UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

EAP. DE MATEMÁTICA

Pre-semigrupos de operadores lineales : problema de cauchy abstracto

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Milton Angelino Aycho Flores

ASESOR

Luis Enrique Carrillo Díaz

Lima – Perú

2013

Pre-Semigrupos de Operadores Lineales: Problema de Cauchy Abstracto

por

Milton Angelino Aycho Flores

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por el siguiente Jurado

Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña
Presidente

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro

Dr. Luis Enrique Carrillo Díaz
Miembro Asesor

Ficha Catalográfica

AYCHO FLORES, Milton Angelino

Pre-Semigrupos de Operadores Lineales: Problema de Cauchy Abstracto, (Lima) 2013

VIII.,88p.,29.7cm (UNMSM,Licenciado, Matemática,2013) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. Matemática Pura I. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

Dedicatoria

A mi madre Brígida, por su
cariño, ejemplo y motivación.
A mi familia, por su
inmenso apoyo, fé
y confianza.

A Jossita, mi futura compañera,
por que eres mi gran amor,
mi hermosa y bella inspiración.

(In memoriam)
A Don Aurelio y Fredy Aycho,
mi padre y hermano, que descansan
en el infinito cielo.
Les dedico con profundo
cariño este trabajo.

Agradecimientos

- A Dios, por haber logrado mi objetivo y protegerme con su infinita bendición. A ti Virgen de Guadalupe, Madre bendita y milagrosa.
- Al miembro asesor, Dr. Luis Enrique Carrillo Díaz por ser mi maestro, por su paciencia y consejos en mi experiencia como alumno, por la orientación y observaciones en la elaboración de la Tesis.
- A los señores miembros del jurado calificador, Dra. Yolanda Santiago y Dr. Raúl Izaguirre, por su amabilidad, sugerencias y recomendaciones en la redacción final de este trabajo.
- Al Dr. Napoleón Caro Tuesta (Napo), por darme la oportunidad de redescubrir mi vocación como matemático y ofrecer su mano amiga en los momentos más difíciles.
- Al ingeniero Percy Triveño Aucahuasi, por su valiosa recomendación y sugerencia para la edición digital del presente trabajo.
- Al ingeniero Javier Córdova García y el señor Darío Heredia, por el apoyo y recursos ofrecidos para la elaboración digital de esta Tesis.
- A mis amigos y colegas Marcos Maraví, Luis Cóndor, Erick Palacios, Luis Huacausi, Ronald Príncipe, Víctor Martínez, Miguel Portocarrrero, Javier Vásquez, Julio Quesada, Maribel Bravo, ...,$+\infty$, por compartir muchas experiencias, conocimientos y una cálida amistad en nuestra Alma Mater.
- A todos mis profesores y maestros, que aportaron su granito de arena en mi formación académica y profesional, por cultivar en mi intelecto sus conocimientos.
- Gracias San Marcos, mi Universidad por recibirme en tus aulas, por demostrarme que en esta vida, con empeño, sacrificio y dedicación se alcanzan las metas.

Resumen

Pre-Semigrupos de Operadores Lineales:
Problema de Cauchy Abstracto

Milton Angelino Aycho Flores
Abril, 2013

Asesor	:	Dr. Luis Enrique Carrillo Díaz.
Título Obtenido	:	Licenciado en Matemáticas.

En este trabajo se estudia la Teoría de Pre-Semigrupos de operadores lineales en un espacio de Banach, la cuál constituye una generalización de la Teoria de C_0 - Semigrupos de operadores lineales. Además se exponen teoremas de existencia y unicidad de solución para el problema de Cauchy abstracto:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) & , t > 0 \\ u(0) = c & , c \in D(A), \end{cases}$$

asociado a esta clase de operadores. Finalmente se estudian propiedades asociadas al control exponencial y un resultado sobre la convergencia de una sucesión de Pre-Semigrupos.

Palabras Clave:

Pre-Semigrupos.

C-Semigrupos.

Problema de Cauchy.

Control Exponencial.

Análisis Funcional.

Abstract

Pre-Semigroups of Linear Operators:
Abstract Cauchy Problem

Milton Angelino Aycho Flores
April, 2013

Adviser	:	Dr. Luis Enrique Carrillo Díaz.
Obtained Title	:	Degree in Mathematics.

In this paper we study the Pre-Semigroups Theory of linear operators in Banach space, which is a generalization of the theory of C_0 - Semigroups of linear operators. Furthermore exposed existence and uniqueness theorems of solutions for the abstract Cauchy problem:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) & , t > 0 \\ u(0) = c & , c \in D(A), \end{cases}$$

associated with this class operators. Finally we study properties associated with exponencial control and a result on the convergence of a sequence Pre-Semigroups.

Keywords:

Pre-Semigroups.

C-Semigroups.

Cauchy Problem.

Exponential Control.

Functional Analysis.

Índice general

Introducción

En la actualidad la Teoría de Semigrupos lineales juega un rol muy importante en el estudio de los problemas de evolución que se originan al modelar problemas en las diversas ramas del conocimiento, principalmente en biología, economía, química, física e ingeniería en general; esta teoría alternativa, se originó al observarse que muchos métodos clásicos presentaban complicaciones al tratar de resolver la EDP (Ecuación en derivadas parciales) correspondiente, sobre todo cuando las ecuaciones involucradas eran del tipo no lineal.

En el caso de problemas lineales la teoría de Semigrupos ha resultado una herramienta matemática extremadamente elegante; sin embargo a pesar de la excelente aplicación de dicha teoría, algunos investigadores notaron que era suceptible de hacer algunas generalizaciones.

En este trabajo estudiamos una generalización de los C_0 - Semigrupos de Operadores Lineales definidos en un espacio de Banach X, llamados Pre-Semigrupos de Operadores Lineales o C - Semigrupos regularizados de Operadores Lineales según deLaubenfels [4], asimismo se analiza el problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \tag{1}$$

asociado al generador infinitesimal A del Pre-Semigrupo correspondiente.

En la teoría de C_0 - Semigrupos, Bellini y McBride [1], Goldstein [10], Kantorovitz [13], Melnikova y Filinkov [15] y Pazy [16] consideran la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ con la condición que $T(0)$ sea el operador identidad y estudian el problema (1) en los casos no homogéneos y semi-lineales. En el caso de un Pre-Semigrupo $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ el operador $P(0)$ es inyectivo. En Chang Y. y Jau G. [3] se estudian los casos semilineales y no homogéneos dados por:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)) \quad & 0 \leq t < T \\ u(0) = u_0 \in P(0)(D(A)) \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \quad & 0 \leq t < T \\ u(0) = u_0 \in P(0)(D(A)), \end{cases} \tag{3}$$

donde $D(A)$ es el dominio del operador A.

Para el problema (2), los autores demuestran la existencia de solución local bajo la condición de uniformidad de Lipschitz de la aplicación $f : [0,T] \times X \longrightarrow P(0)X$.

Por otra parte, para el problema no homogéneo dado en (3), se demuestra la existencia de solución cuando $f \in L^1([0,T]; P(0)X)$, $f(s) \in P(0)D(A)$ y $AP(0)^{-1}f(s) \in L^1([0,T]; X)$.

Existen diversos estudios, entre otros tenemos a deLaunbenfels [4] y [5], Kantorovitz [14] y Tanaka N. Miyadera I. [19] quienes hacen un abordaje de los Pre-Semigrupos de Operadores estableciendo caracterizaciones y condiciones para la existencia de solución del problema (1).

También se estudia el Control Exponencial de un Pre-Semigrupo, el cual garantiza la existencia del operador resolvente para el generador infinitesimal de un Pre-Semigrupo. Mayores detalles pueden verse en Tanaka N. [18] y Kantorovitz [13].

La exposición está dividida de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, establecemos definiciones previas y en especial, definimos un espacio vectorial de funciones para garantizar la existencia del Control Exponencial de un Pre-Semigrupo.

A lo largo del Capítulo 2, desarrollamos el concepto de Pre-Semigrupo de Operadores, así como sus propiedades elementales que nos permitan abordar en los capítulos siguientes algunos resultados y ejemplos que ilustren este tipo de operador, además se desarrollan teoremas y resultados del Cálculo Diferencial en espacios abstractos.

En el Capítulo 3 se estudia el problema (1), estableciendo resultados de existencia y unicidad de soluciones, además se obtiene una caracterización para la existencia y unicidad, empleando el concepto de resolvente de un operador. En este sentido, los trabajos de Tanaka - Miyadera [19] y deLaubenfels [6] obtienen resultados más precisos para la existencia de solución del problema (1).

Finalmente, en el Capítulo 4 revisaremos el concepto de Control Exponencial; su importancia para extender el concepto de Transformada de Laplace para este tipo de operadores, además una relación entre un Pre-Semigrupo exponencialmente controlado y un C_0 - Semigrupo, finalizando el capítulo con un resultado sobre convergencia puntual y uniforme de una sucesión de Pre-Semigrupos.

Capítulo 1

Nociones Preliminares

En este trabajo consideramos $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y

$$B(X) = \{L : X \longrightarrow X / L \text{ es lineal y acotada}\},$$

el espacio normado de las funcionales lineales acotadas, dotado de la norma

$$\|L\|_{B(X)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}.$$

El par $\left(B(X), \|\cdot\|_{B(X)}\right)$ resulta un espacio de Banach.

1.1. Espacios Funcionales

Definición 1.1. Sea $F : [0, +\infty) \longrightarrow B(X)$ una aplicación. Decimos que F es *fuertemente continua*, si para cada $t \geq 0$ y $x \in X$ (fijo pero arbitrario) se cumple que

$$\lim_{h \to 0} \|(F(t+h) - F(t))x\| = 0.$$

Observación 1.2. Si $t = 0$ consideramos el límite lateral derecho, es decir

$$\lim_{h \to 0^+} \|(F(t+h) - F(t))x\| = 0.$$

El espacio $\mathbf{C}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{X})$

Definición 1.3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, definimos el espacio de las funciones vectoriales continuas

$$C([a, b], X) = \{f : [a, b] \longrightarrow X / f \text{ es continua en } [a, b]\}.$$

Este espacio dotado de la norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|\,,$$

es un espacio de Banach.

El Espacio $\mathbf{C_b([0,+\infty),X)}$.

Definición 1.4. Se define el espacio vectorial de las funciones vectoriales uniformemente continuas y acotadas como el conjunto

$$C_b([0,+\infty),X) = \{f\ : [0,+\infty) \longrightarrow X/f \text{ es unif. continua y acotada en } [0,+\infty)\}\,.$$

Este espacio dotado de la norma

$$\|f\|_{b,\infty} = \sup_{t\geq 0} \|f(t)\|\,, \tag{1.1}$$

es un espacio de Banach. En efecto;

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C_b([0,+\infty),X)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ se cumple que $\|f_n - f_m\|_{b,\infty} < \epsilon$. Por (1.1), para cada $t \geq 0$ se tiene que

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| < \epsilon.$$

Luego, para cada $t \geq 0$ la sucesión $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X. Así existe

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t).$$

Como la sucesión f_n es acotada, entonces f es acotada. Sea $\epsilon > 0$, por la convergencia puntual anterior se tiene que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$ y cada $t \geq 0$

$$\|f_n(t) - f(t)\| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.2}$$

Desde que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente continua (para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo), existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \geq 0$ y $|h| < \delta$

$$\|f_n(t+h) - f_n(t)\| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.3}$$

Luego si $n \geq n_1$, $|h| < \delta$, de (1.2) y (1.3) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f(t+h) - f(t)\| &= \|f(t+h) - f_n(t+h) + f_n(t+h) - f_n(t) + f_n(t) - f(t)\| \\
&\leq \|f(t+h) - f_n(t+h)\| + \|f_n(t+h) - f_n(t)\| + \|f_n(t) - f(t)\| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Como h y n son independientes de t, f es uniformemente continua en $[0,+\infty)$ y por la desigualdad (1.2) se tiene que $f_n \longrightarrow f$ en $C_b([0,+\infty),X)$. Por lo tanto $C_b([0,+\infty),X)$ es un espacio de Banach.

Definición 1.5. Sea $C(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Definimos el espacio de funciones

$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) / f \text{ es totalmente acotada y } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\},$$

es decir si $f \in C_0(\mathbb{R})$, f es continua, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y dado $\epsilon > 0$ existe $M_\epsilon > 0$ tal que si $|x| > M_\epsilon$ entonces $|f(x)| < \epsilon$. Este espacio dotado de la norma

$$\|f\|_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

es un espacio de Banach.

Definición 1.6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos el soporte de f, denotado por $supp(f)$, al conjunto

$$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0\}}.$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Es claro que $supp(f) = [-1,1]$.

Definición 1.7. Definimos el subespacio vectorial $C_{00}(\mathbb{R})$ de $C_0(\mathbb{R})$, al conjunto

$$C_{00}(\mathbb{R}) = \{ f \in C_0(\mathbb{R}) / \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto} \}.$$

Proposición 1.8. El subespacio $C_{00}(\mathbb{R})$ es denso en $(C_0(\mathbb{R}), \| \|_0)$.

Demostración. Sea $f \in C_0(\mathbb{R})$. Definimos la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq n \\ 0 & |x| > n. \end{cases}$$

Para completar la definición de las funciones $f_n(x)$ en los puntos $x = n$ y $x = -n$, sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y consideremos la función lineal que une los puntos $(-n-\epsilon, 0)$ y $(-n, f(-n))$ para eliminar la discontinuidad en $x = -n$ y análogamente la función lineal que une $(n, f(n))$ con $(n+\epsilon, 0)$ para evitar la discontinuidad en $x = n$.

Luego $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de ese modo, es continua, con soporte compacto y además

$$\lim_{|x|\to\infty} f_n(x) = 0,$$

es decir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_{00}(\mathbb{R})$.

Así

$$\|f_n - f\|_0 = \sup_{|x|>n} |f(x)| = 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Por lo tanto $f \in \overline{C_{00}(\mathbb{R})}$ con lo cual, $C_0(\mathbb{R}) \subseteq \overline{C_{00}(\mathbb{R})}$.

Como la otra inclusión $\overline{C_{00}(\mathbb{R})} \subseteq C_0(\mathbb{R})$ es evidente por definición, se sigue el resultado.

□

Definición 1.9. Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach, $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función y $t \in [a,b]$. Definimos la *derivada fuerte* de f en t, denotada por $\frac{d}{dt}f(t)$ (o $f'(t)$), al límite

$$\frac{d}{dt}f(t) := \lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \right\|$$

si este existe.

Para el caso en que $t = a$ o $t = b$, se considera el límite lateral correspondiente.

Observación 1.10. Si $f'(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$ entonces f es constante en $[a,b]$.

Definición 1.11. Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach. Definimos el espacio vectorial $C^1([a,b], X)$ como

$$C^1([a,b], X) = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow X / \ f'(t) \text{ existe y es continua en } [a,b] \right\}.$$

Es decir, si $f \in C^1([a,b], X)$, entonces la aplicación $t \mapsto f'(t)$ es continua en $[a,b]$.

Dotamos a este espacio, con la norma

$$\|f\|_{C'([a,b],X)} = \sup_{t\in[a,b]} \left\{ \|f(t)\| + \left\|f'(t)\right\| \right\}.$$

Con esta norma, $C^1([a,b], X)$ es un espacio de Banach.

1.2. Integral de Riemman en Espacios de Banach

En esta sección, revisamos los conceptos de la integral definida en el sentido de Riemman, para funciones vectoriales de variable real, con valores en un espacio de Banach X, los cuales serán usados en los capítulos siguientes.

Definición 1.12. Sea $[a,b]$ un intervalo en $\mathbb{R}$. Definimos la partición Π de $[a,b]$ como

$$\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}.$$

La norma de la partición Π, denotada por $|\Pi|$ esta definida por

$$|\Pi| = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{|t_{i+1} - t_i|\}.$$

Sea $f \in C([a,b], X)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$.

Definición 1.13. Definimos la integral de Riemman de f en $[a,b]$, denotada por $\int_a^b f(t)dt$, como el límite (en X)

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i^{\Pi})(t_{i+1} - t_i), \tag{1.4}$$

si este existe. En la ecuación (1.4) c_i^{Π} es un punto del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, para cada $0 \leq i \leq n-1$. Denotamos por $\mathfrak{R}([a,b], X)$ al espacio vectorial de las funciones vectoriales de variable real continuas que satisfacen la Definición (1.4). Es decir

$$\mathfrak{R}([a,b], X) = \left\{ f \in C([a,b], X) \,/\, \text{la integral } \int_a^b f(t)dt \text{ existe} \right\}.$$

La siguiente proposición da algunas propiedades de esta integral.

Proposición 1.14. Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach, $f \in \mathfrak{R}([a,b], X)$ y $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$. Entonces se satisfacen:

a. $\left\| \int_\alpha^\beta f(t)dt \right\| \leq (\beta - \alpha) \sup\limits_{\alpha \leq t \leq \beta} \|f(t)\|.$

b. $\int_\alpha^\gamma f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\beta^\gamma f(t)dt.$

c. La aplicación $G : [a,b] \longrightarrow X$ definida por $G(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$ pertenece a $C([a,b], X)$.

d. Si $T \in B(X)$, entonces la aplicación $T_f\ : [a,b] \longrightarrow X$ definida como $t \longmapsto (T_f)(t) = T(f(t))$ es Riemman integrable y se cumple que

$$T\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b T(f(t))dt.$$

e. La función $t \longmapsto \|f(t)\|$ es Riemman integrable en $[a,b]$ y

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt.$$

Demostración. Ver Driver [7].

$\square$

La definición de integral de Riemman, en espacios abstractos, puede ser extendida al caso de las integrales impropias. Sea $f \in C([a,+\infty), X)$, definimos la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ por

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{\beta\to+\infty} \int_a^b f(t)dt, \tag{1.5}$$

si existe el límite en el sentido de la norma $\| \ \|$ de X . Por la Proposición 1.14 (e), una condición suficiente para la existencia del limite (1.5) es que

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_a^b \|f(t)\| \, dt,$$

converga en $\mathbb{R}$, es decir que exista la integral impropia real $\int_a^{+\infty} \|f(t)\| \, dt$. En forma análoga para el caso de la integral impropia $\int_{-\infty}^b f(t)dt$.

1.3. Operadores en Espacios Normados.

En esta sección mostraremos algunos resultados sobre la Teoría de Operadores en espacios normados. Además enunciaremos algunos teoremas muy útiles en el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.15. Sean $(X, \| \ \|_X)$ e $(Y, \| \ \|_Y)$ dos espacios de Banach y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ un operador. Decimos que A es un *operador cerrado*, si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(A)$ tal que

$$x_n \to x \text{ en } X \text{ y } Ax_n \to y \text{ en } Y,$$

entonces

$$x \in D(A) \text{ y } Ax = y.$$

Teorema 1.16. (Del Gráfico Cerrado) Sean $(X, \| \ \|_X)$ e $(Y, \| \ \|_Y)$ dos espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador, tal que $D(A) = X$. Son equivalentes:

a. A es un operador cerrado.

b. $A \in B(X,Y)$, donde

$$B(X,Y) = \{L : X \to Y / L \text{ es lineal y continua}\}.$$

Demostración. Ver Eidelman, Milman y Tsolomitis [8].

□

Teorema 1.17. (Principio de Acotación Uniforme) Sean $(X, \| \|_X)$ *e* $(Y, \| \|_Y)$ dos espacios de Banach y $\{T_i\}_{i\in I}$ una familia de operadores en $B(X,Y)$. Si para cada $x \in X$, existe $M_x > 0$ tal que

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| \leq M_x.$$

Entonces, existe $M > 0$ tal que,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{B(X,Y)} < M.$$

Demostración. Ver Eidelman, Milman y Tsolomitis [8].

□

Definición 1.18. Sean $(X, \| \|)$ un espacio normado y $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal cerrado. Definimos el resolvente de A, denotado por $\rho(A)$, como el conjunto

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe y pertenece a } B(X) \right\}.$$

Denotamos por $R_{\lambda:A}$ al operador resolvente $(\lambda I - A)^{-1}$.

Observaciones

a. Como A es cerrado, por el Teorema 1.16 el operador $R_{\lambda:A}$ es cerrado y continuo.

b. De la Definición 1.18 se sigue que:

   - $R_{\lambda:A}(\lambda I - A)x = x$ para todo $x \in D(A)$.
   - $(\lambda I - A)R_{\lambda:A}x = x$ para todo $x \in X$.

c. Por el inciso anterior, la aplicación $R_{\lambda:A} : X \longrightarrow D(A)$ satisface

$$R_{\lambda:A}(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)R_{\lambda:A}x,$$

para todo $x \in X$.

Definición 1.19. Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado, $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador y un subconjunto $Y \subseteq X$. Definimos el operador parte de A en Y, A_Y por

$$\begin{aligned} A_Y : D(A_Y) \subseteq Y &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto A_Y x = Ax \end{aligned}$$

donde

$$D(A_Y) = \{x \in D(A) / x \in Y \ \wedge \ Ax \in Y\}.$$

Lema 1.20. Sean $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador cerrado. Si $B : X \longrightarrow X$ es un operador que conmuta con A, es decir

$$Bx \in D(A) \ y \ BAx = ABx,$$

para todo $x \in D(A)$, entonces $R_{\lambda:A}$ conmuta con B, esto es

$$BR_{\lambda:A}x = R_{\lambda:A}Bx,$$

para cada $x \in X$ y $\lambda \in \rho(A)$.

Demostración. Por hipótesis A y B conmutan, es decir

$$BAy = ABy \text{ para todo } y \in D(A).$$

Luego

$$\lambda By - BAy = \lambda By - ABy \text{ para todo } y \in D(A).$$

Así tenemos

$$B(\lambda I - A)y = (\lambda I - A)By \text{ para todo } y \in D(A). \tag{1.6}$$

Como $\lambda \in \rho(A)$ de (1.6) y la definición 1.18 se sigue que

$$\begin{aligned} R_{\lambda:A}B(\lambda I - A)y &= R_{\lambda:A}(\lambda I - A)By \\ &= By \text{ para todo } y \in D(A). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Sea $x \in X$ entonces existe $y_1 \in D(A)$ tal que $x = (\lambda I - A)y_1$. Así $y_1 = R_{\lambda:A}x$. Por la ecuación (1.7) conseguimos

$$R_{\lambda:A}B(\lambda I - A)\underbrace{y_1}_{= R_{\lambda:A}x} = By_1. \tag{1.8}$$

De (1.8) y la Definición 1.18 se sigue que

$$R_{\lambda:A}Bx = BR_{\lambda:A}x,$$

para cada $x \in X$. Por lo tanto se consigue el resultado.

