mathrm{T}}\, f$ ■

3. $\mathcal{G}(S) = \{\gamma_s(x) - \gamma_s(y) :\ x, y \in S\}$

   En efecto. Para esto considerar $u \in \mathcal{G}(S)$ si y sólo si $u = [x, y]$, $(x, y) \in S \times S$. y luego calcular $\gamma_s(x) - \gamma_s(y)$:

4. Sean $x, y \in S$, entonces $\gamma_s(x) = \gamma_s(y)$ si y sólo si $x + z = y + z$ para algún $z \in S$.

   En efecto. $\gamma_s(x) = \gamma_s(y)$ si y sólo si $[x + a, a] = [y + b, b]$, para $a, b \in S$ (fijos) si y sólo si $(x + a, a) \sim (y + b, b)$ si y sólo si existe $c \in S$ tal que $(x + a) + b + c = (y + b) + a + c$ si y sólo si $x + (a + b + c) = y + (a + b + c)$ llamando $z = a + b + c$ se tiene $x + z = y + z$. ■

5. La función de Grothendieck $\gamma_s : S \longrightarrow g(S)$ es inyectiva si y sólo si S tiene la propiedad de cancelación.

   En efecto. Es obtenida directamente de la definición de la relación de equivalencia "$\sim$" dada en (3.1)

6. Sea $(G, +)$ un grupo abeliano, S un subconjunto no vacío de G.

   Si S es cerrado con la suma, entonces $(S, +)$ es un semigrupo abeliano con la propiedad de cancelación. El grupo $\mathcal{G}(S)$ es isomorfo al subgrupo $H_\circ$ generado por S y $H_\circ = \{x - y \,/\, x, y \in S\}$.

   En efecto. Sean $s_1, s_2 \in S$ claramente $s_1 + s_2 = s_2 + s_1$ puesto que

$$s_1, s_2 \in S \subset G$$

   ya que G es abeliano. Por lo tanto $(S, +)$ es un semigrupo abeliano.

   Ahora si

$$s_1 + z = s_2 + z \tag{3.3}$$

   donde $s_1, s_2, z \in G$ como $z \in G$ entonces $\exists\, z' \in G \,/\, z + z' = z' + z = e$. Ahora de (3.3) tenemos

$$s_1 = s_1 + e = s_1 + (z + z') = s_2 + (z + z') = s_2 + e = s_2$$

   entonces $s_1 = s_2$, por lo tanto $(S, +)$ tiene la propiedad de cancelación. ■

Para que $H_\circ \cong \mathcal{G}(S)$ basta definir $f : H_\circ \longrightarrow \mathcal{G}(S)$ como $f(x - y) = [x, y]$.

3.2. El Grupo $K_\circ(A)$ de una C^*-álgebra con unidad

Sea A un C^*-álgebra, el conjunto de proyecciones de A será denotado por $\mathcal{P}(A)$ Sean $E, F \in \mathcal{P}(A)$, se dice que E es Murray Von Neumann equivalente a F, denotada por $E \sim F$ si y sólo si existe $\mathrm{v} \in A$ tal que $E = \mathrm{v}^*\mathrm{v}$ y $F = \mathrm{v}\mathrm{v}^*$ Convencionalmente y en algunos casos escribiremos v en lugar de v. Con esto fácilmente se verifica la siguiente

Afirmación: " $\sim$ " es una relación de equivalencia

Sean $\mathcal{P}_n(A) := \mathcal{P}(M_n(A))$ y $\mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$.

Definimos una relación " $\sim_\circ$ " en $\mathcal{P}_\infty(A)$ como sigue: Sean $E \in \mathcal{P}_n(A)$ y $F \in \mathcal{P}_m(A)$

$$E \sim_\circ F \text{ si sólo si existe } \mathrm{v} \in M_{m\times n}(A) \ / \ E = \mathrm{v}^*\mathrm{v} \text{ y } F = \mathrm{v}\mathrm{v}^*$$

Afirmación: " $\sim_\circ$ " es una relación de equivalencia. la cual se verifica fácilmente.

Observación 3.2.1 La relación " $\sim_\circ$ " restringida a $\mathcal{P}_n(A)$ coincide con " $\sim$ "

Definamos una operación binaria $\oplus$ en $\mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$.

$$\oplus : \mathcal{P}_\infty(A) \times \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow \mathcal{P}_\infty(A)$$

$$(E, F) \longmapsto E \oplus F$$

donde

$$E \oplus F = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = diag(E, F)$$

Observación 3.2.2 $E \oplus F \in \mathcal{P}_{n+m}(A)$; cuando $E \in \mathcal{P}_n(A)$ y $F \in \mathcal{P}_m(A)$

Proposición 3.2.1 Sean $E, F, G, E', F' \in \mathcal{P}_\infty(A)$ para algún C^*-álgebra A. Entonces

1. $E \sim_\circ E \oplus 0_n$, donde 0_n denota la identidad aditiva.

2. Si $E \sim_\circ E'$ y $F \sim_\circ F'$, entonces $E \oplus F \sim_\circ E' \oplus F'$

3. $E \oplus F \sim_\circ F \oplus E$

4. Si $E, F \in \mathcal{P}_n(A)$ tales que $EF = 0$, entonces $E + F \in \mathcal{P}_n(A)$ y además $E + F \sim_\circ E \oplus F$

5. $(E \oplus F) \oplus G = E \oplus (F \oplus G)$

Nota: Escribiremos $E = E_n$ para $E \in \mathcal{P}_n(A)$

Prueba.

1.- Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$, y sea $E \in \mathcal{P}_n(A)$ pongamos

$$V = \begin{bmatrix} E \\ \Theta \end{bmatrix} \in M_{m+n,m}(A)$$

entonces

$$V^*V = \begin{bmatrix} E \\ \Theta \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} E \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \Theta \end{bmatrix} = E^*E + \Theta = EE + \Theta = E.$$

$$VV^* = \begin{bmatrix} E \\ \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \Theta \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} E \\ \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^* & \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EE^* & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{bmatrix}$$

$$= E \oplus 0_n.$$

Donde $\Theta = 0_n$, por lo tanto $E \sim_\circ E \oplus 0_n$. ■

2.- Como $E \sim_\circ E'$, entonces existe $V \in M_{m\times n}(A)$ tal que $E = V^*V$ y $E' = VV^*$, también $F \sim_\circ F'$, entonces existe $U \in M_{m\times n}$ tal que $F = U^*U$ y $F' = UU^*$.

Consideremos $W = diag(V, U) = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} = V \oplus U$ ahora

$$W^*W = \begin{bmatrix} V^* & 0 \\ 0 & U^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V^*V & 0 \\ 0 & U^*U \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \\
&= E \oplus F
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
WW^* &= \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^* & 0 \\ 0 & U^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} V^*V & 0 \\ 0 & U^*U \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E' & 0 \\ 0 & F' \end{bmatrix} \\
&= E' \oplus F'
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $E \oplus F \sim_\circ E' \oplus F'$ $\blacksquare$

3.- Supongamos que $E \in \mathcal{P}_m(\mathcal{A})$ y $F \in \mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ pongamos

$$
V = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & F_{n\times n} \\ E_{m\times m} & 0_{m\times n} \end{bmatrix}
$$

donde $0_{k,l}$ es el cero-elemento en $M_{k,l}(\mathcal{A})$ asi $V \in M_{m+m}(\mathcal{A})$ ahora

$$
\begin{aligned}
V^*V &= \begin{bmatrix} 0_{m\times n} & E^*_{m\times m} \\ F^*_{n\times n} & 0_{n\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & F_{n\times n} \\ E_{m\times m} & 0_{m\times n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E^*E & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & F^*F \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \\
&= E \oplus F
\end{aligned}
$$

$$
VV^* = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & F_{n\times n} \\ E_{m\times m} & 0_{m\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{m\times n} & E^*_{m\times m} \\ F^*_{n\times n} & 0_{n\times m} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} FF^* & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & EE^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & E \end{bmatrix} \\
&= F \oplus E
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $E \oplus F \sim_\circ F \oplus E$.

4.- Como $E, F \in \mathcal{P}_n(A)$ entonces $E^2 = E, E^* = E$ y $F^2 = F, F^* = F$ ahora $(E+F)^2 = (E+F)(E+F) = E^2 + EF + FE + F^2 = E + F$ pues observe que si $EF = 0$ entonces $FE = 0$, también $EF = 0$ entonces $(EF)^* = 0$ si y sólo si $F^*E^* = 0$ entonces $FE = 0$.

$(E+F)^* = E^* + F^* = E + F$. Por lo tanto $E + F \in \mathcal{P}_n(A)$.

Ahora veamos que $E + F \sim_\circ E \oplus F$.

Consideremos $V = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \in M_{2n\times n}(A)$ luego

$$
\begin{aligned}
V^*V &= \begin{bmatrix} E^* & F^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \\
&= E^*E + F^*F \\
&= E + F
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
VV^* &= \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^* & F^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} EE^* & EF^* \\ FE^* & FF^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \\
&= E \oplus F
\end{aligned}
$$

5.- Recordar si $E \in \mathcal{P}_n(A), F \in \mathcal{P}_m(A)$

- $E \sim_\circ F$ si y sólo si existe $V \in M_{m\times n}(A)$ tal que $E = V^*V$ y $F = VV^*$.

- $\oplus : \mathcal{P}_\infty(A) \times \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow \mathcal{P}_\infty(A),\ \mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$

$$(E,F) \longmapsto E \oplus F$$

donde $E \oplus F = \begin{pmatrix} E_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & F_{m\times m} \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$.

Ahora

$$(E_n \oplus F_m) \oplus G_p = \begin{bmatrix} E_n \oplus F_m & 0 \\ 0 & G_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & F_m \end{pmatrix}_{n+m} & 0_{(n+m)\times p} \\ 0_{p\times(n+m)} & G_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{matrix} E_n & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & F_m \end{matrix} & 0_{(n+m)\times p} \\ 0_{p\times(n+m)} & G_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_n & 0_{n\times m} & 0_{n\times p} \\ 0_{m\times n} & F_m & 0_{m\times p} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times m} & G_p \end{bmatrix}_{(n+m+p)\times(n+m+p)}$$

$$= \begin{bmatrix} E_n & 0_{n\times(m+p)} \\ 0_{(m+p)\times n} & \begin{pmatrix} F_m & 0_{m\times p} \\ 0_{p\times m} & G_p \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & (F \oplus G) \end{bmatrix}$$

$$= E \oplus (F \oplus G)$$

Luego $(E \oplus F) \oplus G = E \oplus (F \oplus G)$.

Para cualquier C^*-algebra A se tiene que $\frac{\mathcal{P}_\infty(A)}{\sim_\circ}$ es un semigrupo abeliano. Sea

$\mathcal{D}(A) = \frac{\mathcal{P}_\infty(A)}{\sim_\circ}$, $[E]_D \in \mathcal{D}(A)$ denota la clase de equivalencia que contiene a $E \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Definamos una operación suma $(+)$ en $\mathcal{D}(A)$

$$+ : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

$$([E]_D, [F]_D) \longmapsto [E]_D + [F]_D = [E \oplus F]_D$$

Afirmación: La operación + esta bien definida

En efecto. Sea $[E]_D = [E']_D$ entonces $E \sim_\circ E'$ y $[F]_D = [F']_D$ entonces $F \sim_\circ F'$ luego $E \oplus F \sim_\circ E' \oplus F'$ asi $[E \oplus F]_D = [E' \oplus F']_D$. Por lo tanto $[E]_D + [F]_D = [E']_D + [F']_D$

Afirmación: $(\mathcal{D}(A), +)$ es un semigrupo abeliano.

En efecto. Veamos la conmutatividad.

$$[E]_D + [F]_D = [E \oplus F]_D \quad \text{proposición (3.2.1)}$$

$$= [F \oplus E]_D$$

$$= [F]_D + [E]_D$$

Definición 3.2.1 Para cualquier C^*-álgebra A, el grupo $K_\circ(A)$ es definido por $K_\circ(A) = \mathcal{G}(\mathcal{D}(A))$

Sea X un espacio topológico. Diremos que dos puntos $a, b \in X$ son homotópicos en X y escribimos $a \sim_h b$ en X si existe una función continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

Afirmación: $\sim_h$ es una relación de equivalencia

En efecto.

1. Reflexiva: $a \sim_h a$

   Definamos $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(t) = a$ entonces $f(0) = a$ y $f(1) = a$

   Por lo tanto $a \sim_h a$ ∎

2. Simétrica: Si $a \sim_h b$, probaremos $b \sim_h a$

   Como $a \sim_h b$ entonces existe una función continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

   Definamos $g : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $g(t) = f(1-t)$ claramente g es continua, $g(0) = f(1) = b$ y $g(1) = f(0) = a$.

   Por tanto $b \sim_h a$ ■

3. Transitiva: Si $a \sim_h b$ y $b \sim_h c$, probaremos que $a \sim_h c$.

   Como $a \sim_h b$ entonces existe una función continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$ también $b \sim_h c$, entonces existe $g : [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que $g(0) = a$ y $g(1) = c$.

   Definamos $h : [0,1] \longrightarrow X$ como

   $$h(t) = \begin{cases} f(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   Claramente h asi definida es continua; puesto que f es continua en $[0, \frac{1}{2}]$, g es continua en $[\frac{1}{2}, 1]$ y $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})$. Ahora $h(0) = f(0) = a$ y $h(1) = g(1) = c$.

   Por lo tanto $a \sim_h c$ ■

3.3. Equivalencia estable

Definición 3.3.1 En $\mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$, definamos la relación $\sim_s$ como sigue: Sean $E, F \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$. Diremos que

$$E \sim_s F \Leftrightarrow E \oplus R \sim_\circ F \oplus R, \text{ para algún } R \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

Nota: La relación " $\sim_s$ " es una relación de equivalencia llamada equivalencia estable. la cual se verifica fácilmente, basada en la relación de equivalencia "$\sim_0$". Supongamos que A es un C^*-álgebra unital y que E y F son proyecciones en $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$. Denotemos por 1_n la unidad (identidad) de $M_n(\mathcal{A})$. Entonces

$$E \sim_s F \Leftrightarrow E \oplus 1_n \sim_\circ F \oplus 1_n, \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}^+$$

En efecto.- Si $E \oplus R \sim_\circ F \oplus R$ para algún $R \in \mathcal{P}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(M_n(\mathcal{A}))$ entonces

$$E \oplus 1_n \sim_\circ E \oplus R \oplus (1_n - R) \sim_\circ (F \oplus R) \oplus (1_n - R) \sim_\circ F \oplus 1_n$$

Sea $[-]_\circ : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow K_\circ(A)$ la función definida por $[E]_\circ = \gamma([E]_D) \in K_\circ(A),\ E \in \mathcal{P}_\infty(A)$ donde $\gamma = \gamma_{\mathcal{D}(A)} : \mathcal{D}(A) \longrightarrow K_\circ(A)$ es la función de Grothendieck.
La proposicion siguiente, es una descripción concreta y usual del grupo $K_\circ(A)$ de una C^*-álgebra A con unidad.

Proposición 3.3.1 Sea A un C^*-álgebra con identidad. Entonces

$$K_\circ(A) = \{[E]_\circ - [F]_\circ :\ E, F \in \mathcal{P}_\infty(A)\}$$

$$= \{[E]_\circ - [F]_\circ :\ E, F \in \mathcal{P}_n(A),\ n \in \mathbb{N}\}$$

Prueba. De acuerdo a la construcción de Grothendieck para el semigrupo S se tiene

$$\mathcal{G}(S) = \{\gamma_s(x) - \gamma_s(y) :\ x, y \in S\} \tag{3.4}$$

donde

$$\gamma_s : S \longrightarrow \mathcal{G}(S) \text{ es la aplicación de Grothendieck}$$

$$x \longmapsto \gamma_s(x) = [x + y, y] \text{ para cada } y \in S$$

En nuestro caso el semigrupo

$$S = \mathcal{D}(A) = \frac{\mathcal{P}_\infty(A)}{\sim_\circ}$$

Ahora reemplazando notaciones y definiciones en (3.4):

$$K_\circ(A) = g(\mathcal{D}(A)) = \left\{\gamma_{\mathcal{D}(A)}([E]_D) - \gamma_{\mathcal{D}(A)}([F]_D) :\ [E]_D, [F]_D \text{ en } \mathcal{D}(A))\right\}$$

Si $G \in K_\circ(A)$, entonces $G = [E']_\circ - [F']_\circ$ para alguún $E' \in \mathcal{P}_k(A)$ y $F' \in \mathcal{P}_l(A)$ elijamos $n = \text{máx}\{k, l\}$ y pongamos

$$E = E' \oplus 0_{n-k} \tag{3.5}$$

$$F = F' \oplus 0_{n-l} \tag{3.6}$$

claramente entonces se tiene que $E, F \in \mathcal{P}_n(A)$.
Recordar $P \sim_\circ P \oplus 0_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (3.5) y (3.6) se tiene $E \sim_\circ E'$ y $F \sim_\circ F'$. De aqui se sigue que $[E] = [E']_\circ$ y $[F] = [F']_\circ$. Luego $G = [E]_\circ - [F]_\circ$ $\blacksquare$

Proposición 3.3.2 El grupo $K_\circ(A)$ tiene las siguientes propiedades

1. $[E \oplus F]_\circ = [E]_\circ + [F]_\circ$, para toda proyección $E, F \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$

2. $[0_\mathcal{A}]_\circ = 0$, donde $0_\mathcal{A}$ es la proyección cero en $\mathcal{A}$

3. Si $E, F \in \mathcal{P}_n(\mathcal{A})$, para algún n, y $E \sim_h F$ en $\mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ entonces $[E]_\circ = [F]_\circ$

4. Si $E; F$ son proyecciones mutuamente ortogonales en $\mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ entonces

$$[E + F]_\circ = [E]_\circ + [F]_\circ$$

5. Para todo $E, F \in \mathcal{P}_n(\mathcal{A})$; $[E]_\circ = [F]_\circ \Leftrightarrow E \sim_s F$

Prueba.
1.- $[E \oplus F]_\circ = \gamma([E \oplus F]_D) = \gamma([E]_D + [F]_D) = \gamma([E]_D) + \gamma([F]_D) = [E]_\circ + [F]_\circ$ $\blacksquare$
2.- Puesto que $0_\mathcal{A} \oplus 0_\mathcal{A} \sim_\circ 0_\mathcal{A}$ entonces $[0_\mathcal{A} \oplus 0_\mathcal{A}]_D = [0_\mathcal{A}]_D$ si sólo si $[0_\mathcal{A}]_D + [0_\mathcal{A}]_D = [0_\mathcal{A}]_D$; por tanto $[0_\mathcal{A}]_\circ = 0$. $\blacksquare$
3.- De las implicaciones

- Si $E \sim_h F$ entonces $E \sim_u F$

- Si $E \sim_u F$ entonces $E \sim F$

- Si $E \sim_h F$ entonces $E \sim F$ entonces $E \sim_\circ F$

Tenemos $[E] = [F]$ entonces $\gamma([E]_D) = \gamma([F]_D)$ si y sólo si

$$[E]_\circ = [F]_\circ \quad \blacksquare$$

4.- Se dice que E y F son mutuamente ortogonales si y sólo si $EF = 0$.
Sabemos que si $E, F \in \mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ tal que $EF = 0$ entonces $(E + F)$ es una proyección

y $E+F \sim_\circ E\oplus F$ entonces $[E+F]_\circ = [E\oplus F]_\circ = [E]_\circ + [F]_\circ$. ■

5.- Como $[E]_\circ = [F]_\circ \Leftrightarrow \varphi\left([E]_D\right) = \varphi\left([F]_D\right) \Leftrightarrow [E]_D + [G]_D = [F]_D + [G]_D$.
De aquí por definición de la operación en $\mathcal{D}(A)$

$$[E\oplus G]_D = [F\oplus G]_D$$

entonces $(E\oplus G) \sim_\circ (F\oplus G)$, por lo tanto $E \sim_s F$
Recíprocamente si $E \sim_s F$ entonces $E\oplus G \sim_\circ F\oplus G$ para algún $G\in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ entonces $[E\oplus G]_\circ = [F\oplus G]_\circ$ luego $[E]_\circ + [G]_\circ = [F]_\circ + [G]_\circ$ y como $K_\circ(\mathcal{A})$ es un grupo entonces

$$[E]_\circ = [F]_\circ \quad ■$$

Proposición 3.3.3 Sea A un C^*-álgebra con identidad, sea G un grupo abeliano y supongase que $\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow G$ es una aplicación que satisface:

1. $\nu(E\oplus F) = \nu(E) + \nu(F)$, $\forall\, E, F \in \mathcal{P}_\infty(A)$
2. $\nu(0_A) = 0$
3. Si $E, F\in \mathcal{P}_n(A)$ para algún $n\in\mathbb{N}$ y $E\sim_h F$ en $\mathcal{P}_n(A)$ entonces $\nu(E) = \nu(F)$

Entonces
Existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : K_\circ(A) \longrightarrow G$ lo cual hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_\circ}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
K_\circ(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G
\end{tikzcd}$$

Figura 3.2: Homomorfismo “α” del grupo $K_0(A)$ en el grupo G.

Prueba.
Primeramente probaremos que

$$\text{Si } E, F\in \mathcal{P}_\infty(A) \;/\; E\sim_\circ F \text{ entonces } \nu(E) = \nu(F) \tag{3.7}$$

Como $E \in \mathcal{P}_\infty(A)$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $E \in \mathcal{P}_k(A)$

$F \in \mathcal{P}_\infty(A)$ entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $F \in \mathcal{P}_l(A)$

Ahora sea $n = \text{máx}\{k, l\}$ pongamos $E' = E \oplus \square_{n-k}$ y $F' = F \oplus \square_{n-l}$ entonces claramente $E', F' \in \mathcal{P}_n(A)$. Ahora

$$E' \sim_\circ E \sim_\circ F \sim_\circ F'$$

entonces $E' \sim_\circ F'$ luego $E' \sim F'$ en $\mathcal{P}_n(A)$.

Sean E, F proyecciones en un C^*-algebra A.

Si $E \sim F$ entonces $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $M_2(A)$

Si $E \sim F$ entonces $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $M_2(A)$

Como $E' \sim F'$ entonces $\begin{pmatrix} E' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} F' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{P}_{4n}(A)$ si y sólo si $E' \oplus 0_{3n} \sim_h F' \oplus 0_{3n}$ en $\mathcal{P}_{4n}(A)$ tenemos $E' = E \oplus 0_{n-k}$ entonces $E' \oplus 0_{3n} = E \oplus 0_{n-k} \oplus 0_{3n}$ entonces $E = E \oplus 0_{4n-k}$ de donde

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \nu(E) + \nu(0) + ... + \nu(0) \\ &= \nu(E' \oplus O_{3n}) \\ &= \nu(F' \oplus O_{3n}) \\ &= \nu(F) \end{aligned}$$

entonces $\nu(E) = \nu(F)$.

Definamos $\beta : \mathcal{D}(A) \longrightarrow G$ como sigue $\beta([E]_D) = \nu(E)$

1. Claramente β está bien definida

   Sean $[E]_D, [F]_D$ en $\mathcal{D}(A)$ tal que $[E]_D = [F]_D$ entonces $E \sim_\circ F$, por (3.7) se tiene $\nu(E) = \nu(F)$.

   Por lo tanto $\beta([E]_D) = \beta([F]_D)$.

2. β es aditiva

   $\beta([E]_D + [F]_D) = \beta([E \oplus F]_D) = \nu(E \oplus F) = \nu(E) + \nu(F) = \beta([E]_D) + \beta([F]_D)$, por lo tanto $\beta([E]_D + [F]_D) = \beta([E]_D) + \beta([F]_D)$. ■

Por propiedad universal de Grothendieck tenemos que existe un único homomorfismo $\alpha : K_\circ(A) \longrightarrow G$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(A) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "{[\cdot]_\circ}"'] & & G \\ & K_\circ(A) \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

3.4. El Funtor $K_\circ$

$K_\circ$ se puede ver como un funtor de la categoría de C^*-álgebra a la categoría de grupos. Sean A y B dos C^*-algebras con identidad y $\varphi : A \longrightarrow B$ un C^*-homomorfismo el cual se puede extender a un C^*-homomorfismo $\varphi : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$ para cada n

$$\varphi\left[(a_{ij})_{i,j=1}^n\right] = [\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^n$$

Asi $\varphi(\mathcal{P}_\infty(A)) \subset \mathcal{P}_\infty(B)$; pues la imagen de una proyección bajo C^*-homomorfismo es una proyección.

En efecto. Sea $G \in \varphi(\mathcal{P}_\infty(A))$; claramente $\varphi(\mathcal{P}_\infty(A)) \subset \mathcal{P}_\infty(B)$. Sea $G = \varphi(E)$, donde $E \in \mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(M_n(A))$ de donde $E \in \mathcal{P}_n(A)$, para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces $E = E^2 = E^*$ luego

$$G^2 = (\varphi(E))^2 = \varphi(E)\varphi(E) = \varphi(E^2) = \varphi(E) = G$$

$$G^* = (\varphi(E))^* = \varphi(E^*) = \varphi(E) = G$$

Por lo tanto $G \in \mathcal{P}_\infty(B)$.

Definamos $K_\circ(\varphi) : K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(B)$ como

$$K_\circ(\varphi)([E]_\circ) = [\varphi(E)]_\circ \text{ para } E \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

Afirmación: $K_\circ(\varphi)$ está bien definida

En efecto. Sean $[E]_\circ, [F]_\circ$ en $K_\circ(A)$, tal que

$$[E]_\circ = [F]_\circ \Leftrightarrow \gamma([E]_D) = \gamma([F]_D) \Rightarrow [E]_D = [F]_D \text{ pues } \gamma \text{ inyectiva}$$

entonces $E \sim_\circ F$, de donde $E \sim F$ (pues $\sim = \sim_\circ$, para $m = n$) entonces existe $v \in A$ tal que $E = v^*v$ y $F = vv^*$. De aqui como $\varphi : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$; se tiene que $\varphi(v) \in B$ luego $\varphi(E) = \varphi(v^*)\varphi(v) = (\varphi(v))^*\varphi(v)$ y $\varphi(F) = \varphi(v)\varphi(v^*) = \varphi(v)(\varphi(v))^*$; entonces $\varphi(E) \sim \varphi(F)$ luego $\varphi(E) \sim_\circ \varphi(F)$ si y sólo si $[\varphi(E)]_D = [\varphi(F)]_D$, por tanto $\gamma([\varphi(E)]_D) = \gamma([\varphi(F)]_D)$ si y sólo si $[\varphi(E)]_\circ = [\varphi(F)]_\circ$. ∎

Sean A, B dos C^*-algebras con identidad, y sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un *-homomorfismo asociamos a φ un homomorfismo de grupos $K_\circ(\varphi) : K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(B)$ como sigue: Por lo hecho anteriormente φ extiende a un *-homomorfismo

$$\varphi = \varphi_n : M_n(A) \longrightarrow M_n(B) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

$$(a_{ij}) \longmapsto \varphi(a_{ij}) = [\varphi(a_{ij})]$$

Un *-homomorfismo aplica proyecciones a proyecciones, y así φ aplica $\mathcal{P}_\infty(A)$ en $\mathcal{P}_\infty(B)$

Definimos $\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow K_\circ(B)$ como $\nu(p) = [\varphi(p)]_\circ$ para $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ entonces ν satisface la proposición (3.3.3), Entonces existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : K_\circ(A) \longrightarrow G$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_\circ}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
K_\circ(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G
\end{tikzcd}$$

Figura 3.3: Factorización del grupo $K_0(A)$.

Observe que: $[\ \cdot\ ]_\circ = \gamma\,\pi$, donde $\mathcal{P}_\infty(A) \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{P}_\infty(A)}{\sim_\circ} \xrightarrow{\gamma} g(\mathcal{D}(A)) = K_\circ(A)$. Por consiguiente ν factoriza directamente un único homomorfismo de grupos $K_\circ(\varphi)$:

$K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(B)$ dado por

$$K_\circ(\varphi)([p]_\circ) = [\varphi(p)]_\circ \tag{3.8}$$

De otro lado si A y B son C^*-algebras, entonces denotemos al homomorfismo cero de A en B por $0_{B,A}$

Y la aplicación identidad $I : A \longrightarrow A$ por I_A También usamos una notación similar en la categoría de grupos abelianos.

Proposición 3.4.1 ***(Funtorialidad de $K_\circ$ para C^*-algebras con identidad).***

1. Para cada C^*-algebra unitaria A, $K_\circ(I_A) = I_{K_\circ(A)}$
2. Si A, B y C son C^*-algebras, $\varphi : A \longrightarrow B$ y $\psi : B \longrightarrow C$ son *-homomorfismos, entonces
$$K_\circ(\psi\,\varphi) = K_\circ(\psi)\,K_\circ(\varphi)$$
3. $K_\circ(\{0\}) = \{0\}$
4. Para cada par de C^*-algebras A y B, $K_\circ(0_{B,A}) = 0_{K_\circ(B),K_\circ(A)}$

Prueba.

1.- Usando (3.8) tenemos

$$K_\circ(I_A)([p]_\circ) = [I_A(p)]_\circ = [p]_\circ \text{ para cada } p \text{ en } \mathcal{P}_\infty(A) \quad \blacksquare$$

2.- Se tiene los *-homomorfismos $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ entonces

$$K_\circ(\psi\,\varphi) : K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(C)$$

También por el inducido:

$$K_\circ(A) \xrightarrow{K_\circ(\varphi)} K_\circ(B) \xrightarrow{K_\circ(\psi)} K_\circ(C)$$

Ahora $K_\circ(\psi\,\varphi)([p]_\circ) = [\psi\,\varphi(p)]_\circ = [\psi(\varphi(p))]_\circ = K_\circ(\psi)([\varphi(p)]_\circ) = K_\circ(\psi)\,[K_\circ(\varphi)([p]_\circ)]$ $= K_\circ(\psi)\,K_\circ(\varphi)([p]_\circ)$ para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ entonces

$$K_\circ(\psi\,\varphi) = K_\circ(\psi)\,K_\circ(\varphi) \quad \blacksquare$$

3.- Sabemos $\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(M_n(A))$, entonces tenemos

$$\mathcal{P}_n(\{0\}) = \mathcal{P}(M_n(0)) = \{0_n\}$$

donde 0_n es el elemento cero en $M_n(A)$ las proyecciones cero $0 = 0_1, 0_2, ...$ todas son equivalentes y asi $\mathcal{D}(\{0\}) = \frac{\mathcal{P}_\infty(\{0\})}{\sim_\circ} = \{[0]\}$ de aqui

$$K_\circ(\{0\}) = G(\{0\}) = \{0\} \quad \blacksquare$$

4.- Tenemos

$$A \xrightarrow{0_{0,A}} \{0\} \xrightarrow{0_{B,0}} B \tag{3.9}$$

entonces

$$K_\circ(0_{B,A}) = K_\circ(0_{B,0}\, 0_{0,A}) = K_\circ(0_{B,0})\, K_\circ(0_{0,A}) \tag{3.10}$$

También se tiene de (3.9):

$$K_\circ(A) \xrightarrow{K_\circ(0_{0,A})} K_\circ(\{0\}) = \{0\} \xrightarrow{K_\circ(0_{B,0})} K_\circ(B)$$

luego

$$K_\circ(0_{B,0})\, K_\circ(0_{0,A}) = 0_{K_\circ(B),K_\circ(A)} \tag{3.11}$$

Finalmente de (3.10) y (3.11) se tiene

$$K_\circ(0_{B,A}) = 0_{K_\circ(B),K_\circ(A)} \quad \blacksquare$$

3.5. Equivalencia homotópica en C^*-álgebras

Sean A, B dos C^*-algebras, $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ dos *-homomorfismos. Diremos que φ y ψ son homotópicos y escribimos $\varphi \sim_h \psi$; si existe un camino de *-homomorfismos $\varphi_t : A \longrightarrow B,\ t \in [0,1]$ tal que $t \longmapsto \varphi_t(a)$ es una aplicación continua de $[0,1]$ en B para cada $a \in A$; $\varphi_\circ = \varphi$ y $\varphi_1 = \psi$. Nosotros diremos que el camino $t \longmapsto \varphi_t$ es continuo punto a punto.
Las C^*-algebras A y B son homotópicamente equivalentes si existen *-homomorfismos $\varphi : A \longrightarrow B$ y $\psi : B \longrightarrow A$ tal que $\psi\,\varphi \sim_h 1_A$ y $\varphi\,\psi \sim_h 1_B$.
En este caso diremos que $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$ es una homotopía (entre A y B).

