UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

E.A.P DE MATEMÁTICA

Teoría de Perturbación y Decaimiento Exponencial de un sistema acoplado de KdV Lineal

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Raquel Inés Serna Díaz

Lima-Perú

2011

Teoría de Perturbación y Decaimiento Exponencial

de un sistema acoplado de KdV Lineal.

RAQUEL INES SERNA DIAZ

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

— — — — — — — — — — — — —
Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña
Presidente

— — — — — — — — — — — — —
Dr. Luis Enrique Carrillo Díaz
Miembro

— — — — — — — — — — — — —
Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro Asesor

Lima-Perú

Enero -2012

RAQUEL INES, SERNA DIAZ

Teoría de Perturbación y Decaimiento Exponencial
de un sistema acoplado de KdV Lineal, (Lima) 2011.
(UNMSM, Licenciado, Matemática, 2011).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,
Facultad de Ciencias Matemáticas

.

Dedicatoria

A mis angeles.

.

Agradecimientos

A Dios.

A mi tio por que gracias a él es siempre todo mas fácil.

A mi asesora la profesora Yolanda por el apoyo prestado.

.

Teoría de Perturbación y Decaimiento Exponencial de un sistema acoplado de KdV Lineal.

RAQUEL INES SERNA DIAZ

Enero-2012

Asesora: Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Título obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo se hace un estudio acerca de la Teoría de perturbación de operadores disipativos para probar la existencia de soluciones de un sistema acoplado de KdV Lineal en un intervalo acotado con disipación localizada. Para tal finalidad hacemos uso de la Teoría de Semigrupos, estimativas de energía, técnicas multiplicativas y Propiedad de Continuación Única, demostrando el decaimiento exponencial de la solución.

PALABRAS CLAVES: TEOREMA DE LUMMER PHILLIPS
TEORÍA DE PERTURBACIÓN
DECAIMIENTO EXPONENCIAL
PROPIEDAD DE CONTINUACIÓN ÚNICA

Perturbation Theory and Exponential Decay

of a Coupled Linear system of the Korteweg-de Vries equations

RAQUEL INES SERNA DIAZ

January-2012

Assessor: Dr. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Obtained title: Licenciado en Matemática

In this work we use Semigroup Theory and Perturbation Theory of dissipative operators in order to prove the existence and uniquess of a solution of a coupled linear system of the Korteweg-de Vries equations in a bounded interval with localized damping, we use multiplier techniques, energy estimates. Finally, we apply the Unique Continuation Property to prove the exponential decay of solutions.

KEY WORDS: LUMMER PHILLIPS THEOREM

PERTURBATION THEORY

EXPONENTIAL DECAY

UNIQUE CONTINUATION PROPERTY

Introducción

En este trabajo se hace uso de la Teoría de perturbación de operadores disipativos para probar la existencia de solución de un sistema acoplado de Korteweg-de Vries Lineal en un intervalo acotado con disipación localizada.

El estudio se realiza con relación a un sistema acoplado de dos Ecuaciones KdV Lineal en un dominio acotado, dependiendo de un parámetro $a > 0$, con la presencia de una disipación localizada dada por la función $\lambda = \lambda(x)$. Así estamos interesados en obtener una solución (u, v) del sistema

$$\begin{aligned} &u_t + u_{xxx} + av_{xxx} + \lambda(x)u = 0, \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ &v_t + v_x + v_{xxx} + au_{xxx} + \lambda(x)v = 0, \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{1}$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(L,t) = 0 \ , \qquad \forall t > 0 \\ &v(0,t) = v(L,t) = 0 \ , \qquad \forall t > 0 \\ &u_x(L,t) = v_x(L,t) = 0, \qquad \forall t > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x),\ v_0(x,0) = v_0(x), \qquad \forall x \in \Omega, \tag{3}$$

donde $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \ |0 < x < L\}$ y $t > 0$.

Cuando $\lambda \equiv 0$ el sistema (1) fue estudiado por Gear y Grimshaw [7] como un modelo para describir interacciones entres dos ondas largas en un fluido estratificado. Observe que el modelo tiene la estructura de un par de Ecuaciones de KdVs con términos de acoplamiento lineales.

En (1), asumiremos que $a \in \mathbb{R}$, tal que

$$0 < a < 1 \tag{4}$$

y la función $\lambda = \lambda(x)$ satisface $\lambda \in L^\infty(\Omega)$ y $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$ en c.t.p de ω, (5.1)

donde $\omega \subset (0, L)$ es un subconjunto abierto no vacío. (5.2)

Denotemos por $E = E(t)$ la energía total asociada al modelo (1), la cual es , dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u^2(x,t) + v^2(x,t))\, dx. \tag{6}$$

Multiplicando la primera ecuación de (1) por u, la segunda por v, integrando por partes en Ω, y por las condiciones de frontera tenemos

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\int_0^L \lambda(x)(u^2(x,t) + v^2(x,t))dx - \frac{(1-a)}{2}\left[u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t)\right] \tag{7}$$

para todo $t > 0$.

La desigualdad (7) muestra que los términos $\lambda(x)u$ y $\lambda(x)v$ actúan como mecanismos de control en un subconjunto de Ω. Por eso cabe preguntarse si las soluciones del modelo convergen para cero cuando $t \to \infty$ y en caso de ser así es pertinente, determinar la tasa de decaimiento. Por otro lado, cuando $\lambda(x) \geq \lambda_0$ en todo el dominio, se verifica co relativa facilidad que $E(t)$ decae para cero exponencialmente. Además se observa que en el caso $\lambda \equiv 0$ la energía es no creciente, lo que nos induce a conjeturar que $E(t) \longrightarrow 0$, cuando $t \to \infty$. Sin embargo, el efecto disipativo producido por los términos de frontera $u_x(0,t)$ y $v_x(0,t)$, no son los suficientemente fuertes para estabilizar la energía. Este hecho fue observado por Micu y Ortega en [20] y por Micu, Ortega e Pazoto en [21] donde se constató que las soluciones del sistema lineal correspondiente no convergen a cero para algunos valores de L. Los resultados obtenidos en esos trabajos fueron motivados por el análisis desarrollado por Rosier en [24] para la ecuación de Korteweg-de Vries. En [24], se probó que cuando la medida L del intervalo Ω pertenece a un conjunto numerable de la forma

$$\mathcal{F} = \{\tfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2},\ k \text{ y } l \text{ son números enteros positivos}\}, \tag{8}$$

existe una solución de la Ecuación de Korteweg-de Vries para la cual la energía es conservativa. Para estabilizar la energía del modelo, Menzala, Vasconcellos y Zuazua [19] introdujeron un término disipativo de la forma de la función λu con $\lambda = \lambda(x)$

como en las condiciones de (5.1) y $\omega = (0, \delta) \cup (L - \delta, L)$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. El caso general, el caso en que ω satisface (5.2) fue probado por Pazoto en [22].

En los trabajos citados anteriormente, el decaimiento exponencial de la energía fue obtenido combinando las técnicas multiplicativas introducidas por Rosier en [24] y el argumento de *Compacidad-Unicidade* (para mayores detalles ver [31]).

En nuestro caso, motivados por los trabajos [2],[14] y [22], probar el decaimiento exponencial de la energía es reducido a probar que toda solución del sistema $(1) - (3)$, tal que cumpla con la condición:

$$u_x(0,t) = v_x(0,t) = 0, \ \forall t > 0 \text{ e } u = v = 0 \text{ en } \omega \times (0,T) \tag{9}$$

es identicamente nula, lo que exige la aplicación de una Propiedad de Continuación Única (PCU) la cual fue probada en [14] .

La organización de este trabajo está distribuida de la siguiente manera:

Capítulo 1: se presenta los resultados clásicos que seran utilizados para desarrollar el trabajo.

Capítulo 2: se discute dos aplicaciones de la teoría de perturbación de operadores disipativos a Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Capítulo 3: se prueba la existencia y unicidad de solución para el problema lineal asociado al modelo. El resultado de existencia es obtenido utilizando la teoría de semigrupos y un resultado de teoría de perturbación de operadores disipativos. Se concluye este capitulo probando el decaimiento exponencial de la solución.

Contenido

Introducción

1.- Resultados preliminares

1.1 Resultados básicos 12

1.2 Distribuciones 14

1.3 Espacios $L^p(\Omega)$ 16

1.4 Espacios de Sobolev 18

1.5 Inmersiones de Sobolev 19

1.6 Interpolación de Espacios de Sobolev 20

1.7 Espacios $L^p(0,T;X)$ y Distribuciones Vectoriales 21

1.8 Desigualdades Importantes 24

1.9 Semigrupos de Operadores Lineales 25

1.9.1 Teorema de Lumer-Phillips 27

1.9.2 Teoría de Perturbación 29

1.10 Propiedad de Continuación Única 32

2.- Algunas aplicaciones de Teoría de Perturbación 34

3.- Sistema Linear de Korteweg-de Vries

3.1 Existencia y Unicidad 42

3.2 Decaimiento Exponencial 57

Referencias bibliográficas 74

CAPITULO I

Resultados Preliminares

1.1 Resultados Básicos

Los resultados que enunciaremos, así como sus demostraciones pueden ser encontrados en [4] y [8].

Definición 1.1.1 ***(Sucesión de Cauchy)*** Una sucesión$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado X es llamada de Cauchy cuando para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N, tal que

$$\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon, \text{ para todo } n, m > N.$$

Definición 1.1.2 ***(Espacios de Banach y Hilbert)*** El espacio vectorial normado X es un espacio de Banach si es completo, esto es, si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X. Además, X es un espacio de Hilbert si es un espacio vectorial con producto interno $\langle .,. \rangle$ y es completo con respecto a la norma $\|.\| = \langle .,. \rangle^{1/2}$.

Definición 1.1.3 Sean X y Y espacios de Hilbert tal que Y es subespacio de X $(Y \subset X)$. La inmersión $Y \hookrightarrow X$ es llamada compacta si

1. $\|u\|_X \leq C\,\|u\|_Y$, $\forall u \in Y$
2. Cada sucesión acotada $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y posee una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ la cual es convergente en X.

Teorema 1.1.1 Sea X un espacio de Hilbert, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. $\{x_n\}_{\in\mathbb{N}}$que converge débilmente a $x \in X$ si y sólo si $\langle x_n, z\rangle \longrightarrow \langle x, z\rangle$, para todo $z \in X$.

Notación: $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle x_n, z\rangle \longrightarrow \langle x, z\rangle$, para todo $z \in X$.

Teorema 1.1.2 En un espacio de Hilbert toda sucesión acotada posee una subsucesión que converge débilmente.

Teorema 1.1.3 Sea H un espacio de Hilbert y $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H, tal que $h_n \rightharpoonup h$ en H, cuando $n \longrightarrow \infty$. Entonces,

$$\|h\|_H \leq lim\ inf_{n\to\infty} \|h_n\|.$$

Corolario 1.1.1 ***(Consecuencia del Teorema de Hahn-Banach)*** Sea X un espacio normado y sea $x_0 \neq 0$ elemento de X entonces existe un funcional lineal f sobre X tal que

$$\|f\| = 1, \qquad\qquad f(x_0) = \|x_0\|$$

Corolario 1.1.2 ***(Consecuencia del Teorema de Hahn-Banach)*** Sea X un espacio normado no trivial, Y un subespacio cerrado propio de X, entonces dado $x_0 \in X \setminus Y$ existe $f \in X^*$ tal que:

1. $\|f\| = 1$
2. $f(y) = 0$, $\forall y \in Y$

1.1.1 Operador Adjunto

Sean X e Y espacios de Banach y $A : X \longrightarrow Y$ un operador lineal con dominio $D(A)$ denso en X.

Definimos el operador A^* tal que

$$\begin{cases} D(A^*) = \{ \quad y^* \in Y^* : \exists x^* \in X^* tal \quad que\, \langle y^*, Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle\, \forall x \in D(A)\} \\ A^*\left(y^*\right) = x^* \end{cases}$$

Afirmo que A^* esta bién definido.

En efecto sean $x_1^*, x_2^* \in X^*$ tal que satisfacen la condición $\langle x_1^*, x\rangle = \langle x_2^*, x\rangle$, $\forall x \in D(A)$ entonces $x_1^* = x_2^*$ en X pues $\overline{D(A)} = X$.

Luego se tiene

$$\langle y^*, Ax\rangle = \langle A^* y^*, x\rangle\ , \forall x \in D(A),\, y^* \in D\left(A^*\right)$$

Teorema 1.1.4 Sea $A : X \longrightarrow Y$ un operador lineal densamente definido. Entonces el adjunto de A, denotado por A^* es un operador cerrado.

Definición 1.1.4 Sea X un espacio de Hilbert y $A : X \longrightarrow X$ un operador densamente definido. Se dice que A es simétrico si $D(A) \subset D(A^*)$ y $A = A^*$ en $D(A)$. Equivalentemente

$$(y, Ax) = (Ay, x) \ \forall x, y \in D(A)$$

Se dice que este operador simétrico es autoadjunto si $D(A) = D(A^*)$.

Definición 1.1.5 Sea X un espacio de Banach, A un operador lineal de X en X. El conjunto de los valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador lineal $\lambda I - A$ es inversible y su inverso es acotado y tiene dominio denso en X es llamado conjunto resolvente de A y es representado por $\rho(A)$.

Teorema 1.1.5 Si A es simétrico y $Im(\lambda_0 I - A) = X$ para algún λ_0 real tal que $\lambda_0 \in \rho(A)$, entonces A es autoadjunto.

1.2 Distribuciones

Los resultados que se enuncian, así como sus demostraciones pueden ser encontrados en [16].

Definición 1.2.1 Para facilitar el análisis introduciremos las siguientes notaciones:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

y

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i;$$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n};$$

$$D^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ define $D^0 u = u$ para toda función u. Para $i = 1, 2, ..., n$ se representa por D_i a la derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y Γ su frontera. Fijamos en Ω la medida de Lebesgue.

Sea u una función real definida en $\Omega\subset \mathbb{R}$, u medible , y sea $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ una família de todos los subconjuntos abiertos $\mathcal{O}_i$ de Ω, tales que $u=0$ casi siempre en $\mathcal{O}_i$. Considérese el subconjunto abierto $\mathcal{O}=\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i$, entonces, $u=0$ casi siempre en $\mathcal{O}$ y como consecuencia, se define el soporte de u, que será denotado por *supp* u, como siendo el subconjunto cerrado relativo a Ω

$$supp\ u = \Omega/\mathcal{O}.$$

Definición 1.2.2 Se denota por $C_0^\infty(\Omega)$ al conjunto de funciones $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales de todos los ordenes son contínuas y cuyo soporte es un subconjunto compacto de Ω. Los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ son llamados funciones prueba.

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por un escalar.

Noción de Convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$

Definición 1.2.3 Sean $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$. Se dice que $\varphi_k\longrightarrow\varphi$ si:

1. $\exists\ K\subset\Omega$, K compacto, tal que $supp\varphi_k\subset K$, para todo $k\in\mathbb{N}$

2. Para cada $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $D^\alpha\varphi_k(x)\longrightarrow D^\alpha\varphi(x)$ uniformemente en Ω

Definición 1.2.4 El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$, con la noción de convergencia especial definida anteriormente es denotado por $\mathfrak{D}(\Omega)$ y es llamado *Espacio de funciones prueba.*

Definición 1.2.5 Una distribución sobre Ω es un funcional lineal definido en $\mathfrak{D}(\Omega)$ y contínuo en relación a la noción de convergencia definida en $\mathfrak{D}(\Omega)$.