□

Lema 1.21. Sean $(X, \| \ \|)$ un espacio normado y $A : X \longrightarrow X$, $B : X \longrightarrow X$ dos operadores.

Si B es inyectiva y $AB = BA$, entonces

$$A(BX) \subseteq BX \text{ y } AB^{-1}x = B^{-1}Ax,$$

para todo $x \in BX$, donde $BX = \{Bx/x \in X\}$.

Demostración. Por hipótesis $A(BX) \subseteq BX$, luego $A(BX) = B(AX) \subseteq BX$.

Así $A(BX) \subseteq BX$. Sea $x \in BX$. Como B es inyectiva existe

$$B^{-1} : BX \longrightarrow X$$

Luego, como $Ax = Ax$ y por la definición del operador B^{-1} se sigue que $ABB^{-1}x = BB^{-1}Ax$. Por la conmutatividad de los operadores A y B y la identidad anterior se tiene que,

$$BAB^{-1}x = BB^{-1}Ax. \tag{1.9}$$

Por la inyectividad de B y la igualdad (1.9) se tiene que

$$AB^{-1}x = B^{-1}Ax,$$

para cada $x \in BX$ con lo que se tiene el resultado deseado.

□

Lema 1.22. Sean $(X, \| \|)$ un espacio de Banach y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$, $B : D(B) \subseteq X \longrightarrow X$ dos operadores tales que:

a. A es sobreyectivo.

b. B es inyectivo.

Si $A \subseteq B$, es decir $D(A) \subseteq D(B)$ y $Ax = Bx$ para todo $x \in D(A)$, entonces $A = B$.

Demostración.

Por la hipótesis de inclusión, bastará probar que $D(A) = D(B)$. En efecto, sea $x \in D(B) \subseteq X$. Por la sobreyectividad de A, existe $y \in D(A)$ tales que $Ay = Bx$. Desde que $A \subseteq B$ tenemos que $Ay = By$. Luego $By = Bx$.

Por la inyectividad del operador B se tiene que $x = y$, por lo tanto $x \in D(A)$. Así

$$D(B) \subseteq D(A).$$

Como la inclusión $D(A) \subseteq D(B)$ es válida por hipótesis, se sigue que $D(A) = D(B)$. Como $Ax = Bx$ para todo $x \in D(A) = D(B)$ se tiene que $A = B$.

$\square$

1.4. El Teorema Fundamental del Cálculo en Espacios de Banach

En esta sección desarrollamos el Teorema Fundamental del Cálculo en un espacio de Banach $(X, \| \|)$, que será utilizado en los capítulos siguientes. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 1.23. Sean $(X, \| \|)$ un espacio de Banach y $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que una función $f : (a, b) \longrightarrow X$ es diferenciable, si existe (en el sentido de la Definición 1.9) la derivada $f'(t)$ para todo $t \in (a, b)$.

La siguiente proposición, formaliza el enunciado dado en la Observación 1.10.

Proposición 1.24. Sea X un espacio de Banach y $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función continua. Si $f'(t) = 0$ para todo $t \in (a, b)$, entonces f es constante en $[a, b]$.

Demostración. Ver Driver [7].

$\square$

Teorema 1.25. (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach. Si $f \in C([a, b], X)$, entonces:

a. $\dfrac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t)$ para todo $t \in (a, b)$.

b. Supongamos que $F \in C([a, b], X)$. Si F es diferenciable en (a, b) y F' se extiende continuamente al intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^t F'(t) dt = F(t) - F(a)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Demostración. Ver Belleni - Mc Bride [1] o Driver [7].

$\square$

1.5. Semigrupos de Operadores Lineales Acotados

En esta sección, revisaremos el concepto de Semigrupo de Operadores Lineales, prestando atención a una clase especial de esta familia de operadores, denominada C_0 - Semigrupos, asimismo se definirá el concepto de *generador infinitesimal* y se establecerán algunas propiedades importantes.

Definición 1.26. Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ una familia de operadores lineales acotados en X. Decimos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo de operadores*, si se cumplen:

a. $T(0) = I$, donde I es el operador identidad.

b. $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $s, t \geq 0$.

Observación 1.27. De la Definición 1.26 se tiene que:

a. Por el inciso (b) tenemos que los operadores $T(t)$ y $T(s)$ conmutan para todo $s, t \geq 0$.

b. En el caso que se cumpla

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{B(X)} = 0\,,$$

diremos que el semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es *uniformemente continuo*.

Definición 1.28. Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores lineales acotados en X. Decimos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un *semigrupo fuertemente continuo* (o simplemente C_0 - *Semigrupo*), si para cada $x \in X$ se cumple que

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x. \tag{1.10}$$

Observación 1.29. La condición (1.10) dada en la definición anterior, establece que la aplicación $t \mapsto T(t)x$ es continua en 0, para cada $x \in X$. Asimismo dicha condición es equivalente a:

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0\,,$$

para cada $x \in X$.

Los siguientes resultados, demuestran la propiedad de acotación uniforme y de continuidad para los C_0 - Semigrupos.

Teorema 1.30. Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 - Semigrupo de operadores lineales acotados, entonces existen $w \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que,

$$\|T(t)\|_{B(X)} \leq Me^{wt}\,,$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Ver Pazy [16].

□

Teorema 1.31. Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 - Semigrupo de operadores lineales acotados. Si $x \in X$ entonces la aplicación $h_x : [0, +\infty) \longrightarrow X$ definida por

$$h_x(t) = T(t)x \,,$$

es una aplicación continua.

Prueba. Sea $t \geq 0$ y $h \in [0, t]$. Por el Teorema 1.30, existen $M \geq 1$ y $w \geq 0$ tales que

$$\|T(t)\|_{B(X)} \leq Me^{wt} \,. \tag{1.11}$$

Por la Definición 1.26 (b) y (1.11) tenemos

$$\begin{aligned}
\|h_x(t+h) - h_x(t)\| &= \|T(t+h)x - T(t)x\| \\
&= \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \\
&\leq \|T(t)\|_{B(X)} \|T(h)x - x\| \\
&\leq Me^{wt} \|T(h)x - x\| \,. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Luego, por la Observación 1.29 y la desigualdad (1.12) tomando límite cuando $h \to 0^+$, obtenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \|h_x(t+h) - h_x(t)\| = 0 \,, \tag{1.13}$$

mostrando la continuidad por derecha en t.

Por otro lado, como $h < t$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|h_x(t-h) - h_x(t)\| &= \|T(t-h)x - T(t)x\| \\
&= \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\| \\
&= \|T(t-h)x - T(t-h)T(h)x\| \\
&= \|T(t-h)\{x - T(h)x\}\| \\
&\leq \|T(t-h)\|_{B(X)} \|x - T(h)x\| \\
&\leq Me^{w(t-h)} \|T(h)x - x\| \\
&\leq Me^{wt} \|T(h)x - x\| \ \text{(pues } e^{-wh} \leq 1). \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Del mismo modo que el caso anterior, haciendo tender $h \to 0^+$ en la desigualdad (1.14) tenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \|h_x(t-h) - h_x(t)\| = 0. \tag{1.15}$$

Por lo tanto, de (1.13) y (1.15) tenemos

$$\lim_{h \to 0} \|h_x(t+h) - h_x(t)\| = 0.$$

Así obtenemos

$$\lim_{h \to 0} h_x(t+h) = h_x(t).$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

□

Definición 1.32. Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach y $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de operadores lineales acotados en X. Se definen el conjunto

$$D(A_T) = \left\{ x \in X / \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \{T(t)x - x\} \text{ existe en } X \right\}$$

y el operador $A_T : D(A_T) \subseteq X \longrightarrow X$ definido por

$$A_T x := \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \{T(t)x - x\},$$

para cada $x \in D(A_T)$. El operador A_T sera llamado el *generador infinitesimal* del semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ siendo el conjunto $D(A_T)$ su dominio correspondiente.

Observación 1.33. De la Definición 1.9 y la definición del operador A_T tenemos que la aplicación $t \mapsto T(t)x$ es fuertemente diferenciable en $t = 0$ para cada $x \in D(A)$ y además se cumple

$$\frac{d}{dt} T(0)x = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \{T(t)x - x\} = A_T x.$$

Los teoremas siguientes establecen las propiedades de un C_0 - Semigrupo de operadores lineales acotados en relación a su generador infinitesimal A_T.

Teorema 1.34. Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 - Semigrupo de operadores lineales acotados en X y $A_T : D(A_T) \subseteq X \longrightarrow X$ su generador infinitesimal. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

a. Si $x \in X$ y $t_0 \geq 0$ entonces $\lim\limits_{t \to t_0} T(t)x = T(t_0)x$. Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo, entonces:

$$\lim_{t \to t_0} T(t) = T(t_0) \quad \text{en } B(X).$$

b. Si $x \in X$ y $t \geq 0$ entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

c. Si $x \in X$ y $t \geq 0$ entonces $\int_0^t T(s)xds \in D(A_T)$ y

$$A_T \left(\int_0^t T(s)xds \right) = T(t)x - x.$$

d. Si $x \in D(A_T)$ y $t \geq 0$ entonces $T(t)x \in D(A_T)$ y

$$A_T(T(t)x) = T(t)A_T x = \frac{d}{dt} T(t)x$$

e. Si $x \in D(A_T)$ y $s, t \geq 0$ entonces

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(u)Axdu = \int_s^t AT(u)xdu$$

Demostración. Ver Kantorovitz [13], [14] o Pazy [16].

$\square$

Teorema 1.35. Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 - Semigrupo de operadores lineales acotados en X. Si $A_T : D(A_T) \subseteq X \longrightarrow X$ es su generador infinitesimal, entonces:

a. El operador A_T es lineal y cerrado.

b. $D(A_T)$ es un subespacio vectorial denso en X, es decir $\overline{D(A)} = X$.

Demostración. Ver Goldstein [10] o Kantorovitz [13], [14].

$\square$

Teorema 1.36. Sean $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dos C_0 - Semigrupos de operadores lineales acotados en X. Si A_T y A_S son sus respectivos generadores infinitesimales, entonces son equivalentes:

a. $A_T = A_S$.

b. $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demostración.

a.$\Longrightarrow$b. Supongamos que $A_T = A_S$. Sea $x \in D(A_T)$ y $t \geq 0$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \phi_t : [0,t] &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto \phi_t(s) = T(t-s)S(s)x. \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena, el Teorema 1.34 (d) y la hipótesis tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\phi_t(s) &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x \\ &= \left(\frac{d}{ds}T(t-s)\right)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -A_T T(t-s)S(s)x + T(t-s)A_S S(s)x \\ &= -T(t-s)A_T S(s)x + T(t-s)A_T S(s)x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego $\dfrac{d}{ds}\phi_t(s) = 0$ para todo $x \in D(A_T)$. Por la Proposición 1.24 ϕ_t es constante en $[0,t]$.

Así $\phi_t(0) = \phi_t(t)$, es decir $T(t)S(0)x = T(0)S(t)x$ y por definición de semigrupo, obtenemos $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in D(A_T)$. Por el Teorema 1.35 (b) $D(A_T)$ es denso en X , así tenemos que $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

b.$\Longrightarrow$a. Sea $x \in D(A_S)$. Por la Definición 1.32 y la hipótesis tenemos

$$\begin{aligned} A_S x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\{S(h)x - x\} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\{T(h)x - x\} \\ &= A_T x. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Así $x \in D(A_T)$ y $A_S x = A_T x$. Luego $D(A_S) \subseteq D(A_T)$. De forma análoga se tiene la otra inclusión usando (1.16). Por lo tanto $D(A_T) = D(A_S)$ y $A_S x = A_T x$ lo que demuestra que $A_T = A_S$.

$\square$

El siguiente teorema establece una condición necesaria y suficiente para la existencia y unicidad de solución para el problema de Cauchy abstracto:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) & , t > 0 \\ u(0) = x & , x \in X , \end{cases} \tag{1.17}$$

donde X es un espacio de Banach y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ es un operador lineal, con dominio denso en X.

Teorema 1.37. Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal con dominio $D(A)$ denso en X. Si el conjunto resolvente de A, $\rho(A)$ es no vacío, entonces para cada $x \in D(A)$, el problema de Cauchy abstracto (1.17) posee una única solución $u \in C^1([0, +\infty), X)$ si y solo si A es el generador infinitesimal de un C_0 - Semigrupo de operadores lineales $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, siendo esta solución la aplicación

$$u(t) = T(t)x,$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Ver Pazy [16].

$\square$

Capítulo 2

Pre-Semigrupos de Operadores Lineales

En el presente capítulo, expondremos acerca de la teoría de Pre-semigrupos de Operadores Lineales. Mostraremos sus propiedades y algunos teoremas básicos para los capítulos siguientes. A lo largo de este capítulo X denotará un espacio de Banach real (o complejo).

2.1. Pre-Semigrupos de Operadores Lineales

Definición 2.1. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ una familia uniparamétrica de operadores lineales acotados en X. Decimos que $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo si:

i. $P : [0,+\infty) \longrightarrow B(X)$ es una aplicación fuertemente continua, es decir

$$\lim_{h\to 0} \|P(t+h)x - P(t)x\| = 0$$

para cada $x \in X$ (fijo arbitrario) y $t \geq 0$.

ii. El operador $P(0) : X \longrightarrow X$ es inyectivo.

iii. $P(t-u)P(u)$ *es independiente de* u para cada $u \in [0,t]$

Se observa que esta definición generaliza el concepto de un C_0 - Semigrupo de operadores lineales, dado en la Definición 1.28. El punto (iii) en la Definición 2.1 puede ser caracterizado de una forma más cómoda, tal como se muestra en el siguiente lema.

Lema 2.2. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ una familia de operadores. Son equivalentes:

i. $P(t-u)P(u)$ es independiente de u para cada $0 \leq u \leq t$.

ii. $P(t-u)P(u) = P(0)P(t)$ para cada $0 \leq u \leq t$.

iii. $P(0)P(u+s) = P(s)P(u)$ para cada $u, s \geq 0$.

Prueba.

i.⇒ii. Si $u = t$ se tiene que $P(t-u)P(u) = P(0)P(u) = P(0)P(t)$. Luego,

$$P(t-u)P(u) = P(0)P(t),$$

Consideremos $0 \leq u < t$. Si $u = 0$ es evidente la afirmación. Si $u \in (0,t)$, entonces para cada $v \in (0,t)$ tenemos por hipótesis

$$P(t-u)P(u) = P(t-v)P(v).$$

En particular para $v = t$ tenemos $P(t-u)P(u) = P(0)P(t)$.

ii.⇒i. Como $P(t-u)P(u) = P(0)P(t)$ para cada $0 \leq u \leq t$, es evidente que

$$P(t-u)P(u),$$

no depende de u.

ii.⇒iii. Por hipótesis $P(t-u)P(u) = P(0)P(t)$ para cada $0 \leq u \leq t$. Sean $s, u \geq 0$ y $t = s + u \geq 0$. Así tenemos que

$$P(s+u-u)P(u) = P(0)P(s+u),$$

luego

$$P(s)P(u) = P(0)P(s+u).$$

iii.⇒ii. Si $0 \leq u \leq t$ existe $s \geq 0$ tal que $t = s + u$, así tenemos $s = t - u$. Por tanto $P(0)P(t) = P(t-u)P(u)$.

□

Observación 2.3. Por el lema anterior, se tiene que $P(0)P(u+s) = P(s)P(u)$, es decir, el operador $P(0)$ *controla* la propiedad de aditividad de la familia $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ y en cierta forma generaliza una de las propiedades de los C_0 - Semigrupos (la cual es $P(0) = I$ el operador identidad). Además este lema muestra la *conmutatividad de los operadores*, es decir

$$P(s)P(u) = P(0)P(u+s) = P(0)P(s+u) = P(u)P(s).$$

El siguiente lema muestra una propiedad de acotación uniforme.

Lema 2.4. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales. Si $0 \leq a < b < +\infty$, entonces la familia de operadores lineales $\{P(s)/s \in [a,b]\}$ es uniformemente acotada, para cada intervalo compacto $[a,b]$, es decir existe $M > 0$ tal que $\|P(s)\| \leq M$ para todo $s \in [a,b]$.

Prueba.

Sea $x \in X$ (fijo pero arbitrario). Como la aplicación $P(\cdot)x : [0,+\infty) \longrightarrow X$ es continua y la funcional norma $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0,+\infty)$ es continua, la aplicación composición $\|P(\cdot)x\| : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ es continua. Luego, esta aplicación real de variable real, alcanza su máximo en cada intervalo compacto $[a,b]$, es decir, existe $M_x > 0$ tales que

$$\sup_{s\in[a,b]} \|P(s)x\| \leq M_x.$$

Así por el Teorema 1.17, existe $M > 0$ tal que $\sup_{s\in[a,b]} \|P(s)\| \leq M$. Por lo tanto

$$\|P(s)\| \leq M \textit{ para todo } s \in [a,b].$$

□

Ejemplo 2.5. Consideremos el espacio de Banach $X = C_0(\mathbb{R})$ (dado en la Definición 1.5) y definimos la familia de operadores $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ como

$$P(t)\,(f(x)) = e^{-x^2+tx} f(x). \tag{2.1}$$

Afirmación: $P(t)$ es un Pre-semigrupo de operadores en $C_0(\mathbb{R})$. En efecto:

- $P : [0,+\infty) \longrightarrow B(X)$ es fuertemente continua.

  Sea $t \geq 0$ fijo pero arbitrario. Como $\lim\limits_{|x|\to+\infty} e^{-x^2+tx} = 0$ y $f \in C_0(\mathbb{R})$ se sigue de la Definición 1.5 que,

$$\lim_{|x|\to+\infty} e^{-x^2+tx} f(x) = 0.$$

Sea la función real de variable real $h(x) = -x^2 + tx$. Desde que h alcanza su máximo global en $x = \frac{t}{2}$, siendo este valor máximo igual a $f(\frac{t}{2}) = \frac{t^2}{4}$ y por la definición de la norma de $C_0(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|P(t)f\|_0 &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-x^2+tx} f(x) \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-x^2+tx} \right| |f(x)| \\
&\leq e^{\frac{t^2}{2}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \|f\|_0 .
\end{aligned}$$

Luego, $P(t) \in B(X)$.

Sea $f \in C_0(\mathbb{R})$, debemos probar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tales que si $|h| < \delta$ entonces,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{-x^2+(t+h)x}f(x)-e^{-x^2+tx}f(x)\right|<\epsilon.$$

En principio, consideremos $f\in C_{00}(\mathbb{R})$. Como f posee soporte compacto K se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{-x^2+(t+h)x}f(x)-e^{-x^2+tx}f(x)\right| &= \sup_{x\in K}\left|e^{-x^2+(t+h)x}f(x)-e^{-x^2+tx}f(x)\right|\\ &= \sup_{x\in K}\left|e^{-x^2+tx}\left\{e^{hx}-1\right\}f(x)\right|\\ &\leq \sup_{x\in K}\left|e^{-x^2+tx}f(x)\right|\sup_{x\in K}\left|e^{hx}-1\right|. \end{aligned}\tag{2.2}$$

Por la compacidad del conjunto K y la continuidad de la función real $e^{-x^2+tx}f(x)$, se tiene que existe $S_K=\max_{x\in K}e^{-x^2+tx}f(x)$. Luego de la desigualdad (2.2) tenemos

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{-x^2+(t+h)x}f(x)-e^{-x^2+tx}f(x)\right|\leq S_K\sup_{x\in K}\left|e^{hx}-1\right|.$$

Sea $K_{max}=\max\{|x|\,/x\in K\}$, como la función exponencial $f(w)=e^w$ es monótona creciente, se sigue que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K}\left|e^{hx}-1\right| &\leq \left|\sup_{x\in K}\left|e^{|h||x|}-1\right|\right|\\ &= \left|e^{|h|K_{max}}-1\right|. \end{aligned}\tag{2.3}$$

Si $h\to 0$, de la desigualdad (2.3) se obtiene,

$$\sup_{x\in K}\left|e^{hx}-1\right|\leq\left|e^{|h|K_{max}}-1\right|\to 0.$$

Luego

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{-x^2+(t+h)x}f(x)-e^{-x^2+tx}f(x)\right|\to 0 \text{ si } h\to 0,$$

demostrando así la continuidad fuerte en $C_{00}(\mathbb{R})$. Tomemos $f\in C_0(\mathbb{R})$, como $\overline{C_{00}(\mathbb{R})}=C_0(\mathbb{R})$, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C_{00}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f_n-f\|_0\to 0 \text{ si } n\to\infty. \tag{2.4}$$

Luego, por la linealidad de los operadores $P(t)$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\|P(t+h)f - P(t)f\|_0 \\
&\qquad = \|P(t+h)f - P(t+h)f_n + P(t+h)f_n - P(t)f_n + P(t)f_n - P(t)f\|_0 \\
&\qquad \leq \|P(t+h)(f_n - f)\|_0 + \|P(t)(f_n - f)\|_0 + \|(P(t+h) - P(t))f_n\|_0 .
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\|P(t+h)f - P(t)f\|_0 \quad \leq \quad & \|P(t+h)\| \, \|f_n - f\|_0 + \|P(t)\| \, \|f_n - f\|_0 \\
& + \|(P(t+h) - P(t))f_n\|_0 . \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Como $f_n \in C_{00}(\mathbb{R})$ y apelando a la continuidad fuerte de la familia $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ en dicho subespacio se tiene que

$$
\|P(t+h)f_n - P(t)f_n\|_0 \to 0 \text{ si } h \to 0, \qquad (2.6)
$$

es decir dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$
\|P(t+h)f_n - P(t)f_n\|_0 < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (2.7)
$$

Por el Lema 2.4 existe $M > 0$ tal que $\|P(t+h)\| < M$ y $\|P(t)\| < M$. Así de (2.5) se obtiene

$$
\|P(t+h)f - P(t)f\|_0 \leq M \|f_n - f\|_0 + M \|f_n - f\|_0 + \|(P(t+h) - P(t))f_n\|_0 . \qquad (2.8)
$$

Por la convergencia dada en (2.4) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se cumple que

$$
\|f_n - f\|_0 < \frac{\epsilon}{3M}. \qquad (2.9)
$$

De (2.7), (2.8) y (2.9) si $n \geq n_0$ y $|h| < \delta$ se tiene que

$$
\|P(t+h)f - P(t)f\|_0 < \epsilon.
$$

Con lo cual queda demostrada la continuidad fuerte de la familia de operadores $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ en $C_0(\mathbb{R})$.