Definición 3.5.1 Sean A, B dos C^*-álgebras y $\varphi : A \longrightarrow B$ un *-homomorfismo suryectivo. Dado un elemento $b \in B$, un elemento $a \in A$ es llamado levantamiento de b si $\varphi(a) = b$.

Proposición 3.5.1 ***(Invarianza homotópica de $K_\circ$).***
Sean A, B dos C^*-álgebras con identidad.

1. Si $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ son *-homomorfismos homotópicos entonces

$$K_\circ(\varphi) = K_\circ(\psi)$$

2. Si A y B son homotópicamente equivalentes entonces $K_\circ(A) \cong K_\circ(B)$. Mas específicamente, si $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$ es una homotopía entonces $K_\circ(\varphi) : K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(B)$ y $K_\circ(\psi) : K_\circ(B) \longrightarrow K_\circ(A)$ son isomorfismos, y asi $K_\circ(\varphi)^{-1} = K_\circ(\psi)$

Prueba.
1.- Como $\varphi \sim_h \psi$; probaremos que $K_\circ(\varphi) = K_\circ(\psi)$. Sea $\varphi_t : A \longrightarrow B$ un camino continuo punto a punto de *-homomorfismos conectando φ a ψ. Extendemos este camino a caminos continuos punto a punto de *-homomorfismos $\varphi_t : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Para cada $p \in \mathcal{P}_n(A)$, el camino $t \longmapsto \varphi_t(p)$ es continuo y asi

$$\varphi_\circ(p) = \varphi(p) \sim_h \psi(p) = \varphi_1(p)$$

esto muestra que $K_\circ(\varphi)([p]_\circ) = [\varphi(p)]_\circ = [\psi(p)]_\circ = K_\circ(\psi)([p]_\circ)$.
Por lo tanto $K_\circ(\varphi) = K_\circ(\psi)$. ∎
2.- $A \sim_h B \Leftrightarrow \psi\,\varphi \sim_h 1_A$ y $\varphi\,\psi \sim_h 1_B$ entonces $K_\circ(\psi\,\varphi) = K_\circ(1_A)$ y $K_\circ(\varphi\,\psi) = K_\circ(1_B)$ si y solo si $K_\circ(\psi)\,K_\circ(\varphi) = 1_{K_\circ(A)}$ y $K_\circ(\varphi)\,K_\circ(\psi) = 1_{K_\circ(B)}$.
Por lo tanto $K_\circ(\varphi)$ y $K_\circ(\psi)$ son isomorfismos mas aun $K_\circ(\varphi)^{-1} = K_\circ(\psi)$. ∎
Dos *-homomorfismos $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ entre las C^*-algebras A y B se dicen ser ortogonales o mutuamente ortogonales simbolicamente

$$\varphi \perp \psi \text{ si y solo si } \varphi(a)\,\psi(b) = 0,\ \forall\, a, b \in A$$

Lema 3.5.1 Si A y B son dos C^*-álgebras con identidad, y si $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ son *-homomorfismos mutuamente ortogonales, entonces $\varphi + \psi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo; y $K_\circ(\varphi + \psi) = K_\circ(\varphi) + K_\circ(\psi)$

Prueba. Esto directamente se chequea que $\varphi + \psi$ es un *-homomorfismo.
Los *-homomorfismos $\varphi_m, \psi_n : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$ inducidos por φ y ψ son ortogonales, para cada $n \in \mathbb{N}$ como $\varphi_n\left[(a_{ij})_n\right] = \left[\varphi(a_{ij})\right]_n$ se tiene que $\varphi_n(a)\,\psi_n(b) = \varphi(a)\,\psi(b) = 0$, por lo tanto $\varphi_n \perp \psi_n$. ■
También $(\varphi + \psi)_n = \varphi_n + \psi_n$
En efecto. Llamemos $\varphi + \psi = \rho$ entonces

$$\begin{aligned}
\left[\varphi + \psi\right]_n (a_{ij}) &= \left[(\varphi + \psi)(a_{ij})\right]_{n \times n} \\
&= (\varphi(a_{ij}))_n + (\psi(a_{ij}))_n \\
&= \varphi_n(a_{ij}) + \psi_n(a_{ij}) \\
&= (\varphi_n + \psi_n)(a_{ij})
\end{aligned}$$

entonces $\left[\varphi + \psi\right]_n = \varphi_n + \psi_n$.
De otro lado sabemos si $E \perp F$ entonces $[F + E]_\circ = [E]_\circ + [F]_\circ$ nosotros obtenemos para cada $E \in \mathcal{P}_n(A)$

$$\begin{aligned}
K_\circ(\varphi + \psi)([E]_\circ) &= [(\varphi + \psi)_n(E)]_\circ \\
&= [\varphi_n(E) + \psi_n(E)] \\
&= [\varphi_n(E)]_\circ + [\psi_n(E)]_\circ \\
&= K_\circ(\varphi)([E]_\circ) + K_\circ(\psi)([E]_\circ) \\
&= \left[K_\circ(\varphi) + K_\circ(\psi)\right]([E]_\circ)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $K_\circ(\varphi + \psi) = K_\circ(\varphi) + K_\circ(\psi)$. ■

Lema 3.5.2 Para cada C^*-algebra unitaria A, la sucesión exacta escindible siguiente

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widetilde{A} \underset{\xleftarrow{\lambda}}{\xrightarrow{\pi}} \mathbb{C} \longrightarrow O$$

obtenida adjuntando una unidad a A, induce una sucesión exacta escindible

$$O \longrightarrow K_\circ(A) \xrightarrow{K_\circ(i)} K_\circ(\widetilde{A}) \underset{K_\circ(\lambda)}{\overset{K_\circ(\pi)}{\rightleftarrows}} K_\circ(\mathbb{C}) \longrightarrow O \tag{3.12}$$

Prueba. Si $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$ es la proyección en $\widetilde{A}$ entonces $f^* = f$ y $f^2 = f$ de aqui $\widetilde{A} = A + \mathbb{C}f$ y además $af = fa = 0$, $\forall\, a \in A$.

Definimos los *-homomorfismos

- $\mu : \widetilde{A} \longrightarrow A \;/\; \mu(a + \alpha f) = a$
- $\lambda' : \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{A} \;/\; \lambda'(\alpha) = \alpha f$

Verificación inmediata sencilla por ejemplo $\mu(1_{\widetilde{A}}) = \mu(1_A + f) = \mu(1_A + 1f) = 1_A$.
También

$$\mu\, i(a) = \mu\,[(a,0)] = \mu(a + 0f) = a \text{ entonces } I_A = \mu\, i$$

$$(i\,\mu + \lambda'\,\pi)(a + \alpha f) = i(\mu(a + \alpha f)) + \lambda'(\pi(a + \alpha f))$$

Luego $1_{\widetilde{A}} = i\,\mu + \lambda'\,\pi$

$$\pi\, i(a) = \pi(i(a)) = \pi\,[(a,0)] = 0_{\mathbb{C}}, \text{ entonces } \pi\, i = 0$$

$\pi\,\lambda(\alpha) = \pi(\lambda(\alpha)) = \pi(\alpha\, 1_{\widetilde{A}}) = \pi(\alpha(0,1)) = \pi((0,\alpha)) = \alpha = I(\alpha)$, entonces $\pi\,\lambda = I_{\mathbb{C}}$.
$i\,\mu \perp \lambda'\,\pi$ pues $(i\,\mu)(\tilde{a})(\lambda'\,\pi)(\tilde{b}) = i\,[\mu(\tilde{a})]\;\lambda'[\pi(\tilde{b})] = i(a)\,\lambda'(\beta) = (a,0)(\beta f)$
$= (a,0)(\beta(1_{\widetilde{A}} - 1_A)) = (a,0)\,[\beta(0,1) - \beta(1_A,0)] = (a,0)(-\beta 1_A, \beta)$
$= (-\beta 1_A a + \beta a + (-\beta 1_A)0, 0\beta) = (-\beta a + \beta a, 0) = (0,0) = 0$
Ahora usando la funtorialidad de $K_\circ$ y $K_\circ(\varphi + \psi) = K_\circ(\varphi) + K_\circ(\psi)$ tenemos

$$0 = K_\circ(0) = K_\circ(\pi\, i) = K_\circ(\pi)\, K_\circ(i) \tag{3.13}$$

$$I_{K_\circ(\mathbb{C})} = K_\circ(I_{\mathbb{C}}) = K_\circ(\pi\,\lambda) = K_\circ(\pi)\, K_\circ(\lambda) \tag{3.14}$$

$$I_{K_\circ(A)} = K_\circ(I_A) = K_\circ(\mu\, i) = K_\circ(\mu)\, K_\circ(i) \tag{3.15}$$

$$I_{K_\circ(\widetilde{A})} = K_\circ(I_{\widetilde{A}}) = K_\circ(i\,\mu + \lambda'\,\pi) = K_\circ(i\,\mu) + K_\circ(\lambda'\,\pi)$$

$$= K_\circ(i)K_\circ(\mu) + K_\circ(\lambda')\, K_\circ(\pi) \tag{3.16}$$

La exactitud de (3.12) se tiene de las identidades anteriores (3.14) y (3.15)

La escisión de (3.12) se tiene de la identidad (3.13).

Del lema (3.5.2) tenemos la sucesión exacta escindible

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widetilde{A} \underset{\xleftarrow[\lambda]{}}{\xrightarrow{\pi}} \mathbb{C} \longrightarrow O$$

De aquí definamos la aplicación escalar $s = \lambda\,\pi : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{A}$, es decir $s(a+\alpha 1) = \alpha 1$, para todo $a \in A$ y para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ claramente $\pi(s(x)) = \pi(x)$ y $(x - s(x)) \in A$, con $x \in \widetilde{A}$.

Ejemplo 3.5.1 Sea A un C^*-algebra, $x \in M_2(A)$ un elemento unitario. Se muestra que

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X \Leftrightarrow X = diag(a, b)$$

para algún $a, b \in A$. Mostraremos que a y b son unitarias si X-unitaria.

En efecto. Sean $X = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \in M_2(A)$ unitario, ahora

$X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X$ si y sólo si $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$ si y sólo si $\begin{pmatrix} a & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $c = d = 0$.

Luego $X = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = diag(a, b)$. ■

Ejemplo 3.5.2 Sea $Tr : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ la traza estandart dada por

$$Tr(a_{ij})_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Sean p, q proyecciones en $M_n(\mathbb{C})$. Los enunciados siguientes son equivalentes

(i) $p \sim q$

(ii) $Tr(p) = Tr(q)$

(iii) $dim(p(\mathbb{C}^n)) = dim(q(\mathbb{C}^n))$

En efecto.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Como $p \sim q$ si y sólo si existe v en $M_n(\mathbb{C})$ tal que $p = v^*v$ y $q = vv^*$, ahora $Tr(p) = Tr(v^*v) = Tr(vv^*) = Tr(q)$. Luego se tiene $Tr(p) = Tr(q)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $dim(p(\mathbb{C}^n)) = dim(q(\mathbb{C}^n))$ inmediata.

$(iii) \Rightarrow (i)$ ejercicio. ■

Ejemplo 3.5.3 Considere la sucesión exacta corta

$$O \longrightarrow C_\circ(\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} C(D) \xrightarrow{\psi} C(T) \longrightarrow O$$

donde $D = \{z \in \mathbb{C} \;/\; \|z\| \leq 1\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$, ψ es la aplicación restricción y donde φ es obtenido identificando $D - T \equiv \mathbb{R}^2$ sea $v \in C(T)$ será dado por $v(z) = z$, $\forall\, z \in T$.

1. Mostraremos que v es unitario

   Veamos

$$vv^*(z) = v(z)v^*(z) = z\overline{z} = \|z\|^2 = 1$$

$$v^*v(z) = v^*(z)v(z) = \overline{z}z = \|z\|^2 = 1$$

2. Mostraremos que v no es un levantamiento unitario en $C(D)$ es decir no existe un elemento unitario $u \in C(D)$ tal que $\psi(u) = v$. En efecto este hecho se obtiene usando el teorema del punto fijo de Brower lo cual dice que cada función continua $f : D \longrightarrow D$ tiene un punto fijo. Por lo tanto se tiene el resultado.

3. De (1) y (2) se concluye que $v \notin \mathcal{U}_\circ(C(\pi))$ y que existe unitarios $v_1, v_2 \in C(T)$ tal que v_1 no es homotopicamente equivalente a v_2 y asi se muestra que no existe un elemento autoadjunto $h \in C(T)$ para lo cual $v = e^{ih}$.

Trazas: Sea A un C^*-álgebra. Una traza acotada sobre A es una aplicación lineal $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$ con la propiedad

$$\tau(ab) = \tau(ba), \ a, b \in A$$

Esta propiedad llamada **propiedad traza** implica que $\tau(p) = \tau(q)$ siempre que $p \sim q$ en A con $p, q \in \mathcal{P}(A)$.

Una traza τ es positiva si $\tau(a) \geq 0$ para cada elemento positivo $a \in A$. Si A tiene identidad y τ es la traza positiva con $\tau(1_A) = 1$, entonces τ es llamada un estado tracial.

Para cada traza τ sobre un C^*-algebra A existe precisamente una traza τ_n (usualmente abreviada por τ) sobre $M_n(A)$ que satisface

$$\tau_n(diag(a, 0, ..., 0)) = \tau(a), \ \forall\, a \in A$$

y τ_n es dada por

$$\tau_n((a_{ij})_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} \tau(a_{ii})$$

Una traza τ sobre un C^*-algebra A dá lugar en esta vía a una función $\tau : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ y esta función satisface las condiciones

1. $\tau(p \oplus q) = \tau(p) + \tau(q) \ \forall\, p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$

2. $\tau(0_A) = 0_{\mathbb{C}}$

3. Si $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}_n(A)$, entonces $\tau(p) = \tau(q)$ luego por la proposición (3.3.3) existe un único homomorfismo $K_\circ(\tau) : K_\circ(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfaciendo $K_\circ(\tau)([p]_\circ) = \tau(p), \ p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Para ver que (3) en la proposición es verdadera usaremos que $p \sim q$ si $p \sim_h q$.

   Si τ es positivo entonces $K_\circ(\tau)([p]_\circ) = \tau(p)$ es un número real positivo para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$, y $K_\circ(\tau)$ aplica $K_\circ(A)$ sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.5.4 El grupo $K_\circ(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Mas específicamente, si Tr es la traza estandart sobre $M_n(\mathbb{C})$ entonces

$K_\circ(Tr) : K_\circ(M_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo. El grupo cíclico $K_\circ(M_n(\mathbb{C}))$ es generado por $[e]_\circ$, donde e es alguna proyección un-dimensional en $M_n(\mathbb{C})$.

Prueba. Sea $g \in K_\circ(M_n(\mathbb{C}))$ y recuerde que

$$K_\circ(A) = \{[p]_\circ - [q]_\circ \,:\, p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)\}$$

$$= \{[p]_\circ - [q]_\circ \,:\, p, q \in \mathcal{P}_n(A),\ n \in \mathbb{N}\}$$

entonces por esto se encuentra $k \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \mathcal{P}_k(M_n(\mathbb{C})) = M_{kn}(\mathbb{C})$ tal que $g = [p]_\circ - [q]_\circ$. Ahora

$$\begin{aligned} K_\circ(Tr)(g) &= K_\circ(Tr)([p]_\circ - [q]_\circ) \\ &= K_\circ(Tr)([p-q]_\circ) \\ &= [Tr(p-q)]_\circ \\ &= [Tr(p) - Tr(q)]_\circ \\ &= [Tr(p)]_\circ - [Tr(q)]_\circ \\ &= Tr(p) - Tr(q) \\ &= dim(p(\mathbb{C}^{kn})) - dim(q(\mathbb{C}^{kn})) \end{aligned}$$

entonces vemos que $K_\circ(Tr)(g) \in \mathbb{Z}$ ahora si $K_\circ(Tr)(g) = 0$, entonces $p \sim q$, por tanto $g = [p]_\circ - [q]_\circ = 0$, de aqui $K_\circ(Tr)$ es inyectiva.
La imagen de $K_\circ(Tr) \leq \mathbb{Z}$ pero un subgrupo H de $\mathbb{Z}$ es igual a $\mathbb{Z}$ si y sólo si $1 \in H$.
Ahora $1 = K_\circ(Tr)([e]_\circ)$ cuando e es una proyección en $M_n(\mathbb{C})$ con rango uno-dimensional luego $Im(K_\circ(Tr)) = \mathbb{Z}$ y asi $K_\circ(Tr)$ es suryectiva.

Ejemplo 3.5.5 Sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional, entonces se tiene $K_\circ(B(H)) = 0$ donde $B(H) = \{\varphi : H \longrightarrow H \,/\, \varphi \text{ es operador lineal acotado}\}$

En efecto.

1. Si H es infinito dimensional separable. Sea $H^n = H \oplus ... \oplus H$ y usemos la identificación $M_n(B(H)) = B(H^n)$ con un pequeño abuso de notación la aplicación $dim : \mathcal{P}_\infty(B(H)) \longrightarrow \{0, 1, ..., \infty\}$ dado por $dim(p) = dim(p(H^n))$ con $p \in \mathcal{P}_n(B(H)) = \mathcal{P}(B(H^n))$ es suryectiva. Observar que $p \sim q$ si y sólo si $dim(p(H)) = dim(q(H))$ para p, q proyecciones en $B(H)$. Ahora usando esto para p, q proyecciones en $p(B(H^n))$, entonces $dim(p) = dim(q)$ si y sólo si $p \sim q$. Como $dim(p \oplus 0) = dim(p)$, obtenemos para todas las proyecciones $p, q \in \mathcal{P}_\infty(B(H))$ que $dim(p) = dim(q)$ si $p \sim_\circ q$. La dimensión es aditiva y asi $dim(p \oplus q) = dim(p) + dim(q)$.
   Esto muestra que la aplicación $d : D(B(H)) \longrightarrow \{0, 1, 2, ..., \infty\}$ dada por $d([p]_D) = dim(p)$ es un isomorfismo bien definido de semigrupos y asi conclúimos que $K_\circ(B(H))$ es isomorfico al grupo de Grothendieck del semigrupo $\{0, 1, 2, ..., \infty\}$ pero el grupo de Grothendieck del semigrupo $(\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}, +)$ es $\{0\}$ esto muestra que $K_\circ(B(H)) = 0$.

2. Si H no es separable entonces $D(B(H))$ es isomorfico al semigrupo de todos los números cardinales o menor e igual que $dim(H)$ (donde $dim(H)$ es el cardinal de una base ortonormal de H) el grupo de Grothendieck de cualquier tal semigrupo es 0 y de aqui $K_\circ(B(H)) = 0$. $\blacksquare$

Ejemplo 3.5.6 Para cada espacio de Hausdorff compacto conexo X existe un homomorfismo suryectivo de grupos

$$dim : K_\circ(C(X)) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tal que satisface

$$dim([p]_\circ) = Tr(p(x)),\ p \in \mathcal{P}_\infty(C(X))$$

donde $x \in X$ y Tr es la traza estandar sobre $M_n(\mathbb{C})$.

Prueba. Empecemos mostrando que $Tr(p(x))$ es independiente de x. Claramente la función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(x) = Tr(p(x))$ es continua. Puesto que X es conexo, cada función en $C(X, \mathbb{Z})$ es constante por consiguiente la función φ es

constante para cada p en $\mathcal{P}_\infty(C(X))$.
Ahora la aplicación $\tau_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\tau_x(f) = f(x)$ es una traza sobre $C(X)$ para cada $x \in X$. De aqui τ_x induce un homomorfismo de grupos $K_\circ(\tau_x) : K_\circ(C(X)) \longrightarrow \mathbb{C}$ lo cual satisface $K_\circ(\tau_x)([p]_\circ) = \tau_x(p)$ para cada proyección $p \in \mathcal{P}_\infty(C(X))$.
Si $p \in \mathcal{P}_n(C(X))$, entonces $\tau_x(p) = Tr(p(x))$ por convención como una traza es extendida a una matriz de algebras. Concluímos que el homomorfismo $K_\circ(\tau_x)$ es independiente de x y que este tiene rango contenido en $\mathbb{Z}$ porque $Tr(p(x))$ es un entero para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(C(X))$.
Poniendo $dim = K_\circ(\tau_x)$ necesitamos solo mostrar que $K_\circ(\tau_x)$ es sobre la unidad 1 en $C(X)$ es una proyección y $1 = 1(x) = K_\circ(\tau_x)([1]_\circ)$ esto establece que $K_\circ(\tau_x)$ es suryectiva. $\blacksquare$

Ejemplo 3.5.7 Un espacio de Hausdorff compacto X es llamado contractible si para algún $x_\circ \in X$, existe una aplicación continua $\alpha : [0,1] \times X \longrightarrow X$ tal que $\alpha(1,x) = x$ y $\alpha(0,x) = x_\circ$, $\forall\, x \in X$.
Sea X un espacio de Hausdorff compacto, contractible. Entonces $K_\circ(C(X)) \cong \mathbb{Z}$ y la aplicación $dim : K_\circ(C(X)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ del ejemplo inmediato anterior es un isomorfismo.

Prueba. Asumamos que X es contractible y sea $x_\circ$ y α como lineas arriba. Definimos para cada $t \in [0,1]$ un *-homomorfismo $\varphi_t : C(X) \longrightarrow C(X)$ como $\varphi_t(f)(x) = f(\alpha(t,x))$ entonces $\varphi_\circ(f)(x) = f(\alpha(0,x)) = f(x_\circ)$ y $\varphi_1(f)(x) = f(\alpha(1,x)) = f(x) = 1_{C(X)}$.
Además la aplicación $t \longmapsto \varphi_t(f)$ es continua para cada $f \in C(X)$ esto muestra que $\varphi_\circ \sim id = \varphi_1$.
Definamos $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow C(X)$ como sigue $\varphi(f) = f(x_\circ)$ y $\psi(\lambda) = \lambda\, 1$ entonces

$$\varphi\,\psi(\lambda) = \varphi(\lambda\, 1) = \lambda\, 1 = 1_{\mathbb{C}}$$

$$\psi\,\varphi(f) = \psi(f(x_\circ)) = f(x_\circ)1 = \varphi_\circ(f)(x) \sim_h id(x)$$

De aqui

$$C(X) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \xrightarrow{\psi} C(X)$$

es una homotopía. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_\circ(C(X)) \arrow[r, "dim"] \arrow[d, "K_\circ(\varphi)"'] & \mathbb{Z} \\
K_\circ(\mathbb{C}) \arrow[ur, "K_\circ(Tr)"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.4: Isomorfismo entre $K_0(C(X))$ y $\mathbb{Z}$.

es conmutativo y $K_\circ(\varphi)$ y $K_\circ(Tr)$ son isomorfismos por invarianza homotópica esto fuerza que la aplicación $dim : K_\circ(C(X)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo por tanto $K_\circ(C(X)) \cong \mathbb{Z}$. $\blacksquare$

3.6. El funtor $K_\circ$ para C^*-álgebras sin unidad

Definición 3.6.1 ***(El grupo $K_\circ$ para C^*-algebras sin unidad)***
Sea A un C^*-algebra sin unidad y consideremos la sucesión exacta escindible

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widetilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow O$$

donde $\pi : \widetilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ es la proyección cociente, y $\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{A}$ es definida por $\lambda(\alpha) = \alpha\, 1_{\widetilde{A}}$ y $\widetilde{A} = \{a + \alpha\, 1_{\widetilde{A}} / a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$. Definimos $K_\circ(A)$ como el núcleo del homomorfismo $K_\circ(\pi) : K_\circ(\widetilde{A}) \longrightarrow K_\circ(\mathbb{C})$.

Observación 3.6.1 $K_\circ(A)$ es un grupo abeliano. Mas aún $K_\circ(A)$ es un subgrupo de $K_\circ(\widetilde{A})$

Para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ consideremos la clase de equivalencia $[p]_\circ$ en $K_\circ(\widetilde{A})$. Puesto que $K_\circ(\pi)([p]_\circ) = [\pi(p)]_\circ = 0$, entonces $[p]_\circ \in Ker(K_\circ(\pi)) = K_\circ(A)$ esto define una aplicación

$$[\,\cdot\,]_\circ : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow K_\circ(A),\ p \longmapsto [p]_\circ$$

para cualquier C^*-álgebra A tenemos una sucesión exacta corta.

$$O \longrightarrow K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(\widetilde{A}) \stackrel{K_\circ(\pi)}{\longrightarrow} K_\circ(\mathbb{C}) \longrightarrow O \qquad (3.17)$$

donde la aplicación $K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(\widetilde{A})$ es $K_\circ(i)$ cuando A tiene unidad, y es la aplicación inclusión cuando A no tiene unidad.

Observación 3.6.2 Es claro que la sucesión (3.17) es exacta.

Sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un *-homomorfismo de C^*-álgebras sin unidad y $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$ su unitización, tenemos el siguiente diagrama que conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "\varphi"] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] & \mathbb{C} \arrow[d, "I"] \\
B \arrow[r, "i_B"'] & \widetilde{B} \arrow[r, "\pi_B"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Figura 3.5: Conmutatividad de A y $\tilde{A}$.

De este diagrama, de (3.17) y por funtorialidad de $K_\circ$ para C^*-álgebras con unidad el siguiente diagrama también conmuta.

$$\begin{tikzcd}
K_\circ(A) \arrow[r] \arrow[d, "K_\circ(\varphi)"] & K_\circ(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_\circ(\pi_A)"] \arrow[d, "K_\circ(\widetilde{\varphi})"] & K_\circ(\mathbb{C}) \arrow[d, "I"] \\
K_\circ(B) \arrow[r] & K_\circ(\widetilde{B}) \arrow[r, "K_\circ(\pi_B)"'] & K_\circ(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Figura 3.6: Conmutatividad de $K_0(A)$ y $K_0(\tilde{A})$.

De este modo existe uno y sólo un homomorfismo de grupos $K_\circ(\varphi) : K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(B)$ dado por

$$K_\circ(\varphi)([p]_\circ) = [\varphi(p)]_\circ \,, \quad p \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

Proposición 3.6.1 ***(propiedad funtorial).***

1. $K_\circ(1_A) = 1_{K_\circ(A)}$ para cada C^*-algebra A.

2. Sean $\varphi : A \longrightarrow B$, $\psi : B \longrightarrow C$ dos *-homomorfismos entonces $K_\circ(\psi\,\varphi) = K_\circ(\psi)\,K_\circ(\varphi)$ para A, B y C algebras C^* cualesquiera.

3. $K_\circ(\{0\}) = \{0\}$

4. $K_\circ(0_{B,A}) = 0_{K_\circ(B),K_\circ(A)}$ para cada par de C^*-algebras A y B.

Prueba. Similar a la proposición (2.1.2)

Proposición 3.6.2 ***(Invarianza homotópica).***
Sean A y B dos C^*-algebras sin unidad

1. Si $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ son *-homomorfismos homotópicos, entonces

$$K_\circ(\varphi) = K_\circ(\psi)$$

2. Si A y B son C^*-algebras homotópicamente equivalentes, entonces

$$K_\circ(A) \cong K_\circ(B)$$

Prueba. Similar a la proposición (3.5.1). Consideremos la sucesión exacta escindible

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widetilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow O$$

Definimos la aplicación escalar $s = \lambda\,\pi : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{A}$ es decir $s(a + \alpha\,1) = \alpha\,1, \forall\, a \in A, \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$ observe que $\pi(s(x)) = \pi(x)$ y $x - s(x) \in A$ para cada $x \in \widetilde{A}$.
Ahora sea $S_n : M_n(\widetilde{A}) \longrightarrow M_n(\widetilde{A})$ el *-homomorfismo inducido por S.
$Im(S_n) = M_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\widetilde{A})$, la cual consiste de todas las matrices con entradas escalares y $x - S_n(x) \in M_n(A)\ \forall\, x \in M_n(\widetilde{A})$ escribiremos en lo sucesivo $S = S_n$.
Un elemento $x \in M_n(\widetilde{A})$ es llamado elemento escalar si $x = S(x)$ equivalentemente $x \in M_n(\widetilde{A})$ es escalar si todas sus entradas son escalares multiplos de $1_{\widetilde{A}}$

Proposición 3.6.3 Sea A un C^*-algebra se tiene entonces

$$K_\circ(A) = \left\{[p]_\circ - [s(p)]_\circ / \ p \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})\right\}$$

Además

1. Para cada par de proyecciones $p, q \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})$ son equivalentes

   a) $[p]_\circ - [s(p)]_\circ = [q]_\circ - [s(q)]_\circ$.

   b) Existen $k, l \in \mathbb{N}$ tal que $p \oplus 1_k \sim_\circ q \oplus 1_l$ en $\mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})$.

   c) Existen proyecciones escalares r_1, r_2 tal que $p \oplus r_1 \sim_\circ q \oplus r_2$.

2. Si $[p]_\circ - [s(p)]_\circ = 0, \ p \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p \oplus 1_m \sim s(p) \oplus 1_m$$

3. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo entonces

$$K_\circ(\varphi)([p]_\circ - [s(p)]_\circ) = [\widetilde{\varphi}(p)]_\circ - [s(\widetilde{\varphi})(p)]_\circ$$

   para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})$

Prueba. Primero veamos $K_\circ(A) = \left\{[p]_\circ - [s(p)]_\circ / \ p \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})\right\}$ claramente $[p]_\circ - [s(p)]_\circ \in Ker(K_\circ(\pi)) = K_\circ(A)$ recíprocamente sea $g \in K_\circ(A)$, y sean e, f proyecciones en $M_n(\widetilde{A})$ tal que $g = [e]_\circ - [f]_\circ$ pongamos $p = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1_n - f \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ tenemos $[p]_\circ - [q]_\circ = [e]_\circ + [1_n - f]_\circ - [1_n]_\circ = [e]_\circ - [f]_\circ = g$. Como $q = s(q)$ y $K_\circ(\pi)(g) = 0$, también tenemos $[s(p)]_\circ - [q]_\circ = [s(p)]_\circ - [s(q)]_\circ = K_\circ(s)(g) = K_\circ(\lambda)\ K_\circ(\pi)(g) = 0$ de aqui $g = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$.

(1) $(a) \Rightarrow (c)$ Si $[p]_\circ - [s(p)]_\circ = [q]_\circ - [s(q)]_\circ$ entonces $[p \oplus s(q)]_\circ = [q \oplus s(p)]_\circ$ de aqui $p \oplus s(q) \sim_s q \oplus s(p)$ en $\mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})$. Asi hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \oplus s(q) \oplus 1_n \sim_\circ q \oplus s(p) \oplus 1_n$ basta tomar $r_1 = s(q) \oplus 1_n$ y $r_2 = s(p) \oplus 1_n$.

$(c) \Rightarrow (b)$ Si r_1, r_2 son proyecciones escalares en $\mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})$ de rango k y l respectivamente entonces $r_1 \sim_\circ 1_k$ y $r_2 \sim_\circ 1_l$. Asi $p \oplus 1_k \sim_\circ q \oplus 1_l$.

