UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Algebra de lie de un grupo de trenza pura

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Julio Christian Quesada Llanto

Lima – Perú

2014

ALGEBRA DE LIE DE UN GRUPO DE TRENZA PURA

Julio Christian Quesada Llanto

Tesis presentada a consideración del Cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobado por:

Dr. Pedro Contreras Chamorro

Presidente del Jurado

Mg. Martha Gonzales Bohorquez

Miembro del Jurado

Dr. Agripino García Armas

Miembro Asesor

Lima - Perú

Julio - 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

JULIO CHRISTIAN QUESADA LLANTO

Algebra de Lie de un Grupo de Trenza Pura, (Lima) [2014],
x, 70 p. 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2014)
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática.
I. UNMSM-Facultad de Ciencias Matemáticas.
II. Algebra de Lie de un grupo de trenza pura (Topología Algebraica).

DEDICATORIA

A mis padres por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada por su amor. Gracias por todo.

A mi asesor Agripino por creer en mí, ayudarme a dar lo mejor y tratarme como un hijo y amigo.

A mi enamorada Paula por acompañarme y ayudarme en los momentos que necesitaba, por tus motivaciones y tu amor.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por protegerme durante todo mi camino y darme fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de toda mi vida.

A mi madre y padre , que con su demostración de una madre y un padre ejemplar me han enseñado a no desfallecer ni rendirme ante nada y siempre perseverar a través de sus sabios consejos.

Al Dr. Agripino García, asesor de tesis, por su valiosa guía y asesoramiento a la realización de la misma.

A mi jurado Dr. Pedro Contreras y Mg. Martha Gonzales por su gran apoyo y consejos en la culminación de este trabajo.

A mi enamorada Paula, por su apoyo incondicional en el transcurso de la realización de la tesis, por compartir momentos de alegría, tristeza y demostrarme que siempre podré contar con ella.

A mi hermana, por ser una gran amiga para mí, que junto a sus ideas hemos pasado momentos inolvidables y uno de los seres más importantes en mi vida.

A mis amigos,Jorge, Ronald, Maribel,Juanita, Milagros, Alex, Milton, Edwin, Lois, Loli, Teofanes, Yauri y muchos amigos porque cada una con sus valiosas aportaciones hicieron posible este proyecto y por la gran calidad humana que me han demostrado con su amistad.

RESUMEN

Algebra de Lie de un grupo de trenza pura

Julio Christian Quesada Llanto

Julio - 2014

Orientador : Dr. Agripino García Armas

Título obtenido : Licenciado en matemática

En este trabajo estudiamos el álgebra de Lie asociado con la filtración de la serie central del grupo de trenzas pura de Artin y probamos que es una extensión de las álgebras de Lie libres.

Palabras claves : HOMOTOPÍA
GRUPO DE TRENZAS
ALGEBRAS DE LIE
FIBRACIÓN
HAZ FIBRADO

ABSTRACT

Lie Algebra of a pure braid group

Julio Christian Quesada Llanto

July- 2014

Adviser : Dr. Agripino García Armas

Obtained degree : mathematician

In this work we study the Lie algebra associated with the filtration of the central series of the group of pure Artin braid and tried to be an extension of free Lie algebras.

Keywords : HOMOTOPY
PURE BRAID GROUP
LIE ALGEBRA
FIBRATION
VECTOR BUNDLE

Introducción

En este trabajo describimos el álgebra de Lie $gr_*(P_k)$ asociada a la serie central descendente del grupo de trenza pura de Artin P_k.La estructura aditiva de $gr_*(P_k)$ fue calculada por M. Falk y R. Randell en [3]. La estructura de álgebra de Lie fue desarrollada por primera vez por T. Kohno en [7] usando homotopía racional.
En el presente trabajo la estructura de álgebra de Lie es desarrollada directamente a través de una presentación del grupo de trenzas pura de Artin.
La homología entera de $\Omega(Conf(\mathcal{R}^{2n}, k))$ fue calculado por E. Fadell y S. Husseini y subsecuentemente por F. Cohen y S. Gitler, quienes probaron que el álgebra de Lie de primitivas es dada por una extensión no trivial de álgebras de Lie libres. Digamos existe un isomorfismo del módulo de primitivas $PCH_*(\Omega(Conf(\mathcal{R}^{2n}, q))) \cong L_2 \oplus ... \oplus L_q$ donde $L_i = L[A_{i,1}, \ldots, A_{i,i-1}]$ es un ágebra de Lie libre en $i-1$ generadores de grado $2n-2$ y las relaciones entre los $A_{i,j}$ sonde la forma:

1. $[A_{i,j}A_{k,i}] = [A_{k,i}A_{k,j}]$

2. $[A_{i,j}A_{k,j}] = [A_{k,j}A_{k,i}]$ para $1 \leq j < i < k \leq q$

y $[A_{i,j}A_{k,l}] = 0$ para distintos i, j, k, l. Estos son conocidos como las relaciones de Yang-Baxter o relaciones de trenza infinitesimal y ellos aparecen independientemente en muchos contextos en álgebra y topología.
Una explicación satisfactoria para la conexión entre los dos álgebras de Lie sigue siendo desconocido, aunque esto es parte de un fenómeno más general. Aunque

los trabajos de D. Cohen y M. Xicoténcatl prueban la existencia de isomorfismos análogos.

Este trabajo está dividido en tres capítulos:

En el capítulo I, introduciremos los conceptos básicos de los grupos de homotopía, espacios de configuraciones, haz fibrado de Fadell-Neuwirth, sucesión exacta de grupos de homotopía asociada a un haz fibrado, serie central descendente y álgebra de Lie.

En el capítulo II, introduciremos el concepto de grupo de Trenza y la presentación del grupo de trenza pura de Artin.

En el capítulo III desarrollaremos el álgebra de Lie de un grupo de trenza pura y el teorema central del trabajo.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Homotopía

1.1.1 Definición. Sean X, Y espacios topológicos, $I = [0,1]$ (el intervalo $[0,1]$ con la topologa usual) y denotaremos por $Map(X,Y)$ el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y.Sean $f, g \in Map(X,Y)$.Diremos que f es homótopica a g, si existe una aplicación continua $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A la aplicación F se denomina una homotopía entre f y g se denota $f \simeq g \quad F : f \simeq g$.

Para cada $t \in I = [0,1]$, definimos $F_t(x) = F(x,t)$ esto nos da una familia de aplicaciones $F_t \in Map(X,Y)$ para cada $t \in I = [0,1]$.
Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ es llamada nul homotópico si f es homotópico a una constante.

1.1.2 Definición. Sea A un subconjunto de X, $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas. Diremos que f es homotópico a g relativo a A si existe una aplicación continua $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$, $x \in X$; $F(a,t) = f(a)$ para $a \in A$, $t \in I$.
A la aplicación F se le denomina una homotopía entre f y g relativa a A, se

denota por $f \simeq g \operatorname{rel} A$ ó $F : f \simeq g \operatorname{rel} A$, cuando sea necesario precisar F.

1.1.3 Proposición. $\simeq \operatorname{rel} A$ *es una relación de equivalencia en* $Map(X, Y)$.

Demostración.

Reflexividad:

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Definamos una homotopía

$$\begin{array}{rcccc} F & : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

tenemos $f \simeq f \operatorname{rel} A$.

Simetría:

Sea $F : f \simeq g \operatorname{rel} A$ una homotopía de f y g relativo a A. Definamos una homotopía

$$\begin{array}{rcccc} G & : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \longmapsto & F(x, 1-t) \end{array}$$

G es continua puesto que es continua F. Luego $G : g \simeq f \operatorname{rel} A$.

Transitividad:

Sean $F : f \simeq g \operatorname{rel} A$, $G : g \simeq h \operatorname{rel} A$. Definamos una homotopía

$$\begin{array}{rcccccc} H & : & X \times I & \longrightarrow & Y & & \\ & & (x,t) & \longmapsto & H(x,t) & = & \left\{ \begin{array}{cl} F(x, 2t) & ,0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t-1) & ,1/2 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

H es continua puesto que es continua en $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$ y en $1/2$

$$F(x, 1) = G(x, 0) = g(x).$$

Luego $H : f \simeq h \operatorname{rel} A$. ■

El $\mathrm{Map}(X, Y)$, es particionado en clases de equivalencia por la relación de homotopía relativa a A. Esas clases de equivalencia se denominan clases de homotopía relativas a A, denotaremos $[X, Y]_A$ al conjunto de todas las clases de homotopía relativas a A.

Si $A = \emptyset$, $[X, Y]_A$ se denota por $[X, Y]$.

Sea X un espacio topológico y A un subespacio de X, al par (X, A) se denomina una pareja de espacios. En particular cuando A es el punto $x_0 \in X$, a la pareja (X, x_0) se le denomina espacio punteado y al punto x_0 punto base de X.

1.1.4 Definición. Sea X un espacio con punto base. El n-ésimo grupo de homotopía, $\pi_n(X)$, es definido por

$$\pi_n(X) = [S^n, X]$$

para $n \geq 0$, donde S^n es la n-esfera unitaria.

Cuando $n = 1$, $\pi_1(X)$ se denomina grupo fundamental de X.

Cuando $n = 0$, $\pi_0(X)$ es el conjunto de todas las componentes por trayectorias del espacio X, en general no resulta un grupo.

Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ induce una aplicación

$$\begin{array}{ccccc} f_* & : & \pi_n(X) = [S^n, X] & \longrightarrow & [S^n, Y] = \pi_n(Y) \\ & & [\lambda] & \longmapsto & [f \circ \lambda] \end{array}$$

Se tiene el siguiente resultado:

$$\pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X) \cong \ldots \cong \pi_0(\Omega^n X)$$

donde $\Omega X = \mathrm{Map}(S^1, X)$ son los lazos en X basado en el punto base de X.

Si $X = S^1$, la 1-esfera unitaria, tenemos el siguiente resultado:

$$\pi_i(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ si } i = 1 \\ 0 & , \text{ si } i \neq 1 \end{cases}$$

También

$$\mathbb{R}^2 - \{q_1, \ldots, q_m\} \simeq \vee_m S^1$$

$\mathbb{R}^2$ menos un conjunto de puntos $q_1, \ldots, q_m$ es homotópico a un bouquet de esferas. Luego

$$\pi_i(\mathbb{R}^2 - \{q_1, \ldots, q_m\}) = \pi_i(\vee_m S^1) = 0 \text{ para todo } i \geq 2.$$

1.2. Haz fibrado

Siguendo los lineamientos establecidos por Hausen en [3H] daremos la demostracin del terorema de Fadell Neuwirth

1.2.1 Definición. Un haz es una terna (E, p, B) donde E y B son espacios topológicos y $p : E \longrightarrow B$ es una aplicación continua sobreyectiva. Al espacio B se le denomina espacio base, al espacio E espacio total y a la aplicación p la proyección del haz. Para cada $b \in B$, $p^{-1}(b)$ se denomina la fibra del haz sobre b.

1.2.2 Definición. Dado un espacio topolgico F una carta para un haz $p : E \longrightarrow B$ asociado a la fibra F es un par (U, φ) tal que :

1) U es un conjunto abierto en B y

2) $\varphi : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ es un homeomorfismo tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[dl, "p"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

conmuta, esto es, $p\varphi_\alpha(x, y) = \pi_1(x, y) = x$ para $(x, y) \in U \times F$.

1.2.3 Definición. Un atlas del haz $p : E \longrightarrow B$, con fibra F es una colección de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ asociado a la fibra F tal que $\{U_\alpha\}$ es un cubrimiento abierto de B.

1.2.4 Definición. Un haz (E, p, B) es un haz fibrado con fibra F si existe un atlas, con fibra F, asociado a l.

Al haz $(B \times F, \pi, B)$ donde $\pi : B \times F \longrightarrow B$ es la proyección, se le denomina haz fibrado trivial.

1.2.5 Definición. Sea M un espacio topológico de Hausdorff. El espacio de configuraciones de n-upla ordenada de puntos distintos en M es el subespacio de $M^n = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n-\text{veces}}$ dado por

$$\mathfrak{F}_n(M) = \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in M^n \ / \ m_i \neq m_j, \ \text{si } i \neq j\}.$$

El grupo simétrico de n-letras Σ_n actúa por al izquierda sobre $\mathfrak{F}_n(M)$ permutando la coordenadas

$$\sigma.(m_1, \ldots, m_n) = (m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(n)}).$$

Al espacio de órbitas $\mathfrak{F}_n(M)/\Sigma_n$ se denomina el espacio de configuraciones no ordenado.

1.2.6 Ejemplo. Sea M un espacio topológico Hausdorff

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2(M) &= \{(x, y) \in M^2 \ / \ x \neq y\} \\ &= (M \times M) \setminus \Delta \end{aligned}$$

el complemento de la diagonal Δen M $\times M$.

1.2.7 Ejemplo. El espacio de configuraciones $\mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{F}_{k-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$. En efecto

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathfrak{F}_{k-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \\ & & (x_1, \ldots, x_k) & \longmapsto & (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_k - x_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathbb{R}^n \times \mathfrak{F}_{k-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) & \longrightarrow & \mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^n) \\ & & (y_1, \ldots, y_k) & \longmapsto & (y_1, y_2 + y_1, y_3 + y_1, \ldots, y_k + y_1) \end{array}$$

tenemos $\varphi\psi = id$, $\psi\varphi = id$.

1.2.8 Definición. Un espacio topológico de Hausdorff M es una variedad topológica de dimensión n si para cada punto de M existe una vecindad abierta homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

1.2.9 Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ es una variedad topológica de dimensión n.

1.2.10 Ejemplo. La 2-esfera unitaria

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una variedad topológica de dimensióin 2. En efecto: Sean $p = (0, 0, -1)$ y $q = (0, 0, 1)$ puntos en S^2, los conjuntos $U = S^2 \setminus \{p\}$, $V = S^2 \setminus \{q\}$ son abiertos en S^2 y cubren a S^2, las funciones

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}\right) \quad , z \neq -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \psi : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right) \quad , z \neq 1 \end{array}$$

son homeomorfismos.

Sea V^m el interior del disco cerrado $D^m = \{x \in \mathbb{R}^n \, / \|x\| \leqslant 1\}$. Definamos las funciones continuas

$$\begin{array}{cccc} g : & V^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & y & \longmapsto & g(y) = \frac{y}{1-\|y\|} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{cccc} h : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & V^m \\ & x & \longmapsto & h(x) = \frac{x}{1-\|x\|} \end{array}$$

Se cumple que $g \circ h = Id_{\mathbb{R}^m}$ y $h \circ g = Id_{V^m}$. Por tanto V^m es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Sea $G_0(D^m)$ el grupo de homeomorfismos de D^m en D^m que deja fio punto a punto la frontera de D^m, con la topologa compacta abierta.

1.2.11 Proposición. *Existe una aplicacin $\gamma : V^m \to G_0(D^m)$ tal que:*

1. $\gamma(x)(x) = 0$ *para todo* $x \in D^m$

2. $\gamma(x)(y) = y$ *para todo* $x \in \partial D^m$

Demostración. Definamos la aplicacin:

$$\begin{array}{rcccl} \gamma' & : & V^m \times D^m & \longrightarrow & D^m \\ & & (x,y) & \longmapsto & \gamma'(x,y) = \begin{cases} h(g(y)-g(x)) & ,x \in V^m \\ y & ,x \in \partial D^m \end{cases} \end{array}$$

Sea $\gamma : V^m \to G_0(D^m)$ la aplicacin definada por $\gamma(x)(y) = \gamma'(x,y)$. Tenemos:
$\gamma(x)(x) = \gamma'(x,x) = h(g(x) - g(x)) = 0 \quad \text{para} \quad x \in D^m$
$\gamma(x)(y) = \gamma'(x,y) = y \quad \text{para} \quad x \in \partial D^m$ ■

1.2.12 Definición. Una variedad topolgica de dimensin n, es un espacio topolgico de Hausdorff M en el que todo punto de M tiene una vecindad abierta homeomorfa a una bola abierta de $\mathbb{R}^n$.

1.2.13 Definición. Un homeomorfismo $\varphi : M \to M$ es estable si y solo si φ es un homeomorfismo de M que fija los puntos fuera de un subconjunto cerrado propio de M.
Los homeomorfismos estables generan un subgrupo de $Top(M)$(grupo de homeomorfismos de M en M) denotado por $Top_s(M)$.
Sea U un subconjunto abierto propio de M cuya clausura $\overline{U}$ es homeomorfo a D^m de tal manera que V^m corresponde a U y 0 a un $x_0 \in U$.

1.2.14 Corolario. *Existe una aplicacin* $\gamma : U \to Top_s(M)$ *tal que:*

1. $\gamma(x)(x) = x_0$ *para* $x \in U$

2. $\gamma(x)(y) = y$ *para* $y \in M - U$

Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathfrak{F}_k(M)$, denotemos por $Q_i^x = \{x_1, x_2, ..., x_i\}$ para $1 \leqslant i \leqslant k$, cuando x es el punto base $q = (q_1, q_2, ..., q_k)$ de $\mathfrak{F}_k(M)$, Q_r^q es denotado por Q_r.