El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $\mathfrak{D}'(\Omega)$. De este modo,

$\mathfrak{D}'(\Omega) = \{T : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y contínuo$\}$

Observemos que $\mathfrak{D}'(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Si $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ el valor de T aplicado al elemento φ.

Noción de convergencia en $\mathfrak{D}'(\Omega)$

Definición 1.2.6 Diremos que $T_k \longrightarrow T$ en $\mathfrak{D}'(\Omega)$ si $\langle T_k, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

1.3 Espacios $L^p(\Omega)$

Las demostraciones de los resultados de este parágrafo pueden verse en [4].

En este trabajo, tanto las funciones medibles envueltas como las integrales realizadas sobre Ω son en el sentido de Lebesgue .

Definición 1.3.1 Sea Ω un conjunto medible y $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ al conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, donde

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

e indicamos por $L^\infty(\Omega)$ al conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, y esencialmente acotadas, esto es,

$$supess_{\ x \in \Omega} |f(x)| < \infty.$$

La norma en $L^\infty(\Omega)$ es definida por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = supess_{x \in \Omega} |f(x)| = inf\{C : |f| \leq C \text{ casi siempre}\}.$$

Los espacios $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, son Espacios de Banach, siendo $L^2(\Omega)$ un espacio de Hilbert con el produto interno usual. Además de eso, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ es reflexivo.

Teorema 1.3.1 $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Definición 1.3.2 Sea $1 \leq p < \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ el conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $f_{X_K} \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, donde X_K es la función característica de K.

Observación 1.3.1 $L^p_{loc}(\Omega)$ es llamado el espacio de las funciones localmente integrables.

Para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ consideramos el funcional $T = T_u : \mathfrak{D}(0,T) \longrightarrow K$ definido por

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

que define una distribución sobre Ω.

Lema 1.3.1 ***(Du Bois Reymond)*** Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces, $T_u = 0$ si, y sólo si, $u = 0$ casi siempre en Ω.

Teorema 1.3.2 ***(Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue)***. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Suponga que

a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, cuando $n \to \infty$, casi siempre en Ω, donde f es una función medible.

b) Existe una función $g \in L^p(\Omega)$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ casi siempre en Ω.

Entonces, $f \in L^p(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

Teorema 1.3.3 ***(Teorema de Hausdorff-Young)*** Si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $1 \leq p \leq 2$ entonces $\hat{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ y

$$\|\hat{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Observación 1.3.2 Como consecuencia del Lema 1.3.1, la aplicación

$$L^1_{loc}(\Omega) \longmapsto \mathfrak{D}'(\Omega)$$

$$u \longrightarrow T_u$$

es lineal, contínua e inyectiva. Como resultado de esto, es común identificar una distribución T_u con la función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. En ese sentido, se tiene que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, tenemos que toda función de $L^p(\Omega)$ define uma distribución sobre Ω, esto es, toda función de $L^p(\Omega)$ puede ser vista como una distribución.

Definición 1.3.3 Sean $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La derivada de orden α de T, denotada por $D^\alpha T$, es definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Con esta definición, se tiene que si $u \in C^k(\Omega)$ entonces $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, donde $D^\alpha u$ indica la derivada clásica de u. Si $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, entonces $D^\alpha T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.4 Espacios de Sobolev

En [1] y en [4] se pueden ver los resultados citados en este acápite.

Sea p tal que $1 \leq p \leq \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. Cuando $D^\alpha u$ es definida por una función de $L^p(\Omega)$ se define un nuevo espacio denominado espacio de Sobolev denotado por $W^{m,p}(\Omega)$ el cual es definido por

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq m$ siendo $D^\alpha u$ la derivada en el sentido de las distribuciones$\}$

Este espacio tiene la estructura de espacio vectorial con las operaciones usuales.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se define el funcional

$$\|u\|_{m,p} = \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p},\ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

El cual en cada caso, es una norma en $W^{m,p}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$

Los espacios normados $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p})$ son denominados espacios de Sobolev.

Definición 1.4.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$, definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como siendo la cerradura de $C_0^{\infty}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

Notaciones:

1. Cuando $p = 2$ se escribe $H_0^m(\Omega)$ en lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2. Se denota $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

3. El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ es representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Observación 1.4.1

1. $\left(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p}\right)$ es un espacio de Banach.

2. Cuando $p = 2$ el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se convierte en un espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$(u,v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)}, \qquad u,v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Si $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ entonces el complemento de Ω en $\mathbb{R}^n$ posee medida de Lebesgue igual a cero.

4. $H^m(\Omega)$ es reflexivo y separable.

5. $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

1.5 Inmersiones de Sobolev

Los resultados que enunciaremos, así como sus demostraciones, pueden ser encontrados en [1], [4] y [17] .

Teorema 1.5.1 ***(Teorema de Sobolev)*** Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto de clase C^m, acotado y $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$.

1. Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$; $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$.

2. Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$; $q \in [p, \infty)$.

3. Si $\dfrac{1}{p}-\dfrac{m}{n}<0$, entonces $W^{m,p}(\Omega)\subset L^{\infty}(\Omega)$,

siendo las inmersiones arriba contínuas.

Teorema 1.5.2 ***(Teorema Rellich)*** Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. Entonces, la inmersión $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta.

Observación 1.5.1 Como consecuencia del Teorema de Rellich, se tiene que la inmersión del espacio $H_0^1(\Omega)$ en el espacio $L^2(\Omega)$ es compacta; y como corolario del mismo, se tiene que la inmersión de $H^2(\Omega)$ en el espacio $H^1(\Omega)$ es compacta.

1.6 Interpolación de Espacios de Sobolev

Los resultados que enunciaremos, así como sus demostraciones, pueden ser encontrados en [12] .

Definición 1.6.1 Diremos que dos espacios vectoriales topológicos normados X y Y son compatibles si existe un espacio vectorial topológico separable U tal que X y Y son subespacios de U.

Consideramos el par (X,Y) de espacios compatibles luego podemos definir su suma, denotada por

$$\sum(X,Y)=X+Y=\{u:u\in U,\, u=x+y,\, x\in X \text{ y } y\in Y\}$$

con la norma

$$\|u\|_{\sum(X,Y)}=inf\left\{\|x\|_X+\|y\|_Y\,,u=x+y\right\}$$

y

$$\triangle(X,Y)=X\cap Y$$

con la norma

$$\|u\|_{\triangle(X,Y)}=max\left\{\|x\|_X\,,\|y\|_Y\right\}$$

Sean $S=\{z:z\in\mathbb{C},0\leq Re(z)\leq 1\}$ y $S_0=\{z:z\in\mathbb{C},0<Re(z)<1\}$.

Definimos $\mathcal{F}(X,Y)$ como siendo un conjunto de funciones continuas en S que satisfacen

1. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \sum(X,Y)$ analítica en S_0;
2. $\|f(z)\|_{\sum(X,Y)} \leq M$, $\forall z \in S$;
3. $t \longrightarrow f(it) \in X$, siendo contínua y nula en el infinito;
4. $t \longrightarrow f(1+it) \in Y$ siendo contínua en el infinito

con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{F}(X,Y)} = max\left(sup_t \|f(it)\|_X, sup_t \|f(1+it)\|_Y\right)$$

Lema 1.6.1 El espacio $\mathcal{F}(X,Y)$ es un espacio de Banach.

Definición 1.6.2 Definimos $[X,Y]_\theta$ como siendo

$$[X,Y]_\theta = \{u : u \in \sum(X,Y),\ u = f(\theta), \text{ para algun; } f \in \mathcal{F}(X,Y)\}$$

con la norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = inf\{\|f(\theta)\|_{\mathcal{F}(X,Y)} : u = f(\theta),\ f \in \mathcal{F}(X,Y)\}$$

Observación 1.6.1

1. El espacio $[X,Y]_\theta$ es un espacio de Banach.
2. $\triangle(X,Y) \subset [X,Y]_\theta \subset \sum(X,Y)$

Teorema 1.6.1 Sean X, Y dos espacios de Banach, $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$. Entonces

$$[L^{p_0}(0,T;X), L^{p_1}(0,T;Y)]_\theta = L^p(0,T;[X,Y]_\theta)$$

donde $\dfrac{1}{p} = (1-\theta)\dfrac{1}{p_0} + \theta\dfrac{1}{p_1}$ con normas equivalentes. Si $1 \leq p_0 < \infty$, tenemos

$$[L^{p_0}(0,T;X), L^{\infty}(0,T;Y)]_\theta = L^p(0,T;[X,Y]_\theta)$$

donde $\dfrac{1}{p} = (1-\theta)\dfrac{1}{p_0}$ con normas equivalentes.

1.7 Espacios $L^p(0,T;X)$ y Distribuciones Vectoriales

Los resultados que enunciaremos, así como sus demostraciones, pueden ser encontrados en [6], [12] y [13].

Sea X un espacio de Banach real con la norma $\|.\|_X$, T un número real positivo y $1 \leq p < \infty$. Se representa por $L^p(0,T;X)$ el espacio de Banach de funciones $u : (0,T) \longrightarrow X$, tales que $(u(t),\xi)_{X\times X}$ es medible $\forall\ \xi \in X$ y $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}.$$

Cuando $p = 2$ y $X = H$ es un espacio de Hilbert, el espacio $L^p(0,T;H)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno es dado por

$$(u,v)_{L^p(0,T;H)} = \int_0^T (u(s),v(s))_H ds \; .$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representaremos el espacio de Banach de las (clases de) funciones $u :(0,T) \longrightarrow X$ tales que $(u(t),\xi)_{X\times X}$ es medible $\forall\ \xi \in X$ y esencialmente acotadas, esto es,

$$supess_{\ 0<t<T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

La norma en $L^\infty(0,T;X)$ es definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = supess_{\ 0<t<T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Si X es reflexivo y separable y $1 < p < \infty$, entonces $L^p(0,T;X)$ es un espacio reflexivo y separable, cuyo dual topológico se identifica como el espacio de Banach $L^q(0,T;X^*)$ donde p y q son tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. En el caso $p = 1$, el dual topológico del espacio $L^\infty(0,T;X)$ se identifica con el espacio $L^1(0,T;X^*)$.

Definición 1.7.1 Una función $u : (0,T) \longrightarrow X$ es dicha integrable de Bochner en $(0,T)$ si $t \longmapsto (u(t),\xi)_{X\times X}$ es medible $\forall\ \xi \in X$ y la función real $t \longrightarrow \|u(t)\|_X$ fuese integrable en el sentido de Lebesgue en $(0,T)$.

La integral de Bochner de la función u en $(0,T)$ es el vector de X denotado por $\int_0^T u(t)dt$ caracterizado por la siguiente propiedad:

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle_{X'\times X} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{X'\times X}\, dt \ , \forall f \in X'$$

Lema 1.7.1 Sean X, Y Espacios de Banach y $A : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal y contínua. Se tiene que, si $f \in L^1(I;X)$, donde I es un intervalo de la recta, entonces

$$A(\int_I f(s)ds) = \int_I Af(s)ds.$$

Sea $v \in L^p(0,T;X)$, donde X es un espacio de Hilbert separable y $\varphi \in \mathfrak{D}(0,T)$. La integral en X

$$\int_0^T v(s)\varphi(s)ds$$

existe, siendo un vetor de X (esta integral es entendida como una integral de Bochner en X). Así, dado $v \in L^p(0,T;X)$, la aplicación

$$\begin{aligned} T_v : \mathfrak{D}(0,T) &\longrightarrow X \\ \varphi &\longmapsto \langle T_v, \varphi\rangle = \int_0^T v(s)\varphi(s)ds \end{aligned}$$

está bien definida, es lineal y contínua.

Se denota por $\mathfrak{D}'(0,T;X)$ al espacio de las distribuciones vectoriales sobre $(0,T)$ con valores en X, es decir, el espacio de las aplicaciones lineales y contínuas de $\mathfrak{D}(0,T)$ en X. De este modo, $T_v \in \mathfrak{D}'(0,T;X)$ y se demuestra que T_v esta univocamente definida por v. Luego, identificando la función v con la distribución T_v, se puede afirmar que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathfrak{D}'(0,T;X).$$

Definición 1.7.2 Sea $T \in \mathfrak{D}'(0,T;X)$. La derivada de orden n de T es definida como siendo una distribución vectorial sobre $(0,T)$ con valores en X y es dada por

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle.$$

Se concluye, de este hecho que toda $v \in L^p(0,T;X)$ posee derivadas de todas las ordenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $(0,T)$.

Por $C([0,T];X)$, $0 < T < \infty$, se representa el espacio de Banach de las funciones contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$, con la norma de convergencia uniforme

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X .$$

Lema 1.7.2 Sean V y H espacios de hilbert, tales que $V \hookrightarrow H$ es una inmersión contínua. Si $u \in L^p(0,T;V)$ y $u' \in L^p(0,T;H)$ donde $1 \leq p \leq \infty$ y $T > 0$, entonces $u \in C([0,T];H)$.

Teorema 1.7.1 ***(Aubin-Lions)*** Sean B_0, B_1 y B tres espacios de banach, tales que B_0 y B_1 son espacios reflexivos, $B_0 \hookrightarrow B$ es una imersión compacta y $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ son inmersiones contínuas. Sea $W(0,T) = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0); u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$, donde $0 < T < \infty$ y $1 < p_0, p_1 < \infty$ con norma definida por

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)} .$$

Entonces, W es un espacio de Banach y la inmersión $W \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;B)$ es contínua y conpacta.

Observación **1.7.1** Sean $I = (0,T)$ y $f \in L^p(I,X)$. Tenemos los seguientes resultados.

- Si $p < \infty$, entonces $C_0^\infty(I,X)$ es denso en $L^p(I,X)$.
- $f : I \longrightarrow X$ es una función medible que pertenece a $L^p(I,X)$ si, y solamente si, existe $g \in L^p(I)$, tal que $\|f\| \leq g$ en casi todo punto de I.

1.8 Desigualdades Importantes

Los resultados que enunciaremos, así como sus demostraciones, pueden ser encontrados en [1], [4] y [8].

Lema 1.8.1 ***(Desigualdad de Poincaré-Friedrichs)*** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado en una dirección. Entonces vale la siguiente desigualdad

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

donde $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ y C_p es la constante de Poincaré.

Lema 1.8.2 ***(Desigualdad de Young)*** Sean a, b constantes positivas y $p > 1$ y sea q, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.8.1 ***(Desigualdad de Holder Generalizada)*** Sea $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ y $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \leq 1$.

Entonces definiendo $\frac{1}{p} := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$.Se tiene que:

$$u_1.u_2...u_k \in L^p(\Omega) \text{ y } \|u_1.u_2...u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

Teorema 1.8.2 ***(Desigualdad de Interpolación)*** Si $u \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$ con $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ para todo número real que satisface la condición $p_1 \leq r \leq p_2$. se tiene que $u \in L^r(\Omega)$ y si $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ entonces

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\alpha} \|u\|_{L^{p_2}(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

Teorema 1.8.3 ***(Desigualdad de Gagliardo-Niremberg)*** Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\,\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\,.$$

1.9 Semigrupos de Operadores Lineares

Los resultados que enunciaremos, así como sus demostraciones, pueden ser encontrados en [8], [9] y [23].

Definición 1.9.1 Sean X un espacio de Banach y $L(X)$ una álgebra de los operadores lineales y acotados de X. Se dice que una aplicación $S:\mathbb{R}^+ \longrightarrow L(X)$ es un semigrupo de operadores lineales acotados de X si

1. $S(0) = I$, donde I es el operador identidad de $L(X)$,
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\; t, s \in \mathbb{R}^+$.