- $P(0)$ es un operador inyectivo.

  En efecto, sean $f, g \in C_0(\mathbb{R})$. Como el operador $P(0)f(x) = e^{-x^2} f(x)$, si $P(0)f(x) = P(0)g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$
e^{-x^2} f(x) = e^{-x^2} g(x),
$$

de donde $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego $f = g$ con lo que se tiene la inyectividad del operador $P(0)$.

- Por las equivalencias dadas en el Lema 2.2 bastará probar que $P(0)P(s+t) = P(s)P(t)$. En efecto, sea $f \in C_0(\mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
P(0)P(s+t)f(x) &= e^{-x^2} e^{-x^2+(s+t)x} f(x) \\
&= e^{-x^2+sx} \left(e^{-x^2+tx} f(x) \right) \\
&= P(s)P(t)f(x),
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego por la definición del operador $P(t)$ se sigue que

$$P(0)P(s+t) = P(s)P(t).$$

Por lo tanto de la Definición 2.1, se tiene la afirmación.

$\square$

Definición 2.6. Sean $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales y $x \in X$. Definimos la derivada fuerte por la derecha de la aplicación $P(\cdot)x$, denotada como $P'^{+}(t)x$, al límite

$$P'^{+}(t)x = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left\{ P(t+h)x - P(t)x \right\}$$

si este límite existe.

Definición 2.7. Sea $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales. Definimos el generador infinitesimal del Pre-Semigrupo $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ como el operador $A : D(A) \to X$ donde

$$D(A) = \left\{ x \in X / P'^{+}(0)x \text{ existe en } X \text{ y pertenece a } P(0)X \right\}$$

y para cada $x \in D(A)$

$$Ax = P(0)^{-1} P'^{+}(0)x.$$

Observación 2.8. En la definición anterior se tiene que $x \in D(A)$ si el límite

$$P'^{+}(0)x = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left\{ P(h)x - P(0)x \right\}, \tag{2.10}$$

existe y pertenece al rango del operador $P(0)$. Además esta definición generaliza el concepto dado en la Definición 1.32.

Observación 2.9. Como el operador $P(0)$ es inyectivo, el operador A está bien definido, puesto que

$$Ax = P(0)^{-1} P'^{+}(0)x.$$

Además por la linealidad del operador $P(t)$ se tiene que el generador A es lineal. Si $P(0) = I$, tenemos el caso dado para un C_0 - Semigrupo de operadores lineales.

Ejemplo 2.10. Consideremos el Pre-Semigrupo del Ejemplo 2.5. Sea $f \in C_0(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$. Por (2.10) se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(P'^{+}(0)f\right)x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{P(h)f(x) - P(0)f(x)\right\} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{e^{-x^2+hx}f(x) - e^{-x^2}f(x)\right\} \\
&= \lim_{h\to 0^+} xe^{-x^2}f(x)\left\{\frac{e^{hx}-1}{hx}\right\} \\
&= xe^{-x^2}f(x). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Como el operador $P(0)$ esta definido por

$$\begin{aligned}
P(0) \quad : \quad & C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}) \\
& g \longmapsto (P(0)g)(x) = e^{-x^2}g(x)
\end{aligned}$$

entonces el límite de la ecuación (2.11) existe y es igual a cero, puesto que $f \in C_0(\mathbb{R})$ y $\lim\limits_{|x|\to\infty} xe^{-x^2} = 0$.

En la definición de $D(A)$ se exige que $(P'^{+}(0)f)$ debe pertenecer a la imagen de $P(0)$. Para ello se necesita que $h(x) = xf(x)$ pertenezca a $C_0(\mathbb{R})$.

Sea $f \in C_0(\mathbb{R})$ tal que la función $xf(x) \in C_0(\mathbb{R})$. Debemos probar que $P'^{+}(0)f(x) = e^{-x^2}xf(x)$. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y consideremos $0 < h < 1$. Luego por el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|e^{-x^2}f(x)\frac{e^{hx}-1}{h}\right| &= \left|e^{-x^2}xf(x)\frac{e^{hx}-1}{hx}\right| \\
&= \left|e^{-x^2}xf(x)\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(hx)^i}{i!}\right| \\
&\leq \left|e^{-x^2}xf(x)\right|\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{|x|^i}{i!} \text{ pues } |h| < 1 \\
&\leq e^{-x^2}e^{|x|}\left|xf(x)\right| \\
&= e^{-x^2+|x|}\left|xf(x)\right|. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Como la función $e^{-x^2+|x|}$ tiende a cero si $|x| \to \infty$ y además $xf(x) \in C_0(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\lim_{|x|\to\infty} e^{-x^2+|x|}\, |xf(x)| = 0. \tag{2.13}$$

Así de (2.12), (2.13) y considerando $0 < h < 1$ se consigue

$$\lim_{|x|\to\infty} e^{-x^2} f(x) \frac{e^{hx}-1}{h} = 0. \tag{2.14}$$

Además como $f \in C_0(\mathbb{R})$ y la función xe^{-x^2} tiende a cero si $|x| \to \infty$, se sigue que

$$\lim_{|x|\to\infty} xe^{-x^2} f(x) = 0. \tag{2.15}$$

Por las convergencias (2.14) y (2.15), consideremos $S\epsilon > 0$, tal que si $|x| > S\epsilon$ y $0 < h < 1$ entonces,

$$\sup_{|x|>S_\epsilon} \left| e^{-x^2} f(x) \left\{ \frac{e^{hx}-1}{h} \right\} - e^{-x^2} xf(x) \right| < \epsilon. \tag{2.16}$$

Consideremos ahora el caso en que $|x| \leq S\epsilon$. Por la definición de la norma $\| \|_0$ de $C_0(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\sup_{|x|\leq S_\epsilon} |f(x)| \leq \|f\|_0 .$$

Luego como $e^{-x^2} \leq 1$ y la desigualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{|x|\leq S_\epsilon} \left| e^{-x^2} f(x) \left\{ \frac{e^{hx}-1}{h} \right\} - e^{-x^2} xf(x) \right| &= \sup_{|x|\leq S_\epsilon} \left| e^{-x^2} f(x) \left\{ \frac{e^{hx}-1}{h} - x \right\} \right| \\ &\leq \sup_{|x|\leq S_\epsilon} |f(x)| \left| \frac{e^{hx}-1}{h} - x \right| \\ &\leq \|f\|_0 \sup_{|x|\leq S_\epsilon} \left| \frac{e^{hx}-1}{h} - x \right|. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Para la identidad en valor absoluto en (2.17) se tiene la integral definida

$$\begin{aligned} \int_0^x (e^{hv}-1)dv &= \left[\frac{e^{hv}}{h} - v \right]_0^x \\ &= \frac{e^{hx}}{h} - x - \frac{1}{h} = \frac{e^{hx}-1}{h} - x. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Sustituyendo (2.18) en (2.17) se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{|x|\le S_\epsilon}\left|e^{-x^2}f(x)\left\{\frac{e^{hx}-1}{h}\right\}-e^{-x^2}xf(x)\right| &\le \|f\|_0 \sup_{|x|\le S_\epsilon}\left|\int_0^x (e^{hv}-1)dv\right| \\ &\le \|f\|_0\, S_\epsilon \sup_{|v|\le S_\epsilon}\left|e^{hv}-1\right|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Sea $\tau = hv$, como $|v|\le S_\epsilon$ entonces $|\tau|\le hS_\epsilon$. Luego, reemplazando en (2.19) se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{|x|\le S_\epsilon}\left|e^{-x^2}f(x)\left\{\frac{e^{hx}-1}{h}\right\}-e^{-x^2}xf(x)\right| &\le \|f\|_0\, S_\epsilon \sup_{|v|\le S_\epsilon}\left|e^{hv}-1\right| \\ &\le \|f\|_0\, S_\epsilon \sup_{|\tau|\le hS_\epsilon}\left|e^{\tau}-1\right|. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si $h\to 0^+$ se tiene que $\sup\limits_{|\tau|\le hS_\epsilon}|e^\tau - 1|$ tiende a 0. Así de la desigualdad (2.20) , se obtiene

$$\sup_{|x|\le S_\epsilon}\left|e^{-x^2}f(x)\left\{\frac{e^{hx}-1}{h}\right\}-e^{-x^2}xf(x)\right| < \epsilon. \tag{2.21}$$

De las desigualdades (2.16) y (2.21) tenemos

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{-x^2}f(x)\left\{\frac{e^{hx}-1}{h}\right\}-e^{-x^2}xf(x)\right| < \epsilon.$$

Con lo que queda demostrada la afirmación. Por otro lado como $xf(x)\in C_0(\mathbb{R})$, la función $P'^{+}(0)f(x) = e^{-x^2}xf(x)$ es la imagen de $xf(x)$ vía el operador $P(0)$. Así $f\in D(A)$. Por otra parte, $P(0)^{-1}(e^{-x^2}xf(x)) = xf(x)$. Luego por definición de generador infinitesimal, tenemos

$$A(f)(x) = xf(x) \text{ y } D(A) = \{f\in C_0(\mathbb{R})\,/\,xf(x)\in C_0(\mathbb{R})\}.$$

2.2. Propiedades de los Pre-Semigrupos

En esta sección, mostramos algunas propiedades elementales de Pre-Semigrupos, las cuales serán empleadas a lo largo de este trabajo. Asimismo se enuncian teoremas de existencia y unicidad de soluciones para problemas de Cauchy abstractos que involucran esta clase de operadores.

Comenzaremos con este Teorema Fundamental.

Teorema 2.11. Sea $\{P(t)\}_{t\ge 0}$ un Pre-Semigrupo y $A : D(A)\to X$ su generador infinitesimal. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

i. Si $x\in D(A)$ entonces $P(t)x\in D(A)$ para todo $t\ge 0$.

ii. $AP(t)x = P(t)Ax$ para todo $x\in D(A)$ y $t\ge 0$.

iii. La aplicación $P(\cdot)x \in C^1([0,+\infty), X)$ para cada $x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt}P(t)x = AP(t)x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{P(t+h)x - P(t)x\right\}.$$

Para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$.

iv. Si $x \in D(A)$ entonces $\int_0^t P(s)xds \in D(A)$ y

$$A(\int_0^t P(s)xds) = (P(t) - P(0))x.$$

v. A es un operador cerrado y $P(0)X \subseteq \overline{D(A)}$.

Demostración.

i. Sean $x \in D(A)$, $t \geq 0$ y $h > 0$.

Veamos que existe el límite dado en (2.10) para el elemento $P(t)x$.

En efecto: Por la identidad dada en la Observación 2.3 y la linealidad de los operadores $P(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left\{P(h)(P(t)x) - P(0)P(t)x\right\} &= \frac{1}{h}\left\{P(t)(P(h)x) - P(t)P(0)x\right\}\\ &= \frac{1}{h}\left\{P(t)(P(h)x - P(0)x)\right\}. \qquad (2.22)\end{aligned}$$

Como el operador $P(t)$ es continuo y $x \in D(A)$, tomando el límite cuando $h \to 0^+$ en la ecuación (2.22) se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{P(h)(P(t)x) - P(0)P(t)x\right\} &= P(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{P(h)x - P(0)x\right\}\\ &= P(t)\left(P'^{+}(0)x\right). \qquad (2.23)\end{aligned}$$

Así por la ecuación (2.23) el límite

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{P(h)(P(t)x) - P(0)P(t)x\right\}.$$

existe. Lo cual garantiza la existencia de $P'^{+}(0)(P(t)x)$.

Como la familia de operadores $P(s)$ es conmutativa y por la Definición 2.7 se sigue que

$$\begin{aligned}P'^{+}(0)(P(t)x) &= P(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{P(h) - P(0)x\right\}\\ &= P(t)\left\{P(0)Ax\right\}\\ &= P(0)\underbrace{P(t)Ax}_{\in X}.\end{aligned}$$

Luego $P'^{+}(0)(P(t)x) \in P(0)X$. Por lo tanto $P(t)x \in D(A)$.

ii. Sea $x \in D(A)$. Por el inciso (i) se tiene que,

$P'^{+}(0)(P(t)x) = P(0)P(t)Ax$ y $P(t)x \in D(A)$. Luego por la Definición 2.7 se tiene que

$$
\begin{aligned}
A\left(P(t)x\right) &= P(0)^{-1}\left(P'^{+}(0)(P(t)x)\right) \\
&= \underbrace{P(0)^{-1}P(0)}_{I}P(t)Ax \\
&= P(t)Ax.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
A\left(P(t)x\right) = P(t)Ax.
$$

iii. Sea $x \in D(A)$ y $t, h \geq 0$. Por el Lema 2.2 (iii), la Observación 2.3 y la linealidad de $P(0)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}P(t)\left\{P(h)x - P(0)x\right\} &= \frac{1}{h}\left\{P(t)P(h)x - P(t)P(0)x\right\} \\
&= \frac{1}{h}\left\{P(0)P(t+h)x - P(0)P(t)x\right\} \\
&= \frac{1}{h}P(0)\left\{P(t+h)x - P(t)x\right\}. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Si $h \to 0^{+}$ en la ecuación (2.24) y considerando que $P(t) \in B(X)$ para cada $t \geq 0$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left(P(0)P(\cdot)x\right)'^{+}(t) &= \lim_{h\to 0^{+}} \frac{1}{h}\left\{P(0)P(t+h)x - P(0)P(t)x\right\} \\
&= \lim_{h\to 0^{+}} \frac{1}{h}\left\{P(t)P(h)x - P(t)P(0)x\right\} \\
&= \lim_{h\to 0^{+}} P(t)\left\{\frac{1}{h}\left(P(h)x - P(0)x\right)\right\} \\
&= P(t)P(0)Ax = P(0)P(t)Ax.
\end{aligned}
$$

Mostrando la existencia de la derivada lateral fuerte por la derecha de la aplicación $P(0)P(\cdot)x$ para cada $t > 0$.

Veamos que existe la derivada lateral fuerte por la izquierda de $P(0)P(\cdot)x$ en $t > 0$. En efecto, sean $h > 0$ y $x \in D(A)$.

Conseguimos la igualdad

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}\left\{\left(P(0)P(t)-P(0)P(t-h)\right)x\right\}-P(0)P(t)Ax\right\| \\
&\qquad = \|\frac{1}{h}\{P(t)P(h)x-P(t)P(h)x-P(t-h)P(h)x+P(t-h)P(h)x \qquad (2.25)\\
&\qquad\qquad +P(0)P(t)x-P(0)P(t-h)x\}-P(0)P(t)Ax\|.
\end{aligned}
$$

Por la linealidad de los operadores $P(\cdot)$, de (2.25) y la desigualdad triangular en X, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}\left\{\left(P(0)P(t)-P(0)P(t-h)\right)x\right\}-P(0)P(t)Ax\right\| \\
&\qquad = \|\frac{1}{h}\left\{P(t)-P(t-h)\right\}P(h)x-P(0)P(t)Ax+\frac{1}{h}\{P(t-h)P(h)x \\
&\qquad\qquad -P(t)P(h)x-P(t-h)P(0)x+P(t)P(0)x\}\| \qquad (2.26)\\
&\qquad \leq \|\frac{1}{h}\left\{P(t)-P(t-h)\right\}P(h)x-P(0)P(t)Ax\| \\
&\qquad\qquad +\|\left(P(t-h)-P(t)\right)\frac{1}{h}\{P(h)x-P(0)\}x\|.
\end{aligned}
$$

Introduciendo el termino $\left\{P(t-h)-P(t)\right\}P(0)Ax$ en el segundo término de la desigualdad (2.26) se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}\left\{\left(P(0)P(t)-P(0)P(t-h)\right)x\right\}-P(0)P(t)Ax\right\| \\
&\qquad \leq \|\frac{1}{h}\left\{P(t)-P(t-h)\right\}P(h)x-P(0)P(t)Ax\| \qquad (2.27)\\
&\qquad\qquad +\|\left(P(t-h)-P(t)\right)\{\frac{1}{h}(P(h)x-P(0)x)\} \\
&\qquad\qquad -P(0)Ax+P(t-h)P(0)Ax-P(t)P(0)Ax\|.
\end{aligned}
$$

De la desigualdad (2.27) conseguimos la estimativa

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}\left\{\left(P(0)P(t)-P(0)P(t-h)\right)x\right\}-P(0)P(t)Ax\right\| \\
&\qquad \leq \|\frac{1}{h}\left\{P(t)-P(t-h)\right\}P(h)x-P(0)P(t)Ax\| \qquad (2.28)\\
&\qquad\quad +\|\left(P(t-h)-P(t)\right)\{\frac{1}{h}(P(h)x-P(0)x)-P(0)Ax\}\| \qquad (2.29)\\
&\qquad\quad +\|P(t-h)P(0)Ax-P(t)P(0)Ax\|. \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

Veamos las convergencias de (2.28), (2.29) y (2.30) cuando $h \to 0^+$

Por el Lema 2.2 (iii) se obtiene de (2.28)

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{h} \left\{ P(t) - P(t-h) \right\} P(h)x - P(0)P(t)Ax \right\| \\
&\qquad = \left\| \frac{1}{h} \left\{ P(t)P(h) - P(t-h)P(h) \right\} x - P(0)P(t)Ax \right\| \qquad (2.31) \\
&\qquad = \left\| \frac{1}{h} \left\{ P(0)P(t+h) - P(0)P(t) \right\} x - P(0)P(t)Ax \right\|.
\end{aligned}
$$

Como la aplicación $P(0)P(t)Ax$ es la derivada fuerte por derecha de la aplicación $P(0)P(\cdot)$ en $t = 0$ tomando límite cuando $h \to 0^+$ en (2.31), tenemos

$$
\lim_{h \to 0^+} \left\| \frac{1}{h} \left(P(0)P(t+h)x - P(0)P(t)x \right) - P(0)P(t)x \right\| = 0. \qquad (2.32)
$$

Por el Lema 2.4, existe $M > 0$ tales que $\|P(s)\| \leq M$ para todo $s \in [t-h, t]$.

Luego, de la ecuación (2.29), de la Definición 2.1, la afirmación anterior conseguimos

$$
\begin{aligned}
&\left\| (P(t-h) - P(t)) \left\{ \frac{1}{h}(P(t)x - P(0)x) - P(0)Ax \right\} \right\| \\
&\qquad \leq \|P(t-h) - P(t)\| \left\| \frac{1}{h}(P(t)x - P(0)x) - P(0)Ax \right\| \\
&\qquad \leq (\|P(t-h)\| + \|P(t)\|) \left\| \frac{1}{h}(P(t)x - P(0)x) - P(0)Ax \right\| \qquad (2.33) \\
&\qquad \leq 2M \left\| \frac{1}{h}(P(t)x - P(0)x) - P(0)Ax \right\|.
\end{aligned}
$$

Tomando límite cuando $h \to 0^+$ en la desigualdad (2.33) y considerando que $x \in D(A)$, obtenemos

$$
\lim_{h \to 0^+} \left\| \frac{1}{h} \left\{ P(t)x - P(0)x \right\} - P(0)Ax \right\| = 0. \qquad (2.34)
$$

Como $P(0)Ax \in X$, la aplicación $P(\cdot)P(0)Ax$ es continua en t . Luego de (2.30) tenemos

$$
\lim_{h \to 0^+} \left\| \frac{1}{h} \left\{ P(t-h)P(0)Ax - P(t)P(0)Ax \right\} - P(0)Ax \right\| = 0. \qquad (2.35)
$$

Así, de (2.28), (2.29), (2.30) y las convergencias (2.32), (2.34) y (2.35) logramos que

$$
\lim_{h \to 0^+} \left\| \frac{1}{h} \left\{ P(0)P(t) - P(0)P(t-h) \right\} x - P(0)P(t)Ax \right\| = 0.
$$

Luego, $P(0)P(\cdot)x$ es una aplicación diferenciable para todo $t > 0$ y $x \in D(A)$. Además

$$
\left(P(0)P(\cdot)x \right)'(t) = \lim_{h \to 0^+} P(0)P(t+h)x - P(0)P(t)x = P(0)P(t)Ax.
$$

Como la aplicación $P(0)$ es continua y $P(\cdot)$ es fuertemente continuo, se sigue que la aplicación

$P(0)P(t)Ax$ es continua en t para cada $x \in D(A)$ (fijo, pero arbitrario). Así la aplicación $P(0)P(\cdot)x$ es continuamente diferenciable, luego por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos.

$$\begin{aligned}\int_t^{t+h} \frac{d}{ds}\left\{P(0)P(s)x\right\} ds &= \int_t^{t+h} P(0)P(s)Axds \\ &= P(0)P(t+h)x - P(0)P(t)x. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Desde que $P(0) \in B(X)$ por la Proposición 1.14 (d), tenemos de (2.36)

$$\int_t^{t+h} P(0)P(s)Axds = P(0)\int_t^{t+h} P(s)Axds. \tag{2.37}$$

De (2.37) y (2.36) conseguimos

$$P(0)\int_t^{t+h} P(s)Axds = P(0)\left\{P(t+h)x - P(t)x\right\}.$$

Luego por la inyectividad del operador $P(0)$ obtenemos

$$\int_t^{t+h} P(s)Axds = P(t+h)x - P(t)x. \tag{2.38}$$

Dividiendo por $h > 0$ en la ecuación (2.38) y por la continuidad del operador integral, tenemos

$$\begin{aligned} P(t)Ax &= \lim_{h\to 0^+} \int_t^{t+h} P(s)Axds \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{P(t+h) - P(t)\right\} x \\ &= (P(\cdot)x)'(t). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Haciendo $t = 0$ en (2.38) obtenemos

$$\int_0^h P(s)Axds = P(h)x - P(0)x$$

Dividiendo la ecuación anterior por $h > 0$ y tomando el límite cuando $h \to 0^+$, conseguimos

$$\begin{aligned} P'^{+}(0)x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h P(s)Axds \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{P(h) - P(0)\right\} x \\ &= P(0)Ax. \end{aligned}$$