$(b)\Rightarrow(a)$ Tenemos $[p \oplus 1_k]_\circ - [s(p) \oplus 1_k]_\circ = [p]_\circ + [1_k]_\circ - [s(p)]_\circ - [1_k]_\circ = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$ igualmente $[q \oplus 1_l]_\circ - [s(q) \oplus 1_l]_\circ = [q]_\circ - [s(q)]_\circ$. Asi es suficiente mostrar que $[p]_\circ - [s(p)]_\circ = [q]_\circ - [s(q)]_\circ$ siempre que $p \sim_\circ q$. Asi sea $p = v^*v$ y $q = vv^*$ entonces $s(v)$ es una matriz escalar rectangular y $s(p) = s(v)^*s(v)$, $s(q) = s(v)s(v)^*$. Asi $s(p) \sim_\circ s(q)$ en consecuencia $[p]_\circ = [q]_\circ$ y $[s(p)]_\circ = [s(q)]_\circ$.

(2) Si $[p]_\circ - [s(p)]_\circ = 0$ entonces $p \sim_s s(p)$ y de aqui existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \oplus 1_m \sim s(p) \oplus 1_m$.

(3) $K_\circ(\varphi)([p]_\circ - [s(p)]_\circ) = K_\circ(\widetilde{\varphi})([p]_\circ - [s(p)]_\circ) = [\widetilde{\varphi}(p)]_\circ - [\widetilde{\varphi}(s(p))]_\circ = [\widetilde{\varphi}(p)]_\circ - [s\widetilde{\varphi}(p)]_\circ$. ■

Lema 3.6.1 Sean A, B dos C^*-algebras y $\varphi : A \longrightarrow B$ un *-homomorfismo. Si $g \in Ker(K_\circ(\varphi))$ entonces

1. Existen $n \in \mathbb{N}, p \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})$ y $u \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{B}))$ tal que $g = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$ y $u\widetilde{\varphi}u^* = s(\widetilde{\varphi}(p))$.

2. Si φ es suryectiva, entonces existe $p \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})$ tal que $g = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$ y $\widetilde{\varphi}(p) = s(\widetilde{\varphi}(p))$

Prueba.

1. Por proposición (3.6.3), existe $p_1 \in \mathcal{P}_k(\widetilde{A})$ tal que $g = [p_1]_\circ - [s(p_1)]_\circ$, y tenemos $[\widetilde{\psi}(p_1)]_\circ - [s\widetilde{\psi}(p_1)]_\circ = 0$ asi $\widetilde{\psi}(p_1) \oplus 1_m \sim s\left(\widetilde{\psi}(p_1)\right) \oplus 1_m$ para algún m. Nuevamente por proposición (3.6.3) pongamos $p_2 = p_1 \oplus 1_m$, entonces $g = [p_2]_\circ - [s(p_2)]_\circ$ y $\widetilde{\psi}(p_2) = \widetilde{\psi}(p_1) \oplus 1_m \sim s\left(\widetilde{\psi}(p_1)\right) \oplus 1_m = s\left(\widetilde{\psi}(p_2)\right)$. Pongamos $n = 2(k+m)$ y $p = p_2 \oplus 0_{k+m} \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})$. Claramente $[p]_\circ - [s(p)]_\circ = g$, asi existe $u \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{A}))$ tal que $u\widetilde{\psi}(p)u^* = s\left(\widetilde{\psi}(p)\right)$.

2. De (1) existen $p_1 \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})$, y $u \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{A}))$ tal que $g = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$ y $u\widetilde{\psi}(p_1)u^* = s\left(\widetilde{\psi}(p_1)\right)$ asi existe $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ tal que $\widetilde{\psi}(v) = diag(u, u^*)$.

Pongamos $p = diag(p_1, 0_n)v^*$ entonces

$$\widetilde{\psi}(p) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}(p_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\widetilde{\psi}(p_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz escalar. Asi $s\left(\widetilde{\psi}(p)\right) = \widetilde{\psi}(p)$ finalmente $g = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$. Por tanto $p \sim p_1$. ■

Lema 3.6.2 Sea

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

una sucesión exacta corta de C^*-álgebras y sea $n \in \mathbb{N}$.

i) La aplicación $\widetilde{\varphi}_n : M_n(\widetilde{I}) \longrightarrow M_n(\widetilde{A})$ es inyectiva.

ii) Un elemento $a \in Im\,(\widetilde{\varphi}_n)$ si sólo si $\widetilde{\psi}_n(a) = S_n\left(\widetilde{\psi}_n(a)\right)$

Prueba.

(i) Como la sucesión

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

es exacta corta, entonces también la sucesión unitizada

$$O \longrightarrow \widetilde{I} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{A} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \widetilde{B} \longrightarrow O$$

también es exacta corta mas aún $\widetilde{\varphi}(i + \alpha 1_{\widetilde{I}}) = \varphi(i) + \alpha 1_{\widetilde{A}}$ y $\widetilde{\psi}(a + \beta 1_{\widetilde{A}}) = \psi(a) + \beta 1_{\widetilde{B}}$ para $i \in I,\ a \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. De aqui para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\widetilde{\varphi}_n : M_n(\widetilde{I}) \longrightarrow M_n(\widetilde{A})$ está dado por $\widetilde{\varphi}_n\left((x_{ij})_{n\times n}\right) = \left(\widetilde{\varphi}(x_{ij})\right)_{n\times n}$ ahora sean $(x_{ij})_{n\times n},\ (y_{ij})_{n\times n}$ en $M_n(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}_n\left((x_{ij})_{n\times n}\right) = \widetilde{\varphi}_n\left((y_{ij})_{n\times n}\right)$ si y sólo si $\left(\widetilde{\varphi}(x_{ij})\right)_{n\times n} = \left(\widetilde{\varphi}(y_{ij})\right)_{n\times n}$ si y sólo si $\widetilde{\varphi}(x_{ij}) = \widetilde{\varphi}(y_{ij})$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$ pero $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva por tanto $x_{ij} = y_{ij}$ luego $\widetilde{\varphi}_n$ es inyectiva.

(ii) Para la afirmación $a \in Im\widetilde{\varphi}_n$ si y sólo si $\widetilde{\psi}_n(a) = S_n\left(\widetilde{\psi}_n(a)\right)$ basta observar que la sucesión siguiente:

$$O \longrightarrow Im\widetilde{\varphi}_n \longrightarrow M_n(\widetilde{A}) \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow O$$

es exacta y escinde donde $S_n = \lambda\ \pi$ y asi $\widetilde{\psi}(a) = I\ \widetilde{\psi}_n(a) = (\lambda\ \pi)\ \widetilde{\psi}_n(a) = S_n\left(\widetilde{\psi}_n(a)\right)$. ■

Proposición 3.6.4 Cada sucesión exacta corta de C^*-álgebras

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O \tag{3.18}$$

induce una sucesión exacta de grupos abelianos

$$K_\circ(I) \xrightarrow{K_\circ(\varphi)} K_\circ(A) \xrightarrow{K_\circ(\psi)} K_\circ(B) \tag{3.19}$$

Si (3.18) escinde, con una aplicación escindible $\lambda : B \longrightarrow A$, entonces la sucesión $O \longrightarrow K_\circ(I) \xrightarrow{K_\circ(\varphi)} K_\circ(A) \xrightarrow{K_\circ(\psi)} K_\circ(B) \longrightarrow O$ escinde con aplicación escindible $K_\circ(\lambda) : K_\circ(B) \longrightarrow K_\circ(A)$

Prueba. Como (3.18) es exacta; la funtorialidad de $K_\circ$ produce $K_\circ(\psi)\ K_\circ(\varphi) = K_\circ(\psi\ \varphi) = K_\circ(0) = 0$ asi $Im(K_\circ(\varphi)) \subseteq Ker(K_\circ(\psi))$ recíprocamente, sea $g \in Ker(K_\circ(\varphi))$ entonces existe $p \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})$ tal que $g = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$ y $\widetilde{\psi}(p) = s\left(\widetilde{\psi}(p)\right)$ por lema (3.6.1) parte (2). También es fácil ver que $\widetilde{\varphi}_n : M_n(\widetilde{I}) \longrightarrow M_n(\widetilde{A})$ es inyectiva y mas aún $a \in Im(\widetilde{\varphi}_n)$ si y sólo si $\widetilde{\psi}_n(a) = S_n\left(\widetilde{\psi}_n(a)\right)$ de donde existe $e \in M_n(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}(e) = p$ y como $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva entonces e es una proyección. De aquí $g = [\widetilde{\varphi}(e)]_\circ - [s(\widetilde{\varphi}(e))]_\circ = K_\circ(\varphi)([e]_\circ - [s(e)]_\circ)$ está en la imagen de $K_\circ(\varphi)$. Ahora supongamos que (3.18) escinde y como la sucesión (3.19) es exacta en $K_\circ(A)$ la funtorialidad de $K_\circ$ produce $1_{K_\circ(B)} = K_\circ(1_B) = K_\circ(\psi)\ K_\circ(\lambda)$ y de aqui la sucesión es exacta en $K_\circ(B)$. Resta mostrar que $K_\circ(\varphi)$ es inyectiva. Sea $g \in Ker(K_\circ(\varphi))$ por el lema (3.6.1) parte (1) existe $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}_n(\widetilde{I})$ y $u \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{A}))$ tal que $g = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$ y $u\widetilde{\varphi}(p)u^* = s(\widetilde{\varphi}(p))$. Pongamos $v = \left(\widetilde{\lambda}\ \widetilde{\psi}\right)(u^*)u$, un elemento unitario en $M_n(\widetilde{A})$ tal que $\widetilde{\psi}(v) = 1_m$. Asi existe $\omega \in$

$M_n(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}(\omega) = v$. Como $\widetilde{\varphi}$ es inyectivo entonces ω debe ser unitario. Ahora $\widetilde{\varphi}(\omega p \omega^*) = v\widetilde{\varphi}v^* = \left(\widetilde{\lambda}\, \widetilde{\psi}\right)(u^*)s\widetilde{\varphi}(p)\left(\widetilde{\lambda}\, \widetilde{\psi}\right)(u) = \left(\widetilde{\lambda}\, \widetilde{\psi}\right)(u^* s\widetilde{\varphi}(p)(u)) = \left(\widetilde{\lambda}\, \widetilde{\psi}\right)(\widetilde{\varphi}(p)) = s\left(\widetilde{\varphi}(p)\right) = \widetilde{\varphi}(s(p))$. Entonces $\omega p \omega^* = s(p)$ asi $p \sim s(p)$ en $M_n(\widetilde{I})$ luego $g = 0$. ■

Proposición 3.6.5 ***(Suma directa).***

Sean A, B dos C^*-álgebras, tenemos $K_\circ(A \oplus B) \cong K_\circ(A) \oplus K_\circ(B)$.

Más específicamente:

Si $i_A : A \longrightarrow A \oplus B$ y $i_B : B \longrightarrow A \oplus B$ son las inclusiones naturales entonces la aplicación $K_\circ(i_A) \oplus K_\circ(i_B) : K_\circ(A) \oplus K_\circ(B) \longrightarrow K_\circ(A \oplus B)$ dada por

$$K_\circ(i_A) \oplus K_\circ(i_B)(g, h) = K_\circ(i_A)(g) + K_\circ(i_B)(h)$$

es un isomorfismo

Prueba. Consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & K_\circ(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1"] & K_\circ(A) \oplus K_\circ(B) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "K_\circ(i_A)\oplus K_\circ(i_B)"] & K_\circ(B) \arrow[r] \arrow[d, "1"] & O \\
O \arrow[r] & K_\circ(A) \arrow[r, "K_\circ(i_B)"'] & K_\circ(A \oplus B) \arrow[r, "K_\circ(\pi_B)"'] & K_\circ(B) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha(g) = (g, 0)$, $\beta(g, h) = h$, y donde $\pi_B(a, b) = b$ claramente las filas son exactas, además $\pi_B\, i_A = 0$ y $\pi_B\, i_B = i_B$ de donde el diagrama conmuta luego por el lema del quinto se tiene que $K_\circ(i_A) \oplus K_\circ(i_B)$ es un isomorfismo. ■

Ejemplo 3.6.1 Sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional separable y sea $K = \{\varphi \in B(H)/\ \varphi - \text{compacto}\}$ ideal de $B(H)$. El cociente $\frac{B(H)}{K} = Q(H)$ es llamado el algebra de Calkin.

Así tenemos la sucesión exacta corta

$$O \longrightarrow K \xrightarrow{i} B(H) \xrightarrow{\pi} Q(H) \longrightarrow O$$

entonces $K_\circ(K) \cong \mathbb{Z}$ en efecto basta definir $\alpha : K_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ como $\alpha([p]_\circ) = Tr(p)$, para cada proyección p en K. Denotemos $\alpha = K_\circ(Tr)$. Ahora como $K_\circ(B(H)) = 0$ entonces en la secuencia

$$K_\circ(K) \overset{K_\circ(i)}{\longrightarrow} K_\circ(B(H)) \overset{K_\circ(\pi)}{\longrightarrow} K_\circ(Q(H))$$

vemos que $K_\circ(i)$ no es inyectivo puesto que $K_\circ(K) \cong \mathbb{Z}$ de esta manera podemos decir que el funtor K_0 no es exacto.

Proposición 3.6.6 Sea A un C^*-algebra, $n \in \mathbb{N}$ entonces $K_\circ(A) \cong K_\circ(M_n(A))$. Mas específicamente, el *-homomorfismo $\lambda_{n,A} : A \longrightarrow M_n(A)$ dada por $\lambda_{n,A}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ induce un isomorfismo $K_\circ(\lambda_{n,A}) : K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(M_n(A))$

Prueba. Mostraremos que el caso no unitario puede ser derivado del caso unitario. Para lo cual sea A un C^*-álgebra (no unitaria) entonces

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,A}"'] & \widetilde{A} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,\widetilde{A}}"'] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,\mathbb{C}}"] & O \\
O \arrow[r] & M_n(A) \arrow[r] & M_n(\widetilde{A}) \arrow[r] & M_n(\mathbb{C}) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo con lineas exactas escindibles de aqui se sigue que

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & K_\circ(A) \arrow[r] \arrow[d, "K_\circ(\lambda_n, A)"'] & K_\circ(\widetilde{A}) \arrow[r] \arrow[d, "K_\circ(\lambda_n, \widetilde{A})"'] & K_\circ(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "K_\circ(\lambda_n, \mathbb{C})"'] & O \\
O \arrow[r] & K_\circ(M_n(A)) \arrow[r] & K_\circ(M_n(\widetilde{A})) \arrow[r] & K_\circ(M_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo con lineas exactas (escindibles) por el lema del quinto $K_\circ(\lambda_n, A)$ es un isomorfismo si $K_\circ(\lambda_n, \widetilde{A})$ y $K_\circ(\lambda_n, \mathbb{C})$ son isomorfismos por consiguiente necesitamos solo probar para el caso cuando A es unitario. Construiremos la inversa de la aplicación $K_\circ(\lambda_n, A)$ como sigue. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\gamma_{n,k} : M_k(M_n(A)) \longrightarrow M_{kn}(A)$ el *-isomorfismo será dado viendo cada elemento de $M_k(M_n(A))$ como una matriz grande en $M_{kn}(A)$. Definamos $\gamma_n : \mathcal{P}_\infty(M_n(A)) \longrightarrow K_\circ(A)$ por $\gamma_n(p) = [\gamma_{n,k}(p)]_\circ$ para $p \in \mathcal{P}_k(M_n(A))$ aplicando la proposición (3.3.3) obtenemos un homomorfismo de grupos $\alpha : K_\circ(M_n(A)) \longrightarrow K_\circ(A)$ satisfaciendo $\alpha([p]_\circ) = [\gamma_{n,k}(p)]_\circ$ para $p \in \mathcal{P}_k(M_n(A))$. Afirmamos que α es la inversa de $K_\circ(\lambda_n, A)$. Para lo cual basta mostrar que

$$(\lambda_n, A)_{kn}(\gamma_{n,k}(p)) \sim_\circ p \quad \text{en } \mathcal{P}_\infty(M_n(A)),\ p \in \mathcal{P}_k(M_n(A)) \tag{3.20}$$

$$\gamma_{n,k}((\lambda_n, A)_k(p)) \sim_\circ p \quad \text{en } \mathcal{P}_\infty,\ p \in \mathcal{P}_k(A) \tag{3.21}$$

donde $(\lambda_n, A)_m$ es el *-homomorfismo $M_n(A) \longrightarrow M_m(M_n(A))$ inducido por $\lambda_{n,A}$. Probaremos (3.21) la afirmación (3.20) es similar. En efecto sea $\{e_1, ..., e_{kn}\}$ una base estandort de $\mathbb{C}^{kn}$, μ una permutación unitaria en $M_{kn}(\mathbb{C}) \subseteq M_{kn}(A)$ que cumple $\mu e_i = e_{n(i-1)+1},\ i = 1, 2, ..., k$ entonces $p \sim_\circ p \oplus 0_{(n-1)k} = \mu^* \gamma_{n,k}((\lambda_{n,1})_k(p))\mu$, para todo $p \in \mathcal{P}_k(A)$. ■

Teorema 3.6.1 ***(Continuidad de $K_\circ$)***
Sea $\{A_i, \phi_{ij}\}$ un sistema dirigido de C^*-álgebras y sea $A = \text{lím}\,\{A_i, \phi_{ij}\}$. Entonces $\{K_\circ(A_i), K_\circ(\phi_{ij})\}$ es un sistema dirigido de grupos abelianos. Y mas aún $K_\circ(A) = K_\circ(\varinjlim \{A_i, \phi_{ij}\}) \cong \varinjlim \{K_\circ(A_i), K_\circ(\phi_{ij})\}$

Prueba. Denotemos por $\phi_i : A_i \longrightarrow A = \varinjlim A_i$ la aplicación canónica. Como $\{A_i, \phi_{ij}\}$ es un sistema dirigido entonces $\phi_{ij} : A_j \longrightarrow A_i$ son *-homomorfismos, y se verifica $\phi_{ij} = \phi_{ik}\ \phi_{kj}$ siempre que $j \leq k \leq i$, y $\phi_{ii} = 1$; y como $K_\circ$ es un funtor covariante, entonces $K_\circ(\phi_{ij}) : K_\circ(A_j) \longrightarrow K_\circ(A_i)$ son homomorfismos de grupos y además $K_\circ(\phi_{ij}) = K_\circ(\phi_{ik})\ K_\circ(\phi_{kj})$ con $j \leq k \leq i$ y $K_\circ(\phi_{ii}) = 1$ de donde $\{K_\circ(A_i), K_\circ(\phi_{ij})\}$ es una sucesión dirigida de grupos.
Sea $\varphi_i : K_\circ(A_i) \longrightarrow \text{lím}\, K_\circ(A_i)$ la aplicación canónica puesto que para $j \leq i$ se tiene los *-homomorfismo $A_j \xrightarrow{\phi_{ij}} A_i \xrightarrow{\phi_i} A = \text{lím}\, A_i$ y por ende $\phi_j : A_j \longrightarrow$

$A = \lim A_i$; entonces al componer $\phi_i\ \phi_{ij} = \phi_j$ tenemos $K_\circ(\phi_j) = K_\circ(\phi_i)\ K_\circ(\phi_{ij})$, ahora por la propiedad universal de $\lim K_\circ(A_i)$ se obtiene un único homomorfismo $\varphi : \lim K_\circ(A_i) \longrightarrow K_\circ(A)$ tal que $\varphi_i = \varphi\ \varphi_j$ para todo $j \leq i$

$$\begin{tikzcd}
K_\circ(A_j) \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d, "K_\circ(\phi_{ij})"'] \arrow[dr] & \lim K_\circ(A_i) \arrow[d, "\varphi"] \\
K_\circ(A_i) \arrow[r, "K_\circ(\phi_i)"'] \arrow[ur] & K_\circ(\lim A_i)
\end{tikzcd}$$

Figura 3.7: Continuidad de K_0.

Afirmación: φ es un isomorfismo

En efecto. Tenemos que $\varphi : \lim K_\circ(A_i) \longrightarrow K_\circ(\lim A_i)$ es un homomorfismo; veamos la inyectividad y suryectividad.

i) Inyectividad. Como $\lim K_\circ(A_i) = \bigcup\limits_i \varphi_i(K_\circ(A_i))$, bastará mostrar que la restricción de φ a $\varphi_j(K_\circ(A_j))$ es inyectiva para todo j. Debemos mostrar que si $g \in K_\circ(A_j)$ y $K_\circ(\phi_j)(g) = (\varphi\ \varphi_j)(g) = 0$ en $K_\circ(A)$ entonces $\varphi_j(g) = 0$ en el $\lim K_\circ(A_i)$. Asi sea $g = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$ para algún $p \in \mathcal{P}_n(A_j)$ entonces $0 = K_\circ(\phi_j)(g) = \left[\widetilde{\phi}_j(p)\right]_\circ - \left[s\left(\widetilde{\phi}_j(p)\right)\right]_\circ$ en $K_\circ(A)$. De aqui existe $m \in \mathbb{N}$ y una isometría parcial $\omega \in M_{n+m}(\widetilde{A})$ tal que $\omega\omega^* = \widetilde{\phi}_j(p) \oplus 1_m$ y $\omega^*\omega = s\left(\widetilde{\phi}_j(p)\right) \oplus 1_m$.

De otro lado observe que siendo $A = \varinjlim \{A_i, \phi_{ij}\}$. Para cada $x \in A$ y $\varepsilon > 0$ existe i arbitrario y suficientemente grande con $x_i \in A_i$ tal que $\|x - \phi_i(x_i)\| < \varepsilon$ entonces usando este resultado, existe $i \geq j$ y $x_i \in M_{n+m}(\widetilde{A}_i)$ con $\widetilde{\phi}_i(x_i)$ suficientemente cerca a ω, $\|\widetilde{\phi}_i(x_i)\widetilde{\phi}_i(x_i)^* - \widetilde{\phi}_j(p) \oplus 1_m\| < \frac{1}{2}$ y $\|\widetilde{\phi}_i(x_i)^*\widetilde{\phi}_i(x_i) - s\left(\widetilde{\phi}_j(p)\right) \oplus 1_m\| < \frac{1}{2}$. También para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a \in A_n$ se tiene $\|\phi_n(a)\| = \lim\limits_{m \longrightarrow \infty} \|\phi_{mn}(a)\|$, de donde existe $k \geq i$ tal que $\|x_k x_k^* - \phi_{kj}(p) \oplus 1_m\| < \frac{1}{2}$ y $\|x_k^* x_k - s\left(\widetilde{\phi}_{kj}\right)(p) \oplus 1_m\| < \frac{1}{2}$ donde $x_k = \widetilde{\phi}_{ki}(x_i)$. Ahora de la proposición 3.2.1. parte (2) $\widetilde{\phi}_{kj}(p) \oplus 1_m \sim s\left(\widetilde{\phi}(p)\right) \oplus 1_m$ en $M_{n+m}(\widetilde{A}_m)$. Asi $K_\circ(\phi_{kj})(g) = \left[\widetilde{\phi}_{kj}(p) \oplus 1_m\right]_\circ - \left[s\left(\widetilde{\phi}_j(p) \oplus 1_m\right)\right]_\circ = 0$ en $K_\circ(A_k)$ en consecuencia, $\varphi_j(g) = (\varphi_k\ k_\circ(\phi_{kj}))(g) = 0$.

ii) Suryectividad. Sea $[p]_\circ - [s(p)]_\circ \in K_\circ(A)$, para algún $p \in \mathcal{P}_k(\widetilde{A})$ tomando $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ y $b_n \in M_k(\widetilde{A}_n)$ tal que $\|\widetilde{\phi}_n(b_n) - p\| < \varepsilon$. Pongamos $a_n = \frac{b_n + b_n^*}{2}$ y $a_m = \widetilde{\phi}_{nm}(a_n)$ para $m \geq n$. Cada a_m es autoadjunto y $\|\widetilde{\phi}_n(b_n) - p\| < \varepsilon$. Tenemos $\|\widetilde{\phi}_n(a_n - a_n^2)\| < \varepsilon(3+\varepsilon) < \frac{1}{4}$ para ε suficientemente pequeño. Asi $\|a_m - a_m^2\| < \frac{1}{4}$ para m suficientemente grande. Nuevamente por proposición 3.2.1. existe $p \in \mathcal{P}(M_k(\widetilde{A}_m))$ tal que $\|a_m - q\| < \frac{1}{2}$ de esta manera tenemos $\|\widetilde{\phi}_m(q) - p\| < \frac{1}{2} + \varepsilon < 1$ luego $\widetilde{\phi}_m(p) \sim p$. Asi $[p]_\circ - [s(p)]_\circ = \left[\widetilde{\phi}_m(q)\right]_\circ - \left[s\left(\widetilde{\phi}_m(q)\right)\right]_\circ = K_\circ(\phi_m)([q]_\circ - [s(q)]_\circ)$ por tanto $K_\circ(\phi_m) = \varphi\ \varphi_m$, de donde se sigue que φ es suryectiva. ■

3.7. Estabilidad de $K_\circ$

Considerando $K = \{f : H \longrightarrow H \ : \ f$ es un operador compacto$\}$ donde H es un espacio de Hilbert separable infinito dimensional.

Definición 3.7.1 Sea A un C^*-álgebra, la estabilización de A es la C^*-álgebra $K \otimes A$. La propiedad de estabilidad de la K-teoría se expresará diciendo que el *-homomorfismo natural $A \longrightarrow K \otimes A$ induce un isomorfismo $K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(K \otimes A)$ (similarmente para K_1).

Para cada C^*-álgebra A construiremos una nueva C^*-álgebra KA la cual será llamada la estabilización de A y se probará que KA es isomorfo a $K \otimes A$.
Ahora consideremos la sucesión de C^*-álgebras

$$A \xrightarrow{\varphi_1} M_2(A) \xrightarrow{\varphi_2} M_3(A) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots\cdots\cdots$$

donde las aplicaciones $\varphi_n : M_n(A) \longrightarrow M_{n+1}(A)$ son dadas por $\varphi_n(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in M_n(a)$.
Sea $(KA, \{K_n\})$ el límite inductivo de esta sucesión donde $K_n : M_n(A) \longrightarrow KA$,

y pongamos $K = K_1$, asi $K : A \longrightarrow KA$ la C^*-álgebra KA es la estabilización de A. ■

Ejemplo 3.7.1 $K\mathbb{C} \cong K$.

Para probar este isomorfismo elegimos una base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de H, y sea H_n el subespacio de H generado por $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Entonces tenemos $H_n \subset H_{n+1}$, para todo $n \geq 1$ y $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ es denso en H.

Sea $F_n \in B(H)$ ($B(H)$ conjunto de todos los operadores lineales acotados de H) la proyección en H_n elijamos un isomorfismo $\alpha_n : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow B(H_n)$ tal que a es la matriz para la aplicación lineal $\alpha_n(a)$ con respecto a la base $\{e_1, ..., e_n\}$ para cada a en $M_n(\mathbb{C})$.

Podemos identificar $B(H_n)$ con la subálgebra $F_nB(H)F_n$ de $B(H)$ es un hecho standard que K sea la clausura de $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_nB(H)F_n$ con estas identificaciones obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & M_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & M_3(\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & \cdots \arrow[r] & K\mathbb{C} \arrow[d, "\alpha"] \\
F_1B(H)F_1 \arrow[r, "i"] & F_2B(H)F_2 \arrow[r, "i"] & F_3B(H)F_3 \arrow[r, "i"] & \cdots \arrow[r, "i"] & K
\end{tikzcd}$$

De aquí se sigue que K es el límite inductivo de la sucesión en la última columna de este diagrama, donde la aplicación conección son las aplicaciones inclusión y asi se tiene que α es un isomorfismo.

Proposición 3.7.1 $KA \cong K \otimes A$

Prueba. Recordando K la C^*-álgebra de todos los operadores compactos sobre un espacio de Hilbert separable infinito dimensional. Para cada C^*-álgebra A definamos las aplicaciones entre las C^*-álgebras KA y $K \otimes A$, $\varphi : KA \longrightarrow K \otimes A$ y $\psi : K \otimes A \longrightarrow KA$ como $\varphi(ka) = k \otimes a$ y $\psi(k \otimes a) = ka$, para $k \in K$ fijo pero arbitrario y para todo $a \in A$ pues es fácil verificar que φ y ψ son *-homomorfismos por ejemplo $\varphi((ka)^*) = \varphi(a^*k^*) = a^* \otimes k^* = k^* \otimes a^* = (k \otimes a)^* = \varphi^*(ka)$. Analogamente el resto. También $\psi\ \varphi(ka) = \psi\,(\varphi(ka)) = \psi(k \otimes a) = ka$, entonces $\psi\ \varphi = 1_m$. De manera análoga $\varphi\ \psi = 1_{K\otimes A}$ luego $KA \cong K \otimes A$. $\blacksquare$

Proposición 3.7.2 ***(Estabilidad de*** $K_\circ$***).***
Sea $j : A \longrightarrow KA$ la inclusión canónica de un C^*-algebra A sobre su estabilización KA entonces $K_\circ(j) : K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(KA)$ es un isomorfismo.

Prueba. El homomorfismo conección $\varphi_{n,1} : A \longrightarrow M_n(A)$ es dado por $\varphi_{n,1}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y así la aplicación $K_\circ(\varphi_{n,1}) : K_\circ(A) \longrightarrow K_\circ(M_n(A))$ es un isomorfismo para cada n. Sea $g \in K_\circ(KA)$ entonces $g = K_\circ(j_n)(g')$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y para algún $g' \in K_\circ(M_n(A))$. Ahora $g' = K_\circ(\varphi_{n,1})(h)$ para algún $h \in K_\circ(A)$ y de aqui $K_\circ(j)(h) = K_\circ(j_n\ \varphi_{n,1})(h) = K_\circ(g') = g$ por tanto $K_\circ(j)$ es sobre.
Veamos ahora que $K_\circ(j)$ es inyectiva para lo cual sea $K_\circ(j)(h) = 0$, para $h \in K_\circ(A)$, entonces $K_\circ(\varphi_{n,1})(h) = 0$ para algún $n \geq 2$, por la continuidad de $K_\circ$ se tiene que $h = 0$ por tanto $K_\circ(j)$ es inyectiva.
Sea H un espacio de Hilbert, y sea la traza de $B(H)$ dado por $Tr(T) = \sum\limits_{n\geq 1} \langle T(e_n), e_n\rangle$, donde $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es cualquier base ortonormal de H y T cualquier operador positivo es fácil ver de aqui que Tr es independiente de la elección de la base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ y que $Tr(p) = dim(p(H))$ para cada proyección p en H. $\blacksquare$

Corolario 3.7.1 $K_\circ(A) \cong K_\circ(K \otimes A)$.

Prueba. Se obtiene directamente de la proposición (3.7.1) y de la proposición (3.7.2) $\blacksquare$

Ejemplo 3.7.2 $K_\circ(K) \cong \mathbb{Z}$

En efecto. Sea $\varphi : K_\circ(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\varphi([p]_\circ) = Tr(p)$. Ahora identificando $K \equiv K\mathbb{C}$ y considerando la aplicación $j : \mathbb{C} \longrightarrow K\mathbb{C}$ tenemos el isomorfismo $\varphi_1 : K_\circ(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\varphi_1([1]_\circ) = 1$. Pongamos $\varphi = \varphi_1\ K_\circ(j)^{-1} : K_\circ(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ por la identificación de $K \equiv K\mathbb{C}$, se tiene $p = j(1)$ es una proyección un-dimensional en K en consecuencia $\varphi([p]_\circ) = \varphi_1([1]_\circ) = 1$.