Se dice que el semigrupo S es de clase C_0 si

3. $lim_{t\longrightarrow 0^+}\|(S(t)-I)x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Proposición 1.9.1 Todo semigrupo de clase C_0 es fuertemente contínuo en $\mathbb{R}^+$, esto es, si $t \in \mathbb{R}^+$, Entonces

$$lim_{s\to t}S(s)x = S(t)x,\ \forall x \in X.$$

Definición 1.9.2 Sea S un semigrupo de clase C_0 . Si $\|S(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$ entonces decimos que S es un semigrupo de contracciones de clase C_0.

Definición 1.9.3 El operador $A{:}D(A) \longrightarrow X$ definido por

$$D(A) = \{x \in X \mid lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)-I}{h}x \text{ existe}\}$$

$$Ax = lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)-I}{h}x,\ \forall x \in D(A)$$

es llamado generador infinitesimal del semigrupo S.

Proposición 1.9.2 El generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 es un operador lineal, cerrado y su dominio es un espacio vectorial denso en X.

Teorema 1.9.1 Sea $S(t)$ un Semigrupo de clase C_0 en un espacio de Banach X y A su generador infinitesimal. Entonces, la aplicación $u := S(t)x_0$ es la única solución del problema de Cauchy abstracto

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = x_0 \end{array} \right.$$

con regularidad $\qquad u \in C([0,\infty); X)$, si $x_0 \in X$

$$u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X), \text{ si } x_0 \in D(A).$$

Definición 1.9.4 Sea S un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Colocando $A^0 = I$, $A^1 = A$ y suponiendo que A^{k-1} este definido, vamos a definir A^k por

$$\begin{cases} D(A^k) = \{x \in D \quad (A^{k-1}) : A^{k-1}x \in D(A)\} \\ A^k x = A(A^{k-1}x), \qquad\qquad \forall x \in D(A^k). \end{cases}$$

Proposición 1.9.3 Sea S un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Entonces,

1. $D(A^k)$ es un subespacio de X y A^k es un operador lineal de X;
2. Si $x \in D(A^k)$, entonces $S(t)x \in D(A^k)$, $\forall t \geq 0$ y
$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^k x, \; \forall k \in \mathbb{N};$$
3. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D(A^k)$ es denso en X.

Lema 1.9.1 Sea A un operador lineal cerrado de X. Tomando para cada $x \in D(A^k)$

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|,$$

el funcional $|.|_k$ es una norma en $D(A^k)$. Por lo que $D(A^k)$ es un espacio de Banach con dicha norma.

Definición 1.9.5 La norma arriba es llamada la norma del gráfico. El espacio de Banach que se obtiene uniendo $D(A^k)$ de la norma arriba será representado por $\left[D(A^k)\right]$.

1.9.1 Teorema de Lumer-Phillips

Sea X un espacio de Banach, X^* el dual de X y $\langle .,. \rangle$ la dualidad entre X y X^*. Para cada $x \in X$, definimos

$$J(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Por el Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \varnothing$, $\forall x \in X$.

Definición 1.9.6 Una aplicación dualidad es una aplicación $j : X \longrightarrow X^*$, tal que $j(x) \in J(x)$, $\forall x \in X$.

Observe que $$\|j(x)\| = \|x\| \ .$$

Definición 1.9.7 Se dice que el operador lineal $A : X \longrightarrow X$ es disipativo si, para alguna aplicación dualidad j,

$$Re \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \qquad \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.9.2 Un operador lineal A es disipativo si y solo si

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \qquad \forall x \in D(A) \text{ y } \lambda > 0.$$

Teorema 1.9.3 ***(Lumer-Phillips)*** Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0, entonces

1. A es disipativo;

2. $Im(\lambda I - A) = X$, $\forall \ \lambda > 0$.

Reciprocamente, si

1. $D(A)$ es denso en X ;

2. A es disipativo;

3. $Im(\lambda_0 I - A) = X$, para algún $\lambda_0 > 0$,

entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0.

Corolario 1.9.1 Sea A un operador lineal cerrado, densamente definido y tal que $D(A)$ y la imagen de A esten definidos en un espacio de Banach X. Si A y su operador dual A^* son ambos disipativos, entonces A genera un semigrupo de contracciones de clase C_0.

Demostración.-

Por el Teorema de Lumer-Phillips es suficiente probar que $Im(I - A) = X$. Y como A es disipativo y cerrado $Im(I - A)$ es también un subespacio cerrado de X. Si $Im(I - A) \neq X$ entonces por el Corolario 1.1.2 existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tal que $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ para $x \in D(A)$. Esto implica $x^* - A^*x^* = 0$. Y como A^* es también disipativo sigue del Teorema 1.9.2 que $x^* = 0$, contradiciendo la construcción de x^*.

Teorema 1.9.4 (*Teorema de Stone*) Un operador lineal A de un espacio de Hilbert X es el generador infinitesimal de un grupo de clase C_0 si y solo si $A^* = -A$.

1.9.2 Teoría de la Perturbación

Para simplificar el lenguaje, vamos a escribir $A \in G(M, \omega)$ para decir que A es el generador infinitesimal de un semigrupo $S(t)$, de operadores lineales acotados de clase C_0, que satisface la condición $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$.

Proposición $A - \omega I \in G(M, 0)$ si y sólo si $A \in G(M, \omega)$

Teorema 1.9.5 Sean $A \in G(1, 0)$ y B un operador disipativo relativamente a alguna aplicación dualidad. Si $D(B) \supset D(A)$ y existen constantes a y b con $0 \leq a < 1$ y $b \geq 0$, tales que

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|, \forall x \in D(A), \tag{1}$$

entonces $A + B \in G(1,0)$.

Demostración.-

Como A$\in G(1,0)$, A es disipativo relativamente a toda aplicación dualidad. Sea B disipativo relativamente a j. Entonces $A+B$ es disipativo relativamente a j. Además de esto, $D(A+B) = D(A)$ es denso en X. Por tanto, por el Teorema de Lumer Phillips, para demostrar que $A+B \in G(1,0)$ es suficiente demostrar que $Im(\lambda I-(A+B)) = X$, para algún $\lambda > 0$. Pero, como $D(A) \subset D(B)$ tenemos que $\lambda \in \rho(A)$ para$\lambda > 0$, luego se tiene que:

$$\begin{aligned} Im(\lambda I - (A+B)) &= Im(\lambda I - (A+B)(\lambda I - A)^{-1}) = Im(I - B(\lambda I - A)^{-1}) \\ &= Im(I - BR(\lambda, A)), \end{aligned}$$

para cualquier $\lambda > 0$, luego es suficiente demostrar que $I - BR(\lambda, A)$ es inversible en $\mathcal{L}(X)$ y por tanto, que $\|BR(\lambda, A)\| < 1$. Pero, por (1)

$$\begin{aligned} \|BR(\lambda, A)x\| &\leq a\,\|AR(\lambda, A)x\| + b\,\|R(\lambda, A)x\|\,\|x\| \\ &= a\,\|[\lambda R(\lambda, A) - I]x\| + b\,\|R(\lambda, A)x\| \\ &\leq \left(2a + \frac{b}{\lambda}\right), \qquad \forall x \in X \end{aligned}$$

Sea $a< \frac{1}{2}$. Entonces, para λ suficientemente grande, $2a+\frac{b}{\lambda} < 1$, así $\|BR(\lambda, A)\| < 1$. Por tanto si (1) fuese satisfecha para $a < \frac{1}{2}$, entonces $A+B \in G(1,0)$, esto quiere decir que el Teorema es válido en ese caso particular. Para demostrar el caso general, sea α un número tal que $0 \leq \alpha \leq 1$ e sea $x \in D(A)$. Tenemos

$$\|(A+\alpha B)x\| \geq \|Ax\| - \alpha\,\|Bx\| \geq \|Ax\| - \|Bx\| \geq (1-a)\,\|Ax\| - b\,\|x\|$$

y si el entero n es tal que $\frac{a}{n} < \frac{1-a}{4}$,entonces:

$$\left\|\frac{1}{n}Bx\right\| \leq \frac{a}{n}\,\|Ax\| + \frac{b}{n}\,\|x\| \leq \frac{(1-a)}{4}\,\|Ax\| + \frac{b}{n}\,\|x\| \leq \frac{1}{4}\,\|(A+\alpha B)x\| + \left(\frac{b}{n} + \frac{1}{4}\right)\|x\|$$

Por tanto, por lo que ya fue demostrado, si $A + \alpha B \in G(1,0)$ lo mismo sucede con $A + \alpha B + (\frac{1}{n})B$. Pero como $A \in G(1,0)$, entonces por el resultado arriba tenemos

$A + \frac{1}{n}B \in G(1,0)$, luego por el mismo argumento tenemos $A + \frac{2}{n}B \in G(1,0)$ y de este modo ese argumento repetido n veces nos da $A + B = A + (\frac{n}{n})B \in G(1,0)$.

$\square$

Teorema 1.9.6 Si $A \in G(1,0)$ y $B \in L(X)$, entonces

$$A + B \in G(1, \|B\|).$$

Demostración.-

Para cada aplicación dualidad, j se tiene:

$Re\,\langle (B - \|B\|\, I)x, j(x)\rangle = Re\,\langle Bx, j(x)\rangle - \|B\|\,\|x\|^2 \leq \|B\|\,\|x\|^2 - \|B\|\,\|x\|^2 = 0$

entonces $B - \|B\|\, I$ es disipativo. Como $\|(B - \|B\|\, I)x\| \leq 2\,\|B\|\,\|x\|, \quad \forall x \in D(A)$, A y $B - \|B\|\, I$ satisfacen las hipótesis del teorema anterior con $a = 0$ y $b = 2\,\|B\|$. Luego sigue que $A + B - \|B\|\, I \in G(1,0)$ luego tenemos que $A + B \in G(1, \|B\|)$.

$\square$

Lema 1.9.2 Si $A \in G(M,0)$, entonces existe una norma, $|.|$, en X tal que

$$\|x\| \leq |x| \leq M\,\|x\| \text{ en la cual } A \in G(1,0).$$

Demostración.-

Si S es el semigrupo generado por A tenemos

$$\|S(t)\| \leq M, \qquad \forall t \geq 0$$

Definamos $|x| = \sup\limits_{t\geq 0} \|S(t)x\|$

Es inmediato que $|.|$ es una norma en X; además de esto,

$$\|x\| = \|S(0)x\| \leq \sup_{t\geq 0} \|S(t)x\| = |x|$$

luego

$$|x| = \sup_{t\geq 0} \|S(t)x\| \leq \sup_{t\geq 0} \|S(t)\|\,\|x\| \leq M\,\|x\|\,,$$

lo que demuestra la desigualdad pedida.

Luego en el espacio X con la norma $|.|$, $S(t)$ es una contracción $\forall t \geq 0$ pues

$$|S(t)x| = \underset{\tau \geq 0}{sup} \|S(\tau)S(t)x\| = \underset{\tau \geq 0}{sup} \|S(\tau + t)x\| \leq \underset{t \geq 0}{sup} \|S(t)x\| = |x| ,$$

$A \in G(1, 0)$ considerando X con la norma $|.|$.

Teorema 1.9.7 Si $A \in G(M, w)$ e $B \in \mathcal{L}(X)$, entonces $A + B \in G(M, w + M \|B\|)$

Demostración.-

Sea S semigrupo generado por A y consideremos el semigrupo $\widetilde{S} = e^{-wt}S$. Su generador infinitesimal es dado por $\widetilde{A} = A - wI$. Luego $\widetilde{A} \in G(M, 0)$. Luego por el Lema anterior existe una norma $|.|$ en X tal que

$$\|x\| \leq |x| \leq M \|x\| \qquad \forall x \in X \text{ e } \widetilde{A} \in G(1, 0)$$

Así las normas $|.|$ y $\|.\|$ son equivalentes, $B \in \mathcal{L}(X)$ considerando X con la norma $|.|$. Luego por la proposición anterior, $\widetilde{A} + B \in G(1, |B|)$ de donde $\widetilde{A} + B - |B|\, I \in G(1, 0)$ esto es $A + B - (w + |B|)I \in G(1, 0)$, luego $A + B \in G(1, w + |B|)$.

Luego

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A + B)^n x\| &\leq |R(\lambda, A + B)^n x|, \\ &\leq |R(\lambda, A + B)^n|\, |x| \leq \frac{M \|x\|}{[\lambda - (\omega + |B|)]^n} \quad \forall \lambda > w + |B|, \forall x \in X.\end{aligned}$$

Luego

$$\|R(\lambda, A + B)^n x\| \leq \frac{M \|x\|}{[\lambda - (\omega + |B|)]^n} \qquad \forall \lambda > w + |B| \tag{2}$$

De

$$|Bx| \leq M \|Bx\| \leq M \|B\| \|x\| \leq M \|B\| |x|$$

resulta $|B| \leq M \|B\|$ y por tanto, de $\lambda > w + |B, |$ se tiene por (2) que

$$\|R(\lambda, A+B)^n\| \leq \frac{M}{[\lambda - (w + M\|B\|)]^n}, \qquad \forall \lambda > w + \|B\|$$

entonces $A + B \in G(M, w + M\|B\|)$.

$\square$

1.10 Propiedad de Continuación Única

Los resultados que enunciaremos, así como sus demostraciones, pueden ser encontrados en [5].

Definición 1.10.1.- Sea $\mathcal{O}$ un conjunto abierto de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ difiniremos la componente horizontal de $\mathcal{O}$ en Ω como $O_h = \{(x,t) \in \Omega : \exists x' \in \mathbb{R}, (x',t) \in \mathcal{O}\}$. Se dice que una ecuación diferencial $Lu = 0$, de dominio Ω, satisface la Propiedad de continuacion Única Horizontal, denotada por P.C.U.H. si $u \equiv 0$ en $\mathcal{O}_h$ es la única solución que se anula en $\mathcal{O}$.

Teorema 1.10.1.- Sea $T > 0$ y $\Omega = (0,1) \times (0,T)$. Supongamos $f_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1,2,3,4$. Si $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in L^2(0,T; H^3(0,1) \times H^3(0,1))$ es solución de la ecuación:

$$b_1 U_t + AU_{xxx} + B_1 U_x = 0$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 a_3 \\ b_2 a_3 & 1 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} b_1 f_1 & b_1 f_2 \\ b_2 f_2 & f_4 \end{pmatrix}$$

y

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in \mathbb{R},\; b_1, b_2 > 0 \text{ con } b_1 a_3^2 < 1 \text{ y } b_2 a_3^2 < 1.$$

tal que $U \equiv 0$ en un conjunto abierto $\mathcal{O}$ de Ω, entonces $U \equiv 0$ en la componente horizontal $\mathcal{O}_h$ de $\mathcal{O}$ en Ω.

CAPITULO II

2.1 Algunas aplicaciones de Perturbación

Proposición 2.1 ***(Ecuación de la onda en la recta)*** Sea el problema:

$$\left| \begin{array}{ll} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta u = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) & = u_1(x), x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

donde α, β son constantes positivas y $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in H^1(\mathbb{R})$. Entonces el problema posee una única solución.

