UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach

TESIS

para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática Pura

AUTOR

Julio Román Loayza Cerrón

ASESOR

Tomás Núñez Lay

Lima – Perú

2006

Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach

Julio Román Loayza Cerrón

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática Pura.

Aprobada por:

____

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini

____

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra

____

Mg. Tomás Núñez Lay

LIMA-PERÚ

Diciembre 2006

- A la memoria de LUCIO LOAYZA GALINDO. Mi siempre querido y recordado PADRE.

- A JULIA mi siempre querida MADRE, por sus enseñanzas y constante apoyo.

- A Rosario, Rocío, Aristóteles, Mirko, Rosa mis hermanos por entender lo absorvente que es mi profesión.

- Lucio y Gabriel Alonso la nueva generación de mi familia.

AGRADECIMIENTOS

- Al Prof. Tomás Núñez Lay por asesorarme en la elección, elaboración y desarrollo del tema de mi tesis. Con su apoyo logré participar como expositor en tres eventos, dos nacionales y uno internacional; teniendo la gran responsabilidad, así como gran orgullo de representar a mi universidad y a nuestro país, trascendiendo en mi vida profesional y personal.
  Una vez más agradezco al Prof. Tomás Núñez Lay por el invalorable apoyo académico que me brindó, pero sobre todo por la enorme paciencia que me tuvo.
- Al Prof. Victor Cabanillas Zannini, así como al Prof. Alfonso Pérez Salvatierra, por sus importantes observaciones luego de revisar mi tesis, contribuyendo así poder hacer algunas importantes precisiones convenientes y en otros casos desarrollar de mejorar manera los capítulos de esta tesis; y en ese camino estar mas conciente de lo que escribía.
- Al Prof. Eugenio Cabanillas Lapa quien de manera muy atenta y cordial aceptó realizar una primera revisión del primer borrador que imprimí de mi tesis; dándome las primeras pautas a seguir. Además por su constante apoyo moral en la culminación de este trabajo.
- A la Prof. Roxana López Cruz por su apoyo como flamante directora de nuestra escuela, en agilizar los documentos, para quedar expedito para la sustentación de mi tesis en esta fecha. Así como su ayuda con el idioma inglés, permitiéndome redactar correctamente el abstract de este trabajo; y apoyo moral permanente.
- Al magíster en matemática pura Walter Huaraca Vargas, reciente título obtenido en la Universidad de Sao Paulo filial Sao Carlos Brasil; amigo sanmarquino, por la ayuda, consejos y apoyo que me dió cuando estuve en esa casa de estudios el verano del 2004, en realidad fue él quien me hizo ver la necesidad de trabajar una tesis, y luego continuar de manera seria y responsable los estudios en matemática pura.
- A José Luis Quispe Castillo amigo sanmarquino, por brindarme algunos apuntes sobre el tema de mi tesis, y sus constantes ánimos a lo largo de la elaboración de mi paper.
- A Jorge Astocondor Félix amigo sanmarquino, por la ayuda que me brindó en elaborar los gráficos que posee este paper, además por su apoyo moral.
- A Orlando Luciano Julca Jesús, Jairo Yamil Esquivel Ortiz primero compañeros de aula en nuestra facultad, luego leales y sinceros amigos, por esa gran amistad , apoyo moral y ánimos para lograr terminar mi tesis.

RESUMEN

APLICACIONES DEL TEOREMA DEL

PUNTO FIJO DE BANACH

JULIO ROMÁN LOAYZA CERRÓN

DICIEMBRE 2006

Orientador: Prof. Tomás Núñez Lay.

Título obtenido: Licenciado en Matemática.

Para aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach (T.P.F.B.), se necesita una aplicación contractiva de un espacio completo en sí mismo; este resultado garantiza la existencia y unicidad de la solución de un problema específico.

El teorema nos provee de un método iterativo, para construir la solución aproximada con cierto margen de error previamente fijado.

Por lo mencionado, el T.P.F.B. ó método de las aproximaciones sucesivas (M.A.S.) se convierte en una potente herramienta del análisis, lo que quedará evidenciado luego de presentar algunas importantes aplicaciones del T.P.F.B., tales como:

1.- Métodos numéricos.

2.- Ecuaciones integrales.

3.- Ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.- Ecuaciones en derivadas parciales.

5.- Problema de Sturm-Liouville.

6.- Programación dinámica.

7.- Dinámica compleja.

PALABRAS CLAVES:

- Espacios métricos completos.
- Contracción.
- Puntos fijos.
- Existencia y unicidad.

ABSTRACT

APPLICATIONS OF THE FIXED POINT BANACH'S THEOREM

<u>JULIO ROMÁN LOAYZA CERRÓN</u>

DECEMBER 2006

Management by: Tomás Núñez Lay.

Obtained Title: Mathematics License.

To apply the Fixed Point Banach's Theorem (F.P.B.T.) , we need a contracting application mapping a complete metric space into itself. The hypothesis guarantees the existences and uniqueness of solution of a specific problem, whose must be planted as a problem to find fixed points.

The theorem provides to us with a iterative method to construct the approximated solution with a certain margin of error previously fixed.

According to before, the F.P.B.T. or successive approximations method (S.A.M.) becomes a powerful tool into the analysis, it can be demonstrated through the next important applications:

1.- Numerical methods.

2.- Integral equations.

3.- Ordinary differential equations.

4.- Partial differential equations.

5.- Sturm-Liouville Problem.

6.- Dynamic programming.

7.- Complex dynamic.

<u>KEY WORDS</u>:

- Complete metric space.
- Fixed point.
- Contraction.
- Existence and uniqueness.

INDICE

INTRODUCCIÓN

Presentaremos el Teorema del Punto Fijo de Banach (T.P.F.B.), que es el análogo abstracto del método de las aproximaciones sucesivas de Picard y de otros resultados semejantes. El T.P.F.B. se desarrolla para aplicaciones contractivas definidas en un espacio métrico completo en el mismo; por esto al T.P.F.B. también se le llama teorema de la aplicación contractante (T.A.C.).

El T.P.F.B. es importante porque proporciona una técnica que permite la prueba de varios teoremas de existencia y unicidad en diferentes ramas del análisis, así como en otras áreas de la matemática. El teorema además, nos proporciona una forma explícita de construir la solución aproximada mediante un proceso iterativo, que converge hacia la solución exacta; incluso mostraremos un resultado fácilmente deducible, el cual nos provee una fórmula para saber el número de iteraciones suficientes para obtener una aproximación deseada con cierto margen de error previamente establecido.

La presente monografía está divida en dos capítulos, en el primero abordamos todo lo concerniente al aspecto teórico dotándolo de ejemplos, los cuales nos permitirán fijar ideas de lo que se hará en adelante. Es así como esto, nos proveerá de suficientes herramientas analíticas para poder mostrar en el segundo capítulo algunas aplicaciones importantes del Teorema del Punto Fijo de Banach (T.P.F.B.).

CAPÍTULO I

DEFINICIONES Y TEOREMAS BÁSICOS

I.1. DEFINICIÓN

Sea X un conjunto no vacío y $T : X \to X$ una aplicación. Un punto $x \in X$ se llama **punto fijo** de T si $T(x) = x$ i.e. x se mantiene fijo por T.

Para cada aplicación $T : X \to X$, podemos definir el conjunto de puntos fijos como

$$fix(T) = \{x \in X : x = T(x)\}.$$

Nótese que el concepto de punto fijo es muy general, ya que no se requiere siquiera que X tenga alguna estructura, tan sólo se requiere un conjunto diferente del vacío.

I.1.1. EJEMPLOS

I.1.1.1.- La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos 0 y 1.

I.1.1.2.- Definimos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = x + a$; para todo $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y todo $x \in \mathbb{R}$ llamada ***traslación***. Es claro que una traslación no tiene puntos fijos.

I.1.1.3.- La rotación del plano tiene sólo un punto fijo, el centro de rotación.

I.1.1.4.- Sea la función $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $\pi(x, y) = (x, 0)$ para cualquiera $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ llamada **proyección**. Recordemos que cualquier número real x es identificado como un par ordenado $(x, 0)$ en el plano. Es obvio que la proyección tiene infinitos puntos fijos.

I.1.1.5.- Sea $h : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ definida por $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Aquí también es claro que h no tiene puntos fijos.

I.2. DEFINICIÓN

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Decimos que una aplicación $T : X \to Y$ es una **contracción** si existe un número real α con $0 \leq \alpha < 1$ tal que, para todo $x, y \in X$

$$d_Y(Tx, Ty) \leq \alpha d_X(x, y).$$

Decimos que α es la constante de contracción de T.

Geométricamente, esto significa que cualesquiera que sean los puntos x e y estos tienen imágenes cercanas a estos puntos x e y; más precisamente, la razón $\dfrac{d_Y(Tx, Ty)}{d_X(x, y)}$ no excede a la constante α que es estrictamente menor que 1.

Cuando $Y = X$, decimos que T es una **contracción en** X .

I.2.1. EJEMPLOS

I.2.1.1.- Sea $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(x) = \sqrt[3]{1+x}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Encontrar la solución de

$$T(x) = x$$

es equivalente a encontrar las raíces de la ecuación

$$x^3 - x - 1 = 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Afirmación: T es una contracción en el subconjunto $X = [1,2]$ porque $\alpha < 1$.

En efecto, observemos que para $x, y \in X$ tenemos por el teorema del valor medio que existe $c \in \left]1,2\right[$ tal que

$$T(x) - T(y) = T'(c)(x-y) \qquad \textbf{(I.2.1.1.A)}$$

Aquí,

$$T'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}\,;$$

como

$$1 < c < 2$$

entonces

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{3} < \frac{\sqrt[3]{(1+c)^2}}{3} < \frac{\sqrt[3]{9}}{3}\,,$$

por consiguiente

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+c)^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\,,$$

de donde

$$T'(c) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} = 0.2100\,.$$

Luego en (1.2.1.1.A) tomando el valor absoluto en ambos miembros y reemplazando la desigualdad anterior tenemos

$$|T(x) - T(y)| \le \alpha |x - y|\,;\ x, y \in X\,.$$

Entonces T es una contracción en X con constante de contracción $\alpha = 0.21 < 1$.

I.2.1.2.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definido por

$$f(x)=sen\left(\frac{x}{2}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

Afirmación: f es una contracción en $\mathbb{R}$.

En efecto, para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=\left|sen\left(\frac{x}{2}\right)-sen\left(\frac{y}{2}\right)\right|\\&=\left|2sen\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\right]\cos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\right]\right|\\&\le 2\left|sen\left(\frac{x-y}{4}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x+y}{4}\right)\right|\le 2\left|sen\left(\frac{x-y}{4}\right)\right|\\&\le 2\left|\frac{x-y}{4}\right|=\frac{1}{2}|x-y|\end{aligned}$$

i.e. $|f(x)-f(y)|\le\alpha|x-y|;\ x,y\in\mathbb{R}$.

Por lo tanto, f es una contracción en $\mathbb{R}$ con constante de contracción $\alpha=\frac{1}{2}$.

I.2.1.3.- Sea $T:[a,b]\to[a,b]$ una función diferenciable en $[a,b]$ tal que

$$|T'(x)|\le k<1,$$

para algún $k\in\mathbb{R}$. Entonces por el teorema del valor medio tenemos, que para cualesquiera $x,y\in[a,b]$ existe $c\in\,]a,b[$ tal que

$$Tx-Ty=T'(c)(x-y),$$

entonces

$$|Tx-Ty|=|T'(c)||x-y|\le k|x-y|.$$

Por lo tanto, T es una contracción en $[a,b]$.

I.2.1.4.- Sea $U\subset\mathbb{R}^m$ abierto y convexo. Si $f:U\to\mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable tal que

$$|f'(x)|\le\alpha<1$$

para una cierta constante α y todo $x\in U$, por la desigualdad del valor medio se cumple para cualesquiera $x, y \in U$ que

$$\left| f(x) - f(y) \right| \leq \alpha \left| x - y \right|$$

entonces f es una contracción.

I.2.1.5.- Para campos vectoriales que parten de $\mathbb{R}^n$ y llegan a $\mathbb{R}^m$ se prueba una versión del teorema del valor medio, el cual a su vez nos permite enunciar:

"Sean $a,b \in \mathbb{R}^n$ con $a \neq b$ tales que el segmento $\left[a,b\right] \subset A \subset \mathbb{R}^n$, A abierto.

Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial con derivadas parciales $D_j f_i$ continuas en A, entonces

$$\left\| f(b) - f(a) \right\|_2 \leq \left\| b - a \right\|_2 \sup \left\{ \sqrt{\sum_{i,j} \left[D_j f_i(x) \right]^2} : x \in \left[a,b\right] \right\}$$ "

Observemos que f es lipschitziana, pero si exigimos que

$$\left\{ \sqrt{\sum_{i,j} \left[D_j f_i(x) \right]^2} : x \in \left[a,b\right] \right\} < 1,$$

tendremos que f es una contracción.

I.2.2. <u>NOTACIONES</u>

I.2.2.1.- Tx denotará la imagen de x vía T i.e. $Tx = T(x)$.

I.2.2.2.- Sea $T : X \to X$ una aplicación, T^n denotará la composición de T consigo misma n veces (o la n-ésima iterada de T) i.e. $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n-veces}$. Observemos que $T^n = T \circ T^{n-1}$.

I.2.3. <u>OBSERVACIONES</u>

I.2.3.1.- Si T es una contracción, resulta ser uniformemente continua.

I.2.3.2.- Si $\alpha = 0$ tenemos que T es la función constante.

I.2.3.3.- En el caso que la aplicación T no sea una contracción, pero para cualesquiera $x, y \in X$ satisface la desigualdad

$$d_Y(Tx,Ty) < d_X(x,y),$$

decimos que T es **no expansiva**.

I.2.3.4.- El Teorema del Punto Fijo de Banach (T.P.F.B.) enunciado más adelante es un teorema de existencia y unicidad para puntos fijos de aplicaciones contractivas, y también da un procedimiento constructivo para obtener aproximaciones cada vez mejores del punto fijo (solución práctica del problema). Este procedimiento es llamado **iteración**, una definición más precisa de iteración es la siguiente.

I.3. <u>DEFINICIÓN</u>

Iteración, es un método tal que dada $T : X \to X$ una aplicación, elegimos un punto arbitrario x_0 en X y determinamos sucesivamente $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de la forma $x_{n+1} = Tx_n$, con $n = 0,1,2,\ldots$; es decir,

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \ldots\ldots, x_{n+1} = Tx_n .$$

Los procedimientos de iteración son usados a menudo en muchas ramas de la matemática aplicada, y las pruebas de convergencia y de estimaciones de error son comúnmente obtenidas aplicando el T.P.F.B.

I.4. <u>TEOREMA</u> (TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH (T.P.F.B.))