Si q es una proyección en H arbitraria, entonces $p \sim q$, y asi $\varphi([q]_\circ) = \varphi([p]_\circ) = 1$ finalmente, si q es una proyección arbitraria n-dimensional sobre H, entonces p es la suma de n-proyecciones un dimensionales, y esto se sigue por la aditividad de φ que $\varphi([q]_\circ) = n = Tr(q)$. ■

Para cada C^*-álgebra A, pongamos

$$TA = C(T, A) \tag{3.22}$$

donde $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Tenemos la sucesión exacta corta escindible

$$O \longrightarrow SA \longrightarrow TA \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} A \longrightarrow O$$

entonces $K_n(TA) = K_n(A \oplus SA) \cong K_n(A) \oplus K_n(SA) = K_n(A) \oplus K_{n+1}(A)$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Además de (3.22) tenemos $T^n\mathbb{C} \cong C(T^n)$.

Ejemplo 3.7.3 $K_\circ(T^n\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ y

$$K_1(T^n\mathbb{C}) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ impar} \end{cases} \tag{3.23}$$

En efecto. De $K_{n+2}(A) \cong K_n(A)$, (lo cual se probará mas adelante) entonces usando este hecho y de lo anterior se tiene $K_\circ(TA) \cong K_1(TA) \cong K_\circ(A) \oplus K_1(A)$ para cada C^*-algebra A. Como $T^n\mathbb{C} \cong C(T^n)$; usando (3.23) tenemos

$$K_\circ(C(T^n)) \cong K_1(C(T^n)) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}}$$

Ejemplo 3.7.4 *a)* $K_\circ(C(T)) \cong \mathbb{Z}$

b) $K_\circ(C(T^3)) \cong \mathbb{Z}^4$

c) $K_1(C(T)) \cong \mathbb{Z}$

Ejemplo 3.7.5 Para cada entero $n \geq 0$ consideremos la esfera n-dimensional $S^n = \left\{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\right\}$. El único punto de compactificación de $\mathbb{R}^n$ es homeomórfico a S^n para $n \geq 1$, de donde $C_\circ(\mathbb{R}^n) \cong C(S^n)$. De las siguientes afirmaciones

$$i)\ K_\circ(C_\circ(\mathbb{R}^n)) \cong K_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$ii)\ K_1(C_\circ(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ par} \end{cases}$$

$iii)$ $K_\circ(A \oplus B) \cong K_\circ(A) \oplus K_\circ(B)$

Obtenemos que

$$K_\circ(C(S^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n \text{ par} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$K_1(C(S^n)) \cong \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

3.8. El n-ésimo grupo de K-Teoría

Sea A un C^*-álgebra y X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sea

$C_\circ(X, A) = \{f \in \mathcal{C}(X, A) : \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, K \subset X$ compacto, con $\|f(x)\| \leq \varepsilon, \forall\, x \in X \backslash K\}$

Definición 3.8.1 El n-ésimo grupo de K-Teoría de C^*-álgebras A se define como:

$$K_n(A) = K_\circ(S^n A)$$

donde $SA = \{f \in \mathcal{C}(T, A) :\ f(1) = 0\} \cong C_\circ(\langle 0, 1\rangle, A)$ con $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es la suspensión de A y la n-ésima suspensión de A está dada por $S^n A = S(S^{n-1}A)$

Existe otra forma de calcular el grupo de $K_1(A)$ de un C^*-álgebra.
Sea A un C^*-álgebra con identidad 1. Denotemos al grupo de elementos unitarios de A por $\mathcal{U}(A)$.
Sea $\mathcal{U}_\circ(A)$ el conjunto de todos los $u \in \mathcal{U}(A)$ tal que $u \sim_h 1$ en $\mathcal{U}(A)$

Observación 3.8.1 Si u_1, v_1, u_2, v_2 son elementos unitarios en un C^*-álgebra A con $u_1 \sim_h v_1$ y $u_2 \sim_h v_2$, entonces $u_1 u_2 \sim_h v_1 v_2$

En efecto. Realmente encontramos caminos continuos $t \longmapsto \omega_{jt}$ en $\mathcal{U}(A)$ de u_j a v_j para $j = 1, 2$ esto es

$u_1 \sim_h v_1$ entonces existe $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}(A)$ continua tal que $\varphi(0) = u_1$ y $\varphi(1) = v_1$.

$u_2 \sim_h v_2$ entonces existe $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}(A)$ continua tal que $\psi(0) = u_2$ y $\psi(1) = v_2$.

Definamos $\omega = \varphi\psi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}(A)$; claramente ω es un camino continuo. Mas aun $\omega(0) = u_1u_2$ y $\omega(1) = v_1v_2$ puesto que

$$\omega(0) = \varphi\psi(0) = \varphi(0)\psi(0) = u_1u_2$$

$$\omega(1) = \varphi\psi(1) = \varphi(1)\psi(1) = v_1v_2$$

Luego $u_1u_2 \sim_h v_1v_2$. ■

Lema 3.8.1

1. Para cada elemento autoadjunto h en A, $e^{ih} \in \mathcal{U}_\circ(A)$.
2. Si $u \in \mathcal{U}(A)$ con $\sigma(u) \neq T$ entonces $u \in \mathcal{U}_\circ(A)$.
3. Si $u, v \in \mathcal{U}(A)$ tal que $\|u - v\| < 2$ entonces $u \sim_h v$.

Prueba. Ver [2] página 48.

Corolario 3.8.1 El grupo unitario en $M_n(\mathbb{C})$ es conexo; es decir $\mu_\circ(M_n(\mathbb{C})) = \mu(M_n(\mathbb{C}))$

Prueba. Cada elemento unitario en $M_n(\mathbb{C})$ tiene espectro finito, por consiguiente esta en $\mu_\circ(M_n(\mathbb{C}))$ y asi el resultado. ■

Proposición 3.8.1 Si $u \in \mathcal{U}_\circ(A)$ entonces $vuv^* \in \mathcal{U}_\circ(A)$, para cada $v \in \mathcal{U}(A)$

Prueba. Como $u \in \mathcal{U}(A)$ entonces existe $v : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}(A)$ continua tal que $v(0) = u$ y $v(1) = 1$. Definamos $\omega : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}(A)$ tal que $\omega(t) = vv(t)v^*$ claramente ω es continua mas aún

$$\omega(0) = vv(0)v^* = vuv^*$$

$$\omega(1) = vv(1)v^* = v1v^* = vv^* = 1$$

entonces $vuv^* \sim_h 1$.

Por lo tanto $vuv^* \in \mathcal{U}_\circ(A)$ Finalmente como $u^{-1} \in \mathcal{U}_\circ(A),\ vuv^*\mathcal{U}_\circ(A)$ se tiene que

$$\mathcal{U}_\circ(A)\Delta\mathcal{U}(A) \quad \blacksquare$$

Observación 3.8.2

$$u \in \mathcal{U}_\circ(A),\ u \in A \Leftrightarrow\ u = e^{ih_1}e^{ih_2}...e^{ih_n} \tag{3.24}$$

Para algún $n \in \mathbb{N}$ y algunos elementos $h_1, h_2, ..., h_n$ autoadjuntos en A.

En efecto. Escribimos

$$G = \left\{e^{ih_1}e^{ih_2}...e^{ih_n} :\ \text{algún } n \in \mathbb{N} \text{ y } h_1, ..., h_n \in A \text{ autoadjuntos}\right\}$$

Sabemos que $e^{ih} \in \mathcal{U}_\circ(A)$, h autoadjunto de A y sea $g \in G$ entonces
$g = e^{i(h_1+...+h_n)} = e^{ih}$, con $h = h_1 + ... + h_n$ claramente $g \in \mathcal{U}_\circ(A)$.
Por lo tanto $G \subseteq \mathcal{U}_\circ(A)$.
Observe también $(e^{ih})^{-1} = (cosh + isenh)^{-1} = cos(-h) + isen(-h) = e^{-ih}$ es decir

$$(e^{ih})^{-1} = e^{-ih}$$

Asi G es un grupo.

Sea $u \in \mathcal{U}(A)$ y $v \in G$ tal que $\|u - v\| < 2$ entonces

$$\|1 - uv^*\| = \|u - v\| < 2 \tag{3.25}$$

pues $\|1 - uv^*\| = \|uu^* - uv^*\| = \|u(u^* - v^*)\| \leq \|u\|\|u^* - v^*\| = \|u^* - v^*\|$
$= \|(u - v)^*\| = \|u - v\| < 2$.
Recordar:

$$\text{Si } u, v \in \mathcal{U}(A)\ /\ \|u - v\| < 2 \text{ entonces } u \sim_h v \tag{3.26}$$

Usando (3.26); de (3.25) se tiene $uv^* \sim_h 1$ luego $uv^* = e^{ih}$, para algún elemento autoadjunto $h \in A$ entonces $u = e^{ih}v \in G$, por lo tanto esto muestra que G es un abierto relativo de $\mathcal{U}(A)$.

El complemento $\mathcal{U}(A) - G$ es la union disjunta de clases de la forma G_u, con $u \in \mathcal{U}(A)$ i.e. $\mathcal{U}(A)^c = \mathcal{U}(A) - G = \bigcup\limits_{u \in \mathcal{U}(A)} G_u$.

Cada una de estas clases es homeomorfica a G por consiguiente abierto (relativo a $\mathcal{U}(A)$). En consecuencia G es cerrado en $\mathcal{U}(A)$.

En conclusión: $G \neq \phi$, $G \subseteq \mathcal{U}_\circ(A)$; G es cerrado y abierto en $\mathcal{U}(A)$ y $\mathcal{U}_\circ(A)$ es conexo. Esto muestra que $\mathcal{U}_\circ(A) = G$.

Por lo tanto $\mathcal{U}_\circ(A)$ es abierto y cerrado relativo en $\mathcal{U}(A)$.

Lema 3.8.2 ***(Whitehead).***

Sea A un C^*-álgebra unitaria, y sean $u, v \in \mathcal{U}(A)$ entonces

1. $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ en $\mathcal{U}(M_2(A))$

2. En particular se sigue que $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{U}(M_2(A))$

Prueba. Para la parte (1) basta observar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Veamos la parte (2)

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ■

Corolario 3.8.2 Si A y B son dos C^*-álgebras y sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un C^*-homomorfismo sobre entonces se cumple

1. $\varphi(\mathcal{U}_\circ(A)) = \mathcal{U}_\circ(B)$

2. Para cada $u \in \mathcal{U}(B)$, existe $v \in \mathcal{U}_\circ(M_2(A))$ tal que $\varphi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$.

3. Si $u \in \mathcal{U}(B)$ y existe $v \in \mathcal{U}(A)$ tal que $u \sim_h \varphi(v)$ entonces $u \in \varphi(\mathcal{U}(A))$

Prueba.

1.- Sea $z \in \varphi(\mathcal{U}_\circ(A))$ entonces $z = \varphi(u)$, $u \in \mathcal{U}_\circ(A)$ de donde existe $v : [0,1] \longrightarrow A$ continua tal que $v(0) = u$ y $v(1) = 1$; donde $v(t) = v_t$

Ahora consideremos

$$[0,1] \xrightarrow{v} A \xrightarrow{\varphi} B$$

$$t \longmapsto v_t \longmapsto \varphi(v_t) = (\varphi\, v)(t)$$

$\varphi\, v : [0,1] \longrightarrow B$ tal que $(\varphi\, v)(0) = \varphi(v(0)) = \varphi(u)$ y $(\varphi\, v)(1) = \varphi(v(1)) = \varphi(1) = 1$ entonces $\varphi(u) \sim_h 1$ luego $z = \varphi(u) \in \mathcal{U}_\circ(B)$.

Por lo tanto $\varphi(\mathcal{U}_\circ(A)) \subset \mathcal{U}_\circ(B)$. Recíprocamente:

Si $u \in \mathcal{U}_\circ(B)$ entonces por (3.24) se tiene $u = e^{ih_1}e^{ih_2}...e^{ih_n}$ para $h_1, ..., h_n \in B$ elementos autoadjuntos. Como $\varphi : A \longrightarrow B$ es sobre entonces existen $x_j \in A$; $j = 1, 2, ...n$ tal que $\varphi(x_j) = h_j$.

Pongamos $k_j = \frac{x_j + x_j^*}{2}$, claramente $k_j^* = k_j$ también $\varphi^*(x_j) = h_j^*$ si y sólo si $\varphi(x_j^*) = h_j^*$ y $\varphi(x_j) = h_j$ entonces $\varphi\left(\frac{x_j^* + x_j}{2}\right) = \frac{1}{2}(h_j + h_j) = h_j$ luego $\varphi(k_j) = h_j$.

Escribamos $v = e^{ik_1}e^{ik_2}...e^{ik_n}$ entonces $v \in \mathcal{U}_\circ(A)$ y asi $\varphi(v) = u \in \varphi(\mathcal{U}_\circ(A))$, por lo tanto $\mathcal{U}_\circ(B) \subseteq \varphi(\mathcal{U}_\circ(A)$. Para el caso (2) y (3) usar lema (3.8.2) ∎

Sea A un C^*-álgebra con identidad para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por:

$$\mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(M_n(A))$$

y sea

$$\mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(A)$$

Definimos la operación binaria $\oplus$ en $\mathcal{U}_\infty(A)$ de la siguiente manera:

$$u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{n+m}(A),\ u \in \mathcal{U}_n(A), v \in \mathcal{U}_m(A)$$

La operación $\oplus$ es asociativa:

$$\begin{aligned}(u\oplus v)\oplus w &= \begin{bmatrix} u\oplus v & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}_{(q+p)\times(q+p)} \in \mathcal{U}_{q+p}(A),\ u\oplus v\in\mathcal{U}_q(A), w\in\mathcal{U}_p(A) \\ &= \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v\oplus w \end{bmatrix} \\ &= u\oplus(v\oplus w)\end{aligned}$$

Por lo tanto $(u\oplus v)\oplus w = u\oplus(v\oplus w)$. ∎

Denotemos, por 1_r la identidad en $M_r(A)$ con la convención de que:

$$u\oplus 1_\circ = u \text{ para cualquier } u\in\mathcal{U}_\infty(A)$$

Definamos la relación $\sim_1$ en $\mathcal{U}_\infty(A)$ como sigue:

Para $u\in\mathcal{U}_n(A)$ y $v\in\mathcal{U}_m(A)$. Escribamos

$$u\sim_1 v \text{ si y solo si existe } k\in\mathbb{N},\ k\geq \text{máx}\,\{m,n\}$$

tal que $u\oplus 1_{k-n}\sim_h v\oplus 1_{k-m}$ en $\mathcal{U}_k(A)$. Es fácil verificar la siguiente

Afirmación: $\sim_1$ es una relación de equivalencia en

$$\mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}_n(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}(M_n(A))$$

Propiedad 3.8.1 $u\sim_1 u\oplus 1_n$, $\forall\, u\in\mathcal{U}_\infty(A)$ y $n\in\mathbb{N}$

Prueba. Para $u\in\mathcal{U}_m(A)$, para algún $m\in\mathbb{N}$ consideremos

$k\geq \text{máx}\,\{m,n+m\}$ entonces $u\oplus 1_{k-m}\sim_h (u\oplus 1_n)\oplus 1_{k-(m+n)}$ si y solo si

$u\sim_1 u\oplus 1_n$. ∎

$$(u\oplus 1_n)\oplus 1_{k-(m+n)} = u\oplus(1_n\oplus 1_{k-(m+n)}) = u\oplus 1_{k-m} \tag{3.28}$$

Nota: Para justificar (3.28) basta operar de manera rutinaria.

Propiedad 3.8.2 Si $u,v\in\mathcal{U}_n(A)=\mathcal{U}(M_n(A))$ para algún $n\in\mathbb{N}$. Entonces

$$uv\sim_1 vu\sim_1 u\oplus v$$

Prueba. Consideremos $k \geq \text{máx}\{n\}$ por el lema de Whitehead se tiene

$$\begin{pmatrix} (uv)_n & 0 \\ 0 & 1_{k-n} \end{pmatrix}_{k\times k} \sim_h \begin{pmatrix} (vu)_n & 0 \\ 0 & 1_{k-n} \end{pmatrix}_{k\times k} \Leftrightarrow uv \oplus 1_{k-n} \sim_h vu \oplus 1_{k-n}$$

$$\Leftrightarrow uv \sim_1 vu$$

También por el lema Whitehead:

$$\begin{pmatrix} (vu)_n & 0 \\ 0 & 1_{k-n} \end{pmatrix}_{k\times k} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

si y sólo si $vu \oplus 1_{k-n} \sim_h u \oplus v$. ■

Propiedad 3.8.3 $u \oplus v \sim_1 v \oplus u$, para cualquier $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$

Prueba. Sea $u \in \mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(M_n(A))$ y $v \in \mathcal{U}_m(A) = \mathcal{U}(M_m(A))$ dos elementos dados. Pongamos ahora:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{n+m}(A)$$

Entonces $v \oplus u = Z(u \oplus v)Z^*$, donde $Z^* = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1_n^* \\ 1_m^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}$

Luego $Z(u \oplus v)Z^* \sim_1 Z\left[Z^*(u \oplus v)\right]$ entonces $Z\left[Z^*(u \oplus v)\right] = (ZZ^*)(u \oplus v) = u \oplus v$. Por lo tanto $v \oplus u \sim_1 u \oplus v$. ■

Propiedad 3.8.4 Si $u, u', v, v' \in \mathcal{U}_\infty(A)$, $u \sim_1 u'$ y $v \sim_1 v'$ entonces

$$u \oplus v \sim_1 u' \oplus v'$$

Prueba.
Afirmación: $(u \oplus 1_k) \oplus (v \oplus 1_r) \sim_1 (u \oplus v)$, $\forall\, u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$, $r, k \in \mathbb{N}$
En efecto.

$$u \oplus 1_k \sim u \text{ y } v \oplus 1_r \sim v \tag{3.29}$$

$(u \oplus 1_k) \oplus (v \oplus 1_r) = u \oplus (1_k \oplus v) \oplus 1_r$; por la asociatividad y propiedad (3.8.3)

$$\sim_1 u \oplus (1_k \oplus v); \quad \text{por } (3.29)$$

$$\sim_1 u \oplus (v \oplus 1_k) \quad \text{por la propiedad } (3.8.3)$$

$$= (u \oplus v) \oplus 1_k \quad \text{por la asociatividad}$$

$$\sim_1 (u \oplus v) \quad \text{por } (3.29)$$

Por lo tanto $(u \oplus 1_k) \oplus (v \oplus 1_r) \sim_1 (u \oplus v)$.

Afirmación: $u \sim_h u'$ y $v \sim_h v'$ entonces

$$u \oplus v \sim_h u' \oplus v' \; \forall\, u, u' \in M_n(A), \; \forall\, v, v' \in M_m(A)$$

En efecto.

Como $u \sim_h u'$ entonces existe $\varphi : [0,1] \longrightarrow M_n(A)$ continua tal que $\varphi(0) = u$ y $\varphi(1) = u'$, donde $\varphi(t) = \varphi_t$.

Como $v \sim_h v'$ entonces existe $\psi : [0,1] \longrightarrow M_m(A)$ continua tal que $\psi(0) = v$ y $\psi(1) = v'$, con $\psi(t) = \psi_t$.

Consideremos $s : [0,1] \longrightarrow M_{n+m}(A) \; / \; s(t) = \varphi_t \oplus \psi_t$ i.e. $s(t) = \begin{bmatrix} \varphi_t & 0 \\ 0 & \psi_t \end{bmatrix}$, claramente s es continua pues φ y ψ lo son.

Además

$$s(0) = \varphi_\circ \oplus \psi_\circ = \begin{pmatrix} \varphi_\circ & 0 \\ 0 & \psi_\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = u \oplus v$$

$$s(1) = \varphi_1 \oplus \psi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix} = u' \oplus v'$$

entonces de aqui se tiene

$$u \oplus v \sim_h u' \oplus v' \tag{3.30}$$

claramente

$$1_{k-(n+m)} \sim_h 1_{k-(n+m)} \tag{3.31}$$

De (3.30) y (3.31) tenemos

$$(u \oplus v) \oplus 1_{k-(n+m)} \sim_h (u' \oplus v') \oplus 1_{k-(n+m)}$$

Por lo tanto $u \oplus v \sim_1 u' \oplus v'$. ∎

3.9. El grupo $K_1(A)$

Para cada C^*-álgebra A se define

$$K_1(A) = \frac{\mathcal{U}_\infty(A)}{\sim_1}$$

Observación 3.9.1 Si $\widetilde{A}$ denota la unitización, del álgebra A entonces

$$K_1(\widetilde{A}) = K_1(A)$$

Si A es un C^*-álgebra sin identidad, el grupo $K_1(A)$ se define como $K_1(\widetilde{A})$ es decir

$$K_1(A) = K_1(\widetilde{A})$$

Denotemos por $[u]_1$ a la clase de equivalencia de $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$,
Definamos la operación binaria " + " en $K_1(A)$ por

$$[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1$$

donde $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$, la aplicación " +" está bien definida, más aún es conmutativa y asociativa,

El elemento neutro de $K_1(A)$ es $[1]_1$: y el inverso de $[u]_1$ está dado por $-[u]_1 = [u^*]_1$ para cada $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$
De esta manera tenemos la siguiente

Proposición 3.9.1 $(K_1(A), +)$ es un grupo abeliano

Proposición 3.9.2 Sea A un C^*-álgebra, entonces

$$K_1(A) = \left\{ [u]_1 : \ u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \right\}$$

y la aplicación $[\cdot]_1 : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \longrightarrow K_1(A)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $[u \oplus v]_1 = [u]_1 + [v]_1$

2. $[1]_1 = 0$

3. Si $u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ y $u \sim_h v$ entonces $[u]_1 = [v]_1$

4. Si $u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ entonces $[uv]_1 = [vu]_1 = [u]_1 + [v]_1$

5. Para $u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A}),\ [u]_1 = [v]_1 \Leftrightarrow u \sim_1 v$

Prueba. Análogo a la proposición (3.6.3) ■

Proposición 3.9.3 ***(Propiedad universal).***
Sean A un C^***-álgebra**, G un grupo abeliano, y sea $\gamma : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \longrightarrow G$ una función con las siguientes propiedades:

1. $\gamma(u \oplus v) = \gamma(u) + \gamma(v)$

2. $\gamma(1) = 0$

3. Si $u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ y $u \sim_h v$ entonces $\gamma(u) = \gamma(v)$

Entonces
Existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : K_1(A) \longrightarrow G$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
K_1(A) \arrow[r, dotted, "\alpha"'] & G
\end{tikzcd}$$

Figura 3.8: Propiedad universal de K_1.

Prueba. Análogo a la proposición (3.3.3).

Proposición 3.9.4 Sea A un C^*-álgebra con unidad entonces existe un isomorfismo $\rho : K_1(A) \longrightarrow \frac{\mathcal{U}_\infty(A)}{\sim_1}$, haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] & \mathcal{U}_\infty(A) \arrow[d] \\
K_1(A) \arrow[r, "\rho"'] & \dfrac{\mathcal{U}_\infty(A)}{\sim_1}
\end{tikzcd}$$

Figura 3.9: Isomorfismo de $K_1(A)$ y $\dfrac{\mathcal{U}_\infty(A)}{\sim_1}$.

donde $\mu(a+\alpha f) = a$ con $a \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$, para $\widetilde{A} = A + \mathbb{C}f$, y $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$; donde además $K_1(A)$ esta dado en la proposición (3.9.2)

Prueba. La aplicación $\mu : \widetilde{A} \longrightarrow A$ dado por $\mu(a+\alpha f) = a$ con $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ es un *-homomorfismo, μ se puede extender aun C^*-homomorfismo $\mu : M_n(\widetilde{A}) \longrightarrow M_n(A)$ dado por

$$\mu_n\left((a_{ij})_{n\times n}\right) = (\mu(a_{ij}))_{n\times n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Escribiremos simplemente μ en vez de μ_n para cada $n \in \mathbb{N}$.
Afirmación: $\mu(\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})) \subset \mathcal{U}_\infty(A)$
En efecto. Sea $\omega \in \mu(\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}))$ probemos que ω es un elemento unidad en $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$.
Claramente $\mu(\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})) \subset \mathcal{U}_\infty(A)$ entonces $\omega = \mu(v)$ para algún v$\in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$, de donde v$\in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$, para algún $n \in \mathbb{N}$ asi $\mathrm{vv}^* = 1 = \mathrm{v}^*\mathrm{v}$ luego $\omega\omega^* = \mu(\mathrm{v})\mu(\mathrm{v})^* = \mu(\mathrm{v})\mu(\mathrm{v}^*) = \mu(\mathrm{vv}^*) = \mu(1) = 1$. Análogamente $\omega^*\omega = 1$ por tanto ω es una unidad.
De aqui obtenemos una aplicación $\mu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \longrightarrow \mathcal{U}_\infty(A)$ lo que claramente se nota que μ es suryectiva.
Afirmación:

(i) $\mu(\omega) \sim_1 \mu(\mathrm{v})$ si y sólo si $\omega \sim_1 \mathrm{v}$ para todo v,ω en $\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$.

(ii) $\mu(\omega \oplus \mathrm{v}) = \mu(\omega) \oplus \mu(\mathrm{v})$ para todo ω,v en $\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$.

En efecto.

(i) Para mostrar esta afirmación (i) es suficiente mostrar que $\mu(\omega) \sim_h \mu(\mathrm{v})$ si y sólo si $\omega \sim_h \mathrm{v}$ para todo ω,v$\in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos esto es inmediato ver que si $\omega \sim_h \mathrm{v}$ para todo ω,v$\in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(\omega) \sim_h \mu(\mathrm{v})$.

Ahora veamos si $\mu(\omega) \sim_h \mu(\mathrm{v})$, en $\mathcal{U}_n(A)$ para ω,v$\in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ con $n \in \mathbb{N}$ por la aplicación de μ podemos encontrar $\omega_\circ, \mathrm{v}_\circ$ en $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}f)$ tal que $\omega = \mu(\omega) + \omega_\circ$ y $\mathrm{v} = \mu(\mathrm{v}) + \mathrm{v}_\circ$ recordando si ω es unitario en A con $\sigma_A(\omega) \neq T$, entonces $\omega \sim_h 1$ en $\mathcal{U}(A)$ entonces usando este resultado tenemos que $\omega_\circ \sim_h 1$ y $\mathrm{v}_\circ \sim_h 1(1 \sim_h \mathrm{v}_\circ)$ de donde $\omega_\circ \sim \mathrm{v}_\circ$ en $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}f)$. Esto prueba que $\omega = \mu(\omega) + \omega_\circ \sim_h \mu(\mathrm{v}) + \mathrm{v}_\circ = \mathrm{v}$ en $\mathcal{U}_n(\widetilde{A})$.

(ii) Esto se sigue inmediatamente de la definición de aplicación μ finalmente por teorema de isomorfismos (pasa al cociente) tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] & \mu_\infty(A) \arrow[d] \\
K_1(A) \arrow[r, "\rho"'] & \dfrac{\mu_\infty(A)}{\sim_1}
\end{tikzcd}$$

Conmuta mas aún ρ es un isomorfismo. ■

Observación 3.9.2 Si A tiene identidad identificaremos $K_1(A)$ con $\frac{\mathcal{U}_\infty(A)}{\sim_1}$ via el isomorfismo ρ de la proposición (3.9.4) mas aún como consecuencia directa de esta proposición se obtiene que $K_1(A) \cong K_1(\widetilde{A})$ para cada C^*-algebra A.

Ejemplo 3.9.1 $K_1(\mathbb{C}) = K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$. Mas generalmente, $K_1(B(H)) = 0$ para cada espacio de Hilbert H

3.10. El funtor K_1

Sean A, B dos C^*-algebras, y sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un *-homomorfismo entonces φ induce un *-homomorfismo unitario $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$, que extiende a un *-homomorfismo unitario $\widetilde{\varphi} : M_n(\widetilde{A}) \longrightarrow M_n(\widetilde{B})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ esto dá una aplicación $\widetilde{\varphi} : \mu_\infty(\widetilde{A}) \longrightarrow \mu_\infty(\widetilde{B})$ y definimos $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \longrightarrow K_1(B)$ por $\nu(u) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1$ para cada $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$ y usando la propiedad universal de K_1 se concluye que existe un único homomorfismo de grupos $K_1(\varphi) : K_1(A) \longrightarrow K_1(B)$ con la propiedad $K_1(\varphi)([u]_1) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1$, para $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$.
Resumiendo: Si A y B son C^*-álgebras con identidad y $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo que preserva identidades, entonces

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\varphi(u)]_1 \quad \forall\, u \in \mathcal{U}_\infty(A)$$

La proposición siguiente muestra que K_1 es un funtor invariante homotópico lo cual preserva cero.

Proposición 3.10.1 ***(Funtorialidad de K_1).***
Sean A, B, C tres C^*-algebras con identidad, y sea $\varphi : A \longrightarrow B$ y $\psi : B \longrightarrow C$ dos C^*-homomorfismos. Entonces

i) $K_1(1_A) = 1_{K_1(A)}$

ii) $K_1(\psi\, \varphi) = K_1(\psi)\, K_1(\varphi)$
En particular K_1 es un funtor. Además

iii) $K_1(\{0\}) = \{0\}$

iv) $K_1(0_{B,A}) = 0_{K_1(B), K_1(A)}$

Prueba. Es rutinario aplicando la definición de $K_1(\varphi)$.

Proposición 3.10.2 ***(Invarianza homotópica de K_1)***
Sean A, B dos C^*-álgebras entonces

i) Si $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ son *-homomorfismos homotópicos, entonces $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$.

ii) Si A y B son equivalentes homotópicamente entonces $K_1(A) \cong K_1(B)$. Mas precisamente, si $A \stackrel{\varphi}{\to} B \stackrel{\psi}{\to} A$ es una homotopía entonces $K_1(\varphi) : K_1(A) \longrightarrow K_1(B)$ y $K_1(\psi) : K_1(B) \longrightarrow K_1(A)$ son isomorfos, mas aún $K_1(\varphi)^{-1} = K_1(\psi)$.

Prueba.

i) Como $\varphi \simeq \psi$ entonces existen $\varphi_t : A \longrightarrow B,\ t \in [0,1]$, caminos de *-homomorfismos tal que $\varphi_\circ = \varphi$ y $\varphi_1 = \psi$, y $t \longmapsto \varphi_t(a)$ es continua para todo $a \in A$ asi el *-homomorfismo inducido $\widetilde{\varphi}_t : M_n(\widetilde{A}) \longrightarrow M_n(\widetilde{B})$ preservan identidad, y las aplicaciones $t \longmapsto \widetilde{\varphi}_t(a)$ son continuas para cada $a \in M_n(\widetilde{A})$. De aqui $\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}_\circ(u) \sim_h \widetilde{\varphi}_1(u) = \widetilde{\psi}(u)$ en $\mathcal{U}_n(\widetilde{B})$, para todo $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$. De esto se sigue que $K_1(\varphi)([u]_1) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1 = [\widetilde{\psi}(u)]_1 = K_1(\psi)([u]_1)$.

ii) Como $A \simeq B$, entonces $A \stackrel{\varphi}{\to} B \stackrel{\psi}{\to} A$ es una homotopía entonces $\psi\ \varphi \simeq 1_A$ también $B \stackrel{\psi}{\to} A \stackrel{\varphi}{\to} B$ es una homotopía entonces $\varphi\ \psi \simeq 1_B$, luego $K_1(\psi)\ K_1(\varphi) = K_1((1_A) = 1_{K_1(A)}$ y $K_1(\varphi)\ K_1(\psi) = K_1(1_B) = 1_{K_1(B)}$ por lo tanto $K_1(A) \cong K_1(B)$. ■

Lema 3.10.1 Sean A y B dos C^*-álgebras, sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un *-homomorfismo, y sea $g \in Ker(K_1(\varphi))$ entonces

(i) Existe $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$ tal que $g = [u]_1$, y $\widetilde{\varphi}(u) \sim_h 1$.