Demostración.-

Transformaremos la ecuación a una ecuación de primer orden (en el tiempo t). Haciendo $u_t = v$, tenemos

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ \alpha(.)_{xx} - \beta I & 0 \end{pmatrix}}_{A:=} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\left| \begin{array}{l} U_t = AU \\ U(0) = U_0 \end{array} \right.$$

donde $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$

donde $D(A) = H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \subset X = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ y estamos considerando la siguiente norma en X :

$$\left\| \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \right\|_X^2 = \alpha \int_{\mathbb{R}} |v_x|^2 \, dx + \beta \int_{\mathbb{R}} |v|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \, dx$$

Dado $F \in X$, sea $(\lambda I - A) U = F$ la ecuación del resolvente, queremos encontrar $U \in D(A)$ tal que verifique dicha ecuación. i.e.

$$\lambda u - v = f \in H^1(\mathbb{R}) \tag{2.1}$$

$$\lambda v - \alpha u_{xx} + \beta u = g \in L^2(\mathbb{R}) \tag{2.2}$$

Tomando la transformada de Fourier tenemos:

$$\lambda\hat{u} - \hat{v} = \hat{f} \in H^1(\mathbb{R})$$
$$\lambda\hat{v} + (\alpha\xi^2 + \beta)\hat{u} = \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$\hat{u} = \frac{\lambda\hat{f} - \hat{g}}{\lambda^2 + \xi^2\alpha + \beta}$$
$$\hat{v} = \frac{\lambda\hat{g} - \hat{f}(\xi^2\alpha + \beta)}{\lambda^2 + \xi^2\alpha + \beta}$$

Para $\lambda > 0$, luego tenemos que la ecuación del resolvente tiene una única solución $U \in D(A)$. Así, $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$. Multiplicando la ecuación (2.1) por $-\alpha u_{xx}$ y βu, respectivamente obtenemos:

$$\lambda\int_{\mathbb{R}} \alpha u_x^2 dx - \alpha\int_{\mathbb{R}} v_x u_x dx = \alpha\int_{\mathbb{R}} f_x u_x dx$$
$$\lambda\beta\int_{\mathbb{R}} u^2 dx - \beta\int_{\mathbb{R}} vu dx = \beta\int_{\mathbb{R}} fu dx$$

Multiplicando la ecuación (2.2) por βv, obtenemos:

$$\lambda\int_{\mathbb{R}} \alpha v^2 dx - \alpha\int_{\mathbb{R}} u_x v_x dx + \beta\int_{\mathbb{R}} uv dx = \int_{\mathbb{R}} gv dx$$

sumando las identidades arriba y usando Holder tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda \|U\|_X^2 &= \alpha\int_{\mathbb{R}} f_x u_x dx + \beta\int_{\mathbb{R}} fu dx + \int_{\mathbb{R}} gv dx \\
&\leq \|\sqrt{\alpha} f_x\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\sqrt{\alpha} u_x\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|\sqrt{\beta} f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|\sqrt{\beta} u\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \|F\|_X \|U\|_X
\end{aligned}$$

Luego, para $\lambda > 0$ tenemos, $\|U\|_X \leq \frac{1}{\lambda}\|F\|_X$, luego como $U = R(\lambda, A)F$ tenemos $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Siendo A un operador cerrado con dominio denso en X, el Teorema de Hille Yosida nos dice que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracción.

$\square$

Cuando $\beta = 0$, usaremos un resultado de perturbación en la prueba de existencia de solución.

Proposición 2.2 ***(Ecuación de la onda caso*** $\beta = 0$***)*** Sea el problema:

$$\left|\begin{array}{ll} u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x), & u_t(x,0) = u_1(x), x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

donde α es una constante positiva y $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in H^1(\mathbb{R})$. Entonces el problema posee una única solución.

Demostración.-

Transformaremos la ecuación a una ecuación de primer orden (en el tiempo t). Haciendo $u_t = v$, tenemos

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ \alpha(.)_{xx} - & 0 \end{pmatrix}}_{A_0 :=} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\left|\begin{array}{l} U_t = A_0 U \\ U(0) = U_0 \end{array}\right.$$

donde $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$

donde $X = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ y observamos que

$$A_0 = A + B$$

donde

$$A := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \alpha(.)_{xx} - \beta I & 0 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta I & 0 \end{pmatrix}$$

Del resultado anterior, sabemos que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 de contracción en $X = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$.

Por otro lado el operador B es lineal y continuo en X. En efecto,

$$\|BU\|_X = \|\beta u\|_{L^2(\mathbb{R})} = |\beta| \, \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \beta \, \|U\|_X$$

donde $D(A_0) = D(A) \cap D(B) = D(A) = H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$.

Entonces por un resultado de perturbación concluimos que A_0 es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0. Así, si $U_0 \in D(A_0)$ entonces

$$u \in C(0,\infty; H^2(\mathbb{R})) \cap C^1(0,\infty; H^1(\mathbb{R})) \cap C^2(0,\infty; L^2(\mathbb{R}))$$

$\square$

Proposición 2.3 ***(Ecuación de Schrodinger)*** Consideremos la ecuación de Schrodinger en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \triangle u - qu \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array} \right.$$

donde $\triangle$ es el Laplaciano, q es una función real medible en $\mathbb{R}^n$. $u_0 \in H^2(\Omega)$ entonces el problema posee una única solución.

Demostración.-

Consideremos el espacio $X = L^2(\Omega)$

Definamos los operadores A_1 y M_q lineales y continuos en X de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1 u = i\triangle u, \\ D(A_1) = H^2(\mathbb{R}^n) \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} M_q u = qu, \\ D(M_q) = \{u \ \ \in L^2(\mathbb{R}^n); qu \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \end{array} \right.$$

i.e. la ecuación de Schrodinger puede ser escrita como:

$$\left| \begin{array}{l} u_t = A_1 u \quad -iMu \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

Afirmamos que los operadores $-iA_1$ y $-M_q$ son simétricos,

En efecto,

Observamos que $-iA_1$ esta densamente definido, pues $H^2(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ luego tenemos que

$$(-iA_1u, v) = (\triangle u, v) = (u, \triangle v) = (u, -iA_1v) \text{ , } \forall u, v \in D(A_1)$$

entonces $-iA_1$ es simétrico (por definición 1.1.4), por tanto $D(iA_1) \subset D((iA_1)^*)$ y $(iA_1)^*u = (iA_1)u$, $\forall u \in D(iA_1)$.

Ahora veamos que M_q este densamente definido, definamos $E_n := \{x \in \Omega : |q(x)| \leq n, n \in \mathbb{N}\}$. Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |qu\mathcal{X}_{E_n}|^2 \, d\mu \leq n^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, d\mu < \infty$$

entonces $qu\mathcal{X}_{E_n} \in X$ así $u\mathcal{X}_{E_n} \in D(M_q)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y como $lim_{n\to\infty} u\mathcal{X}_{E_n} = u$ en c.t.p de $\mathbb{R}^n$ por el Teorema de Convergencia Limitada tenemos que $lim_{n\to\infty} \|u\mathcal{X}_{E_n} - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$. Luego $D(M_q)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ademas si $u, v \in D(M_q)$ se tiene $(M_qu, v) = (qu, v) = (u, qv) = (u, M_qv)$ y entonces M_q es simétrico (por definición 1.1.4), por tanto $D(M_q) \subset D(M_q^*)$ y $M_q^*u = M_qu$, $\forall u \in D(M_q)$.

Luego $-iA_1$ y $-M_q$ son simétricos.

Observemos que se cumple:

$$(-iA_1u, u) = (\triangle u, u) = (\nabla u, \nabla u) = -\|\nabla u\|^2, \, \forall u \in D(A_1)$$

Entonces $-iA_1$ es didipativo.

Ahora con la ayuda del Teorema 1.9.4(Teorema de Stone) demostraremos que la ecuación de Schrodinger tiene una única solución u con valor inicial $u_0 \in H^2(\Omega)$ tal que $u \in C([0, \infty], H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, \infty), X)$.

Nos restringiremos a los tres casos siguientes:

a) $q(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

b) $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

c) $q \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $p > \dfrac{n}{2}$ y $p \geq 2$ y $q \geq 0$ casi siempre en $\mathbb{R}^n$

Primero necesitamos probar que que $L^2(\mathbb{R}^n) = Im(\lambda_0 I - (-iA_1 - M_q))$ para algún $\lambda_0 \in \rho\,(-iA_1 - M_q)$ y que $-iA_1 - M_q$ es simétrico (para esto último bastará probar que $H^2(\mathbb{R}^n) \subset D(M_q))$.

En efecto:

a) Tenemos $M_q = 0$, de donde $D(M_q) = L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $H^2(\mathbb{R}^n) \subset D(M_q)$ y como $-iA_1$ es disipativo por el Teorema 1.9.2 tenemos que $\|(I - (-iA_1))\,u\| \geq \|u\|$, $\forall u \in D(A_1)$ entonces $I - (-iA_1)$ es inyectiva luego es inversible así $(I - (-iA_1))^{-1}$ es acotado entonces $1 \in \rho(-iA_1)$ pero como la ecuación $u - \triangle u = v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tiene una solución en $H^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $Im(I - (-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)$.
Así, $Im(I - (-iA_1 - M_q)) = Im(I - (-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ tomando $\lambda_0 = 1$, tenemos que $\lambda_0 \in \rho(-iA_1) = \rho(-iA_1 - M_q)$.

$\square$

b) Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $M_q u = qu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pues

$\|M_q u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |M_q u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |qu|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$
Así, $D(M_q) = L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $H^2(\mathbb{R}^n) \subset D(M_q)$.

Ademas tenemos que $Im(I - (-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ y como $-iA_1$ esta densamente definido y es disipativo, se sigue del Teorema Lumer- Phillips que $-iA_1 \in G(1, 0)$. Luego por el Teorema 1.9.6 y como M_q es un operador lineal acotado tenemos que $-iA_1 - M_q \in G(1, \|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})$ de donde obtenemos que $-iA_1 - M_q - \|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} I \in G(1, 0)$ luego por el Teorema de Lumer-Phillips tenemos que

$$Im(\lambda I - (-iA_1 - M_q - \|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} I)) = L^2(\mathbb{R}^n), \, \forall \lambda > 0$$

Por lo tanto tenemos

$$Im(\lambda_0 I - (-iA_1 - M_q)) = L^2(\mathbb{R}^n) \text{ con } \lambda_0 = \lambda + \|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \in \rho(-iA_1 - M_q)$$

$\square$

c) Si , $q \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $q \geq 0$ casi siempre en $\mathbb{R}^n$con $p > \dfrac{n}{2}$ y $p \geq 2$

Primero probaremos que $H^2(\mathbb{R}^n) \subset D(M_q)$

En efecto sea $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ definamos $v(x) := u(\dfrac{x}{\rho})$, $\rho > 0$. Se obtiene que $v \in H^2(\mathbb{R}^n)$, donde la función $\left(1 + |x|^2\right) \hat{v}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y de $p > \dfrac{n}{2}$ resulta que la función $\left(1 + |x|^2\right)^{-1}$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$ (demostración en [17]). Luego tomando $s = \dfrac{2p}{p+2}$ por tanto tenemos que $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2}$ y teniendo en cuenta que $\hat{v}(x) = (1 + |x|^2)^{-1}(1 + |x|^2)\hat{v}(x)$ por la desigualdad de Holder Generalizada se tiene que $\hat{v} \in L^s(\mathbb{R}^n)$ y se cumple que:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(x)|^s \, dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{-p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(1 + |x|^2\right) \hat{v}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pero como $\left(1 + |x|^2\right) \hat{v}(x) = \widehat{v(x) - \triangle v(x)}$ por el Teorema de Pancherel tenemos:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(1 + |x|^2\right) \hat{v}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x) - \triangle v(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|v - \triangle v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\triangle v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

luego definiendo $a_{p,n} = C \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{-p} dx\right)^{\frac{1}{p}}$ se tiene $\|\hat{v}\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \leq a_{p,n} \left(\|\triangle v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$.

Sea r tal que $1 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$. Como $1 \leq s \leq 2$, por el Teorema 1.3.3 resulta que $\hat{\hat{v}} \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \left\|\hat{\hat{v}}\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} \|\hat{v}\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}$$

Entonces

$$\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq a^1_{p,n} \left(\|\triangle v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right).$$

donde $a^1_{p,n}$ es una constante que depende de n y p.

Luego obtenemos

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \rho^{-\frac{n}{r}} \|v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \rho^{-\frac{n}{r}} a^1_{p,n} \left(\rho^{\frac{(n-2)}{2}} \|\triangle u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \rho^{\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$

de donde escogiendo ρ convenientemente obtendremos $0 \leq a < 1$ y $b \geq 0$ tal que:

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|q\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq a \|\triangle u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + b \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Además por la desigualdad arriba y como $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}$ obtenemos que $qu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por la desigualdad de Holder Generalizada y por tanto $H^2(\mathbb{R}^n) \subset D(M_q)$ que es el resultado que estábamos buscando demostrar.

Luego se cumple que:

$$\|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|qu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|q\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq a \|\triangle u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + b \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{2.3}$$

Como en este caso estamos considerando $q \geq 0$, resulta que $-M_q$ es disipativo, como $-iA_1 \in G(1,0)$ y usando la desigualdad (2.3) por el Teorema 1.9.5 se tiene que $-iA_1 - M_q \in G(1,0)$. Luego $Im(\lambda_0 I - (-iA_1 - M_q)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ para algún $\lambda_0 > 0$ y por tanto $\lambda_0 \in \rho(-iA_1 - M_q)$.

□

Luego de $H^2(\mathbb{R}^n) \subset D(M_q)$ tenemos que esta densamente definido entonces $-iA_1 - M_q$ es simétrico pues $-iA_1$ y $-M_q$ son simétricos , y como $Im(\lambda_0 I - (-iA_1 - M_q)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ para algún $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 \in \rho(-iA_1 - M_q)$ entonces por el Teorema 1.1.5 tenemos que el operador $-iA_1 - M_q$ es autoadjunto y lo mismo sucede con el operador $iA_1 + M_q$ entonces por el Teorema 1.9.4 el operador $A_1 - iM_q$ genera un grupo unitario de clase C_0 luego para cada $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$ la ecuación de Schrodinger tiene una única solución u con valor inicial u_0 tal que $u \in C([0,\infty], H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty), X)$.

□

CAPITULO III

El Sistema Lineal

3.1. Existencia y Unicidad

En esta sección estamos interesados en probar la existencia y unicidad del siguiente problema

$$
\begin{aligned}
&u_t + u_{xxx} + av_{xxx} + \lambda(x)u = 0\ , \qquad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\
&v_t + v_x + v_{xxx} + au_{xxx} + \lambda(x)v = 0, \qquad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\
&u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \forall t > 0 \\
&v(0,t) = v(L,t) = 0, \qquad \forall t > 0 \\
&u_x(L,t) = v_x(L,t) = 0, \qquad \forall t > 0 \\
&u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), \qquad \forall \ \ x \in \Omega
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

donde $\Omega = \{x \in \mathbb{R}\ |0 < x < L\}$ y

$$
\lambda \in L^{\infty}(\Omega),\ \lambda(x) \geq \lambda_0 > 0 \text{ casi siempre en } \omega \tag{3.2}
$$

siendo ω un subconjunto abierto no vacio de Ω.