Por el corolario anterior y la conectividad de M, existe $\alpha_x \in Top_s(M)$ que induce un homeomorfismo estable $\alpha'_x : \mathfrak{F}_{k-r}(M - \ Q_r) \to \mathfrak{F}_{k-r}(M - \ Q_r^x)$, donde $Q_r = \{q_1, q_2, ..., q_r\}$ y $q = (q_1, q_2, ..., q_r)$ es un punto base elegido en $\mathfrak{F}_r(M)$.
Denotemos por

$$\mathfrak{F}_{m,n}(M) = \mathfrak{F}_n(M \setminus Q_m).$$

Si $m = 0$, $\mathfrak{F}_{0,n}(M) = \mathfrak{F}_n(M)$.
Si $n = 1$, $\mathfrak{F}_{m,1}(M) = \mathfrak{F}_1(M \setminus Q_m) = M - Q_m$.

1.2.15 Proposición. *(Fadell-Neuwirth[3]) Sea M una variedad topológica conexa de dimensión mayor o igual a 2 con frontera $\partial M = \emptyset$. Entonces, para $n > r \geq 1$ la aplicación*

$$\begin{array}{cccc} p & : & \mathfrak{F}_n(M) & \longrightarrow & \mathfrak{F}_r(M) \\ & & (u_1, \ldots u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n) & \longmapsto & (u_1, \ldots, u_r) \end{array}$$

es un haz fibrado con fibra $\mathfrak{F}_{r,n-r}(M)$.

Demostración. Sea $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_r^0) \in \mathfrak{F}_r(M)$, la pre-imagen de u^0 por p es

$$p^{-1}(u^0) = \{(u_1^0, \ldots, u_r^0, v_1, \ldots, v_{n-r}) \in M^n, \text{ todos distintos dos a dos}\}$$

Sea $Q_r = \{u_1^0, \ldots, u_r^0\}$ entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{r,n-r}(M) &= \mathfrak{F}_{n-r}(M \setminus Q_r) \\ &= \{(v_1, \ldots, v_{n-r}) \in (M \setminus Q_r)^{n-r} \ / \ v_i \neq v_j, \ Si \ i \neq j\} \end{aligned}$$

Definamos la aplicación

$$\begin{array}{cccc} g & : & p^{-1}(u^0) & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{r,n-r}(M) \\ & & (u_1^0, \ldots, u_r^0, v_1, \ldots, v_{n-r}) & \longmapsto & (v_1, \ldots, v_{n-r}) \end{array}$$

g es un homeomorfismo, o sea $p^{-1}(u^0) \approx \mathfrak{F}_{r,n-r}(M)$. Veamos que se cumple la condición (2) de la definición 1.2.4 la trivialidad local de p en una vecindad de u^0, en efecto, para cada $i = 1, \ldots, r$ escojamos vecindades abiertas U_i de u_i^0 en

M. Como los puntos $u_1^0, \dots, u_r^0$ son distintos podemos suponer que $U_1, \dots, U_r$ son mutuamente disjuntos. Entonces

$$U = U_1 \times \ldots \times U_r$$

es una vecindad abierta de u^0 en $\mathfrak{F}_r(M)$.

Veamos que existe un homeomorfismo $\Phi : U \times \mathfrak{F}_{r,n-r}(M) \longrightarrow p^{-1}(U)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \times \mathfrak{F}_{r,n-r}(M) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

donde π_U es la proyección en el primer factor. En efecto, para cada $i = 1, \dots, r$ definamos una aplicación (continua)

$$\theta_i : U_i \times \overline{U_i} \longrightarrow \overline{U_i}$$

con las siguientes propiedades:

1) Para cada $u \in U_i$ la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \theta_i^u & : & \overline{U_i} & \longrightarrow & \overline{U_i} \\ & & v & \longmapsto & \theta_i(u, v) \end{array}$$

es un homeomorfismo, que fija el borde $\partial \overline{U_i}$ de $\overline{U_i}$ punto a punto.

2) $\theta_i^u(u_i^0) = u$.

En el lema 1.2.16 siguiente probaremos la existencia de la aplicación θ_i.

Para $u = (u_1, \dots, u_r) \in U$ definamos una aplicación $\theta^u : M \longrightarrow M$ como

$$\theta^u(v) = \begin{cases} \theta_i(u_i, v) & , \text{ si } v \in U_i \text{ para algún } i = 1, \dots, r \\ v & , \text{ si } v \in M \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^r U_i \end{cases}$$

θ^u es un homeomorfismo tal que

$$\theta^u(u_i^0) = \theta_i(u_i, u_i^0) = \theta_i^u(u_i^0) = u_i \text{ para } i = 1, \ldots, r$$

θ^u es inyectiva, en efecto, supongamos $\theta^u(v) = \theta^u(\overline{v})$.

Si $v, \overline{v} \in U_i$ para algún $i = 1, \ldots, r$.

$$\theta_i^u(v) = \theta_i(u_i, v) = \theta^u(v) = \theta^u(\overline{v}) = \theta_i(u_i, \overline{v}) = \theta_i^u(\overline{v})$$

como θ_i^u es un homeomorfismo, $v = \overline{v}$.

Si $v, \overline{v} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ tenemos

$$v = \theta^u(v) = \theta^u(\overline{v}) = \overline{v},$$

luego $v = \overline{v}$.

Si $v \in U_i$ para algún $i = 1, \ldots, r$ y $\overline{v} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{r} U_i$, o sea, $\overline{v} \notin U_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$, luego $v \neq \overline{v}$,

$$\theta^u(v) = \theta_i(u_i, v) = \theta_i^{u_i}(v).$$

Si $\overline{v} \in \partial\overline{U_i} \subset \overline{U_i}$ entonces como $\theta_i^{u_i}$ deja fijo el borde $\partial\overline{U_i}$ tenemos que $\theta_i^{u_i}(\overline{v}) \in \partial\overline{U_i}$, luego $\theta^u(\overline{v}) = \overline{v}$

$$\theta^u(v) = \theta_i(u_i, v) = \theta_i^{u_i}(v),$$

supongamos que $\theta^u(v) = \theta^u(\overline{v})$

$$\theta_i^{u_i}(v) = \theta_i(u_i, v) = \theta^u(v) = \theta^u(\overline{v}) = \overline{v} \in \partial\overline{U_i}$$

pero $\theta_i^{u_i}(v)$ no es un punto de la frontera, luego, $\theta^u(v) \neq \theta^u(\overline{v})$.

θ^u es sobreyectiva, en efecto, sea $s \in M$, si $s \in U_i$ para algún $i = 1, \ldots, r$ entonces para $u_i \in U_i$, como $\theta_i^{u_i}$ es sobreyectiva existe $v \in U_i$ tal que $\theta_i^{u_i}(v) = s$. Luego

$$s = \theta_i^{u_i}(v) = \theta_i(u_i, v) = \theta^u(v).$$

Si $s \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{r} U_i$, o sea, $s \notin U_i$ para todo i, luego $s = \theta^u(s)$. Esto prueba que θ^u es sobreyectiva.

Definamos la aplicación inversa de θ^u, $(\theta^u)^{-1} : M \longrightarrow M$, como

$$(\theta^u)^{-1}(y) = \begin{cases} (\theta_i^{u_i})^{-1}(y) & , \text{ si } y \in U_i \text{ para algún } i = 1, \ldots, r \\ y & , \text{ si } y \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{r} U_i \end{cases}$$

θ^u y $(\theta^u)^{-1}$ son continuas. Luego θ^u es homeomorfismo.

Definamos la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \Phi_U & : & U \times \mathfrak{F}_{r,n-r}(M) & \longrightarrow & \varphi^{-1}(U) \\ & & (u, v_1, \ldots, v_{n-r}) & \longmapsto & (u, \theta^u(v_1), \ldots, \theta^u(v_{n-r})) \end{array}$$

o sea $\Phi_U = id \times \underbrace{\theta^u \times \ldots \times \theta^u}_{(n-r)-\text{veces}}$.

Luego Φ_U es un homeomorfismo.

El diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} U \times \mathfrak{F}_{r,n-r}(M) \arrow[rr, "\Phi_U"] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} p\Phi_U(u, v_1, \ldots, v_{n-r}) &= p(u, \theta^u(v_1), \ldots, \theta^u(v_{n-r})) \\ &= u \\ &= \pi_U(u, v_1, \ldots, v_{n-r}) \end{aligned}$$

1.2.16 Lema. *Existe una aplicación continua $\theta : U \times \overline{U} \longrightarrow \overline{U}$ con las propiedades (1) y (2) dadas anteriormente.*

Demostración. Si $\mathbb{R}^n$ denota el espacio n-dimensional de números reales con norma euclidiana $\|\cdot\|$. Para probar este lema, es suficiente considerar U la bola abierta unitaria en $\mathbb{R}^n$ con centro en el origen. Entonces

$$\overline{U} = \{v \in \mathbb{R}^n \,/ \|v\| \leq 1\}.$$

Fijemos una función diferenciable

$$\begin{array}{rcccl} \lambda & : & [0,1)\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \lambda(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \geq y \\ 0 & , \text{ si } \dfrac{x+1}{2} \leq y \end{cases} \end{array}$$

donde $x \in [0,1), y \in (0,1]$.

Para $u \in U$ definamos un campo vectorial f^u sobre la bola cerrada unitaria $\overline{U}$ por

$$f^u(v) = \lambda(\|u\|, \|v\|)u$$

La elección de λ asegura que $f^u = u$ en toda la bola de radio $\|u\|$ con centro en el origen y $f^u = 0$ fuera de la bola de radio $(\|u\|+1)/2$ con centro en el origen.

Sea $\left\{\theta^{u,t} : \overline{U} \longrightarrow \overline{U}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ el flujo determinado por el campo vectorial f^u, o sea,

$$\frac{\mathrm{d}\,\theta^{u,t}(v)}{\mathrm{d}\,t} = f^u(v),\ \ \theta^{u,0} = id,\ \ \forall v \in \overline{U}, t \in \mathbb{R}$$

integrando ambos términos tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathrm{d}\,\theta^{u,t}(v) &= \int_0^t f^u(v)\,\mathrm{d}\,t \\ \theta^{u,t}(v) - \theta^{u,0}(v) &= f^u(v)(t-0) \\ \theta^{u,t}(v) - v &= f^u(v)t \end{aligned}$$

luego

$$\theta^{u,t}(v) = f^u(v)t + v$$

´ para $v \in \partial\overline{U}$ tenemos $\|v\| = 1$

$$\begin{aligned} \theta^{u,t}(v) &= f^u(v)t + v \\ &= 0 + v, \text{ pues } \frac{\|u\|+1}{2} \leq \|v\| \\ &= v \end{aligned}$$

$\theta^{u,t}$ es un difeomorfismo que depende diferenciablemente de u y t y deja fijo los elementos de $\partial\overline{U}$.

En consecuencia la aplicación

$$\theta : U \times \overline{U} \longrightarrow \overline{U}$$

definida por $(u, v) \longmapsto \theta(u, v) = \theta^{u,1}(v)$ para $u \in U, v \in \overline{U}$.
Verifica las condiciones (1) y (2). ■

1.2.17 Corolario. *Sea M una variedad topológica conexa de dimensión mayor o igual a 2 con $\partial M = \emptyset$. Entonces para cualesquiera $m \geq 0$, $n > r \geq 1$ la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} p : & \mathfrak{F}_{m,n}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{m,r}(M) \\ & (u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n) & \longmapsto & (u_1, \ldots, u_r) \end{array}$$

es un haz fibrado con fibra $\mathfrak{F}_{m+r,n-r}(M)$

Demostración. Como $\mathfrak{F}_{m,n}(M) = \mathfrak{F}_n(M \setminus Q_m)$ por la proposición 1.2.15

$$p : \mathfrak{F}_n(M \setminus Q_m) \longrightarrow \mathfrak{F}_r(M)$$

es un haz fibrado con fibra $\mathfrak{F}_{r,n-r}(M \setminus Q_m)$.
Tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{r,n-r}(M \setminus Q_m) &= \mathfrak{F}_{n-r}((M \setminus Q_m) \setminus Q_r) \\ &= \mathfrak{F}_{n-r}(M \setminus (Q_m \cup Q_r)) \\ &= \mathfrak{F}_{n-r}(M \setminus Q_{m+r}) \\ &= \mathfrak{F}_{m+r,n-r}(M) \end{aligned}$$

■

1.3. Fibración

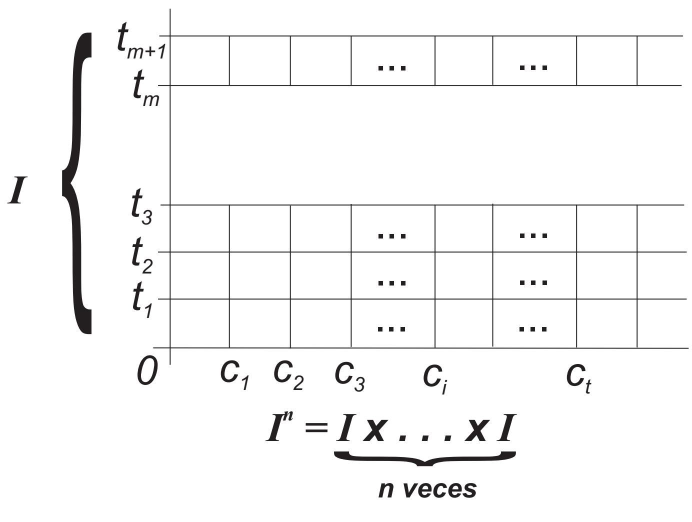
1.3.1 Definición. Sea $\mathscr{C}$ una familia de espacios topológicos. Una aplicación continua $p : E \longrightarrow B$ de un espacio topológico E sobre un espacio topológico

B es una $\mathscr{C}$-fibración si dados $X \in \mathscr{C}$, una aplicación continua $f : X \longrightarrow E$ y una homotopía $H : X \times I \longrightarrow B$ tal que $H(x,0) = pf(x)$, $x \in X$, existe una homotopía $\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$ tal que $\widetilde{H}(x,0) = f(x)$ y $p\widetilde{H} = H$. Al subespacio $p^{-1}(b)$ se denomina la fibra sobre $b \in B$.

1.3.2 Definición. Sea $p : E \longrightarrow B$ una $\mathscr{C}$-fibración. Si $\mathscr{C}$ es la clase de los discos D^n se dice que p es una fibración de Serre.
Si $\mathscr{C}$ es la clase de todos los espacios, se dice que p es una fibración de Hurewicz o simplemente una fibración.

1.3.3 Proposición. *Todo haz fibrado es una fibración de Serre.*

Como $I^n \times I$ es un espacio métrico compacto, existe un número $\delta > 0$, llamado número de Lebesgue de la cubierta $\{G^{-1}(U_{b_i})\}$, tal que todo subconjunto de diámetro menor que δ está contenida en $G^{-1}(U_{b_i})$ para algún i, $1 \leq i \leq k$. Podemos subdividir I^n en cubos pequeos C e I en intervalos $I_j = [t_j, t_{j+1}]$, $0 \leq j \leq m$, cada producto $C \times [t_j, t_{j+1}]$ es aplicado por G es U_{b_i} para algún i, $1 \leq i \leq k$.



Sea C el menor de los cubos considerados de la siguiente manera:

$$C_1 \times I_0, C_2 \times I_0, \ldots, C_t \times I_0, C_1 \times I_1, C_2 \times I_1, \ldots, C_t \times I_1, \ldots,$$

$$\ldots, C_1 \times I_m, C_2 \times I_m, \ldots, C_t \times I_m.$$

Si $G(C_i \times I_j) \subseteq U_{\alpha_{k_{i,j}}}$ para algún $1 \leq k_{i,j} \leq k$. El problema de levantamiento puede ser resuelto construyendo $H|_{C_i \times I_j}$ con propiedades deseadas por inducción. En el primer caso, del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_1 \times I_0 \arrow[r, "g|_{C_1}"] \arrow[d, hook] & p^{-1}(U_{\alpha_{k_{1,0}}}) \arrow[d, "p"] & \subseteq & E \arrow[d, "p"] \\ C_1 \times I_1 \arrow[r, "G|_{C_1 \times I_0}"'] \arrow[ur, dashed, "H|_{C_1 \times I_0}"] & U_{\alpha_{k_{1,0}}} & \subseteq & B \end{tikzcd}$$

el levantamiento $H_{C_1 \times I_0}$ existe puesto que

$$p : p^{-1}(U_{\alpha_{k_{1,0}}}) \longrightarrow U_{\alpha_{k_{1,0}}}$$

es el haz trivial.

Supongamos que $H|_{C_{i'} \times I_{j'}}$ son construidos para todo $C_{i'} \times C_{j'}$ procediendo $C_i \times I_j$. Entonces existe un subcomplejo A de ∂C_i tal que la aplicación H es definida en $C_i \times I_j$ y $A \times I_j$ dado que

$$p^{-1}(U_{\alpha_{k_{i,j}}}) \longrightarrow U_{\alpha_{k_{i,j}}}$$

es un haz trivial, existe una solución $H|_{C_i \times I_j}$ al problema de levantamiento de homotopía

$$\begin{tikzcd} (C_i \times I_j) \cup (A \times I_j) \arrow[r] \arrow[d, hook] & p^{-1}(U_{\alpha_{k_{i,j}}}) \arrow[d, "p"] & \leq & E \arrow[d, "p"] \\ C_i \times I_j \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "H|_{C_i \times I_j}"] & U_{\alpha_{k_{i,j}}} & \leq & B \end{tikzcd}$$

Finaliza la inducción. Esto prueba la proposición.