(ii) Si φ es suryectiva, entonces existe $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$ tal que $g = [u]_1$ y $\widetilde{\varphi}(u) = 1$.

Prueba.

(i) Elijamos un elemento $\mathrm{v} \in \mathcal{U}_m(\widetilde{A})$ con $g = [\mathrm{v}]_1$ entonces $[\widetilde{\varphi}(\mathrm{v})]_1 = 0 = [1_m]_1$. De aqui existe $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq m$ tal que $\widetilde{\varphi}(\mathrm{v}) \oplus 1_{n-m} \sim_h 1_m \oplus 1_{n-m} = 1_n$. Pongamos $u = \mathrm{v} \oplus 1_{n-m}$ entonces $[u]_1 = [\mathrm{v}]_1 = g$ y $\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}(\mathrm{v}) \oplus 1_{n-m} \sim_h 1_n$.

(ii) Usando (i) encontramos v$\in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ con $g = [\mathrm{v}]_1$ y $\widetilde{\varphi}(\mathrm{v}) \sim_h 1$ entonces existe $\omega \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ cumpliendo $\widetilde{\varphi}(\omega) = \widetilde{\varphi}(\mathrm{v})$ y asi $\omega \sim_h 1$. Tomando $u = \omega^*\mathrm{v}$ entonces $g = [\mathrm{v}]_1 = [\omega u]_1 = [\omega]_1[u]_1 = [1][u]_1 = [u]_1$. También $\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}(\omega^*\mathrm{v}) = \widetilde{\varphi}(\omega^*)\widetilde{\varphi}(\mathrm{v}) = 1$. ■

Proposición 3.10.3 ***(Semiexactitud de*** K_1***)***

Sea

$$O \longrightarrow J \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O \tag{3.32}$$

una sucesión exacta corta de C^*-álgebras entonces la sucesión

$$K_1(J) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B) \tag{3.33}$$

es exacta. Además si la sucesión (3.32) es exacta escindible con una aplicación escindible $\lambda : B \longrightarrow A$, entonces la sucesión

$$O \longrightarrow K_1(J) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B) \longrightarrow O \tag{3.34}$$

es exacta escindible con una aplicación escindible $K_1(\lambda) : K_1(B) \longrightarrow K_1(A)$.

Prueba. Como la sucesión (3.32) es exacta entonces $\psi\ \varphi = 0$ de donde $K_1(\psi\ \varphi) = 0$ si y sólo si $K_1(\psi)\ K_1(\varphi) = 0$, de aqui $Im(K_1(\varphi)) \subseteq Ker(K_1(\psi))$. Para el otro contenido, sea $g \in Ker(K_1(\psi))$. Usando el lema (3.10.1) parte (ii) podemos encontrar un elemento unitario $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ con $g = [u]_1$ y $\widetilde{\psi}(u) = 1$. De otro lado sabemos que para la sucesión exacta corta de C^*-álgebras, y para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a \in Im(\widetilde{\psi}_n)$ si y sólo si $\widetilde{\psi}_n(a) = S_n(\widetilde{\psi}_n(a))$. Entonces por este hecho obtenemos un elemento unitario v$\in \mathcal{U}_n(\widetilde{J})$ tal que $\widetilde{\varphi}(\mathrm{v}) = u$ entonces $[\mathrm{v}]_1 \in K_1(J)$ y asi $K_1(\varphi)([\mathrm{v}]_1) = [\widetilde{\varphi}(\mathrm{v})]_1 = [u]_1 = g$ por tanto el resultado.

Ahora supongamos que la sucesión (3.32) es exacta escindible entonces la sucesión (3.34) es exacta en $K_1(A)$ y por la funtorialidad de K_1 tenemos $K_1(\psi)\ K_1(\lambda) = 1_{K_1(B)}$, y de aqui la sucesión (3.34) es exacta en $K_1(B)$ (y $K_1(\lambda)$ es una aplicación escindible). Queda mostrar que $K_1(\varphi)$ es inyectiva. En efecto sea $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{J})$ tal que $K_1(\varphi)([u]_1) = [1]_1$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $diag(\widetilde{\varphi}(u), 1_m) \sim_h 1_{n+m}$.

Sea $t \longrightarrow \omega_t$ un camino continuo en $\mathcal{U}_{n+m}(\widetilde{A})$ conectando $diag(\widetilde{\varphi}(u), 1_m)$ y 1_{n+m}. Aplicaríamos $\widetilde{\varphi}^{-1}$ a ω_t para concluír que $diag(u, 1_m)$ es homotópico a la identidad. En general, esto es imposible ya que alguno de los ω_t pueden estar fuera del rango de $\widetilde{\varphi}$. Sin embargo, con la presencia de una aplicación escindible λ podemos corregir el camino ω_t poniendo $\mathrm{v}_t = \omega_t(\widetilde{\lambda}\ \widetilde{\psi})(\omega_t^*)$ entonces ω_t es un camino continuo en $\mathcal{U}_{n+m}(\widetilde{A})$ conectando $diag(\widetilde{\varphi}(u), 1_m)(\widetilde{\lambda}\ \widetilde{\psi})diag(\widetilde{\varphi}(u^*), 1_m)$ y 1_{n+m}. Puesto que $\widetilde{\psi}(\mathrm{v}_t) = 1_{n+m}$ para todo t, de donde cada $\mathrm{v}_t \in Im(\widetilde{\varphi})$. Asi $\widetilde{\varphi}^{-1}(\mathrm{v}_t)$ es un camino continuo en $\mathcal{U}_{n+m}(\widetilde{J})$ conectando $diag(u, 1_m)\widetilde{\varphi}^{-1}\left[(\widetilde{\lambda}\ \widetilde{\psi})diag(\widetilde{\varphi}(u^*), 1_m)\right]$ y 1_{n+m} puesto que $\widetilde{\varphi}^{-1}\left[(\widetilde{\lambda}\ \widetilde{\varphi})diag(\widetilde{\varphi}(u^*), 1_m)\right]$ es una matriz escalar.
Esto es homotópico a la identidad. Asi

$$[u]_1 = [diag(u, 1_m)]_1 = [diag(u, 1_m)\widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{\lambda}\ \widetilde{\psi})diag(\widetilde{\varphi}(u^*), 1_m)]_1 = [1]_1$$

y por lo tanto la aplicación $K_1(\varphi)$ es inyectiva. ■

Proposición 3.10.4 ***(continuidad de K_1)***
Sea $A = \varinjlim \{A_i, \phi_{ij}\}$ el limite inductivo de una sucesión de C^*-álgebras, y sea $\phi_i : A_i \longrightarrow A$ las aplicaciones canónicas. Sea $G = \varinjlim \{K_1(A_i), K_1(\phi_{ij})\}$ el limite inductivo correspondiente a la sucesión de grupos abelianos. Y sea $\varphi_i : K_1(A_i) \longrightarrow G$ las aplicaciones canónicas entonces existe un isomorfismo $\tau : G \longrightarrow K_1(A)$ tal que para todo $i \geq j$ el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} K_1(A_j) \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d, "K_1(\phi_{ij})"'] & G \arrow[d, "\tau"] \\ K_1(A_i) \arrow[r, "K_1(\phi_i)"'] & K_1(A) \end{tikzcd} \tag{3.35}$$

Figura 3.10: Continuidad de K_1.

Prueba. La propiedad universal del limite directo G de la sucesión siguiente $\{K_1(A_i), K_1(\phi_{ij})\}$ produce un único homomorfismo $\tau : G \longrightarrow K_1(A)$ haciendo al diagrama (3.35) conmutativo. Mostraremos que τ es biyectiva.

- **Suryectividad** Sea $u \in \mathcal{U}(\widetilde{A})$ sabemos que para cualquier $u \in \widetilde{A}$ y $\varepsilon > 0$ existe i-suficientemente grande y un elemento unitario $\omega \in \widetilde{A}_i$ tal que $\|u - \widetilde{\phi}_i(\omega)\| < \varepsilon$ entonces usando tal hecho, existe i y $\omega \in \mathcal{U}(\widetilde{A}_i)$ tal que $\|u - \widetilde{\phi}_i(\omega)\| < 2$. Asi u y $\phi_i(\omega)$ son homotópicos en $\mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ de aqui $[u]_1 = [\widetilde{\phi}_i(\omega)]_1 = K_1(\phi_i)([\omega]_1) = (\tau\ \varphi_i)([\omega]_1)$ y asi τ es suryectiva.

- **Inyectividad** Basta mostrar que para cada j la restricción de τ a la imagen de φ_j es inyectiva. Asi sea $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A}_j)$ tal que $(\tau\ \varphi_j)([u]_1) = K_1(\phi_j)([u]_1) = [\widetilde{\phi}_j(u)]_1 = [1]_1$ en $K_1(A)$. Mostraremos que $\varphi_j([u]_1) = 0$ en G realmente, existe m tal que $diag(\widetilde{\phi}_j(u), 1_m) \sim_h 1_{n+m}$ en $\mathcal{U}_{n+m}(\widetilde{A})$. También se tiene: "si $u \in \mathcal{U}(\widetilde{A}_j)$ tal que $\phi_j(u) \sim_h 1$ en $\widetilde{A}$, entonces existe i arbitrariamente grande tal que $\phi_{ij}(u) \sim_h 1$ en $\widetilde{A}_i$"de esta manera usando este resultado existe $i \geq j$ tal que $diag(\widetilde{\phi}_{ij}(u), 1_m)$ es homotópico a 1_{n+m}. Asi $[\phi_{ij}(u)]_1 = [diag(\widetilde{\phi}_{ij}(u), 1_m)]_1 = [1]_1$. En consecuencia, $\varphi_j([u]_1) = (\varphi_i\ K_1(\widetilde{\phi}_{ij}))([u]_1) = 0$ asi τ es inyectiva. ■

Proposición 3.10.5 ***(Suma Directa)***
Sean A y B dos C^*-álgebra entonces $K_1(A \oplus B) \cong K_1(A) \oplus K_1(B)$. Mas específicamente, si $i_A : A \longrightarrow A \oplus B$ y $i_B : B \longrightarrow A \oplus B$ son las aplicaciones inclusión, entonces la aplicación

$$K_1(i_A) \oplus K_1(i_B) : K_1(A) \oplus K_1(B) \longrightarrow K_1(A \oplus B)$$

$$(g, h) \longmapsto K_1(i_A)(g) + K_1(i_B)(h)$$

es un isomorfismo de grupos

Prueba. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & K_1(A) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "I"] & K_1(A) \oplus K_1(B) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "K_1(i_A) \oplus K_1(i_B)"] & K_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(i_A)"'] & K_1(A \oplus B) \arrow[r, "K_1(\pi_B)"'] & K_1(B) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

donde $\tau(g) = (g, 0)$, $\gamma(g, h) = h$ y donde $\pi_B(a, b) = b$ claramente las filas en el diagrama son exactas y el diagrama conmuta puesto que $\pi\ i_A(a) = \pi_B(a, 0) = 0$ y $\pi_B\ i_B(b) = \pi_B(0, b) = b$ el lema del quinto muestra que $K_1(i_A) \oplus K_1(1_B)$ es un isomorfismo. ■

Proposición 3.10.6 ***(Estabilidad de*** K_1***)***

Sea A un C^*-álgebra

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos $K_1(A) \cong K_1(M_n(A))$.
Mas específicamente, sea $\psi : A \longrightarrow M_n(A)$ tal que $\psi(a) = diag(a, 0_{n-1})$ entonces $K_1(\psi) : K_1(A) \longrightarrow K_1(M_n(A))$ es un isomorfismo.

(ii) Sea K la C^*-álgebra de operadores compactos entonces

$$K_1(A) \cong K_1(A \otimes K)$$

Mas específicamente, sea p una proyección minimal en K y sea $\varphi : A \longrightarrow A \otimes K$ la aplicación $\varphi(a) = a \otimes p$ entonces $K_1(\varphi) : K_1(A) \longrightarrow K_1(A \otimes K)$ es un isomorfismo.

Prueba.

(i) Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\widetilde{\psi}"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{\mathbb{C}}"] & O \\
O \arrow[r] & M_n(A) \arrow[r] & M_n(\widetilde{A}) \arrow[r] & M_n(\mathbb{C}) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

el cual es exacta con las filas escindibles de aquí se sigue el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & K_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "K_1(\psi)"] & K_1(\widetilde{A}) \arrow[r] \arrow[d, "K_1(\widetilde{\varphi})"] & K_1(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "K_1(\psi_{\mathbb{C}})"] & O \\
O \arrow[r] & K_1(M_n(A)) \arrow[r] & K_1(M_n(\widetilde{A})) \arrow[r] & K_1(M_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

También es conmutativo por el lema del quinto se tiene que $K_1(\psi)$ es un isomorfismo.

(ii) Puesto que $A \otimes K \cong A \otimes (\text{lím}\, M_n(\mathbb{C})) \cong \text{lím}\, M_n(A)$ lo requerido se sigue de la parte (i) y de la continuidad de K_1.

Ejemplo 3.10.1 Para el álgebra K de operadores compactos sobre un espacio de Hilbert, se tiene que $K_1(K) = 0$.

En efecto. Sabemos que $K_1(\mathbb{C}) = K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$; específicamente, $K_1(B(H)) = 0$, para cada espacio de Hilbert H, por la proposición (3.10.6), $K_1(K) \cong K_1(\mathbb{C}) = 0$. ■

Capítulo 4

Periodicidad de Bott

En este capítulo introducimos la aplicación índice asociada a una sucesión exacta corta de C^*-álgebras.
Mostramos que cada sucesión exacta corta de C^*-álgebras

$$O \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow O$$

Induce una sucesión exacta de K-grupos con la aplicación índice $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_\circ(I)$ obteniéndose la conección entre K_1 y $K_\circ$. Se establece además un isomorfismo entre $K_1(A)$ y $K_\circ(SA)$ para cada C^*-álgebra A.
Desarrollamos los K-grupos de mayor dimensión que son definidos de manera inductiva como $K_{n+1}(A) = K_n(SA)$, para cada entero $n \geq 1$. También se define los K-funtores, K_n, y se muestra el isomorfismo de $K_n(A)$ y $K_{n+2}(A)$ para cada entero $n \geq 2$.

4.1. Definición de la aplicación índice

Dada una sucesión exacta corta de C^*-álgebras.

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

Estudiaremos la existencia de un homomorfismo de grupos $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_\circ(I)$ denominada aplicación índice u homomorfismo conexión. La definición de la aplicación índice está basada en los lemas siguientes:

Lema 4.1.1 Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

de C^*-álgebras, y sea $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ un elemento dado

1. Existe un elemento unitario $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A}) = \mathcal{U}(M_{2n}(\widetilde{A}))$ y una proyección $p \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I}) = \mathcal{P}(M_{2n}(\widetilde{I}))$ tal que

$$\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \ , \ \widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \ , \ S(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Si v y p son como en (1), y si $w \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A}) = \mathcal{U}(M_{2n}(\widetilde{A}))$ y $q \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{\widetilde{I}}) = \mathcal{P}(M_{2n}(I))$ satisfacen

$$\widetilde{\psi}(w) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \ , \ \widetilde{\varphi}(q) = w \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^*$$

entonces $S(q) = diag(1_n, 0_n)$ y $p \sim_u q$ en $\mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$

Prueba.

1. Aplicando el corolario (3.8.2) parte (2) se tiene que existe $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ tal que

$$\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} = diag(u, u^*)$$

Asi que

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}\left(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \right) &= \widetilde{\psi}(v)\widetilde{\psi}\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\psi}(v^*) \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i.e. $\widetilde{\psi}\left(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*\right) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

De otro lado la aplicación $\widetilde{\psi}_n = \widetilde{\psi} : M_n(\widetilde{I}) \longrightarrow M_n(\widetilde{A})$ es inyectiva y existe $p \in M_{2n}(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\psi}(p) = v\, diag(1_n, 0)\, v^*$. El elemento p es una proyección puesto que

$$\widetilde{\psi}(\widetilde{\varphi}(p)) = \psi(v\, diag(1_n, 0)\, v^*) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se sigue que

$$S(p) = diag(1_n, 0)$$

2. El argumento en (1) usado para mostrar que $S(p) = diag(1_n, 0_n)$ también muestra que $S(q) = diag(1_n, 0_n)$.

   Note que

$$\widetilde{\psi}(wv^*) = \widetilde{\psi}(w)\widetilde{\psi}(v^*) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu^* & 0 \\ 0 & u^*u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = 1_{2n}$$

   Por el lema (3.6.2) existe un elemento $z \in M_{2n}(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\psi}(z) = wv^*$, y z es necesariamente unitario porque $\widetilde{\varphi}$ es inyectivo.

   Entonces $\widetilde{\varphi}(zpz^*) = \widetilde{\varphi}(z)\widetilde{\varphi}(p)\widetilde{\varphi}(z^*)$

$$= (wv^*) \left[v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \right] (wv^*)^*$$

$$= wv^* \left[v^{**} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* v^* \right] v^{**}w^*$$

$$= w \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^*$$

$$= \widetilde{\varphi}(q)$$

asi $zpz^* = q$ pues $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva. Por lo tanto $p \sim_u q$ en $\mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$ por definición de $\sim_u$. ■

Definamos $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}) \longrightarrow K_\circ(\widetilde{I})$ como $\nu(u) = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$ para $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ donde $p \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$ corresponde a u como el lema (4.1.1) parte (1).

Afirmación: La aplicación ν está bien definida.

En efecto. Sean $u, w \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ tal que $u = w$ entonces existen $p, p_1 \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$ correspondientes a u, w respectivamente. Asi $\nu(u) = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$ y $\nu(w) = [p_1]_\circ - [s(p_1)]_\circ$ por (2) del lema (4.1.1) tenemos que $p \sim p_1$ entonces $[p]_\circ = [p_1]_\circ$ y $[s(p)]_\circ = [s(p_1)]_\circ$, luego $\nu(u) = \nu(w)$. ■

Lema 4.1.2 La aplicación $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}) \longrightarrow K_\circ(\widetilde{I})$ tiene las siguientes propiedades

1. $\nu(u_1 \oplus u_2) = \nu(u_1) + \nu(u_2),\ \forall\, u_1, u_2 \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B})$

2. $\nu(1) = 0$

3. Si $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ y $u_1 \sim_h u_2$ entonces $\nu(u_1) = \nu(u_2)$

4. $\nu(\widetilde{\psi}(u)) = 0$ para cada $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$.

5. $K_\circ(\varphi)(\nu(u)) = 0$ para cada $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B})$

Prueba.

1. Para $j = 1, 2$; sean $u_1 \in \mathcal{U}_{n_1}(\widetilde{B})$ y $u_2 \in \mathcal{U}_{n_2}(\widetilde{B})$ elementos dados. Elijamos $v_1 \in \mathcal{U}_{2n_1}(\widetilde{A})$, $v_2 \in \mathcal{U}_{2n_2}(\widetilde{A})$ y $p_1 \in \mathcal{P}_{2n_1}(\widetilde{I})$, $p_2 \in \mathcal{P}_{2n_2}(\widetilde{I})$ satisfaciendo
$$\widetilde{\psi}(v_1) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^* \end{pmatrix},\ \widetilde{\varphi}(p_1) = v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^*,\ S(p_1) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\widetilde{\psi}(v_2) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & u_2^* \end{pmatrix},\quad \widetilde{\varphi}(p_2) = v_2 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2^*,\quad S(p_2) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asi que $\nu(u_1) = [p_1]_\circ - [s(p_1)]_\circ$ y $\nu(u_2) = [p_2]_\circ - [s(p_2)]_\circ$ introducimos elementos $y \in \mathcal{U}_{2(n_1+n_2)}(\mathbb{C}),\ v \in \mathcal{U}_{2(n_1+n_2)}(\mathbb{C})$ y $p \in \mathcal{U}_{2(n_1+n_2)}(\widetilde{I})$ por

$$y = \begin{bmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 1_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n_2} \end{bmatrix}, \quad v = y \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} y^*, \quad p = y \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} y^*$$

entonces por el lema (4.1.1) parte (1) se tiene

$$\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2^* \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* = v \begin{pmatrix} 1_{n_1+n_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*$$

y asi $\nu(u_1 \oplus u_2) = [p]_\circ - [s(p)]_\circ = [p_1 \oplus p_2]_\circ - [s(p_1 \oplus p_2)]_\circ = \nu(u_1) + \nu(u_2)$ porque $p \sim_u p_1 \oplus p_2$.

2. $\nu(1) = 0$ es consecuencia inmediata de (4) que lo probaremos más adelante pués $p = diag(1_n, 0)$.

3. Elijamos $v_1 \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ y $p_1 \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$ tal que

$$\widetilde{\psi}(v_1) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^* \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\varphi}(p_1) = v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^*$$

entonces por definición de $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}) \longrightarrow K_\circ(I)$ se tiene $\nu(u_1) = [p_1]_\circ - [s(p_1)]_\circ$ como $u_1^* u_2 \sim_h 1 \sim_h u_1 u_2^*$ entonces usando el corolario (3.8.2) se obtiene que existen elementos unitarios $a, b \in M_n(\widetilde{A})$ tal que $\widetilde{\psi}(a) = u_1^* u_2$ y $\widetilde{\psi}(b) = u_1 u_2^*$ pongamos $v_2 = v_1 diag(a, b)$ en $\mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ obteniendose

$$\widetilde{\psi}(v_2) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & u_2^* \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
v_2 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2^* &= v_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} diag^*(a,b) v_1^* \\
&= v_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & b^* \end{pmatrix} v_1^* \\
&= v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^* \\
&= \widetilde{\varphi}(p_1)
\end{aligned}
$$

Por definición de ν concluímos que $\nu(u_2) = [p_1]_\circ - [s(p_1)]_\circ = \nu(u_1)$

4. Pongamos $v = diag(u, u^*)$ en $\mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ y $p = diag(1_n, 0)$ en $\mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$ de este último $S(p) = \begin{pmatrix} s(1_n) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = p_1$ entonces

$$\widetilde{\psi}(v) = \widetilde{\psi}(diag(u,u^*)) = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}(u) & 0 \\ 0 & \widetilde{\psi}(u^*) \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*$$

luego $\nu(\widetilde{\psi}(u)) = [p]_\circ - [s(p)]_\circ = [p]_\circ - [p]_\circ = 0$.

5. Tenemos

- $S(\widetilde{\varphi}(p)) = \widetilde{\varphi}(S(p))$
- $\widetilde{\varphi}(p) \sim_u s(\widetilde{\varphi}(p))$ en $M_{2n}(\widetilde{A})$; cuando p es una proyección en $M_{2n}(\widetilde{I})$ asociado a u; nuevamente por el lema (4.1.1) parte (1) se tiene

$$
\begin{aligned}
K_\circ(\widetilde{\varphi})(\nu(u)) &= K_\circ(\widetilde{\varphi})([p]_\circ - [s(p)]_\circ) \\
&= K_\circ(\widetilde{\varphi})([p - s(p)]_\circ) \\
&= [\widetilde{\varphi}(p - s(p))]_\circ \\
&= [\widetilde{\varphi}(p) - \widetilde{\varphi}(s(p))]_\circ
\end{aligned}
$$

$$= [\widetilde{\varphi}(p)]_\circ - [\widetilde{\varphi}(s(p))]_\circ$$

$$= [\widetilde{\varphi}(p)]_\circ - [s(\widetilde{\varphi}(p))]_\circ$$

$$= 0 \quad \text{pues } \widetilde{\varphi}(p) \sim_u s(\widetilde{\varphi}(p)) \quad \blacksquare$$

Definición 4.1.1 ***(Aplicación índice).***

Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta:

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

Sea $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}) \longrightarrow K_\circ(I)$ la aplicación dada por

$$\nu(u) = [p]_\circ - [s(p)]_\circ \tag{4.1}$$

Cuando $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ y $p \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$ correspondiente a u como en el lema (4.1.1) parte (1). Por el lema (4.1.2) la aplicación $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}) \longrightarrow K_\circ(I)$ verifica las condiciones 1,2 y 3 de la propiedad universal de K_1, de donde existe un único homomorfismo de grupos $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_\circ(I)$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}) \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
K_1(B) \arrow[r, "\delta_1"'] & K_\circ(I)
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Aplicación índice.

$\delta_1\,[\,\cdot\,]_1 = \nu$ al homomorfismo δ_1 se denomina **aplicación índice** asociada a la sucesión

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

Proposición 4.1.1 ***(Propiedades básicas de la aplicación índice).***

Sea $O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$ una sucesión exacta corta de C^*-álgebras, $n \in \mathbb{N}$, y $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B}),\ v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ y $p \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$ satisfacen:

$$\widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \quad , \quad \widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$$

Entonces $\delta_1([u]_1) = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$.

Además se verifica:

1. $\delta_1\, K_1(\psi) = 0$

2. $K_\circ(\varphi)\, \delta_1 = 0$

Prueba. De (4.1) obtenemos que $\delta_1([u]_1) = \nu(u) = [p]_\circ - [s(p)]_\circ$,

1.- $K_\circ(\varphi)\, \delta_1([u]_1) = K_\circ(\varphi)(\nu(u)) = 0$ por el lema (4.1.2) parte (5).

2.- $\delta_1\, K_1(\psi)([u]_1) = \delta_1(K_1(\psi)([u]_1)) = \delta_1([\widetilde{\psi}(u)]_1) = \nu(\widetilde{\psi}(u)) = 0.$ ∎

Proposición 4.1.2 ***(Naturalidad de la aplicación índice).***

Sea

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & O & (4.2) \\ O \arrow[r] & I' \arrow[r, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r] & O & (4.3) \end{tikzcd}$$

Un diagrama conmutativo con filas exactas de C^*-algebras, y donde α, β y γ son *-homomorfismos. Sean $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_\circ(I)$ y $\delta_1^{'} : K_1(B') \longrightarrow K_\circ(I')$ las aplicaciones índices asociadas con las sucesiones exactas (4.2) y 4.3) respectivamente entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} K_1(B) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "K_1(\beta)"'] & K_\circ(I) \arrow[d, "K_\circ(\gamma)"] \\ K_1(B') \arrow[r, "\delta_1^{'}"'] & K_\circ(I') \end{tikzcd}$$

Figura 4.2: Conmutatividad de las aplicaciones índices.

es conmutativo

Prueba. Sea $g \in K_1(B)$ así encontramos un $n \in \mathbb{N}$ y un elemento unitario $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ tal que $g = [u]_1$.
Por el lema (4.1.1) parte (1) existen $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ y $p \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$ tales que

$$\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \quad , \quad \widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*$$

Pongamos $v' = \widetilde{\alpha}(v) \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A}')$ y $p' = \widetilde{\gamma}(p) \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I}')$ entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}'(v') &= \widetilde{\psi}'(\widetilde{\alpha}(v)) = \widetilde{\psi}'\,\widetilde{\alpha}(v) = \widetilde{\psi'\,\alpha}(v) = \widetilde{\beta\,\psi}(v) = \widetilde{\beta}(\widetilde{\psi}(v)) \\
&= \widetilde{\beta} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\beta}(u) & 0 \\ 0 & \widetilde{\beta}(u^*) \end{pmatrix} \\
\widetilde{\varphi}'(p') &= \widetilde{\varphi}'(\widetilde{\gamma}(p)) = \widetilde{\varphi}'\,\widetilde{\gamma}(p) = \widetilde{\varphi'\,\gamma}(p) = \widetilde{\alpha\,\varphi}(p) = \widetilde{\alpha}(\widetilde{\varphi}(p)) \\
&= \widetilde{\alpha}\left(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \right) = \widetilde{\alpha}(v) \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\alpha}(v^*) \\
&= \widetilde{\alpha}(v) \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\widetilde{\alpha}(v))^* = v' \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v')^*
\end{aligned}$$

Por la definición (4.1.1) $\left[\delta_1'\, K_1(\beta)\right](g) = \delta_1'\,[K_1(\beta)(g)] = \delta_1'\,[K_1(\beta)([u]_1)] = \delta_1'([\widetilde{\beta}(u)]_1) = [p']_\circ - [S(p')]_\circ = [\widetilde{\gamma}(p)]_\circ - [S(\widetilde{\gamma}(p))]_\circ = [\widetilde{\gamma}(p)]_\circ - [\widetilde{\gamma}(S(p))]_\circ = K_\circ(\gamma)([p]_\circ) - K_\circ(\gamma)([S(p)]_\circ) = K_\circ(\gamma)([p]_\circ - [S(p)]_\circ) = K_\circ(\gamma)(\delta_1([u]_1)) = K_\circ(\gamma)\,\delta_1([u]_1)$.
Luego $\delta_1'\, K_1(\beta) = K_\circ(\gamma)\,\delta_1$. ■

4.2. Operadores de Fredholm e índice de Fredholm

Sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional, separable y recordemos

$$K = \{f \in B(H) : \, f \text{ operador compacto}\}$$

y $Q(H) = \frac{B(H)}{K}$ el álgebra de Calkin, tenemos así la sucesión exacta corta

$$O \longrightarrow K \xrightarrow{i} B(H) \xrightarrow{\pi} Q(H) \longrightarrow O$$

Teorema 4.2.1 ***(Atkinson).***
Sea $T \in B(H)$, son equivalentes:

i) $dim(Ker(T)) < \infty$ y $dim(coker(T)) < \infty$.

ii) Existe un operador $S \in B(H)$ tal que $(1 - ST)$ y $(1 - TS)$ son operadores compactos.

iii) $\pi(T)$ es invertible en $Q(H)$. Además si T satisface las condiciones anteriores entonces $T(H)$ es cerrado en H.

Prueba. Ver [10] página 165

Definición 4.2.1 Un operador de Fredholm sobre un espacio de Hilbert H es un operador $T \in B(H)$ que satisface cualquiera de las condiciones equivalentes del teorema de Atkinson. Denotemos por

$$\Phi(H) = \{T \in B(H) : T \text{ es un operador de Fredholm}\}$$

Definimos el índice de Fredholm de un operador de Fredholm T como

$$\textit{índice}(T) = dim(Ker(T)) - dim(coker(T)) \in \mathbb{Z}$$

Teorema 4.2.2 Si $T \in \phi(H)$ y K es un operador compacto entonces $\textit{índice}(T + K) = \textit{índice}(T)$

Prueba. Ver [10] página 166

Corolario 4.2.3 Si $T, L \in \phi(H)$ entonces $\textit{índice}(TL) = \textit{índice}(T) + \textit{índice}(L)$

Prueba. Supongamos primero que $\textit{índice}(T) = 0$, y sea R un operador de rango finito tal que $T + R$ es invertible entonces

$$\textit{índice}(TL) = \textit{índice}(TL + RL) = \textit{índice}((T + R)L) = \textit{índice}(T)$$

Ahora supongamos que $\textit{índice}(T) = k > 0$, y sea $S \in B(H)$ tal que $S(\xi_n) = \xi_{n+1}$, donde $\{\xi_n\}_{n=0,1,...}$ es base ortonormal de H, de donde $\textit{índice}(S) = -1$ y de aqui

$\acute{\imath}ndice(S^k) = -k$ y $\acute{\imath}ndice((S^*)^k) = k$ entonces $\acute{\imath}ndice(T \oplus S^k) = 0$ ahora $\acute{\imath}ndice(TL \oplus S^k) = \acute{\imath}ndice\left[(T \oplus S^k)(L \oplus 1)\right] = \acute{\imath}ndice(L \oplus 1) = \acute{\imath}ndice(T)$ en consecuencia, se tiene

$$\acute{\imath}ndice(TL) = -\acute{\imath}ndice(S^k) + \acute{\imath}ndice(1) = \acute{\imath}ndice(T) + \acute{\imath}ndice(L). \quad \blacksquare$$

Proposición 4.2.1 La aplicación índice es localmente constante y continua en norma.