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico completo. Supongamos que $T : X \to X$ es una contracción en X. Entonces

i).- Existe un único $\bar{x} \in X$ punto fijo de T.

ii).- Cualquiera sea $x_0 \in X$, la sucesión iterada $x_n = Tx_{n-1}$; $n = 1,2,\ldots$ converge a $\bar{x}$.

<u>Demostración</u>:

Construiremos una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ y mostraremos que es de Cauchy, esta resulta ser convergente en el espacio completo X, probaremos entonces que su límite $\bar{x}$ es un punto fijo de T y que T no tiene más puntos fijos.

EXISTENCIA

Para $x_0 \in X$ arbitrario explicitamos los elementos de la sucesión iterada $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_n = Tx_{n-1}$; $n = 1,2,\ldots$

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T(Tx_0) = T^2 x_0 \text{ , y en general } x_n = T^n x_0,\ n = 1,2,\ldots$$

Claramente esta es una sucesión de imágenes de x_0 bajo repetidas aplicaciones de T. Vamos a demostrar que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X.

Para $m \geq 1$, tenemos

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha d\left(x_m, x_{m-1}\right) = \alpha d\left(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}\right)$$
$$\leq \alpha^2 d\left(x_{m-1}, x_{m-2}\right) = \alpha^2 d\left(Tx_{m-2}, Tx_{m-3}\right) \leq \alpha^3 d\left(x_{m-2}, x_{m-3}\right)$$
$$\vdots$$
$$\leq \alpha^m d\left(x_0, x_1\right)$$

i.e. $d(x_{m+1}, x_m) \leq \alpha^m d\left(x_0, x_1\right),\ m \in \mathbb{Z}^+.$ **(I.4.A)**

Por otro lado para $m \geq n \geq 1$ tenemos

$$d(x_n, x_m) \leq d\left(x_n, x_{n+1}\right) + d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \cdots\cdots + d\left(x_{m-1}, x_m\right)$$

(Usando repetidas veces la relación (I.4.A)).

$$\leq \alpha^n d\left(x_0, x_1\right) + \alpha^{n+1} d\left(x_0, x_1\right) + \cdots + \alpha^{m-1} d\left(x_0, x_1\right)$$
$$= \alpha^n \left(1 + \alpha + \cdots\cdots + \alpha^{m-n-1}\right) d\left(x_0, x_1\right)$$
$$= \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} d\left(x_0, x_1\right)$$

Como $0 \leq \alpha < 1$ tenemos $1 - \alpha^{m-n} < 1$, luego

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \qquad \textbf{(I.4.B)}$$

Además

$$\lim_{n \to \infty} \alpha^n = 0$$

pues $0 \leq \alpha < 1$, por lo tanto de (I.4.B) obtenemos

$$\lim_{n, m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

luego, la sucesión $\left(x_n\right)_{n \geq 1}$ es de Cauchy en X. Como X es completo, $\left(x_n\right)_{n \geq 1}$ converge a un punto de X, digamos que $\bar{x} \in X$ es tal que $x_n \to \bar{x}$.

Vamos a demostrar que $\bar{x}$ es un punto fijo de T. En efecto, tenemos

$$d(T\bar{x}, \bar{x}) \leq d\left(T\bar{x}, x_n\right) + d\left(x_n, \bar{x}\right),$$

pero como $x_n = Tx_{n-1}$, tenemos

$$d(T\bar{x}, \bar{x}) \leq \alpha d\left(\bar{x}, x_{n-1}\right) + d\left(x_n, \bar{x}\right).$$

Observemos que cada término del segundo miembro de la desigualdad anterior tiende a 0, esto implica que $Tx = x$.

UNICIDAD

Supongamos que exista $\bar{y} \in X$ otro punto fijo de T con $\bar{x} \neq \bar{y}$.

i.e. tenemos $T\bar{x} = \bar{x}$, $\bar{y} = T\bar{y}$ con $\bar{x} \neq \bar{y}$ en X, entonces

$$0 < d\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = d\left(T\bar{x}, T\bar{y}\right) \leq \alpha d\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$$

de donde resulta que $\alpha \geq 1$, lo que es una contradicción. ■

El aporte más importante a destacar del T.P.F.B., es que nos da explícitamente un esquema iterativo para encontrar una solución aproximada de un determinado problema. Si esta aproximación se compara con la solución exacta, da origen a la aparición de error, el cual deseamos que sea el menor posible.

I.4.1. <u>COROLARIO</u> (ESTIMACIÓN DE LA COTA DE ERROR)

Bajo las condiciones del T.P.F.B. y siguiendo las notaciones usadas, se cumplen

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \qquad \textbf{(I.4.1.A)}$$

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n) \qquad \textbf{(I.4.1.B)}$$

<u>Demostración</u>:

La desigualdad (I.4.1.A) se sigue de (I.4.B) manteniendo fijo n y haciendo $m \to \infty$. Para deducir (I.4.1.B), tomamos $n = 1$ y reemplazando x_0 por y_0 y x_1 por y_1, obtenemos de (I.4.1.A)

$$d(y_1, \bar{x}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1)$$

Haciendo $y_0 = x_{n-1}$, tenemos

$$y_1 = Ty_0 = Tx_{n-1} = x_n,$$

obteniendo finalmente (I.4.1.B). ■

Cada una de estas desigualdades nos permiten hallar los errores al aproximarnos a $\bar{x}$ usando $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$. Llamaremos a la desigualdad (1.4.1.A) **estimación previa**, y a (1.4.1.B) **estimación posterior**. Haremos uso de este corolario en el capítulo 2, sección II.1.3.

La cota de error previa (I.4.1.A) puede ser usada en el inicio de los cálculos para estimar el número de pasos necesarios para obtener una exactitud dada; (I.4.1.B) puede ser usada en la etapa intermedia o al final del cálculo. Es menos exacta que (I.4.1.A) y puede ser mejorada.

El T.P.F.B. se puede extender al caso en que alguna potencia de T sea contractiva en X .

I.4.2. <u>COROLARIO</u>

Sean (X,d) un espacio métrico completo y $T: X \to X$ una aplicación tal que para algún entero $m \geq 1$, la aplicación T^m es una contracción en X . Entonces T tiene un único punto fijo y, para todo $x_0 \in X$, la sucesión $\left(T^n x_0\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto fijo.

<u>Demostración</u>:

· Si $m=1$, nuestro enunciado es el T.P.F.B. ya probado.

· Si $m>1$. Sea $\bar{y}$ el punto fijo de T^m cuya existencia viene del T.P.F.B., probaremos que $\bar{y}$ es punto fijo de T .

$$
\begin{aligned}
d(T\bar{y},\bar{y}) &= d(T(T^m\bar{y}),T^m\bar{y}) \\
&= d(T^m(T\bar{y}),T^m\bar{y}) \\
&\leq \beta d(T\bar{y},\bar{y})
\end{aligned}
$$

donde β es la constante de contracción de T^m . Luego obtenemos que

$$d(T\bar{y},\bar{y})=0$$

pues $\beta<1$. Por lo tanto $T\bar{y}=\bar{y}$.

Recíprocamente, si $\bar{y}$ es un punto fijo de T

$$T^m\bar{y}=T^{m-1}(T\bar{y})=T^{m-1}\bar{y}=T^{m-2}(T\bar{y})=T^{m-2}\bar{y}=\cdots\cdots=T\bar{y}=\bar{y}$$

entonces $\bar{y}$ es un punto fijo de T^m .

En resumen, tenemos bajo las condiciones de este corolario, lo siguiente:

"$\bar{y}$ es un punto fijo de T si y sólo si $\bar{y}$ es un punto fijo de T^m"

Como T^m es contractiva en X y (X,d) es completo, por el T.P.F.B. ítem i) sabemos que un existe un único punto fijo $\bar{y}$ de T^m que por tanto es el único punto fijo de T .

Además dado $x_0 \in X$ arbitrario, tenemos por el T.P.F.B. ítem ii) para la contracción T^m que

$$(T^m)^k x_0 = T^{mk} x_0 \to \bar{y}$$

cuando $k \to \infty$, y de aquí para todo r con $1 \le r \le m-1$ tenemos

$$T^n x_0 = T^{mk+r} x_0 = T^{mk}\left(T^r x_0\right) \to \bar{y}$$

i.e. Hemos probado que $T^n x_0 \to \bar{y}$ cuando $n \to \infty$. ■

Desde el punto de vista de la matemática aplicada, en las aplicaciones prácticas la situación no es aún completamente satisfactoria porque frecuentemente ocurre que la aplicación T no es una contracción en el espacio entero X , pero su restricción $T|_Y$ a un subconjunto cerrado Y del espacio métrico completo X satisface la definición de contracción. En este caso si podemos asegurar que $T(Y) \subset Y$ entonces aplicamos el T.P.F.B. a la aplicación $T|_Y : Y \to Y$, teniendo en cuenta que Y también es un espacio métrico completo.

I.4.3. TEOREMA (CONTRACCIÓN EN UNA BOLA)

Sea (X,d) un espacio métrico completo y $Y = \bar{B}(x_0, r)$, $x_0 \in X$. Supongamos que $T : X \to X$ y para todo $x, y \in X$ se satisface las siguientes condiciones

1).- Existe $0 \le \alpha < 1$ tal que $d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y)$.

2).- $d(x_0, Tx_0) \le (1-\alpha) r$.

Entonces para $x_0 \in Y$ la sucesión iterada $x_n = T^n x_0$; $n \in \mathbb{N}$, converge a un punto $\bar{x} \in Y$. Este $\bar{x}$ es un punto fijo de T y es el único punto fijo de T en Y .

Demostración:

Es suficiente probar que $T(Y) \subset Y$.

En efecto, sea $x \in Y = \bar{B}(x_0, r)$ entonces

$$d(x, x_0) \le r .$$

Por otro lado, sabemos que

$$\begin{aligned} d(Tx, x_0) &\le d(Tx, Tx_0) + d(Tx_0, x_0) \\ &\le \alpha d(x, x_0) + (1-\alpha) r \\ &\le \alpha r + r - \alpha r = r . \end{aligned}$$

i.e. $d(Tx, x_0) \le r$ lo que implica que $Tx \in \bar{B}(x_0, r) = Y$ y por lo tanto $T(Y) \subset Y$.

i.e. tenemos $T|_Y : Y \to Y$ es una contracción, (Y,d) es completo, entonces por el T.P.F.B. T tiene un único punto fijo $\bar{x} \in Y$. ■

I.4.4. TEOREMA

Sea X un espacio métrico completo y Λ un espacio topológico. Para todo $\lambda \in \Lambda$, sea $T_\lambda : X \to X$ tal que

1).- $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una **familia de contracciones localmente uniformes** i.e. para todo $\lambda_0 \in \Lambda$, existe una vecindad Λ_0 de λ_0 y una constante $0 \le c_{\Lambda_0} < 1$ tal que

$$d(T_\lambda x, T_\lambda y) \le c_{\Lambda_0} d(x,y);\ x,y \in X\ ,\ \lambda \in \Lambda_0 .$$

2).- La función $\lambda \in \Lambda \mapsto T_\lambda x \in X$ es continua para todo $x \in X$.

Entonces, si para cada $\lambda \in \Lambda$, x_λ denota el punto fijo de T_λ, tenemos que la aplicación $\lambda \in \Lambda \mapsto x_\lambda \in X$ es continua.

Demostración:

Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ y Λ_0 como en 1), entonces por hipótesis 2) para cada $x \in X$, tenemos

$$T_\lambda x \to T_{\lambda_0} x. \qquad \textbf{(I.4.4.A)}$$

Luego, consideremos

$$\begin{aligned} d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) &= d(T_\lambda x_\lambda, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}) \\ &\le d(T_\lambda x_\lambda, T_\lambda x_{\lambda_0}) + d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}) \\ &\le c_{\Lambda_0} d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) + d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}) \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) \le \frac{1}{1-c_{\Lambda_0}} d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0})$$

el segundo miembro, tomando $x = x_{\lambda_0}$ en (I.4.4.A), converge a 0.

Finalmente, tenemos $x_\lambda \to x_{\lambda_0}$ siempre que $\lambda \to \lambda_0$. ■

I.4.5. OBSERVACIÓN

Cuando $\Lambda_0 = \Lambda$ en el teorema I.4.4, decimos que $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una **familia uniforme de contracciones** o que la aplicación

$$T : (\lambda, x) \in \Lambda \times \mapsto T(\lambda,x) = T_\lambda(x) \in X\ ,$$

es una **contracción uniforme**.

I.4.6. EJEMPLOS

I.4.6.1.- El teorema de la Aplicación Contractante (T.A.C. ó T.P.F.B.) no se satisface si T es no expansiva.

En efecto, como un contra ejemplo sencillo, consideremos $X = [1,+\infty[\subset \mathbb{R}$ con la distancia usual

$$d(x,y) = |x-y|,\ x,y \in X\ .$$

Como X es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, resulta un espacio métrico completo. Definamos la aplicación $T : X \to X$ por

$$Tx = x + \frac{1}{x},\ x \in X\ .$$

Verifiquemos que T es no expansiva.

En efecto, por el teorema del valor medio existe $c \in]1,+\infty[$ tal que

$$|Tx - Ty| = |T'(c)||x-y|. \tag{I.4.6.1.A}$$

Tenemos

$$|T'(x)| = 1 - \frac{1}{x^2},$$

como $c > 1$ entonces

$$0 < 1 - \frac{1}{c^2} < 1$$

por lo tanto

$$|T'(c)| < 1,$$

luego reemplazando en (I.4.6.1.A) para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ tenemos

$$d(Tx,Ty) < d(x,y),$$

y sin embargo no existe punto fijo de T.

I.4.6.2.- Un ejemplo más simple (cuyo dominio no es entretanto un subconjunto cerrado) es el de la función $g :]0,1[\to]0,1[$ definida por

$$g(x) = \frac{x^3}{4},\ x \in]0,1[.$$

Tenemos

$$0 < g'(x) < 1,$$

luego por el ejemplo I.2.1.4., g es no expansiva y no posee punto fijo en $]0,1[$.

I.4.6.3.- Consideremos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

Para todo $x\in\mathbb{R}$ tenemos que

$$0< f'(x)<1,$$

pues

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Pero como para todo $x\in\mathbb{R}$ se cumple que

$$f(x)>x,$$

entonces f no posee punto fijo (ver gráfico I.5.1.3. página 27).

I.4.6.4.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función satisfaciendo la condición de Lipschitz

$$\left|f(t)-f(s)\right|\le L\left|t-s\right|;\ t,s\in\mathbb{R}$$

con $0\le L<1$.

Entonces existe un único $\bar{t}\in\mathbb{R}$ tal que $f(\bar{t})=\bar{t}$ y, para cualquier $t\in\mathbb{R}$, tenemos $f^{(n)}(t)\to\bar{t}$ cuando $n\to\infty$.