3.1.1 Caso $\lambda \equiv 0$

En este caso, (3.1) se reduce al modelo

$$
\begin{aligned}
&u_t + u_{xxx} + av_{xxx} = 0, \qquad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\
&v_t + v_x + v_{xxx} + au_{xxx} = 0, \qquad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\
&u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \forall t > 0 \\
&v(0,t) = v(L,t) = 0\ , \qquad \forall t > 0 \\
&u_x(L,t) = v_x(L,t) = 0, \qquad \forall t > 0
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

$$u(x,0)=u_0(x)\ ,v(x,0)=v_0(x)\ , \qquad \forall \quad x\in\Omega.$$

La existencia y unicidad serán obtenidas utilizando la Teoría de Semigrupos. Observe que multiplicando la primera ecuación por u, la segunda por v y luego integrando de 0 a L podemos, formalmente, verificar que

$$\int_0^L (u_t u+u_{xxx}u+av_{xxx}u)dx+\int_0^L (v_t v+v_x v+v_{xxx}v+au_{xxx}v)dx=0.$$

Integrando por partes y utilizando las condiciones de frontera, se obtiene

$$\int_0^L u_{xxx}u dx{=}u_{xx}u\mid_0^L-\int_0^L u_{xx}u_x dx{=}\int_0^L \left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x dx=-\frac{u_x^2}{2}\mid_0^L{=}\frac{u_x^2}{2}(0,t)$$

$$\int_0^L v_{xxx}v dx{=}\frac{v_x^2}{2}(0,t)$$

$$\int_0^L v_{xxx}u dx{=}v_{xx}u\mid_0^L-\int_0^L v_{xx}u_x dx=-\int_0^L v_{xx}u_x dx$$

$$\int_0^L u_{xxx}v dx{=}-\int_0^L u_{xx}v_x dx.$$

Sumando las identidades arriba, deducimos que

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\left(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t)\right)-a\int_0^L (v_{xx}u_x+u_{xx}v_x)dx=0.$$

Como

$$\int_0^L (v_{xx}u_x+u_{xx}v_x)dx=\int_0^L (v_x u_x)_x dx=-v_x(0,t)u_x(0,t),$$

obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)dx\leq\frac{(a-1)}{2}(v_x^2(0,t)+u_x^2(0,t))\leq 0,$$

pues $0<a<1$. Luego,

$$\frac{1}{2}\int_0^L (u^2(x,t)+v^2(x,t))dx \leq \frac{1}{2}\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx.$$

Por tanto, consideramos el espacio

$$H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

y denotamos por A y B las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Con la notación arriba, introducimos el operador M

$$\begin{cases} Mz = -Bz''' - Az' \\ D(M) = \{z = (z_1, z_2) \in \quad H^3(\Omega) \times H^3(\Omega) : z(0) = z(L) = z_x(L) = 0\}. \end{cases}$$

Así, (3.3) puede ser reescrito como una ecuación en H

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dz}{dt} = Mz \\ z(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = z_0 \end{array} \right.$$

Proposición 3.1.1 En las condiciones anteriores, tenemos que M genera un semigrupo de contracciones de clase C_0 en H.

Demostración.-

Inicialmente, demostraremos que $D(M)$ es denso en H, en seguida que M y M^* son disipativos y finalmente que M es cerrado.

(i) $D(M)$ es denso en H

Como $\overline{\mathfrak{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$, entonces $\overline{\mathfrak{D}(\Omega) \times \mathfrak{D}(\Omega)} = H$ y como $\mathfrak{D}(\Omega) \times \mathfrak{D}(\Omega) \subseteq D(M)$ tenemos que $\overline{D(M)} = H$.

(ii) M y M^* son disipativos

Sea $z \in D(M)$. Entonces,

$$\langle Mz, z\rangle_H = \left\langle \begin{pmatrix} -z_1''' - az_2''' \\ -z_2' - z_2''' - az_1''' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H$$

$$= -\int_0^L z_1(z_1''' + az_2''')dx - \int_0^L z_2(z_2' + z_2''' + az_1''')dx$$

$$= -\int_0^L (z_1 z_1''' + az_1 z_2''' + z_2 z_2''' + az_2 z_1''')dx - \int_0^L \left(\frac{z_2^2}{2}\right)_x dx$$

$$= -\int_0^L (z_1 z_1''' + az_1 z_2''' + z_2 z_2''' + az_2 z_1''')dx.$$

Tenemos las siguientes identidades:

$$\int_0^L z_1 z_1''' dx = z_1 z_1'' \,|_0^L - \int_0^L z_1' z_1'' dx = -\int_0^L \left(\frac{(z_1')^2}{2}\right)_x dx = -\left(\frac{(z_1')^2}{2}\right) |_0^L = \frac{(z_1'(0))^2}{2}$$

$$\int_0^L z_2 z_2''' dx = \frac{(z_2'(0))^2}{2}$$

$$\int_0^L z_1 z_2''' dx = z_1 z_2'' \,|_0^L - \int_0^L z_1' z_2'' dx = -\int_0^L z_1' z_2'' dx$$

$$\int_0^L z_2 z_1''' dx = z_2 z_1'' \,|_0^L - \int_0^L z_2' z_1'' dx = -\int_0^L z_2' z_1'' dx.$$

Sumando las identidades de arriba miembro a miembro, se obtiene:

$$\langle Mz, z\rangle_H = -\frac{(z_1'(0))^2}{2} - \frac{(z_2'(0))^2}{2} - a\int_0^L (z_1' z_2')_x \, dx$$

$$= -\frac{(z_1'(0))^2}{2} - \frac{(z_2'(0))^2}{2} + az_1'(0) z_2'(0)$$

$$\leq -\frac{1}{2}\left((z_1'(0))^2 + (z_2'(0))^2\right) + \frac{a}{2}\left((z_1'(0))^2 + (z_2'(0))^2\right)$$

$$= \frac{(a-1)}{2}\left((z_1'(0))^2 + (z_2'(0))^2\right) \leq 0,$$

pues $0 < a < 1$. Luego M, es disipativo.

Ahora, sea $z \in D(M)$ y $w = (w_1, w_2) \in H$ un elemento a ser determinado. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle Mz, w\rangle_H &= \left\langle \begin{pmatrix} -z_1''' - az_2''' \\ -z_2' - z_2''' - az_1''' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= -\int_0^L (z_1''' + az_2''')w_1 dx - \int_0^L (z_2' + z_2''' + az_1''')w_2 dx.
\end{aligned}$$

Si asumimos que $w_1(0) = w_1(L) = w_1'(0) = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^L z_1''' w_1 dx &= -\int_0^L z_1'' w_1' dx = -\left(z_1' w_1' \mid_0^L - \int_0^L z_1' w_1'' dx \right) \\
&= z_1 w_1'' \mid_0^L - \int_0^L z_1 w_1''' dx = -\int_0^L z_1 w_1''' dx,
\end{aligned}$$

pues $z \in D(M)$. Análogamente,

$$\int_0^L z_2''' w_1 dx = -\int_0^L z_2 w_1''' dx.$$

Ahora, si asumiéramos que $w_2(0) = w_2(L) = w_2'(0) = 0$, deducimos que

$$\int_0^L z_1''' w_2 dx = -\int_0^L z_1 w_2''' dx \text{ y } \int_0^L z_2''' w_2 dx = -\int_0^L z_2 w_2''' dx,$$

$$\int_0^L z_2' w_2 dx = z_2 w_2 \mid_0^L - \int_0^L z_2 w_2' dx = -\int_0^L z_2 w_2' dx.$$

Combinando las identidades arriba, obtenemos

$$\langle Mz, w\rangle_{H\times H} = \int_0^L z_1 w_1''' dx + a\int_0^L z_2 w_1''' dx$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^L z_2 w_2' dx + \int_0^L z_2 w_2''' dx + a\int_0^L z_1 w_2''' dx \\
&= \int_0^L z_1(w_1''' + a w_2''')dx + \int_0^L z_2(a w_1''' + w_2' + w_2''')dx \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1''' + a w_2''' \\ a w_1''' + w_2' + w_2''' \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= \left\langle z, \begin{pmatrix} w_1''' + a w_2''' \\ a w_1''' + w_2' + w_2''' \end{pmatrix} \right\rangle_H .
\end{aligned}
$$

Así, el adjunto de M es definido por

$$
\begin{cases}
M^*(w) = Aw' + Bw''' \\
D(M^*) = \{w = (w_1, w_2) \in H^3(\Omega) \times H^3(\Omega) \quad : w(0) = w(L) = w'(0) = 0\}.
\end{cases}
$$

Demostremos que M^* es disipativo.

Sea $w \in D(M^*)$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\langle M^* w, w\rangle_H &= \left\langle \begin{pmatrix} w_1''' + a w_2''' \\ a w_1''' + w_2' + w_2''' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= \int_0^L w_1(w_1''' + a w_2''')dx + \int_0^L w_2(a w_1''' + w_2' + w_2''')dx.
\end{aligned}
$$

Tenemos las siguientes identidades

$$
\begin{aligned}
\int_0^L w_1 w_1''' dx &= w_1 w_1'' \,|_0^L - \int_0^L w_1' w_1'' dx \\
&= -\int_0^L \left(\frac{(w_1')^2}{2}\right)_x dx = -\frac{(w_1')^2}{2} \,|_0^L = -\frac{(w_1'(L))^2}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^L w_2 w_2''' dx = -\frac{(w_2'(L))^2}{2}
$$

$$
\int_0^L w_1 w_2''' dx = w_1 w_2'' \,|_0^L - \int_0^L w_1' w_2'' dx = -\int_0^L w_1' w_2'' dx
$$

$$\int_0^L w_2 w_1''' dx = w_2 w_1'' \,|_0^L - \int_0^L w_2' w_1'' dx = -\int_0^L w_2' w_1'' dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle M^* w, w\rangle_H &= -\frac{1}{2}\left((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2\right) - a\int_0^L (w_1' w_2'' + w_2' w_1'')dx \\
&= -\frac{1}{2}\left((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2\right) - a\int_0^L \left(w_1' w_2'\right)_x dx \\
&= -\frac{1}{2}\left((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2\right) - a w_1'(L) w_2'(L) \\
&\leq -\frac{1}{2}\left((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2\right) + \frac{a}{2}\left((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2\right) \\
&= \frac{(a-1)}{2}\left((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2\right) \leq 0 \ ,
\end{aligned}$$

pues $0 < a < 1$. Así M^* es disipativo.

(iii) M es cerrado

Como M^* es un operador lineal densamente definido por el Teorema 1.1.4 basta demostrar que $M^{**} = M$. Para eso, calculemos M^{**}.

Sea $w \in D(M^*)$ y z a ser determinado. Si asumiéramos que $z(0) = z(L) = z'(L) = 0$ tendríamos que

$$\begin{aligned}
\langle M^* w, z\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} w_1''' + a w_2''' \\ a w_1''' + w_2' + w_2''' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= \int_0^L (w_1''' z_1 + a w_2''' z_1)dx + \int_0^L (a w_1''' z_2 + w_2' z_2 + w_2''' z_2)dx.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_0^L w_1''' z_1 dx = -\int_0^L w_1 z_1''' dx$$

$$\int_0^L w_2''' z_1 dx = -\int_0^L w_2 z_1''' dx$$

$$\int_0^L w_1''' z_2 dx = -\int_0^L w_1 z_2''' dx$$

$$\int_0^L w_2' z_2 dx = -\int_0^L w_2 z_2' dx$$

$$\int_0^L w_2''' z_2 dx = -\int_0^L w_2 z_2''' dx,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle M^* w, z\rangle_H &= -\int_0^L w_1 z_1''' dx - a\int_0^L w_2 z_1''' dx \\
&\quad -a\int_0^L w_1 z_2''' dx - \int_0^L w_2 z_2' dx - \int_0^L w_2 z_2''' dx \\
&= -\int_0^L w_1 (z_1''' + a z_2''') dx - \int_0^L w_2 (a z_1''' + z_2' + z_2''') dx \\
&= -\left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1''' + a z_2''' \\ a z_1''' + z_2' + z_2''' \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= \left\langle w, \begin{pmatrix} z_1''' + a z_2''' \\ a z_1''' + z_2' + z_2''' \end{pmatrix} \right\rangle_H .
\end{aligned}$$

Así, M^{**} es definido por

$$\begin{cases} M^{**} z = -A z' - B z''' \\ D(M^{**}) = \{ z \in H^3(\Omega) \times H^3(\Omega) : \quad z(0) = z(L) = z'(L) = 0 \}. \end{cases}$$

Por tanto, $M^{**} = M$.

Luego por el Corolario 1.9.1 conclúimos que M genera un semigrupo de contracciones de clase C_0.

$\square$

Corolario 3.1.1 Para cada $z_0 \in H$, el problema (3.3) posee una única solución $z \in C([0,\infty), H)$. Si $z_0 \in D(M)$, entonces $z \in C([0,\infty), D(M)) \cap C^1([0,\infty), H)$.

Demostración.-

El modelo (3.3) puede ser reescrito como

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dz}{dt} = Mz \\ z(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = z_0 \end{array} \right.$$

Luego, por la Proposición 3.1.1 tenemos que M genera un Semigrupo de Contracciones $\widetilde{S}$ de clase C_0 y por el Teorema 1.9.1 tenemos que $z(t) = \widetilde{S}(t)z_0$ es una única solución de (3.3). Además de eso, por el Teorema 1.9.1, tenemos que si $z_0 \in D(M)$ entonces $z \in C([0,\infty), D(M)) \cap C^1([0,\infty), H)$. Si $z_0 \in H$, entonces $z \in C([0,\infty); H)$.

$\square$

3.1.2 Caso $\lambda > 0$

Observemos que el modelo (3.1) puede ser reescrito como

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dz}{dt} = Mz + Pz \\ z(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = z_0 \end{array} \right.$$

donde P es dado por

$$\begin{aligned} P\colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\lambda(x)z. \end{aligned}$$

Así, para demostrar que $M+P$ genera un semigrupo de clase C_0 y consecuentemente, que (3.1) posee solución, basta demostrar que $P \in \mathcal{L}(H)$. En efecto, como

$$\| Pz \|_H^2 = \int_0^L |\lambda(x)z|^2 \, dx \leq \| \lambda \|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_0^L (z_1^2 + z_2^2) dx = \| \lambda \|_{L^\infty(\Omega)}^2 \| (z_1, z_2) \|_H^2,$$

entonces

$$\| Pz \|_H \leq \| \lambda \|_{L^\infty(\Omega)} \| z \|_H .$$

luego

$$\| P \|_{\mathcal{L}(H)} \leq \| \lambda \|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Así, por el Teorema 1.9.6, $M + P$ es el generador infinitesimal de un semigrupo S de operadores lineales acotados de clase C_0.

Teorema 3.1.1 Si $z_0 \in D(M)$, el problema (3.1)-(3.2) posee una única solución $z \in C([0,\infty); D(M)) \cap C^1([0,\infty); H)$. Si $z_0 \in H$, el problema (3.1) posee una única solución débil $z \in C([0,\infty), H)$. Ademas de eso,

$$z \in C([0,T]; H) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^{-2}(0,L) \times H^{-2}(0,L)).$$

Demostración.-

De la misma manera como en el Corolário 3.1.1, el resultado de existencia sigue de la Teoría de Semigrupos. Mostraremos la ganancia de regularidad de la solución cuando $z_0 \in H$.

Como $\overline{D(M)} = H$ existe una sucesión $\{z_{0,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(M)$, tal que $z_{0,n} \longrightarrow z_0$ en H, cuando $n \to \infty$. Para cada n , sean $z_n = (u_n, v_n) \in C([0,T]; D(M)) \cap C^1([0,\infty); H)$ y $z = (u,v) \in C([0,\infty); H)$ la únicas soluciónes de (3.1) con condiciones iniciales $z_{0,n} = (u_{0,n}, v_{0,n})$ y $z_0 = (u_0, v_0)$ respectivamente dadas por el Teorema 1.9.1. Para simplificar las notaciones denotaremos $u_n = u$, $v_n = v$, $u_{0,n} = u_0$ y $v_{0,n} = v_0$.