Sea X un espacio topológico, denotaremos con ΩX el espacio de lazos de X.

1.3.4 Proposición. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración de Serre con fibra F. Entonces $\Omega p : \Omega E \longrightarrow \Omega B$ es una fibración de Serre con fibra ΩF.*

Demostración. Tomando adjuntos, el problema de levantamiento de homotopía

$$\begin{tikzcd} D^n \times 0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & \Omega E \arrow[d, "\Omega p"] \\ D^n \times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \Omega B \end{tikzcd}$$

es equivalente al problema de levantamiento de homotopía

$$\begin{tikzcd} (D^n \times 0) \wedge S^1 \arrow[r, "g'"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ (D^n \times I) \wedge S^1 \arrow[r, "G'"'] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd} \tag{I.1}$$

donde g' y G' son las aplicaciones adjuntas de g y G respectivamente

$$(D^n \times I) \wedge S^1 = \frac{D^n \times I \times I}{(* \times D \times I) \cup (D^n \times I \times \partial I)}.$$

Sea $\overline{G}$ la composición de las aplicaciones

$$\overline{G} : D^n \times I \times I \longrightarrow (D^n \times I) \wedge S^1 \xrightarrow{G'} B,$$

esto es, $\overline{G}(x, s, t) = G'(x, s, t)$. Entonces $\overline{G}$ aplica el subespacio

$$(* \times D \times I) \cup (D^n \times I \times \partial I)$$

al punto base $b_0 \in B$. Definamos la aplicación:

$$\overline{g} : (D^n \times 0 \times I) \cup (D^n \times I \times \partial I) \longrightarrow E$$

$$g(x) = \begin{cases} g'(x) & , \text{ si } x \in D^n \times 0 \times I \\ e_0 & , \text{ si } x \in D^n \times I \times \partial I \end{cases}$$

donde e_0 es el punto base de E con $p(e_0) = b_0$. La aplicación $\overline{g}$ está bien definida puesto que para

$$x \in (D^n \times 0 \times I) \cap (D^n I \times \partial I) = D^n \times 0 \times \partial I$$

tenemos $g'(x) = e_0$, de este modo g' es una aplicación que preserva punto base de $(D^n \times D) \times S^1$ a E.

Sea $\overline{H}$ una solución al problema de levantamiento de homotopía

$$\begin{tikzcd}
(D^n \times I \times 0) \cup (D^n \times \partial I) \times I \cong (D^n \times 0 \times I) \cup (D^n \times I \times \partial I) \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
D^n \times I \times I \cong D^n \times I \times I \arrow[r, "\overline{G}"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

donde el homeomorfismo en la columna de la izquierda esta dado por switchin y las últimas dos coordenadas. Entonces $\overline{H}$ mapea el subespacio

$$(* \times 0 \times I) \cup (D^n \times I \times \partial I)$$

al punto base e_0 de este modo induce una aplicación

$$H' : (D^n \times I) \wedge S^1 \longrightarrow E$$

la cual es una solución al problema de levantamiento en el diagrama (I.1).
Eso prueba la proposición. ■

1.3.5 Corolario. $\Omega^n : \Omega^n E \longrightarrow \Omega^n B$ *es una fibración de Serre con fibra* $\Omega^n F$ *para* $n \geq 1$.

Siguiendo establecido en [7] y [12] damos la demostracin del teorema siguiente.

1.3.6 Teorema. *Sea* $p : E \longrightarrow B$ *una fibración de Serre con fibra* F*. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\ldots \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \pi_{n-1}(E) \longrightarrow \pi_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \pi_0(B)$$

donde $i : F \longrightarrow E$ *es la inclusión.*

Demostración. Veamos la definición de $\partial_{n+1} : \pi_{n+1}(B) \longrightarrow \pi_n(F)$ para $n \geq 0$, en efecto, es conocido

$$\pi_{n+1}(B) \cong \pi_1(\Omega^n B) \text{ y } \pi_n(F) \cong \pi_0(\Omega^n F) \cong \frac{\Omega^n F}{\simeq}$$

el conjunto de las componentes conexas por caminos de $\Omega^n F$, estas identificaciones nos permite definir ∂_{n+1} de $\pi_1(\Omega^n B)$ en $\pi_0(\Omega^n F)$.
Sea $[\alpha] \in \pi_1(\Omega^n B)$, $\alpha : I \longrightarrow \Omega^n B$ es un lazo en $\Omega^n B$, $\alpha(0) = \alpha(1) = b_0$. Por el corolario 1.3.5 $\Omega^n p : \Omega^n E \longrightarrow \Omega^n B$ es una fibración de Serre, existe un levantamiento $\widetilde{\alpha} : I \longrightarrow \Omega^n E$ con $\widetilde{\alpha}(0) = e_0$ y $\Omega^n p\widetilde{\alpha} = \alpha$. En particular $\Omega^n p\widetilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = b_0$. Luego $\widetilde{\alpha}(1) \in (\Omega^n p)^{-1}(b_0) = \Omega^n F$.
Definiremos

$$\begin{array}{rccc} \partial_{n+1} & : & \pi_1(\Omega^n B) = \pi_{n+1}(B) & \longrightarrow & \pi_n(F) = \pi_0(\Omega^n F) \\ & & [\alpha] & \longmapsto & [\widetilde{\alpha}(1)] \end{array}$$

Veamos que ∂_{n+1} esta bien definida, en efecto, sea $\alpha' : I \longrightarrow \Omega^n B$ otro lazo basado en b_0 tal que $\alpha' \simeq \alpha \operatorname{rel}\{b_0\}$, existe una homotopía $H : I \times I \longrightarrow \Omega^n B$ tal que $H(s,0) = \alpha(s), H(s,1) = \alpha'(s), H(0,t) = b_0 = H(1,t)$ para $s, t \in I$.
Sean $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\alpha'}$ los levantamientos de α y α' con $\widetilde{\alpha}(0) = e_0 = \widetilde{\alpha'}(0)$ respectivamente.
Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \times I \cup (I \times \partial I) \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & \Omega^n E \arrow[d, "\Omega^n p"] \\ I \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{H}"] & \Omega^n B \end{tikzcd}$$

donde g está definida por $g(0,t) = e_0$, $g(s,0) = \widetilde{\alpha}(s)$, $g(s,1) = \widetilde{\alpha'}(s)$.
Luego

$$\begin{array}{rclclcl} H(0,t) & = & b_0 & = & \Omega^n p(e_0) & = & \Omega^n pg(0,t) \\ H(s,0) & = & \alpha(s) & = & \Omega^n p\widetilde{\alpha}(s) & = & \Omega^n pg(s,0) \\ H(s,1) & = & \alpha'(s) & = & \Omega^n p\widetilde{\alpha'}(s) & = & \Omega^n pg(s,1) \end{array}$$

Como $\Omega^n p$ es una fibración, existe una aplicación continua $\widetilde{H} : I \times I \longrightarrow \Omega^n E$ tal que $\widetilde{H}(0,t) = g(0,t)$, $\widetilde{H}(s,0) = g(s,0)$, $\widetilde{H}(s,1) = g(s,1)$, $\Omega^n p\widetilde{H} = H$.
Como $\Omega^n p\widetilde{H}(1,t) = H(1,t) = b_0$ tenemos un camino $\lambda : t \longmapsto \widetilde{H}(1,t)$ e $\Omega^n F$ con $\lambda(0) = \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{\alpha}(1)$, luego

$$[\widetilde{\alpha}(1)] = [\widetilde{\alpha'}(1)]$$

en $\pi_0(\Omega^n F)$ y por tanto ∂_{n+1} esta bien definida.
Veamos que $\partial_{n+1} : \pi_{n+1}(B) \longrightarrow \pi_n(F)$ es un homeomorfismo de grupos para cada $n \geq 1$, en efecto, sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_{n+1}(B) = \pi_n(\Omega^n(B))$, $\alpha, \beta : I \longrightarrow \Omega^n B$ lazos con $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = \beta(1)$. Como $\Omega^n p : \Omega^n E \longrightarrow \Omega^n B$ es una fibración de Serre existen levantamientos $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : I \longrightarrow \Omega^n E$ con $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0) = e_0$ tales que $\Omega^n p\widetilde{\alpha} = \alpha$, $\Omega^n p\widetilde{\beta} = \beta$. Consideremos un camino $\widetilde{\gamma}$ en $\Omega^n E \times \Omega^n E$ definido por

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\gamma} & : & I & \longrightarrow & \Omega^n E \times \Omega^n E \\ & & t & \longmapsto & \widetilde{\gamma} = (\widetilde{\alpha}(t), \widetilde{\beta}(t)) \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} (\Omega^n p \times \Omega^n p)\widetilde{\gamma}(t) &= (\Omega^n p\widetilde{\alpha}(t), \Omega^n p\widetilde{\beta}(t)) \\ &= (\alpha(t), \beta(t)) \end{aligned}$$

por tanto $\overline{\gamma}$ es un levantamiento del lazo $(\alpha, \beta) : I \longrightarrow \Omega^n B \times \Omega^n B$ pues

$$\Omega^n p \times \Omega^n p : \Omega^n E \times \Omega^n E \longrightarrow \Omega^n B \times \Omega^n B$$

es una fibración de Serre con fibra $\Omega^n F \times \Omega^n F$.
Tenemos la aplicación $\partial_{n+1}^{p\times p}$ de $\pi_1(\Omega^n B) \times \pi_1(\Omega^n B) \cong \pi_1(\Omega^n B \times \Omega^1 B)$ en $\pi_0(\Omega^n F \times \Omega^n F) \cong \pi_0(\Omega^n F) \times \pi_0(\Omega^n F)$ definida como

$$\begin{aligned} ([\alpha], [\beta]) \longmapsto \partial_{n+1}^{p\times p}([\alpha], [\beta]) &= [\widetilde{\gamma}(1)] \\ &= [(\widetilde{\alpha}(1), \widetilde{\beta}(1))] \\ &= ([\widetilde{\alpha}(1)], [\widetilde{\beta}(1)]) \\ &= (\partial_{n+1}[\alpha], \partial_{n+1}[\beta]) \end{aligned}$$

Como $\Omega^n B = \mathrm{Map}_*(S^n, B)$ la co-multiplicación de S^n induce una multiplicación en $\Omega^n B$, esto es, $\mu : \Omega^n B \times \Omega^n B \longrightarrow \Omega^n B$.

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(B \times B) = \pi_1(\Omega^n B \times \Omega^n B) \arrow[r, "\partial_{n+1}^{p\times p}"] \arrow[d, "\mu_*"'] & \pi_0(\Omega^n F \times \Omega^n F) \arrow[d, "\mu_*"] \\
\pi_{n+1}(B) = \pi_1(\Omega^n B) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & \pi_0(\Omega^n F)
\end{tikzcd}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}([\alpha][\beta]) &= \partial_{n+1}\mu_*([\alpha],[\beta]) \\
&= \mu_*\partial_{n+1}^{p\times p}([\alpha],[\beta]) \\
&= \mu_*(\partial_{n+1}[\alpha], \partial_{n+1}[\beta]) \\
&= \partial_{n+1}([\alpha])\partial_{n+1}([\beta])
\end{aligned}$$

Veamos

$$\pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B)$$

es exacta; en efecto, como $p : E \longrightarrow B$ es una fibración por la proposición 1.3.4

$$\Omega^n p : \Omega^n E \longrightarrow \Omega^n B$$

es una fibración. Sea $x \in \Omega^n E$ tal que $\Omega^n p_*(x)$ es trivial en $\pi_0(\Omega B)$. Entonces existe un camino λ en B comenzando en $\Omega^n p(x)$ y terminando en el punto base. Sea $\overline{\lambda}$ un levantamiento del camino λ comenzando en x. Entonces $\overline{\lambda}(1) \in \Omega^n F$ puesto que

$$\Omega^n p(\overline{\lambda}(1)) = \lambda(1) = *,$$

luego que

$$i_*([\overline{\lambda}(1)]) = [x].$$

Veamos que la sucesión

$$\pi_{n+1}(E) \xrightarrow{p_*} \pi_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(F)$$

es exacto, en efecto, sea $[\lambda] \in \pi_1(\Omega^n B)$ y $\overline{\lambda} : I \longrightarrow \Omega^n E$ un levantamiento de λ con $\overline{\lambda}(0) = *$. Supongamos que

$$\partial_{n+1}([\lambda]) = [\overline{\lambda}(1)]$$

es trivial en $\pi_0(\Omega^n F)$. Entonces existe un camino

$$\mu : I \longrightarrow \Omega^n F$$

con $\mu(0) = \overline{\lambda}(1)$ y $\mu(1) = *$. Definamos

$$\widehat{\lambda} = \overline{\lambda} * \mu$$

como el producto de caminos en $\Omega^n E$. Entonces

$$\widehat{\lambda}(0) = \overline{\lambda}(0) = * \text{ y } \widehat{\lambda}(1) = \mu(1) = *.$$

Luego $\widehat{\lambda}$ es un lazo en $\Omega^n E$.

Ahora

$$\begin{aligned} p_*([\widehat{\lambda}]) &= p_*([\overline{\lambda}] * [\mu]) \\ &= [\Omega^n p(\overline{\lambda})] * [\Omega^n p(\mu)] \\ &= [\lambda] * [\Omega^n p(\mu)] \\ &= [\lambda] \end{aligned}$$

puesto que $\Omega^n p(\mu)$ es el lazo constante en $\Omega^n B$ dado que μ es un camino en $\Omega^n F$. Luego $[\lambda] \in \mathrm{Im}(p_*)$.

Veamos que la sucesión

$$\pi_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E)$$

es exacta, en efecto, sea $x \in \Omega^n F$ un punto fijo tal que $i_*([x])$ es trivial en $\pi_0(E)$. Entonces existe un camino λ en $\Omega^n E$ del punto base $*$ a x. Entonces

$$\overline{\lambda} = \Omega^n p \circ \lambda$$

es un lazo en $\Omega^n B$. Como λ es un levantamiento de $\overline{\lambda}$. por definición de ∂_{n+1}

$$\partial_{n+1}([\overline{\lambda}]) = [\lambda(1)] = [x]$$

de este modo $[x] \in \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$. $\blacksquare$

1.3.7 Corolario. *Sea $p : E \longrightarrow B$ un haz fibrado con fibra F. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\ldots \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \pi_{n-1}(E) \longrightarrow \pi_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \pi_0(B)$$

En base al trabajo de Jean-Pierre-Serre [6] desarrollarems las secciones 1.4 y 1.5

1.4. Álgebra universal envolvente

El álgebra envolvente constituye una herramienta indispensable en el estudio de las álgebras de Lie. Para describirla, definamos primero lo que se entiende por álgebra tensorial.

Sea K un anillo con unidad y S un conjunto. Un módulo libre sobre K en el conjunto S es un módulo F sobre K con una función $f : S \longrightarrow F$ tal que, para cualquier función $g : S \longrightarrow X$ del conjunto S en el módulo X sobre K, existe un único homomorfismo de mdulos $h : F \longrightarrow X$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & F \arrow[dl, "h"] \\ X & \end{tikzcd}$$

$hf = g$, cuando f es inyectiva, se identifica $f(S) = S$.

Un módulo F sobre K es llamado módulo libre sobre K generado por el conjunto dado S.

Cualquier espacio vectorial V sobre un campo K es un módulo libre sobre K.

Sea K un anillo conmutativo con unidad. Sean A y B módulos sobre K, sea $A \times B$ el producto cartesiano de los conjuntos A y B. Una función $g : A \times B \longrightarrow X$ de $A \times B$ en un módulo X sobre K se dice bilineal si es bi-aditiva y satisface

$$g(\lambda a, b) = \lambda g(a, b) = g(a, \lambda b)$$

para cualesquiera $\lambda \in K$, $a \in A$, $b \in B$.

Un <u>producto tensorial</u> sobre K de los K-módulos A y B es un módulo T sobre K junto con una función bilineal $f : A \times B \longrightarrow T$ tal que, para cualquier función bilineal $g : A \times B \longrightarrow X$ de $A \times B$ en un K-módulo X, existe un único homomorfismo de K-módulos $h : T \longrightarrow X$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & T \arrow[dl, "h"] \\ X & \end{tikzcd}$$

$h \circ f = g$.