Por la continuidad fuerte del operador $P(t)$, tenemos que $P(\cdot)Ax$ es continua en $[0,+\infty)$. Así se consigue que $P(\cdot)x \in C^1([0,+\infty),X)$ para cada $x \in D(A)$. Luego por el inciso (ii) del presente Teorema y la identidad (2.39) se tiene que

$$AP(t)x = P(t)Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{P(t+h)x - P(t)x\right\}.$$

iv. Consideremos $x \in X$ y $t > 0$ (fijo pero arbitrario). Considerando el hecho que $P(\cdot) \in B(X)$, la Proposición 1.14 (d) y el Lema 2.2 (iii) , se tiene que la derivada fuerte por la derecha en 0 de la aplicación $P(\cdot)\left(\int_0^t P(s)xds\right)$ viene dada por

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(P(h)-P(0)\right)\int_0^t P(s)xds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t \left(P(h)-P(0)\right)P(s)xds\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t \left(P(h)P(s)-P(0)P(s)\right)xds\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t P(0)P(h+s)x - P(0)P(s)xds. \quad (2.40)\end{aligned}$$

Desde que $P(0) \in B(X)$ y por la linealidad de la integral, tenemos de (2.40)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(P(h)-P(0)\right)\int_0^t P(s)xds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}P(0)\left\{\int_0^t P(h+s)xds - \int_0^t P(s)xds\right\}\\ &= P(0)\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{\int_0^t P(h+s)xds - \int_0^t P(s)xds\right\}. \quad (2.41)\end{aligned}$$

En la primera integral del segundo miembro de (2.41), hacemos el cambio de variable $u = h+s$, con lo cual conseguimos

$$\begin{aligned}&P(0)\left(\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{\int_0^t P(h+s)xds - \int_0^t P(s)xds\right\}\right)\\ &\qquad = P(0)\left(\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{\int_h^{t+h} P(u)xdu - \int_0^t P(s)xds\right\}\right). \quad (2.42)\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.14 (b) tenemos

$$\int_0^{t+h} P(u)xdu = \int_h^{t+h} P(u)xdu + \int_0^h P(u)xdu = \int_t^{t+h} P(u)xdu + \int_0^t P(u)xdu.$$

Así conseguimos

$$\int_h^{t+h} P(u)xdu - \int_0^t P(u)xdu = \int_t^{t+h} P(u)xdu - \int_0^h P(u)xdu.$$

Como la aplicación $P(\cdot)x$ pertenece a la clase $C^1\left([0,+\infty),X\right)$, haciendo uso de la identidad anterior, la linealidad del límite y la continuidad del operador $P(0)$, tenemos de (2.42).

$$\begin{aligned} P(0)&\left(\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h}P(u)xdu-\int_0^h P(s)xds\right\}\right)\\ &=P(0)\left(\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}P(u)xdu-\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h P(s)xds\right)\\ &=P(0)\left(P(t)x-P(0)x\right). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Luego de (2.40), (2.42) y (2.43), logramos

$$\begin{aligned} P'(\cdot)\int_0^t P(s)xds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(P(h)-P(0)\right)\int_0^t P(s)xds\\ &= P(0)\left(P(t)x-P(0)x\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $P'(\cdot)\int_0^t P(s)xds \in P(0)X$. Por la definición del operador A y del dominio $D(A)$ se sigue que $\int_0^t P(s)xds \in D(A)$ y

$$A\left(\int_0^t P(s)xds\right)=\left(P(t)-P(0)\right)x.$$

v. Como $\frac{d}{dt}P(t)x = AP(t)x$ y la aplicación $P(t)x$ pertenece a $C^1\left([0,+\infty),X\right)$ se tiene que

$$\int_t^{t+h}P(s)Axds = P(t+h)x-P(t)x.$$

Haciendo $t=0$ en la identidad anterior, tenemos

$$\int_0^h P(s)Axds = P(h)x-P(0)x. \tag{2.44}$$

Veamos que el operador A es cerrado. En efecto

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ tales que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$. Como $P(t)\in B(X)$ para todo $t\geq 0$ y de la igualdad (2.44), tenemos las identidades

$$\begin{aligned} \left(P(h)-P(0)\right)x &= \lim_{n\to\infty}\left(P(h)-P(0)\right)x_n\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^h P(s)Ax_n ds. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Por el Lema 2.4, existe $M>0$ tal que $\|P(s)\|\leq M$ para todo $s\in[0,h]$. Así por la convergencia de la sucesión Ax_n y la afirmación anterior, la aplicación $P(\cdot)Ax_n$ es uniformemente continua, con lo cual podemos intercambiar el límite con la integral en la ecuación (2.45), es decir

$$
\begin{aligned}
(P(h) - P(0))\,x &= \int_0^h \lim_{n\to\infty} P(s)Ax_n ds \\
&= \int_0^h P(s)yds.
\end{aligned}
$$

Dividiendo por $h > 0$ la ecuación anterior, logramos

$$
\frac{1}{h}\,(P(h) - P(0))\,x = \frac{1}{h}\int_0^h P(s)yds. \tag{2.46}
$$

Por la continuidad de la aplicación $P(\cdot)y$ y haciendo $h \to 0^+$, se sigue de (2.46)

$$
\begin{aligned}
P'^{+}(0)x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\,(P(h)x - P(0)x) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h P(s)yds \\
&= P(0)y.
\end{aligned}
$$

Luego $P'^{+}(0)x \in P(0)X$. Así $x \in D(A)$ y por definición del operador A se sigue que $Ax = y$. Por lo tanto A es un operador cerrado.

Veamos que $P(0)X \subseteq \overline{D(A)}$. En efecto, sea $x \in X$. Por el inciso (iv), la linealidad del operador $P(\cdot)$ y de la integral, tenemos para el elemento $\frac{x}{t} \in X$

$$
\int_0^t P(s)\frac{x}{t}ds = \frac{1}{t}\int_0^t P(s)xds.
$$

el cual pertenece a $D(A)$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, conseguimos

$$
\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t P(s)yds = P(0)x.
$$

Así $P(0)x$ es el límite de una sucesión de elementos en $D(A)$. Por lo tanto $P(0)X \subseteq \overline{D(A)}$.

□

Observación 2.12. Del Teorema anterior podemos concluir lo siguiente:

a. La relación $P(0)X \subseteq \overline{D(A)}$ muestra una relación entre el rango del operador $P(0)$ y el dominio del operador $D(A)$.

b. Si el operador $P(0)$ es biyectivo, entonces $P(0)X = X$, así tenemos $X = \overline{D(A)}$. Por lo tanto $D(A)$ resulta denso en X. La misma conclusión es obtenida bajo la hipótesis de densidad sobre el conjunto $P(0)X$.

c. Por el inciso (i) del teorema anterior se sigue que el conjunto $D(A)$ es invariante bajo $P(t)$ para cada $t \geq 0$. Además por (ii) tenemos que el operador A conmuta con el operador $P(t)$ para cada $t \geq 0$.

d. El resultado más interesante del Teorema 2.11 es el de la diferenciabilidad de la aplicación $P(t)x$ para cada $x \in D(A)$.

e. Los resultados dados en este teorema, generalizan los establecidos para el caso de los C_0 - Semigrupos, dados en el Teorema 1.34.

Teorema 2.13. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales acotados, con generador infinitesimal $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ y $G \in B(X)$ un operador inyectivo tal que $GP(t) = P(t)G$ para todo $t \geq 0$. Si $W(t) = GP(t)$ para cada $t \geq 0$, entonces:

i. $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo de operadores lineales.

ii. Si A_W es el generador de $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ entonces $D(A) \subseteq D(A_W)$.

Demostración.

i. Veamos que $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo. En efecto,

- $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo en X . Sea $x \in X$. Por la definición de $W(t)$ y como $G \in B(X)$ tenemos,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \|W(t+h)x - W(t)x\| &= \lim_{h\to 0^+} \|GP(t+h)x - GP(t)x\| \\ &\leq \lim_{h\to 0^+} \|G\| \, \|P(t+h)x - P(t)x\| \\ &\leq \|G\| \lim_{h\to 0^+} \|P(t+h)x - P(t)x\| \, . \end{aligned} \tag{2.47}$$

  Como $P(t)$ es Pre-Semigrupo se tiene que

$$\lim_{h\to 0^+} \|P(t+h)x - P(t)x\| = 0. \tag{2.48}$$

  De (2.47) y (2.48) logramos

$$\lim_{h\to 0^+} \|W(t+h)x - W(t)x\| = 0.$$

  Así, $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo.

- Por la inyectividad de los operadores G y $P(0)$, la composición $W(0) = GP(0)$ es inyectiva. Por lo tanto $W(0)$ es un operador inyectivo.

- Por el Lema 2.2, bastará probar que $W(0)W(s+t) = W(s)W(t)$ para todo $s,t \geq 0$. En efecto, por la conmutatividad de los operadores G y $P(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} W(0)W(s+t) &= GP(0)GP(s+t) \\ &= GGP(0)P(s+t) \\ &= GGP(s)P(t) \\ &= GP(s)GP(t) \\ &= W(s)W(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo de operadores lineales.

ii. Si $x \in D(A)$ entonces por la Definición 2.6 tenemos

$$\lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{1}{h}\{P(h)x - P(0)x\} - P'^{+}(0)x \right\| = 0. \tag{2.49}$$

Desde que $G \in B(X)$ tenemos la siguiente estimativa

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h}\{W(h)x - W(0)x\} - GP'^{+}(0)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h}\{GP(h)x - GP(0)x\} - GP'^{+}(0)x \right\| \\ &\leq \|G\| \left\| \frac{1}{h}\{P(h)x - P(0)x\} - P'^{+}(0)x \right\|. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Como $\|G\| < \infty$ de (2.49) y la desigualdad (2.50), obtenemos

$$\lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{1}{h}\{W(h)x - W(0)x\} - GP'^{+}(0)x \right\| = 0.$$

Por lo tanto $x \in D(A_W)$. Así $D(A) \subseteq D(A_W)$

$\square$

Como el operador $P(0)$ es inyectivo, es biyectivo sobre su imagen $P(0)X$. Así existe el operador

$$P(0)^{-1} : P(0)X \longrightarrow X$$

Con esta definición, tenemos los siguientes resultados.

Lema 2.14. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores. Si $x \in P(0)X$ entonces

$$P(t)P(0)^{-1}x = P(0)^{-1}P(t)x,$$

para todo $t \geq 0$.

Prueba. Sea $x \in P(0)X$, así existe $y \in X$ tal que $x = P(0)y$, luego $y = P(0)^{-1}x$. Considerando $t \geq 0$ fijo pero arbitrario, por la conmutatividad de los operadores $P(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} P(0)P(t)y &= P(t)P(0)y \\ &= P(t)x. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Por la inyectividad del operador $P(0)$, de (2.51) logramos

$$P(t)y = P(0)^{-1}P(t)x.$$

De donde obtenemos por la definición de y

$$P(t)P(0)^{-1}x = P(0)^{-1}P(t)x.$$

Con lo cual concluye la prueba.

□

Lema 2.15. Sean $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ su generador infinitesimal. Se cumple que $P(0)\,(D(A)) \subseteq D(A)$.

Prueba.

Sea $x \in P(0)\,(D(A))$, entonces existe $y \in D(A)$ tal que $x = P(0)y$. Por el Teorema 2.11 (i) (para $t = 0$) $P(0)y \in D(A)$. Así $x \in D(A)$. Por lo tanto se tiene el resultado.

□

Lema 2.16. Sean $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ su generador infinitesimal. Se verifica

$$P(t)AP(0)^{-1}x = AP(0)^{-1}P(t)x.$$

Para todo $t \geq 0$ y $x \in P(0)\,(D(A))$

Prueba.

Sean $x \in P(0)\,(D(A))$ y $t \geq 0$. Luego existe $y \in D(A)$ tal que $x = P(0)y$. Como $D(A) \subseteq X$ se sigue que $P(0)\,(D(A)) \subseteq P(0)X$. Por el Lema 2.14 y la inclusión anterior tenemos

$$P(t)P(0)^{-1}x = P(0)^{-1}P(t)x. \tag{2.52}$$

Por la definición de x tenemos $y = P(0)^{-1}x$. Del Teorema 2.11 (ii) y la identidad (2.52) se tiene que

$$\begin{aligned} P(t)AP(0)^{-1}x &= P(t)Ay \\ &= AP(t)y \\ &= AP(t)P(0)^{-1}x \\ &= AP(0)^{-1}P(t)x. \end{aligned}$$

Con lo cual se demuestra el resultado.

$\square$

Lema 2.17. Sean $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ su generador infinitesimal. Si $x \in D(A)$ y $t \geq 0$, entonces

$$P(t)x = P(0)x + \int_0^t P(s)Axds.$$

Prueba.

Sea $t \geq 0$ y $x \in D(A)$. Por el Teorema 2.11 incisos (i) y (ii) se tiene que $P(t)x \in D(A)$ y

$$P(t)Ax = AP(t)x.$$

Además, por el inciso (iii) del Teorema 2.11, tenemos que

$$\frac{d}{ds}\{P(0)P(s)x\} = P(0)P(s)Ax. \tag{2.53}$$

Integrando de 0 a t la identidad (2.53) obtenemos

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\{P(0)P(s)x\}\,ds = \int_0^t P(0)P(s)Axds. \tag{2.54}$$

Por otra parte, como $P(0)P(s)x$ pertenece a $C^1([0,+\infty), X)$, del Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds}\{P(0)P(s)x\}\,ds &= P(0)P(t)x - P(0)P(0)x \\ &= P(0)\left(P(t)x - P(0)x\right). \end{aligned} \tag{2.55}$$

De las identidades (2.54), (2.55), y por la Proposición 1.14 (d) ($P(0) \in B(X)$), conseguimos

$$\begin{aligned} P(0)\left(P(t)x - P(0)x\right) &= \int_0^t P(0)P(s)Axds \\ &= P(0)\int_0^t P(s)Axds. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Como $P(0)$ es inyectiva, de (2.56), concluimos

$$P(t)x = P(0)x + \int_0^t P(s)Axds.$$

□

Los siguientes resultados serán utilizados para demostrar la unicidad del Pre-Semigrupo para un determinado generador infinitesimal y los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para problemas de Cauchy abstractos, que involucran a esta clase de operadores.

Lema 2.18. Sean $(X, \| \|)$ un espacio de Banach y V un subespacio vectorial de X. Consideremos $w(\cdot) : [a,b] \longrightarrow B(X)$ una aplicación fuertemente continua tal que la aplicación $w(\cdot)x \in C^1([a,b],X)$, para cada $x \in V$. Si $v : [a,b] \longrightarrow V$ es una aplicación del espacio $C^1([a,b],X)$, entonces

$$(w(.)v(.))'(t) = w(t)v'(t) + w'(t)v(t),$$

donde $w'(t)x = (w(\cdot)x)'(t)$.

Prueba. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto g(s) = w(s)v(s) \end{aligned}$$

Calculando la derivada fuerte de g en el punto $s \in (a,b)$, tenemos

$$\begin{aligned} g'(s) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{w(s+h)v(s+h) - w(s)v(s)\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{w(s+h)v(s+h) - w(s+h)v(s) + w(s+h)v(s) - w(s)v(s)\} \\ &= \lim_{h\to 0} w(s+h)\left\{\frac{1}{h}(v(s+h)-v(s))\right\} + \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}(w(s+h)-w(s))\right\}v(s) \\ &= \lim_{h\to 0} w(s+h)\left\{\frac{1}{h}(v(s+h)-v(s)) - v'(s)\right\} + \lim_{h\to 0} w(s+h)v'(s) \\ &\quad + \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}(w(s+h)-w(s))\right\}v(s). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Veamos las convergencias de cada límite de la ecuación (2.57).

Sea I un intervalo compacto en $[a,b]$ que contiene a s. Como la aplicación $w(\cdot)$ es fuertemente continua, por el Lema 2.4, existe $S > 0$ tal que $\|w(s+h)\| \leq S$ para todo $h \in I$. Para el primer límite, por la acotación anterior tenemos

$$\left\| w(s+h)\left\{ \frac{1}{h}\left(v(s+h)-v(s)\right) - v'(s)\right\} \right\| \leq \|w(s+h)\| \left\| \frac{1}{h}\left(v(s+h)-v(s)\right) - v'(s)\right\|$$
$$\leq S \left\| \frac{1}{h}\left(v(s+h)-v(s)\right) - v'(s)\right\|. \quad (2.58)$$

Por hipótesis $v(\cdot) \in C^1([a,b], X)$, luego por definición obtenemos

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h}\left(v(s+h)-v(s)\right) - v'(s)\right\| = 0. \quad (2.59)$$

Luego, de (2.59) y (2.58) logramos

$$\lim_{h\to 0} w(s+h)\left\{ \frac{1}{h}\left(v(s+h)-v(s)\right) - v'(s)\right\} = 0. \quad (2.60)$$

Desde que $v'(s) \in X$ y la aplicación $w(\cdot)$ es fuertemente continua, tenemos

$$\lim_{h\to 0} w(s+h)v'(s) - w(s)v'(s) = 0.$$

Es decir

$$\lim_{h\to 0} w(s+h)v'(s) = w(s)v'(s). \quad (2.61)$$

Por otro lado, como $v(s) \in V$ y $w(\cdot)x \in C^1([a,b], X)$ para todo $x \in V$, logramos

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{ \left(w(s+h) - w(s)\right) v(s)\right\} = w'(s)v(s). \quad (2.62)$$

Por lo tanto de las convergencias (2.60), (2.61), (2.62) y la desigualdad (2.57) conseguimos

$$\begin{aligned} g'(s) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{ w(s+h)v(s+h) - w(s)v(s)\right\} \\ &= w(s)v'(s) + w'(s)v(s). \end{aligned}$$

Si $s = a$ ó $s = b$ bastará considerar los límites cuando $h \to 0^+$ y $h \to 0^-$, respectivamente.

□

Observación. En el lema anterior la aplicación $w'(t)v(t)$ no indica composición de las aplicaciones $w'(t)$ y $v(t)$.

El Lema 2.18, será usado en el siguiente resultado.

Lema 2.19. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ su generador infinitesimal. Si $v : [0, +\infty) \longrightarrow D(A)$ es una aplicación que satisface:

a. $v \in C^1([0,+\infty), X)$.

b. $v' = Av$, es decir $v'(t) = Av(t)$ para todo $t \geq 0$.

c. Si $c \in D(A)$ entonces $v(0) = P(0)c$.

Entonces $P(\cdot)c = v(\cdot)$.

Prueba. Sea $t \geq 0$ y $x \in D(A)$. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} h_{t,x} : [0,t] &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto h_{t,x}(s) = P(t-s)x \end{aligned}$$

Como $P(.)x \in C^1([0,t], X)$ para cada $x \in D(A)$, tenemos que $h_{t,x} \in C^1([0,t], X)$.

Considerando $w(\cdot) = P(t-\cdot)$ y $V = D(A)$, obtenemos gracias al Lema 2.18, que la aplicación f_t definida por

$$\begin{aligned} f_t : [0,t] &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto f_t(s) = P(t-s)v(s) \end{aligned}$$

pertenece al espacio $C^1([0,t], X)$ y

$$\begin{aligned} f_t'(s) &= (P(t-\cdot)v(\cdot))'(s) \\ &= P(t-s)v'(s) + P'(t-s)v(s). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Por el Teorema 2.11 (iii) tenemos

$$P'(s)x = AP(s)x \tag{2.64}$$

y

$$P'(t-s)x = -AP(t-s)x. \tag{2.65}$$

Por hipótesis (inciso (b)) $v'(t) = Av(t)$. Así de las identidades (2.63), (2.64), (2.65) y del Teorema 2.11 (ii) conseguimos

$$\begin{aligned} f_t'(s) &= P(t-s)Av(s) - AP(t-s)v(s) \\ &= AP(t-s)v(s) - AP(t-s)v(s) = 0 \end{aligned}$$

Luego $f_t'(s) = 0$ para cada $s \in [0, t]$. De la Observación 1.10 tenemos que f_t' es constante, por lo cual $f_t(0) = f_t(t)$, es decir

$$\begin{aligned} P(0)v(t) &= f_t(t) \\ &= f_t(0) \\ &= P(t)v(0). \end{aligned}$$

Como $v(0) = P(0)c$, de la identidad anterior tenemos

$$P(0)v(t) = P(t)P(0)c.$$

Luego, por la conmutatividad de los operadores $P(t)$ y $P(0)$ y la inyectividad de este ultimo, logramos

$$P(t)c = v(t).$$

Como t fue tomado arbitrario, concluimos que

$$P(\cdot)c = v(\cdot).$$

$\square$

Gracias al Lema 2.19, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 2.20. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ dos Pre-Semigrupos de operadores generados por el operador $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$. Si $P(0) = W(0)$ entonces

$$P(t)x = W(t)x,$$

para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$.

Demostración. Sea $c \in D(A)$. Consideremos $v(\cdot) = W(\cdot)c$.

Como la aplicación v satisface las hipótesis (a), (b) del Lema 2.19 y como $P(0) = W(0)$ se cumple

$$\begin{aligned} v(0) &= W(0)c \\ &= P(0)c. \end{aligned}$$

Así como consecuencia del Lema 2.19, tenemos

$$
\begin{aligned}
W(\cdot)c &= v(\cdot) \\
&= P(\cdot)c,
\end{aligned}
$$

para cada $c \in D(A)$. Por lo tanto

$$P(t)x = W(t)x.$$

para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$; con lo que se demuestra el teorema.

$\square$

Observación 2.21. De los resultados anteriores, se tiene

- El generador infinitesimal, caracteriza al Pre-Semigrupo sobre su dominio (digamos $D(A)$).
- El operador lineal inyectivo $P(0)$ tiene una importancia fundamental en la unicidad del Pre-Semigrupo.
- Si el operador $P(0)$ fuese biyectivo, se sigue del Teorema 2.11 (v) que $\overline{D(A)} = X$. Luego por el Teorema 2.20 y la continuidad de los operadores $P(t)$ y $W(t)$ se tiene que $P(t)x = W(t)x$ para todo $x \in X$, es decir $P(t) = W(t)$ para todo $t \geq 0$, con lo cual se consigue la unicidad del Pre-Semigrupo. La misma conclusión es obtenida, si el rango del operador $P(0)$ es denso en X.
- Estas propiedades, generalizan las establecidas en la Sección 1.5 para el caso de C_0 - Semigrupos de Operadores Lineales.
- Por este motivo, el concepto de Pre-Semigrupo de operadores (o C - Semigrupo) es una generalización de la teoría de C_0 - Semigrupos.