Prueba. Sea T un operador de Fredholm y sea S su paramétrico. Sea K un operador compacto tal que $TS = 1 + K$. Es suficiente mostrar que si L es de Fredholm tal que $\|L - F\| < \frac{1}{\|S\|}$ entonces $\acute{\imath}ndice(T) = \acute{\imath}ndice(L)$.
En efecto, el operador $(L-T)S+1$ es invertible, puesto que su distancia de la identidad es menor que 1. Asi $\acute{\imath}ndice(L)+\acute{\imath}ndice(S) = \acute{\imath}ndice(LS) = \acute{\imath}ndice\,[(L - T + T)S] = \acute{\imath}ndice\,[(L - T)S + 1 + K] = 0$. Luego $\acute{\imath}ndice(L) = -\acute{\imath}ndice(S) = \acute{\imath}ndice(T)$. $\blacksquare$

Definición 4.2.2 Si F, L son dos operadores de Fredholm. Se dice que F y L son homotópicos si existe caminos continuos en norma de F a L consistiendo de operadores de Fredholm.

Proposición 4.2.2 Dos operadores de Fredholm son homotópicos si y sólo si ellos tienen el mismo índice.

Prueba. Sean F, L en $\Phi(H)$. Supongamos que $F \simeq L$ y sea $t \longmapsto V_t$ caminos continuos de operadores de Fredholm de T a L entonces la aplicación $t \longmapsto \acute{\imath}ndice(V_t)$ es continuo y de aqui es constante. Para el recíproco primero observemos que cada $V \in \Phi(H)$ con $\acute{\imath}ndice(V) = 0$ es homotópico a 1, en efecto existe un operador de rango finito tal que $V + R$ es invertible entonces $t \longmapsto V + tR$ es un camino conectando V a un elemento invertible, y en $B(H)$ el grupo de invertibles es un camino conexo. Ahora supongamos que $\acute{\imath}ndice(T) = \acute{\imath}ndice(L)$ entonces TL^* y L^*T tienen índice cero y así son homotópicos a 1 en consecuencia, los operadores $T, T(L^*L) = (TL^*)T$ y L son homotópicos.

Ejemplo 4.2.1 Sea u un elemento unitario en $M_n(Q)$(donde $Q = Q(H)$) y sea $U \in M_n(B(H))$ tal que $\widetilde{\pi}(U) = u$, entonces U es un operador de Fredholm en $\bigoplus^{n} H$. Definamos una aplicación $\mu : \mu_\infty(Q) \longrightarrow \mathbb{Z}$ como $\mu(u) = \textit{índice}(U)$. De las propiedades del operador de Fredholm se sigue que μ satisface las condiciones de la propiedad universal de K_1, así existe un homomorfismo *índice* : $K_1(Q) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\textit{índice}([u]_1) = \mu(U) = \textit{índice}(U)$; claramente el índice es un isomorfismo. Así $K_1(Q) \cong \mathbb{Z}$. ■

Proposición 4.2.3 Para cada operador de Fredholm T sobre H; $\textit{índice}(T) = (K_\circ(Tr)\ \delta_1)([\pi(T)]_1)$ donde $\delta_1 : K_1(Q(H)) \longrightarrow K_\circ(K)$

Prueba. Ver [10] página 168

Ejemplo 4.2.2 ***(El K_1-grupo del álgebra de Calkin).***
La sucesión exacta corta

$$O \longrightarrow K \xrightarrow{i} B(H) \xrightarrow{\pi} Q(H) \longrightarrow O$$

induce la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
K_1(K) \arrow[r, "K_1(i)"] & K_1(B(H)) \arrow[r, "K_1(\pi)"] & K_1(Q(H)) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_\circ(Q(H)) & K_\circ(B(H)) \arrow[l, "K_\circ(\pi)"'] & K_\circ(K) \arrow[l, "K_\circ(i)"']
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $K_1(B(H)) = 0 = K_\circ(B(H))$, entonces se tiene la sucesión exacta siguiente

$$O \longrightarrow K_1(Q(H)) \xrightarrow{\delta_1} K_\circ(K) \longrightarrow O$$

claramente δ_1 es isomorfismo, de donde $K_1(Q(H)) \cong K_\circ(K) \cong \mathbb{Z}$

Proposición 4.2.4 Considerando la definición (3.5.1); con relación a un levantamiento se tiene las propiedades siguientes

1. Cada elemento $b \in B$ tiene un levantamiento $a \in A$ con $\|a\| = \|b\|$

2. Cada elemento autoadjunto $b \in B$ levanta un elemento autoadjunto $a \in A$ además el elemento autoadjunto a puede ser elegido tal que $\|a\| = \|b\|$.

3. Cada elemento positivo $b \in B$ levanta un elemento positivo $a \in A$ además el levantamiento positivo puede ser elegido tal que $\|a\| = \|b\|$.

4. Un elemento normal en B en general no levanta un elemento normal en A.

5. Una proyección en B en general no levanta una proyección en A.

6. Un elemento unitario en B en general no levanta un elemento unitario en A, cuando A y B son C^*-álgebras unitarios.

Prueba. Ver [10] página 27. ■

4.3. La aplicación índice e isometrías parciales

Lema 4.3.1 Sea $\psi : A \longrightarrow B$ un *-homomorfismo suryectivo entre las C^*-álgebras A y B, supongamos que A tiene unidad, en lo cual también B tiene unidad y ψ preserva unidad. Entonces para cada elemento unitario u en B existe una isometría parcial v en $M_2(A)$ tal que $\psi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Prueba. Tomando $a \in A$ un levantamiento de u con $\|a\| = 1$ y pongamos $v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \left[\frac{1-a^*a}{2}\right]^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} v^*v &= \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ [(1-a^*a)^*]^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ (1-a^*a)^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^*a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= diag(1, 0)$$

lo cual establece que v es una isometría parcial, usamos la identidad

$$\psi\left[(1 - a^*a)^{1/2}\right] = (1 - u^*u)^{1/2} = 0$$

para ver que el resultado se cumple, esto es $\psi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pues,

$$\psi(v) = \psi\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ (1 - a^*a)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \psi(a) & 0 \\ \psi\left[(1 - a^*a)^{1/2}\right] & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\psi(v) = \begin{pmatrix} \psi(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ■

Proposición 4.3.1 Sea $O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$ una sucesión exacta corta de C^*-álgebras. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m$; $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ elemento unitario y $v \in M_n(\widetilde{A})$ una isometría parcial tal que $\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix}$. Entonces

$$1_m - v^*v = \widetilde{\varphi}(p) \text{ y } 1_m - vv^* = \widetilde{\varphi}(q)$$

para algunas proyecciones $p, q \in \mathcal{P}_m(\widetilde{I})$, y la aplicación índice $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_\circ(I)$ es dado por $\delta_1([u]_1) = [p]_\circ - [q]_\circ$.

Prueba. Ver [10] página 158

Observación 4.3.1 Si I es un ideal en A y $\varphi : I \longrightarrow A$ es la aplicación inclusión entonces: $\delta_1([u]_1) = [1_m - v^*v]_\circ - [1_m - vv^*]_\circ$, donde $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq n$ $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ y v es una isometría parcial en $M_m(\widetilde{A})$ que levanta la $diag(u, 0_{m-n})$.

Proposición 4.3.2 Sea $O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$ una sucesión exacta corta de C^*-álgebras, y supongamos que A tiene unidad, en el caso que B también tenga unidad, ψ preserva unidad. Sea $\overline{\varphi} : \widetilde{I} \longrightarrow A$ el *-homomorfismo dado por $\overline{\varphi}(x + \alpha 1_{\widetilde{I}}) = \varphi(x) + \alpha 1_A,\ x \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}.$

Sea u un elemento unitario en $M_n(B)$:

1. Si v es un elemento unitario en $M_{2n}(A)$ y p es una proyección en $M_{2n}(\widetilde{I})$ tal que
$$\overline{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \quad , \quad \psi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$$
Entonces $\delta_1([u]_1) = [p]_\circ - [S(p)]_\circ$

2. Si $m \geq n,\ v \in M_m(A)$ una isometría parcial tal que $\psi(v) = diag(u, 0_{m-n})$, entonces $1_m - v^*v = \overline{\varphi}(p)$ y $1_m - vv^* = \overline{\varphi}(q)$ para algunas proyecciones $p, q \in M_m(\widetilde{I})$ y $\delta_1([u]_1) = [p]_\circ - [q]_\circ$

Prueba. Ver [10] página 160. ∎

Proposición 4.3.3 Sea $O \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$ una sucesión exacta corta de C^*-álgebras, donde I es un ideal en A, $i : I \longrightarrow A$ es la aplicación inclusión.

1. Sea $u \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{B}))$ el cual tiene un levantamiento por una isometría parcial $v \in M_n(\widetilde{A})$, es decir $\widetilde{\psi}(v) = u$ entonces $(1_n - v^*v)$ y $(1_n - vv^*)$ son proyecciones en $M_n(I)$, y $\delta_1([u]_1) = [1_n - v^*v]_\circ - [1_n - vv^*]_\circ$

2. Supongamos que A tiene unidad (en el caso que también B tenga unidad, $\psi : A \longrightarrow B$ preserva unidad). Sea $u \in \mathcal{U}(M_n(B))$ el cual tiene un levantamiento por una isometría parcial $v \in M_n(A)$. Entonces $(1_n - v^*v)$ y $(1_n - vv^*)$ son proyecciones en $M_n(I)$, y $\delta_1([u]_1) = [1_n - v^*v]_\circ - [1_n - vv^*]_\circ$

Prueba.

1. Tenemos
$$\widetilde{\psi}(1_n - v^*v) = \widetilde{\psi}(1_n) - \widetilde{\psi}^*(v)\widetilde{\psi}(v) = 1_n - u^*u = 0$$
$$\widetilde{\psi}(1_n - vv^*) = \widetilde{\psi}(1_n) - \widetilde{\psi}(v)\widetilde{\psi}^*(v) = 1_n - uu^* = 0$$

entonces $1_n - v^*v,\ 1_n - vv^* \in K_{\widetilde{\psi}} = Im(\widetilde{i}) = M_n(I)$, vemos que

$$1_n - v^*v,\ 1_n - vv^* \in M_n(I)$$

estos dos elementos son proyecciones, pues

- $(1_n - v^*v)^* = 1_n^* - (v^*v)^* = 1_n - v^*v^{**} = 1_n - v^*v$
- $(1_n - v^*v)^2 = 1_n - v^*v - v^*v + (v^*v)(v^*v) = 1_n - v^*v$

Por lo tanto $(1_n - v^*v)$ es una proyección, análogamente $(1_n - vv^*)$ es una proyección.

Considerando $p = 1_n - v^*v,\ q = 1_n - vv^* \in M_n(I)$ proyecciones de donde $\widetilde{\varphi}(p) = 1_m - \varphi^*(v)\varphi(v)$ y $\widetilde{\varphi}(q) = 1_m - \varphi(v)\varphi^*(v)$ aplicando el lema (3.6.2) se tiene que $\delta_1([u]_1) = [p]_\circ - [q]_\circ = [1_n - v^*v]_\circ - [1_n - vv^*]_\circ$.

2. Aquí se tiene

$$\psi(1_n - v^*v) = 1_m - \psi^*(v)\psi(v) = 1_m - u^*u = 1_m - 1_m = 0$$

entonces $1_n - v^*v \in Ker(\psi) = Im(i) = M_n(I)$ luego se tiene que $\delta_1([u]_1) = [p]_\circ - [q]_\circ = [1_n - v^*v]_\circ - [1_n - vv^*]_\circ$. ■

4.4. Sucesión exacta de K-grupos

Mostraremos que cada sucesión exacta corta de C^*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

induce una sucesión exacta cíclica de K-grupos.

$$\begin{tikzcd}
K_\circ(I) \arrow[r, "K_\circ(\varphi)"] & K_\circ(A) \arrow[r, "K_\circ(\psi)"] & K_\circ(B) \arrow[d, dotted] \\
K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\psi)"'] & K_1(I) \arrow[l, "K_1(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3: Exactitud de K-grupos.

Con la aplicación índice $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_\circ(I)$ siendo la conección entre K_1 y $K_\circ$. Por facilidad de notación (y sin pérdida de generalidad), asumimos en los

dos lemas siguientes que I es un ideal en A y que $\varphi : I \longrightarrow A$ es la aplicación inclusión. En este caso $M_n(\widetilde{I})$ es subálgebra de $M_n(\widetilde{A})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 4.4.1 El núcleo de la aplicación índice $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_\circ(I)$ está contenido en la imagen de $K_1(\psi) : K_1(A) \longrightarrow K_1(B)$ esto es $Ker(\delta_1) \subseteq Im(K_1(\psi))$.

Prueba. Sea $g \in Ker(\delta_1)$ tomemos $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B}) = \mathcal{U}(M_n(\widetilde{B}))$ tal que $g = [u]_1$, entonces

$$\begin{aligned}\delta_1([u]_1) &= [p]_\circ - [q]_\circ \\ &= [1_{2n} - w_1^* w_1]_\circ - [1_{2n} - w_1 w_1^*]_\circ \text{ en } K_\circ(I) \\ &= 0; \text{ pues } g = [u]_1 \in Ker(\delta_1)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\delta_1([u]_1) = 0 \tag{4.4}$$

De (4.4) $[1_{2n} - w_1^* w_1]_\circ = [1_{2n} - w_1 w_1^*]_\circ$ si y sólo si $(1_{2n} - w_1^* w_1) \sim_s (1_{2n} - w_1 w_1^*)$ si y sólo si $(1_{2n} - w_1^* w_1) \oplus 1_k \sim_\circ (1_{2n} - w_1 w_1^*) \oplus 1_k$, para algún $k \in \mathbb{N}$ si y sólo si existe $w_2 \in M_m(\widetilde{I})$, donde $m = 2n + k$ tal que

$$(1_{2n} - w_1^* w_1) \oplus 1_k = w_2^* w_2$$

$$(1_{2n} - w_1 w_1^*) \oplus 1_k = w_2 w_2^*$$

Ahora

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(w_2^* w_2) &= \widetilde{\psi}\left(\begin{bmatrix} 1_{2n} - w_1^* w_1 & 0 \\ 0 & 1_k \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & 1_{m-n} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

es decir $\widetilde{\psi}(w_2^* w_2) = \widetilde{\psi}(w_2 w_2^*) = \begin{bmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & 1_{m-n} \end{bmatrix}$ y $\widetilde{\psi}(w_2)$ es una matriz escalar pues w_2 está en $M_n(\widetilde{I})$ esto muestra que $\widetilde{\psi}(w_2) = diag(0_n, z)$; para alguna matriz escalar unitaria $z \in M_{m-n}(\widetilde{B})$. Teniendo espectro finito, z es homotópico a 1_{m-n} en $M_{m-n}(\widetilde{B})$.

Poniendo $v = diag(w_1, 0_k) + w_2$ entonces v es un elemento unitario en $M_m(\widetilde{A})$, y

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(v) &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix} + \widetilde{\psi}(w_2) \\
&= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix} + diag(0_n, z) \\
&= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_{m-n} \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{U}_m(\widetilde{B})
\end{aligned}$$

Como $g = [u]_1 = [\psi(v)]_1 = K_1(\widetilde{\psi})([u]_1)$ entonces $g \in Im(K_1(\widetilde{\psi}))$.

Por lo tanto $Ker(\delta_1) \subset Im(K_1(\widetilde{\psi}))$

Lema 4.4.2 El núcleo de la aplicación $K_\circ(\varphi) : K_\circ(I) \longrightarrow K_\circ(A)$ está contenido en la imagen de la aplicación índice $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_\circ(I)$.

Prueba. Sea $g \in Ker(K_\circ(\varphi))$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(M_n(\widetilde{I})) = \mathcal{P}_n(\widetilde{I})$ y $w \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{A}))$ tal que

$$g = [p]_\circ - [S(p)]_\circ \quad , \quad w\widetilde{\varphi}(p)w^* = S(\widetilde{\varphi}(p)) \quad \text{y} \quad wpw^* = S(p)$$

El elemento $u_\circ = \widetilde{\psi}\,[w(1_n - p)]$ es una isometría parcial en $M_n(\widetilde{B})$ y $1_n - u_\circ^* u_\circ = \widetilde{\psi}(p) = \widetilde{\psi}(S(p)) = 1_n - u_\circ u_\circ^*$

Afirmación: $u_\circ$ es isometría parcial, es decir, $u_\circ^* u_\circ$ es una proyección

En efecto.

- $(u_\circ^* u_\circ)^* = u_\circ^* u_\circ^{**} = u_\circ^* u_\circ$

- $u_\circ^* u_\circ^2 = u_\circ^* u_\circ$

De otro lado

$$\begin{aligned}
1_n - u_\circ^* u_\circ &= 1_n - \widetilde{\psi}\,[w^*(1_n - p^*)(w(1_n - p))] \\
&= 1_n - \widetilde{\psi}\,[(w^* - w^*p)(w - wp)] \\
&= 1_n - 1_n + \widetilde{\psi}(p) - \widetilde{\psi}(S(p)p - S(p)) \\
&= \widetilde{\psi}(p) - \left[\widetilde{\psi}(p)\widetilde{\psi}(p) - \widetilde{\psi}(p)\right] \\
&= \widetilde{\psi}(p) - \left[\widetilde{\psi}(p^2) - \widetilde{\psi}(p)\right] \\
&= \widetilde{\psi}(p)
\end{aligned}$$

entonces $1_n - u_\circ^* u_\circ = \widetilde{\psi}(p)$, análogamente $1_n - u_\circ u_\circ^* = \widetilde{\psi}(p)$ luego

$$1_n - u_\circ^* u_\circ = \widetilde{\psi}(p) = \widetilde{\psi}(S(p)) = 1_n - u_\circ u_\circ^*. \tag{4.5}$$

Por lo tanto $u_\circ$ es unitario parcial.

De (4.5) se tendría que $u_\circ$ es un unitario parcial y también que el elemento $u = u_\circ + (1_n - u_\circ^* u_\circ)$ es un elemento unitario.

En efecto. $uu^* = u^*u$ pues

- $uu^* = (u_\circ + (1_n - u_\circ^* u_\circ))(u_\circ^* + (1_n - u_\circ^* u_\circ)) = 1_n$
- $u^*u = (u_\circ^* + (1_n - u_\circ^* u_\circ))(u_\circ + (1_n - u_\circ^* u_\circ)) = 1_n$

Deseamos levantar $diag(u, 0_n)$ a una isometría parcial apropiada v en $M_{2n}(\widetilde{A})$:

Un primer paso en esta dirección se observa que la isometría parcial $V_1 = diag(w(1_n - p), S(p))$ en $M_{2n}(\widetilde{A})$ satisface $\widetilde{\psi}(V_1) = diag(u_\circ, S(p))$.

Veamos primero que $V_1 = diag(w(1_n - p), S(p))$ es una isometría parcial en $M_{2n}(\widetilde{A})$ i.e. $V_1^* V_1 = X$ proyección.

En efecto.

$$X = V_1^* V_1 = \begin{pmatrix} w(1_n - p) & 0 \\ 0 & s(p) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} w(1_n - p) & 0 \\ 0 & s(p) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1_n - p)(1_n - p) & 0 \\ 0 & s(p) \end{pmatrix}$$

De aquí se sigue $X^* = X$ y $X^2 = X$

Ahora veamos $\widetilde{\psi}(V_1) = diag(u_\circ, s(p))$:

$$\widetilde{\psi}(V_1) = \widetilde{\psi}\begin{pmatrix} w(1_n - p) & 0 \\ 0 & s(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\circ & 0 \\ 0 & \widetilde{\psi}(p) \end{pmatrix} = diag(u_\circ, \widetilde{\psi}(p))$$

Sea $z \in M_{2n}(\mathbb{C})$ una matriz unitaria autoadjunta dada por

$$z = \begin{pmatrix} 1_n - s(p) & s(p) \\ s(p) & 1_n - s(p) \end{pmatrix}$$

pues se verifica que: $z^* = z, \; zz^* = z^*z = 1$

Pongamos $V = zV_1z^*$ entonces

$$\widetilde{\psi}(V) = \widetilde{\psi}(z)\widetilde{\psi}(V_1)\widetilde{\psi}(z^*) = z\begin{pmatrix} u_\circ & 0 \\ 0 & s(p) \end{pmatrix} z^*$$

$$= \begin{pmatrix} u_\circ - u_\circ s(p) - s(p)u_\circ + s(p)u_\circ s(p) + s(p) & u_\circ s(p) - s(p)u_\circ s(p) \\ s(p)u_\circ - s(p)u_\circ s(p) & s(p)u_\circ s(p) \end{pmatrix}$$

Entonces $\widetilde{\psi}(V) = z\widetilde{\psi}(V_1)z^* = z\begin{pmatrix} u_\circ & 0 \\ 0 & s(p) \end{pmatrix} z^* = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix}$ luego se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_1([u]_1) &= [1_{2n} - v^*v]_\circ - [1_{2n} - vv^*]_\circ \\ &= [1_{2n} - v_1^*v_1]_\circ - [1_{2n} - v_1v_1^*]_\circ \text{ pues } v \sim_u v_1 \\ &= \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_\circ - \left[\begin{pmatrix} s(p) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_\circ \\ &= [p]_\circ - [s(p)]_\circ = g \end{aligned}$$

entonces $g \in Im(\delta_1)$.

Por lo tanto $Ker(K_\circ(\varphi)) \subset Im(\delta_1)$. ∎

Proposición 4.4.1 Cada sucesión exacta corta

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

de C^*-álgebras induce una sucesión exacta de K-grupos.

$$\begin{array}{ccccc} K_1(I) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(A) & \xrightarrow{K_1(\psi)} & K_1(B) \\ & & & & \Big\downarrow \delta_1 \\ K_\circ(B) & \xleftarrow[K_\circ(\psi)]{} & K_\circ(A) & \xleftarrow[K_\circ(\varphi)]{} & K_\circ(I) \end{array}$$

Figura 4.4: Sucesión inducida de K_1.

donde δ_1 es la aplicación índice

Prueba. Como $O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$ es exacta corta entonces, en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} K_1(I) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(A) & \xrightarrow{K_1(\psi)} & K_1(B) \\ & & & & \Big\downarrow \delta_1 \\ K_\circ(B) & \xleftarrow[K_\circ(\psi)]{} & K_\circ(A) & \xleftarrow[K_\circ(\varphi)]{} & K_\circ(I) \end{array}$$

se tiene exactitud en $K_1(A)$ y $K_\circ(A)$ y por la proposición (4.1.1) se tiene semiexactitud en $K_1(B)$ y $K_\circ(I)$ es decir $Im(K_1(\psi)) \subseteq Ker(\delta_1)$ y $Im(\delta_1) \subseteq Ker(K_\circ(\varphi))$. De otro lado por los lemas (4.4.1) y (4.4.2) se tiene que $Ker(\delta_1) \subseteq Im(K_1(\psi))$ y $Ker(K_\circ(\varphi)) \subseteq Im(\delta_1)$ respectivamente y de esta manera el resultado. ∎

4.5. El isomorfismo entre $K_1(A)$ y $K_\circ(SA)$

Recordando la definición de cono y suspensión de un C^*-algebra A.

$$CA = \{f \in \mathcal{C}([0,1], A) : \; f(0) = 0\}$$

$$SA = \{f \in \mathcal{C}([0,1], A) : \; f(0) = f(1) = 0\}$$

Se tiene la sucesión exacta corta $O \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow O$ donde i es la inclusión y $\pi(f) = f(1)$.

Proposición 4.5.1 El cono CA es homotópicamente equivalente al C^*-algebra cero 0 es decir $CA \cong 0$.

Demostración. Definamos $\varphi_t : CA \longrightarrow CA$ por $\varphi_t(f)(s) = f(st)$, para $f \in CA$; $s, t \in [0,1]$, y la aplicación $\varphi : [0,1] \longrightarrow CA$ definida por $\varphi(t) = \varphi_t(f)$ es continua para cada $f \in CA$. Tenemos $\varphi_\circ(f)(s) = f(0\,s) = f(0) = 0$ entonces $\varphi_\circ$ es constante y $\varphi_1(f)(s) = f(1\,s) = f(s)$ entonces $\varphi_1(f) = f = 1_{CA}(f)$ osea φ_1 es la identidad. ∎

Teorema 4.5.1 $K_\circ(CA) = 0$

Demostración. Resulta directamente de la invarianza homotópica y de la proposición inmediata anterior.

Para cada *-homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ entre C^*-álgebras A y B el *-homomorfismo $S\varphi : SA \longrightarrow SB$ esta dado por $[S\varphi(f)](t) = (\varphi\, f)(t),\ t \in [0,1]$.

Proposición 4.5.2 S es un funtor covariante entre categorías de C^*-álgebras. Además S aplica el objeto cero en objetos cero.

Demostración. Es obtenida directamente de la definición de "S".

Proposición 4.5.3 Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea A un C^*-álgebra. Para $f \in \mathcal{C}_\circ(X)$ y $a \in A$, denótese f_a un elemento en $\mathcal{C}_\circ(X, A)$ dado por $(f_a)(x) = f(x)a$. Entonces el conjunto

$$span\,\{f_a :\ f \in \mathcal{C}_\circ(X),\ a \in A\}$$

es denso en $\mathcal{C}_\circ(X, A)$

Demostración. Ver [2] página 13

Proposición 4.5.4 El funtor S es exacto

Demostración. Consideremos la sucesión exacta de C^*-álgebra

$$O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$$

entonces se tiene que φ es inyectiva y ψ suryectiva; ahora probaremos que la sucesión

$$O \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow O$$

es exacta.

Bastará ver que $S\varphi$ es inyectiva y $S\psi$ sobre.

Sean $f, g \in SI$ tal que $S\varphi(f) = S\varphi(g)$ si y sólo si $[S\varphi(f)](t) = [S\varphi(g)](t),\ \forall\, t \in [0,1]$ luego se tiene que $(\varphi\, f)(t) = (\varphi\, g)(t)$ si y sólo si $\varphi(f(t)) = \varphi(g(t))$ entonces $f(t) = g(t),\ \forall\, t$ luego $f = g$, por tanto $S\varphi$ inyectiva.

Ahora veamos que $S\psi$ es suryectiva. De la proposición (4.5.3) se tiene que el conjunto *span* $\{f_b :\ b \in B,\ f \in \mathcal{C}_\circ(\langle 0,1\rangle)\}$ es un subconjunto denso de SB y cada elemento en este conjunto denso pertenece a $Im(S\psi)$ puesto que $S\psi(af) = \psi(a)f$ para cada $a \in A$ y cada $f \in \mathcal{C}_\circ(\langle 0,1\rangle)$ de esta manera $S\psi$ es suryectiva. ∎

Teorema 4.5.2 ***(Isomorfismo entre*** $K_1(A)$ ***y*** $K_\circ(SA)$***).***

Los grupos $K_1(A)$ y $K_\circ(SA)$ son isomorfos para cada C^*-álgebra A. Además, existe una colección de isomorfismos $\tau_A : K_1(A) \longrightarrow K_\circ(SA)$ uno para cada C^*-álgebra A, tal que para cada par de C^*-álgebras A y B, cada *-homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_1(A) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] \arrow[d, "\tau_A"'] & K_1(B) \arrow[d, "\tau_B"] \\
K_\circ(SA) \arrow[r, "K_\circ(S\varphi)"] & K_\circ(SB)
\end{tikzcd}$$

Figura 4.5: Isomorfismo entre $K_1(A)$ y $K_0(SA)$.

es conmutativo.

Demostración. Tenemos la sucesión exacta corta $O \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow O$ donde CA es el cono de A y es homotópicamente a 0 es decir $CA \cong 0$ en

particular $K_\circ(CA) = 0 = K_1(CA)$, de aqui se sigue que la aplicación índice δ_1 : $K_1(A) \longrightarrow K_\circ(SA)$ asociada a la sucesión $O \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow O$ es un isomorfismo. Para lo cual basta recordar el resultado siguiente:
Para cada sucesión exacta corta $O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$ de C^*-álgebras, la aplicación índice δ_1 hace que la sucesión de K-grupos

$$\begin{tikzcd}
K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_\circ(B) & K_\circ(A) \arrow[l, "K_\circ(\psi)"] & K_\circ(I) \arrow[l, "K_\circ(\varphi)"]
\end{tikzcd}$$

sea exacta.
Es decir se tendría la exactitud siguiente.

$$\begin{tikzcd}
K_1(SA) \arrow[r, "K_1(i)"] & K_1(CA) \arrow[r, "K_1(\pi)"] & K_1(A) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_\circ(A) & K_\circ(CA) \arrow[l, "K_\circ(\pi)"] & K_\circ(SA) \arrow[l, "K_\circ(i)"]
\end{tikzcd}$$

y como $K_1(CA) = 0 = K_\circ(CA)$ entonces se tiene que

$$O \longrightarrow K_1(A) \xrightarrow{\delta_1} K_\circ(SA) \longrightarrow O$$

es exacto por ende δ_1 es un isomorfismo.
Nota: pongamos $\tau_A = \delta_1$

Observación 4.5.1 La descripción de τ_A de manera explícita lo haremos bajo las siguientes identificaciones:

1. Una función $f \in \mathcal{C}([0,1], M_{2n}(\widetilde{A}))$ se encuentra en $M_{2n}(\widetilde{CA})$ si y sólo si $S(f(t)) = f(0)$, para cada $t \in [0,1]$.

2. Una función $f \in \mathcal{C}([0,1], M_{2n}(\widetilde{A}))$ se encuentra en $M_{2n}(\widetilde{SA})$ si y sólo si $S(f(t)) = f(0) = f(1)$, para cada $t \in [0,1]$.

3. En la sucesión $O \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow O$ la aplicación π verifica que $\widetilde{\pi}(f) = f(1)$ para $f \in M_{2n}(\widetilde{CA})$.

   Con las identificaciones anteriores, $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{CA})$ y $\widetilde{\pi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$,

   $p = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{SA})$ por definición de la aplicación índice

$$\tau_A([u]_1) = \delta_1([u]_1) = [p]_\circ - [S(p)]_\circ$$

Definición 4.5.1 Para cada entero $n \geq 2$, el funtor $K_n : \mathcal{C}_{C^*} \longrightarrow \mathcal{C}_{C^*}$ es definido por $K_n = K_{n-1}\ S$

Proposición 4.5.5 Para cada entero $n \geq 2$, K_n es un funtor semi exacto de la categoría de C^*-álgebras a la categoría de grupos abelianos.