Consideremos un K-módulo libre (F, i) en el conjunto $A \times B$ con $i : A \times B \longrightarrow F$. Sea G un sub-módulo de F generado por los elementos

$$i(a_1 + a_2, b) - i(a_1, b) - i(a_2, b)$$

$$i(a, b_1 + b_2) - i(a, b_1) - i(a, b_2)$$

$$i(\lambda a, b) - \lambda i(a, b)$$

$$i(a, \lambda b) - \lambda i(a, b)$$

para cualesquiera $\lambda \in K$, $a_1, a_2, a \in A$, $b_1, b_2, b \in B$. Obtenemos un módulo cociente

$$T = \frac{F}{G}$$

sobre K con proyección $p : F \longrightarrow \dfrac{F}{G} = T$, $f = p \circ i : A \times B \longrightarrow T$ es bilineal, (T, f) es <u>producto tensorial sobre</u> K de los K-módulos A y B. Este módulo T sobre K es denotado por $A \otimes_K B$.

La función bilineal f es denotada por $\tau : A \times B \longrightarrow A \otimes_K B$ llamada aplicación tensor, τ no es inyectiva a menos de que $A = 0 = B$. Para cada $a \in A$, $b \in B$, el elemento $\tau(a, b)$ de $A \otimes_K B$ es denotado por $a \otimes_K b$ llamado el producto tensorial sobre K de los elementos a y b. Cualquier elemento $t \in A \otimes_K B$ es escrito en la forma

$$t = \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes_K b_i)$$

donde $a_i \in A$, $b_i \in B$, $1 \leq i \leq n$.

Sean $f : A \longrightarrow A'$, $g : B \longrightarrow B'$ homomorfismos de módulos sobre K. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "f \times g"'] & A \otimes_K B \arrow[d, "h"] \\ A' \times B' \arrow[r, "\tau'"] & A' \otimes_K B' \end{tikzcd}$$

$h \circ \tau = \tau' \circ (f \times g)$. A la aplicación h se denota por $f \otimes_K g$.

Sea X un álgebra sobre K. La multiplicación en X define una funcional bilineal $\mu : X \times X \longrightarrow X$ del producto $X \times X$ en el módulo X sobre K. Existe un único homomorfismo de módulos

$$\nu : X \otimes_K X \longrightarrow X$$

que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & & X \otimes_K X \arrow[dl, "\nu"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\nu \circ \tau = \mu$. Al homomorfismo ν se denomina linealización de la multiplicación μ.

Sean A y B álgebras sobre K, sea $T = A \otimes_K B$ el producto tensorial de los módulos A y B. Construyamos una multiplicación en T. Como T es generado por los elementos de la forma $a \otimes_K b$ y la multiplicación tiene que ser bilineal, es suficiente definir el producto en esos elementos

$$(a_1 \otimes_K b_1)(a_2 \otimes_K b_2) = a_1 a_2 \otimes_K b_1 b_2$$

para todo $a_1, a_2 \in A$, $b_1 b_2 \in B$.

La asignación

$$(a_1 \otimes_K b_1, a_2 \otimes_K b_2) \longmapsto a_1 a_2 \otimes_K b_1 b_2$$

se extiende a una única función bilineal

$$\mu : T \times T \longrightarrow T$$

con μ como multiplicación, T es un álgebra sobre K llamada producto tensorial sobre K de las álgebras A y B.

Sea K un anillo con unidad 1 y M un módulo sobre K. Un álgebra tensorial sobre el módulo M es un álgebra asociativa T sobre K con identidad 1 junto con un homomorfismo de módulos $f : M \longrightarrow T$ tal que, para cualquier homomorfismo de módulos $g : M \longrightarrow X$ de M en un álgebra asociativa X sobre K con identidad existe un único homomorfismo de álgebras $h : T \longrightarrow X$ la cual satisface la condición que $h(1)$ es la identidad de X y hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \arrow[dl, "h"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$hf = g$.

Dado un módulo M sobre K, existe un álgebra tensorial sobre M. Para $n \geq 0$ definamos el módulo T_n sobre K como sigue: si $n = 0$, $T_0 = K$, si $n > 0$,

$$T_n = \underbrace{M \otimes M \otimes \ldots \otimes M}_{n \text{ veces}}.$$

Consideremos la suma directa

$$T = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n$$

T es un módulo sobre K, T_n se puede identificar con un sub-módulo de T. Definamos una multiplicación en T. Dado que el módulo T es generado por $1 \in T_0 = K$

y los productos tensoriales $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n \in T_n$ de elementos $x_i \in M$ para todo $n > 0$ es suficiente definir el producto en esos elementos

$$\begin{aligned}1(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n) &= x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n \\ &= (x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n)1\end{aligned}$$

$$(u_1 \otimes \ldots \otimes u_p)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_q) = u_1 \otimes \ldots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_q.$$

El álgebra asociativa T es denotada por $T_K(M)$ llamada <u>álgebra</u> <u>tensorial</u> <u>en</u> <u>el</u> <u>módulo</u> M <u>sobre</u> K f es monomorfismo, $M = f(M)$ en $T_K(M)$. Luego M es un sub-módulo de $T_K(M)$.
Un álgebra graduada X sobre K es regularmente graduado si satisface

1.- El grupo de graduación de X es el grupo aditivo $\mathbb{Z}$ de los enteros.

2.- X no tiene elementos homogéneos diferente de cero de grado menor que cero ($X_n = 0$ para $n < 0$).

3.- $\alpha \longmapsto \alpha e$ define una función biyectiva

$$j : K \longrightarrow X_0$$

del anillo de coeficientes K en el sub-anillo X_0 de todos los elementos homogéneos de X de grado cero.

El álgebra tensorial $T_K(M)$ de cualquier módulo M sobre K es un álgebra regularmente graduado sobre K con una descomposición de suma directa

$$T_K(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n$$

donde $T_0 = K$, $T_1 = M$ y $T_n = \underbrace{M \otimes_K M \otimes_K \ldots \otimes_K M}_{n \text{ veces}}$, $n > 1$. Cualquier homomorfismo de módulos $g : M \longrightarrow X$ de M en un álgebra asociativa X con identidad e se extiende a un único homomorfismo

$$h : T_K(M) \longrightarrow X \text{ con } h(1) = e.$$

Sea K un anillo conmutativo con elemento unidad.

1.4.1 Definición. Un K-módulo A es un álgebra de Lie, si viene dado con una aplicación bilineal, el corchete de Lie, denotado como

$$(x, y) \longrightarrow [x, y]$$

para $x, y \in A$ la cual satisface $[x, x] = 0$ y la identidad de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Otra definición de álgebras de Lie (no graduado) fue dada por Serre en [8].

1.4.2 Definición. Un K módulo A es un álgebra sobre K si viene dado con una aplicación K-bilineal $A \times A \longrightarrow A$ (esto es, un homomorfismo $A \otimes_K A \longrightarrow A$).

Observemos que esta aplicación o producto no es necesariamente asociativo.
Un espacio vectorial A sobre un campo K es un álgebra si tiene un producto $A \times A \longrightarrow A$ K-bilineal.

1.4.3 Definición. Un álgebra de Lie sobre K es un K-álgebra con las siguientes propiedades:

1.- (Propiedad alterno) Si la imagen de (x, y) bajo el K-homomorfismo $A \otimes_K A \longrightarrow A$ es denotado por $[x, y]$ entonces

$$[x, x] = 0 \text{ para todo } x \in A.$$

2.- (Identidad de Jacobi)

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[x, z], y] = 0.$$

Observemos que las anteriores dos definiciones son equivalentes, también lo son las dos versiones de la identidad de Jacobi.

EJEMPLOS:

1) Sea A cualquier K-módulo. Definamos $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in A$, tal A es llamado un álgebra de Lie conmutativo.

2) Sea A un álgebra asociativa sobre K. Definamos

$$[x, y] = xy - yx,$$

para $x, y \in A$. Claramente A es un álgebra de Lie.

Veamos ahora la definición de álgebra envolvente universal.

1.4.4 Definición. Sea L un álgebra de Lie sobre K. Un álgebra envolvente universal de L es un par $(UL, \in)$ donde UL es un álgebra asociativa con unidad y $\in: L \longrightarrow UL$, que verifica

1.- $\in$ es un homomorfismo de álgebras de Lie (esto es, $\in$ es K-lineal y $\in([x, y]) = \in(x) \in(y) - \in(y) \in(x)$).

2.- Si A es un álgebra asociativa con unidad y $f : L \longrightarrow A$ es un homomorfismo de álgebras de Lie entonces existe un único homomorfismo de álgebras asociativa $\overline{f} : UL \longrightarrow A$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\in"] \arrow[d, "f"'] & UL \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Se demuestra que el álgebra envolvente de un álgebra de Lie existe y es única salvo isomorfismo. La construcción del álgebra envolvente se hace a partir del álgebra tensorial $T(L)$, construyendo su corchete por el ideal bilateral J, generado por los elementos de la forma

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$$

con $x, y \in L$. Entonces se tiene

$$UL = \frac{T(L)}{J}$$

se llama aplicación canónica, $\in$, de L en UL a la composición de las aplicaciones

$$T \longrightarrow T(L) \stackrel{\pi}{\longrightarrow} UL.$$

La proyección $\pi : T(L) \longrightarrow UL$ verifica

$$\pi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \in (x_1) \in (x_2) \ldots \in (x_n).$$

En particular, como

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in J,$$

se tiene

$$\pi(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0$$

es decir,

$$\in (x) \in (y) - \in (y) \in (x) = \in ([x, y]).$$

Sea L un K-módulo y definamos $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in L$. En este caso el álgebra universal UL de L se denomina álgebra simétrica del K-módulo L y es denotado por SL.

Uno de los resultados más importantes sobre las álgebras envolventes es el Teorema de Poincare - Birkhoff - Witt que permite construir una base en este álgebra. Sea L un álgebra de Lie sobre K y sea UL el álgebra universal de L. Definamos una filtración de UL como sigue:

Sea U_nL el sub-módulo de UL generado por los productos

$$\in (x_1) \ldots \in (x_m),$$

$m \leq n$, donde $x_i \in L$. Tenemos

$$\begin{aligned} U_0L &= K \\ U_1L &= K \oplus \in (L) \end{aligned}$$

y

$$U_0L \subset U_1L \subset \ldots \subset U_nL \subset U_{n+1}L \subset \ldots$$

ahora definamos

$$gr_nUL = \frac{U_nL}{U_{n-1}L} \text{ y } grUL = \bigoplus_{n=0}^{\infty} gr_nUL.$$

la aplicación

$$\begin{array}{ccc} U_pL \times U_qL & \longrightarrow & U_{p+q}L \\ (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

define por paso al cociente, una aplicación bilineal

$$gr_pUL \times gr_qUL \longrightarrow gr_{p+q}UL$$

obtenemos una estructura de álgebra graduada en $grUL$, con esta estructura $grUL$ es llamada <u>álgebra</u> <u>graduada</u> asociada a UL. Es asociativa y tiene unidad.

1.4.5 Proposición. *El álgebra $grUL$ es generada por la imagen de L bajo la aplicación inducida por $\in: L \longrightarrow UL$.*

Demostración. Se $a \in U_nL$, $\overline{a} \in grUL$ es la imagen de a bajo la proyección

$$U_nL \longrightarrow \frac{U_nL}{U_{n-1}L}.$$

Podemos escribir a como suma de productos de a lo más n elementos de L.

$$a = \sum_{m_u \leq n} c_u \in (x_{u,1}) \ldots \in (x_{u,m_u})$$

entonces $\overline{a}$ puede ser escrito como las correspondientes suma homogéneas

$$\overline{a} = \sum_{m_u \leq n} c_u \overline{\in (x_{u,1})} \ldots \overline{\in (x_{u,m_u})}.$$

En otras palabras, como un álgebra, $grUL$ es generado por los elementos $\overline{\in (x)}$, $x \in L$. ■

1.4.6 Proposición. *El álgebra $grUL$ es conmutativa*

Demostración. Como $\in$ es homomorfismo de álgebras de Lie, para $x, y \in L$

$$\in(x) \in(y) - \in(y) \in(x) = \in[x, y]$$

pero $\in[x, y] \in U_1L$. Entonces

$$\overline{\in(x) \in(y)} - \overline{\in(y) \in(x)} = 0$$

en gr_2UL. Esto prueba la conmutatividad.

Por la propiedad universal del álgebra simétrica existe un único homomorfismo de álgebras

$$i^1 : SL \longrightarrow grUL$$

que extiende a la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & grUL \\ x & \longmapsto & \overline{\in(x)} \end{array}$$

dado que $\overline{\in(x)}$ genera a $grUL$ como álgebra, i^1 es sobre. ■

1.4.7 Teorema (Poincaré - Birkhoff - Witt). *Si L es un K-módulo libre, entonces i^1 es isomorfismo.*

Sea $(x_j)_{j \in I}$ una base de L y elejimos un orden total en I.

Desde que

$$\overline{\in(x_j)}\,\overline{\in(x_k)} = \overline{\in(x_k)}\,\overline{\in(x_j)} j, k \in Italquej \neq k$$

podemos arreglar cualquier producto $\overline{\in(x_j)}$ con el fin de estar en orden creciente.

Esto prueba que los elementos

$$x_M := \in(x_{j_1}) \dots \in(x_{j_m}), M := (j_1, \dots, j_m)$$

con $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m$ generan UL (como un K-módulo).

1.4.8 Lema. *La siguiente afirmación es equivalente a 1.4.7. Los elementos x_M forman una base de UL.*

Para cualquier expresión x_M, denotaremos la longitud de M por $l(M) = m$. Para cada $n \geq 0$ los elementos x_M con $L(M) = n$ estan en U_nL, y sus imagenes $\overline{x}_M$ en

$$gr_nUL = \frac{U_nL}{U_{n-1}L}$$

son las imágenes, bajo la aplicación

$$i^1 : S_nL \longrightarrow gr_nUL,$$

de los elementos minomiales básicos de S_nL. La inyectividad de i es equivalente a la no existencia de una relación de la forma

$$\sum_{l(M)=n} c_M x_M \equiv 0 \mod U_{n-1}L$$

con algún $c_M \neq 0$. Pero esto es lo mismo como la no existencia de una relación de la forma

$$\sum_{l(M)=n} c_M x_M = \sum_{l(M)<n} c_M x_M$$

con algún c_M no cero en el lado izquierdo. Pero cualquier relación de dependencia K-lineal no trivial entre x_M puede ser escrito en la útima forma moviendo los términos de mayor longitud a un lado. De ahí el lema 1.4.8 es verdad y podemos proceder a probar el teorema 1.4.7 para ello podemos suponer que I está bien ordenado.

Sea V un K-módulo libre con $\{Z_M\}$ donde M recorre el conjunto de todas las sucesiones $(j_1, \ldots, j_n)$ con $n \geq 0$ e $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_n$ como antes. Si $i \in I$ y $M = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, escribimos $j \leq M$ si $j \leq j_1$ y entonces iM denota la sucesión ordenada $(i, i_1, \ldots, i_n)$. En particular, se odopta la convención que si $M = \emptyset$ es la sucesión vacía entonces $i \leq M$ para todo i en cuyo caso $iM = (i)$.

1.4.9 Lema. *Podemos hacer que V sea un L-módulo de tal manera que $x_iZ_M = Z_{iM}$ cuando $i \leq M$.*

Demostración. Primero definamos una aplicación K-bilineal

$$\begin{array}{rcl} L \times V & \longrightarrow & V \\ (x, v) & \longmapsto & xv \end{array}$$

y luego pasaremos a demostrar que V es un L-módulo, es decir satisface

$$xyv.yxv = [x, y]v \text{ para } x, y \in L \text{ y } v \in V \tag{I.2}$$

Para definir xv es suficiente definir x_iZ_M para todo i y M, y vamos a definir x_iZ_M inductivamente en $l(M)$ y en i. Empecemos definiendo $x_iZ_\emptyset = Z_{(i)}$. Esto define x_iZ_M para para $l(M) = 0$. Para $l(M) = 1$ definamos

$$\begin{array}{rcl} x_iZ_{(j)} & = & Z_{(i,j)} \text{ si } i \leq j \\ x_iZ_{(j)} & = & x_iZ_{(i)} + [x_i, x_j]Z_\emptyset \\ & = & Z_{(j,i)} + \sum c_{ij}^k Z_{(k)} \text{ si } i > j \end{array}$$

donde $[x_i, x_j] = \sum c_{ij}^k x_k$ es la expresión para el corchete de Lie de x_i con x_j en términos de nuestra base. Las constantes c_{ij}^k son conocidas como las constantes de estructura del álgebra de Lie L en términos de la base dada.
Podemos suponer que x_jZ_M está bien definido para todo $j \in I$ cuando $l(N) < l(M)$ y para $j < i$ cuando $l(N) = L(M)$ de tal manera que

$$x_jZ_N \text{ es una combinación } K\text{-lineal de los } Z_L \text{ con } l(L) \leq l(N) + 1. \tag{I.3}$$

A continuación definamos

$$x_iZ_M = \begin{cases} Z_{iM} & , \text{si } i \leq M \\ x_j(x_iZ_N) + [x_i, x_j]Z_N & , \text{si } M = jN \text{ con } i > j \end{cases} \tag{I.4}$$

esto tiene sentido puesto que x_iZ_N es definido como una combinación lineal de los Z_L con $l(L) \leq l(N) + 1 = L(M)$ y $[x_i, x_j]$ es una combinación lineal de los x_k.