En efecto, basta observar que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo y que f es una contracción en $\mathbb{R}$, pues $0\le L<1$.

I.4.6.5.- Sea $F\subset\mathbb{R}^n$ cerrado, $f:F\to F$ satisfaciendo la condición de Lipschitz

$$\left\|f(x)-f(y)\right\|\le L\left\|x-y\right\|;\ x,y\in F$$

con $0\le L<1$. Entonces existe un único $\bar{x}\in F$ tal que $f(\bar{x})=\bar{x}$.

En efecto, siendo $(\mathbb{R}^n,\|\ \|)$ completo, un conjunto cerrado $F\subset\mathbb{R}^n$ será un espacio métrico completo.

I.4.6.6.- Sea $T:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en $[a,b]$; con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ tales que

$$0<\alpha\le T'(x)<\frac{1}{\beta};\ x\in[a,b].$$

Si $T(a) < 0 < T(b)$, entonces podemos usar el T.P.F.B. para hallar una solución aproximada de la ecuación $Tx = 0$, para todo $x \in [a,b]$. Definiendo

$$T_1 x = x - \beta T x \qquad \textbf{(I.4.6.6.A)}$$

tenemos que $Tx = 0$ si y sólo si $T_1 x = x$. Luego, el problema se reduce a probar que

$$T_1([a,b]) \subset [a,b]$$

y que T_1 es una contracción en $[a,b]$.

En efecto, tenemos

$$T_1(a) = a - \beta T(a) > a\,,$$

$$T_1(b) = b - \beta T(b) < b\,.$$

Derivando ambos miembros de (I.4.6.6.A), obtenemos que

$$T_1' x = 1 - \beta T'(x) > 0$$

entonces T_1 es creciente en $[a,b]$, luego $T_1(x) \in [a,b]$ si $x \in [a,b]$.

Y por lo tanto

$$T_1([a,b]) \subset [a,b].$$

Además, como

$$\left|T_1'(x)\right| = 1 - \beta T'(x) \leq 1 - \beta\alpha < 1$$

es decir tenemos

$$\left|T_1'(x)\right| \leq k\,,\ x \in [a,b]$$

donde $k = 1 - \beta\alpha$ con $0 < k < 1$.

Luego por el ejemplo I.2.1.3., tenemos que

$$T_1 : [a,b] \to [a,b]$$

es una contracción en $[a,b]$. Luego por el T.P.F.B., existe un y sólo un $\overline{x} \in [a,b]$ punto fijo de T_1. Aún más, dado un punto $x_0 \in [a,b]$ tenemos que la sucesión iterada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n = T_1 x_{n-1}$; $n = 1,2,\ldots$ es tal que $T_1^n x \to \overline{x}$.

I.4.6.7.- La ecuación

$$s = \theta - \varepsilon sen\theta$$

con

$$0 \le \theta \le 2\pi \,,\; 0 \le \varepsilon < 1 \,,\; 0 < s < 2\pi$$

donde ε es la excentricidad de la orbita de algún satélite, s es la anomalía media o ángulo que recorre el satélite y θ es anomalía excéntrica; está ecuación nos permite calcular de forma aproximada la distancia de un satélite con respecto al Sol, llamada **ecuación de Kepler.**

Dado s se desea hallar θ tal que

$$\theta - \varepsilon sen\theta = s$$

con este objetivo definimos

$$T(\theta) = \theta - \varepsilon sen\theta - s \,,$$

y el problema se reduce a hallar los ceros de la función T.

En efecto, hacemos

$$T(0) = -s < 0 \,,$$

$$T(2\pi) = 2\pi - s > 0 \,,$$

entonces

$$T(0) < 0 < T(2\pi) \,.$$

Luego tomamos $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon < \delta < 1$, con esto

$$T'(\theta) = 1 - \varepsilon \cos\theta < 1 + \delta \,.$$

Y como

$$1 - \varepsilon < 1 - \varepsilon \cos\theta = T'(\theta) \,,$$

tenemos

$$1 - \varepsilon < T'(\theta) < 1 + \delta$$

entonces

$$0 < 1 - \varepsilon \le T'(\theta) < \frac{1}{\frac{1}{1+\delta}} \,.$$

Luego se cumplen las condiciones del ejemplo I.4.6.6., con

$$a = 0 \,,\; b = 2\pi \,,\; \alpha = 1 - \varepsilon \,,\; \beta = \frac{1}{1+\delta} \,.$$

Entonces de (I.4.6.6.A) tenemos que

$$T_1(\theta) = \theta - \frac{1}{1+\delta} T\theta = \theta - \frac{1}{1+\delta}\left(\theta - \theta sen\theta - s\right)$$

es una contracción, y los puntos fijos de T_1 son los ceros de T.

I.4.6.8.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por

$$f(x, y) = \left(sen(x+y), \sqrt{1+x^2+y^2} \right).$$

Entonces existe un único $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(p) = 2p$.

Afirmación: $\dfrac{f}{2}$ es una contracción en $\mathbb{R}^2$.

En efecto, usando el ejemplo I.2.1.5., para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{bmatrix}$$

y en consecuencia,

$$\sum_{i,j} \left[D_j f_i(x) \right]^2 = 2\cos^2(x+y) + \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \le 3.$$

Entonces por el ejemplo anterior $\dfrac{f}{2}$ es una contracción en $\mathbb{R}^2$ con constante de contracción $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$; recordemos que $\mathbb{R}^2$ es completo. Por tanto por el T.P.F.B. existe un único $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\dfrac{f}{2}(p) = p$ entonces $f(p) = 2p$.

Más generalmente, existe un único $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(p) = kp$ siempre que $k > \sqrt{3}$.

I.4.6.9.- Dado el conjunto

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1,\ |y| \le 1 \right\}$$

y el sistema

$$\begin{cases} sen(x)sen(y) = 2x \\ x^2 + y^2 = 4y \end{cases}$$

Probaremos que $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ es la única solución en C del sistema dado.

En efecto, observemos que C es completo por ser un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ y y consideremos el campo vectorial $f : C \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$f(x,y) = \left(\frac{sen(x)sen(y)}{2}, \frac{x^2+y^2}{4} \right).$$

Es inmediato que $f(C) \subset C$ y que f es diferenciable; y la matriz jacobiana viene dada por

$$Df(x,y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(x)sen(y) & sen(x)\cos(y) \\ & \\ x & y \end{bmatrix}$$

luego, hallamos

$$\sum_{i,j} \left[D_j f_i(x) \right]^2 = \frac{1}{4}\left(\cos^2(x)sen^2(y) + sen^2(x)\cos^2(y) + x^2 + y^2 \right)$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(sen^2(y) + sen^2(x) + x^2 + y^2 \right)$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(2sen^2(1) + 2 \right) = \frac{1}{2}\left(sen^2(1) + 1 \right) < 1.$$

Pues si para todo $x \in [-1,1]$ hacemos

$$g(x) = sen^2(x),$$

entonces g alcanza su máximo en $x = 1$.

Por lo tanto por el ejemplo I.2.1.5. f es una contracción en C, luego sigue del T.P.F.B. que f tiene un único punto fijo, y en consecuencia $(0,0)$ es la única solución del sistema considerado en C.

I.4.6.10.- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo y sea $f : \overline{A} \to \overline{A}$ una aplicación continua.

Supongamos que f es derivable en A y que $\sup\left\{ \sqrt{\sum_{i,j} \left[D_j f_i(x) \right]^2} : x \in A \right\} < 1$.

Entonces f tiene un único punto fijo en $\overline{A}$.

En efecto, sean $x, y \in A$ con $x \neq y$ aplicando el resultado del ejemplo I.2.1.5. a la función f en el segmento de recta $[x, y]$ obtenemos

$$\| f(y) - f(x) \|_2 \leq \| y - x \|_2 \sup \left\{ \sqrt{\sum_{i,j} \left[D_j f_i(x) \right]^2} : x \in A \right\}.$$

Así, denotando

$$\alpha = \sup \left\{ \sqrt{\sum_{i,j} \left[D_j f_i(x) \right]^2} : x \in A \right\} < 1,$$

tenemos que

$$\| f(y) - f(x) \|_2 \leq \alpha \| y - x \|_2 ;\ x, y \in A.$$

Por la continuidad de f, también tenemos

$$\| f(y) - f(x) \|_2 \leq \alpha \| y - x \|_2 ;\ x, y \in \overline{A}.$$

Entonces por el T.P.F.B. tenemos que existe un único punto fijo de f en $\overline{A}$.

I.4.6.11.- Demostraremos la existencia de una única función continua y acotada $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ que es solución de la ecuación integral

$$y(t) = sen(t) + \int_0^t e^{-s^2} y(se^t) ds,\ t \in [0, +\infty[.$$

En efecto, consideremos

$$X = C^*\left([0, +\infty[; \mathbb{R} \right) = \{ f : [0, +\infty[\to \mathbb{R};\ f \text{ es continua y acotada} \}$$

i.e. el espacio de las funciones continuas y acotadas en $[0, +\infty[$, para cualesquiera $f, g \in X$ se define la norma

$$\| f - g \| = \sup_{t \in [0, +\infty[} | f(x) - g(x) |.$$

Recordemos que $(X, \| \ \|)$ es un espacio de Banach.

Para todo $x \in X$ y cada $t \in [0, +\infty[$, definimos la aplicación $T : X \to X$ por

$$(Tx)(t) = sen(t) + \int_0^t e^{-s^2} x(se^t) ds.$$

Afirmación 1: $Tx \in X$.

i).- Tx es continua sobre $\left[0,+\infty\right[$ pues la función seno es continua, y la función

$t \mapsto \int_0^t e^{-s^2} x(se^t)ds$ es continua por el teorema fundamental del cálculo.

ii).- Tx es acotada en $\left[0,+\infty\right[$.

En efecto, para toda $x \in X$ y cada $t \in \left[0,+\infty\right[$, tenemos

$$\left|(Tx)(t)\right| \le \left|sen(t)\right| + \int_0^t e^{-s^2} \left|x(se^t)\right| ds$$

$$\le 1 + M \int_0^t e^{-s^2} ds \quad (x \text{ es acotada pues } x \in X)$$

$$\le 1 + M \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = 1 + M \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Afirmación 2: T es una contracción en X .

En efecto, para cualesquiera $u, v \in X$, tenemos

$$\left|(Tu)(t) - (Tv)(t)\right| = \left|\left(sen(t) + \int_0^t e^{-s^2} u(se^t)ds\right) - \left(sen(t) + \int_0^t e^{-s^2} v(se^t)ds\right)\right|$$

$$= \left|\int_0^t e^{-s^2} \left[u(se^t) - v(se^t)\right] ds\right|$$

$$\le \int_0^t e^{-s^2} \left|u(se^t) - v(se^t)\right| ds$$

$$\le \sup_{t\in[0,+\infty)} \left|u(se^t) - v(se^t)\right| \int_0^t e^{-s^2} ds$$

$$\le \|u - v\| \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \|u - v\|$$

i.e. $\left|(Tu)(t) - (Tv)(t)\right| \le \frac{\sqrt{\pi}}{2} \|u - v\|$; $t \in \left[0,+\infty\right[$, $u, v \in X$.

Entonces

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \left|(Tu)(t) - (Tv)(t)\right| \le \frac{\sqrt{\pi}}{2} \|u - v\|; \; u, v \in X ,$$

por lo tanto

$$\|Tu - Tv\| \le \frac{\sqrt{\pi}}{2} \|u - v\|; \; u, v \in X .$$

Luego, T es una contracción en el espacio de Banach $X = C^*([0,+\infty[;\mathbb{R})$, y por lo tanto, por el T.P.F.B. se concluye la prueba.

I.4.6.12.- Demostraremos que, para cualquier $f \in X = C^*([0,+\infty[;\mathbb{R})$ existe una única función $y \in X$ tal que

$$y(t) = f(t) + \int_0^t \frac{y(s|\cos(t)|)}{4+s^2} ds, \ t \geq 0.$$

En efecto, en $X = C^*([0,+\infty[;\mathbb{R})$ para todo $x \in X$ y todo $f \in X$ definimos la aplicación $T : X \to X$ por

$$(Tx)(t) = f(t) + \int_0^t \frac{x(s|\cos(t)|)}{4+s^2} ds, \ t \geq 0.$$

Afirmación 1: $Tx \in X$.

En efecto, para cada $x \in X$ tenemos

i).- Tx es continua sobre $[0,+\infty[$, pues f lo es por hipótesis, además la función

$t \mapsto \int_0^t \frac{x(s|\cos(t)|)}{4+s^2} ds$ es continua por el teorema fundamental del cálculo.

ii).- Veamos que Tx es acotada en $[0,+\infty[$. Tenemos para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leq |f(t)| + \int_0^t \frac{|x(s|\cos(t)|)|}{4+s^2} ds \\ &\leq M + N\int_0^t \frac{ds}{4+s^2} \quad (f \text{ y } x \text{ acotadas pues } f, x \in X) \\ &\leq M + N\int_0^\infty \frac{ds}{4+s^2} \leq M + N\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Afirmación 2: T es una contracción en X.

En efecto, para $u, v \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| &= \left| \left(f(t) + \int_0^t \frac{u(s|\cos(t)|)}{4+s^2} ds \right) - \left(f(t) + \int_0^t \frac{v(s|\cos(t)|)}{4+s^2} ds \right) \right| \\ &= \left| \int_0^t \frac{1}{4+s^2} \left[u(s|\cos(t)|) - v(s|\cos(t)|) \right] ds \right| \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{t\in[0,+\infty)} \left\{ \left| u\left(s\left|\cos(t)\right|\right) - v\left(s\left|\cos(t)\right|\right) \right| \right\} \int_0^t \frac{1}{4+s^2}\, ds \ = \frac{\pi}{4} \|u - v\| .$$

$$\text{i.e. } \left| \left(Tu\right)(t) - \left(Tv\right)(t) \right| \leq \frac{\pi}{4} \|u - v\| ;\ u, v \in X \ ,\ t \geq 0 .$$

Por lo tanto

$$\|Tu - Tv\| \leq \frac{\pi}{4} \|u - v\| ;\ u, v \in X \ .$$

T es una contracción en $X = C^*\left(\left[0,+\infty\right[;\mathbb{R}\right)$, la conclusión sigue del teorema del punto fijo de Banach (T.P.F.B.).

I.4.6.13.- Observemos que si $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y la aplicación $f : X \to X$ cumple para arbitrarios $x, y \in X$ con $x \neq y$, con la condición

$$\left| f(x) - f(y) \right| < \left| x - y \right| ,$$

entonces f posee un único punto fijo en X .