Capítulo 3

Problema de Cauchy Abstracto

3.1. Problema de Cauchy asociado a un Pre-Semigrupo

En esta sección, estudiamos el Problema de Cauchy Abstracto (PCA), relacionado con un Pre-Semigrupo de operadores lineales. Estos resultados, generalizan los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para problemas de Cauchy abstractos relacionados con el generador infinitesimal de un C_0 - Semigrupo de Operadores lineales, establecidos en el Teorema 1.37.

Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo; por el Teorema 2.11 (iii) tenemos la identidad

$$P'(t) = AP(t),$$

para todo $t \geq 0$, donde A es el generador infinitesimal de $\{P(t)\}_{t\geq 0}$. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 3.1. Sean $(X, \| \|)$ un espacio de Banach, $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador y $c \in D(A)$. Consideremos el problema de valor inicial abstracto

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = Au \\ u(0) = c. \end{cases} \tag{3.1}$$

Decimos que la aplicación $u : [0, +\infty) \longrightarrow X$ es una solución del problema de Cauchy abstracto (3.1) si verifica:

a. $u(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$.

b. $u \in C^1\left([0, +\infty), X\right)$.

c. $\frac{d}{dt}u = Au$.

d. $u(0) = c$.

Donde $\frac{d}{dt}u$ denota la derivada fuerte de u y c es llamado el valor inicial.

Ejemplo 3.2. Consideremos el espacio $X = \mathbb{R}^n$

- Si $n = 1$, tenemos el problema

$$\begin{cases} u' = au \\ u(0) = c, \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. En este caso $A = a$ y la solución (única) de este problema esta dada por $u(t) = ce^{at}$.

- Si $n \geq 2$, consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = Au \\ u(0) = c, \end{cases}$$

donde $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,..,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

En este caso, la solución viene dada por $u(t) = ce^{tA}$, donde

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

Haciendo uso del Teorema 2.11, se puede probar la existencia y unicidad de la solución en términos de un Pre-Semigrupo de operadores, para un problema de Cauchy abstracto. Lo afirmado anteriormente esta resumido el siguiente teorema.

Teorema 3.3. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ su generador infinitesimal. Si $c \in D(A)$, entonces la aplicación $u(t) = P(t)c$, $t \geq 0$ es la solución única del problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = Au \\ u(0) = P(0)c. \end{cases} \tag{3.2}$$

Demostración.

Hacemos referencia a los resultados del Teorema 2.11.

Sea $c \in D(A)$, como $P(t)c \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ (inciso (i) del Teorema 2.11) tenemos que $u(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$. Por el inciso (ii) del mismo teorema, $P(t)c \in C^1([0, +\infty), X)$ es decir $u \in C^1([0, +\infty), X)$. Por el inciso (iii) del Teorema 2.11 se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u(t) &= \frac{d}{dt}\left(P(t)c\right) \\
&= AP(t)c \\
&= Au(t).
\end{aligned}
$$

Ademas $u(0) = P(0)c$. Luego se cumplen todas las condiciones dadas en la Definición 3.1. Por lo tanto $u(t)$ es solución del problema (3.1)

Veamos que la solución es única. En efecto sea $v : [0, +\infty) \longrightarrow D(A)$ otra solución del problema (3.1). Así por la Definición 3.1 v satisface las hipótesis (a), (b) y (c) del Lema 2.19, luego tenemos $v(t) = P(t)c = u(t)$, de donde $u = v$. Quedando demostrado el teorema.

□

Ejemplo 3.4. Consideremos el Pre-Semigrupo $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ del Ejemplo 2.5. En este caso $X = C_0(\mathbb{R})$ y el generador infinitesimal esta dado por

$$
\begin{aligned}
A : D(A) &\longrightarrow C_0(\mathbb{R}) \\
f &\longmapsto A(f)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

donde $D(A) = \{f \in C_0(\mathbb{R}) /$ la aplicacion $x \mapsto xf(x)$ pertenece a $C_0(\mathbb{R})\}$ y $A(f)$ esta definido como

$$
\begin{aligned}
A(f) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto A(f)(x) = xf(x).
\end{aligned}
$$

Consideremos el problema de Cauchy (3.2) asociado al operador dado en (3.3)

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}u(t,x) = xu(t,x) \\
u(0,x) = e^{-x^2}g(x),
\end{cases}
$$

donde $g \in D(A)$, $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

En el sentido de la Definición 2.1, la derivada $\frac{d}{dt}u(t,x)$ es interpretada como $\left(\frac{d}{dt}u(t,\cdot)\right)(x)$, de lo cual se tiene la derivada fuerte, en el espacio $C_0(\mathbb{R})$. Por tanto, si esta derivada fuerte existe, ella es equivalente a la derivada parcial (en el sentido puntual) $\frac{d}{dt}u(t,x)$. Así una solución fuerte es una solución del problema (3.2).

El operador $P(t)$ para este caso es $P(t)(f(x)) = e^{-x^2+tx}f(x)$ para cada $t \geq 0$ y $f \in D(A)$. Por el Teorema 3.3, la solución única del problema (3.2) viene dada por:

$$u(t,x) = e^{-x^2+tx} g(x),$$

y además $u(t,\cdot) \in C_0(\mathbb{R})$ para todo $t \geq 0$.

Como consecuencia del Teorema 3.3 logramos establecer la solución única del PCA (3.2) asociado al generador A de un Pre-Semigrupo de operadores $\{P(t)\}_{t\geq 0}$, además su valor inicial es elemento de la imagen de $D(A)$ vía el operador $P(0)$. Sin embargo, hacemos la siguiente interrogante. Si una aplicación $u(\cdot) = P(\cdot)c$ es una solución del problema (3.2) para un determinado operador $A : D(A) \longrightarrow X$ y $c \in D(A)$ ¿Bajo que condiciones, $P(.)$ será un Pre-Semigrupo de Operadores?. El siguiente teorema, muestra que bajo hipótesis adecuadas, se obtiene una respuesta a la cuestión planteada.

Teorema 3.5. Sea $A : D(A) \longrightarrow X$ un operador lineal cerrado y $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ una familia uniparamétrica de operadores lineales acotados. Supongamos que:

a. La familia $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continua.

b. $P(0)$ es un operador inyectivo.

c. El operador A conmuta con $P(s)$ para todo $s \geq 0$.

d. La aplicación $P(\cdot)c$ es solución del PCA (3.1) para cada $c \in D(A)$.

Si $D(A)$ es denso en X ó el conjunto resolvente $\rho(A)$ es no vacío, entonces $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo de Operadores Lineales generado por una extensión del operador A.

Demostración. En primer lugar, veamos que $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo de Operadores.

En efecto por los incisos (a) y (b) de la hipótesis, logramos la continuidad fuerte de la familia de operadores $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ y la inyectividad del operador $P(0)$. Solo bastará demostrar que $P(t-u)P(u)$ es independiente de u para cada $u \in [0,t]$. De la segunda parte de la hipótesis, se tienen dos casos:

Caso 1. $D(A)$ es denso en X

Sea $c \in D(A)$, definimos la aplicación $u \mapsto P(t-u)P(t)c$ para cada $u \in [0,t]$. En las hipótesis del Lema 2.18, considerando $w(\cdot) = P(t-\cdot)$, $v(\cdot) = P(\cdot)c$ y $V = D(A)$, tenemos que la derivada de la aplicación $P(t-\cdot)P(\cdot)c$ viene dada por

$$\frac{d}{du}P(t-u)P(u)c = P(t-u)\frac{d}{du}\left(P(u)c\right) + \frac{d}{du}\left(P(t-u)\right)P(u)c. \tag{3.4}$$

Como la aplicación $P(.)c$ es solución del problema (3.2) tenemos

$$\frac{d}{du}\left(P(u)c\right) = AP(u)c. \tag{3.5}$$

Desde que $\frac{d}{du}\left(P(t-u)x\right)(u) = -AP(t-u)x$ para cada $x \in D(A)$, tomando en particular $x = P(u)c$ puesto que $P(t)c \in D(A)$ dado a que $P(\cdot)c$ es solución del problema (3.2), conseguimos

$$\frac{d}{du}\left(P(t-u)\right)P(u)c = -AP(t-u)P(u)c. \tag{3.6}$$

Así de las identidades (3.5), (3.6), la igualdad (3.4) y la hipótesis (c) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}P(t-u)P(u)c &= P(t-u)AP(u)c - P(t-u)AP(u)c\\ &= 0.\end{aligned}$$

De la Observación 1.10, logramos

$$P(t-u)P(u)c = w, \tag{3.7}$$

para $0 \leq u \leq t$. Haciendo $u = 0$ en la ecuación (3.7), obtenemos $w = P(t)P(0)c$. Reemplazando el valor de w en (3.7), conseguimos

$$P(t-u)P(u)c = P(t)P(0)c, \tag{3.8}$$

para todo $c \in D(A)$. Por la densidad de $D(A)$ en X y la continuidad de los operadores $P(t-u)$ y $P(u)$ se obtiene

$$P(t-u)P(u)x = P(t)P(0)x,$$

para todo $x \in X$. Luego $P(t-u)P(u) = P(t)P(0)$. Por lo tanto $P(t-u)P(u)$ es independiente de u para $0 \leq u \leq t$.

Caso 2. El conjunto resolvente de A, $\rho(A) \neq \phi$.

Sea $\lambda \in \rho(A)$, por la Definición 1.18 existe el operador $R_{\lambda:A} = (\lambda I - A)^{-1}$ definido por

$$\begin{aligned}R_{\lambda:A} : X &\longrightarrow D(A)\\ x &\longmapsto R_{\lambda:A}x = y\end{aligned}$$

Como el operador $R_{\lambda:A}$ es inyectivo, es suficiente demostrar que

$$R_{\lambda:A}P(t-u)P(u)x = R_{\lambda:A}P(0)P(t)x, \tag{3.9}$$

para todo $x \in X$. En efecto, por la hipótesis (c) tenemos

$$P(\cdot)Ax = AP(\cdot)x,$$

para todo $x \in D(A)$. Por el Lema 1.20, desde que A es un operador cerrado, tenemos que $R_{\lambda:A}$ conmuta con $P(s)$ para todo $s \geq 0$, es decir

$$R_{\lambda:A}P(s)x = P(s)R_{\lambda:A}x, \tag{3.10}$$

para todo $x \in X$.

Como $R_{\lambda:A}x \in D(A)$ y de (3.7) tenemos que la aplicación $P(t-u)P(u)R_{\lambda:A}x$ es constante respecto a u. Luego de (3.10) y (3.9) y el hecho que $P(u)x$ pertenece a $D(A)$, tenemos

$$\begin{aligned} R_{\lambda:A}P(t-u)P(u)x &= P(t-u)R_{\lambda:A}P(u)x \\ &= P(t-u)P(u)R_{\lambda:A}x. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Haciendo $u = t$ en la segunda linea de (3.11) y nuevamente por (3.10) obtenemos

$$\begin{aligned} P(t-u)P(u)R_{\lambda:A}x &= P(0)P(t)R_{\lambda:A}x \\ &= R_{\lambda:A}P(0)P(t)x. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Así de (3.12) y (3.11) conseguimos (3.9).

Luego por la inyectividad del operador $R_{\lambda:A}$ y (3.9) tenemos

$$P(t-u)P(u)x = P(0)P(t)x,$$

para todo $x \in X$. Así $P(t-u)P(u) = P(0)P(t)$ para todo $u \in [0, t]$.

Por tanto de los Casos 1 y 2 tenemos la afirmación. En conclusión, por la Definición 2.1, $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo de operadores lineales.

Finalmente veamos que este Pre-Semigrupo, es generado por una extensión A_P de A. En efecto. Sea $A_P : D(A) \longrightarrow X$ el generador del Pre-Semigrupo $\{P(t)\}_{t\geq 0}$. Sea $x \in D(A)$. Como $P(\cdot)x$ es solución del PCA (3.1), tenemos por la Definición 3.1 que $P'^{+}(0)x$ existe y

$$\begin{aligned} P'^{+}(0) &= \frac{d}{dt}\left(P(\cdot)x\right)(0) \\ &= AP(0)x \\ &= P(0)Ax \in P(0)X. \end{aligned}$$

Luego, por la Definición 2.7 tenemos $x \in D(A_P)$. Así $D(A) \subseteq D(A_P)$. Por la definición del operador A_p y A, la hipótesis (d) y (c) tenemos

$$
\begin{aligned}
P(0)A_P x &= P'^{+}(0)x \\
&= \left(P(\cdot)x\right)'(0) \\
&= AP(0)x \\
&= P(0)Ax. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Por la identidad (3.13) y la inyectividad del operador $P(0)$ conseguimos

$$A_P x = Ax,$$

para todo $x \in D(A)$, lo que demuestra que A_P es una extensión de A.

□

3.2. Caracterización de soluciones para un Problema de Cauchy Abstracto

En la presente sección, caracterizamos la existencia de solución única para el problema (3.1), asociado a un operador cerrado $A : D(A) \longrightarrow X$, en relación a un Pre-Semigrupo de operadores lineales $\{P(t)\}_{t\geq 0}$.

Teorema 3.6. Sean $A : D(A) \longrightarrow X$ y $B : D(B) \longrightarrow X$ dos operadores lineales cerrados. Si se cumplen:

i. $D(B) \subseteq D(A)$.

ii. $0 \in \rho(B)$.

iii. Existe $0 < \lambda \in \rho(A)$ tal que $R_{\lambda:A}Bx = BR_{\lambda:A}x$ para todo $x \in D(B)$.

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. El problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = c, \end{cases}$$

tiene una única solución, para cada $c \in D(B)$.

b. Existe un Pre-Semigrupo $\{P(t)\}_{t\geq 0}$, generado por una extensión A_P de A tal que $P(0) = (\lambda I - A)B^{-1}$ y A conmuta con $P(s)$ para todo $s \geq 0$.

Demostración.

a.$\Longrightarrow$b. Como $0 \in \rho(B)$, existe el operador $R_{0:B} = (\lambda I - B)^{-1} \mid_{\lambda=0} = (-B)^{-1}$. Por tanto existe el operador inverso B^{-1} y por la Definición 1.18 tenemos $B^{-1} \in B(X)$.

Sea $u_c \in C^1([0,+\infty), X)$ la única solución del problema de Cauchy abstracto (3.1) para cada valor inicial $c \in D(B)$. Consideremos $x \in X$, por definición del operador inverso, se sigue que $B^{-1}x \in D(B)$. Así, para $c = B^{-1}x$ existe la solución $u_{B^{-1}x}(t)$, luego por la hipótesis (iii) el operador $(\lambda I - A)$ es inyectivo, así podemos definir la aplicación

$$P(t)x = (\lambda I - A)u_{B^{-1}x}(t). \tag{3.14}$$

Por linealidad respecto a la suma de operadores y como $u_{B^{-1}x}(t)$ es la solución de (3.1), así de (3.14) tenemos

$$\begin{aligned} P(t)x &= (\lambda I - A)u_{B^{-1}x}(t) \\ &= \lambda u_{B^{-1}x}(t) - Au_{B^{-1}x}(t) \\ &= \lambda u_{B^{-1}x}(t) - u'_{B^{-1}x}(t). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Así, por (3.15) $P(t)x$ está bien definida para cada $t \geq 0$ y $x \in X$.

Veamos que la familia $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo de operadores lineales. En efecto:

- $P(\cdot)$ es fuertemente continuo. Pues por hipótesis $u_{B^{-1}x}(\cdot) \in C^1([0,+\infty), X)$, tenemos para cada $x \in D(A)$

$$P(\cdot)x = \lambda u_{B^{-1}x}(\cdot) - u_{B^{-1}x}(\cdot). \tag{3.16}$$

  Así $P(\cdot)x$ es una diferencia de dos funciones en el espacio vectorial $C([0,+\infty), X)$, para cada $x \in X$. Por lo tanto, la aplicación $P(\cdot)$ es fuertemente continua.

- El operador $P(0)$ es inyectivo. En efecto, sea $x \in X$. Por la ecuación 3.15, para $t = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} P(0)x &= (\lambda I - A)\, u_{B^{-1}x}(0) \\ &= (\lambda I - A)\, B^{-1}x \text{ (pues } u_{B^{-1}x}(0) = B^{-1}x). \end{aligned} \tag{3.17}$$

  Como $\lambda \in \rho(A)$ y el operador B es inversible, entonces el operador $(\lambda I - A)\, B^{-1}$ es inyectivo. Luego de (3.17) se tiene que $P(0)$ es un operador inyectivo.

- $P(t) \in B(X)$ para todo $t \geq 0$. En efecto, como los operadores $(\lambda I - A)$ y B^{-1} pertenecen a $B(X)$, por el inciso anterior tenemos que $P(0) \in B(X)$. Veamos la linealidad del operador $P(t)$ para $t > 0$.

Como el operador B^{-1} es lineal, tenemos $B^{-1}(x+ky) = B^{-1}x + kB^{-1}y$, para todo $x, y \in X$ y $k \in \mathbb{C}$. Definimos

$$w(t) = u_{B^{-1}x}(t) + ku_{B^{-1}y}(t)$$

Evaluando $w(\cdot)$ en $t = 0$ y por la linealidad de B^{-1}, obtenemos

$$\begin{aligned} w(0) &= u_{B^{-1}x}(0) + ku_{B^{-1}y}(0) \\ &= B^{-1}x + kB^{-1}y \\ &= B^{-1}(x+ky). \end{aligned}$$

Así, $w(t)$ es solución del problema de Cauchy abstracto, con el valor inicial $B^{-1}(x+ky)$, es decir

$$w(t) = u_{B^{-1}(x+ky)}(t). \tag{3.18}$$

Para todo $t \geq 0$. Luego, por la definición del operador $P(t)$, de (3.18) y la linealidad del operador $\lambda I - A$ tenemos

$$\begin{aligned} P(t)(x+ky) &= (\lambda I - A)\, u_{B^{-1}(x+ky)}(t) \\ &= (\lambda I - A)\left(u_{B^{-1}x}(t) + ku_{B^{-1}y}(t)\right) \\ &= (\lambda I - A)\, u_{B^{-1}x}(t) + k\,(\lambda I - A)\, u_{B^{-1}y}(t) \\ &= P(t)x + kP(t)y. \end{aligned}$$

Mostrándose la linealidad del operador $P(t)$ para cada $t \geq 0$.

Consideremos $a \geq 0$ fijo pero arbitrario. Definimos el operador $w(\cdot)$ dado por

$$\begin{aligned} w(\cdot):\, X &\longrightarrow C^1([0,a], X) \\ x &\longmapsto w(.)x = u_{B^{-1}x}(\cdot) \end{aligned}$$

Donde el espacio de Banach $C^1([0.a], X)$ está equipado con la norma

$$\|u\|_{C^1([0,a],X)} = \sup_{t\in[0,a]} \left\{\|u(t)\| + \left\|u'(t)\right\|\right\}.$$

Observamos que el operador $w(\cdot)$ lleva cada punto x de X en la solución del problema de Cauchy (3.1) que pasa por el punto $B^{-1}x$. Además $D(w(\cdot)) = X$. Afirmamos que $w(\cdot)$ es un operador cerrado. En efecto;

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, tal que $x_n \longrightarrow x$ y $w(\cdot)x_n \longrightarrow y$ en el espacio $C^1([0.a], X)$. Por la definición del operador $w(\cdot)$, el hecho de $u_{B^{-1}x}(\cdot)$ es solución del problema de Cauchy (3.1) y la convergencia de $w(\cdot)x_n$ a y en la norma $\| \|_{C^1([0,a],X)}$, para $t \leq a$ tenemos

$$\begin{aligned} Aw(t)x_n &= Au_{B^{-1}x_n}(t) \\ &= u'_{B^{-1}x_n}(t) \\ &= (w(\cdot)x_n)'(t) \longrightarrow y'(t) \text{ si } n \to \infty, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$w(t)x_n \longrightarrow y(t) \text{ si } n \to \infty \tag{3.19}$$

y

$$Aw(t)x_n \longrightarrow y'(t) \text{ si } n \to \infty. \tag{3.20}$$

Como A es un operador cerrado, por las convergencias dadas en (3.19) y (3.20), obtenemos que $y(t) \in D(A)$ y $y'(t) = Ay(t)$.

Además, por la convergencia (3.19) , la definición del operador $w(\cdot)$, la igualdad $u_{B^{-1}x_n}(0) = B^{-1}x_n$ y la continuidad del operador B^{-1}, obtenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{n\to\infty} w(0)x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} u_{B^{-1}x_n}(0) \\ &= \lim_{n\to\infty} B^{-1}x_n \\ &= B^{-1}x. \end{aligned}$$

Por hipótesis, el problema de Cauchy abstracto (3.1) posee una única solución, para el valor inicial $B^{-1}x \in D(B)$. Así tenemos

$$\begin{aligned} y(\cdot) &= u_{B^{-1}x}(\cdot) \\ &= w(\cdot)x. \end{aligned}$$

Siendo esta igualdad valida para todo t en $[0, a]$. Así $y = w(\cdot)x$. Por lo tanto, $w(\cdot)$ es un operador cerrado, con lo cual probamos la afirmación.

Debido a la afirmación anterior, el hecho de que $D(w(\cdot)) = X$ y siendo $C^1([0.a], X)$ un espacio de Banach, gracias al Teorema del Gráfico Cerrado (Teorema 1.16) tenemos que $w(\cdot)$ es acotada en X, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$\|w(\cdot)x\|_{C^1([0.a],X)} \leq M\|x\|,$$

para todo $x \in X$.