Por otra parte (I.3) se cumple con j y N sustituido por i y M. Podemos chequear (I.2) por linealidad, esto significa que debemos probar que

$$x_i x_j Z_N - x_j x_i Z_N = [x_i, x_j] Z_N \tag{I.5}$$

para todo i, j y N.

Si $i = j$ ambos lados son iguales a cero. Además dado que ambos lados son antisimétricos en i y j, podemos suponer que $i > j$. Si $j \leq N$, entonces $x_j Z_N = Z_{jN}$ y (I.5) se sigue del segundo caso de nuestra definición inductiva anterior (I.4). De este modo necesitamos considerar el caso $j \nleq N$ lo que significa que $N = kP$ con $k \leq P$ y $i > j > k$. De este modo tenemos, por definición

$$\begin{aligned} x_j Z_N &= x_j Z_{(kP)} \\ &= x_j x_k Z_P \\ &= x_k x_j Z_P + [x_j, x_k] Z_P \end{aligned}$$

Ahora si $j \leq P$ entonces $x_j Z_P = Z_{(jP)}$ y $k < (jP)$. Si $j \nleq P$ entonces $x_j Z_P = Z_Q + w$ donde todavía $k \leq Q$ y w es una combinación lineal de elementos de longitud $< l(N)$.

De este modo sabemos que tenemos (I.2) para $x = x_i$, $y = x_k$ y $v = Z_{(jP)}$ (si $j \leq P$) o $v = Z_Q$ (otras veces).

Además, por inducción, podemos suponer que tenemos (I.2) para todo N' de longitud $< l(N)$. Por lo tanto podemos aplicar (I.2) para $x = x_i$, $y = x_k$ y $v = x_j Z_P$ y también para $x = x_i$, $y = [x_j, x_k]$, $v = Z_P$. De este modo

$$x_i x_j Z_N = x_k x_i x_j Z_P + [x_i, x_k] x_j Z_P + [x_j, x_k] x_i Z_P + [x_i, [x_j, x_k]] Z_P.$$

Similarmente tenemos el mismo resultado cuando i y j son intercambiados.

Restando esta versión intercambiada de la ecuación anterior los dos términos centrales de cada ecuación se cancelan y tenemos

$$\begin{aligned}
(x_i x_j - x_j x_i)Z_N &= x_k(x_i x_j - x_j x_i)Z_P + ([x_i,[x_j,x_k]] - [x_j,[x_i,x_k]])\, Z_P \\
&= x_k[x_i,x_j]Z_P + ([x_i,[x_j,x_k]] - [x_j,[x_i,x_k]])\, Z_P \\
&= [x_i,x_j]x_k Z_P + ([x_k,[x_i,x_j]] + [x_i,[x_j,x_k]] - [x_j,[x_i,x_k]])\, Z_P \\
&= [x_i,x_j]Z_N
\end{aligned}$$

(Para pasar del segundo renglón al tercero usamos (I.2) aplicado a Z_P (por inducción) y el paso del tercer renglón al cuarto usamos la antisimetría del corchete y la ecuación de Jacobi).

Esto prueba el lema. ■

Desde que V es un L-módulo, también es un UL-módulo.

Demostración del teorema 1.4.7. Tenemos en V el elemento $Z_\emptyset$ donde $\emptyset$ es el conjunto vacío. Para todo M tenemos $x_M Z_\emptyset = Z_M$. Probemos por inducción en $l(M)$. Si $l(M) = 0$ es claro puesto que $x_M = 1$. Si $l(M) > 0$ escribamos $M = iN$, $i \leq N$. Entonces $x_M = x_i x_N$ y

$$x_M Z_\emptyset = x_i x_N Z_\emptyset = x_i Z_N = Z_{iN} = Z_M.$$

Finalmente, supongamos

$$\sum c_M x_M = 0$$

entonces

$$0 = \sum c_M x_M Z_\emptyset = \sum c_M Z_M$$

pero esto implica $c_M = 0$ para todo M. ■

1.4.10 Corolario. *Si L es un K-módulo libre entonces $\in: L \to UL$ es inyectiva.*

1.5. Álgebra de Lie libre

Sea K un anillo conmutativo y asociativo con unidad, todos las módulos y álgebras son tomadas sobre K.

1.5.1 Definición (Magma libre). Un conjunto M con una aplicación $M \times M \longrightarrow M$ es llamado magma, y la imagen de (x, y) bajo esta aplicación es denotado por xy.

Sea A un conjunto y definamos inductivamente una familia de conjuntos A_n $(n \geq 1)$ como sigue:

1. $A_1 = A$
2. $A_n = \bigsqcup\limits_{p+q=n} A_p \times A_q$ $(n \geq 2)$ donde $\bigsqcup$ denota unión disjunta.

   Por ejemplo:

   $A_2 = \bigsqcup\limits_{p+q=2} A_p \times A_q = A_1 \times A_1 = \{(a, b)/a, b \in A\}$.

   $A_3 = \bigsqcup\limits_{p+q=3} A_p \times A_q = A_1 \times A_2 \cup A_2 \times A_1 = \{(a, (b, c)), ((a, b), c)\}$.

   $A_4 = \bigsqcup\limits_{p+q=4} A_p \times A_q = A_1 \times A_3 \cup A_3 \times A_1 \cup A_2 \times A_2$
   $= \{(a, (b, (c, d))), ((a, (b, c)), d), (((a, b), c), d), ((a, b), (c, d)), (a, ((b, c), d))\}$.

Pongamos $M_A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y definamos $M_A \times M_A \longrightarrow M_A$ por medio de

$$A_p \times A_q \longrightarrow A_{p+q} \subseteq M_A$$

donde la flecha es la inclusión canónica que resulta de (2).

El magma M_A es llamado magma libre sobre A, un elemento $w \in M_A$ es llamado una palabra no asociativa sobre A. Su longitud, $l(w)$, es el único n tal que $w \in A_n$.

1.5.2 Proposición. *Sea N cualquier magma, y sea $f : A \longrightarrow N$ cualquier aplicación. Entonces existe un único homomorfismo de magma $F : M_A \longrightarrow N$ la cual extiende a f.*

Demostración. Definiremos F inductivamente por

1) $F = f$ sobre $A_1 = A$

2)

$$\begin{array}{rcccl} F & : & A_2 & \longrightarrow & N \\ & & (a,b) & \longmapsto & F(a,b) = f(a)f(b) \end{array}$$

con $(a,b) \in A \times A$.

3)

$$\begin{array}{rcccl} F & : & A_p \times A_q & \longrightarrow & N \\ & & (u,v) & \longmapsto & F(u,v) = F(u)F(v) \end{array}$$

con $(u,v) \in A_p \times A_q$.

F es un homomorfismo magma y es unívocamente determinado por f. ∎

Propiedades del magma libre M_A:

1. M_A es generado por A

2. $m \in M_A \setminus A \iff m = u \cdot v$, con $u, v \in M_A$; y u, v son unicamente determinados por m.

Sea X un conjunto y A_X el K-álgebra del magma libre M_X, esto es, A_X es un K-módulo libre en M_X por lo que un elemento $\alpha \in A_X$ es una suma finita $\alpha = \sum\limits_{m \in M_X} c_m m$, con $c_m \in K$; la multiplicación en A_X extiende la multiplicación en M_X.

1.5.3 Definición. El álgebra A_X es llamado el álgebra libre sobre X.

Está definición es justificada por la proposición siguiente

1.5.4 Proposición. *Sea B un K-álgebra y sea $f : X \longrightarrow B$ una aplicación. Existe un único homomorfismo de K-álgebras $F : A_X \to B$ el cual extiende a f.*

Demostración. Por la proposición 1.5.2 podemos extender f a un homomorfismo de magmas $f' : M_X \longrightarrow B$, donde B es visto como un magma bajo la multiplicación. Esta aplicación se extiende por linealidad a una aplicación K-lineal $F : A_X \longrightarrow B$. Es fácil ver que F es un homomorfismo de álgebras. La unicidad de F se sigue por el hecho de que X genera a A_X. ■

Sea X un conjunto, I_X ideal bilateral de A_X generado por los elementos de la forma aa, $a \in A_X$ y $J(a, b, c)$ donde $a, b, c \in A_X$ donde

$$J(a, b, c) = (ab)c + (bc)a + (ca)b.$$

1.5.5 Definición. El álgebra cociente A_X/I_X es llamada el álgebra de Lie libre generada por X.
Este álgebra es denotada por $L_K(X)$ o simplemente por $L(X)$ cuando no hay confusión con K.

Para $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $L_K(X_n)$ es el álgebra de Lie libre generada por X_n sobre K.

1.5.6 Definición. Sea $E = K^{(X)}$ el K-módulo libre con base X. Entonces el álgebra asociativa libre sobre X denotado por Ass_X, es el álgebra tensorial TE de E o sea $\mathrm{Ass}_X = T(E)$.

Cualquier aplicación de X en un álgebra asociativa A se extiende a un único homomorfismo de $K^{(X)}$ a A y por lo tanto a un único homomorfismo de Ass_X a A. Por consiguiente Ass_X es el álgebra asociativa libre sobre X
Tenemos las aplicaciones $X \longrightarrow L_X$ y $\in : L_X \longrightarrow UL_X$ y por lo tanto la composición es una aplicación de X en el álgebra asociativa UL_X y por consiguiente se extiende a un único homomorfismo

$$\psi : \mathrm{Ass}_X \longrightarrow UL_X.$$

Por otro lado, el corchete conmutador da una estructura de álgebra de Lie a Ass_X y la aplicación $X \longrightarrow \mathrm{Ass}_X$ da lugar a un homomorfimo de álgebras de Lie

$$L_X \longrightarrow \mathrm{Ass}_X$$

lo cual determina un homomorfismo de álgebras asociativas

$$\Phi : UL_X \longrightarrow \mathrm{Ass}_X$$

Las composiciones $\psi \circ \Phi = id$ y $\Phi \circ \psi = id$. Obtenemos que UL_X y Ass_X son canónicamente isomorfos

$$UL_X \cong \mathrm{Ass}_X \tag{I.6}$$

Ahora el teorema 1.4.7 garantiza que la aplicación $\in : L_X \longrightarrow UL_X$ es inyectiva. De este modo bajo el isomorfismo (I.6) la aplicación $L_X \longrightarrow \mathrm{Ass}_X$ es inyectiva. Por otro lado, por construcción, la aplicación $X \longrightarrow K^{(X)}$ induce un homomorfismo suryectivo de álgebras de Lie de L_X en el sub-álgebra de Lie de Ass_X generado por X. De este modo vemos que bajo el isomorfismo (I.6) $L_X \subset UL_X$ es aplicado isomorficamente sobre el sub-álgebra de Lie de Ass_X generado por X.
Hemos probado la proposición siguiente:

1.5.7 Proposición. *Sean $\phi : L_X \longrightarrow \mathrm{Ass}_X$ y $\Phi : UL_X \longrightarrow \mathrm{Ass}_X$ las aplicaciones inducidas por la aplicación $X \longrightarrow \mathrm{Ass}_X$. Entonces*

1) La aplicación Φ es isomorfismo

2) La aplicación ϕ es un isomorfismo de L_X en el sub-álgebra de Lie de Ass_X generado por X.

Tomemos $K = \mathbb{Z}$. Sea X un conjunto y sea $F(X)$ el grupo libre generado por X. Si $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ entonces $F(X_n)$ o F_n denotará el grupo libre generado por X_n.

Sea $F^n(X)$ la serie central descendente de $F(X)$ definido por

$$\begin{aligned} F^1(X) &= F(X) \\ F^2(X) &= [F(X), F^1(X)] \\ &\vdots \\ F^n(X) &= [F(X), F^{n-1}(X)] \end{aligned}$$

El grupo graduado asociado es, como álgebra de Lie, dado por

$$grF(X) = \sum_{n=1}^{\infty} gr_n F(X),\ \ gr_n F(X) = \frac{F^n(X)}{F^{n+1}(X)}.$$

En particular

$$gr_1 F(X) = \frac{F(X)}{[F(X), F(X)]},$$

esto es, $gr_1 F(X)$ es un grupo abeliano libre sobre X.

Nuestro objetivo principal es probar el siguiente resultado:

1.5.8 Teorema. *La aplicación canónica $X \longrightarrow gr_1 F(X)$ induce un isomorfismo de álgebras de Lie*

$$\varphi_1 : L_X \longrightarrow grF(X).$$

Ahora consideremos el álgebra asociativa libre Ass_X sobre X; sea Ass_X^n la componente de grado n de Ass_X.

La <u>completación</u> $\widehat{\mathrm{Ass}_X}$ de Ass_X es definido como el producto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ass}_X^n$.

Un elemento $f \in \widehat{\mathrm{Ass}_X}$ puede ser representado por una serie formal $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ con $f_n \in \mathrm{Ass}_X^n$.

Definiremos un homomorfismo

$$\begin{aligned} \theta \ : \ F(X) &\longrightarrow \widehat{\mathrm{Ass}_X}^{\,*} \\ x &\longmapsto \theta(x) = 1 + x \end{aligned}$$

donde $\widehat{\mathrm{Ass}_X}^*$ es el grupo multiplicativo de elementos inversibles de $\widehat{Ass_X}$ (Es claro que $1 + x$ es inversible en $\widehat{\mathrm{Ass}_X}$, de este modo está en el grupo multiplicativo $\widehat{\mathrm{Ass}_X}^*$).

Para cualquier entero positivo n, definamos $\widehat{\mathfrak{m}}^n \subset \widehat{\mathrm{Ass}_X}$ como

$$\widehat{\mathfrak{m}}^n = \{f \ / \ f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ y } f_0 = f_1 = \ldots = f_{n-1} = 0\}$$

y sea ${}'F^n(X) = \theta^{-1}(1 + \widehat{\mathfrak{m}}^n)$. Entonces

$$g \in F(X) \text{ está en } {}'F^n(X) \text{ si y sólo si } \theta(g) = 1 + \sum_{m \geq n} \psi_n.$$

Tenemos ${}'F^1(X) = F(X)$ y ${}'F^n(X) \subset {}'F^{n-1}(X)$.

1.5.9 Proposición. ${}'F^n(X) = F^n(X)$.

Demostración del teorema 1.5.8 y proposición 1.5.9.

1. $\varphi_1 : L(X) \longrightarrow grF(X)$ es sobreyectiva, esto es claro.

2. Para ver que φ_1 es inyectiva haremos uso del teorema 1.4.7 en el siguiente sentido: La composición de las aplicaciones

$$L_X \xrightarrow{\varphi_1} grF(X) \xrightarrow{\psi} {}'grF(X) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Ass}_X$$

   $\eta \circ \psi \circ \varphi_1 = i^1$ donde i^1 es el homomorfismo inyectivo del teorema 1.4.7, φ_1 sobre y η inyectiva para concluir que φ_1 es inyectiva.

3. $\{{}'F^n(X)\}$ es una filtración de $F(X)$, en efecto, sólo tenemos que comprobar

$$[{}'F^m(X), {}'F^p(X)] \subset {}'F_X^{m+p}.$$

   En efecto, sean $g \in {}'F^m(X)$ y $h \in {}'F^p(X)$ con $\theta(g) = 1 + G$, con $G \in \widehat{\mathfrak{m}}^m$ y $\theta(h) = 1 + H$ con $H \in \widehat{\mathfrak{m}}^p$. Tenemos $gh = hg[g, h]$

$$\begin{aligned} \theta(gh) &= 1 + G + H + GH \\ \theta(hg) &= 1 + G + H + HG \end{aligned}$$

Como θ es homomorfismo

$$\theta(gh) = \theta(hg)\theta([g,h]),$$

esto es,

$$\theta([g,h]) = 1 + (GH - HG) + \text{ términos grandes.} \tag{I.7}$$

Por tanto $[g,h] \in {}'F^{m+p}(X)$.

Existe un aplicación natural definida como sigue:

$$\eta : {}'grF(X) \longrightarrow \mathrm{Ass}_X \,.$$

Si $\xi \in {}'gr^n F(X)$, sea $g \in {}'F^n(X)$ un representante de ξ, y si

$$\theta(g) = 1 + G_n + G_{n+1} + \ldots \text{ con } G_p \in \mathrm{Ass}_X^p,$$

definimos $\eta(\xi) = G_n$.

Es fácil ver que esta definición no depende de la elección del representante g. La fórmula (I.7) prueba que

$$\eta : {}'grF(X) \longrightarrow \mathrm{Ass}_X$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Como ${}'F^n(X)$ es una filtración, conocemos $F^n(X) \subseteq {}'F^n(X)$ la cual induce un homomorfismo

$$\psi : grF(X) \longrightarrow {}'grF(X)$$

La composición

$$L_X \xrightarrow{\varphi_1} grF(X) \xrightarrow{\psi} {}'grF(X) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Ass}_X$$

es la aplicación $i^1 : L_X \longrightarrow \mathrm{Ass}_X$ dada en el teorema 1.4.7 la cual es inyectiva, $\varphi = \eta \circ \psi \circ \varphi_1$. Luego φ_1 es inyectiva. Por tanto φ_1 es isomorfismo. Esto prueba el teorema.