Sea $q \in C^\infty([0,L] \times [0,T])$. Multiplicando la primera ecuación de (3.1) por qu, la segunda por qv, integrando en $(0,L) \times (0,T)$ y luego sumando las identidades, tenemos

$$\int_0^T \int_0^L qu(u_t + u_{xxx} + av_{xxx} + \lambda(x)u)dx + \int_0^T \int_0^L qv(v_t + v_x + v_{xxx} + au_{xxx} + \lambda(x)v)dx = 0.$$

Observemos que

$$\int_0^T \int_0^L quu_t dxdt = \int_0^T \int_0^L q \left(\frac{u^2}{2}\right)_t dtdx = \int_0^L \left(\frac{q}{2} \left(u^2 \mid_0^T\right) - \int_0^T \frac{q_t u^2}{2} dt \right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{q}{2}\left(u^2(x,T) - u^2(x,0)\right) dx - \int_0^L \int_0^T \frac{q_t u^2}{2} dt dx$$

$$\int_0^T \int_0^L q u u_{xxx} dx dt = \int_0^T \left(q u u_{xx} \mid_0^L - \int_0^L \left(q_x u + q u_x\right) u_{xx} dx \right) dt$$

$$= -\int_0^T \int_0^L q_x u u_{xx} dx dt - \int_0^T \int_0^L q u_x u_{xx} dx dt$$

$$= -\int_0^T \left(q_x u u_x \mid_0^L - \int_0^L \left(q_{xx} u + q_x u_x\right) u_x dx \right) dt - \int_0^T \int_0^L \frac{q}{2}\left(u_x^2\right)_x dx dt$$

$$= \int_0^T \int_0^L (q_{xx} u + q_x u_x) u_x dx dt - \int_0^T \frac{q}{2} u_x^2 \mid_0^L dt + \int_0^T \int_0^L \frac{q_x u_x^2}{2} dx dt$$

$$= \int_0^T \int_0^L \frac{q_{xx}}{2}\left(u^2\right)_x dx dt + \int_0^T \int_0^L q_x u_x^2 dx dt + \int_0^T \frac{q(0,t) u_x^2(0,t)}{2} dt + \int_0^T \int_0^L \frac{q_x u_x^2}{2} dx dt$$

$$= -\int_0^T \int_0^L \frac{q_{xxx} u^2}{2} dx dt + \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L q_x u_x^2 dx dt + \int_0^T \frac{q(0,t) u_x^2(0,t)}{2} dt.$$

$$\int_0^T \int_0^L q u v_{xxx} dx dt = \int_0^T \left(q u v_{xx} \mid_0^L - \int_0^L (q_x u + q u_x) v_{xx} dx \right) dt$$

$$= -\int_0^T \int_0^L q_x u v_{xx} dx - \int_0^T \int_0^L q u_x v_{xx} dx dt$$

$$= -\int_0^T \left(q_x u v_x \mid_0^L - \int_0^L \left(q_{xx} u + q_x u_x\right) v_x dx \right) dt - \int_0^T \int_0^L q u_x v_{xx} dx dt$$

$$= \int_0^T \int_0^L q_{xx} u v_x dx dt + \int_0^T \int_0^L q_x u_x v_x dx dt - \int_0^T \int_0^L q u_x v_{xx} dx dt.$$

$$\int_0^T \int_0^L q u \lambda(x) u dx dt = \int_0^T \int_0^L q \lambda(x) u^2 dx dt.$$

Análogamente,

$$\int_0^T\int_0^L qvv_t dxdt = \int_0^L \frac{q}{2}(v^2(x,T)-v^2(x,0))dx - \int_0^L\int_0^T \frac{q_t v^2}{2}dtdx.$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L qvv_x dxdt &= \int_0^T\int_0^L \frac{q}{2}\left(v^2\right)_x dxdt = \int_0^T \left(\frac{qv^2}{2}\ |_0^L - \int_0^L \frac{q_x v^2}{2}dx\right)dt \\ &= -\int_0^T\int_0^L \frac{q_x v^2}{2}dxdt.\end{aligned}$$

$$\int_0^T\int_0^L qvv_{xxx} dxdt = -\int_0^T\int_0^L \frac{q_{xxx}v^2}{2}dxdt + \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L q_x v_x^2 dxdt + \int_0^T \frac{q(0,t)v_x^2(0,t)}{2}dt.$$

$$\int_0^T\int_0^L qvu_{xxx} dxdt = \int_0^T\int_0^L q_{xx}vu_x dxdt + \int_0^T\int_0^L q_x v_x u_x dxdt - \int_0^T\int_0^L qv_x u_{xx} dxdt.$$

$$\int_0^T\int_0^L qv\lambda(x)vdxdt = \int_0^T\int_0^L q\lambda(x)v^2 dxdt.$$

Escogiendo $q = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_0^L \frac{(u^2(x,T)+v^2(x,T))}{2}dx - \int_0^L \frac{(u_0^2(x)+v_0^2(x))}{2}dx + \int_0^T \frac{(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))}{2}dt \\ &-a\int_0^T\int_0^L (u_x v_x)_x dxdt + \int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dxdt = 0,\end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L \left(u^2(x,T)+v^2(x,T)\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_0^2(x)+v_0^2(x)\right)dx - \frac{1}{2}\int_0^T \left(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t)\right)dt \\ &+a\int_0^T u_x(0,t)v_x(0,t)dt - \int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_0^2(x)+v_0^2(x)\right)dx + \frac{(a-1)}{2}\int_0^T \left(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t)\right)dt\end{aligned}$$

.

Como $0 < a < 1$,

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left(u^2(x,T)+v^2(x,T)\right)dx \leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_0^2(x)+v_0^2(x)\right)dx$$

Retornando a nuestra notación inicial, tenemos:

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left(u_n^2(x,T)+v_n^2(x,T)\right)dx \leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_{0,n}^2(x)+v_{0,n}^2(x)\right)dx, \qquad \forall\ T>0.$$

Como $z_n(t)=S(t)z_{0,n} \longrightarrow z(t)=S(t)z_0$ y $z_{0,n} \longrightarrow z_0$ en H, cuando $n\to\infty$, por [23] obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left(u^2(x,t)+v^2(x,t)\right)dx \leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_0^2(x)+v_0^2(x)\right)dx. \tag{3.4}$$

Entonces,

$$\| (u,v) \|_{C([0,T];H)} \leq \| (u_0,v_0) \|_H. \tag{3.5}$$

Ahora, escogiendo $q(x,t)=x$ resulta que

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L \left(u_x^2+v_x^2\right)dxdt = &-\frac{1}{2}\int_0^L x\left(u^2(x,T)+v^2(x,T)\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^L x\left(u^2(x,0)+v^2(x,0)\right)dx\\ &-2a\int_0^T\int_0^L u_xv_xdxdt + a\int_0^T\int_0^L x\left(u_xv_{xx}+v_xu_{xx}\right)dxdt\\ &+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L v^2dxdt - \int_0^T\int_0^L x\lambda(x)\left(u^2+v^2\right)dxdt,\end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L \left(u_x^2+v_x^2\right)dxdt = &-\frac{1}{3}\int_0^L x\left(u^2(x,T)+v^2(x,T)\right)dx+\frac{1}{3}\int_0^L x\left(u^2(x,0)+v^2(x,0)\right)dx\\ &-\frac{4}{3}a\int_0^T\int_0^L u_xv_xdxdt+\frac{2}{3}a\int_0^T\int_0^L x\left(u_xv_x\right)_x dxdt\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L v^2dxdt-\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L x\lambda(x)\left(u^2+v^2\right)dxdt$$

$$\leq\frac{1}{3}\int_0^L x\left(u_0^2(x)+v_0^2(x)\right)dx+a\int_0^T\int_0^L\left(u_x^2+v_x^2\right)dxdt+\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L v^2dxdt.$$

Por tanto,

$$(1-a)\int_0^T\int_0^L\left(u_x^2+v_x^2\right)dxdt\leq\frac{1}{3}\int_0^L x\left(u_0^2(x)+v_0^2(x)\right)dx+\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L v^2dxdt,$$

de donde obtenemos que

$$\int_0^T\int_0^L\left(u_x^2+v_x^2\right)dxdt\leq\frac{1}{3(1-a)}\int_0^L x\left(u_0^2(x)+v_0^2(x)\right)dx+\frac{1}{3(1-a)}\int_0^T\int_0^L\left(u^2+v^2\right)dxdt.$$

Retornando a la notación original y usando la desigualdad (3.4), obtenemos

$$\begin{aligned}\|\,(u_n,v_n)\,\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))}\leq&\ \frac{L}{3(1-a)}\int_0^L\left(u_{0,n}^2(x)+v_{0,n}^2(x)\right)dx\\&+\frac{T}{3(1-a)}\int_0^L\left(u_{0,n}^2(x)+v_{0,n}^2(x)\right)dx\\\leq&\ \frac{(L+T)}{3(1-a)}\left\|(u_{0,n},v_{0,n})\right\|_H^2.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Luego,

$$\|\,(u,v)\,\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))}\leq C(T)\left\|(u_0,v_0)\right\|_H^2.\tag{3.7}$$

donde $C(T)=\dfrac{(L+T)}{3(1-a)}$

En efecto, la desigualdad (3.6) nos dice que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Por tanto, existe una función $w\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))$, tal que $z_n\longrightarrow w$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))$ cuando $n\to\infty$. Además de eso, sigue de (3.5) que $w\in C([0,T],H)$ y que

z es una solución débil de (3.1). Luego, por [34] y por la unicidad de la solución $w = z = (u, v) = S(.)(u_0, v_0)$.

Afirmo que $z = (u, v) \in H^1(0, T; H^{-2}(0, L) \times H^{-2}(0, L))$. En efecto, como

$$\begin{aligned} u_{n,t} &= -u_{n,xxx} - a v_{n,xxx} - \lambda(x) u_n, \\ v_{n,t} &= -v_{n,x} - v_{n,xxx} - a u_{n,xxx} - \lambda(x) v_n, \end{aligned} \tag{3.8}$$

Y tenemos que:

$$\|u_{n,x}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq c \|u_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = c \|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

también

$$\begin{aligned} |\langle u_{n,xxx}(t), \varphi \rangle|_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} &= |\langle u_{n,x}(t), \varphi_{xx} \rangle|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u_{n,x}(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_{xx}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^2(\Omega)} \end{aligned}$$

luego se obtiene

$$\begin{aligned} \|u_{n,xxx}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} &= \left(\int_0^T \|u_{n,xxx}(t)\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left(\int_0^T \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c \|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \end{aligned}$$

haciendo cálculos análogos a los hechos arriba para los v_n obtenemos:

$$\|v_{n,xxx}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq c \|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

y como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ están acotados en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ resulta por (3.8) que, $\{u_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}}$ están acotados en $L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$ entonces sigue de las consideraciones arriba que:

$$u_{n,t} \rightharpoonup u_t \text{ en } L^2(0, T; H^{-2}(\Omega)) \quad \text{y} \quad v_{n,t} \rightharpoonup v_t \text{ en } L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$$

□

3.2 Decaimiento Exponencial

Lema 3.2.1 Sea $U=(u,v)$ la solución del problema (3.1) obtenido en el teorema 3.1.1. Sea $0 < T < \infty$ entonces existe una constante positiva $C = C(T)$ tal que :

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \left\{ \int_0^T \left(u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t)\right) dt + \int_0^T\int_0^L \lambda(x) \left(u^2(x,t) + v^2(x,t)\right) dxdt \right.$$
$$\left. + \|u_0\|^2_{H^{-3}(\Omega)} + \|v_0\|^2_{H^{-3}(\Omega)} \right\} \tag{3.9}$$

Demostración.-

Antes de probar el resultado, demostraremos que para la clase de soluciones consideradas los términos $\int_0^T u_x^2(0,t)dt$ y $\int_0^T v_x^2(0,t)dt$ están bien definidos.

Procediendo análogamente como en el Teorema 3.1.1, obtenemos una sucesión de soluciones $\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,\infty); D(M))$, tal que $U^n(x,0) = (u_{0,n}(x), v_{0,n}(x)) = U_0^n(x) \in D(M)$ y $U_0^n \longrightarrow U_0 = (u_0, v_0)$ en H , cuando $n \to \infty$. Además de eso,

$$\frac{d}{dt}E\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}(t)+\frac{1}{2}\left[u_{n,x}(0,t)^2 + v_{n,x}(0,t)^2\right]$$

$$+au_{n,x}(0,t)v_{n,x}(0,t) + \int_0^L \lambda(x)\left(u_n^2 + v_n^2\right) dx = 0$$

donde

$$E\begin{pmatrix} u_n \\ \\ v_n \end{pmatrix}(t) = \frac{1}{2}\Big[\| u_n(.,t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v_n(.,t) \|^2_{L^2(\Omega)}\Big].$$

Integrando la identidad arriba de 0 a T y usando que $0 < a < 1$, se obtiene:

$$E\begin{pmatrix} u_n \\ \\ v_n \end{pmatrix}(T) + \frac{(1-a)}{2}\int_0^T \left[u_{n,x}(0,t)^2 + v_{n,x}(0,t)^2\right] dt$$

$$+\int_0^T\int_0^L \lambda(x)\left(u_n^2 + v_n^2\right) dxdt \leq E\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}(0). \tag{3.10}$$

Claramente,

$$E\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}(T) - E\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}(0) \longrightarrow E\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(T) - E\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0), \text{ cuando } n \to \infty,$$

pues $S(t)u_{0,n} \longrightarrow S(t)u_0$, donde $S(t)$ es el semigrupo generado por M.