Veamos a continuación que el operador $P(t)$ es acotado. En efecto;

Sea $x \in X$ y $t \leq a$. Como $\lambda > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|P(t)x\| &= \|(\lambda I - A)u_{B^{-1}x}(t)\| \\
&= \|(\lambda I - A)w(t)x\| \\
&= \|\lambda w(t)x - Aw(t)x\| \\
&\leq \|\lambda w(t)x\| + \|Aw(t)x\| \\
&\leq \|\lambda w(t)x\| + \left\|(w(\cdot)x)'(t)\right\| \\
&\leq \lambda\|w(t)x\| + \|w(t)x\| + \lambda\left\|(w(\cdot)x)'(t)\right\| + \left\|(w(\cdot)x)'(t)\right\| \\
&= (\lambda+1)\left\{\|w(t)x\| + \left\|(w(\cdot)x)'(t)\right\|\right\} \\
&= (\lambda+1)\|w(\cdot)x\|_{C^1([0.a],X)} \\
&\leq (\lambda+1)M\|x\|.
\end{aligned}$$

Mostrándose así la continuidad del operador $P(t)$ para $t \leq a$. Como a fue tomado fijo pero arbitrario, se sigue que $P(t)$ es acotada para todo $t \geq 0$. Por lo tanto $P(t) \in B(X)$ para todo $t \geq 0$.

- $AP(t)x = P(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$. En primer lugar como $\lambda \in \rho(A)$ tenemos la equivalencia

$$\begin{aligned}
&P(t)Ax = AP(t)x \text{ para todo } x \in D(A) \\
&\qquad \Longleftrightarrow \lambda P(t)x - P(t)Ax = \lambda P(t)x - AP(t)x \text{ para todo } x \in D(A) \\
&\qquad \Longleftrightarrow P(t)(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)P(t)x \text{ para todo } x \in D(A) \qquad (3.21) \\
&\qquad \Longleftrightarrow P(t)c = (\lambda I - A)P(t)R_{\lambda:A}c \\
&\qquad \Longleftrightarrow R_{\lambda:A}P(t)c = P(t)R_{\lambda:A}c \text{ para todo } c \in X.
\end{aligned}$$

Donde $c = (\lambda I - A)x$, el cual es equivalente a $x = R_{\lambda:A}c$ para cada $c \in X$, usando el hecho que los operadores $(\lambda I - A)$ y $R_{\lambda:A}$ son biyectivos.

Por la equivalencia (3.21), bastará demostrar que $R_{\lambda:A}P(t)c = P(t)R_{\lambda:A}c$ para todo $c \in X$. En efecto, sea $c \in X$. Definimos

$$y(\cdot) = R_{\lambda:A}u_{B^{-1}c}(\cdot).$$

Observamos que esta aplicación esta bien definida, puesto que $u_{B^{-1}c}(t) \in X$ para todo $t \geq 0$. Como el operador $R_{\lambda:A}$ es continuo, conmuta con A y siendo $u_{B^{-1}c}$ solución única del problema de Cauchy abstracto (3.1), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y(.) &= \frac{d}{dt}\left(R_{\lambda:A}u_{B^{-1}c}(\cdot)\right) \\
&= R_{\lambda:A}\frac{d}{dt}u_{B^{-1}c}(\cdot) \\
&= R_{\lambda:A}Au_{B^{-1}c}(\cdot) \\
&= AR_{\lambda:A}u_{B^{-1}c}(\cdot) \\
&= Ay(\cdot).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Por la hipótesis (iii) tenemos $BR_{\lambda:A}d = R_{\lambda:A}Bd$ para todo $d \in D(B)$. Por la biyectividad del operador B, dado $d \in D(B)$, existe un único $c \in X$ tales que $d = B^{-1}c$. De esta observación, tenemos la siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
BR_{\lambda:A}d = R_{\lambda:A}Bd \text{ para todo } d \in D(B)& \\
\Longleftrightarrow R_{\lambda:A}d = B^{-1}R_{\lambda:A}Bd \text{ para todo } d \in D(B)& \\
\Longleftrightarrow R_{\lambda:A}B^{-1}c = B^{-1}R_{\lambda:A}c \text{ para todo } c \in X.&
\end{aligned} \tag{3.23}$$

De la equivalencia anterior tenemos para $y(0)$

$$\begin{aligned}
y(0) =& R_{\lambda:A}u_{B^{-1}c}(0) \\
=& R_{\lambda:A}B^{-1}c \\
=& B^{-1}R_{\lambda:A}c.
\end{aligned}$$

Así concluimos que $y(.)$ es solución del PCA (3.1) con el valor inicial $R_{\lambda:A}B^{-1}c$. Luego por la unicidad de la solución tenemos

$$R_{\lambda:A}u_{B^{-1}c}(\cdot) = u_{R_{\lambda:A}u_{B^{-1}c}}(\cdot). \tag{3.24}$$

Sea $t \in [0, +\infty)$. Por la conmutatividad de los operadores $(\lambda I - A)$ y $R_{\lambda:A}$, las identidades (3.14), (3.24) y las equivalencias (3.23) obtenemos

$$\begin{aligned}
R_{\lambda:A}P(t)x &= R_{\lambda:A}\left(\lambda I - A\right)u_{B^{-1}x}(t) \\
&= \left(\lambda I - A\right)R_{\lambda:A}u_{B^{-1}x}(t) \\
&= \left(\lambda I - A\right)u_{R_{\lambda:A}u_{B^{-1}x}}(t) \\
&= \left(\lambda I - A\right)u_{R_{\lambda:A}B^{-1}x}(t) \\
&= \left(\lambda I - A\right)u_{B^{-1}R_{\lambda:A}x}(t)
\end{aligned}$$

$$= P(t)R_{\lambda:A}x.$$

Para todo $x \in X$. Por lo tanto de la identidad anterior y de las equivalencias dadas en (3.21), logramos

$$P(t)Ax = AP(t)x \text{ para todo } x \in D(A) \text{ y } t \geq 0.$$

Lo que muestra la afirmación.

- $P(\cdot)c$ es solución del PCA (3.2) con valor inicial $P(0)c$ con $c \in D(A)$. En efecto;

  Si $c \in D(A)$, entonces existe un único $d \in X$ tales que $c = R_{\lambda:A}d$. En virtud de (3.24) y (3.23) tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} P(\cdot)c &= (\lambda I - A)\, u_{B^{-1}c}(\cdot) \\ &= (\lambda I - A)\, u_{B^{-1}R_{\lambda:A}d}(\cdot) \\ &= (\lambda I - A)\, u_{R_{\lambda:A}B^{-1}d}(\cdot) \\ &= (\lambda I - A)\, R_{\lambda:A}u_{B^{-1}d}(\cdot) \\ &= u_{B^{-1}d}(\cdot). \end{aligned}$$

  Por tanto $P(\cdot)c$ es solución del problema de Cauchy abstracto, con valor inicial $P(0)c = B^{-1}d$ para cada $c \in D(A)$. Como $D(B) \subseteq D(A)$ por hipótesis y $B^{-1}d \in D(B)$ tenemos que $P(0)c \in D(A)$.

Como $\rho(A)$ es no vacío, se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.5, en consecuencia $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo de operadores lineales, generado por una extensión de A con $P(0) = (\lambda I - A)B^{-1}$ y $AP(t)x = P(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$.

b.$\Longrightarrow$**a.** Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ el Pre-Semigrupo generado por una extensión A_P del operador A, tales que:

i. $P(0) = (\lambda I - A)\, B^{-1}$.

ii. $AP(s) = P(s)A$ para todo $s \geq 0$.

Demostraremos que el PCA

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = Au \\ u(0) = c, \end{cases}$$

posee una única solución, para cada $c \in D(B)$. Por el Teorema de existencia y unicidad (Teorema 3.3), si $d \in D(A) \subseteq D(A_P)$ entonces, la función $P(\cdot)d$ es la única solución del PCA

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}u = A_P u \\
u(0) = P(0)d.
\end{cases}
\tag{3.25}
$$

Por el Teorema 2.11 (ii), tenemos que A_P conmuta con $P(s)$ para todo $s \geq 0$. Como A_P es extensión de A se tiene que $Ad = A_P d$. De estas afirmaciones y la hipótesis (ii) se tiene que

$$
\begin{aligned}
AP(\cdot)d &= P(\cdot)Ad \\
&= P(\cdot)A_P d \\
&= A_P P(\cdot)d \\
&= u'(\cdot).
\end{aligned}
$$

Así por la Definición 3.1 la aplicación $P(\cdot)d$ es solución del PCA (3.25) y (3.1) en este último caso considerando $c = P(0)d$.

Desde que $D(A) = R_{\lambda:A}X$, (la imagen de X vía $R_{\lambda:A}$), la hipótesis (ii) y siendo A un operador cerrado, del Lema 1.20 tenemos

$$
R_{\lambda:A}P(s) = P(s)R_{\lambda:A} \text{ para todo } s \geq 0.
$$

Por la hipótesis (i), la identidad anterior (tomando $s = 0$) y $D(B) = B^{-1}X$ conseguimos

$$
\begin{aligned}
P(0)\left(D(A)\right) &= P(0)\left(R_{\lambda:A}X\right) \\
&= R_{\lambda:A}P(0)X \\
&= R_{\lambda:A}\left(\lambda I - A\right)B^{-1}X \\
&= B^{-1}X \\
&= D(B).
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Como $c = P(0)d$ de la identidad (3.26) logramos que $c \in D(B)$. Por lo tanto $d = P(0)^{-1}c \in D(A)$. Así la función $u(.) = P(.)P(0)^{-1}d$ es solución única del problema de Cauchy abstracto (3.25) con lo cual queda demostrado el teorema.

□

Corolario 3.7. Sea $A : D(A) \longrightarrow X$ un operador lineal cerrado, $\lambda \in \rho(A)$. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces son equivalentes:

a. El problema de Cauchy abstracto

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} &= Au \\
u(0) &= c\,,
\end{cases}
$$

posee una única solución $u \in C^1([0,+\infty), X)$ para cada $c \in D(A^{n+1})$.

b. Existe un Pre-Semigrupo $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales generado por una extensión de A tal que $P(0) = (R_{\lambda:A})^n$.

Demostración. Veamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.6. En efecto,

Como $\lambda \in \rho(A)$ tenemos que $(\lambda I - A)$ es inversible y continuo, por lo tanto existe $R_{\lambda:A} = (\lambda I - A)^{-1}$. Consideremos el operador $B = -(\lambda I - A)^{n+1}$ el cual es un operador lineal cerrado. Además

$$\begin{aligned} D(B) &= D\left(-(\lambda I - A)^{n+1}\right) \\ &= D((\lambda I - A)^{n+1}) \\ &= D(A^{n+1}) \\ &\subseteq D(A). \end{aligned}$$

Es decir $D(B) \subseteq D(A)$. Por otro lado

$$\begin{aligned} (-B)^{-1} &= \left((\lambda I - A)^{n+1}\right)^{-1} \\ &= \left((\lambda I - A)^{-1}\right)^{n+1} \\ &= (R_{\lambda:A})^{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el operador $(-B)^{-1}$ existe y pertenece a $B(X)$. En consecuencia, por la Definición 1.18 tenemos que $0 \in \rho(B)$.

Para cada $x \in D(B) = D(A^{n+1})$ tenemos

$$\begin{aligned} R_{\lambda:A}Bx &= (\lambda I - A)^{-1}\left(-(\lambda I - A)^{n+1}x\right) \\ &= -(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{n+1}x \\ &= -(\lambda I - A)^{n}x \\ &= -(\lambda I - A)^{n+1}(\lambda I - A)^{-1}x \\ &= BR_{\lambda:A}x. \end{aligned}$$

Con lo cuál $R_{\lambda:A}Bx = BR_{\lambda:A}x$ para todo $x \in D(B)$. Así se satisfacen las hipótesis (i), (ii) y (iii) del Teorema 3.7. En consecuencia, el problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} &= Au \\ u(0) &= c\,, \end{cases}$$

posee una única solución, $u \in C^1([0,+\infty), X)$ para cada $c \in D(A^{n+1})$ si y solo si existe un Pre-Semigrupo de operadores lineales $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ generado por una extensión del operador A tal que

$$\begin{aligned} P(0) &= (\lambda I - A)B^{-1} \\ &= (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-n-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-n} \\ &= (R_{\lambda:A})^n \end{aligned}$$

y $P(t)A = AP(t)$ para todo $t \geq 0$. Con lo cuál queda demostrada la equivalencia.

$\square$

Capítulo 4

Control Exponencial de un Pre-Semigrupo

En este capitulo, se estudia el concepto de *Control Exponencial* de un Pre-Semigrupo de operadores lineales $\{P(t)\}_{t\geq 0}$, además de algunas propiedades y resultados derivados de este tipo de operadores.

4.1. Control Exponencial de un Pre-Semigrupo

Sean $(X, \| \|)$ un espacio de Banach y $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales.

Definición 4.1. Se dice que $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo *exponencialmente controlado*, si existe $w > 0$ tal que la aplicación, definida por

$$\begin{array}{rcl} f_x : [0, +\infty) & \longrightarrow & X \\ t & \longrightarrow & f_x(t) = e^{-wt}P(t)x \end{array} \tag{4.1}$$

es acotada y uniformemente continua, para cada $x \in X$. A la constante w, se le denominara constante de control exponencial y a la función e^{-wt} se le llama control exponencial.

Ejemplo 4.2. Para ilustrar este concepto, consideremos un C_0 - Semigrupo de operadores lineales $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Por el Teorema 1.30 existen $M \geq 1$ y $\alpha \geq 0$ tales que

$$\|P(t)\| \leq Me^{\alpha t}, \tag{4.2}$$

para todo $t \geq 0$.

Consideremos la aplicación dada en la ecuación (4.1) para la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en particular, es decir

$$\begin{array}{rcl} f_x : [0, +\infty) & \longrightarrow & X \\ t & \longrightarrow & f_x(t) = e^{-\alpha t} T(t)x \end{array}$$

donde $x \in X$ y $\alpha > 0$ viene dada en la desigualdad 4.2.

Veamos que f_x es uniformemente continua. En efecto, sean $t \geq 0$ (fijo, pero arbitrario) y $h > 0$, por las propiedades del C_0 - Semigrupo y de (4.2), tenemos

$$\begin{aligned} \|f_x(t+h) - f_x(t)\| &\leq \left\| e^{-\alpha(t+h)} T(t+h)x - e^{-\alpha t} T(t)x \right\| \\ &\leq \left\| e^{-\alpha t} \left\{ e^{-\alpha h} T(t+h)x - T(t)x \right\} \right\| \\ &\leq e^{-\alpha t} \left\| e^{-\alpha h} T(t)T(h)x - T(t)x \right\| \\ &\leq e^{-\alpha t} \|T(t)\| \left\| e^{-\alpha h} T(h)x - x \right\| \\ &\leq M \left\| e^{-\alpha h} T(h)x - x \right\|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Puesto que $e^{-\alpha t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia de operadores fuertemente continuos, para cada $x \in X$ se cumple

$$\lim_{h\to 0} T(h)x = x,$$

en $(X, \| \, \|)$. Así del límite anterior y el hecho que $e^{-\alpha h}$ tiende a 1, si h tiende a 0, logramos

$$\lim_{h\to 0} e^{-\alpha h} T(h)x = x, \tag{4.4}$$

en $(X, \| \, \|)$. Luego de la desigualdad (4.3) y de (4.4) conseguimos

$$\lim_{h\to 0} \|f_x(t+h) - f_x(t)\| = 0.$$

independiente de t. Obteniendo de este modo, la continuidad uniforme de la aplicación f_x.

Afirmación: La aplicación f_x es acotada. Efectivamente, sea $x \in X$, luego por (4.2) tenemos

$$\begin{aligned} \|f_x(t)\| &\leq \left\| e^{-\alpha t} T(t)x \right\| \\ &\leq e^{-\alpha t} \|T(t)\| \|x\| \\ &\leq e^{-\alpha t} M e^{\alpha t} \|x\| \\ &= M \|x\|. \end{aligned}$$

Mostrando así la acotación de la aplicación f_x. Por lo tanto el C_0 - Semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un Pre-Semigrupo exponencialmente controlado.

Observación 4.3. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo exponencialmente controlado, por la Definición 4.1, para cada $x \in X$, la aplicación f_x es acotada, es decir, existe $M_x > 0$ tal que

$$\left\| e^{-wt}P(t)x \right\| \leq M_x, \tag{4.5}$$

para todo $t \geq 0$. Luego de (4.5) tenemos

$$\sup_{t\geq 0} \left\| e^{-wt}P(t)x \right\| \leq M_x,$$

para cada $x \in X$. Como X es de Banach, por el Teorema 1.17, existe $M > 0$ tal que

$$M = \sup_{t\geq 0} e^{-wt} \left\| P(t) \right\|.$$

Donde $e^{-wt} \left\| P(t) \right\|$ es la norma del operador $e^{-wt}P(t)$ en $B(X)$.

De la Definición 1.4, tenemos que el espacio $C_b\left([0, +\infty), X\right)$ es un espacio de Banach, dotado de la norma

$$\left\| f \right\|_b = \sup_{t\geq 0} \left\| f(t) \right\|,$$

para cada $f \in C_b\left([0, +\infty), X\right)$. Este concepto será de vital importancia para la siguiente definición.

Definición 4.4. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo exponencialmente controlado. Definimos el subconjunto $Y \subseteq X$ como

$$Y = \left\{ x \in X / f_x(t) \in P(0)X \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y } P(0)^{-1}f_x \in C_b\left([0, +\infty), X\right) \right\}. \tag{4.6}$$

El siguiente lema, dota de ciertas características a este conjunto.

Lema 4.5. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo exponencialmente controlado. Si Y es el subconjunto definido en la ecuación (4.6), entonces Y es un subespacio vectorial de X.

Prueba. Veamos en principio que Y es no vacío.

Por hipótesis existe $w > 0$ tal que la aplicación $f_x(t) = e^{-wt}P(t)x$ es acotada y uniformemente continua. Considerando $t \geq 0$ y tomando $x = \mathbf{0}$ y como $P(0)$ es un operador lineal inyectivo, tenemos

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{0}}(t) &= e^{-w\cdot 0}P(0)(\mathbf{0}) \\
&= P(0)(\mathbf{0}) \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Donde $\mathbf{0}$ es el vector nulo de X. De (4.7) tenemos que $f_{\mathbf{0}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Así $f_{\mathbf{0}}(t) \in P(0)X$ para todo $t \geq 0$. Por otro lado, desde que $f_{\mathbf{0}}(\cdot) = \mathbf{0}$ tenemos que $P(0)^{-1}f_{\mathbf{0}} = 0$ (en este caso, $\mathbf{0}$ representa la aplicación nula) pertenece a $C_b\left([0,+\infty), X\right)$. Así por la Definición 4.4, $\mathbf{0} \in Y$. Luego el subconjunto Y es no vacío.

Veamos ahora que Y es un subespacio vectorial de X. En efecto, sean $x, y \in Y$ y $\mu \in \mathbb{C}$. Considerando $t \geq 0$, de la Definición 4.4, la linealidad del operador $P(t)$ y el hecho que $P(0)X$ es un subespacio vectorial, tenemos

$$
\begin{aligned}
f_{x+\mu y}(t) &= e^{-wt}P(t)\left(x+\mu y\right) \\
&= e^{-wt}\left(P(t)x + \mu P(t)y\right) \\
&= \underbrace{e^{-wt}P(t)x}_{\in P(0)X} + \mu\underbrace{e^{-wt}P(t)y}_{\in P(0)X}.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Así, de la identidad anterior, tenemos que $f_{x+\mu y}(t) \in P(0)X$ para todo $t \geq 0$.

Por otro lado, como el operador $P(0)^{-1}$ es lineal, por (4.8) y el hecho de que $C_b\left([0,+\infty), X\right)$ es un espacio vectorial, obtenemos

$$
\begin{aligned}
P(0)^{-1}f_{x+\mu y}(\cdot) &= P(0)^{-1}\left\{f_x(\cdot) + \mu f_y(\cdot)\right\} \\
&= \underbrace{P(0)^{-1}f_x(\cdot)}_{\in C_b([0,+\infty),X)} + \mu\underbrace{P(0)^{-1}f_y(\cdot).}_{\in C_b([0,+\infty),X)}
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Luego de (4.9) logramos que $P(0)^{-1}f_{x+\mu y}(\cdot)$ pertenece a $C_b\left([0,+\infty), X\right)$. Por lo tanto Y es subespacio vectorial de X.

$\square$

El siguiente lema, dota la estructura de espacio normado al subconjunto Y.

Lema 4.6. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo exponencialmente controlado con constante de control w. Si Y es el subconjunto dado en la Definición 4.4, entonces la aplicación:

$$
\begin{aligned}
\|\cdot\|_Y : Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \|x\|_Y = \left\|P(0)^{-1}f_x\right\|_b .
\end{aligned}
$$

Define una norma en el espacio vectorial Y, donde $\left\|P(0)^{-1}f_x\right\|_b = \sup_{t\geq 0}\left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)x\right\|$. En consecuencia $(Y, \| \|_Y)$ es un espacio normado.

Prueba.

Sea $x \in Y$. Veamos que la aplicación $\| \|_Y$ cumple las condiciones de la definición de una norma. En efecto:

a. Por la definición de $\| \|_Y$ tenemos

$$\begin{aligned}\|x\|_Y &= \left\|P(0)^{-1}f_x\right\|_b \\ &= \sup_{t\geq 0}\left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)x\right\| \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

De donde $\|x\|_Y \geq 0$.

b. Si $x = \mathbf{0}$ entonces

$$\begin{aligned}\|\mathbf{0}\|_Y &= \left\|P(0)^{-1}f_{\mathbf{0}}\right\|_b \\ &= \sup_{t\geq 0}\left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(0)\mathbf{0}\right\| \\ &= \sup_{t\geq 0}\|\mathbf{0}\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así $\|\mathbf{0}\|_Y = 0$.