Prueba. La suspensión $S : \mathcal{C}_{C^*} \longrightarrow \mathcal{C}_{C^*}$ es un funtor, más aún es covariante, $K_1 : \mathcal{C}_{C^*} \longrightarrow \mathcal{G}abel$ es un funtor y como la composición de dos funtores es un funtor, obtenemos por inducción que K_n es un funtor para cada $n \geq 2$, la semiexactitud de K_n se sigue de la semi exactitud de K_{n-1} combinando con la exactitud de S y así se tiene el resultado. ■

Observación 4.5.2 La n-ésima suspensión iterada de un C^*-álgebra A es denotada por S^nA, esto es inductivamente definido por $S^nA = S(S^{n-1}A)$.
Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo, entonces tenemos un *-homomorfismo $S^n\varphi : S^nA \longrightarrow S^nB$, inductivamente definido por $S^n\varphi = S(S^{n-1}\varphi)$

Los K-grupos de orden superior son dados por $K_n(A) = K_1(S^{n-1}A) \cong K_\circ(S^nA)$ y $K_n(\varphi) = K_1(S^{n-1}\varphi)$, para cada entero $n \geq 2$, convencionalmente, optaremos por escribir: $S^\circ A = A$ y $S^\circ\varphi = \varphi$

4.6. La aplicación índice superior

Sea $O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$ una sucesión exacta corta de C^*-álgebras. Para $n \geq 1$ definimos inductivamente la aplicación índice $\delta_{n+1} : K_{n+1}(B) \longrightarrow K_n(I)$ del modo siguiente:
Como S es un funtor exacto, tenemos la sucesión exacta.

$$O \longrightarrow S^n I \xrightarrow{S^n\varphi} S^n A \xrightarrow{S^n\psi} S^n B \longrightarrow O$$

por el teorema (4.5.2) se tiene el isomorfismo

$$\tau_{S^{n-1}I} : K_1(S^{n-1}I) \longrightarrow K_\circ(S^n I)$$

De aqui existe un único homomorfismo de grupos δ_{n+1} haciendo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_{n+1}(B) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & K_n(I) \\ \| & & \downarrow \tau_{S^{n-1}I} \\ K_1(S^n B) & \xrightarrow[\bar{\delta}_1]{} & K_\circ(S^n I) \end{array}$$

Figura 4.6: Aplicación índice superior "δ_{n+1}".

conmutativo, donde $\bar{\delta}_1$ es la aplicación índice asociada a la sucesión exacta corta

$$O \longrightarrow S^n I \longrightarrow S^n A \longrightarrow S^n B \longrightarrow O$$

Así la aplicación índice superior queda definido como $\delta_n = \tau^{-1}_{S^{n-1}I}\bar{\delta}_1$

Proposición 4.6.1 ***(Sucesión exacta larga en K-teoría).***
Cada sucesión exacta corta de C^*-algebras $O \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow O$ induce una sucesión exacta larga de K-grupos
.... $\xrightarrow{K_{n+1}} K_{n+1}(B) \xrightarrow{\delta_{n+1}} K_n(I) \xrightarrow{K_n(\varphi)} K_n(A) \xrightarrow{K_n(\psi)} K_n(B) \xrightarrow{\delta_n} K_{n-1}(I) \longrightarrow$ ......$K_1(B) \xrightarrow{\delta_1} K_\circ(I) \xrightarrow{K_\circ(\varphi)} K_\circ(A) \xrightarrow{K_\circ(\psi)} K_\circ(B)$ donde $\overline{\partial}_1$ es la aplicación índice, para $n \geq 2$.

Prueba. Ver [10] página 178

Proposición 4.6.2 ***(Invarianza homotópica de K_n).***

1. Si $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ son *-homomorfismos homotópicos entonces $K_n(\varphi) = K_n(\psi)$.

2. Si A y B son equivalentes homotópicamente, entonces $K_n(A) \cong K_n(B)$; más específicamente:
   Si $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$ es una homotopía entonces $K_n(\varphi)$ y $K_n(\psi)$ son isomorfismos y uno es inverso del otro.

Demostración Aplicando inducción e invarianza homotópica de K_0 y K_1

4.7. Teorema de periocidad de Bott

El teorema de periodicidad establece, $K_{n+2}(A) \cong K_n(A)$ para todo entero n no negativo.
Para dar la definición de la aplicación de Bott usaremos el siguiente cuadro de la suspensión SA de un C^*-álgebra A:

$$SA = \{f \in \mathcal{C}(T, A) : \ f(1) = 0\} \ \text{donde} \ T = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\},$$

Primero consideremos una C^*-álgebra unitaria A para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $p \in \mathcal{P}_n(A)$, definamos la proyección lazo $f_p : T \longrightarrow \mathcal{U}_n(A)$ por

$$f_p(z) = zp + (1_n - p), \ z \in T$$

pues claramente $f_p(z)f_p^*(z) = f_p^*(z)f_p(z) = 1$ asi $f_p(z) \in \mathcal{U}_n(A)$. Ahora identificando $M_n(\widetilde{SA}) \equiv \{f \in \mathcal{C}(T, M_n(A)) : \ f(1) \in M_n(\mathbb{C}1_A)\}$ obtenemos que $f_p \in \mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$, pues basta considerar $g_p(z) = p + (z1_n - zp)$ claramente $f_p\, g_p = 1 = g_p\, f_p$.

Observación 4.7.1 La aplicación proyección lazo cumple las siguientes igualdades

1. $f_\circ = 1$

2. $f_{p\oplus q} = f_p \oplus f_q,\ \forall\, p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$

3. Si $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ tal que $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}_n(A)$ entonces $f_p \sim_h f_q$ en $\mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$

En efecto.

1.- $f_\circ(z) = z\,0 + 1_n - 0 = 1_n$.

2.-
$$\begin{aligned}[][f_p \oplus f_q]\,(z) &= \begin{pmatrix} f_p(z) & 0 \\ 0 & f_q(z) \end{pmatrix} \\ &= z(p \oplus q) + 1_{n+n} - (p \oplus q) \\ &= f_{p\oplus q}(z)\end{aligned}$$

Entonces $f_{p\oplus q} = f_p \oplus f_q$.

3.- Para esto basta recordar que $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}_n(A)$ si y sólo si existe una aplicación continua $v : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(M_n(A))$ tal que $v(0) = p$ y $v(1) = q$ ó simplemente $v_\circ = p$ y $v_1 = q$ de aquí $zp + (1_n - p) \sim_h zq + (1_n - q)$, por lo tanto $f_p \sim_h f_q$, luego obtenemos un homomorfismo de grupos $\beta_A : K_\circ(A) \longrightarrow K_1(SA)$ tal que $\beta_A([p]_\circ) = [f_p]_1$ para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$; La aplicación β_A es llamada la aplicación de Bott. ■

Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo unitario, entonces $S\widetilde{\varphi}(f_p)(z) = \varphi(f_p(z)) = f_{\varphi(p)}(z)$, $z \in T$ puesto que $\widetilde{S\varphi}(f_p)(z) = \varphi(f(z))$ para cada $f \in M_n(\widetilde{SA})$ de aquí se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} K_\circ(A) \arrow[r, "K_\circ(\varphi)"] \arrow[d, "\beta_A"'] & K_\circ(B) \arrow[d, "\beta_B"] \\ K_1(SA) \arrow[r, "K_1(S\varphi)"'] & K_1(SB) \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Figura 4.7: Conmutatividad de la aplicación de Bott.

En efecto.

$$K_1(S\varphi)\ \beta_A([p]_\circ) = K_1(S\varphi)([f_p]_1) = [S\varphi(f_p)]_1 = [\varphi\, f_p]_1 = [f_{\varphi(p)}]_1$$

$$\beta_B\ K_\circ(\varphi)([p]_\circ) = \beta_B([\varphi(p)]_\circ) = [f_{\varphi(p)}]_1$$

Luego $K_1(S\varphi)\ \beta_A = \beta_B\ K_\circ(\varphi)$. $\blacksquare$

Teorema 4.7.1 ***(Periodicidad de Bott).***
La aplicación de Bott $\beta_A : K_\circ(A) \longrightarrow K_1(SA)$ es un isomorfismo para cada C^*-álgebra A.

Previamente a la prueba daremos algunas notaciones y lemas.
Sea A un C^*-álgebra con identidad (Si no tiene identidad se utiliza $\tilde{A}$). Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos los siguientes conjuntos.

$$Inv_\circ(n) = \mathcal{C}(T, GL_\circ\,[M_n(A)])$$

$$Trig(n) = \left\{ f \in Inv_\circ(n) :\ f(z) = \sum_{k=-m}^{k=m} a_k z^k,\ m \in \mathbb{N},\ a_k \in M_n(A) \right\}$$

$$Pol(n,m) = \left\{ f \in Inv_\circ(n) :\ f(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k,\ a_k \in M_n(A),\ m \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$$Pol(n) = \bigcup_{m=0}^{\infty} Pol(n,m)$$

$$Lin(n) = Pol(n,1)$$

$$Proj(n) = \{f_p :\ p \in \mathcal{P}_n(A)\}$$

Observación 4.7.2 Si $f : T \longrightarrow M_n(A)$ es continua tal que $f(z)$ es inversible $\forall\, z \in \mathbb{C}$ y $f(1) \sim_h 1_n$ entonces $f \in Inv_\circ(n)$, puesto que automáticamente $f(z) \in GL_\circ(M_n(A))\ \forall\, z \in T$.

Nota: Claramente se tiene $Proj(n) \subseteq \mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$ pues la proyección lazo $f_p \in \mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$. De esta inclusión y de las definiciones y notaciones conjuntistas antes dadas se tiene.

$$Proj(n) \subseteq \mathcal{U}_n(\widetilde{SA}) \subseteq GL_n(\widetilde{SA}) \subseteq Inv_\circ(n)$$

$$Proj(n) \subseteq Lin(n) \subseteq Pol(n) \subseteq Trig(n) \subseteq Inv_\circ(n)$$

Definición 4.7.1 Sea Y un espacio topológico $X \subseteq Y$ un subespacio, y sea $\sim_h$ la relación en X e Y dado por:

$$a \sim_h b \Leftrightarrow \text{existe } v : [0,1] \longrightarrow Y \text{ tal que } v(0) = a \text{ y } v(1) = b$$

entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\frac{X}{\sim_h} \arrow[r, "\hat{i}"'] & \frac{Y}{\sim_h}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.8: π_0-equivalencia.

Diremos que la aplicación i es una $\pi_\circ$ equivalencia si $\hat{i}$ es biyectiva.

Nota: Nosotros trabajaremos con espacios localmente conexos por caminos, de este modo para el espacio Y y el subespacio $X \subseteq Y$, una aplicación $i : X \longrightarrow Y$ es una $\pi_\circ$ equivalencia si y sólo si induce una biyección $\pi_\circ(X) \longrightarrow \pi_\circ(Y)$.

La inclusión $i : X \longrightarrow Y$ es una $\pi_\circ$ equivalencia si y solamente si:

1. Para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $x \sim_h y$ en Y.

2. Si $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \sim_h x_2$ en Y, entonces $x_1 \sim_h x_2$ en X.

Si ocurre que $Proj(n) \subseteq \mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$ fuera una $\pi_\circ$ equivalencia, entonces $\pi_\circ(Proj(n)) \longrightarrow \pi_\circ(\mathcal{U}(\widetilde{SA}))$ es una biyección y por lo tanto $\beta_A : K_\circ(A) \longrightarrow K_1(SA)$ es un isomorfismo y asi se tiene el teorema de periodicidad de Bott. $\blacksquare$

Lema 4.7.1 Sea $n \in \mathbb{N}$

1. Para cada $f \in Inv_\circ(n)$, existe una función $g \in GL_n(\widetilde{SA})$ tal que $f \sim_h g$ en $Inv_\circ(n)$.

2. Si f, g son funciones en $GL_n(\widetilde{SA})$ con $f \sim_h g$ en $Inv_\circ(n)$ entonces $f \sim_h g$ en $GL_n(\widetilde{SA})$.

Prueba.

1.- Tomemos un camino continuo $v : [0,1] \longrightarrow GL_n(A)$ tal que $\varphi(t) = a_t$ desde $\varphi(0) = a_\circ = 1$ hasta $\varphi(1) = a_1 = f(1)$; puesto que $f(1) \sim_h 1$ ahora pongamos $g_t(z) = a_t^{-1},\ z \in T,\ t \in [0,1]$ la aplicación $\psi : [0,1] \longrightarrow Inv_\circ(n)$ tal que $\psi(t) = g_t$ es continua además $g_1(1) = a_1^{-1} f(1) = f^{-1}(1) f(1) = 1$ entonces $g_1 = 1$ y

$$g_\circ(z) = a_\circ^{-1} f(z) = f(z) \text{ entonces } g_\circ = f$$

luego $1 \sim_h f$ es decir $f = g_\circ \sim_h g_1$ en $Inv_\circ(n)$ y mas aún $g_1 \in GL_n(\widetilde{SA})$.

2.- Como $f(1)$ y $g(1)$ estan en grupo conexo $GL_n(\mathbb{C})$, existe un camino continuo $\varepsilon : [0,1] \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ tal que $\varepsilon(t) = a_t$ desde $a_\circ = f(1)$ hasta $a_1 = g(1)$ y asi podemos obtener un camino continuo $\alpha : [0,1] \longrightarrow Inv_\circ(n)$ como $\alpha(t) = f_t$ desde $f_\circ = f$ hasta $f_1 = g$. Ahora pongamos $g_t(z) = a_t f_t^{-1}(1) f_t(z) \in GL_n(A),\ z \in T,\ t \in [0,1]$ puesto que $g_t = a_t \in M_n(\mathbb{C})$, vemos que $g_t \in GL_n(\widetilde{SA})$ para cada $t \in [0,1]$.

Además $\lambda : [0,1] \longrightarrow GL_n(\widetilde{SA})$ tal que $\lambda(t) = g_t$ es continuo, de aqui $f = g_\circ \sim_h g_1 = g$ en $GL_n(\widetilde{SA})$.

Lema 4.7.2

1. El conjunto $Trig(n)$ es denso en $Inv_\circ(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ para cada función $f \in Inv_\circ(n)$ existen; $k \in \mathbb{N}$ y una función $g \in Pol(n)$ tal que $z^k f \sim_h g$ en $Inv_\circ(n)$.

3. Si $f, g \in Proj(n)$ con $f \sim_h g$ en $Inv_\circ(n)$ entonces existen $k, m \in \mathbb{N}$ tal que $z^k f \sim_h z^k g$ en $Pol(n,m)$

Prueba. Ver [10] página 189

Lema 4.7.3 ***(Linealización de Higman's).***

Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ existe una aplicación continua

$$\mu_{n,m} : Pol(n,m) \longrightarrow Lin((m+1)n)$$

satisfaciendo $f \oplus 1_{mn} \sim_h \mu_{n,m}(f)$ en $Pol((m+1)n)$ para cada $f \in Pol(n,m)$.
Si $f \in Proj(n)$ donde $Proj(n) \subseteq Pol(n,m)$, entonces $f \oplus 1_{mn} \sim_h \mu_{n,m}(f)$ en $Lin((m+1)n)$.

Prueba. Ver [10] página 190

Definición 4.7.2 Sea B un C^*-álgebra, $e \in B$ es idempotente si $e^2 = e$.
Escribamos: $I(B) = \{e \in B : \ e^2 = e\}$

Lema 4.7.4 Sea B un C^*-álgebra.

1. Para cada $e \in I(B),\ \rho(e) = ee^* \left[1_{\widetilde{B}} + (e-e^*)(e^*-e)\right]^{-1}$ define una proyección en B.

2. La aplicación $\rho : I(B) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ definida en (1) es continua, $\rho(p) = p$ para cada proyección $p \in B$, y $\rho(e) \sim_h e$ en $I(B)$ para cada $e \in I(B)$.

3. Si $p, q \in \mathcal{P}(B)$ con $p \sim_h q$ en $I(B)$, entonces $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}(B)$.

Prueba. Se sigue directamente de la definición 4.7.2
Denotemos los conjuntos

- $\Pi^+ = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \ Re(\alpha) > \frac{1}{2}\right\}$
- $\Pi^- = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \ Re(\alpha) < \frac{1}{2}\right\}$
- $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$

Un elemento a en un C^*-álgebra B es idempotente generalizado si $S_p(a) \subset \Pi$.

Observación 4.7.3 Es inmediato ver que cada elemento idempotente $e \in B,\ \sigma_B(e) \subset \{0,1\}$ y asi $\sigma_B(e) \subset \Pi$.

También denotemos:

$$GI(B) = \{a \in B : \ a \,\text{es idempotente generalizado}\}$$

$$GI_n(B) = GI(M_n(B)),\ n \in \mathbb{N}$$

Lema 4.7.5 Sea B un C^*-álgebra con identidad, y definamos una función holomorfica $h : \Pi \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$h(z) = \begin{cases} 0\,, & z \in \Pi^- \\ 1\,, & z \in \Pi^+ \end{cases}$$

Entonces

1. $h(a)$ es idempotente para cada idempotente generalizado $a \in B$.

2. $h(e) = e$ para cada idempotente $e \in B$.

3. $h(a) \sim_h a$ en $GI(B)$ para cada idempotente generalizado $a \in B$.

4. Si $e \sim_h f$ en $GI(B)$ con $e^2 = e$ y $f^2 = f$ en B, entonces $e \sim_h f$ en $I(B)$.

Prueba. Ver [10] página 194

Corolario 4.7.2

1. Para cada $a \in GI_n(A)$ existe $p \in \mathcal{P}_n(A)$ tal que $a \sim_h p$ en $GI_n(A)$.

2. Si $p \sim_h q$ en $GI_n(A)$, con $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$, entonces $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}_n(A)$.

Prueba. Para probar esto basta observar la inclusión $GI_n(A) \subseteq \mathcal{P}_n(A)$ la cual es una $\pi_\circ$ equivalencia. ■

Observación 4.7.4 Recordar que $f_a \in Lin(n)$ si y sólo si $f_a(z) = az + (1_n - a)$ es invertible $\forall\, z \in T$ y $f(1) \sim_h 1_n$ en $GL_n(A)$

Lema 4.7.6 Para cada $a \in M_n(A)$ son equivalentes:

1. $f_a \in Lin(n)$ donde $f_a : T \longrightarrow M_n(A)$ tal que $f_a(z) = az + (1_n - a)$.

2. $f_a(z) \in GL_n(A)$ para cada $z \in T - \{1\}$.

3. $a \in GL_n(A)$.

Prueba. Claramente (1)$\Rightarrow$(2) y (2)$\Rightarrow$(1).

Para ver que (2) y (3) son equivalentes note que

$$f_a(z) = (z-1)a + 1_n = (z-1)(a - (1-z)^{-1}1_n), \; z \in T - \{1\}$$

donde 1_n denota la identidad de $M_n(A)$, y

$$\left\{(1-z)^{-1} : \; z \in T - \{1\}\right\} = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \; Re(\alpha) = \frac{1}{2}\right\}$$

En consecuencia, (2) es verdad si sólo si $(a - \alpha 1_n)$ es invertible para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ con $Re(\alpha) = \frac{1}{2}$ y esto es equivalente a (3) es decir $a \in GL_n(A)$. $\blacksquare$

Lema 4.7.7 Sea $n \in \mathbb{N}$

1. Para cada $f \in Lin(n)$ existe $p \in \mathcal{P}_n(A)$ tal que $f \sim_h f_p$ en $Lin(n)$.

2. Si $f_p \sim_h f_q$ en $Lin(n)$, $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$, entonces $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}_n(A)$.

Prueba.

1. $f_a = f \in Lin(n)$ entonces $f(1) \sim 1_n$ en $GL_n(A)$ y $f(1)$ es invertible en $M_n(A)$. Ahora pongamos $g(z) = f(1)^{-1} f(z)$ entonces $g \in Lin(n)$ y $f \sim_h g$ en $Lin(n)$, además $g(1) = 1_n$ y asi $g = f_a$ para algún $a \in GL_n(A)$.
   Por consecuencia (1) existe $p \in \mathcal{P}_n(A)$ tal que $a \sim_h p$ en $GL_n(A)$.
   Luego $f \sim_h g = f_a \sim_h f_p$ en $Lin(n)$.

2. Como $f_p \sim_h f_q$ en $Lin(n)$ entonces $p \sim_h q$ en $GI_n(A)$ y nuevamente $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}_n(A)$ por consecuencia (2). $\blacksquare$

Lema 4.7.8 Sea $n \in \mathbb{N}$

1. Para cada $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$, existen $m, n, k \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ y una proyección $p \in \mathcal{P}_m(A)$ tal que $(z^k u) \oplus 1_{m-n} \sim_h f_p$ en $\mathcal{U}_m(\widetilde{SA})$.

2. Si $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ con $f_p \sim_h f_q$ en $\mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ en $m \geq n$ y $r \in \mathcal{P}_{m-n}(A)$ tal que $p \oplus r \sim_h q \oplus r$ en $\mathcal{P}_m(A)$.

Prueba.

1. Por el lema (4.7.2) parte (2) podemos encontrar $k, m_1 \in \mathbb{N}$ y $f \in Pol(n, m_1)$ tal que $z^k u \sim_h f$ en $Inv_\circ(n)$. Pongamos $m = (m_1 + 1)n$ existe una función $g \in Lin(n)$ con $f \oplus 1_{m-n} \sim g$ en $Pol(m)$ por el lema (4.7.3) y podemos encontrar $p \in \mathcal{P}_m(\widetilde{A})$ con $g \sim_h f_p$ en $Lin(m)$, por el lema (4.7.7) parte (1). Asi obtenemos que:

$$(z^k u) \oplus 1_{m-n} \sim_h f \oplus 1_{m-n} \sim_h g \sim_h f_p \text{ en } Inv_\circ(n) \tag{4.7}$$

   Ahora recordemos

   i) Si $f, g \in GL_n(\widetilde{SA})$ con $f \sim_h g$ en $Inv_\circ(n)$ entonces $f \sim_h g$ en $GL_n(\widetilde{SA})$.

   ii) La aplicación $\omega : GL(A) \longrightarrow \mathcal{U}(A)$ tal que $\omega(z) = z|z|^{-1}$ es continua, $\omega(u) = u$ para cada $u \in \mathcal{U}(A)$, y $\omega(z) \sim_h z$ en $GL(A)$ para cada $z \in GL(A)$.

   Por estos resultados (i) y (ii) se tiene que la homotopía (4.7) puede ser realizado en $\mathcal{U}_m(\widetilde{SA})$.

2. Tenemos que $f_p \sim_h f_q$ en $\mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$ y de aqui en $Inv_\circ(n)$ por el lema (4.7.1) parte (3) podemos encontrar $k, m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $z^k f_p \sim z^k f_q$ en $Pol(n, m_1)$ ahora pongamos $m_2 = (k+1)n$ puesto que $f_{p\oplus 1_{kn}} = f_p \oplus z1_{kn}$, $f_{q\oplus 1_{kn}} = f_q \oplus z1_{kn}$ y $z^k 1_n \oplus 1_{kn} \sim_h 1_n \oplus z1_n$ en $Pol(m_2, k)$, concluímos que:
   $f_{p\oplus 1_{kn}} = (1_n \oplus z1_{kn})(f_p \oplus 1_{kn}) \sim_h (z^k 1_n \oplus 1_{kn})(f_p \oplus 1_{kn}) \sim_h (z^k 1_n \oplus 1_{km})(f_q \oplus 1_{kn}) \sim_h f_{p\oplus 1_{kn}}$ en $Pol(m_2, m_1)$.
   Pongamos $m = (m_1 + 1)m_2$ y $\Gamma = \begin{pmatrix} 1_{km} & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_{kn+m_1m_2}(A)$ por el lema (4.7.3) se obtiene la siguiente homotopía en $Lin(m)$
   $f_{p\oplus\Gamma} = f_{p\oplus 1_{kn}} \oplus 1_{m_1m_2} \sim_h \mu_{m_2,m_1}(f_{p\oplus 1_{kn}}) \sim_h \mu_{m_2,m_1}(f_{p\oplus 1_{kn}}) \sim_h f_{p\oplus 1_{kn}} \oplus 1_{m_1m_2} = f_{q\oplus\Gamma}$ luego el resultado se tiene del lema (4.7.7) parte (2). ■

Demostración del Teorema (4.7.1)

Ahora probaremos que la aplicación de Bott $\beta_A : K_\circ(A) \longrightarrow K_1(SA)$ dada por

$\beta_A([p]_\circ) = [f_p]_1$ es un isomorfismo.

En efecto, β_A es un homomorfismo, pués esto es inmediato de la definición. Sólo probaremos que β_A es biyectiva.

Veamos que β_A es suryectiva para lo cual tomemos un elemento $g \in K_1(SA),\ n \in \mathbb{N}$ y $\mu \in \mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$ tal que $g = [u]_1$, entonces por el lema (4.7.8) parte (1) podemos encontrar $m, n, k \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ y una proyección $p \in \mathcal{P}_m(A)$ tal que

$$(z^k u) \oplus 1_{m-n} \sim_h f_p \text{ en } \mathcal{U}_m(\widetilde{SA})$$

Recordando el lema de Whitehead:

Sea A un C^*-álgebra y $u, v \in A$, entonces

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{U}(M_2(A))$$

Observe también $f_{1_{nk}}(z) = z1_{nk} + (1_{nk} - 1_{nk}) = z1_{nk}$ de aquí y del lema de Whitehead se tiene

$$f_{1_{nk}} = z1_{nk} \sim_h z^k 1_n \oplus 1_{nk-n} \text{ en } \mathcal{U}_{nk}(\widetilde{SA})$$

y asi $\beta_A([p]_\circ - [1_{nk}]_\circ) = [f_p]_1 - [f_{1_{nk}}]_1 = [z^k u]_1 - [z^k 1_n]_1 = [u]_1 + [z^k 1_n]_1 = g$ pues

$$\begin{bmatrix} z^k u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego β_A es un epimorfismo.

Veamos que β_A es inyectiva, sea $g \in K_\circ(A)$ tal que $\beta_A(g) = 0$ probaremos que $g = 0$. Recordando $K_\circ(A) = \{[p]_\circ - [q]_\circ :\ p, q \in \mathcal{P}_n(A),\ n \in \mathbb{N}\}$ entonces $g = [p]_\circ - [q]_\circ$ y como $0 = \beta_A(g) = \beta_A([p]_\circ - [q]_\circ)$ si y sólo si $\beta_A([p]_\circ) = \beta_A([q]_\circ)$ si y sólo si $[f_p]_1 = [f_q]_1$ entonces $f_p \sim_h f_q$ lo cual implica que $f_p \oplus 1_{m-n} \sim_h f_q \oplus 1_{m-n}$ para algún $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$. Ahora pongamos

$$p_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_m(A) \quad \text{y} \quad q_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_m(A)$$

Entonces $f_{p_1} = f_p \oplus 1_{m-n}$ y $f_{q_1} = f_q \oplus 1_{m-n}$, en consecuencia $f_{p_1} \sim_h f_{q_1}$ en $\mathcal{U}_m(\widetilde{SA})$ del lema (4.7.8) parte (2) se tiene que $p_1 \oplus \Gamma \sim_h q_1 \oplus \Gamma$ en $\mathcal{P}_k(A)$ para algún $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq m$ y para algún $\Gamma \in \mathcal{P}_{k-m}(A)$ concluímos de esta manera

$$g = [p]_\circ - [q]_\circ = [p_1 \oplus \Gamma]_\circ - [q_1 \oplus \Gamma]_\circ = 0$$

puesto que $p_1 \oplus \Gamma \sim_h q_1 \oplus \Gamma$ por tanto $g = 0$ y asi β_A es inyectiva. ■

Corolario 4.7.3 Para cada C^*-algebra A y cada $n \geq 0$ se tiene $K_{n+2}(A) \cong K_n(A)$

Prueba. Recordando $K_n(A) = K_1(S^{n-1}A) \cong K_\circ(S^n A)$; entonces para $n = 0$; $K_2(A) = K_1(SA) \cong K_\circ(A)$ por teorema (4.7.1) para el caso general se sigue por inducción sobre n.

Supongamos entonces que el resultado es válido para el caso n es decir $K_{n+2}(A) \cong K_n(A)$ veamos para el caso $n + 1$.

$$K_{(n+1)+2}(A) = K_{(n+1)+1}(SA) = K_{n+2}(SA) = K_n(SA) \cong K_{n+1}(A)$$

Entonces $K_{(n+1)+2}(A) \cong K_{n+1}(A)$; luego por inducción se tiene que

$$K_{n+2}(A) \cong K_n(A)\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

Capítulo 5

Cálculo de los K-grupos, mediante la K-teoría de las C^*-álgebras de grafos dirigidos

En este último capítulo establecemos algunos ejemplos de aplicación del cálculo de los grupos $K_0(A)$ y $K_1(A)$. Y también se calcula la K-teoría de las C^*-algebras de Cuntz y Toeplitz mediante la K-teoría de C^*-algebras de grafos dirigidos.

5.1. Algunas aplicaciones del cálculo de la K-teoría

Aplicación 1: Cálculo de $K_n(A)$ y $K_{n+1}(A)$; $A = \mathbb{C}$

Recordando que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \langle -1, 1\rangle$; con $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, es un homeomorfismo y también la aplicación $g : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \langle a, b\rangle$ dado por $g(x) = bx + (1-x)a$ es una biyección y asi es un homeomorfismo; de donde $\mathbb{R}$ es homeomórfico a $\langle 0, 1\rangle$. De otro lado la suspensión de un C^*-álgebra A dado como

$$SA = \{f \in \mathcal{C}([0,1], A) : \ f(0) = f(1) = 0\} = \mathcal{C}_\circ(\langle 0,1\rangle, A)$$

Nótese además que $\mathcal{C}_\circ(X, \mathcal{C}_\circ(Y)) \cong \mathcal{C}_\circ(X \times Y)$ para cualquier par de espacios de Hausdorff X e Y localmente compactos entonces $SA = \mathcal{C}_\circ(\langle 0,1\rangle, A) \cong \mathcal{C}_\circ(\mathbb{R}, A)$

en consecuencia $S^n\mathbb{C} \cong \mathcal{C}_\circ(\mathbb{R}^n)$, y de aquí se tiene

$$K_n(\mathbb{C}) = K_1(S^{n-1}\mathbb{C}) \cong K_\circ(S^n\mathbb{C}) = K_\circ(\mathcal{C}_\circ(\mathbb{R}^n))$$

$$K_{n+1}(\mathbb{C}) = K_1(S^n\mathbb{C}) \cong K_1(\mathcal{C}_\circ(\mathbb{R}^n)) \; \forall\, n \geq 1$$

Aplicación 2: Cálculo de $K_0(A)$ y $K_1(A)$; $A = C_0(\mathbb{R}^n)$.

De la aplicación (1) y del corolario (4.7.3) se tiene que

$$K_\circ(\mathcal{C}_\circ(\mathbb{R}^n)) \cong K_n(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} K_\circ(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}\,, & n = par \\ K_1(\mathbb{C}) = \{0\}\;, & n = impar \end{cases}$$

Análogamente

$$K_1(\mathcal{C}_\circ(\mathbb{R}^n)) = K_{n+1}(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \{0\}\;, & n = par \\ \mathbb{Z}\,, & n = impar \end{cases}$$

Observación 5.1.1 Si A es un C^*-álgebra, sea $x \in K_\circ(\widetilde{A})$. Si 1 es la identidad de $\widetilde{A}$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ y $p \in \mathcal{P}(\widetilde{A})$ tal que $x = [p]_\circ - [1_n]_\circ$

En efecto. Recordando $K_\circ(\widetilde{A}) = \Big\{[p]_\circ - [q]_\circ :\; p, q \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})\Big\} = \widetilde{K}_\circ(A)$ de modo que si $x \in K_\circ(\widetilde{A})$ entonces $x = [q]_\circ - [q']_\circ$ para algunos $q, q' \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})$ de aquí $x = [q]_\circ + [1_n - q']_\circ - [1_n]_\circ = [p]_\circ - [1_n]_\circ$, donde $p = q \oplus [1_n - q']_\circ$.