Esto implica que ψ es inyectiva.

Veamos por inducción que $F^n(X) = {}'F^n(X)$, en efecto, si $n = 1$, por definición $F^1(X) = {}'F^1(X)$.

Supongamos que el resultado vale para $n-1$, o sea $F^{n-1}(X) = {}'F^{n-1}(X)$. Veamos para n. Tenemos

$$F^n(X) \subseteq {}'F^n(X) \subset F^{n-1}(X) = {}'F^{n-1}(X)$$

la inclusión $gr_{n-1}F(X) \longrightarrow {}'gr_{n-1}F(X)$ es al aplicación canónica

$$\frac{F^{n-1}(X)}{F^n(X)} \longrightarrow \frac{{}'F^{n-1}(X)}{{}'F^n(X)}$$

lo cual implica que $F^n(X) = {}'F^n(X)$. Esto prueba la proposición. ■

Capítulo 2

Grupo de trenza

2.1. Grupo de trenza

En esta seccin seguiremos los lineamientos establecidos en $[3H]$ y [9]

2.1.1 Definición. Sea M un espacio de Hausdorff, los grupos de trenzas pura $P_n(M)$ y los grupos de trenzas de M son definidos como los grupos fundamentales de los espacios de configuraciones $B_n(M)$.

$$\begin{aligned} P_n(M) &= \pi_1(\mathfrak{F}_n(M)) \\ B_n(M) &= \pi_1(\mathfrak{F}_n(M)/\Sigma_n) \end{aligned}$$

Si $M = \mathbb{R}^2$, $B_n(\mathbb{R}^2)$ denotado por B_n y es llamdo el grupo de trenzas de Artin, de la misma manera $P_n(\mathbb{R}^2)$ es denotado por P_n.

2.1.2 Proposición. *Sea*

$$p : \mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathfrak{F}_{k-1}(\mathbb{R}^2)$$

un haz fibrado con fibra $\mathbb{R}^2 - \theta_{k-1}$. *Entonces existe una sucesión exacta separable*

$$0 \longrightarrow F_{k-1} \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow 0$$

donde F_{k-1} *es un grupo libre en* $(k-1)$ *generadores.*

Demostración. Asociado al haz fibrado

$$\mathbb{R}^2 - \theta_{k-1} \longrightarrow \mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{p} \mathfrak{F}_{k-1}(\mathbb{R}^2)$$

tenemos la sucesión exacta de homotopía

$$\ldots \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathbb{R}^2 - \theta_{k-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_{i+1}(\mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{p_*} \pi_{i+1}(\mathfrak{F}_{k-1}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{\partial} \pi_i(\mathbb{R}^2 - \theta_{k-1}) \longrightarrow \ldots$$

Si $i \geq 2$ tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathfrak{F}_{k-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow 0$$

luego

$$\pi_{i+1}(\mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_{i+1}(\mathfrak{F}_{k-1}(R^2))$$

como $\mathfrak{F}_2(\mathbb{R}^2) \simeq S^1$. Tenemos

$$\pi_i(\mathfrak{F}_2(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_i(S^1) = 0 \text{ para } i \geq 2$$

luego

$$\pi_i(\mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^2)) = 0 \text{ para } i \geq 2 \text{ y } k \geq 1$$

la sucesión exacta de homotopía se reduce a

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 - \theta_{k-1}) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{F}_{k-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow 0$$

luego

$$0 \longrightarrow F_{k-1} \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow 0$$ ■

En base a [10] y [7] damos la presentacin del grupo de trenzas pura de Artin.

2.2. Presentación del grupo de trenza pura de Artin

Consideremos los planos $z = 0$ y $z = 1$ en $\mathbb{R}^3$, la cuales denotaremos por P y Q respectivamente. Elijamos n puntos distintos $p_1, \ldots, p_n \in P$ y sean $q_1, \ldots, q_n$ las correspondientes proyecciones ortogonales en Q. Por un arco en $\mathbb{R}^3$ entenderemos una función continua $A : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que es homeomorfo sobre su imagen.

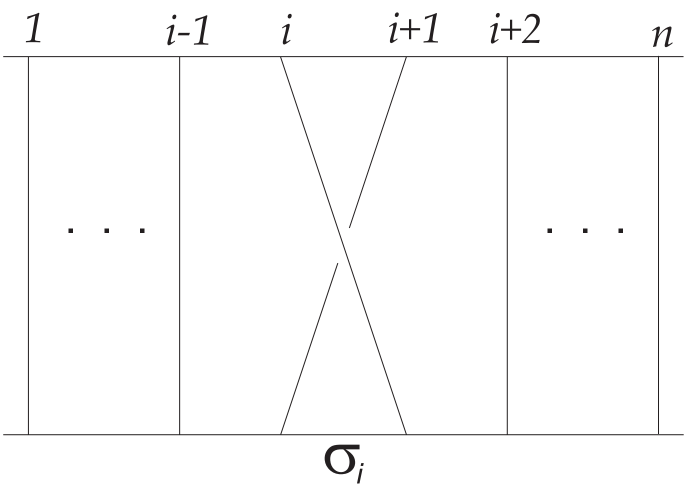
2.2.1 Definición. Sean $A_1, \ldots, A_n$ arcos disjuntos en $\mathbb{R}^3$, una trenza β en n hebras es un sistema de arcos disjuntos en $\mathbb{R}^3$, tales que

1. Existe un $\sigma \in \Sigma$ de modo que A_i conecta el punto p_i con el punto $q_{\sigma(i)}$.

2. Cada arco A_i intersecta a todo plano paralelo entre P y Q en exactamente un punto.

Diremos que dos trenzas β_1 y β_2 son equivalentes si cada una se puede deformar continuamente en la otra por medio de trenzas, es decir, si los correspondientes sistemas de arcos son isotópicos. El conjunto de clases de isotopía de trenzas en n-hebras se denota por B_n y es un grupo bajo la operación de yuxtaposición de trenzas y reescalamiento. Donde para $n \geq 1$ el grupo fundamental

$\pi_1\left(\mathfrak{F}_n\left(\mathbb{R}^2\right)/\Sigma_n\right) \cong \mathrm{B}_n$ y Σ_n es un grupo simétrico (ver [3]).
La trenza grométrica σ_i está dada por la siguiente figura



σ_i es la trenza en n-hebras en la que la i-ésima hebra cruza por encima solo una vez la $(i+1)$-ésima hebra y en todas las otras hebras no hay cruce. Los σ_j verifican las siguientes identidades

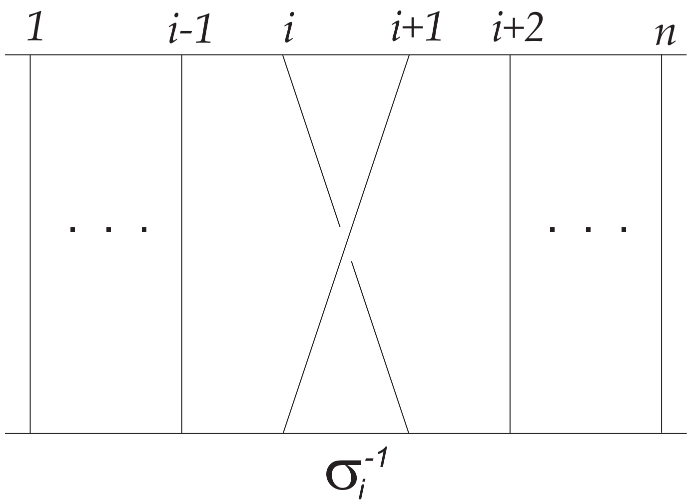
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ para } |i-j| \geq 2, \ 1 \leq i, j \leq n-1$$

y

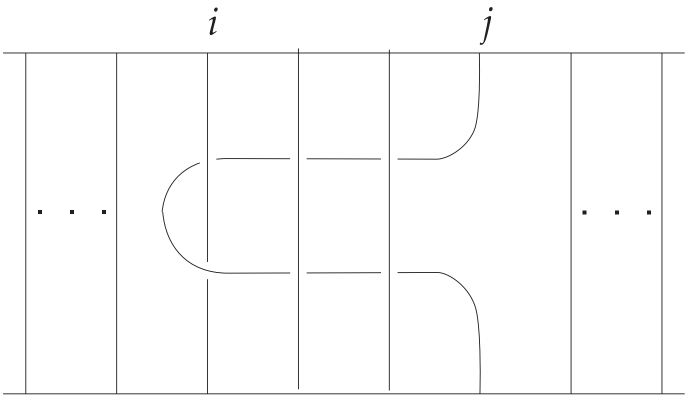
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}.$$

Definamos

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}$$

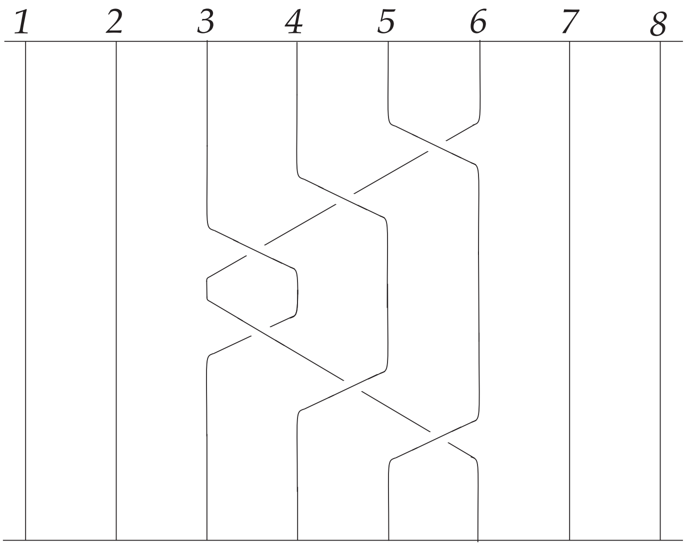


σ_i^{-1} es la trenza en n-hebras en la que la $(i+1)$-ésima hebra cruza por encima solo una vez, la i-ésima hebra y en todas las otras hebras no hay cruce.



$A_{i,j}$

Por ejemplo $A_{3,6}$



El grupo de trenzas B_n viene equipado con un epimorfismo natural $\pi : B_n \longrightarrow \Sigma_n$ dada por $\sigma_i \longmapsto (i, i+1)$, cuyo núcleo es $P_n := \operatorname{Ker}(\pi)$ es un subgrupo normal de B_n conocido como el grupo de trenzas puras. Donde para $n \geq 1$ el grupo fundamental

$$\pi_1\left(\mathfrak{F}_n\left(\mathbb{R}^2\right)\right) \cong P_n.$$

(ver[3]). En el teorema probaremos que P_n es generado por A_{ij} para $1 \leq i, j \leq n$, para ello requerimos del lema siguiente.

2.2.2 Lema. *En el grupo P_n tenemos las siguientes identidades*

1. $A_{r,s}A_{i,j}A_{r,s}^{-1} = A_{i,j}$ *si* $r < s < i < j$ *o* $i < r < s < j$

2. $A_{r,i}A_{i,j}A_{r,i}^{-1} = A_{i,j}^{-1}A_{r,j}^{-1}A_{i,j}A_{r,j}A_{i,j}$ *si* $r < i < j$

3. $A_{i,s}A_{i,j}A_{i,s}^{-1} = A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{s,j}$ *si* $i < s < j$

4. $A_{r,s}A_{i,j}A_{r,s}^{-1} = (A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}A_{r,j})A_{i,j}(A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}A_{s,j})$ *si* $r < i < s < j$

Escribiremos $b.a = bab^{-1}$. Nótese

$$(bc).a = a^{bc} = (bc)a(bc)^{-1} = b.(c.a)$$

Tenemos las siguientes identidades

$$\begin{array}{lcl}
\sigma_t A_{1,n+1}\sigma_t^{-1} & = & A_{1,n+1} \\
\vdots & & \\
\sigma_t A_{t-1,n+1}\sigma_t^{-1} & = & A_{t-1,n+1} \\
\sigma_t A_{t,n+1}\sigma_t^{-1} & = & A_{t,n+1} \\
\sigma_t A_{t+1,n+1}\sigma_t^{-1} & = & A_{t+1,n+1}^{-1}A_{t,n+1}A_{t+1,n+1} \\
\sigma_t A_{t+2,n+1}\sigma_t^{-1} & = & A_{t+2,n+1} \\
\vdots & & \\
\sigma_t A_{n,n+1}\sigma_t^{-1} & = & A_{n,n+1}
\end{array}$$

Demostración del Lema 2.2.2.

1. Si $r < s < i < j$ entonces $A_{r,s} \in \langle \sigma_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{s-1} \rangle$ grupo libre generado por $\sigma_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{s-1}$.

   $$\sigma_{i-1}^{-1}.A_{i,j} = A_{i-1,j}$$

   Usando estas relaciones prueba la segunda relación. Las relaciones (3) y (4) se procede de igual manera. ■

2.2.3 Teorema. *El grupo P_n admite una presentación con generadores dada por $A_{i,j}$ y la relación entre los generadores dada por (1), (2), (3) y (4) del lema 2.2.2.*

Demostración. Sea $\widetilde{P_n}$ el grupo generado por las letras $\widetilde{A_{i,j}}$, $1 \leq i < j \leq n$ con relaciones como en el lema 2.2.2. Entonces existe un homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{cccc} \phi_n & : & \widetilde{P_n} & \longrightarrow & P_n \\ & & \widetilde{A_{i,j}} & \longmapsto & A_{i,j} \end{array}$$

Veamos por inducción que ϕ_n es un isomorfismo.

Para $n \geq 2$ es verdadero. Supongamos que ϕ_{n-1} es un isomorfismo.

Sea

$$\widetilde{U_n} = \left\langle \widetilde{A_{1,n}}, \widetilde{A_{2,n}} \ldots, \widetilde{A_{n-1,n}} \right\rangle$$

el grupo libre generado por $A_{i,n}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Veamos que $\widetilde{U_n}$ es un subgrupo normal de $\widetilde{P_n}$. Es suficiente ver

$$\widetilde{A_{r,s}}\widetilde{A_{i,n}}\widetilde{A_{r,s}}^{-1} \in \widetilde{U_n}$$

para $1 \leq r < s \leq n-1$ y $1 \leq i \leq n-1$. Existen cuatro casos posibles

1. $r < s < i < n$ o $i < r < s < n$
2. $r < i = s < n$
3. $r = i < s < n$
4. $r < i < s < n$

y

$$A_{i,j} \in \langle \sigma_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{j-1} \rangle.$$

Usando la identidad $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ para $|i-j| \geq 2$ tenemos $A_{r,s}A_{i,j} = A_{i,j}A_{r,s}$ para $r < s < i < j$.

Asumamos que $i < r < s < j$. Tenemos

$$\sigma_t A_{i,j} \sigma_t^{-1} = A_{i,j} \text{ para } i < t \leq j-2,$$

en efecto

$\sigma_t A_{i,j}\sigma_t^{-1}$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_t\sigma_{j-1}\ldots\sigma_{t+1}\sigma_t\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_t^{-1}\sigma_{t+1}^{-1}\ldots\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_t^{-1}\\
&= \sigma_{j-1}\ldots\sigma_{t+2}\sigma_t\sigma_{t+1}\sigma_t\sigma_{t-1}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{t-1}^{-1}\sigma_t^{-1}\sigma_{t+1}^{-1}\sigma_{t+2}^{-1}\ldots\sigma_{j-1}^{-1}\\
&= \sigma_{j-1}\ldots\sigma_{t+2}\sigma_{t+1}\sigma_t\sigma_{t+1}\sigma_{t-1}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{t-1}^{-1}\sigma_{t+1}^{-1}\sigma_t^{-1}\sigma_{t+1}^{-1}\sigma_{t+2}^{-1}\ldots\sigma_{j-1}^{-1}\\
&= A_{i,j}
\end{aligned}$$

Esto también implica

$$\sigma_t^{-1}A_{i,j}\sigma_t = A_{i,j} \text{ para } i < t \leq j-2$$

como $A_{r,s}\in\langle\sigma_r,\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_{s-1}\rangle$ tenemos

$$A_{r,s}A_{i,j}A_{r,s} = A_{i,j} \text{ para } i<r<s<j.$$

Esto prueba la primera relación.

(2) Tenemos

$$\sigma_i A_{i,j}\sigma_i^{-1} = A_{i+1,j},\ \sigma_{i-1}A_{i,j}\sigma_{i-1}^{-1} = A_{s,j}^{-1}A_{i-1,j}A_{i,j}$$

se sigue que

$$\sigma_i^{-1}A_{i+1,j}\sigma_i = A_{i,j},\ \text{o}\ \sigma_{i-1}^{-1}A_{i,j}\sigma_{i-1} = A_{i-1,j}$$

y

$$\begin{aligned}
A_{i,j} &= (\sigma_{i-1}^{-1}A_{i,j}\sigma_{i-1})^{-1}(\sigma_{i-1}^{-1}A_{i-1,j}\sigma_{i-1})(\sigma_{i-1}^{-1}A_{i,j}\sigma_{i-1})\\
&= A_{i-1,j}^{-1}(\sigma_{i-1}^{-1}A_{i-1,j}\sigma_{i-1})A_{i-1,j}
\end{aligned}$$

Este da las siguientes fórmulas.

$$\begin{aligned}
\sigma_{i-1}.A_{i-1,j} &= A_{i,j}\\
\sigma_{i-1}.A_{i,j} &= A_{i,j}^{-1}A_{i-1,j}A_{i,j}\\
\sigma_{i-1}^{-1}.A_{i-1,j} &= A_{i-1,j}A_{i,j}A_{i-1,j}^{-1}
\end{aligned}$$

Por el lema 2.2.2

$$\widetilde{A_{r,s}}\widetilde{A_{i,n}}\widetilde{A_{r,s}}^{-1} \in \widetilde{U_n}$$

en todos esos casos.