Afirmamos que podemos extraer una subsucesión de $\{(u_{n,x}(0,t), v_{n,x}(0,t))\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u_{n,x}(0,t) \rightharpoonup u_x(0,t) \text{ en } H^{-1}(0,T) \tag{3.11}$$

$$v_{n,x}(0,t) \rightharpoonup v_x(0,t) \text{ en } H^{-1}(0,T), \tag{3.12}$$

donde $\rightharpoonup$ denota convergencia débil. En efecto, por (3.6), tenemos que:

$$\left\| \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))} \leq \frac{L+T}{3(1-a)} \left\| \begin{pmatrix} u_{0,n} \\ v_{0,n} \end{pmatrix} \right\|^2_H . \tag{3.13}$$

Ahora, reescribimos el sistema (3.1) como

$$DU^n_{xxx} = -U^n_t - QU^n_x - \lambda(x)U^n, \tag{3.14}$$

donde

$$U^n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, como consecuencia de (3.11), tenemos que

$$\{U^n_x\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } L^2(0,T;H) \tag{3.15}$$

$$\{U^n_t\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } H^{-1}(0,T;H). \tag{3.16}$$

Luego, de (3.13), (3.14), (3.15) y (3.16) deducimos que $\{DU^n_{xxx}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H^{-1}(0,T;H)$, entonces $\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H^{-1}(0,T;H^3(\Omega)\times H^3(\Omega))$ también deducimos que $U=(u,v) \in H^{-1}(0,T;H^3(\Omega)\times H^3(\Omega))$, así para cada $t\in(0,T)$ tenemos que $u_x(.,t)$, $v_x(.,t) \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C([0,L])$ entonces podemos definir $u_x(0,t)$ y $v_x(0,t)$ luego retornando a (3.10) deducimos que

$$\{u_{n,x}(0,t)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } \{v_{n,x}(0,t)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ son acotadas en } L^2(0,T)$$

En particular,

$$\{u_{n,x}(0,t)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } \{v_{n,x}(0,t)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ son acotadas en } H^{-1}(0,T)$$

Así, podemos obtener una subsucesión $\{(u_{n,x}(0,t), v_{n,x}(0,t))\}_{n\in\mathbb{N}}$, aún denotada por el mismo indice n, tal que

$$\begin{aligned} u_{n,x}(0,t) &\rightharpoonup u_x(0,t) \text{ en } H^{-1}(0,T) \\ v_{n,x}(0,t) &\rightharpoonup v_x(0,t) \text{ en } H^{-1}(0,T), \end{aligned}$$

La desigualdad (3.10) arriba garantiza que, nuevamente, podemos extraer una subsucesión que será convergente, en el sentido débil, en $L^2(0,T)$ y juntamente con la discusión anterior se muestra que

$$u_{n,x}(0,.) \rightharpoonup u_x(0,t) \text{ en } L^2(0,T), \text{ cuando } n \to \infty \tag{3.17}$$

y

$$v_{n,x}(0,.) \rightharpoonup v_x(0,t) \text{ en } L^2(0,T), \text{ cuando } n \to \infty. \tag{3.18}$$

Esto prueba que $u_x(0,t)$ y $v_x(0,t)$ existen y pertencen a $L^2(0,T)$. Además de eso, de (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[|u_x(0,t)|^2 + |v_x(0,t)|^2 \right] dt \leq lim_{n\to\infty} inf \int_0^T \left[\left| \frac{\partial u_n(0,t)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_n(0,t)}{\partial x} \right|^2 \right] \\ \leq \frac{2}{(1-a)} E \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ahora probaremos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx \leq C_1(T) \Bigg[\int_0^L \int_0^T (u^2+v^2) dt dx + \int_0^T (u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t)) dt \\ + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2) dx dt \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nuevamente, haremos los cálculos para soluciones regulares y concluiremos el resultado por un argumento de densidad. Multiplicamos la primera ecuación de (3.1) por $(T-t)u$, la segunda por $(T-t)v$ e integramos sobre $(0,L)\times(0,T)$. Sumando las dos identidades, obtenemos

$$\int_0^T\int_0^L (T-t)\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)dxdt+\int_0^T\int_0^L (T-t)\left(\frac{v^2}{2}\right)_x dxdt+\int_0^T\int_0^L (T-t)uu_{xxx}dxdt$$
$$+\int_0^T\int_0^L (T-t)vv_{xxx}dxdt+a\int_0^T\int_0^L (T-t)uv_{xxx}dxdt+\int_0^T\int_0^L (T-t)vu_{xxx}dxdt$$
$$+\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(T-t)(u^2+v^2)dxdt=0.$$

Como

$$\int_0^T\int_0^L (T-t)\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)dxdt=\frac{T}{2}\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx+\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T (u^2+v^2)dtdx$$

$$\int_0^T\int_0^L (T-t)\left(\frac{v^2}{2}\right)_x dxdt=\int_0^T (T-t)\frac{v^2}{2}\bigg|_0^L dt=0,$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L (T-t)uu_{xxx}dxdt&=\int_0^T (T-t)[uu_{xx}\mid_0^L-\int_0^L u_xu_{xx}dx]dt\\&=-\int_0^T (T-t)\left[\int_0^L \left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x dx\right]dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^T (T-t)u_x^2(0,t)dt,\end{aligned}$$

$$\int_0^T\int_0^L (T-t)vv_{xxx}dxdt=\int_0^T (T-t)\left[vv_{xx}\mid_0^L-\int_0^L v_xv_{xx}dx\right]dt$$

$$= -\int_0^T (T-t)\left[\int_0^L \left(\frac{v_x^2}{2}\right)_x dx\right] dt = \frac{1}{2}\int_0^T (T-t) v_x^2(0,t)dt,$$

$$\int_0^T\int_0^L (T-t) u v_{xxx} dxdt = \int_0^T (T-t)\left[u v_{xx} \mid_0^L - \int_0^L u_x v_{xx} dx\right] dt$$

$$= -\int_0^T\int_0^L (T-t) u_x v_{xx} dxdt,$$

$$\int_0^T\int_0^L (T-t) v u_{xxx} dxdt = \int_0^T (T-t)\left[v u_{xx} \mid_0^L - \int_0^L v_x u_{xx} dx\right] dt$$

$$= -\int_0^T\int_0^L (T-t) v_x u_{xx} dxdt,$$

sigue que

$$\frac{T}{2}\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T (u^2+v^2)dtdx + \frac{1}{2}\int_0^T (T-t)(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt$$

$$-a\int_0^T (T-t)\int_0^L (u_x v_x)_x dxdt$$

$$+\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(T-t)(u^2+v^2)dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T (u^2+v^2)dtdx + \frac{1}{2}\int_0^T (T-t)(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt$$

$$+a\int_0^T (T-t)\left[u_x(0,t)v_x(0,t)\right]dt$$

$$+\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(T-t)(u^2+v^2)dxdt.$$

Consecuentemente,

$$\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx \leq \frac{1}{T}\int_0^L\int_0^T (u^2+v^2)dtdx + \frac{(1+a)}{T}\int_0^T (T-t)(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt$$

$$+\frac{2}{T}\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(T-t)(u^2+v^2)dxdt$$

$$\leq C_1(T)\left[\int_0^L\int_0^T (u^2+v^2)dtdx + \int_0^T (u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt\right.$$

$$\left.+\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dxdt\right],$$

donde $C_1(T) = max\left\{\frac{1}{T}, 2\right\}$.

Retornando a la notación original, tenemos

$$\int_0^L (u_{0,n}^2(x)+v_{0,n}^2(x))dx \leq C_1(T)\left[\int_0^L\int_0^T (u_n^2+v_n^2)dtdx + \int_0^T (u_{n,x}^2(0,t)+v_{n,x}^2(0,t))dt\right.$$

$$\left.+\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u_n^2+v_n^2)dxdt\right].$$

Luego, procediendo como en la demostración del Teorema 3.1.1, sigue que

$$\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx \leq C_1(T)\left[\int_0^L\int_0^T (u^2+v^2)dtdx + \int_0^T (u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt\right.$$

$$\left.+\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dxdt\right]. \tag{3.21}$$

$$\int_0^L\int_0^T u^2dxdt \leq \int_0^T \left(\int_0^L 1^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L u^4dx\right)^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{L}\int_0^T \|u\|_{L^4(\Omega)}^2 dt$$

$$\leq \sqrt{L}\left(\int_0^T 1^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u\|_{L^4(\Omega)}^4 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{LT}\,\|u\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}^2$$

$$\int_0^L\int_0^T v^2dxdt \leq \int_0^T \left(\int_0^L 1^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L v^4dx\right)^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{L}\int_0^T \|v\|_{L^4(\Omega)}^2 dt$$

$$\leq \sqrt{L}\left(\int_0^T 1^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|v\|_{L^4(\Omega)}^4 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{LT}\,\|v\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}^2$$

entonces ahora tenemos :

$$\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx \leq \tilde{C}_1(T)\left[\|u\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}+\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}+\int_0^T (u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt \right.$$

$$\left. +\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dxdt\right]. \tag{3.22}$$

Con el objetivo de probar (3.9) es suficiente probar que para cualquier $T>0$ existe una constante $C=C(T)$ tal que

$$\|u\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}+\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} \leq C\left\{\int_0^T (u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt+\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dxdt \right.$$

$$\left. +\|u_0\|^2_{H^{-3}(\Omega)}+\|v_0\|^2_{H^{-3}(\Omega)}\right\}. \tag{3.23}$$

Demostraremos esto por contradicción. Supongamos que (3.23) no se cumple entonces, existe una sucesión de soluciones $\{(u_n,v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ del sistema (3.1)-(3.2), donde $(u_n,v_n)\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\times L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))$, tal que:

$$\|u_n\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}+\|v_n\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} > n\left\{\int_0^T ({u_{n,x}}^2(0,t)+v_{n,x}^2(0,t))dt+\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u_n^2+v_n^2)dxdt \right.$$

$$\left. +\|u_{0,n}\|^2_{H^{-3}(\Omega)}+\|v_{0,n}\|^2_{H^{-3}(\Omega)}\right\}. \tag{3.24}$$

Definamos

$$\sigma_n := \left(\|u_n\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}+\|v_n\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

y consideremos

$$\begin{pmatrix} \phi_n(x,t) \\ \psi_n(x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_n}\begin{pmatrix} u_n(x,t) \\ v_n(x,t) \end{pmatrix} ;\forall n\in\mathbb{N} \tag{3.25}$$

(ϕ_n,ψ_n) es solución del sistema (3.1)-(3.2) con condición inicial $\phi_n(x,0)=\dfrac{1}{\sigma_n}u_n(x,0)$ y $\psi_n(x,0)=\dfrac{1}{\sigma_n}v_n(x,0)$ luego tenemos que

$$\|\phi_n\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}+\|\psi_n\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}=1 \tag{3.26}$$

por (3.24) tenemos que:

$$lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T ({\phi_{n,x}}^2(0,t)+\psi_{n,x}^2(0,t))dt+ \right.$$
$$\left. +\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(\phi_n^2+\psi_n^2)dxdt+\|\phi_{0,n}\|^2_{H^{-3}(\Omega)}+\|\psi_{0,n}\|^2_{H^{-3}(\Omega)}\right]=0 \tag{3.27}$$

por (3.27), (3.26), (3,23) y (3.22) las sucesiones

$$\{\phi_n(x,0)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{y } \{\psi_n(x,0)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ son acotadas en } L^2(\Omega), \tag{3.28}$$

luego por (3.13)

$$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ son acotadas en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.29}$$

por (3.4)

$$\{\lambda\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } \{\lambda\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ son acotadas en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.30}$$

por (3.28) y (3.29) tenemos que

$$\text{las sucesiones } \{\phi_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } \{\psi_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ son acotadas en } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)) \tag{3.31}$$

y $w_{n,t}$ satisface

$$w_{n,t}=-Qw_{n,x}-Dw_{n,xxx}-F(x)w_n \text{ en } \mathfrak{D}'(0,T;H^{-2}(\Omega)\times H^{-2}(\Omega))$$

donde

$$w_n=\begin{pmatrix}\phi_n\\ \psi_n\end{pmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}1 & a\\ a & 1\end{bmatrix} \quad , \quad Q=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F(x)=\lambda(x)I.$$

Ahora demostraremos que:

Existe $s>0$ tal que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son acotados en $L^4(0,T;H^s(\Omega))$ y se cumple que la inmersión $H^s(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$ es compacta.

En efecto, como $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son acotadas en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ por interpolación podemos deducir que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en

$$[L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), L^q(0,T;L^2(\Omega))]_\theta = L^4(0,T;[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta)$$

donde $\frac{1}{4} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{q}$ y $0 < \theta < 1$. Por $Lions - Magenes$ [12] sabemos que

$$[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega) \text{ si } s = 1-\theta \neq \frac{1}{2}$$

y por el Teorema de Rellich-Kondrachov obtenemos que

$$H^s(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} L^4(\Omega) \text{ si } \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{s}{1}, \text{ con } 2s < 1$$

esto es $\frac{1}{2} > s > \frac{1}{4}$ y consecuentemente $\frac{1}{2} < \theta < \frac{3}{4}$. Eligiendo $q = 8$ y $\theta = \frac{2}{3}$, la afirmación sigue con $s = \frac{1}{3}$:

$[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{2}{3}} = H_0^{\frac{1}{3}}(\Omega) = H^{\frac{1}{3}}(\Omega)$(pues si $s \leq \frac{1}{2}$ entonces $H_0^s(\Omega) = H^s(\Omega)$)

y la inmersión $H^{\frac{1}{3}}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ es compacta. Luego usando (3.31) tenemos que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pertenecen y estan acotadas en

$$\wp = \left\{ w \in L^4\left(0,T;H^{\frac{1}{3}}(0,L)\right); \frac{dw}{dt} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)) \right\}.$$

Entonces por el Lema de Aubin-Lions, podemos extraer una subsucesión de $\{(\phi_n,\psi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que seguiremos denotando por el mismo indice n, tal que

$$(\phi_n,\psi_n) \longrightarrow (\phi,\psi) \text{ fuertemente en } L^4(0,T;[L^4(\Omega)]^2) \text{ cuando } n\to\infty, \tag{3.32}$$

$$(\phi_n,\psi_n) \rightharpoonup (\phi,\psi) \text{ en } L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^2) \text{ cuando } n\to\infty, \tag{3.33}$$

$$(\phi_n,\psi_n) \rightharpoonup (\phi,\psi) \text{ en } L^2(0,T;[H^{-2}(\Omega)]^2) \text{ cuando } n\to\infty, \tag{3.34}$$

entonces por (3.26) tenemos que:

$$\|\phi\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} + \|\psi\|^2_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} = 1 \tag{3.35}$$

y usando

$$0 = lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T (\phi_{n,x}^2(0,t) + \psi_{n,x}^2(0,t))dt + \int_0^T\int_0^L \lambda(x)(\phi_n^2+\psi_n^2)dxdt \right.$$
$$\left. + \|\phi_{0,n}\|^2_{H^{-3}(\Omega)} + \|\psi_{0,n}\|^2_{H^{-3}(\Omega)}\right]$$
$$\geq \int_0^T (\phi_x^2(0,t) + \psi_x^2(0,t))dt + \int_0^T\int_0^L \lambda(x)(\phi^2+\psi^2)dxdt + \|\phi_0\|^2_{H^{-3}(\Omega)} + \|\psi_0\|^2_{H^{-3}(\Omega)}.$$

Tenemos que $\lambda(x)\phi^2 \equiv 0$, $\lambda(x)\psi^2 \equiv 0$ en $(0,T)\times(0,L)$, $\phi_x(0,t)=0$, $\psi_x(0,t)=0$ en $(0,T)$ y $\phi(x,0)=0$, $\psi(x,0)=0$

y el límite ϕ y ψ resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{cases} \phi_t+\phi_{xxx}+a\psi_{xxx}+\lambda(x)\phi=0 \\ \psi_t+\psi_x+\psi_{xxx}+a\phi_{xxx}+\lambda(x)\psi=0 \end{cases}$$

con condiciones de frontera

$$\phi\,(0,t)=\phi\,(L,t)=0$$

$$\psi\,(0,t)=\psi\,(L,t)=0$$

$$\phi_x\,(L,t)=\psi_x\,(L,t)=0$$

y condiciones iniciales

$$\phi(x,0)=0, \psi(x,0)=0$$

en $(0,L)\times(0,T)$, entonces $\phi\equiv\psi\equiv 0$ (pues $(\phi,\psi)=S(t)(\phi_0,\psi_0)$) esto contradice (3.35) y entonces (3.23) tiene que ser válido.

□

Teorema 3.2.1 Sea U=(u,v) la solución del problema (3.1)-(3.2) obtenido en el teorema 3.1.1. Sea $0<T<\infty$, si

$$u_x(0,t)=v_x(0,t)=0 \text{ y } u\equiv v\equiv 0 \text{ en } \omega\times(0,T)$$

entonces $u,v\in L^2(0,T;H^3(0,L))\cap H^1(0,T;L^2(0,L))$ y además $u\equiv v\equiv 0$.