Teorema 5.1.1 Si A_1, A_2 son C^*-álgebras, entonces

$$\widetilde{K}_\circ(A_1 \oplus A_2) \cong \widetilde{K}_\circ(A_1) \oplus \widetilde{K}_\circ(A_2)$$

Prueba. Consideremos las inclusiones $j_k : A_k \longrightarrow A_1 \oplus A_2,\; k = 1, 2$ y las proyecciones $\pi_k : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_k,\; k = 1, 2$; entonces claramente la sucesión

$$O \longrightarrow A_1 \xrightarrow{j_k} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \longrightarrow O$$

es un sucesión exacta corta de C^*-álgebras y de aquí se tiene que la sucesión

$$\widetilde{K}_\circ(A_1) \xrightarrow{K_\circ(j_1)} \widetilde{K}_\circ(A_1 \oplus A_2) \xrightarrow{K_\circ(\pi_2)} \widetilde{K}_\circ(A_2)$$

es exacta y como $\pi_k\, j_k = 1_{A_k}$; y $K_\circ(\pi_k\, j_k) = 1^* \Leftrightarrow K_\circ(\pi_k)\, K_\circ(j_k) = 1,\ k = 1,2$ entonces $K_\circ(j_1)$ es inyectivo y $K_\circ(\pi_2)$ es suryectivo de esta manera la sucesión

$$O \longrightarrow \widetilde{K}_\circ(A_1) \stackrel{K_\circ(j_1)}{\longrightarrow} \widetilde{K}_\circ(A_1 \oplus A_2) \stackrel{K_\circ(\pi_2)}{\longrightarrow} \widetilde{K}_\circ(A_2) \longrightarrow O$$

es exacta corta escindible de donde $\widetilde{K}_\circ(A_1 \oplus A_2) \cong \widetilde{K}_\circ(A_1) \oplus \widetilde{K}_\circ(A_2)$.

Definición 5.1.1 Sea A un C^*-álgebra, una traza acotada en A es una aplicación lineal acotada $T : A \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $T(ab) = T(ba),\ a, b \in A$.
Diremos que una traza T es positivo si $T(a) \geq 0$ para cada elemento positivo $a \in A$.

Proposición 5.1.1 Sea $T : A \longrightarrow \mathbb{C}$ un *-homomorfismo, son equivalentes:

1. T es una traza
2. $T(a^*a) = T(aa^*)\ \forall\, a \in A$
3. $T(uau^*) = T(a),\ \forall\, a \in A$ con $a \geq 0$ y $\forall u \in \mathcal{P}(\widetilde{A})$

Prueba. Resulta inmediato de la definición (5.1.1) y de elemento unitario. ■

Observación 5.1.2

1. Si $T : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es una traza y $p \sim q$, entonces $T(p) = T(q)$.
   En efecto. Si $p \sim q$, entonces existe $v \in A$ tal que $p = v^*v$ y $q = vv^*$, ahora por la proposición (5.1.1) parte (2) $T(p) = T(v^*v) = T(vv^*) = T(q)$.
2. Para cada traza T en un C^*-algebra A existe una traza en $M_n(A)$ denotada por T_n que satisface
   $$T_n(diag(a, 0, ..., 0)) = T(a),\ \forall\, a \in A \quad \text{y} \quad T_n\left[(a_{ij})_{n\times n}\right] = \sum_{i=1}^{n} T(a_{ii})$$
   Nota: Escribiremos abreviadamente la traza T_n simplemente como T.
3. Una traza T en un C^*-algebra A da lugar de esta manera a una función $\widetilde{T} : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ la misma que satisface las condiciones de la propiedad universal de $K_\circ$ es decir verifica:

a) $\widetilde{T}(p \oplus q) = \widetilde{T}(p) + \widetilde{T}(q)\ \forall p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

b) $\widetilde{T}(0_A) = 0$.

c) Si $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}_n(A)$ entonces $\widetilde{T}(p) = \widetilde{T}(q)$.

De donde entonces existe un único homomorfismo $K_\circ(\widetilde{T}) : K_\circ(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfaciendo $K_\circ(\widetilde{T})([p]_\circ) = \widetilde{T}(p),\ p \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

4. Si $\widetilde{T}$ es positivo, entonces $K_\circ(T)([p]_\circ) = T(p)$ es un número real positivo para cada p en $\mathcal{P}_\infty(A)$ y asi $K_\circ(\widetilde{T})$ aplica $K_\circ(A)$ en $\mathbb{R}$. En lo sucesivo $\widetilde{T}$ lo escribimos simplemente como T.

Ejemplo 5.1.1 El grupo $K_\circ(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ mas específicamente si $T_r : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $T_r\left[(a_{ij})_{n\times n}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ entonces

$$K_\circ(T_r) : K_\circ(M_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

es un isomorfismo.

Nota: Antes de probar este isomorfismo observemos los siguientes enunciados equivalentes:
Sean $p, q \in \mathcal{P}(M_n(\mathbb{C}))$ tales que

1. $p \sim q$

2. $T_r(p) = T_r(q)$

3. $dim(p(\mathbb{C}^n)) = dim(q(\mathbb{C}^n))$

En efecto. Para esto basta usar y proceder de manera análoga a la proposición (5.1.1) y la observación (5.1.2) parte (1) y (2).
Sea $g \in K_\circ(M_n(\mathbb{C}))$ y recuerde que

$$K_\circ(A) = \{[p]_\circ - [q]_\circ :\ p, q \in \mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(M_n(A)),\ n \in \mathbb{N}\}$$

de donde $g = [p]_\circ - [q]_\circ$ para p, q proyecciones en $M_k(M_n(\mathbb{C})) = M_{kn}(\mathbb{C})$. Ahora $K_\circ(T_r)(g) = K_\circ(T_r)([p]_\circ - [q]_\circ) = K_\circ(T_r)([p-q]_\circ) = [T_r(p-q)]_\circ = [T_r(p) - T_r(q)]_\circ = [T_r(p)]_\circ - [T_r(q)]_\circ = dim(p(\mathbb{C}^{kn})) - dim(q(\mathbb{C}^{kn}))$ de este ultimo vemos que $K_\circ(T_r)(g) \in \mathbb{Z}$.

De otro lado si $K_\circ(T_r)(g) = 0$ si y sólo si $K_\circ(T_r)([p-q]_\circ) = 0$ si y sólo si $K_\circ(T_r)([p]_\circ) = K_\circ(T_r)([q]_\circ)$ por tanto $K_\circ(T_r)$ es inyectivo.

Vemos que $K_\circ(T_r)$ es suryectivo pues la $Im(K_\circ(T_r)) \leq \mathbb{Z}$, y un subgrupo de $\mathbb{Z}$ es igual a $\mathbb{Z}$ si y solamente si este subgrupo contiene a 1. Por tanto $K_\circ(T_r)$ es suryectivo. Ahora $1 = K_\circ(T_r)([e]_\circ)$, cuando e es una proyección en $M_n(\mathbb{C})$ con rango unidimensional.

Observación 5.1.3 Del ejemplo (5.1.1) para $n = 1$ se tiene que $M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ luego $K_\circ(M_1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z} \Leftrightarrow K_\circ(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

Ejemplo 5.1.2 Sabemos que $\widetilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$, entonces $K_\circ(\widetilde{A}) \cong K_\circ(A \oplus \mathbb{C}) \cong K_\circ(A) \oplus K_\circ(\mathbb{C}) \cong K_\circ(A) \oplus \mathbb{Z}$ por el ejemplo (5.1.1)

Observación 5.1.4 S^n es la compactificación de un punto de $\mathbb{R}^n$

Aplicación 3: Cálculo de $K_0(A)$ y $K_1(A)$; $A = C(S^n)$

Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 0$; ahora por la observación (5.1.3) se tiene que la compactificación de $\mathbb{R}^n$ es homeomórfico a S^n para $n \geq 1$ y así tenemos $\widetilde{\mathcal{C}_\circ(\mathbb{R}^n)} \cong \mathcal{C}(S^n)$. Entonces

1. $K_\circ(\mathcal{C}(S^n)) = K_\circ(\widetilde{\mathcal{C}_\circ(\mathbb{R}^n)}) \cong K_\circ(\mathcal{C}_\circ(\mathbb{R})) \oplus \mathbb{Z}$ entonces
$$K_\circ(\mathcal{C}(S^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\,, & si\ n \quad par \\ \mathbb{Z}\,, & si\ n \quad impar \end{cases}$$

2. $K_1(\mathcal{C}(S^n)) \cong K_1(\widetilde{\mathcal{C}_\circ(\mathbb{R}^n)}) \cong K_{n+1}(\widetilde{\mathbb{C}}) = K_{n+1}(\mathbb{C}) = \begin{cases} \{0\}\ , & n \quad par \\ \mathbb{Z}\,, & n \quad impar \end{cases}$

   entonces
$$K_1(\mathbb{C}(S^n)) \cong \begin{cases} \{0\}\ , & n \quad par \\ \mathbb{Z}\,, & n \quad impar \end{cases}$$

5.2. La K-Teoría del álgebra de Cuntz y del álgebra de Toeplitz

5.2.1. La K-teoría del álgebra de Cuntz (O_n)

Referente a la K-teoría de O_n primero veremos que $K_\circ(O_n)$ tiene torsión. En efecto, como las proyecciones $S_iS_i^*$ son mutuamente ortogonales, tenemos que

$$[1] = \left[\sum_{i=1}^{n} S_iS_i^*\right] = \sum_{i=1}^{n}[S_iS_i^*] = n[1]$$

luego $(n-1)[1] = 0$.

De hecho, Cuntz prueba en uno de sus artículos (ver [6]) que $K_\circ(O_n) \cong \frac{\mathbb{Z}}{(n-1)\mathbb{Z}}$.

Para lo cual considera $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$; $n+1$-isometrías tales que $\sum_{i=1}^{n} S_iS_i^* = I$, entonces una C^*-álgebra $\mathcal{E}_n := C^*(S_1, \ldots, S_n)$ es diferente de O_n (son relaciones distintas). Sin embargo $\mathcal{E}_n$ contiene $S_{n+1}S_{n+1}^*$; puesto que

$$S_{n+1}S_{n+1}^* = I - \sum_{i=1}^{n} S_iS_i^* \in \mathcal{E}_n.$$

Si J_n es el ideal generado por $S_{n+1}S_{n+1}^*$ entonces $\frac{\mathcal{E}_n}{J_n} \cong O_n$, de donde tenemos la sucesión exacta corta

$$O \longrightarrow J_n \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow O_n \longrightarrow O$$

En uno de sus artículos Cuntz prueba que

$$K_1(O_n) = O \text{ y } K_\circ(\mathcal{E}_n) = \mathbb{Z}$$

y que el sexto término cíclico en la sucesión originada por:

$$O \longrightarrow J_n \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow O_n \longrightarrow O$$

es

$$\begin{array}{ccccc} K_\circ(J_n) = (n-1)\mathbb{Z} & \longrightarrow & K_0(\mathcal{E}_n) = \mathbb{Z} & \longrightarrow & K_0(O_n) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(O_n) = O & \longleftarrow & K_1(\mathcal{E}_n) & \longleftarrow & K_1(J_n) = 0 \end{array}$$

De esta manera $K_0(O_n) \cong \mathbb{Z}_{n-1}$.

5.2.2. La K-teoría del álgebra de Toeplitz ($\mathcal{T}$)

Sea H un espacio de Hilbert separable con una base ortonormal $\{\varepsilon_n\}_{n=1,2,\ldots}$ y sea
$S \in B(H)$, dado por $S(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1}$, para cada $n \geq 2$. Así $S^*S = I$, donde I denota el operador identidad en H. El operador S se llama el operador de desplazamiento unilateral con respecto a la base $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$.

El álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$ se define como el subálgebra C^* de $B(H)$ generado por S, $\mathcal{T} := C^*(S)$. Ahora para todo $n \in \mathbb{N}$ se muestra que

(a) $K_0(C_0(\mathbb{R}^{2n})) \cong K_1(C_0(\mathbb{R}^{2n+1})) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$

(b) $K_1(C_0(\mathbb{R}^{2n})) \cong K_0(C_0(\mathbb{R}^{2n+1})) \cong K_1(\mathbb{C}) \cong 0$

De otro lado para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos la sucesión exacta escindible

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C(S^n) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

entonces tenemos la sucesión exacta siguiente

$$K_i(C_0(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow K_i(C(S^n)) \longrightarrow K_i(\mathbb{C})$$

para $i = 0, 1$.

Usando (a) y (b) tenemos $K_0(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$ con generador $[1]_0$ y $K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$ (con generador $[z]_1$, la clase de la aplicación identidad $z \mapsto z$). Calculando $\delta_1([z]_1)$ y se tiene que la aplicación índice

$$\delta_1 : \mathbb{Z} \cong K_1(C(S^1)) \longrightarrow K_0(K) \cong \mathbb{Z} \qquad (*)$$

es un isomorfismo. Sea $K = K(H)$ el conjunto formado por los operadores compactos sobre H entonces tenemos $\mathcal{T}/K \cong C(S^1)$ y así la sucesión siguiente

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(S^1) \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces por el Teorema del Sexto Término (ver [10] página 209) y usando $(*)$ tenemos

$$K_0(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad K_1(\mathcal{T}) = 0$$

5.3. Cálculo de los K-grupos, mediante la K-teoría de las C^*-algebras de grafos dirigidos

Los K-grupos del álgebra de grafos tiene una forma particular elegante para que ellos puedan ser calculados solamente usando las propiedades de grafos dirigidos. Aquí calcularemos la K-teoría de las C^*-algebras de Cuntz y Toeplitz mediante la K-teoría de las C^*-algebras de grafos dirigidos.

Teorema 5.3.1 Sea E un grafo dirigido y sea $V_E \subseteq E^0$ la colección de vértices que arrojan por lo menos uno y a lo sumo un número finito de lados. Sean $\mathbb{Z}V_E$ y $\mathbb{Z}E^\circ$ los grupos abelianos libres en los generadores libres V_E y E°. Considérese la aplicación $\Delta_E : \mathbb{Z}V_E \longrightarrow \mathbb{Z}E^\circ$ sobre los generadores como sigue:

$$\Delta_E(v) = \left[\sum_{\substack{s(e)=v \\ e\in E^1}} r(e) \right] - v$$

Entonces

$$K_\circ(C^*(E)) \cong Coker(\Delta_E)$$

$$K_1(C^*(E)) \cong Ker(\Delta_E)$$

Nota: Esta formula extiende para grafos con un número contable de vértices, no necesariamente finito y también denotaremos $E_0^+ = V_E$.

Prueba. Existen siete pasos en la demostración, lo que esbozamos aqui.

(a) Midamos la acción γ

$$\gamma : U(1) = S^1 \longrightarrow Aut(C^*(E))$$

$$z \longmapsto \gamma(z) = \gamma_z : C^*(E) \longrightarrow C^*(E)$$

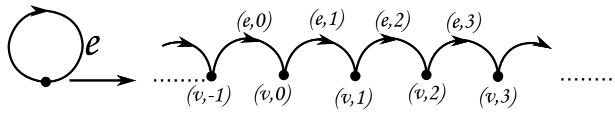
$$\gamma_z(s_e) = zs_e \quad \gamma_z(P_v) = P_v$$

(b) $C^*(E)\chi_\gamma U(1) \cong C^*(E \times \mathbb{Z})$ construímos el nuevo grafo $E \times \mathbb{Z}$

$$(E \times \mathbb{Z})^1 = E^1 \times \mathbb{Z}$$

Este no tiene lazos y $s(e,n) = (s(e), n-1) \quad r(e,n) = (r(e), n)$

Cada lazo es desarollado en el siguiente segmento infinito



(c) $C^*(E \times \mathbb{Z})$ es una AF-álgebra de esto se sigue que

$$K_1(C^*(E \times \mathbb{Z})) = 0$$

(d) La acción dual $\widehat{\gamma}$

$$\widehat{\gamma} : \mathbb{Z} \longrightarrow Aut(C^*(E)\chi_\gamma U(1))$$

$\widehat{\gamma}_\lambda(f)(t) = \langle \lambda, t \rangle\ f(t)$, donde $f : U(1) \longrightarrow C^*(E)$.

(e) Dualidad de Takesaki-Takai

$$(C^*(E)\chi_\gamma U(1))\chi_{\widehat{\gamma}}\mathbb{Z} \cong C^*(E) \times K$$

De la estabilidad de K_* se sigue que

$$K_*(C^*(E)\chi_\gamma U(1))\chi_{\widehat{\gamma}}\mathbb{Z}) \cong K_*(C^*(E))$$

(f) Sucesión de Pimsner-Voiculescu

La sucesión de Pimsner-Voiculescu es la siguiente

$$\begin{tikzcd}
K_\circ(C^*(E)\chi_\gamma U(1)) \arrow[r] & K_\circ(C^*(E)\chi_\gamma U(1)) \arrow[r] & K_\circ(C^*(E)\chi_\gamma U(1))\chi_{\widehat{\gamma}}\mathbb{Z} \arrow[d] \\
K_1[(C^*(E)\chi_\gamma U(1))\chi_{\widehat{\gamma}}\mathbb{Z}] \arrow[u] & K_1(C^*(E)\chi_\gamma U(1)) \arrow[l] & K_1(C^*(E)\chi_\gamma U(1)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

donde las aplicaciones son dados por las formulas

$$K_*(C^*(E)\chi_\gamma U(1)) \xrightarrow{id-K_*(\widehat{\gamma}^{-1})} K_*(C^*(E)\chi_\gamma U(1))$$

$$K_*(C^*(E)\chi_\gamma U(1)) \xrightarrow{id-K_*(\beta^{-1})} K_*(C^*(E)\chi_\gamma U(1))\chi_{\widehat{\gamma}}\mathbb{Z}$$

y la aplicación $\beta : \mathbb{Z} \longrightarrow Aut(C^*(E \times \mathbb{Z}))$ es dada por $\beta_m(P_{(v,n)}) = P_{(v,n+m)}$ y $\beta_m(S_{(e,n)}) = S_{(e,n+m)}$.

Usando el cálculo anterior escribimos la sucesión como

$$\begin{tikzcd}
K_\circ(C^*(E \times \mathbb{Z})) \arrow[r, "id - K_\circ(\widehat{\gamma}^{-1})"] & K_\circ(C^*(E \times \mathbb{Z})) \arrow[r, "1 - K_\circ(\beta^{-1})"] & K_\circ(C^*(E)) \arrow[d] \\
K_1(C^*(E)) \arrow[u] & O \arrow[l] & O \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(g) Calculando el núcleo y conúcleo de $1 - K_\circ(\widehat{\gamma}^{-1})$ se obtiene el resultado. ■

Ejemplo 5.3.1 Consideremos el grafo, dado por el único vértice(Punto)

$$\bullet v$$

Figura 5.1: K-teoría de un punto.

asi $E^1 = \phi$, entonces

$$E = \left\{E^\circ, E^1, r, s\right\}$$

$$E^\circ = \{v\} \text{ entonces } \mathbb{Z}E^\circ = \mathbb{Z}$$

$$E^\circ_+ = \Phi \text{ entonces } \mathbb{Z}E^\circ_+ = 0$$

$$r, s : E^1 \longrightarrow E^\circ \text{ no existen, pues } E^1 = \Phi$$

Como $C^*(E) = \mathbb{C}$ luego

$$\Delta_E : \langle \Phi \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}$$

En este caso A_G es el conjunto vacío, pero aún si podemos escribir

$$K_\circ(\mathbb{C}) = Coker(\Delta_E) = \frac{\mathbb{Z}}{Im(\Delta_E)} = \frac{\mathbb{Z}}{\langle \phi \rangle} = \mathbb{Z}$$

$$K_1(\mathbb{C}) = Ker(\Delta_E) = \{0\}$$

Ejemplo 5.3.2 Consideremos el grafo,

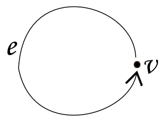


Figura 5.2: K-teoría de un lazo.

entonces

$$E = (E^\circ, E^1, r, s) \text{ donde } E^\circ = \{v\} \quad E^1 = \{e\}$$

$$r, s : E^1 \longrightarrow E^\circ \Rightarrow r(e) = s(e) = v$$

Ahora $E^\circ_+ = \{v\}$ entonces $\mathbb{Z}E^\circ_+ = \mathbb{Z}$, $E^\circ = \{v\}$ asi $\mathbb{Z}E^\circ = \mathbb{Z}$ se vió que

$$C^*(E) = C^*(1, u) = C(s^1)$$

luego

$$\Delta_E : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$v \longmapsto \Delta_E(v) = \sum_{\substack{s(e)=v \\ e \in E^1}} r(e) - v$$

Asi $\Delta_E(v) = v - v = 0$ luego $\Delta_E(v) = 0$; de donde $Ker(\Delta_E) = \mathbb{Z}$ y $Im(\Delta_E) = \{0\}$
Finalmente

$$K_\circ(C^*(E)) = K_\circ(C(S^1)) = Coker(\Delta_E) = \frac{\mathbb{Z}}{Im(\Delta_E)} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}$$
$$K_1(C^*(E)) = K_1(C(S^1)) = Ker(\Delta_E) = \mathbb{Z}$$

Ejemplo 5.3.3 [Cálculo de la K-teoría del álgebra de Toeplitz, mediante la K-teoría de C^*-álgebra de grafos]
Consideremos el grafo

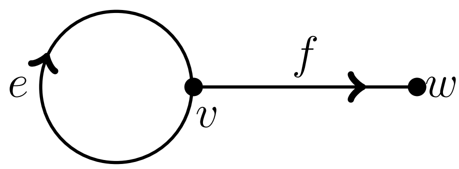


Figura 5.3: K-teoría del álgebra del grafo "'$\mathcal{T}$" (Toeplitz)

entonces

$$E = (E^\circ, E^1, r, s)\ ,\ E^\circ = \{v, w\}\ \ ,\ E^1 = \{e, f\}$$
$$E^\circ_+ = \{v\}\ \text{ asi }\ \mathbb{Z}E^\circ_+ = \mathbb{Z}$$
$$E^\circ = \{v, w\}\ \text{ asi }\ \mathbb{Z}E^\circ = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Ahora

$$\Delta_E : \mathbb{Z}E^\circ_+ \longrightarrow \mathbb{Z}E^\circ$$
$$v \longmapsto \Delta_E(v) = \sum_{\substack{s(e)=v \\ e \in E^1}} r(e) - v$$

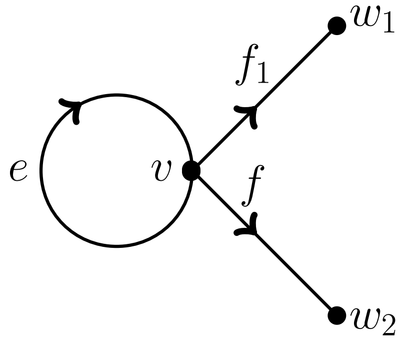
Asi $\Delta_E(v) = (v + w) - v = w$ entonces

$$Ker(\Delta_E) = \{v/\ \Delta_E(v) = 0\} = \{v/\ w = 0\} = \mathbb{Z}$$
$$Im(\Delta_E) = \{0\} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Por lo tanto

$$K_\circ(\mathcal{T}) = Coker(\Delta_E) = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$$
$$K_1(\mathcal{T}) = Ker(\Delta_E) = \{v/\ \Delta_E(v) = 0\} = \{0\}$$

Ejemplo 5.3.4 Sea el grafo mostrado en la figura



entonces

$$E = (E^\circ, E^1, r, s)\ ,\ E^\circ = \{v, w_1, w_2\}\ \ ,\ E^1 = \{e, f_1, f\}$$
$$E^\circ_+ = \{v\}\ \text{ asi }\ \mathbb{Z}E^\circ_+ = \mathbb{Z}$$
$$E^\circ = \{v, w_1, w_2\}\ \text{ asi }\ \mathbb{Z}E^\circ = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Ahora

$$\Delta_E : \mathbb{Z}E^\circ_+ \longrightarrow \mathbb{Z}E^\circ$$

$$v \longmapsto \Delta_E(v) = \sum_{\substack{s(e)=v \\ e\in E^1}} r(e) - v = v + w_1 + w_2 - v = w_1 + w_2$$

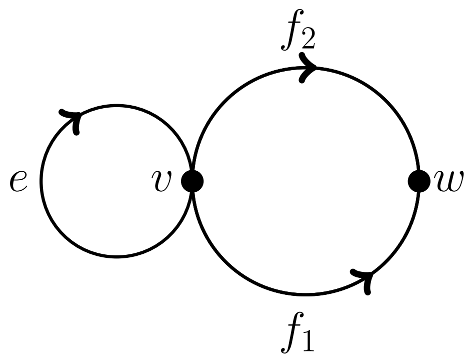
entonces

$$Ker(\Delta_E) = \{0\} \quad Im(\Delta_E) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$K_\circ(C(S^2_{0\infty})) = Coker(\Delta_E) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$K_1(C(S^2_{0\infty})) = Ker(\Delta_E) = 0$$

Ejemplo 5.3.5 Sea el grafo mostrado en la siguiente figura



entonces

$$E = (E^\circ, E^1, r, s)\ ,\ E^\circ = \{v, w\}\ ,\ E^1 = \{e, f_1, f_2\}$$
$$E^\circ_+ = \{v\} \text{ asi } \mathbb{Z}E^\circ_+ = \mathbb{Z}$$

$$E^\circ = \{v, w\} \text{ asi } \mathbb{Z}E^\circ = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$\Delta_E : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$\Delta_E(v) = \sum_{\substack{s(e)=v \\ e\in E^1}} r(e) - v = v + w + w - v = 2w$$

entonces $Ker(\Delta_E) = \{0\}\ ,\ Im(\Delta_E) = 2\mathbb{Z}$ luego

$$K_\circ(C(\mathbb{R}P^2_q)) = Coker(\Delta_E) = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$K_1(C(\mathbb{R}P^2_q)) = Ker(\Delta_E) = 0$$

Consideremos $f : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,0), & y \text{ par} \\ (x,1) & y \text{ impar} \end{cases}$$

Claramente f es un epimorfismo

$f((x,y) + (a,b)) = f(x,a) + f(y,b)$

$Ker(f) = \{(x,y)/\ f(x,y) = (0_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}_2})\} = \{(x,y)/\ x = 0 \text{ y } y \equiv \text{par}\} = 2\mathbb{Z}$

Por teorema de isomorfía

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \\ \dfrac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \arrow[ur, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 5.3.6 [Cálculo de la K-teoría del álgebra de Cuntz, mediante la K-teoría de C^*-álgebra de grafos]

Consideremos el grafo dirigido E con un vértice y n-arcos. Asi como se muestra en la figura:

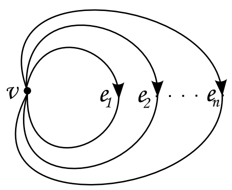


Figura 5.4: K-teoría del álgebra del grafo "O_n" (Cuntz).

Recordar las relaciones CK: $r(e_k) = s(e_k) = v,\ \forall\, k = 1,2,...,n;\ p = s^*_{e_k} s_{e_k} = \sum_{k=1}^{n} s_{e_k} s^*_{e_k},\ s^*_{e_k} s_{e_j} = 0$, para $k \neq j$ cuando $p = 1$ se tiene que $C^*(E)$ es el álgebra de cuntz O_n. Así

$$E = (E^\circ, E^1, r, s), \quad E^\circ = \{v\} = E^+_\circ \text{ entonces } \mathbb{Z}E^\circ_+ = \mathbb{Z} = \mathbb{Z}E^0$$

También

$$E^1 = \{e_1, ...e_n\}$$

$$\Delta_E : \mathbb{Z}E_+^\circ \longrightarrow \mathbb{Z}E^\circ$$

$$\Delta_E : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$v \longmapsto \Delta_E(v) = \sum_{\substack{s(e_i)=v \\ e_i \in E^1}} r(e_i) - v = \underbrace{v + ... + v}_{n-\text{veces}} - v$$

entonces $\Delta_E(v) = (n-1)v,\ n \neq 1$ cuando $n = 1$, por el ejemplo (5.3.2) se tiene $K_\circ(C(S^1)) = \mathbb{Z} = K_1(C(S^1))$.

Ahora calculemos el $Ker(\Delta_E)$ y $Coker(\Delta_E)$

$Ker(\Delta_E) = \big\{v \in \mathbb{Z}E_+^\circ /\ \Delta_E(v) = 0\big\} = \big\{v \in \mathbb{Z}E_+^\circ /\ (n-1)v = 0\big\} =$

$\big\{v \in \mathbb{Z}E_+^\circ /\ v = 0\big\} = \{0\}$ pues $n \neq 1$

$$Im(\Delta_E) = (n-1)\mathbb{Z} \text{ entonces } Coker(\Delta_E) = \frac{\mathbb{Z}}{(n-1)\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_{n-1}$$

Finalmente

$$K_\circ(O_n) = Coker(\Delta_E) = \mathbb{Z}_{n-1}$$

$$K_1(O_n) = Ker(\Delta_E) = 0$$

Conclusiones

- De este trabajo se concluye que el cálculo de la K-teoría de las Álgebras de Cuntz y Toeplitz también se obtiene de una forma más simple mediante la K-teoría de C^*-álgebra de grafos.

- Otro hecho resaltante que se ha podido concluír es que una C^*-álgebra se puede asociar con un grafo y por ende los K-grupos de un álgebra de grafos pueden ser calculados solamente usando propiedades de grafos.

Bibliografía

[1] G. Corach E. Andruchow, notas de análisis funcional. Primera edición, UBA-ARGENTINA (1997).

[2] Rainer Matthes Wojciech Szymanski, lecture notes on the K-theory of operator algebras. Primera edición. VARSOVIA-Polonia (2005).

[3] John B. Conway, a course in functional analysis. Springer-Verlag, segunda edición. New York (1990).

[4] James Dugundji, topology. Allyn and Bacon, septima edición. Boston-USA (1972).

[5] G.H. Elliott, on the clasification of inductive limits of sequences of semi simple finite-dimensional algebras. J-Algebras 38 (1976) 29-44.

[6] Cuntz J. K-Theory for Certain C^*-algebras Ann. Math, N°113 (1981) 181-197.

[7] Cuntz J. Murray-Von Neumann equivalence of proyections in infinite simple C^*-algebra Rev. roum Math. Pures at Appl. N° 23 (1978) 1011-1014.

[8] Cuntz J. Simple C^*-algebras Generated by Isometrias. Commun. Math. Phy1 N° 57 81977 173-185.

[9] A. Connes Nom Commutative Geometry. Academic. Press San Diego, (1994).

[10] Rϕrdam M. Larsen F. Larsen F., Lanstren N. An introduction to K-theory for C^*-álgebras (London Math. Soc. Student Tests 49). United Kingdom (2000).

[11] J. A. Erdos, C^*-álgebras. King's College-London Department of Mathematics. Englad, (2003).

[12] Murphy G.J. C^*-algebras and operator theory (studies in Advanced Mathematics) CRC Press, Florida, (1993).

[13] Raeburn Iain Graph Algebras CBMS Regional Conference Serie in Mathematics 103 AMS Providence, (2005).

[14] Richard Sanders, Graph C^*-algebras. November 17- 2008.

[15] Bravo Silverio BE Algunas álgebras C^* y su K-teoría, morfismo Vol. 13 N°1(2009) 17-44.

[16] Segal, I. Irreducible representations of operator álgebra Bull. Am., Math. Suc 53(1947) 73-88.

[17] Katsum T.A class of C^*-álgebras generalizing both graph álgebras and homeomorphism C^*-álgebra I Fundamental results, Trans. Amer-Math. Soc 356 (2004) 4287-4322.

[18] Ephrem Mand Spielberg K-Theory of C^*-álgebras of directed graphs arXiv: 0906.3901v1[math.OA] 21 jun 2009.

[19] Kunjian A-and Park. D. Higher Rank graph C^*-álgebras, New York J. Math 6(2000) I-20.

[20] Blackadar B. operator Álgebras Theory of C^*-álgebras and Von Neumann álgebras Springer-Verlag Berlin 2006.

[21] John Milnor. Introduction To Algebraic K-Theory, by Princeton University Press, segunda edición (1971).

[22] Hyman Bass. Algebraic K-Theory, by W. A Benjamin INC. New York, segunda edición (1968).