Entonces $\widetilde{U_n}$ es un subgrupo normal de $\widetilde{P_n}$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{U_n} \arrow[r, "\phi_n|"] \arrow[d, hook] & U_n \arrow[d, hook] \\
\widetilde{P_{n-1}} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\widetilde{A_{i,j}} \mapsto \widetilde{A_{i,j}}"'] & \widetilde{P_n} \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d, "\overline{q}"] & P_n \arrow[d, "q"] \\
 & \dfrac{\widetilde{P_n}}{\widetilde{U_n}} \arrow[r, "\phi_n"'] & P_{n-1} = \dfrac{P_n}{U_n}
\end{tikzcd}$$

donde $\overline{q} \circ f$ es sobreyectivo puesto que $\widetilde{P_n}$ es generado por $f(\widetilde{P_{n-1}})$ y $\widetilde{U_n}$. La composición $q\phi_n f = \phi_{n-1}$ puesto que manda $\widetilde{A_{i,j}}$ a $A_{i,j}$ para $1 \leq i < j \leq n-1$. Por hipótesis de inducción $q\phi_n f$ es un isomorfismo. Como $\widetilde{U_n}$ es generado por $n-1$ elementos $\widetilde{A_{i,n}}$ $1 \leq i \leq n-1$ y U_n es un grupo libre generado con una base $A_{i,n}$ para $1 \leq i \leq n$. El epimorfismo $\phi_n| : \widetilde{U_n} \longrightarrow U_n$ es un isomorfismo. Por el lema de los cinco, ϕ_n es un isomorfismo. Con esto termina la inducción y queda demostrado el teorema. ■

2.2.4 Observación (Lema de los Cinco)**.** Sea

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"'] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"'] & M_5 \arrow[d, "h_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_3 \arrow[r, "g_3"'] & N_4 \arrow[r, "g_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo donde las filas son sequencias exactas. Se cumple que si h_1, h_2, h_4, h_5 son isomorfismos, entonces h_3 es isomorfismo.

Capítulo 3

Algebra de Lie de un grupo de trenza pura

En esta seccin seguimos los lineamientos establecidos en [4] y [9].

Sea G un grupo. Dado dos elementos $g, h \in G$ el <u>conmutador</u> de g y h, $[g, h]$ es definido por

$$[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh.$$

Sean H y K subgrupos de G. El subgrupo conmutador $[H, K]$ es el subgrupo de G generado por los conmutadores $[h, k]$ con $h \in H$ y $k \in K$.

3.1 Proposición. *Si $a^b = b^{-1}ab$ tenemos las siguientes identidades*

1. $[b, a] = [a, b]^{-1}$

2. $[a, b] = a^{-1}a^b$

3. $[[a, b], c^a][[c, a], b^c][[b, c], a^b] = 1$

4. $[a, bc] = [a, c][a, b][[a, b], c]$

5. $[ab, c] = [a, c]^b[b, c]$

6. $[a, bc] = [a, c][a, b]^c$

Demostración.

1. $[b,a] = b^{-1}a^{-1}ba = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = [a,b]^{-1}$

2. $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a^{b}$

3.

$$
\begin{aligned}
[[a,b],c^{a}] &= [a^{-1}b^{-1}ab, a^{-1}ca] \\
&= (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1}(a^{-1}ca)^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)(a^{-1}ca) \\
&= b^{-1}a^{-1}baa^{-1}c^{-1}aa^{-1}b^{-1}aba^{-1}ca
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[[c,a],b^{c}] &= [c^{-1}a^{-1}ca, c^{-1}bc] \\
&= (c^{-1}a^{-1}ca)^{-1}(c^{-1}bc)^{-1}(c^{-1}a^{-1}ca)(c^{-1}bc) \\
&= a^{-1}c^{-1}acc^{-1}b^{-1}cc^{-1}a^{-1}cac^{-1}bc \\
&= a^{-1}c^{-1}ab^{-1}a^{-1}cac^{-1}bc
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[[b,c],a^{b}] &= [b^{-1}c^{-1}bc, b^{-1}ab] \\
&= (b^{-1}c^{-1}bc)^{-1}(b^{-1}ab)^{-1}(b^{-1}c^{-1}bc)(b^{-1}ab) \\
&= c^{-1}b^{-1}cbb^{-1}a^{-1}bb^{-1}c^{-1}bcb^{-1}ab \\
&= c^{-1}b^{-1}ca^{-1}c^{-1}bcb^{-1}ab
\end{aligned}
$$

luego

$[[a,b],c^{a}][[c,a],b^{c}][[b,c],a^{b}] =$

$$
\begin{aligned}
&= b^{-1}a^{-1}bc^{-1}b^{-1}aba^{-1}caa^{-1}c^{-1}ab^{-1}a^{-1}cac^{-1}bcc^{-1}b^{-1}ca^{-1}c^{-1}bcb^{-1}ab \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(4), (5) y (6) se prueba de la misma manera. ■

3.2 Proposición. *Si H y K son subgrupos normales de G entonces $[H, K]$ es un subgrupo normal de G con $[H, K] \leq H \cap K$. El símbolo $\leq$ se usa normalmente para indicar que es un subgrupo de y $\trianglelefteq$ para indicar subgrupo normal de.*

Demostración. Sean $c \in G, a \in H$ y $b \in K$, tenemos

$$\begin{aligned} c[a,b]c^{-1} &= ca^{-1}b^{-1}abc^{-1} \\ &= ca^{-1}c^{-1}cb^{-1}c^{-1}cac^{-1}cbc^{-1} \\ &= (cac^{-1})^{-1}(cbc^{-1})^{-1}(cac^{-1})(cbc^{-1}) \\ &= [cac^{-1}, cbc^{-1}] \in [H,K] \end{aligned}$$

puesto que H y K son subgrupos normales de G.
Sea $[a, b] \in [H, K]$ entonces

$$[a,b] = a^{-1} \cdot (b^{-1}ab) \in H$$

pues a^{-1} y $(b^{-1}ab) \in H$ y $[a, b] = (a^{-1}ba)^{-1} \cdot b \in K$ pues $(a^{-1}ba)^{-1}$ y $b \in K$. Luego $[a, b] \in H \cap K$, lo que prueba $[H, K] \leq H \cap K$. ■

Definiremos por inducción una sucesión descendente de subgrupos normales de G como sigue:
Definamos

$$\begin{aligned} \Gamma^1(G) &:= G \\ \Gamma^2(G) &= [\Gamma^1(G), G] \end{aligned}$$

Supongamos que $\Gamma^k(G)$ está definido. Definamos

$$\Gamma^{k+1}(G) = [\Gamma^k(G), G] \leq \Gamma^k(G) \cap G \leq \Gamma^k(G)$$

Esto da una <u>serie</u> <u>central</u> <u>descendente</u> o <u>serie</u> <u>central</u> <u>inferior</u> de G.
Por el significado de descendente tenemos

$$\ldots \leq \Gamma^{k+1}(G) \leq \Gamma^k(G) \leq \ldots \leq \Gamma^2(G) \leq \Gamma^1(G)$$

significado de central, se refiere al hecho de que el grupo cociente

$$\frac{\Gamma^k(G)}{\Gamma^{k+1}(G)}$$

esta contenido en el centro del grupo cociente

$$\frac{G}{\Gamma^{k+1}(G)} \text{ para } k \geq 1,$$

en efecto, si $a \in \dfrac{\Gamma^k(G)}{\Gamma^{k+1}(G)}, \widetilde{a} \in \Gamma^k(G)$ su representante, $b \in \dfrac{G}{\Gamma^{k+1}(G)}, \widetilde{b} \in G$ su representante. De la definición

$$[\widetilde{a}, \widetilde{b}] \in [\Gamma^k(G), G] = \Gamma^{k+1}(G).$$

Luego $[a, b] = 1$ en el grupo cociente $\dfrac{G}{\Gamma^{k+1}(G)}$. De aquí resulta

$$1 = [a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \text{ o } a = b^{-1}ab \text{ o } a = bab^{-1}.$$

Entonces $\dfrac{\Gamma^k(G)}{\Gamma^{k+1}(G)}$ esta contenido en el centro de $\dfrac{G}{\Gamma^{k+1}(G)}$, en particular cada grupo $\dfrac{\Gamma^k(G)}{\Gamma^{k+1}(G)}$ es abeliano.

Usaremos $G(k)$ para denotar $\dfrac{\Gamma^k(G)}{\Gamma^{k+1}(G)}$, o sea

$$G(k) = \frac{\Gamma^k(G)}{\Gamma^{k+1}(G)}.$$

Si $k = 1$

$$G(1) = \frac{\Gamma^1(G)}{\Gamma^2(G)} = \frac{G}{[G, G]}$$

es la <u>abelianización</u> de G. Sea

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma"] & 1 \end{tikzcd} \tag{III.1}$$

una sucesión exacta separable de grupos. El homomorfismo $\sigma : C \longrightarrow B$ es tal que $\beta \circ \sigma = id_C$, los homomorfismos α y σ son monomorfismos, tenemos

$$\begin{aligned} A &\cong \operatorname{Im}(\alpha) = \alpha(A) \subset B \\ C &\cong \operatorname{Im}(\sigma) = \sigma(C) \subset B \end{aligned}$$

A y C son subgrupos de B y A es normal en B. Por la exactitud de (III.1) tenemos

$$\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha) \cong A, \;\; \beta|_C = id_C.$$

Definamos una función

$$\begin{array}{rcccc} \tau & : & B & \longrightarrow & A \\ & & b & \longmapsto & \beta(b^{-1})b \end{array}$$

Veamos $\beta(b^{-1})b \in \mathrm{Ker}(\beta) \cong A$, en efecto

$$\begin{aligned} \beta(\beta(b^{-1})b) &= \beta(\beta(b^{-1}))\beta(b) \\ &= \beta(b^{-1})\beta(b) \\ &= \beta(b)^{-1}\beta(b) \\ &= 1 \end{aligned}$$

pues $\beta(b^{-1}) \in C$ y $\beta|_C = id_C$, o sea $\beta(\beta(b^{-1})) = \beta(b^{-1})$.
También tenemos:

$$\tau|_A = id_A$$

Como A y C son subgrupos de B, $A \cap C = \{1\}$. Para cada $b \in B$, $b = ca$ con $c \in C$ y $a \in A \iff c = \beta(b)$ y $a = \tau(b)$ $(B = A \oplus C)$.
Tenemos una acción de C en A definido como sigue:

$$\begin{array}{ccc} C \times A & \longrightarrow & A \\ (c, a) & \longmapsto & a^c = c^{-1}ac \end{array}$$

la función τ no es homomorfismo de grupos pero satisface

$$\begin{aligned} \tau(b_1 b_2) &= \tau(b_1)^{\beta(b_2)}\tau(b_2) \\ &= \beta(b_2)^{-1}\tau(b_1)\beta(b_2)\tau(b_2) \end{aligned}$$

En efecto, sea $b_1 = c_1a_1$, $b_2 = c_2a_2$ con $c_1, c_2 \in C$ y $a_1, a_2 \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} b_1b_2 &= c_1a_1c_2a_2 \\ &= c_1(c_2c_2^{-1})a_1c_2a_2 \\ &= (c_1c_2)c_2^{-1}a_1c_2a_2 \\ &= (c_1c_2)a_1^{c_2}a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(b_1b_2) &= \beta((b_1b_2)^{-1})b_1b_2, \text{ por definición de } \tau \\ &= \beta(b_2^{-1}b_1^{-1})b_1b_2 \\ &= \beta(b_2^{-1})\beta(b_1^{-1})b_1b_2 \\ &= \beta(b_2)^{-1}\beta(b_1)^{-1}b_1b_2 \\ &= c_2^{-1}c_1^{-1}b_1b_2, \text{ pues } \beta(b_2) = c_2,\ \beta(b_1) = c_1 \\ &= c_2^{-1}c_1^{-1}c_1a_1c_2a_2, \text{ pues } b_1 = c_1a_1,\ b_2 = c_2a_2 \\ &= c_2^{-1}c_1^{-1}c_1a_1c_2c_2^{-1}c_2a_2 \\ &= c_2^{-1}c_1^{-1}b_1c_2c_2^{-1}b_2 \\ &= c_2^{-1}\tau(b_1)c_2\tau(b_2) \\ &= \beta(b_2)^{-1}\tau(b_1)\beta(b_2)\tau(b_2) \\ &= \tau(b_1)^{\beta(b_2)}\tau(b_2) \end{aligned}$$

3.3 Teorema. *Supongamos*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma"] & 1 \end{tikzcd}$$

una sucesión exacta separable de grupos y que la acción de C sobre

$$A(1) = \frac{A}{[A, A]}$$

es trivial (esto es, $[A, C] \subseteq [A, A]$).

Entonces la sucesión de funciones inducida

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma^n(A) \arrow[r, "\alpha"] & \Gamma^n(B) \arrow[r, "\beta"] & \Gamma^n(C) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma"] & 1 \end{tikzcd}$$

es exacta separable para cualquier n.

La demostración del teorema se basar en la proposicin y en los lemas posteriores a la siguente proposicin.

3.4 Proposición. *Sea G un grupo. Entonces*

$$[\Gamma^s(G), \Gamma^t(G)] \leq \Gamma^{s+t}(G)$$

para cualesquiera $s, t \geq 1$.

Demostración. Inducción sobre t.
Para $t = 1$, tenemos

$$[\Gamma^s(G), \Gamma^1(G)] = [\Gamma^s(G), G] = \Gamma^{s+1}(G), \text{ para } s \geq 1$$

Supongamos que vale el resultado para $t - 1$

$$[\Gamma^s(G), \Gamma^{t-1}(G)] \leq \Gamma^{s+t-1}(G)$$

para cualquier $s \geq 1$.
Veamos para t, en efecto, por definición $\Gamma^t(G) = [\Gamma^{t-1}(G), G]$ es generado por $[a, b]$ para $a \in \Gamma^{t-1}(G)$ y $b \in G$. Como $\Gamma^{s+t}(G)$ es un subgrupo normal de G es suficiente probar

$$[c, [a, b]] \in \Gamma^{s+t}(G)$$

para $c \in \Gamma^s(G)$, $a \in \Gamma^{t-1}(G)$, $b \in G$ por (1), (5) y (6) de la proposición 3.1. Si $d = c^{a^{-1}}$, entonces $d \in \Gamma^s(G)$ puesto que $\Gamma^s(G)$ es normal. De (3) de la proposición 3.1 tenemos

$$\begin{aligned} [[a, b], d^a] &= ([[d, a], b^d][[b, d], a^b])^{-1} \\ &= [[b, d], a^b]^{-1}[[d, a], b^d]^{-1} \end{aligned}$$

$[[b, d], a^b]^{-1} \in \Gamma^{s+t}(G)$, puesto que; tenemos $[b, d] \in \Gamma^{s+1}(G)$ por definición. Como $\Gamma^{t-1}(G)$ es normal, tenemos $a^b \in \Gamma^{t-1}(G)$. Por hipótesis de inducción

$$[[b, d], a^b] \in \Gamma^{s+1+t-1}(G) = \Gamma^{s+t}(G)$$

luego

$$[[b,d],a^b]^{-1}\in\Gamma^{s+t}(G)$$

$[[d,a],b^d]\in\Gamma^{s+t}(G)$, puesto que por hipótesis de inducción

$$[d,a]\in\Gamma^{s+t-1}(G) \text{ y } [[d,a],b^d]\in\Gamma^{s+t-1+1}(G)=\Gamma^{s+t}(G)$$

luego

$$[[d,a],b^d]^{-1}\in\Gamma^{s+t}(G)$$

$$[[a,b],d^a]=[[b,d],a^b]^{-1}[[d,a],b^d]^{-1}\in\Gamma^{s+t}(G)$$

Como $d=c^{a^{-1}}=aca^{-1}$, luego $c=a^{-1}da$, o sea, $d^a=c$

$$[c,[a,b]]=[d^a,[a,b]]=[[a,b],d^a]^{-1}\in\Gamma^{s+t}(G). \qquad \blacksquare$$

3.5 Lema. *Sean $x\in\Gamma^p(A)$, $y\in B$, $w\in B$. Supongamos $[y,w]\in\Gamma^q(A)$. Entonces*

$$[x,y]\in\Gamma^{p+q}(A) \text{ si y sólo si } [x,y^w]\in\Gamma^{p+q}(A)$$

Demostración. Sea $z=[y,w]$. Entonces

$$y^w=w^{-1}yw=yy^{-1}w^{-1}yw=y(y^{-1}w^{-1}yw)=y[y,w]=yz.$$

De la proposición 3.1 (4) tenemos

$$[x,y^w]=[x,yz]=[x,z][x,y][[x,y],z] \tag{III.2}$$

Por hipótesis general $[y,w]\in\Gamma^q(A)$. Entonces

$$[x,z]=[x,[y,w]]\in[\Gamma^p(A),\Gamma^q(A)]\leq\Gamma^{p+q}(A)$$

por proposición 3.4. Por otro lado $[x,y]\in\Gamma^p(A)$ puesto que $\Gamma^p(A)$ en normal en B. Luego

$$[[x,y],z]\in[\Gamma^p(A),\Gamma^q(A)]\leq\Gamma^{p+q}(A)$$

De la igualdad (III.2) se deduce que

$$[x,y]\in\Gamma^{p+q}(A) \text{ si y sólo si } [x,y^w]\in\Gamma^{p+q}(A) \qquad \blacksquare$$

3.6 Observación (del lema 3.5)**.** Se tiene también el resultado bajo la hipótesis que $x \in B$ satisface

$$[x, y] \in \Gamma^p(A) \text{ y } [x, [y, w]] \in \Gamma^{p+q}(A).$$

3.7 Lema. *Supongamos* $[A, C] \leq \Gamma^2(A)$*. Entonces*

$$[\Gamma^n(A), C] \leq \Gamma^{n+1}(A), \text{ \textit{para cualesquieran}} \geq 1.$$

Demostración. Veamos por inducción en n. Para $n = 1$

$$[\Gamma^1(A), C] = [A, C] \leq \Gamma^{1+1}(A)$$

por hipótesis de inducción.