En efecto, sea $a \in X$ el punto donde la función continua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \left| x - f(x) \right|$$

posee su mínimo $c = \left| a - f(a) \right|$.

- Si fuese $c \neq 0$, entonces tendríamos $a \neq f(a)$, de donde

$$\left| f(a) - f(f(a)) \right| < \left| a - f(a) \right|$$

es decir, tenemos

$$\varphi\left(f(a) \right) < c ,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$c = 0 ,$$

implicando que

$$a = f(a) ,$$

i.e. a es un punto fijo de f en X .

- Si fuese $a = f(a)$ y $b = f(b)$ con $a \neq b$ resultaría

$$\left| a - b \right| = \left| f(a) - f(b) \right| < \left| a - b \right| ,$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto a es el único punto fijo de f en X .

I.1.6.14.- Sean Λ un espacio topológico; $\lambda_0 \in \Lambda$, $r>0$ y f dada por

$$f:(t,s,x,\lambda)\in D=[a,b]\times[a,b]\times[-r,r]\times\Lambda \mapsto f(t,s,x,\lambda)\in\mathbb{R}$$

una función continua tal que

i). $f(t,s,0,\lambda_0)=0$ para cualquier $s,t\in[a,b]$;

ii). existe $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right):D\to\mathbb{R}$ continua con $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(t,s,0,\lambda_0)=0$; $s,t\in[a,b]$.

Entonces existe una vecindad Λ_0 de λ_0 tal que, para todo $\lambda\in\Lambda_0$, la ecuación integral

$$y(t)=\int_a^b f[t,s,y(s),\lambda]ds,\ t\in[a,b]$$

tiene única solución $u_\lambda\in C([a,b],[-r,r])$, y la aplicación

$$\lambda\in\Lambda_0\mapsto u_\lambda\in C([a,b],[-r,r])$$

es continua.

En efecto, consideremos

$$X=C([a,b],[-r,r])=\{\ f:[a,b]\to[-r,r];\ f \text{ es continua en } [a,b]\},$$

para arbitrarios $f,g\in X$ definimos

$$d(f,g)=\sup_{z\in[a,b]}\left|f(z)-g(z)\right|;$$

recordemos que (X,d) es un espacio métrico completo.

Por otro lado, dado $c<1$ de i) y ii), sigue que existe una vecindad Λ_0 de λ_0 tal que, para todo $\lambda\in\Lambda_0$, $s,t\in[a,b]$ y cualquier $x\in[-r,r]$, tenemos

i'). $\left|f(t,s,y(s),\lambda)\right|\le\dfrac{r}{b-a}$, ii'). $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,s,x,\lambda)\right|\le\dfrac{c}{2r(b-a)}$.

Dado $\lambda\in\Lambda_0$, $u\in X$ y $t\in[a,b]$, definimos

$$(T_\lambda u)(t)=\int_a^b f[t,s,u(s),\lambda]ds;$$

se sigue que la función $T_\lambda u$ es continua y de i'), se sigue que $T_\lambda x\in X$ y de ii'), se sigue que la aplicación

$$T:(\lambda,u)\in\Lambda_0\times X\mapsto T_\lambda u\in X$$

es una contracción uniforme, pues dados $u,v\in X$, por la desigualdad del valor medio, tenemos

$$\left|\left(T_\lambda u\right)(t)-\left(T_\lambda v\right)(t)\right|\le\int_a^b\left|f\left[t,s,u(s),\lambda\right]-f\left[t,s,v(s),\lambda\right]\right|ds$$

$$\le\int_a^b\left|u(s)-v(s)\right|\frac{c}{2r(b-a)}ds\le c.$$

Por otro lado, es inmediato que, para cualquier $u\in X$, la aplicación $\lambda\in\Lambda_0\mapsto T_\lambda u\in X$ es continua. El resultado sigue del T.P.F.B.

I.5. <u>INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL T.P.F.B.</u>

Para enunciar el teorema del punto fijo de Banach para el caso real, usaremos el ejemplo I.2.1.3. teniendo el siguiente enunciado:

"Sean $a,b\in\mathbb{R}$ con $a\neq b$ y $g:\left[a,b\right]\to\left[a,b\right]$ una función diferenciable tal que

$$\left|g'(x)\right|\le k<1,\ x\in\left[a,b\right].$$

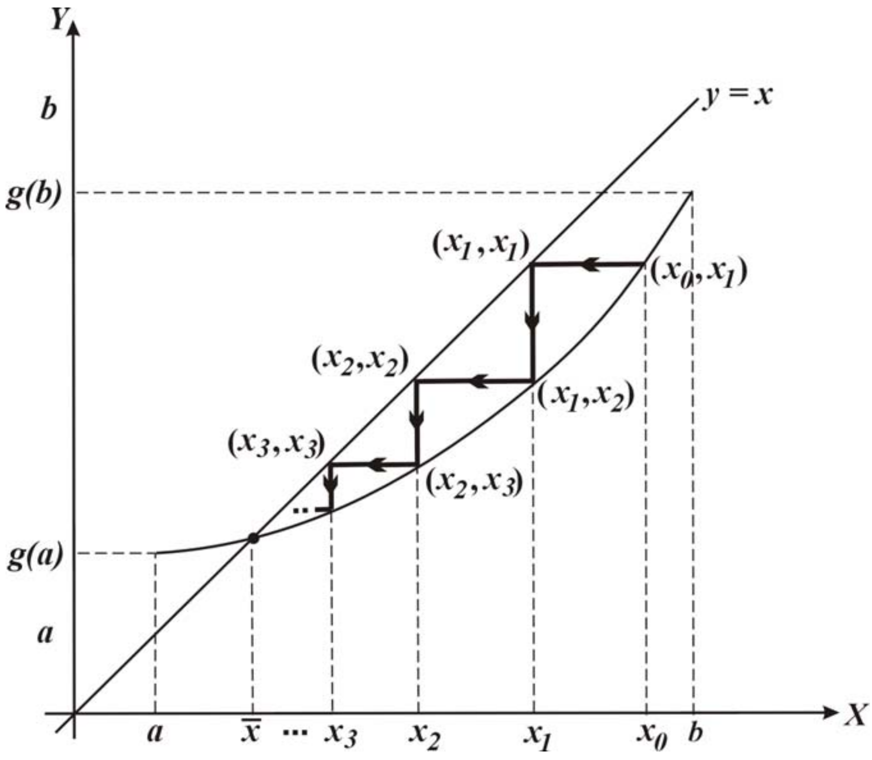
Entonces:

i).- Existe un único $\bar{x}\in\left[a,b\right]$ punto fijo de g .

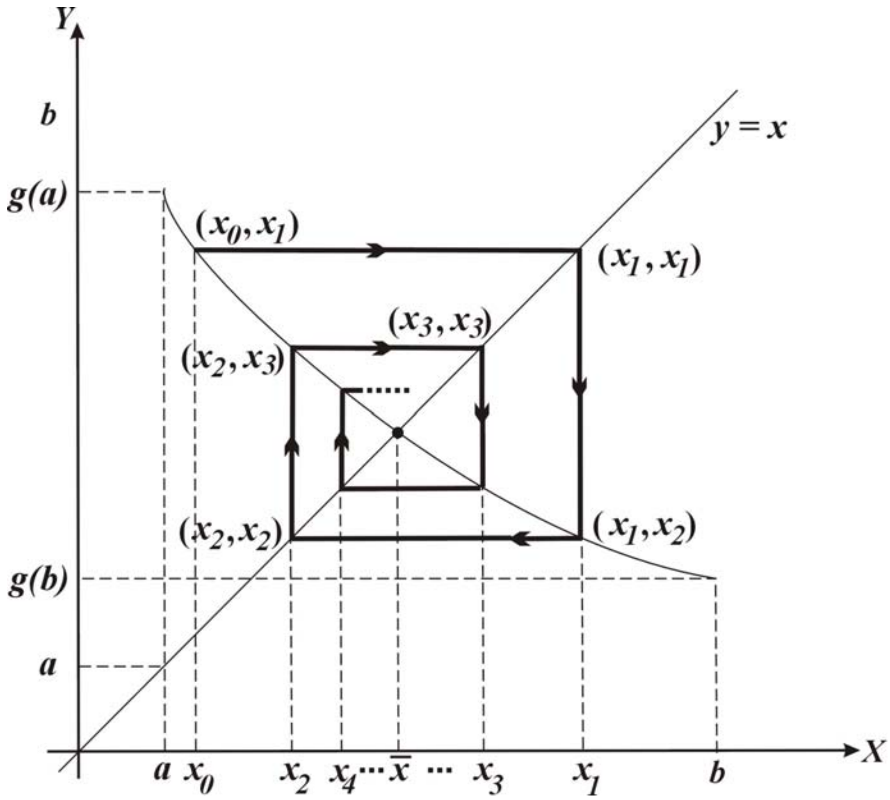
ii).- Cualquiera sea $x_0\in\left[a,b\right]$ la sucesión iterada $x_n=g(x_{n-1})\,;n=1,2,...$ converge a $\bar{x}$".

Para interpretar geométricamente el T.P.F.B. para el caso real, observemos que el ítem i) nos dice que $\bar{x}=g(\bar{x})$ es decir si $y_1=x$ es la función identidad y $y_2=g(\bar{x})$ entonces el punto fijo $\bar{x}$ es un punto en el cual $y_1=y_2$, i.e., $(\bar{x},g(\bar{x}))=(\bar{x},\bar{x})$ es la intersección de las gráficas de y_1 y y_2.

Para poder observar el comportamiento geométrico del T.P.F.B. en el plano, asumiremos que con la función continua g pueda ocurrir los siguientes dos casos; que ella sea creciente o decreciente. En ambos casos, como se observa en los gráficos I.5.A. y I.5.B., obtendremos una curva llamada **quebrada iterada** y una **espiral hacia adentro** (en este caso decimos que $\bar{x}$ es un **punto atractor**) respectivamente.



GRÁFICA I.5.A.



GRÁFICA I.5.B.

1.5.1. <u>OBSERVACIÓN</u>

1.5.1.1.- En la observación I.2.3.1. vimos que toda contracción es uniformemente continua, y por lo tanto continua. Ahora nos planteamos la siguiente interrogante:

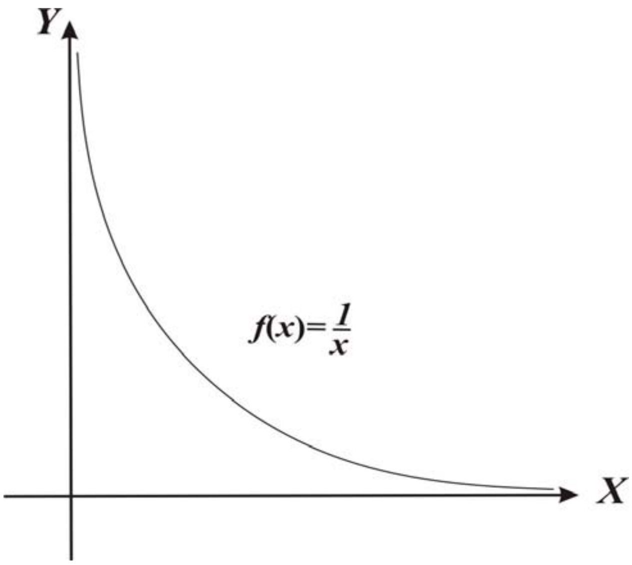
¿Toda función continua es una contracción?

Respuesta: **¡NO!**

En efecto, definimos la función $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ por

$$f(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}_0^+.$$

Observemos su gráfica:



de donde es claro que f es continua en $\mathbb{R}_0^+$.

Supongamos que f es una contracción en $\mathbb{R}_0^+$, entonces por definición tenemos que para arbitrarios $x,y\in\mathbb{R}_0^+$ se cumple

$$\left|f(x)-f(y)\right|\le\alpha\left|x-y\right|$$

siempre con $0\le\alpha<1$.

En particular reemplazamos $x=\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{1}{5}$ en la desigualdad anterior y obtenemos

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right)\right|\le\alpha\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right|$$

$$\left|3-5\right|\le\alpha\left|\frac{2}{15}\right|$$

entonces

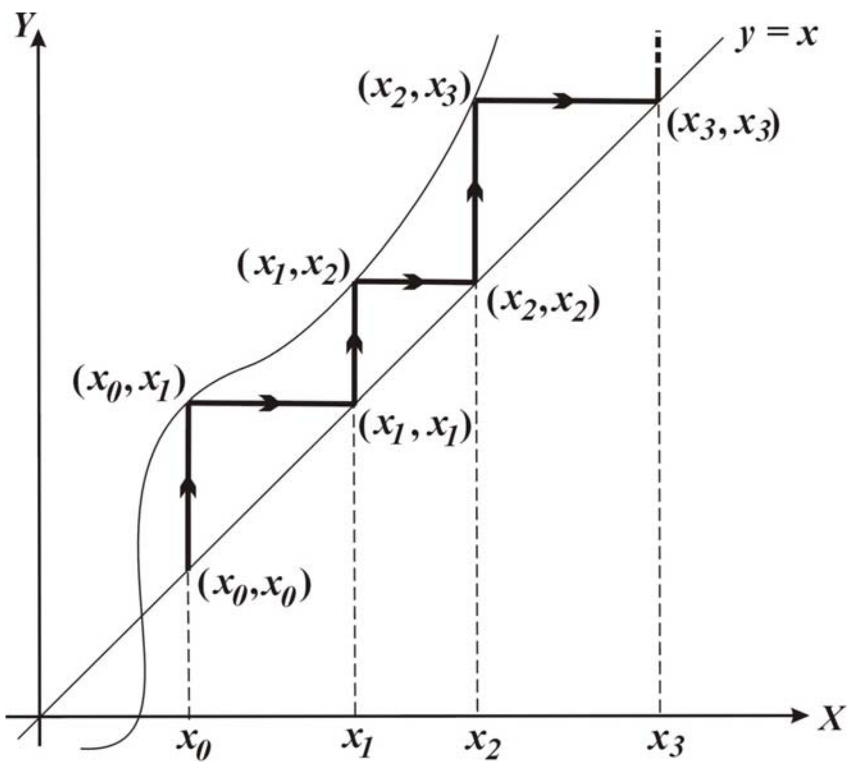
$$\alpha \geq 15 \quad \text{¡Absurdo!}$$

pues $0 \leq \alpha < 1$. Por lo tanto f no es una contracción en $\mathbb{R}_0^+$.