Por otro lado, si $\|x\|_Y = 0$ entonces

$$\sup_{t\geq 0}\left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)x\right\| = 0.$$

Es decir

$$\left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)x\right\| \leq 0,$$

para todo $t \geq 0$. En particular, tomando $t = 0$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$\left\|P(0)^{-1}P(0)x\right\| \leq 0.$$

Como $P(0)^{-1}P(0) = I$, tenemos que $\|x\| \leq 0$. Por hipótesis $\|\cdot\|$ es una norma, por lo tanto $\|x\| = 0$, luego $x = 0$.

c. Consideremos $x \in X$ y $\alpha \in Y$. Por las propiedades de la norma $\| \, \|$ de X y la linealidad de los operadores $P(0)^{-1}$y $P(0)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_Y &= \left\|P(0)^{-1} f_{\alpha x}\right\| \\
&= \sup_{t\geq 0} \left\|e^{-wt} P(0)^{-1} P(t) \alpha x\right\| \\
&= |\alpha| \sup_{t\geq 0} \left\|e^{-wt} P(0)^{-1} P(t) x\right\| \\
&= |\alpha| \, \|x\|_Y .
\end{aligned}$$

Por tanto, $\|\alpha x\|_Y = |\alpha| \, \|x\|_Y$

d. Sean $x, y \in Y$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_Y &= \left\|P(0)^{-1} f_{x+y}\right\| \\
&= \sup_{t\geq 0} \left\|e^{-wt} P(0)^{-1} P(t) \left(x+y\right)\right\| \\
&\leq \sup_{t\geq 0} \left\|e^{-wt} P(0)^{-1} P(t) x\right\| + \left\|e^{-wt} P(0)^{-1} P(t) y\right\| \\
&\leq \sup_{t\geq 0} \left\|e^{-wt} P(0)^{-1} P(t) x\right\| + \sup_{t\geq 0} \left\|e^{-wt} P(0)^{-1} P(t) y\right\| \\
&= \|x\|_Y + \|y\|_Y .
\end{aligned}$$

De donde $\|x+y\|_Y \leq \|x\|_Y + \|y\|_Y$.

Por tanto de los incisos anteriores, concluimos que $\|\cdot\|_Y$ es una norma en Y. En consecuencia $(Y, \| \, \|_Y)$ es un espacio normado.

□

Observación 4.7. Consideremos $x \in Y$, de la definición de la norma $\| \, \|_Y$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \left\|P(0)^{-1} e^{0} P(0) x\right\| \\
&\leq \sup_{t\geq 0} \left\|P(0)^{-1} e^{-wt} P(t) x\right\| \\
&= \|x\|_Y .
\end{aligned}$$

Así obtenemos la desigualdad $\|x\| \leq \|x\|_Y$ para todo $y \in Y$.

Observemos que por el Lema 4.6 el espacio Y es un espacio normado. El siguiente Teorema nos garantiza que este espacio es de Banach.

Lema 4.8. Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach. Si $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo exponencialmente controlado, con constante de control exponencial w. Entonces el espacio normado $(Y, \| \, \|_Y)$ es un espacio de Banach.

Prueba.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ una sucesión de Cauchy en $(Y, \| \|_Y)$. Por la Observación 4.7, tenemos que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_Y$. Así la sucesión (x_n) es de Cauchy en X. Por la completitud de X, existe $x \in X$ tal que:

$$x_n \longrightarrow x \ \text{ en } \ (X, \| \|). \tag{4.10}$$

Como (x_n) es de Cauchy en Y, gracias a la linealidad y continuidad de los operadores $P(0)^{-1}$ y $P(t)$ la sucesión de funciones $\left(P(0)^{-1} f_{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_b\left([0, +\infty), X\right)$ es de Cauchy. Siendo $C_b\left([0, +\infty), X\right)$ un espacio de Banach, existe $g \in C_b\left([0, +\infty), X\right)$ tal que

$$P(0)^{-1} f_{x_n} \longrightarrow g \ \text{ en } \ \left(C_b\left([0, +\infty), X\right), \| \|_b\right). \tag{4.11}$$

Luego, para cada $t \geq 0$ (fijo, pero arbitrario), por la convergencia dada en (4.11), conseguimos

$$P(0)^{-1} f_{x_n}(t) \longrightarrow g(t) \ \text{ en } \ (X, \| \|). \tag{4.12}$$

Como $P(0)$ es un operador continuo en X, para cada $t \geq 0$ de la convergencia (4.12), obtenemos

$$\underbrace{P(0)P(0)^{-1}}_{=I} f_{x_n}(t) \longrightarrow P(0)g(t) \ \text{ en } \ (X, \| \|).$$

Así, por la convergencia anterior, tenemos

$$f_{x_n}(t) \longrightarrow P(0)g(t) \ \text{ en } \ (X, \| \|). \tag{4.13}$$

Desde que el operador $P(t)$ es continuo para todo $t \geq 0$ y siendo $B(X)$ un espacio vectorial, para el escalar e^{-wt} tenemos que el operador $e^{-wt}P(t)$ es continuo. De la convergencia dada en (4.10) y la afirmación anterior, tenemos

$$e^{-wt}P(t)x_n \longrightarrow e^{-wt}P(t)x \ \text{ en } \ (X, \| \|). \tag{4.14}$$

Luego, por la definición de f_x y la convergencia (4.13), logramos

$$f_{x_n}(t) \longrightarrow e^{-wt}P(t)x \ \text{ en } \ (X, \| \|). \tag{4.15}$$

De las convergencias (4.13), (4.15) y la unicidad del límite en $(X, \| \|)$, conseguimos

$$f_x(t) = P(0)g(t). \tag{4.16}$$

Para todo $t \geq 0$. Así tenemos que $f_x(t) \in P(0)X$ para todo $t \geq 0$.

De la identidad (4.16) y el hecho que $P(0)^{-1}P(0) = I$, para cada $t \geq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} P(0)^{-1}f_x(t) &= P(0)^{-1}P(0)g(t) \\ &= g(t). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Por las condiciones sobre g, tenemos que $P(0)^{-1}f_x \in C_b([0, +\infty), X)$, demostrando así que $x \in Y$.

De la convergencia (4.12) y la identidad (4.15), tenemos

$$P(0)^{-1}f_{x_n} \longrightarrow g \text{ en } (C_b([0, +\infty), X), \| \|_b). \tag{4.18}$$

Así, de la convergencia (4.18) y la identidad (4.17) , concluimos

$$\|x_n - x\|_Y = \left\|P(0)^{-1}(f_{x_n} - f_x)\right\|_b \longrightarrow 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Por lo tanto, existe $x \in Y$ tal que $x_n \longrightarrow x$ en $(Y, \| \|_Y)$. En consecuencia $(Y, \| \|_Y)$ es de Banach.

□

4.2. Operador Transformada de Laplace de un Pre-Semigrupo

En esta sección, mostramos una extensión del operador Transformada de Laplace al caso de Pre-Semigrupos de Operadores. Los siguientes resultados, generalizan las propiedades del operador Transformada de Laplace para el caso de Semigrupos fuertemente continuos.

Lema 4.9. Sean $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales y $A : D(A) \longrightarrow X$ su generador infinitesimal. Si$\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente controlado, con termino de control e^{-wt}, entonces la integral

$$L_P(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)xdt$$

existe para cada $\lambda > w$ y $x \in X$.

Prueba.

Consideremos $x \in X$. Por hipótesis, $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente controlado, así por la Observación 4.3, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} e^{-wt} \|P(t)\| = M.$$

Luego

$$\sup_{t\geq 0} \|P(t)\| = Me^{wt}. \tag{4.19}$$

Sea $\lambda > w$. De (4.19) tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned}
\left\|e^{-\lambda t}P(t)x\right\| &\leq e^{-\lambda t}\|P(t)\|\,\|x\| \\
&\leq e^{-\lambda t}\left(Me^{wt}\right)\|x\| \\
&= M\|x\|\,e^{(w-\lambda)t}.
\end{aligned}$$

Luego, de estas desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)x dt\right\| &\leq \int_0^\infty \left\|e^{-\lambda t}P(t)x\right\| dt \\
&\leq \int_0^\infty M\|x\|\,e^{(w-\lambda)t}dt. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Por hipótesis, $\lambda > w$, así tenemos que la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty M\|x\|\,e^{(w-\lambda)t}dt &= M\|x\| \int_0^\infty e^{(w-\lambda)t}dt \\
&= M\|x\| \int_0^\infty e^{-(\lambda-w)t}dt \qquad (4.21) \\
&= \frac{M\|x\|}{(\lambda - w)},
\end{aligned}$$

existe para cada $\lambda > w$. Por la Definición 4.1 la aplicación $t \mapsto e^{-wt}P(t)x$ es uniformemente continua, en consecuencia, continua.

Por lo tanto de (4.20) y (4.21) tenemos que la integral impropia

$$\int_0^\infty \left\|e^{-\lambda t}P(t)x\right\| dt,$$

es convergente para cada $\lambda > w$. Luego por la Proposición 1.14 (e), la integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)x dt,$$

existe para cada $x \in X$ y cada $\lambda > w$. Quedando así probado el resultado.

$\square$

Lema 4.10. En las hipótesis del Lema 4.9, la aplicación $L_P : (w, +\infty) \longrightarrow B(X)$ dada por

$$
\begin{aligned}
L_P: (w,+\infty) &\longrightarrow B(X)\\
\lambda &\longmapsto L_p(\lambda)
\end{aligned}
$$

está bien definida, donde $L_p(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)xdt$ siendo este el operador Transformada de Laplace de un Pre-Semigrupo.

Prueba.

Veamos que el operador

$$
\begin{aligned}
L_P(\lambda): X &\longrightarrow X\\
x &\longmapsto L_p(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)xdt
\end{aligned}
$$

es una aplicación lineal y continua para cada $\lambda > w$. En efecto;

- $L_P(\lambda)$ es lineal. Sean $x, y\in X$ y $\alpha\in\mathbb{C}$, gracias a la linealidad del operador $P(t)$, del operador integral y por el Lema 4.9, tenemos

$$
\begin{aligned}
L_P(\lambda)(x+\alpha y) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)(x+\alpha y)dt\\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(P(t)x+P(t)\alpha y\right)dt\\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)dt+\alpha\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)ydt\\
&= L_P(\lambda)x+\alpha L_P(\lambda)y.
\end{aligned}
$$

  Mostrando así la linealidad del operador $L_P(\lambda)$.

- $L_P(\lambda)$ es continua. En efecto, sea $\lambda > w$ y $x\in X$. De la Observación 4.3, tenemos

$$
\sup_{t\geq 0}\left\|e^{-wt}P(t)\right\| = M.
$$

  Luego, de la Proposición 1.14 (e), la identidad anterior y (4.21), logramos

$$
\begin{aligned}
\|L_P(\lambda)x\| &= \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t)xdt\right\|\\
&\leq \int_0^\infty \left\|e^{-\lambda t}P(t)x\right\|dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|P(t)\| \|x\| \, dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} M e^{wt} \|x\| \, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(\lambda - w)t} M \|x\| \, dt \\
&= \frac{M}{\lambda - w} \|x\| .
\end{aligned}
$$

Así

$$
\|L_P(\lambda)x\| \leq \frac{M}{\lambda - w} \|x\| .
$$

Mostrando la continuidad del operador $L_P(\lambda)$.

De los incisos anteriores, se sigue que $L_P(\lambda) \in B(X)$ para todo $\lambda > w$. Quedando demostrado así el Lema.

□

Los resultados de los Lemas 4.9 y 4.10 , permiten enunciar el siguiente Teorema que relacionan los operadores $L_p(\lambda)$ y $(\lambda I - A)$.

Lema 4.11. Sean $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales y $A : D(A) \longrightarrow X$, su generador infinitesimal. Si $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente controlado, con término de control e^{-wt}, entonces para cada $\lambda > w$ operador $L_P(\lambda)$ satisface:

a. $L_P(\lambda)\,(\lambda I - A)\,x = P(0)x$ para todo $x \in D(A)$.

b. $(\lambda I - A)\,L_P(\lambda)x = P(0)x$ para todo $x \in X$.

En particular, si $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ es un Semigrupo de operadores lineales entonces $(w, +\infty) \subset \rho(A)$.

Prueba.

a. Consideremos $x \in D(A)$ y $\lambda > w$. Por la definición del operador $L_P(\lambda)$, y el Teorema 2.11 (ii) se tiene que

$$
\begin{aligned}
L_P(\lambda)\,(\lambda I - A)\,x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t)\,(\lambda I - A)\,x dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} P(t)x - \lambda e^{-\lambda t} P(t)Ax dt \qquad (4.22) \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} P(t)x - \lambda e^{-\lambda t} AP(t)x dt.
\end{aligned}
$$

Por el Lema 2.18, considerando las aplicaciones $e^{-\lambda t}$ y $P(t)x$, y el Teorema 2.11 (iii) tenemos

$$
\begin{aligned}
\left(e^{-\lambda t}P(t)x\right)' &= \left(e^{-\lambda t}\right)' P(t)x + e^{-\lambda t}\left(P(t)x\right)' \\
&= -\lambda e^{-\lambda t}P(t)x + e^{-\lambda t}AP(t)x.
\end{aligned}
$$

Multiplicando con -1 la identidad anterior, conseguimos

$$
-\left(e^{-\lambda t}P(t)x\right)' = \lambda e^{-\lambda t}P(t)x - e^{-\lambda t}AP(t)x. \tag{4.23}
$$

Reemplazando (4.23) en (4.22), y usando el Teorema Fundamental de Cálculo, obtenemos

$$
\begin{aligned}
L_P(\lambda)\left(\lambda I - A\right)x &= \int_0^{\infty} -\left(e^{-\lambda t}P(t)x\right)' dt \\
&= -\int_0^{\infty}\left(e^{-\lambda t}P(t)x\right)' dt \\
&= -\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\left(e^{-\lambda t}P(t)x\right)' dt \\
&= -\lim_{b\to\infty}\left\{e^{-\lambda b}P(b)x - P(0)x\right\}. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Veamos la convergencia del primer límite en la identidad (4.24). De (4.19) tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\|e^{-\lambda b}P(b)x\right\| &\le e^{-\lambda b}\left\|P(b)\right\|\left\|x\right\| \\
&\le e^{-\lambda b}Me^{wb}\left\|x\right\| \qquad (4.25) \\
&= Me^{(w-\lambda)b}\left\|x\right\|.
\end{aligned}
$$

Como $w - \lambda < 0$ tenemos que el término $e^{(w-\lambda)b}$ tiende a 0 si $b \to +\infty$. De esta observación y de 4.25, obtenemos

$$
\lim_{b\to+\infty}\left\|e^{-\lambda b}P(b)x\right\| = 0.
$$

En consecuencia

$$
\lim_{b\to+\infty} e^{-\lambda b}P(b)x = 0. \tag{4.26}
$$

Sustituyendo (4.26) en (4.24), concluimos que

$$
L_P(\lambda)\left(\lambda I - A\right)x = P(0)x.
$$

b. Sea $x \in X$, calculemos la derivada fuerte por derecha en 0 de la aplicación

$$t \longmapsto P(\cdot)L_P(\lambda)x.$$

Sea $h > 0$. Como $P(s) \in B(X)$ para todo $s \geq 0$, por la Proposición 1.14 (d), el Lema 2.2 y la linealidad de la integral impropia tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left(P(h) - P(0)\right) L_P(\lambda)x &= \frac{1}{h}\left(P(h) - P(0)\right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t)xdt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(P(h) - P(0)\right) P(t)xdt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(P(h)P(t) - P(0)P(t)\right) xdt \qquad (4.27)\\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(P(0)P(h+t)x - P(0)P(t)x\right) dt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} P(0)P(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} P(0)P(t)xdt.
\end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable $s = t+h$ en la primera integral de la identidad (4.27), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t} P(0)P(t+h)xdt &= \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} P(0)P(s)xds \\
&= \int_h^\infty e^{-\lambda s} e^{\lambda h} P(0)P(s)xds. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Reemplazando (4.28) en (4.27), y nuevamente por la Proposición 1.14 (d) ($P(0) \in B(X)$) conseguimos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left(P(h) - P(0)\right) L_P(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s} e^{\lambda h} P(0)P(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} P(0)P(t)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s} P(0)P(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} P(0)P(s)xds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} P(0)P(s)xds - \int_0^h e^{-\lambda s} P(0)P(s)xds\right) \\
&\quad - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} P(0)P(s)xds \\
&= \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda s} P(0)P(s)xds \qquad (4.29)\\
&\quad - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s} P(0)P(s)xds \\
&= \underbrace{\left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\right) P(0)\int_0^\infty e^{-\lambda s} P(s)xds}_{(*)} \\
&\quad - \underbrace{\frac{e^{\lambda h}}{h} P(0)\int_0^h e^{-\lambda s} P(s)xds}_{(**)}.
\end{aligned}$$

Veamos las convergencias de (*) y (**) cuando $h \to 0^+$. En principio por la definición del operador $L_P(\lambda)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\lambda h}-1}{h} P(0) \int_0^\infty e^{-\lambda s} P(s) x ds &= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\lambda h}-1}{h} P(0) L_P(\lambda) x \\
&= \left(\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\lambda h}-1}{h} \right) P(0) L_P(\lambda) x \qquad (4.30) \\
&= \lambda P(0) L_P(\lambda) x.
\end{aligned}$$

Como la aplicación $g(s) = e^{-\lambda s} P(s) x$ pertenece a $C([0,+\infty), X)$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} P(s) x ds &= e^{-\lambda s} P(s) x \,|_{s=0} \\
&= P(0) x. \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

Luego, de (4.31) y la continuidad del operador $P(0)$ conseguimos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\lambda h}}{h} P(0) \int_0^h e^{-\lambda s} P(s) x ds = P(0) P(0) x. \qquad (4.32)$$

De las convergencias (4.30) y (4.31) tomando el límite cuando $h \to 0^+$ en la igualdad (4.29), concluimos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left(P(h) - P(0) \right) L_P(\lambda) x &= \lambda P(0) L_P(\lambda) x - P(0) P(0) x \\
&= P(0) \left(\lambda L_P(\lambda) x - P(0) x \right).
\end{aligned}$$

Luego, por la Definición 2.6, del límite anterior tenemos que

$$P'^{+}(0) \left(L_P(\lambda) x \right) = P(0) \left(\lambda L_P(\lambda) x - P(0) x \right).$$

Por lo tanto $P'^{+}(0)\left(L_P(\lambda)x\right)$ existe y pertenece a $P(0)X$. Luego por la Definición 2.7 $L_P(\lambda)x \in D(A)$. Así

$$A L_P(\lambda) x = \lambda L_P(\lambda) x - P(0) x, \qquad (4.33)$$

para cada $x \in X$. Por lo tanto de (2.33) obtenemos

$$(\lambda I - A) L_P(\lambda) x = P(0) x,$$

para todo $x \in X$.

En particular, si $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ fuese un C_0 - Semigrupo de operadores lineales, tenemos $P(0) = I$. Así por la parte (b) del presente teorema, se cumple

$$(\lambda I - A)\, L_P(\lambda)x = L_P(\lambda)\,(\lambda I - A)\,x = x,$$

para todo $x \in D(A)$. Luego el operador inverso $R_{\lambda:A}$ de $(\lambda I - A)$ es $L_P(\lambda)$, para cada $\lambda > w$, es decir $(w, +\infty) \subseteq \rho(A)$.

$\square$

4.3. Construcción de un C_0 - Semigrupo a partir de un Pre-Semigrupo

En esta sección demostraremos que todo Pre-Semigrupo de operadores lineales, exponencialmente controlado, genera un C_0 - Semigrupo fuertemente continuo, y además se probara una relación de inclusión entre los generadores infinitesimales de ambas familias. El resultado es el siguiente.

Teorema 4.12. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales, exponencialmente controlado, con constante de control $w > 0$. Si $A : D(A) \longrightarrow X$ es el generador infinitesimal del Pre-Semigrupo, entonces la familia de operadores lineales $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ definida por

$$T(t) = P(0)^{-1}P(t).$$

Es un Semigrupo de operadores lineales fuertemente continuo en el espacio de Banach $(Y, \|\ \|)$, que satisface:

a. $\|T(t)\|_{B(Y)} \leq e^{wt}$ para todo $t \geq 0$.

b. El generador infinitesimal A_Y de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es la parte del operador A en Y.

Demostración.

En principio, veamos que $T(s)x \in Y$ para todo $x \in Y$ y $s \geq 0$. Si $x \in Y$ entonces por la definición del conjunto Y, tenemos que $e^{-wt}P(t)x \in P(0)X$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto existe $P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x$ y pertenece a X, para todo $t \geq 0$. De esta afirmación, y como X es un espacio vectorial tenemos que

$$T(s)x = P(0)^{-1}P(s)x,$$

pertenece a X para todo $s \geq 0$. Así con estos preliminares, veremos que se cumplen las dos condiciones dadas en la Definición 4.4.

- $f_{T(s)x}(t)$ pertenece a $P(0)X$ para todo $t \geq 0$ y cada $s \geq 0$. En efecto, por la definición de $T(\cdot)$, la conmutatividad de los operadores $P(t)$ y $P(0)^{-1}$ debido al Lema 1.21 y la linealidad del operador $P(0)$, tenemos

$$\begin{aligned} f_{T(s)x}(t) &= e^{-wt}P(t)P(s)x \\ &= e^{-wt}P(t)P(0)^{-1}P(s)x \\ &= e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)P(s)x \\ &= e^{-wt}P(0)^{-1}P(0)P(t+s)x \\ &= P(0)\left\{\underbrace{e^{-wt}P(0)^{-1}P(t+s)x}_{\in X}\right\}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Así de (4.34) tenemos que $f_{T(s)x}(t) \in P(0)X$ para todo $t \geq 0$.

- $P(0)^{-1}f_{T(s)x} \in C_b\left([0,+\infty), X\right)$. En efecto, por definición de $f_{T(s)x}$, tenemos

$$\begin{aligned} P(0)^{-1}f_{T(s)x}(t) &= P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)T(s)x \\ &= P(0)^{-1}e^{-wt}\underbrace{P(t)P(0)^{-1}P(s)x}_{\in X}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Por otra parte, desde que $P(0)^{-1}P(0) = I$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(0)^{-1}P(t)P(s)x &= P(0)^{-1}P(0)P(t+s)x \\ &= P(t+s)x. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Por la conmutatividad de los operadores $P(t)$ y $P(0)^{-1}$, de (4.36) conseguimos

$$P(t)P(0)^{-1}P(s)x = P(t+s)x. \tag{4.37}$$

De la identidad anterior y (4.35) , obtenemos

$$\begin{aligned} P(0)^{-1}f_{T(s)x}(t) &= P(0)^{-1}e^{-wt}P(t+s)x \\ &= e^{ws}P(0)^{-1}e^{-w(t+s)}P(t+s)x. \end{aligned}$$

Como $s \geq 0$ es fijo y $P(0)^{-1}e^{-w(t+s)}P(t+s)x \in C_b\left([0,+\infty), X\right)$, tenemos

$$P(0)^{-1}f_{T(s)x} = \underbrace{e^{ws}}_{\text{cte}}\underbrace{P(0)^{-1}e^{-w(t+s)}P(t+s)x}_{\in C_b([0,+\infty),X)} \in C_b\left([0,+\infty), X\right).$$

Por lo tanto, de los incisos anteriores y la Definición 4.4 tenemos que $T(s)x \in Y$ para todo $x \in Y$ y $s \geq 0$.