Supongamos que el resultado vale para $1 \leq p \leq n - 1$, esto es,

$$[\Gamma^p(A), C] \leq \Gamma^{p+1}(A).$$

Veamos para n. Como

$$[\Gamma^n(A), C] = [[\Gamma^{n-1}(A), A], C]$$

es suficiente probar que

$$[[a_{n-1}, a], c] \in \Gamma^{n+1}(A)$$

para cualquier $a_{n-1} \in \Gamma^{n-1}(A)$, $a \in A$ y $c \in C$. De la proposición 3.1 (3) tenemos

$$[[a_{n-1}, a], c^{a_{n-1}}][[a, c], a^a_{n-1}][[c, a_{n-1}], a^c] = 1 \tag{III.3}$$

Ahora $a^a_{n-1} = a^{-1}a_{n-1}a \in \Gamma^{n-1}(A)$ pues $\Gamma^{n-1}(A)$ es normal en A. Por la hipótesis tenemos

$$[[a, c]a^a_{n-1}] \in [\Gamma^2(A), \Gamma^{n-1}(A)] \leq \Gamma^{n+1}(A)$$

por hipótesis de inducción tenemos

$$[a, c_{n-1}] = [a_{n-1}, c]^{-1} \in [\Gamma^{n-1}(A), C] \leq \Gamma^n(A)$$

luego

$$[[c, a_{n-1}], a] \in [\Gamma^n(A), A] = \Gamma^{n+1}(A)$$

como $[c, a_{n-1}] \in \Gamma^n(A)$ y $[a, c] \in A$, tenemos

$$[[c, a_{n-1}], a] \in [\Gamma^n(A), A] \leq \Gamma^{n+1}(A)$$

luego por el lema 3.5, tenemos

$$[[c, a_{n-1}], a^c] \in \Gamma^{n+1}(A).$$

De la igualdad (III.3) tenemos

$$[[a_{n-1}, a], c^{a_{n-1}}] \in \Gamma^{n+1}(A)$$

y nuevamente por el lema 3.5 tenemos

$$[[a_{n-1}, a], c] \in \Gamma^{n+1}(A). \qquad \blacksquare$$

3.8 Lema. *Supongamos*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[l, bend left, "\sigma"] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

una sucesión exacta separable de grupos y la acción de C sobre

$$A(1) = \frac{A}{[A, A]}$$

es trivial (esto es, $[A, C] \subseteq [A, A]$).
Entonces

$$[\Gamma^n(A), \Gamma^k(C)] \leq \Gamma^{n+k}(A) \ \forall n, k \geq 1$$

Demostración. Veamos por inducción en k. Para $k = 1 = n$. Por hipótesis $[A, C] \subseteq [A, A]$ ya que C actúa trivialmente

$$[A, C] \subseteq [A, A] = [\Gamma^1(A), \Gamma^1(A)] \leq \Gamma^2(A)$$

Para $k = 1 \neq n$. Por el lema 3.7 tenemos

$$[\Gamma^n(A), \Gamma^1(C)] = [\Gamma^n(A), C] \leq \Gamma^{n+1}(A), \ \forall n \geq 1$$

Supongamos que el resultado vale para $1 \leq q \leq k-1$, o sea

$$[\Gamma^n(A), \Gamma^q(C)] \leq \Gamma^{n+q}(A) \ \forall n \geq 1$$

Veamos para k. Como

$$[\Gamma^n(A), \Gamma^k(C)] = [\Gamma^k(C), \Gamma^n(A)]^{-1} = [[\Gamma^{k-1}(C), C], \Gamma^n(A)]^{-1}$$

es suficiente probar

$$[[c_{k-1}, c], a] \in \Gamma^{n+k}(A)$$

donde $c_{k-1} \in \Gamma^{k-1}(C)$, $c \in C$, $a \in \Gamma^n(A)$.

De la proposición 3.1 (3) tenemos

$$[[c_{k-1}, c], a^{c_{k-1}}][[c, a], c_{k-1}^c][[a, c_{k-1}], c^a] = 1 \tag{III.4}$$

Por hipótesis de inducción y el hecho de que $\Gamma^{k-1}(C)$ es normal en C, tenemos

$$[[c, a], c_{k-1}^c] \in [\Gamma^{n+1}(A), \Gamma^{k-1}(C)] \leq \Gamma^{n+k}(A)$$

Nuevamente por hipótesis de inducción

$$[[a, c_{k-1}], c] \in [\Gamma^{n+k-1}(A), \Gamma^1(C)] \leq \Gamma^{n+k}(A)$$

Por el lema 3.5

$$[[a, c_{k-1}], c^a] \in \Gamma^{n+k}(A)$$

De la igualdad (III.4) tenemos

$$[[c_{k-1}, c], a^{c_{k-1}}] \in \Gamma^{n+k}(A)$$

Por la observación 3.6 del lema 3.5

$$[[c_{k-1}, c], a] \in \Gamma^{n+k}(A)$$ ■

3.9 Corolario. *Bajo las hipótesis del lema 3.8, tenemos*

$$\tau(\Gamma^n(B)) \subseteq \Gamma^n(A)$$

Demostración. Veamos por inducción en n. Para $n = 1$, $\tau(B) \subseteq A$ es trivial por la definición de τ.

Supongamos que el resultado vale para $1 \leq q \leq n-1$, esto es

$$\tau(\Gamma^p(B)) \subseteq \Gamma^q(A)$$

Veamos para n. En efecto,

$$\Gamma^n(B) = [\Gamma^{n-1}(B), B].$$

Si $b_1 \in \Gamma^{n-1}(B)$, $b_2 \in B$. Basta probar $\tau(b_1, b_2) \in \Gamma^n(A)$. Escribiendo $b_i = c_1 a_i$ tenemos

$$a_1 = \tau(b_1) \in \Gamma^{n-1}(A)$$

por hipótesis de inducción y

$$c_1 = \beta(b_1) \in \Gamma^{n-1}(C)$$

También

$$c_2 = \beta(b_2) \in C \text{ y } a_2 = \tau(b_2) \in A$$

De la proposición 3.1 (5) y (6) tenemos

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z] \tag{III.5}$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z \tag{III.6}$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
\tau([b_1,b_2]) &= \beta([b_1,b_2]^{-1})[b_1,b_2] \\
&= \beta([c_1a_1,c_2a_2]^{-1})[c_1a_1,c_2a_2] \\
&= \beta([c_2a_2,c_1a_1])[c_1a_1,c_2a_2] \\
&= [c_2,c_1][c_1a_1,c_2a_2] \\
&= [c_2,c_1][c_1,c_2a_2]^{a_1}[a_1,c_2a_2], \text{ por (III.5)} \\
&= [c_2,c_1][c_1,a_2]^{a_1}[c_1,c_2]^{a_2a_1}[a_1,a_2][a_1,c_2]^{a_2} \\
&= [c_2,c_1][c_1,a_2]^{a_1}[c_1,c_2]^{a_2a_1}[a_1,c_2]^{a_2} \quad \text{mód } \Gamma^n(A)
\end{aligned}
$$

Ahora

$$[c_1,a_2] \in [\Gamma^{n-1}(C),A] \leq \Gamma^n(A)$$

y

$$[a_1,c_2] \in [\Gamma^{n-1}(A),C] \leq \Gamma^n(A)$$

por el lema 3.8.

También

$$[[c_1,c_2],a_2a_1] \in [\Gamma^n(C),A] \leq \Gamma^{n+1}(A) \leq \Gamma^n(A)$$

conmuta $[c_1,c_2]$ con a_2a_1 módulo $\Gamma^n(A)$, esto es,

$$[c_1,c_2](a_2a_1) = (a_2a_1)[c_1,c_2] \quad \text{mód } \Gamma^n(A)$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
[c_1,c_2]^{a_2a_1} &= (a_2a_1)^{-1}[c_1,c_2](a_2a_1) \\
&= (a_2a_1)^{-1}(a_2a_1)[c_1,c_2] \\
&= a_1^{-1}a_2^{-1}a_2a_1[c_1,c_2] \\
&= [c_1,c_2]
\end{aligned}
$$

Luego $\tau([b_1,b_2]) \equiv [c_2,c_1][c_1,c_2] = 1 \mod \Gamma^n(A)$. Por tanto $\tau([b_1,b_2]) \in \Gamma^n(A)$.

■

Demostración del Teorema 3.3. Cualquier homomorfismo $f : G \longrightarrow G'$ mapea $\Gamma^k(G)$ en $\Gamma^k(G')$, esto es, $f(\Gamma^k(G)) \subseteq \Gamma^k(G')$. Veamos que la sucesión

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma^n(A) \arrow[r, "\alpha|"] & \Gamma^n(B) \arrow[r, "\beta|"] & \Gamma^n(C) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma|"] & 1 \end{tikzcd}$$

es exacta para cualquier n, es decir

1. $\mathrm{Im}(\alpha|) = \mathrm{Ker}(\beta|)$

2. $\alpha|$ es monomorfismo

3. $\beta|$ es epimorfismo

Del hecho que α es monomorfismo, β epimorfismo y $\beta\alpha = 1$ resulta que $\alpha|$ es monomorfismo, $\beta|$ es epimorfismo y $\beta|\alpha| = 1$. Lo que no es trivial es

$$\mathrm{Ker}(\beta|) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha|).$$

Pero $b \in \Gamma^n(B)$ con $\beta(b) = 1$ implica

$$b = b\beta(b^{-1}) = \tau(b),$$

por el corolario 3.9,

$$b = \tau(b) \in \Gamma^n(A)$$

del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma^n(A) \arrow[r, "\alpha|"] \arrow[d, "\pi"'] & \Gamma^n(B) \arrow[r, "\beta|"] \arrow[d, "\pi"'] & \Gamma^n C \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma|"] \arrow[d, "\pi"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \dfrac{\Gamma^n(A)}{\Gamma^{n+1}(A)} \arrow[r, "\overline{\alpha}"] & \dfrac{\Gamma^n(B)}{\Gamma^{n+1}(B)} \arrow[r, "\overline{\beta}"] & \dfrac{\Gamma^n(C)}{\Gamma^{n+1}(C)} \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\overline{\sigma}"] & 1 \end{tikzcd}$$

obtenemos que la sucesión

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \dfrac{\Gamma^n(A)}{\Gamma^{n+1}(A)} \arrow[r, "\overline{\alpha}"] & \dfrac{\Gamma^n(B)}{\Gamma^{n+1}(B)} \arrow[r, "\overline{\beta}"] & \dfrac{\Gamma^n(C)}{\Gamma^{n+1}(C)} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

es exacta separable.

3.10 Teorema. *El álgebra de Lie $gr_*(P_k)$ asociado a la serie central descendente del grupo de trenza pura P_k esta dada como un módulo por $L_2 \oplus L_3 \oplus \ldots \oplus L_k$ donde $L_i = L[A_{i,1}, \ldots, A_{i,i-1}]$ es el álgebra de Lie libre generado por $A_{i,1}, \ldots, A_{i,i-1}$.*

Demostración. De acuerdo al corolario 1.3.7 la fibración

$$p_i : \mathfrak{F}_k(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathfrak{F}_{k-1}(\mathbb{R}^2)$$

con fibra $\mathbb{R}^2 - \theta_{k-1}$ induce una sucesión exacta separable

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}_{k-1} \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow 0 \tag{III.7}$$

aquí F_{k-1} es un grupo libre en $(k-1)$-generadores, $A_{k,1}, A_{k,2}, \ldots, A_{k,k-1}$.
Por el teorema 3.3 existe una sucesión exacta corta separable

$$0 \longrightarrow \frac{\Gamma^n(F_{k-1})}{\Gamma^{n+1}(F_{k-1})} \longrightarrow \frac{\Gamma^n(P_k)}{\Gamma^{n+1}(P_k)} \longrightarrow \frac{\Gamma^n(P_{k-1})}{\Gamma^{n+1}(P_{k-1})} \longrightarrow 0$$

luego

$$\frac{\Gamma^n(P_k)}{\Gamma^{n+1}(P_k)} \cong \frac{\Gamma^n(P_{k-1})}{\Gamma^{n+1}(P_{k-1})} \oplus \frac{\Gamma^n(F_{k-1})}{\Gamma^{n+1}(F_{k-1})}.$$

De acuerdo a lo establecido en la sección 1.5 del capítulo 1, si

$$gr_n(P_k) = \frac{\Gamma^n(P_k)}{\Gamma^{n+1}(P_k)},\ gr_n(P_{k-1}) = \frac{\Gamma^n(P_{k-1})}{\Gamma^{n+1}(P_{k-1})}$$

tenemos

$$gr_n(P_k) \cong gr_n(P_{k-1}) \oplus gr_n(F_{k-1})$$

luego por inducción tenemos

$$gr_n(P_k) \cong gr_n(F_1) \oplus \ldots \oplus gr_n(F_{k-1})$$

Por el teorema 1.5.8

$$gr_n F_{i-1} \cong L_i$$

donde $L_i = L[A_{i,1}, \ldots, A_{i,i-1}]$ es un álgebra de Lie en $(i-1)$-generadores.
Tenemos

$$gr_n(P_k) = L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

Aún más, la inclusión $L_i \hookrightarrow gr_*(P_k)$ es un homomofismo de álgebras de Lie y el corchete de Lie entre los generadores están dadas por

(a) Si $\{i, j\} \cap \{r, s\} = \emptyset$ entonces $[A_{i,j}, A_{r,s}] = 0$. Otras veces

(b) Para $j < i < r$, tenemos:

$$[A_{i,j}, A_{r,i}] = [A_{r,i}, A_{r,j}] \text{ y } [A_{i,j}, A_{r,j}] = [A_{r,j}, A_{r,i}].$$

$$[A_{2,1}, A_{3,2}] = [A_{3,2}, A_{3,1}]$$

Bibliografía

[1] Cohen, F. R. and Wu, J.. *'Braid Groups, Free Groups and the Loup Spaces of the* 2*-Sphere'*. Progress in Math. 215 (2003).

[2] Fadell, E. and Neuwirth, L.. *'Configuration Spaces'*. Math Scand 10 (1962) 111-118.

[3] Falk, Michael and Randell, Richard. *'The Lower Central Series of a Fiber-Type Amangement'*. Inventions Mathematicae 82, 77-88 (1985)

[4] García, A. *'Algebras de Lie y Homomorfismos de Johnson'*. Notas Impresas 2011.Lima-Per

[5] Hansen, V. L. *'Braids and coverings: selected topics'* - London Mahematical Society Student Texts 18 (1989).

[6] Kassel, Christian and Turaes, Vladimir.*'Braid Groups'*. Springer-Verlag (2008).

[7] Kohno, T.. *'Linear Representations of Braid Groups and Classical Yang-Baxter Equations'*. Contemporany Mathematics Vol 78 (1987) 339-363.

[8] Serre,Jean-Pierre. *'Lie Algebras and ps'*. Springer-Verlag (1965).

[9] Wu, J. *'Homotopy Group and low dimensionaltopologyI- the theory on braids'*, pre impreso(2011).

[10] Wu, J. *'Simplicial objects and homotopy groups'*, IMS. Lecture Notes 19 World Scientific Singapur (2009).

[11] Xicoténcatl, Miguel A. *'The Lie Algebra of the Pure Braid Groups'*. Bol. Soc. Mat. Mex. Vol 6 Num 1 (2000) 55-62.