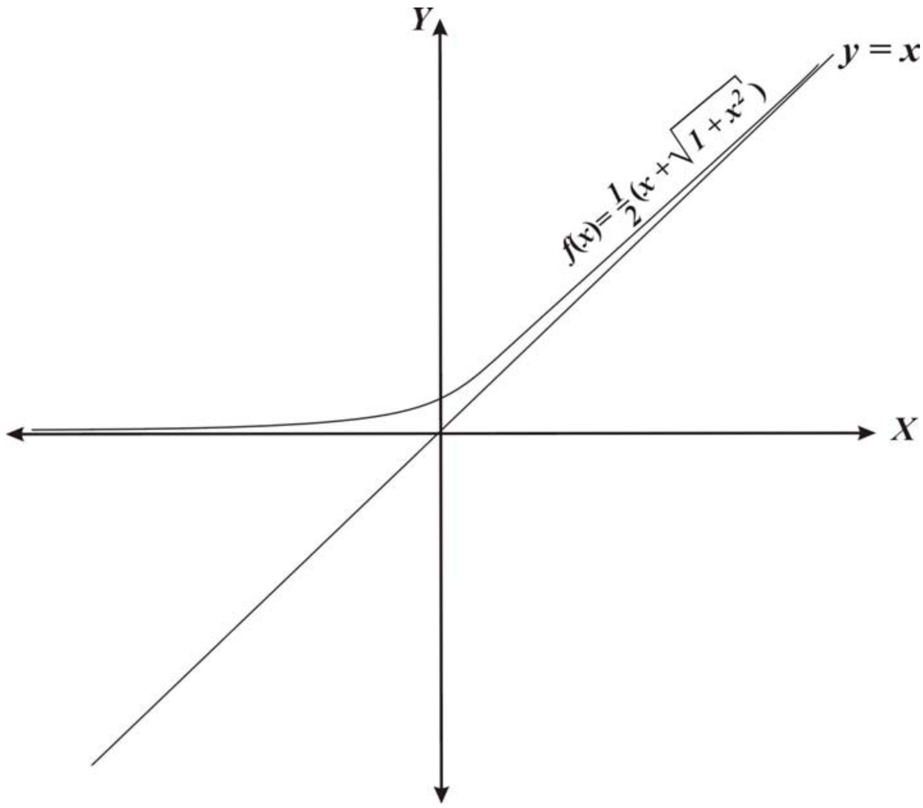
1.5.1.2.- En la gráfica I.5.1.2. mostramos la gráfica de g en el caso cuando no se cumple la condición $|g'(x)| \leq k < 1$, i.e. g no es una contracción en $[a,b]$. Esto desaparece la conclusión ii), por tanto existe el punto fijo pero no tenemos convergencia de la sucesión iterada al punto fijo $\bar{x}$.

1.5.1.3.- En la gráfica I.5.1.3. mostramos la gráfica de la función f del ejemplo I.4.6.3., (ver página 13) tenemos el espacio métrico completo $\mathbb{R}$, pero no tenemos punto fijo pues f no es una contracción en $\mathbb{R}$.

1.5.1.4.- De las observaciones I.5.1.2. y I.5.1.3., podemos concluir que el teorema en general sólo se cumple si se tiene las hipótesis dadas, la carencia de una de ellas, colapsa sus conclusiones.



GRÁFICA I.5.1.2.



GRÁFICA I.5.1.3.

1.5.1.5.- Recordemos un resultado que fue enunciado y probado en el capítulo I, en el ejemplo I.4.6.13. (ver página 21), el cual dice:

"Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, y la aplicación $f : X \to X$ para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, verifica

$$\left| f(x) - f(y) \right| < \left| x - y \right| \qquad \textbf{(I.5.1.5.A)}$$

entonces f posee un único punto fijo en X."

Surge la siguiente pregunta:

¿Si X no es compacto y verifica la desigualdad (I.5.1.5.A), f poseerá un único punto fijo en X ?.

Respuesta: **¡NO!**

En efecto; recordemos que $\mathbb{R}$ no es un compacto. Luego consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1 + x^2} \right), \; x \in \mathbb{R}.$$

Afirmación 1: f verifica la condición (I.5.1.5.A).

En efecto; para arbitrarios $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, tenemos

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(x-y) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(|x-y| + \left|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|x-y| + \left|\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}\right)\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|x-y| + \frac{|x-y||x+y|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}|x-y|\left(1 + \frac{|x+y|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}\right) \qquad \textbf{(I.5.1.5.B)}
\end{aligned}$$

Probaremos para arbitrarios $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, que

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} < 1. \qquad \textbf{(I.5.1.5.C)}$$

Si aceptamos este resultado, tenemos

$$|x+y| < \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 < 1 + x^2 + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$xy - 1 < \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$x^2y^2 - 2xy + 1 < 1 + y^2 + x^2 + x^2y^2$$

$$(x+y)^2 > 0$$

Invirtiendo los pasos, verificamos la desigualdad (I.5.1.5.C).

Observemos que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, descartamos que:

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}=1,$$

pues si en particular tomamos $x=0$ y $y=1$ obtendríamos

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1$$

lo cual es un absurdo!.

Todo lo anterior lo reemplazamos en (I.5.1.5.B), verificándose la afirmación 1.

Afirmación 2: f no posee punto fijo en $\mathbb{R}$.

En efecto; supongamos que f posee un punto fijo en $\mathbb{R}$, luego por definición tenemos que existe un $w\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(w)=w$$

$$\frac{1}{2}\left(w+\sqrt{1+w^2}\right)=w$$

$$w+\sqrt{1+w^2}=2w$$

$$\sqrt{1+w^2}=w$$

$$1+w^2=w^2 \text{ ¡absurdo!}$$

Notemos además que se cumple

$$f(w)>w$$

cuya prueba es análoga a la hecha para la desigualdad (I.5.1.5.C).

Para fijar ideas, observemos nuevamente la gráfica I.5.1.3. de donde claramente podemos ver que las pruebas que hicimos analíticamente son correctas.

Resaltemos que en esta demostración, hemos desarrollado un procedimiento alternativo de prueba a lo mostrado en el ejemplo I.4.6.13.

CAPÍTULO II

APLICACIONES DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH

II.1.- APLICACIÓN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES ALGEBRAICAS

El T.P.F.B. tiene importantes aplicaciones en los métodos de iteración para resolver sistemas de ecuaciones lineales algebraicas y proporciona suficientes condiciones para la convergencia y cota de error.

Consideremos el espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ y el sistema de ecuaciones lineales algebraicas

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} x_j = y_i \ ; \ i = 1,2,3,......,n$$

que en notación matricial es

$$y = Ax\,,$$

donde $A = \left[\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\right]$ es una matriz $n \times n$, $x = \left[x_i\right]$ y $y = \left[y_i\right]$ son matrices $n \times 1$. Notemos que el problema de resolver $y = Ax$ se puede reemplazar por el problema equivalente de encontrar los puntos fijos del operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$Tx = (I - A)x + y\,;$$

hacemos

$$B = (I - A) = \left[b_{ij}\right]$$

la cual es una matriz $n \times n$ real fija (I es la matriz identidad $n \times n$), es decir, tenemos

$$Tx = Bx + y\,.$$

¿Bajo qué condiciones T es una contracción en $\mathbb{R}^n$?. La respuesta a esta pregunta depende de la elección de la métrica en $\mathbb{R}^n$ con la que se va a trabajar. Dediquémonos a encontrar tales condiciones.

Sean $u = (u_1, \cdots, u_n)$, $v = (v_1, \cdots, v_n)$, $p = (p_1, \cdots, p_n)$, $q = (q_1, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ y supongamos que $p = Tu$ (i.e. $p = Tu = Bu + y$) y $q = Tv$ (i.e. $q = Tv = Bv + y$).

- Con la métrica del máximo, tenemos

$$d_\infty(Tu, Tv) = d_\infty(p,q) = \max_i \left|p_i - q_i\right| = \max_i \left| \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j + y_i \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j + y_i \right) \right|$$

$$= \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \left(u_j - v_j \right) \right| \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \left| u_j - v_j \right|$$

$$\leq \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \right) \left(\max_j \left| u_j - v_j \right| \right) = \lambda_\infty d_\infty (u,v)$$

Entonces, para que T sea una contracción en $\mathbb{R}^n$ debemos exigir que

$$\lambda_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| < 1. \qquad \textbf{(II.1.A)}$$

- Con la métrica de la suma, tenemos

$$d_1(Tu,Tv) = d_1(p,q) = \sum_{i=1}^{n} \left| p_i - q_i \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j + y_i \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j + y_i \right) \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \left(u_j - v_j \right) \right| \leq \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \left| u_j - v_j \right| \right) = \lambda_1 d_1(u,v).$$

Así, el operador T es una contracción en $\mathbb{R}^n$ si

$$\lambda_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| < 1. \qquad \textbf{(II.1.B)}$$

- Por último, considerando la métrica euclidiana, tenemos

$$\left[d_2(Tu,Tv) \right]^2 = \left[d_2(p,q) \right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i - q_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j + y_i \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j + y_i \right) \right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \left(u_j - v_j \right) \right\}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 \right) \left[d\left(u,v \right) \right]^2$$

$$\text{i.e. } d_2(Tu,Tv) \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2} \right) d\left(u,v \right);\ u,v \in \mathbb{R}^n.$$

(En la desigualdad anterior hemos utilizado la desigualdad de Schwartz).

Análogamente a lo hecho antes, aquí exigimos que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 < 1 \qquad \textbf{(II.1.C)}$$

y con esto tenemos que T es una contracción en $\mathbb{R}^n$.

Así, en el caso en el que cualquiera de las tres condiciones encontradas es cumplida, tenemos por el teorema I.4. (T.P.F.B.) que existe un y sólo un $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n$ punto fijo del operador T donde $x_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j+y_i$, y por tanto solución del sistema de ecuaciones lineales algebraicas considerado.

Las aproximaciones sucesivas para hallar la solución aproximada tienen la forma

$$\begin{cases} x^{(0)}=\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right) \\ x^{(1)}=\left(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1\right) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x^{(k)}=\left(x_1^k,x_2^k,\ldots,x_n^k\right) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{cases} \tag{II.1.D}$$

donde

$$x_i^k=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j^{k-1}+y_i. \tag{II.1.E}$$

Además, la cota de error puede ser hallada usando las fórmulas (I.4.1.A) y (I.4.1.B) dadas en el corolario I.4.1. Así, del Teorema de la Aplicación Contractante (T.A.C.) obtenemos.

II.1.1. <u>TEOREMA</u>

Si un sistema $y=Ax$, de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ (las componentes de x), siendo A una la matriz $n\times n$, x,y matrices $n\times 1$, satisface cualquiera de las tres condiciones obtenidas (II.1.A), (II.1.B), (II.1.C), este tiene una única solución x. Esta solución puede ser obtenida como el límite de una sucesión iterada dada por $x^{(k)}=Tx^{(k-1)}$; $k=1,2,\ldots$ con la relación (II.1.D), donde cada x_i^k es calculada usando la igualdad (II.1.E), siempre que $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$ es dado.

Observemos que cualquiera de las tres condiciones encontradas implica que

$$\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}\neq 0$$

con esto tenemos la seguridad de que $\det\left(A-I\right)\neq 0$.

Notemos además que, si A es simétrica, es decir $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$ entonces $\lambda_1 = \lambda_\infty$; pero si A no es simétrica, entonces λ_1 y λ_∞ no son necesariamente iguales.

Observemos también que si $\left|a_{ij}\right| < \frac{1}{n}$ (en este caso las tres condiciones se cumplen), entonces el Método de las Aproximaciones Sucesivas (M.A.S. ó T.A.C. ó T.P.F.B.) es aplicable; y si $\left|a_{ij}\right| = \frac{1}{n}$ (en este caso todas las tres suman 1) el M.A.S. no es aplicable.

Además mencionemos, que las soluciones aproximadas de (II.1.A) también pueden ser halladas por otros dos métodos standard, la iteración de Jacobi, la cual es mayormente de interés teórico y la iteración de Gauss -Seidel, la cual es frecuentemente usada en matemática aplicada (ver [5], [8], [19], [28]).

II.1.2. <u>APLICACIÓN PRÁCTICA</u>

Como un ejemplo específico, consideremos el conjunto de ecuaciones algebraicas

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 = -1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 2 \\ -\frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{15}x_2 + \frac{3}{4}x_3 = 3 \end{cases}$$

Para aplicar el Teorema de la Aplicación Contractante (T.A.C.), primero rescribimos la ecuación de arriba en la forma

$$x = Bx + y,$$

y entonces probaremos que

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1.$$

Una tal representación es dada por

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + 2 \\ x_3 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{15}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 3 \end{cases}$$

i.e. matricialmente tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{15} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para $i = 1,2,3$ calculemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\max_i \sum_{j=1}^{3} |b_{ij}| &= \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{3} |b_{1j}|, \sum_{j=1}^{3} |b_{2j}|, \sum_{j=1}^{3} |b_{3j}| \right\} \\
&= \max \left\{ |b_{11}| + |b_{12}| + |b_{13}|, |b_{21}| + |b_{22}| + |b_{23}|, |b_{31}| + |b_{32}| + |b_{33}| \right\} \\
&= \max \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{2}{15} + \frac{1}{4} \right\} \\
&= \max \left\{ 0.95, 0.91\bar{6}, 0.6\bar{3} \right\} = 0.95 < 1 .
\end{aligned}$$

Luego, claramente la condición $\max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1$ se verifica.

El esquema iterativo puede ser usado para obtener la solución aproximada. Por ejemplo, con la suposición inicial $x^{(0)} = (0,0,0)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= (0,0,0) \\
x^{(1)} &= (-1,2,3) \\
x^{(2)} &= (0.55, 0.25, 3.76667) \\
x^{(3)} &= (0.176667, 1.158333, 4.112500) \\
x^{(4)} &= (0.642625, 0.644653, 4.226736) \\
x^{(5)} &= (0.507535, 0.942640, 4.303294) \\
&\vdots \qquad \vdots \\
x^{(10)} &= (0.641659, 0.835535, 4.360547) \\
&\vdots \qquad \vdots \\
x^{(19)} &= (0.639519, 0.841889, 4.362843) \\
x^{(20)} &= (0.639559, 0.841833, 4.362843)
\end{aligned}$$

Como un ejemplo del uso de la ecuación (II.1.E), y teniendo en cuenta (II.1.F) mostremos cómo obtuvimos $x^{(1)}$.

· $x^{(0)}=\left(0,0,0\right)=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)}\right)$

· $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)}\right)=\left(\sum_{j=1}^{3}b_{1j}.x_j^{(0)}+y_1,\sum_{j=1}^{3}b_{2j}.x_j^{(0)}+y_2,\sum_{j=1}^{3}b_{3j}.x_j^{(0)}+y_3\right)$

$=\left(b_{11}x_1^{(0)}+b_{12}x_2^{(0)}+b_{13}x_3^{(0)}+y_1,b_{21}x_1^{(0)}+b_{22}x_2^{(0)}+b_{23}x_3^{(0)}+y_2,b_{31}x_1^{(0)}+b_{32}x_2^{(0)}+b_{33}x_3^{(0)}+y_3\right)$

$=\left(\frac{1}{5}\times 0+\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{4}\times 0-1,\frac{1}{3}\times 0-\frac{1}{3}\times 0-\frac{1}{4}\times 0+2,\frac{1}{4}\times 0+\frac{2}{15}\times 0+\frac{1}{4}\times 0+3\right)$

$=\left(-1,2,3\right)$.