Demostración.-

Sea $U_0=(u_0,v_0)\in H$, $w=u_t$ y $z=v_t$ entonces:

$w_0(x)=w(x,0)=u_t(x,0)=-u_{xxx}(x,0)-av_{xxx}(x,0)-\lambda(x)u(x,0)\in H^{-3}(\Omega)$,

$z_0(x)=z(x,0)=v_t(x,0)=-v_x(x,0)-v_{xxx}(x,0)-au_{xxx}(x,0)-\lambda(x)v(x,0)\in H^{-3}(\Omega)$

Por otro lado, si $u_x(0,t)$, $v_x(0,t)$, $\lambda(x)u$ y $\lambda(x)v$ se anulan entonces $w_x(0,t)=0$, $z_x(0,t)=0$, $\lambda(x)w=0$ y $\lambda(x)z=0$ y como (w,z) satisface el problema $(3.1)-(3.2)$ por el Lema 3.2.1 tenemos que $(w_0, z_0) \in H$ entonces $(w, z) \in C([0,T]; H) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ y como

$$u_{xxx} + av_{xxx} = -u_t - \lambda(x)u \in L^2(0,T; L^2(\Omega)),$$
$$v_{xxx} + av_{xxx} = -v_t - v_x - \lambda(x)u \in L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

Entonces $(u, v) \in L^2(0,T; H^3(\Omega) \times H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T; H)$ y por la Propiedad de Continuación Única (Teorema 1.10.1.) obtenemos que $(u, v) \equiv 0$.

$\square$

Teorema 3.2.2 Sean $\lambda = \lambda(x)$ que satisface (3.2) y $z = (u, v)$ la solución del problema (3.1) obtenida en el Teorema 3.1.1. Entonces, existen constantes $C > 0$ y $\mu > 0$, tales que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\mu t} \ , \forall t \geq 0.$$

Demostración.-

Para obtener el decaimiento exponencial, debemos mostrar que, para $T > 0$ fijo, existe una constante positiva C_3, tal que la desigualdad

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \left[\int_0^T (u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t))dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2)dxdt \right] \tag{3.36}$$

se cumple.

Por (3.20) para obtener (3.36) es suficiente demostrar la desigualdad

$$\int_0^L \int_0^T (u^2 + v^2)dtdx \leq C \left[\int_0^T (u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t))dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2)dxdt \right]$$

$$(3.37)$$

para algún $C > 0$ constante independiente de u y v. Haremos esto por contradicción.

Supongamos que (3.37) no se cumpla. Entonces, existe una sucesión de soluciones $\{(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de (3.1)-(3.2), tal que $z_n = (u_n, v_n) \in C([0,T]; H) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$, tal que

$$\| (u_n, v_n) \|_{L^2(0,T;H)}^2 > n \left[\int_0^T (u_{n,x}^2(0,t) + v_{n,x}^2(0,t))dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u_n^2 + v_n^2)dxdt \right].$$

Entonces

$$lim_{n\to\infty} \frac{\| u_n \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \| v_n \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2}{\int_0^T (u_{n,x}^2(0,t) + v_{n,x}^2(0,t))dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u_n^2 + v_n^2)dxdt} = \infty. \tag{3.38}$$

Tomemos $\sigma_n^2 = \| u_n \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \| v_n \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2$ y $w_n = \frac{1}{\sigma_n}(u_n, v_n)$. Entonces, w_n resuelve el problema (3.1)-(3.2) con condición inicial $\frac{1}{\sigma_n} z_n(x, 0)$. Además de eso,

$$\| w_n \|_{L^2(0,T;H)} = 1. \tag{3.39}$$

De (3.38), también tenemos que

$$lim_{n\to\infty} \int_0^T |w_{n,x}(0,t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) |w_n(x,t)|^2 dxdt = 0.$$

Por otro lado, de (3.20) se obtiene:

$$\int_0^L |w_n(x,0)|^2 dx \le C_1(T) \left[1 + \int_0^T |w_{n,x}(0,t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) |w_n(x,t)|^2 dxdt \right],$$

Luego existe una constante $C(T) = C > 0$, tal que

$$\| w_n(.,0) \|_H \leq C. \tag{3.40}$$

Por (3.4) la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface

$$\| w_n(.,t) \|_H^2 \leq \| w_n(.,0) \|_H^2,$$
$$\| w_n(.,t) \|_H \leq C. \tag{3.41}$$

Además, de (3.7) deducimos que

$$\int_0^T \| w_n(.,t) \|_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}^2 \, dt \leq C(T) \| w_n(.,0) \|_H^2 \leq C(T)C, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

o sea,

$$\| w_n \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))}^2 \leq C(T)C \; . \tag{3.42}$$

Por otro lado, para cada n, w_n satisface la identidad

$$w_{n,t} = -Qw_{n,x} - Dw_{n,xxx} - F(x)w_n \text{ en } \mathfrak{D}'(0,T;H^{-2}(\Omega)\times H^{-2}(\Omega))$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F(x) = \lambda(x)I.$$

Luego las, estimativas (3.39) y (3.42) nos dicen que:

$$\{w_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)). \tag{3.43}$$

También tenemos que (3.39), (3.42) y (3.43) junto con el Lema de Aubin-Lions, nos garantizan que existe una subsucesión de $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que denotaremos por $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$w_n \longrightarrow w \text{ en } L^2(0,T;H), \text{ cuando } n \to \infty \tag{3.44}$$

$$w_n \rightharpoonup w \text{ en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)), \text{ cuando } n \to \infty \tag{3.45}$$

$$w_{n,t} \rightharpoonup w_t \text{ en } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)), \text{ cuando } n \to \infty. \tag{3.46}$$

Luego, como

$$\| w_n \|_{L^2(0,T;H)} = 1,$$

y

$$\left| \|w_n\|_{L^2(0,T;H)} - \|w\|_{L^2(0,T;H)} \right| \leq \| w_n - w \|_{L^2(0,T;H)} \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

entonces

$$\| w \|_{L^2(0,T;H)} = 1. \tag{3.47}$$

Las convergencias (3.44), (3.45) y (3.46) también nos garantizan que

$$\begin{aligned} 0 = lim_{n\longrightarrow\infty} inf & \left[\int_0^T |w_{n,x}(0,t)|^2 \, dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) \, |w_n(x,t)|^2 \, dxdt \right] \\ & \geq \int_0^T |w_x(0,t)|^2 \, dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) \, |w(x,t)|^2 \, dxdt, \end{aligned}$$

o sea,

$$\int_0^T |w_x(0,t)|^2 \, dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) \, |w(x,t)|^2 \, dxdt = 0.$$

Entonces, $\lambda(x) \, [w(x,t)]^2 \equiv 0$ en $(0,T) \times (0,L)$ y $w_x(0,t) = 0$ en $(0,T)$. En particular, $w \equiv 0$ en $\omega \times (0,T)$ y w es solución (débil) de

$$w_t + Qw_x + Dw_{xxx} + \lambda(x)w = 0 \ .$$

observamos que nos encontramos en las condiciones del Teorema 3.2.1 entonces deducimos que $w \equiv 0$ en todo o conjunto $(0,L) \times (0,T)$, lo que contradice (3.47). Consecuentemente, (3.37) es válido, lo que implica que (3.36) se verifica.

Ahora podemos concluir la demostración del Teorema 3.2.2. Pues tenemos que multiplicando la desigualdad (3.10) por $1 + \dfrac{C_3}{1-a}$, con C_3 dada en (3.36) se obtiene

$$\left(1 + \frac{C_3}{1-a} \right) \left[\| u(.,T) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v(.,T) \|^2_{L^2(\Omega)} \right] \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{C_3}{1-a}\right)\left\{\| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v_0 \|^2_{L^2(\Omega)} -2\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dxdt \right.$$
$$\left. +(a-1)\int_0^T \left(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t)\right)dt\right\}.$$

Usando (3.36), el lado derecho de la desigualdad arriba puede ser estimado como

$$\left(1+\frac{C_3}{1-a}\right)\left[\| u(.,T) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v(.,T) \|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq$$
$$\leq C_3\left[\int_0^T (u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt + \int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dxdt\right]$$
$$+\frac{C_3}{1-a}\left[\| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v_0 \|^2_{L^2(\Omega)}\right] -2\left(1+\frac{C_3}{1-a}\right)\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dxdt$$
$$+(a-1-C_3)\int_0^T \left(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t)\right)dt$$
$$=\frac{C_3}{1-a}\left[\| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v_0 \|^2_{L^2(\Omega)}\right]$$
$$+\left(C_3-2\left(1+\frac{C_3}{1-a}\right)\right)\int_0^T\int_0^L \lambda(x)(u^2+v^2)dxdt+(a-1)\int_0^T \left(u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t)\right)dt.$$

Como $0<a<1$, tenemos que $1-\dfrac{2}{1-a}<-1$ y consecuentemente,

$$C_3\left(1-\frac{2}{1-a}\right)<-C_3$$

Así,

$$\left(C_3-2\left(1+\frac{C_3}{1-a}\right)\right)<0$$

y

$$\left(1+\frac{C_3}{1-a}\right)\left[\| u(.,T) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v(.,T) \|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \frac{C_3}{1-a}\left[\| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v_0 \|^2_{L^2(\Omega)}\right],$$

o sea,

$$\left[\| u(.,T) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v(.,T) \|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \left(\frac{C_3}{1-a+C_3}\right)\left[\| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v_0 \|^2_{L^2(\Omega)}\right],$$

así

$$E(T) \leq \gamma E(0)$$

donde $\gamma := \dfrac{C_3}{1-a+C_3} \in (0,1)$.

La propriedad de semigrupo asociada al modelo nos da la conclusión del teorema. En efecto, como

$$E(kT) \leq \gamma^k E(0),\ \forall k \in \mathbb{Z}^+,$$

y

$$E(t) \leq E(kT), \quad \text{para} \quad kT \leq t \leq (k+1)T,$$

luego concluímos que

$$E(t) \leq E(kT) \leq \gamma^k E(0) \leq \gamma^{\frac{t}{T}-1} E(0) \leq \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\left[\frac{ln\gamma}{T}\right]t},$$

esto es,

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\mu t},$$

donde $C = \dfrac{1}{\gamma}$ y $\mu = -\left[\dfrac{ln\gamma}{T}\right] t$.

$\square$

Conclusiones

1. Si $\lambda \in L^{\infty}(\Omega)$, $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$ casi siempre en ω siendo ω un subconjunto abierto no vacio de Ω entonces existe una única solución del sistema (3.1)-(3.2) y el decaimiento exponencial se cumple para todos los valores de L.

2. Si $\lambda \in L^{\infty}(\Omega)$, $\lambda(x) > 0$ en Ω entonces también existe una única solución del sistema (3.1)-(3.2) y el decaimiento exponencial se cumple para todos los valores de L.

Observaciones

1. Cuando $a = 0$ podemos trabajar indivualmente con las ecuaciones de (3.1) para probar la existencia y el decaimiento exponencial.

2. Cuando $a = 1$ podemos probar la existencia y unicidad de solución pero no podemos probar el decaimiento exponencial de el sistema (3.1).

Bibiografía

[1] Adams, R.A., Sobolev Spaces.Academic Press,1975.

[2] E. Bisognin, V. Bisognin and G.P. Menzala, Exponential Stabilization of a Coupled System of Korteweg-de Vries Equations with Localized damping, Adv. Diff. Eq., 8 (2003), 443-469.

[3] J. Bona, G. Ponce, J.C. Saut and M.M. Tom, A model system for strong interaction between internal solitary waves, Comm. Math. Phys., 143 (1992), 287-313.

[4] H. Brézis, Analyse Fonctionelle. Théorie et Applications. DUNOD, Paris, 1999.

[5] M. Davila, On the unique continuation property for a coupled system of Korteweg-de Vries equations, PhD Thesis, Institute of Mathematics, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, (1994).

[6] L. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, 19, 1998.

[7] J.A. Gear and R. Grimshaw, Weak and strong interaction between internal solitary waves, Stud. in Appl. Math., 70 (1984), 235-258.

[8] A. M. Gomes, Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações ás Equações de Evolução, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[9] Jaime E. Muñoz Rivera, Estabilização de Semigrupos e Aplicações, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.

[10] F. Linares and M. Panthee, On the Cauchy problem for a coupled system of KdV equations, Commun. Pure Appl. Anal., 3(3) (2004), 417-431.

[11] F. Linares and A. F. Pazoto, On the exponential decay of the critical generalized Korteweg-de Vries equation with localized damping, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 1515-1522.

[12] J. L. Lions and E. Magenes, Problèmes Aux Limites non Homogénes et Applications. Tome 1, Dunod, Paris, 1968.

[13] J. L. Lions, Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites non Lineiares, Dunod, Paris, 1969.

[14] C. P. Massarolo, G. P.Menzala and A. F. Pazoto, Exponential Stabilization of a coupled system of Korteweg-de Vries Equations with Localized damping, Quarterly of Appl. Math., To appear.

[15] C. P. Massarolo and A. F. Pazoto, Uniform stabilization of a nonlinear coupled system of Korteweg-de Vries equation as a singular limit of the Kuramoto-Sivashinsky system, Diff. and Int. Eq. 22 (2009), 53-68.

[16] L. A. Medeiros, & Milla M. M. A., Espaços Sobolev Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[17] L. A. Medeiros, & Milla M. M. A., Introdução aos Espaços Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[18] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro 1975.

[19] G. P. Menzala, C. F. Vasconcellos and E. Zuazua, Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping, Quarterly of Appl. Math., LX (2002), 111-129.

[20] S. Micu e J. H. Ortega, On the contrabillity of a linear coupled system of Korteweg-de Vries equations, in Mathematical and numerical aspects of wave

propagation (Santiago de Campostela, 2000), SIAM, Philadelphia, PA (2000), 1020-1024.

[21] S. Micu, J. H. Ortega and A. F. Pazoto, On the controllability of a nonlinear coupled system of Korteweg-de Vries equations, Commun. Contemp. Math., 11 (2009), 799-827

[22] A. F. Pazoto, Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping, ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations, 11 (2005), 473-486.

[23] A. Pazy, Semigrupos of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[24] L. Rosier, Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain, ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations, 2 (1997), 33-55.

[25] L. Rosier, Control of the surface of a fluid by a wavemaker, ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations 10 (2004), 346-380.

[26] L. Rosier, Exact boundary controllability for the linear Korteweg-de Vries equation on the half-line, SIAM J. Control Optim. 39 (2000), no. 2, 331-351.

[27] L. Rosier and B.-Y. Zhang, Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain, SIAM J. Control Optim. 45 (2006), 927-956.

[28] Santiago Yolanda, On the perturbed dissipative operators. IX Workshop on Partial Differential Equations. Rio de Janeiro, Brasil - Resumen, 24 -27 Agosto 2010

[29] J. Sejje, Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial das Soluções da Equação de Korteweg-de Vries com Dissipação Localizada, Tese de Mestrado,

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, (2006).

[30] J. Simon, Compact sets in the $L^p(0,T;B)$ spaces, Analli Mat. Pura Appl. 146 (1987), 65-96.

[31] R. Teman, Navier-Stokes equations, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[32] O. P. Vera Villagran, Gain of regularity of the solutions of a coupled system of equations of Korteweg-de Vries type, PhD Thesis, Institute of Mathematics, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, (2001).

[33] E. Zuazua, Contrôlabilité exacte de quelques modèles de plaques en un temps arbitrairement petit, Appendix I in [J. L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilization de systèmes distribué, Tome 1, Contrôlabilité exact, Collection de Recherches en Math. Appl., Masson, Paris 8, 1988], 465-491.

[34] J. M. Ball, Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 63, Number 2, April 1977.