Veamos que $T(t)$ es un operador lineal acotado en el espacio de Banach $(Y, \| \|_Y)$. En efecto, sea $t \geq 0$ fijo pero arbitrario:

- $T(t)$ es lineal.

  Como $T(t) = P(0)^{-1}P(t)$ es la composición de dos operadores lineales, se sigue que $T(t)$ es lineal.

- $T(t)$ es acotada.

  Sea $x \in Y$ y $s \geq 0$ (fijo). De las identidades (4.36) y (4.37) conseguimos

$$P(t)P(0)^{-1}P(s)x = P(t)P(0)^{-1}P(s)x. \tag{4.38}$$

  Para todo $x \in Y$.

  Por la definición de la norma $\| \|_Y$, del operador $T(s)$ y (4.38), tenemos

$$\begin{aligned}
\|T(s)x\|_Y &= \sup_{t\geq 0} \left\|P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)P(0)^{-1}P(s)x\right\| \\
&= \sup_{t\geq 0} \left\|P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)P(0)^{-1}P(s)x\right\| \\
&= \sup_{t\geq 0} \left\|P(0)^{-1}e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)P(s)x\right\| \\
&= \sup_{t\geq 0} \left\|P(0)^{-1}e^{-wt}P(0)^{-1}P(0)P(t+s)x\right\| \\
&= \sup_{t\geq 0} \left\|e^{ws}P(0)^{-1}e^{-w(t+s)}P(t+s)x\right\| \\
&= \sup_{t\geq 0} e^{ws} \left\|P(0)^{-1}e^{-w(t+s)}P(t+s)x\right\|.
\end{aligned}$$

  Haciendo $u = t + s$ en la última identidad, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T(s)x\|_Y &= e^{ws} \sup_{t\geq 0} \left\|P(0)^{-1}e^{-w(t+s)}P(t+s)x\right\| \\
&\leq e^{ws} \sup_{u\geq 0} \left\|P(0)^{-1}e^{-wu}P(u)x\right\| \\
&= e^{ws} \|x\|_Y .
\end{aligned}$$

  Luego, de la desigualdad anterior, tenemos

$$\|T(s)x\|_Y \leq e^{ws} \|x\|_y . \tag{4.39}$$

  Por lo tanto, el operador $T(s)$ es acotado en $(Y, \| \|_Y)$. Además, de (4.39) concluimos

$$\|T(s)\|_{B(Y)} \leq e^{ws}.$$

Para todo $s \geq 0$, con lo que queda probado el inciso (a)

Veamos que la familia de operadores lineales $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0 - Semigrupo de Operadores en el espacio $(Y, \| \|_Y)$. En efecto

- Por definición del operador $T(t)$, se tiene

$$T(0) = P(0)^{-1}P(0) = I.$$

Es decir $T(0) = I$.

- Sea $x \in Y$ y $s, t \geq 0$. De la definición de $T(t)$, la igualdad (4.37), la conmutatividad de los operadores $P(t)$ y $P(0)^{-1}$ y la Observación 2.3, obtenemos

$$\begin{aligned}
T(s+t)x &= P(0)^{-1}P(s+t)x \\
&= P(0)^{-1}P(t)P(0)^{-1}P(s)x \\
&= P(0)^{-1}P(0)^{-1}P(t)P(s)x \\
&= P(0)^{-1}P(0)^{-1}P(s)P(t)x \\
&= P(0)^{-1}P(s)P(0)^{-1}P(t)x \\
&= P(0)^{-1}P(s)T(t)x \\
&= T(s)T(t)x.
\end{aligned}$$

De la última identidad, conseguimos

$$T(s+t)x = T(s)T(t)x,$$

para todo $x \in Y$.

- $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia de operadores fuertemente continua en $(Y, \| \|_Y)$. En efecto, como la aplicación $P(0)^{-1}f_x$ es uniformemente continua, para cada $x \in Y$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tales que si $|h| < \delta$ entonces

$$\left\|P(0)^{-1}f_x(t+h) - P(0)^{-1}f_x(t)\right\|_{C_b([0,+\infty),X)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Es decir

$$\sup_{t\geq 0}\left\|P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.40}$$

Demostraremos que

$$\|T(h)x - x\|_Y \longrightarrow 0 \text{ cuando } h \to 0^+.$$

En principio, para $t \geq 0$ (fijo) y $h > 0$, usando la identidad (4.37) y la linealidad del operador $P(0)^{-1}$, tenemos la siguiente estimativa

$$\begin{aligned}
\left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)\left\{T(h)x - x\right\}\right\| &= \left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)\left\{P(0)^{-1}P(t)x - x\right\}\right\| \\
&= \left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)P(0)^{-1}P(h)x - e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)x\right\| \\
&= \left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t+h)x - e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)x\right\| \\
&= \left\|P(0)^{-1}e^{-wt}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\| \\
&= \left\|P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}e^{wh}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\|.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Denotemos

$$\mathrm{A} = \left\|P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}e^{wh}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\|.$$

Así tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} =& \| P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}e^{wh}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-w(t-h)}P(t)x \\
& + P(0)^{-1}e^{-w(t-h)}P(t)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x \| \\
=& \| e^{wh}\{P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\} \\
& + P(0)^{-1}e^{-w(t-h)}P(t)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x \| \\
\leq& \| e^{wh}\{P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\} \| \\
& + \|P(0)^{-1}e^{-w(t-h)}P(t)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\| \\
=& \| e^{wh}\{P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\} \| \\
& + \left\|(e^{wh}-1)P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\| \\
=& e^{wh} \| P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x \| \\
& + \left|e^{wh}-1\right| \left\|P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\|.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Luego, de la identidad (4.41) y la desigualdad (4.42) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)\left\{T(h)x - x\right\}\right\| \leq& e^{wh}\left\|P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\| \\
& + \left|e^{wh}-1\right| \left\|P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\|.
\end{aligned}$$

Tomando supremo respecto a $t \geq 0$ a la desigualdad anterior, conseguimos

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} & \left\|e^{-wt}P(0)^{-1}P(t)\left\{T(h)x - x\right\}\right\| \\
& \leq \sup_{t\geq 0} e^{wh}\left\|P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\| \\
& \quad + \sup_{t\geq 0}\left|e^{wh}-1\right| \left\|P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\|.
\end{aligned}$$

De la Definición de la norma $\| \|_Y$, la desigualdad (4.40) y como h es independiente de t, de la desigualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\|T(h)x - x\|_Y \leq e^{wh} \sup \left\|P(0)^{-1}e^{-w(t+h)}P(t+h)x - P(0)^{-1}e^{-wt}P(t)x\right\| \\ + \left|e^{wh} - 1\right| \|x\|_Y . \end{aligned} \tag{4.43}$$

Como $\lim\limits_{h\to 0} \left|e^{wh} - 1\right| = 0$ y de la desigualdad (4.40) , si $h \to 0^+$entonces de (4.43) tenemos

$$\lim_{h\to 0} \|T(h)x - x\|_Y = 0.$$

Mostrando así la continuidad fuerte de la familia de operadores.

Por los incisos anteriores tenemos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0 - Semigrupo de operadores lineales en $(Y, \| \|_Y)$.

Finalmente, veamos la parte (b)

Sea A_T el generador infinitesimal del Semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Veamos que $A_T = A_Y$ donde A_Y es el operador parte de A en Y descrito en la Definición 1.19. En efecto.

Si $x \in D(A_T) \subseteq Y$, entonces tenemos que el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{T(h)x - x\} , \tag{4.44}$$

existe en $(Y, \| \|_Y)$.

Como las normas de $(X, \| \|)$ y $(Y, \| \|_Y)$, satisfacen $\|x\| \leq \|x\|_Y$, por (4.44), se tiene la existencia del límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{T(h)x - x\} ,$$

en $(X, \| \|)$. Como $T(t) = P(0)^{-1}P(t)$ tenemos $P(t) = P(0)T(t)$. De la linealidad y continuidad del operador $P(0)$ y la definición de A_T, conseguimos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{P(h)x - P(0)x\} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{P(0)T(h)x - P(0)x\} \\ &= P(0)\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{T(h)x - x\} \\ &= P(0)A_T x.\end{aligned}$$

Así tenemos que $P'^{+}(0)$ existe y pertenece a $P(0)X$. Por la Definición 2.7 tenemos $x \in D(A)$ y

$$\begin{aligned}Ax &= P(0)^{-1}P(0)A_T x \\ &= A_T x.\end{aligned}$$

Luego, $A_T \subseteq A$ y desde que A_T esta definido en un subconjunto de Y, tenemos que

$$A_T \subseteq A_Y. \tag{4.45}$$

Por otro lado, si $\lambda > w$ entonces el operador $L_p(\lambda)$ pertenece a $B(X)$ y además

$$L_p(\lambda)\,(\lambda I - A)\,x = P(0)x. \tag{4.46}$$

Para todo $x \in D(A)$. Si $(\lambda I - A)\,x = 0$ entonces por (4.46) tenemos $P(0)x = 0$ y siendo el operador $P(0)$ inyectivo se tiene que $x = 0$. Por lo tanto el operador $\lambda I - A$ es inyectivo y de la inclusión (4.45) tenemos que el operador $\lambda I - A_T$ es inyectivo.

Gracias al Lema 4.11 aplicado al C_0 - Semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ (en este caso $T(0) = I$) , si $\lambda > w$ entonces:

- $L_P(\lambda)\,(\lambda I - A_T)\,x = x$ para todo $x \in D(A_T)$.
- $(\lambda I - A_T)\,L_P(\lambda)x = x$ para todo $x \in X$.

Es decir, si $\lambda > w$, entonces

$$R_{\lambda:A_T} = L_P(\lambda).$$

Así, el operador $(\lambda I - A_T)^{-1} : X \longrightarrow D(A_T)$ es biyectivo, en consecuencia sobreyectivo. De (4.45) tenemos

$$\lambda I - A_T \subseteq \lambda I - A_Y.$$

Luego, por el Lema 1.22, tenemos $\lambda I - A_T = \lambda I - A_Y$. Por lo tanto

$$A_T = A_Y.$$

Lo que demuestra el inciso (b) quedando así demostrado el teorema.

□

Observación 4.13. De la Definición 4.4 tenemos que $Y \subseteq X$. Si el operador $P(0)$ fuese biyectivo, por el Teorema 1.16 tenemos $P(0)^{-1} \in B(X)$, luego la aplicación $P(0)^{-1}f_x$ es acotada y uniformemente continua para todo $x \in X$, puesto que $f_x \in C_b\left([0, +\infty), X\right)$. En consecuencia $X \subseteq Y$ y por lo tanto $X = Y$.

4.4. Convergencia de Pre-Semigrupos de Operadores Lineales

En esta sección estudiaremos la convergencia de Pre-Semigrupos exponencialmente controlados, bajo las hipótesis de convergencia puntual de una familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de generadores infinitesimales correspondiente a una sucesión de Pre-Semigrupos $\{P_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y de la densidad de la imagen del operador $P(0)$. De esta última afirmación, por el Teorema 2.11 (v) tenemos

$$P(0)X \subseteq \overline{D(A)}. \tag{4.47}$$

Por hipótesis, el rango del operador $P(0)$ es denso, es decir

$$\overline{P(0)X} = X. \tag{4.48}$$

Luego, de (4.47) y (4.48) tenemos

$$X = \overline{P(0)X} \subseteq \overline{D(A)}.$$

Por lo tanto $X = \overline{D(A)}$, es decir $D(A)$ es denso en X.

Con estos análisis preliminares, tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.14. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales acotados. Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ su generador infinitesimal. Supongamos que existen $M > 0$ y $w \geq 0$ tales que

$$\|P(t)\|_{B(X)} \leq Me^{wt},$$

para todo $t \geq 0$. Sea B el generador infinitesimal de un Pre-Semigrupo exponencialmente controlado $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ que satisface

$$\|Q(t)\|_{B(X)} \leq Me^{wt}.$$

Si $P(t)Q(s) = Q(s)P(t)$ para todo $t, s \geq 0$, entonces para cada $x \in D(A) \cap D(B)$ se cumple

$$\|P(t)Q(0)x - Q(t)P(0)x\| \leq tM^2e^{wt} \|Ax - Bx\|.$$

Prueba.

Sea $x \in D(A) \cap D(B)$. Afirmamos que $P(t)x \in D(B)$ y $BP(t)x = P(t)Bx$ para todo $t \geq 0$. En efecto,

Sea $t \geq 0$ (fijo, tomado arbitrario). Como $x \in D(B)$, por la Definición 2.7 tenemos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \{Q(h)x - Q(0)x\},$$

existe y pertenece a $Q(0)X$. Por la hipótesis de conmutatividad de los operadores $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$, la Definición 2.7 y la continuidad del operador $P(t)$ se cumple

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{Q(h)(P(t)x)-Q(0)P(t)x\right\} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{P(t)Q(h)x-P(t)Q(0)x\right\}\\
&= P(t)\left(\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{Q(h)x-Q(0)x\right\}\right)\\
&= P(t)Q(0)Bx\\
&= Q(0)P(t)Bx. \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

De la identidad (4.49) y nuevamente por la Definición 2.7 tenemos que $P(t)x \in D(B)$ y

$$
\begin{aligned}
B(P(t)x) &= Q(0)^{-1}Q(0)P(t)Bx\\
&= P(t)Bx.
\end{aligned}
$$

Con lo cuál resuelta nuestra afirmación.

Sea $s \in [0,t]$. Por el Lema 2.18, el Teorema 2.11 (iii) y la afirmación anterior tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left\{Q(t-s)P(s)x\right\} &= \frac{d}{ds}Q(t-s)P(s)x + Q(t-s)\frac{d}{ds}P(s)x\\
&= -Q(t-s)BP(s)x + Q(t-s)P(s)Ax\\
&= -Q(t-s)P(s)Bx + Q(t-s)P(s)Ax\\
&= Q(t-s)\left\{P(s)Ax - P(s)Bx\right\}\\
&= Q(t-s)P(s)\left\{Ax - Bx\right\}. \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Luego de (4.50) obtenemos

$$
\frac{d}{ds}\left\{Q(t-s)P(s)x\right\} = Q(t-s)P(s)\left\{Ax-Bx\right\}. \qquad (4.51)
$$

Integrando de 0 a t la ecuación (4.51) y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, conseguimos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t Q(t-s)P(s)\left\{Ax-Bx\right\}ds &= \int_0^t \frac{d}{ds}\left\{Q(t-s)P(s)x\right\}ds\\
&= Q(0)P(t)x - Q(t)P(0)x \qquad (4.52)\\
&= P(t)Q(0)x - Q(t)P(0)x.
\end{aligned}
$$

Por la identidad (4.52), la Proposición 1.14 (e) y las hipótesis de control exponencial, tenemos

$$
\begin{aligned}
\|P(t)Q(0)x - Q(t)P(0)x\| &= \left\| \int_0^t Q(t-s)P(s)\{Ax - Bx\}\, ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|Q(t-s)P(s)\{Ax - Bx\}\|\, ds \\
&\leq \int_0^t \|Q(t-s)\|\, \|P(s)\|\, \|Ax - Bx\|\, ds \\
&\leq \int_0^t Me^{w(t-s)} Me^{ws}\, \|Ax - Bx\|\, ds \\
&= \int_0^t M^2 e^{wt}\, \|Ax - Bx\|\, ds \\
&= M^2 e^{wt}\, \|Ax - Bx\| \int_0^t ds \\
&= tM^2 e^{wt}\, \|Ax - Bx\|\, .
\end{aligned}
$$

Con lo que concluye la prueba.

□

El siguiente teorema, muestra la convergencia puntual y uniforme (bajo cierta condición) de una sucesión de Pre-Semigrupos de operadores lineales. Gracias al Lema 4.14, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.15. Sea $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ un Pre-Semigrupo de operadores lineales y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ su generador infinitesimal. Supongamos que $\{P(t)\}$ sea exponencialmente controlado y $\|P(t)\| \leq Me^{wt}$ para todo $t \geq 0$. Sea $\{P_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Pre-Semigrupos de operadores lineales exponencialmente controlados que satisfacen

$$
\|P_n(t)\| \leq Me^{wt},
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ y el operador $A_n : D(A_n) \subseteq X \longrightarrow X$ es el generador infinitesimal del Pre-Semigrupo $\{P_n(t)\}_{t\geq 0}$. Si se cumplen:

a. $P_n(t) = P(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b. $D(A) \subseteq D(A_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c. $P_n(t)P(s) = P(s)P_n(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $s, t \geq 0$.

d. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ para todo $x \in D(A)$.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(t)x = P(t)x$ para todo $x \in X$ y la convergencia es uniforme para cada intervalo compacto $[0, T]$.

Demostración.

Sea $T > 0$. Tomemos $x \in D(A)$ y $t \in [0, T]$ (fijo). Para cada $n \in \mathbb{N}$ por las hipótesis (b) y (c) tenemos que:

- $x \in D(A) \cap D(A_n)$.
- $P_n(t)P(s) = P(s)P_n(t)$, para todo $s, t \geq 0$.

Luego por el Lema 4.14 obtenemos

$$\|P(t)P_n(0)x - P_n(t)P(0)x\| \leq tM^2e^{wt}\,\|Ax - A_nx\|\,, \tag{4.53}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la hipótesis (a), la desigualdad (4.53) y por (c) (tomando $s = 0$) conseguimos la desigualdad

$$\|P(0)P(t)x - P(0)P_n(t)x\| \leq tM^2e^{wt}\,\|Ax - A_nx.\| \tag{4.54}$$

Como $t \leq T$, de la desigualdad (4.54) y las propiedades de la norma $\|\ \|$ tenemos

$$\begin{aligned} \|P(0)P_n(t)x - P(0)P(t)x\| &\leq tM^2e^{wt}\,\|Ax - A_nx\| \\ &\leq TM^2e^{wT}\,\|A_nx - Ax\| \\ &\leq K_T\,\|A_nx - Ax\|\,, \end{aligned} \tag{4.55}$$

donde $K_T = TM^2e^{wT}$. Así, de (4.55) y la hipótesis (d) obtenemos la convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \|P(0)P_n(t)x - P(0)P(t)x\| = 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} P(0)P_n(t)x = P(0)P(t)x, \tag{4.56}$$

para cada $x \in D(A)$. Por la linealidad y continuidad del operador $P(0)$ tenemos

$$\begin{aligned} P(0)\lim_{n\to\infty} P_n(t)x &= \lim_{n\to\infty} P(0)P_n(t)x \\ &= P(0)P(t)x. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Por la inyectividad de $P(0)$ y la identidad (4.57) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t)x = P(t)x\,, \tag{4.58}$$

para cada $x \in D(A)$. Como K_T no depende de t, por la desigualdad (4.55), la convergencia (4.58) es uniforme en el intervalo $[0, T]$.

Finalmente, como $D(A)$ es denso en X, por (4.58) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t)x = P(t)x\,,$$

para cada $x \in X$ y esta convergencia es uniforme, en cada intervalo $[0, T]$. Con lo cuál concluye la demostración.

$\square$

Observación 4.16. Los resultados anteriores, establecen propiedades de aproximación secuencial, para el caso de Pre-Semigrupos con control exponencial, con la condición de densidad de la imagen del operador inyectivo $P(0)$.

Bibliografía

[1] Belleni-Morante, A., Mc Bride, A., *Applied Nonlinear Semigroups An Introduction.* John Willey &Sons, Chichester, (1988).

[2] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Science+Bussiness Media, New York, (2011).

[3] Chang, Y., Jau, G., Abstract Semilinear Differential Equations and C-regularized Semigroups. *Taiwan J. N. Un.,* 42: 25-52, (1997).

[4] deLaubenfels, R., C-Semigroups and Strongly Continuous Semigroups. *Israel J. Math.,* 81(1-2): 227-255, (1993).

[5] deLaubenfels, R., *Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations.* Springer-Verlag , Berlín, (1994).

[6] deLaunbenfels, R., C – Semigroups and Cauchy Problem. *J. Funct. Analysis.,* 111(1): 44-61, (1993).

[7] Driver, B., *Anaysis Tools with Applications.* Springer, New York, (2003).

[8] Eidelman, Y., Milman, V., Tsolomitis, A., *Functional Analisys An Introduction.* American Mathematical Society, Rhode Island, (2004).

[9] Engel, J. Nagel, R., *A Short Course on Operator Semigroups.* Springer Science+Business Media, LLC., New York, (2006).

[10] Goldstein, J., *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford University Press, New York, (1985).

[11] Hille, E., Phillips R., *Functional Analysis and Semi-Groups.* American Mathematical Society, Vol 31, Rhode Island, (2000).

[12] Hutson, V., Pym , J., Cloud, M., *Applications of Functional Analysis and Operator Theory.* Elsevier B. V., Amsterdam, (2005).

[13] Kantorovitz, S., *Semigroups of Operators and Spectral Theory.* Longman Group Limited, Londres, (1995).

[14] Kantorovitz, S., *Topics in Operator Semigroups.* Birkhäuser, Boston, (2010).

[15] Melnikova, I., Filinkov, A., *Abstract Cauchy Problems: Three Approaches.* Chapman & Hall/CRC, Florida, (2001).

[16] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer – Verlag, New York, (1983).

[17] Schwenninger, F., *Generalizations of Semigroups of Operators.* Bachelor Science Thesis. Vienna Univ. of Tech., Vienna, (2009).

[18] Tanaka, N., On the Exponentially Bounded C-Semigroups. *Tokio J. Math.*, 10(1):107-117, (1987).

[19] Tanaka, N., Miyadera, I., C-Semigroups and Abstract Cauchy Problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 170(1):196-206, (1992).