Y de forma análoga podemos obtener cualquier otro $x^{(k)}$.

Naturalmente, cualquier otra suposición inicial puede ser usada. El número de iteraciones que se requiere para asegurar la convergencia depende de la suposición inicial. La solución exacta es $x=\left(0.639548,0.841853,4.362845\right)$.

II.1.3. OTRAS APLICACIONES PRÁCTICAS

Damos dos ejemplos de aplicación del T.P.F.B. a los métodos numéricos en el primero resolvemos una ecuación lineal y en el segundo resolvemos una ecuación no lineal.

II.1.3.1.- Probaremos que la ecuación

$$x=\arctan(x)+1,\ x\in\mathbb{R}$$

tiene una única solución en $\left[1,+\infty\right[$, la cual aproximaremos con siete dígitos significativos.

En efecto, sea $Y=\left[1,+\infty\right[$ y definimos $f:Y\to\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\arctan(x)+1,\ x\in Y$$

es claro que $f(Y)\subset Y$. Sea $X=\left(Y,|\ |\right)$ donde $|\ |$ denota la métrica euclidiana, X resulta ser un espacio métrico completo (por ser cerrado).

Para todo $x\in X$, tenemos que

$$|f'(x)|=\left|\frac{1}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{2}<1.$$

Luego, por el ejemplo I.4.6.2., f es una contracción en Y. Entonces, por el T.P.F.B. existe un único punto fijo $\bar{x} \in X$, que es la única solución del sistema dado.

Para obtener la solución aproximada con la aproximación pedida, reemplazamos $\alpha = \frac{1}{2}$ en la desigualdad (I.4.1.A) del corolario I.4.1. y obtenemos

$$\left| x_n - \bar{x} \right| \leq \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \left| x_0 - x_1 \right| = \frac{1}{2^{n-1}} \left| x_0 - x_1 \right|$$

$$\text{i.e. } \left| x_n - \bar{x} \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}} . \left| x_0 - x_1 \right|$$

En particular si tomamos $x_0 = 1$, por el proceso iterativo que mostramos en el T.P.F.B., tenemos

$$x_1 = f(x_0) = f(1) = \arctan(1) + 1 = \frac{\pi}{4} + 1 = 1.7853982$$

reemplazando en la desigualdad anterior tenemos

$$\left| x_n - \bar{x} \right| \leq \frac{\pi}{2^{n+1}},$$

permitiéndonos seguidamente calcular $\bar{x}$ con la aproximación exigida, en este caso $x_{11} = 2{,}1322677$ esto es, $\bar{x} = 2{,}132267$.

Comprobemos esto, efectuando el proceso iterativo

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) = \arctan(1) + 1 = 1.7853982 \\
x_2 &= f(x_1) = \arctan(1.7853982) + 1 = 2.0602325 \\
x_3 &= f(x_2) = \arctan(2.0602325) + 1 = 2.1189113 \\
x_4 &= f(x_3) = \arctan(2.1189113) + 1 = 2.1298472 \\
x_5 &= f(x_4) = \arctan(2.1298472) + 1 = 2.1318309 \\
x_6 &= f(x_5) = \arctan(2.1318309) + 1 = 2.1321890 \\
x_7 &= f(x_6) = \arctan(2.1321890) + 1 = 2.1322535 \\
x_8 &= f(x_7) = \arctan(2.1322535) + 1 = 2.1322651 \\
x_9 &= f(x_8) = \arctan(2.1322651) + 1 = 2.1322673 \\
x_{10} &= f(x_9) = \arctan(2.1322673) + 1 = 2.1322676 \\
x_{11} &= f(x_{10}) = \arctan(2.1322676) + 1 = 2.1322677
\end{aligned}$$

II.1.3.2.- Consideremos la ecuación algebraica no lineal

$$x^3 - x - 1 = 0, \; x \in \mathbb{R}.$$

Esta ecuación tiene tres raíces, una de las cuales está entre 1 y 2. Observemos que para $x \in X = [1,2]$, existen varias formas de escribir dicha ecuación en la forma $x = Tx$, por ejemplo

$$T_1 x = x^3 - 1, \; T_2 x = (1+x)^{\frac{1}{3}}, \; T_3 x = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Recordemos que en el ejemplo I.2.1.1. (ver página 3) se vió que el operador T_2 es una contracción en el subconjunto $X = [1,2]$, observemos que los otros dos operadores T_1 y T_3, no son contracciones en $X = [1,2]$.

Usaremos el Método de las Aproximaciones Sucesivas (M.A.S.) para determinar la única raíz de T_2 en X. Iniciemos el proceso iterativo con $x_0 = 1$, y obtenemos

$$x_1 = T_2(x_0) = T_2(1) = (1+1)^{\frac{1}{3}} = 1.2599$$

$$x_2 = T_2(x_1) = T_2(1.2599) = (1+1.2599)^{\frac{1}{3}} = 1.3123$$

$$x_3 = T_2(x_2) = T_2(1.3123) = (1+1.3123)^{\frac{1}{3}} = 1.3224$$

$$x_4 = T_2(x_3) = T_2(1.3224) = (1+1.3224)^{\frac{1}{3}} = 1.3243$$

$$x_5 = T_2(x_4) = T_2(1.3243) = (1+1.3243)^{\frac{1}{3}} = 1.3246$$

$$x_1 = T_2(x_5) = T_2(1.3246) = (1+1.3246)^{\frac{1}{3}} = 1.3247$$

$$x_7 = T_2(x_6) = T_2(1.3247) = (1+1.3247)^{\frac{1}{3}} = 1.3247$$

Así, la raíz, con cuatro cifras significativas, se obtiene en la séptima iteración.

II.2.- APLICACIÓN A LAS ECUACIONES INTEGRALES

El estudio de las ecuaciones integrales constituye uno de los capítulos más importantes del análisis matemático. Muchos problemas de análisis conducen al estudio de ecuaciones integrales y muchos de los métodos del Análisis Funcional fueron inicialmente desarrollados en el estudio de las ecuaciones integrales.

II.2.1. TIPOS DE ECUACIONES INTEGRALES

Históricamente la primera ecuación integral que fue estudiada fue la ecuación de Abel

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds \quad \text{, donde } 0 < \alpha < 1 \ .$$

Damos a continuación otros ejemplos familiares de ecuaciones integrales.

II.2.1.1.- La ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-2\pi its} ds$$

del problema de la inversa de una transformada de Fourier.

II.2.1.2.- La ecuación

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$$

cuya solución es solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x)$$

con condición inicial

$$x(t_0) = x_0 .$$

Entre los tipos más comunes de ecuaciones integrales mencionamos:

- La ecuación integral de Fredholm de primera especie

$$y(t) = \int_a^b K(t,s) x(s) ds \ .$$

- La ecuación de Fredholm de segunda especie

$$y(t) = x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s) x(s) ds \ .$$

- La ecuación de Volterra de primera especie

$$y(t) = \int_a^t K(t,s) x(s) ds \ .$$

- La ecuación de Volterra de segunda especie

$$y(t) = x(t) - \lambda \int_a^t K(t,s) x(s) ds \ .$$

En estos ejemplos la incógnita es la función $x:[a,b]\to\mathbb{C}$ con $\lambda\in\mathbb{C}$, donde $y:[a,b]\to\mathbb{C}$ y $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ son funciones dadas, a K se denomina **núcleo** de la ecuación integral, sujeta a ciertas restricciones (por ejemplo ser función continua, cuadrado integrable, medible y acotada, etc.). Las ecuaciones del tipo de Fredholm también pueden ser estudiadas sobre un espacio X provisto de una medida μ. También K, x e y pueden ser tomadas como funciones a valores vectoriales, por ejemplo, a valores en $\mathbb{C}^n$.

Cuando el núcleo K no es una función continua decimos que la ecuación integral tiene **núcleo singular**. El ejemplo más importante de este tipo de núcleo es cuando X es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y

$$K(t,s)=\frac{A(t,s)}{\|t-s\|^{\alpha}}$$

con $\alpha<n$, A es acotada (y, eventualmente continua para $t\neq s$); cuando $\alpha<\frac{n}{2}$ decimos que la singularidad es **débil**.

Las ecuaciones de convolución son otro tipo importante de ecuaciones integrales

$$y(t)=\int_a^t K(t-s)x(s)ds.$$

Ahora daremos aplicaciones del T.P.F.B. a la solución de ecuaciones integrales.

II.2.2. TEOREMA

Consideremos la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$x(t)=y(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

donde $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ es continua y es tal que $|K(t,s)|\leq M$ para todo $t,s\in[a,b]$.

Entonces, para todo $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$, dada $y\in C([a,b],\mathbb{C})$ existe una única función $x\in C([a,b],\mathbb{C})$ que es la solución de la ecuación integral.

Demostración:

Sea $X=C([a,b],\mathbb{C})$ el espacio de las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{C}$, el cual sabemos es un espacio métrico completo con la métrica

$$d(f,g)=\sup_{a\leq t\leq b}|f(t)-g(t)|;$$

y definimos la aplicación $T:X\to X$ por

$$\left(Tx\right)(t) = y(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds\,,\ t\in[a,b].$$

Un punto fijo de T es evidentemente una solución de nuestro problema y recíprocamente.

Afirmación 1: $Tx \in X$.

En efecto; supongamos que $t, t_0 \in \left[a,b\right]$ tal que $t \to t_0$.

$$\left|\left(Tx\right)(t) - \left(Tx\right)(t_0)\right| = \left|\left(y(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right) - \left(y(t_0) + \lambda\int_a^b K(t_0,s)x(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \left|y(t) - y(t_0)\right| + \left|\lambda\right|\left|\int_a^b \left|x(s)\right|\left|K(t,s) - K(t_0,s)\right|ds\right|$$

Queremos probar que

$$\left(Tx\right)(t) \to \left(Tx\right)(t_0)\,,\ x\in X\ .$$

Para esto observemos que:

- Como $y \in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{C}\right)$ i.e. y es una función continua en $\left[a,b\right]$, y desde que $t \to t_0$ tenemos $y(t) \to y(t_0)$ lo que implica $\left|y(t) - y(t_0)\right| \to 0$.
- Como $x \in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{C}\right)$ entonces x es una función continua en $\left[a,b\right]$, y siendo $\left[a,b\right]$ un compacto x resulta acotada en $\left[a,b\right]$ i.e. existe $M > 0$ tal que $\left|x(t)\right| \leq M$, $t \in \left[a,b\right]$.
- Como la función K es continua sobre el compacto $\left[a,b\right]\times\left[a,b\right]$, entonces K resulta ser uniformemente continua, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $\left|t - t_0\right| < \delta$ tenemos

$$\left|K(t,s) - K(t_0,s)\right| < \frac{\varepsilon}{\left|b-a\right|M\left|\lambda\right|}\,,\ s\in\mathbb{C}\,.$$

Con estos resultados, conseguimos la siguiente desigualdad

$$\left|\left(Tx\right)(t) - \left(Tx\right)(t_0)\right| \leq \left|y(t) - y(t_0)\right| + \left|\lambda\right|M\left|b-a\right|\frac{\varepsilon}{\left|b-a\right|M\left|\lambda\right|}$$

de donde es claro que $\left(Tx\right)(t) \to \left(Tx\right)(t_0)$, $x \in X$.

Por lo tanto $Tx \in X$.

Afirmación 2: T es una contracción en X siempre que $\left|\lambda\right| < \dfrac{1}{M(b-a)}$.

En efecto; dados $u, v \in X$ tenemos

$$\left|(Tu)(t)-(Tv)(t)\right| = \left|\left(y(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)u(s)ds\right)-\left(y(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)v(s)ds\right)\right|$$

$$= \left|\lambda\int_a^b K(t,s)\left[u(s)-v(s)\right]ds\right|$$

$$\leq |\lambda|\int_a^b |K(t,s)||u(s)-v(s)|ds$$

$$\leq |\lambda|\int_a^b M\,|u(s)-v(s)|ds$$

$$\leq |\lambda| M \sup_{a\leq t\leq b}|u(t)-v(t)|\int_a^b ds\ ;\ t\in[a,b],\ u,v\in X\ .$$

i.e. $\left|(Tu)(t)-(Tv)(t)\right| \leq |\lambda|(b-a)M\,\|u-v\|;\ t\in[a,b], u,v\in X$.

$$\|Tu-Tv\| \leq \alpha\,\|u-v\|;\ u,v\in X\ .$$

Luego T es una contracción en X con constante de contracción $\alpha = |\lambda|(b-a)M < 1$; la conclusión de este teorema sigue del T.P.F.B. ■

II.2.3. <u>TEOREMA</u>

Sea $K:[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una función continua, lipschitziana en relación a la última variable i.e. existe $M>0$ tal que

$$\left|K(t,s,r_1)-K(t,s,r_2)\right| \leq M\left|r_1-r_2\right|$$

para arbitrarios $t,s\in[a,b]$ y $r_1,r_2\in\mathbb{C}$. Entonces dado $y\in C([a,b],\mathbb{C})$ existe una única $x\in C([a,b],\mathbb{C})$ solución de la ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$x(t) = y(t)+\lambda\int_a^t K(t,s,x(s))ds\ .$$

<u>Demostración</u>:

Sea el espacio métrico completo $X = C([a,b],\mathbb{C})$ y definimos $T:X\to X$ por

$$(Tx)(t) = y(t)+\lambda\int_a^t K(t,s,x(s))ds\ ,\ t\in[a,b].$$

Es evidente que un punto fijo de T es solución de la ecuación integral y recíprocamente.

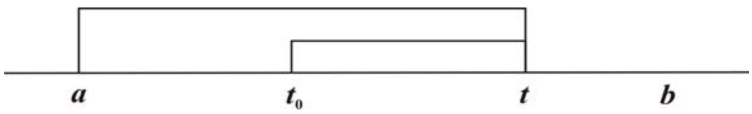
Afirmación 1: $Tx\in X$.

En efecto; para arbitrarios $t,t_0\in[a,b]$ supongamos que $t\to t_0$.

$$\left|(Tx)(t)-(Tx)(t_0)\right|=\left|\left(y(t)+\lambda\int_a^t K\left(t,s,x(s)\right)ds\right)-\left(y(t_0)+\lambda\int_a^{t_0} K\left(t_0,s,x(s)\right)ds\right)\right|$$

$$\leq\left|y(t)-y(t_0)\right|+|\lambda|\left|\int_a^t K\left(t,s,x(s)\right)ds-\int_a^{t_0} K\left(t_0,s,x(s)\right)ds\right|$$

Ahora, supongamos que $t\geq t_0$, es decir gráficamente tenemos:



esto implica

$$\int_a^{t_0} K\left(t_0,s,x(s)\right)ds=\int_a^{t} K\left(t_0,s,x(s)\right)ds-\int_{t_0}^{t} K\left(t_0,s,x(s)\right)ds\,.$$

Reemplazamos esta igualdad en la desigualdad anterior, y luego agrupando adecuadamente obtenemos

$$\left|y(t)-y(t_0)\right|+|\lambda|\left|\int_a^t\left|K\left(t,s,x(s)\right)-K\left(t_0,s,x(s)\right)\right|ds\right|+\left|\int_{t_0}^t\left|K\left(t_0,s,x(s)\right)\right|ds\right|$$

Nuestro objetivo es probar que

$$(Tx)(t)\to(Tx)(t_0),\ x\in X\ ;$$

para esto observemos que:

- Como $y\in C\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ i.e. y es una función continua en $[a,b]$, y desde que $t\to t_0$ tenemos $y(t)\to y(t_0)$ lo que implica $\left|y(t)-y(t_0)\right|\to 0$.
- Como K es una función continua sobre el compacto $[a,b]\times[a,b]\times x\left([a,b]\right)$ entonces K resulta ser uniformente continua en $[a,b]\times[a,b]\times x\left([a,b]\right)$, lo que implica que dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, para $\left|t-t_0\right|<\delta$ tenemos
$$\left|K\left(t,s,x(s)\right)-K\left(t_0,s,x(s)\right)\right|\leq\frac{\varepsilon}{|\lambda||b-a|},\ \left(s,x(s)\right)\in[a,b]\times x\left([a,b]\right).$$
- Como K es una función continua sobre el compacto $\{t_0\}\times[a,b]\times x\left([a,b]\right)$, K resulta acotada en $\{t_0\}\times[a,b]\times x\left([a,b]\right)$ entonces existe $N>0$ tal que $\left|K\left(t_0,s,x(s)\right)\right|\leq N$ para todo $\left(s,x(s)\right)\in[a,b]\times x\left([a,b]\right)$.

Con estos resultados, tenemos la siguiente desigualdad

$$\left|(Tx)(t)-(Tx)(t_0)\right| \leq |y(t)-y(t_0)| + |\lambda||b-a|\frac{\varepsilon}{|\lambda||b-a|} + N|t-t_0|$$

de donde es claro que

$$(Tx)(t) \to (Tx)(t_0)$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto, concluimos que la afirmación 1 es válida i.e. $Tx \in X$.

Afirmación 2: Existe $m \geq 1$ tal que T^m es una contracción en X .

En efecto; vamos a demostrar inicialmente que dados $u, v \in X$ y $t \in [a,b]$ se cumple

$$\left|(T^n u)(t)-(T^n v)(t)\right| \leq \frac{|\lambda|^n M^n (t-a)^n}{n!}\|u-v\| \qquad \textbf{(II.2.3.1)}$$

La demostración es hecha por inducción matemática.

- Para $n=1$ el resultado es inmediato, es decir tenemos

$$\left|(Tu)(t)-(Tv)(t)\right| \leq \frac{|\lambda| M (t-a)}{1!}\|u-v\|.$$

- Admitiendo el resultado para n vamos a demostrarlo para $n+1$

$$\begin{aligned}
\left|(T^{n+1}u)(t)-(T^{n+1}v)(t)\right| &= \left|T(T^n u)(t)-T(T^n v)(t)\right| \\
&= \left|\left(y(t)+\lambda\int_a^t K\left[t,s,(T^n u)(s)\right]ds\right)-\left(y(t)+\lambda\int_a^t K\left[t,s,(T^n v)(s)\right]ds\right)\right| \\
&= \left|\lambda\int_a^t \left\{K\left[t,s,(T^n u)(s)\right]-K\left[t,s,(T^n v)(s)\right]\right\}ds\right| \\
&\leq |\lambda|\int_a^t \left|K\left[t,s,(T^n u)(s)\right]-K\left[t,s,(T^n v)(s)\right]\right|ds \\
&\leq |\lambda|\int_a^t M\left|(T^n u)(s)-(T^n v)(s)\right|ds \\
&\leq |\lambda|\int_a^t M\frac{|\lambda|^n M^n (s-a)^n}{n!}\|u-v\|ds \\
&= |\lambda|^{n+1} M^{n+1}\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|u-v\|.
\end{aligned}$$

Luego (II.2.3.1) es cierto, además de (II.2.3.1) tenemos

$$\left|(T^n u)(t)-(T^n v)(t)\right| \leq \frac{|\lambda M(t-a)|^n}{n!} d(u,v)\,;\ u,v \in X \ \text{ y } t \in [a,b],$$

pero aun más, como

$$\frac{|\lambda M(t-a)|^n}{n!} \leq \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!},$$

lo que implica

$$\left|\left(T^n u\right)(t)-\left(T^n v\right)(t)\right| \leq \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!} d(u,v);\ u,v \in X \text{ y } t \in [a,b],$$

entonces

$$\sup_{a\leq t\leq b}\left|\left(T^n u\right)(t)-\left(T^n v\right)(t)\right| \leq \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!} d(u,v);\ u,v \in X .$$

Por lo tanto

$$d\left(T^n u, T^n v\right) \leq \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!} d(u,v);\ u,v \in X .$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea

$$a_n = \frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!}$$

ahora utilizamos el criterio de la razón para sucesiones de números reales:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|\lambda M(b-a)|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda M(b-a)|}{n+1} = 0 < 1,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!} = 0,$$

por lo tanto $\left\{\dfrac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!}\right\}_{n\geq 1}$ converge, luego sigue por definición de límite de sucesiones de números reales que:

Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tenemos $\dfrac{|\lambda M(b-a)|^n}{n!} < \varepsilon < 1$.

Con lo que se verifica la afirmación 2. Entonces tomamos $m = n_0$, para que exista $m \geq 1$ tal que T^m es una contracción en $C([a,b],\mathbb{C}) = X$. Y la conclusión de este teorema sigue del corolario 1.4.2. ■

II.2.4. OBSERVACIÓN

Hacemos $\lambda = 1$ en la ecuación integral de Fredholm de segunda especie, y tenemos

$$x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds \qquad \textbf{(II.2.4.1)}$$

II.2.5. TEOREMA

Supongamos que $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ es una función continua tal que satisface

$$\sup_{a\le t\le b}\left\{\int_a^b |K(t,s)|ds\right\} < 1 \qquad \textbf{(II.2.5.1)}$$

y $y:[a,b]\to\mathbb{C}$ una función continua. Entonces existe una y sólo una función continua $x:[a,b]\to\mathbb{C}$ que satisface la ecuación (II.2.4.1).

Demostración:

Consideremos el espacio normado $X = C([a,b],\mathbb{C})$ el cual con la métrica uniforme $\| \ \|_\infty$ es completo; y definamos la aplicación $T: X \to X$ por

$$x \mapsto Tx$$

$$(Tx)(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Análogamente a lo hecho en la afirmación 1 del Teorema II.2.3. se prueba que $Tx \in X$.

Veamos que T es una contracción en X. Para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty &= \sup_{a\le t\le b}\left|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)\right| \\
&= \sup_{a\le t\le b}\left|\left(y(t) + \int_a^b K(t,s)x_1(s)ds\right) - \left(y(t) + \int_a^b K(t,s)x_2(s)ds\right)\right| \\
&= \sup_{a\le t\le b}\left|\int_a^b K(t,s)\big(x_1(s) - x_2(s)\big)ds\right| \\
&\le \sup_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)||x_1(s) - x_2(s)|ds \\
&\le \|x_1 - x_2\|_\infty \sup_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|ds \le c\|x_1 - x_2\|_\infty
\end{aligned}$$

es decir

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty \le c\|x_1 - x_2\|_\infty;\ x_1, x_2 \in X$$

siempre que

$$c=\sup_{a\le t\le b}\left\{\int_a^b \left|K(t,s)\right|ds\right\}<1 .$$

Luego T es una contracción en $C\left(\left[a,b\right],\mathbb{C}\right)=X$, y la afirmación de este teorema sigue del T.P.F.B. ■

Dado un $x_0\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{C}\right)$. El T.P.F.B. nos permite obtener el punto fijo x como un límite

$$x=\lim_{n\to\infty}T^n x_0 . \qquad \textbf{(II.2.5.2)}$$

Es interesante reinterpretar este límite como una serie. Definimos la aplicación $k:C\left(\left[a,b\right],\mathbb{C}\right)\to C\left(\left[a,b\right],\mathbb{C}\right)$ por

$$kx=\int_a^b K(t,s)x(s)ds .$$

Esta aplicación es denominada **operador de Fredholm**, y la función k es llamada el **núcleo** de K .

La ecuación integral (II.2.4.1) puede ser reescrita como

$$\left(I-k\right)x=y \qquad \textbf{(II.2.5.3)}$$

donde I es el operador identidad. La aplicación T (donde $Tx=x$) esta definida por

$$Tx=y+kx ,$$

lo implica que

$$\begin{aligned}T^n x_0 &=T^{n-1}\left(Tx_0\right)=T^{n-1}\left(y+kx_0\right)=y+kT^{n-1}\left(x_0\right)\\ &=y+kT^{n-2}\left(Tx_0\right)=y+kT^{n-2}\left(y+kx_0\right)\\ &=y+k\left[y+kT^{n-2}x_0\right]=y+k\left[y+kT^{n-3}\left(Tx_0\right)\right]\\ &=y+k\left[y+k\left(y+\cdots+k\left(y+kx_0\right)\right)\right]\end{aligned}$$

$$T^n x_0=y+ky+\cdots+k^n y+k^{n+1}x_0 .$$

Usando la ecuación (II.2.5.2), obtenemos

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n+1}k^i y=\sum_{n=0}^{\infty}k^n y ,$$

Por otro lado de (II.2.5.3) tenemos

$$x=\left(I-k\right)^{-1}y ,$$

entonces de las dos igualdades anteriores, conseguimos

$$\left(I-k\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}k^{n}\,. \qquad \textbf{(II.2.5.4)}$$

Esta serie es llamada **serie de Neumann**. El uso de sumas parciales de esta serie para aproximar a la inversa se llama **aproximación de Born**. Explícitamente tenemos

$$x(t)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}k^{n}y\right)(t)=\left(y+ky+k^{2}y+\cdots\cdots\right)(t)=y(t)+\left(ky\right)(t)+\left(k^{2}y\right)(t)+\cdots$$

$$=y(t)+\int_{a}^{b}K(t,s)y(s)ds+\left(k(ky)\right)(t)+\cdots$$

$$=y(t)+\int_{a}^{b}K(t,s)y(s)ds+\int_{a}^{b}K(t,s)\left((ky)(s)\right)ds+\cdots$$

$$=y(t)+\int_{a}^{b}K(t,s)y(s)ds+\int_{a}^{b}K(t,s)\left(\int_{a}^{b}K(s,r)y(r)dr\right)ds+\cdots$$

$$x(t)=y(t)+\int_{a}^{b}K(t,s)y(s)ds+\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}K(t,s)K(s,r)y(r)drds+\cdots$$

La serie de Neumann es similar a la serie geométrica. De hecho, la igualdad (II.2.5.4) es realmente una serie geométrica que es absolutamente convergente con respecto a determinada norma del operador cuando $\left\|k\right\|_{\infty}<1$. Esto explica porque no necesitamos imponer ninguna condición sobre y para que la ecuación (II.2.5.1) sea una condición que asegure que $\left(I-k\right)$ es invertible y depende sólo de la función k (ver [13]) .

II.3.- APLICACIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

II.3.1. DEFINICIÓN

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ y $f \in C(\Omega,\mathbb{C})$. Decimos que una función continuamente diferenciable

$$u:[c,d]\to\mathbb{C}$$

es una **solución** de la ecuación diferencial ordinaria

$$y' = f(t,y) \tag{II.3.1.1}$$

si para todo $t\in[c,d]$ tenemos que

$$(t,u(t))\in\Omega \text{ y } u'(t) = f(t,u(t)).$$

II.3.2. PROPOSICIÓN

Sea $(t_0,y_0)\in\Omega$. La condición necesaria y suficiente para que $u:[c,d]\to\mathbb{C}$ continua con $(t,u(t))\in\Omega$, para todo $t\in[c,d]$ sea solución de la ecuación diferencial (II.3.1.1) satisfaciendo $u(t_0)=y_0$, es que u sea solución continua de la ecuación integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \tag{II.3.2.1}$$

Demostración:

Es inmediato, pues, si f y u son continuas, la función $t\in[c,d]\to f(t,u(t))\in\mathbb{C}$, también lo es. Basta entonces aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo. ■

II.3.3. TEOREMA (Teorema de existencia de Cauchy para ecuaciones diferenciales)

Sean $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ y $f:[t_0-a,t_0+a]\times B_b[y_0]\subset\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una función continua y lipschitziana en la segunda variable, esto es, existe $L\in\mathbb{R}^+$ tal que

$$\left|f(t,z_1)-f(t,z_2)\right|\le L\left|z_1-z_2\right|;\ t\in[t_0-a,t_0+a],\ z_1,z_2\in B_b[y_0] \tag{II.3.3.1}$$

Entonces existe a^* con $0<a^*<a$ tal que la ecuación diferencial

$$y' = f(t,y)$$

tiene una única solución u definida en $\left[t_0-a^*,t_0+a^*\right]$ satisfaciendo $u(t_0)=y_0$.

Demostración:

Observemos que f está definida en un dominio compacto, entonces siendo f continua, f es acotada i.e. existe $M>0$ tal que $\left|f(t,y)\right|\le M$, para $(t,y)\in[t_0-a,t_0+a,]\times B_b[y_0]$.

(Notemos que si $M = 0$ resulta $f = 0$ y la afirmación es trivial).

Tomamos

$$a^* = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}. \qquad \textbf{(II.3.3.2)}$$

Para simplificar la notación, supongamos que tenemos $a \leq \dfrac{b}{M}$ i.e. $a^* = a$.

Recordemos que $X = C^*([t_0 - a, t_0 + a], B_b[y_0])$ dotado de la métrica del supremo

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sup_{t\in[t_0-a,t_0+a]} \{|u(t) - v(t)|\}$$

es un espacio métrico completo.

Sea $u \in X$, definimos $Tu : [t_0 - a, t_0 + a,] \to \mathbb{C}$ por

$$(Tu)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds.$$

Es inmediato que Tu es continua. De (II.3.3.2) se tiene que, para todo t con $|t - t_0| \leq a$

$$|(Tu)(t) - y_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s,u(s))| ds\right| \leq M|t - t_0| \leq Ma \leq b,$$

entonces $Tu \in X$.

Por otro lado, para cualesquiera $u, v \in X$, tenemos

$$\begin{aligned}
|(Tu)(t) - (Tv)(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,v(s))ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s,u(s)) - f(s,v(s))| ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L|u(s) - v(s)| ds\right| \\
&\leq L \sup_{t\in[t_0-a,t_0+a]} \{|u(t) - v(t)|\} |t - t_0|
\end{aligned}$$

$$\text{i.e. } |(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq L\|u - v\||t - t_0|. \qquad \textbf{(II.3.3.3)}$$

Además de esto, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que T^m es una contracción en X, pues, para arbitrarios $u, v \in X$ tenemos

$$|(T^m u)(t) - (T^m v)(t)| \leq \frac{L^m |t - t_0|^m}{m!} \|u - v\|. \qquad \textbf{(II.3.3.4)}$$

En efecto, para arbitrarios $u,v\in X$ y para todo t con $\left|t-t_0\right|\le a$, se tiene

$$\begin{aligned}\left|(T^2u)(t)-(T^2v)(t)\right| &= \left|T(Tu)(t)-T(Tv)(t)\right| \\ &= \left|\int_{t_0}^{t}\left[f(s,Tu(s))-f(s,Tv(s))\right]ds\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t}\left|f(s,Tu(s))-f(s,Tv(s))\right|ds\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t}L\left|Tu(s)-Tv(s)\right|ds\right| \\ &\le L^2\left\|u-v\right\|\left|\int_{t_0}^{t}\left|s-t_0\right|ds\right| \quad \text{(viene de II.3.3.3)} \\ &= L^2\left\|u-v\right\|\frac{\left|s-t_0\right|^2}{2}\Big|_{t_0}^{t} \\ &= L^2\left\|u-v\right\|\frac{\left|t-t_0\right|^2}{2}\end{aligned}$$

i.e. $\left|(T^2u)(t)-(T^2v)(t)\right|\le L^2\dfrac{\left|t-t_0\right|^2}{2!}\left\|u-v\right\|$; $u,v\in X$

y, de modo más general

$$\left|(T^{m+1}u)(t)-(T^{m+1}v)(t)\right|\le\left|(T^mu)(t)-(T^mv)(t)\right|L\frac{\left|t-t_0\right|}{m+1};\ u,v\in X\ ,$$

de donde resulta (II.3.3.4).

Como $\left|t-t_0\right|\le a$ tomando el supremo en (II.3.3.4), tenemos

$$\left\|T^mu-T^mv\right\|\le\frac{L^ma^m}{m!}\left\|u-v\right\|.$$

Para cada $m\in\mathbb{Z}^+$, sea

$$u_m=\frac{\left(La\right)^m}{m!},$$

utilizando el criterio de la razón para sucesiones de números reales

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\dfrac{\left(La\right)^{m+1}}{(m+1)!}}{\dfrac{\left(La\right)^m}{m!}}\right|=\left(La\right)\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m+1}\right)=0<1$$

entonces

$$\lim_{m\to\infty} u_m = \lim_{m\to\infty} \frac{(La)^m}{m!} = 0 \,,$$

por lo tanto $\left(\frac{(La)^m}{m!}\right)_{m\geq 1}$ converge, luego sigue por definición de límite de sucesiones de números reales que:

Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tenemos $\left|\frac{(La)^m}{m!}\right| < \varepsilon < 1$.

Entonces basta tomar $m = n_0$, para concluir que existe $m \geq 1$ tal que T^m es una contracción en $C^*([t_0 - a, t_0 + a], B_b[y_0]) = X$, luego por el corolario I.4.2., T tendrá un único punto fijo, el cual es la solución de la ecuación integral (II.3.2.1) y por tanto solución de la ecuación diferencial ordinaria (II.3.1.1). ■

II.4.- APLICACIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

II.4.1. EJEMPLO:

Sean $f, g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ funciones continuas y para cada $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ consideremos la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-g(x,t)u(x,t)=f(x,t) \qquad \textbf{(II.4.1.1)}$$

con las condiciones iniciales

$$u(x,0)=0\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,. \qquad \textbf{(II.4.1.2)}$$

Observemos que (II.4.1.1) corresponde al problema de la ecuación de la onda con vibraciones forzadas (semilineal hiperbólica).

II.4.2. PROPOSICIÓN

La función $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$ es solución de (II.4.1.1), satisfaciendo las condiciones iniciales (II.4.1.2) con $u\,,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ continuas en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ si sólo si u es solución de la ecuación integral

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left[f(\sigma,\tau)+g(\sigma,\tau)u(\sigma,\tau)\right]d\sigma \qquad \textbf{(II.4.2.1)}$$

Demostración:

Llamemos $F = f + gu$, para (II.4.1.1) hacemos el cambio de variable

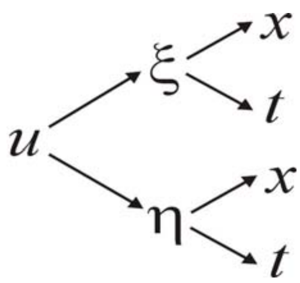
$$\xi = x+t\,,\ \eta = x-t\,,$$

de donde

$$x=\frac{\xi+\eta}{2},\ t=\frac{\xi-\eta}{2}.$$

Entonces, ahora las nuevas hipótesis son $u\,,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ son funciones continuas en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ (Observar que estas implican que $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}$).

Queremos hallar expresiones para $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para lo cual consideramos el diagrama de dependencia:



Luego, con esto hallemos:

- $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{1}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{-1} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad \textbf{(II.4.2.2)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

(Pues de ambas hipótesis sobre u y sus derivadas parciales, tenemos

$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \xi}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial t}$).

$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} \qquad \textbf{(II.4.2.3)}$$

- $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{1}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{1} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad \textbf{(II.4.2.4)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

(Análogamente tenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \xi}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial x}$).

$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}. \qquad \textbf{(II.4.2.5)}$$

Luego reemplazamos (II.4.2.3) y (II.4.2.5) y F en (II.4.1.1), obteniendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)=-\frac{1}{4}F\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Ahora integramos con respecto a ξ

$$\int_{\gamma}^{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi\partial\eta}\left(\frac{\psi+\eta}{2},\frac{\psi-\eta}{2}\right)d\psi=-\frac{1}{4}\int_{\gamma}^{\xi}F\left(\frac{\psi+\eta}{2},\frac{\psi-\eta}{2}\right)d\psi$$

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)-\frac{\partial u}{\partial\eta}\left(\frac{\gamma+\eta}{2},\frac{\gamma-\eta}{2}\right)=-\frac{1}{4}\int_{\gamma}^{\xi}F\left(\frac{\psi+\eta}{2},\frac{\psi-\eta}{2}\right)d\psi\,.$$

Aquí hacemos $\gamma=\eta$ y tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)=\frac{\partial u}{\partial\eta}(\eta,0)-\frac{1}{4}\int_{\gamma}^{\xi}F\left(\frac{\psi+\eta}{2},\frac{\psi-\eta}{2}\right)d\psi \qquad \textbf{(II.4.2.6)}$$

Restando (II.4.2.4) de (II.4.2.2), obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}(\eta,0)=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(\eta,0)-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}(\eta,0).$$

Esta última relación la reemplazamos en (II.4.2.6), y conseguimos

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(\eta,0)-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}(\eta,0)-\frac{1}{4}\int_{\gamma}^{\xi}F\left(\frac{\psi+\eta}{2},\frac{\psi-\eta}{2}\right)d\psi\,.$$

Integramos nuevamente con respecto a η de un valor arbitrario de η hasta $\eta=\xi$, y tenemos

$$\int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{\xi+s}{2},\frac{\xi-s}{2}\right)ds=\int_{\eta}^{\xi}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(s,0)-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}(s,0)\right]ds-\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{s}^{\xi}F\left(\frac{\psi+s}{2},\frac{\psi-s}{2}\right)d\psi ds$$

$$u(\xi,0)-u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)=\int_{\eta}^{\xi}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(s,0)-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}(s,0)\right]ds-\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{s}^{\xi}F\left(\frac{\psi+s}{2},\frac{\psi-s}{2}\right)d\psi ds$$

$$u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)=u(\xi,0)-\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial u}{\partial x}(s,0)ds+\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial u}{\partial t}(s,0)ds+\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{s}^{\xi}F\left(\frac{\psi+s}{2},\frac{\psi-s}{2}\right)d\psi ds$$

$$=u(\xi,0)-\frac{1}{2}u(\xi,0)+\frac{1}{2}u(\eta,0)+\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial u}{\partial t}(s,0)ds\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{s}^{\xi}F\left(\frac{\psi+s}{2},\frac{\psi-s}{2}\right)d\psi ds$$

$$u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[u(\xi,0)+u(\eta,0)\right]+\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi}\frac{\partial u}{\partial t}(s,0)ds+\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{s}^{\xi}F\left(\frac{\psi+s}{2},\frac{\psi-s}{2}\right)d\psi ds$$

Ahora, aplicamos las condiciones iniciales (II.4.1.2) quedándonos

$$u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)=\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{s}^{\xi}F\left(\frac{\psi+s}{2},\frac{\psi-s}{2}\right)d\psi ds \qquad \textbf{(II.4.2.7)}$$

Para la integral doble, hacemos el cambio de variable

$$\psi=\sigma+\tau\,,\ s=\sigma-\tau$$

luego por el teorema de cambio de variable para integrales dobles tenemos

$$drds=\left|\det(J(\psi,s))\right|d\sigma d\tau=\left|\det(\frac{\partial(\psi,s)}{\partial(\sigma,\tau)})\right|d\sigma d\tau=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} & \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\\ \frac{\partial s}{\partial\sigma} & \frac{\partial s}{\partial\tau}\end{matrix}\right\|d\sigma d\tau$$

$$=\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{matrix}\right\|d\sigma d\tau=\left|-2\right|d\sigma d\tau=2d\sigma d\tau\,.$$

Observemos además que el dominio de integración inicial

$$\eta\le s\le\psi\le\xi$$

se transforma en

$$\eta+\tau\le\sigma\le\xi-\tau\,,\ 0\le\tau\le\frac{1}{2}(\xi\text{-}\eta).$$

Luego de reemplazar en (II.4.2.7), tenemos

$$u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\xi-\eta}{2}}\int_{\eta+\tau}^{\xi-\tau}F(\sigma,\tau)d\sigma d\tau$$

ahora tenemos presente que $\xi=x+t$, $\eta=x-t$, $F=f+gu$ obteniendo

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}d\tau\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left[f(\sigma,\tau)+g(\sigma,\tau)u(\sigma,\tau)\right]d\sigma\,,$$

y por lo tanto, sigue que u, satisfaciendo (II.4.1.1) y (II.4.1.2), también satisface (II.4.2.1).

Recíprocamente, veamos que (II.4.2.1) i.e.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}d\tau\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left[f(\sigma,\tau)+g(\sigma,\tau)u(\sigma,\tau)\right]d\sigma$$

satisface (II.4.1.1) y las condiciones iniciales (II.4.1.2).

- $u(x,0)=0$
- Probaremos que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,.$$

En efecto, sea

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t G(x,t,\tau)d\tau \qquad \textbf{(II.4.2.A)}$$

donde

$$G(x,t,\tau) = \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\sigma,\tau)d\sigma .$$

En esta parte de la demostración ignoramos la constante $\frac{1}{2}$; entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[u(x,t+h)-u(x,t)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} G(x,t+h,\tau)d\tau - \int_0^t G(x,t,\tau)d\tau\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left(\int_0^t G(x,t+h,\tau)d\tau + \int_0^{t+h} G(x,t+h,\tau)d\tau\right) - \int_0^t G(x,t,\tau)d\tau\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^t G(x,t+h,\tau)d\tau - \int_0^t G(x,t,\tau)d\tau\right] + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(x,t+h,\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[G(x,t+h,\tau)-G(x,t,\tau)\right]d\tau + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(x,t+h,\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{\partial G}{\partial t}\left(x,t,\tau\right)d\tau + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(x,t+h,\tau)d\tau .$$

Para la segunda integral usamos el teorema del valor medio para integrales

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(x,t+h,\tau)d\tau = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}G(x,t,\omega)h = G\left(x,t,t\right),$$

en esta última igualdad como $t \le \omega \le t+h$ entonces cuando $h \to 0$ tendremos $\omega \to t$.

Entonces tendremos la siguiente expresión

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_0^t \frac{\partial G}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau + G(x,t,t).$$

Tomando $t=0$, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 .$$

Por lo tanto u verifica las condiciones iniciales (II.4.1.2).

Ahora mostremos que la ecuación integral (II.4.2.1) verifica la ecuación en derivada parciales (II.4.1.1). En efecto, observemos que

$$G(x,t,t)=0$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\int_0^t \frac{\partial G}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau\,,$$

análogamente encontramos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\int_0^t \frac{\partial G}{\partial x}(x,t,\tau)d\tau\,.$$

A estas dos funciones halladas le volvemos aplicar la definición de derivada parcial con respecto a t y x respectivamente, obteniendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x,t,\tau)d\tau\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t,\tau)d\tau\,.$$

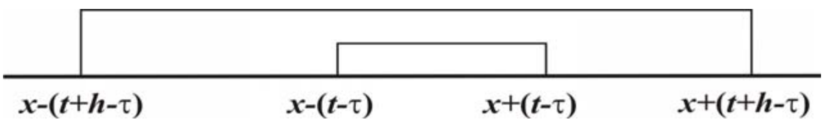
Hallemos

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x,t,\tau) \text{ y } \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t,\tau)\,.$$

- $\displaystyle \frac{\partial G}{\partial t}(x,t,\tau)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[G(x,t+h,\tau)-G(x,t,\tau)\right]$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{x-(t+h-\tau)}^{x+(t+h-\tau)} F(\sigma,\tau)d\sigma-\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\sigma,\tau)d\sigma\right]$$

Gráficamente si $h>0$, tenemos:



entonces

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t,\tau)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{x-(t+h-\tau)}^{x-(t-\tau)} F(\sigma,\tau)d\sigma+\int_{x+(t-\tau)}^{x+(t+h-\tau)} F(\sigma,\tau)d\sigma\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-(t+h-\tau)}^{x-(t-\tau)} F(\sigma,\tau)d\sigma+\lim_{h\to 0}\int_{x+(t-\tau)}^{x+(t+h-\tau)} F(\sigma,\tau)d\sigma\,.$$

Nuevamente a cada uno de estos términos le aplicamos el teorema del valor medio para integrales, obteniendo

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t,\tau)=F(x-t+\tau,\tau)+F(x+t-\tau,\tau)$$

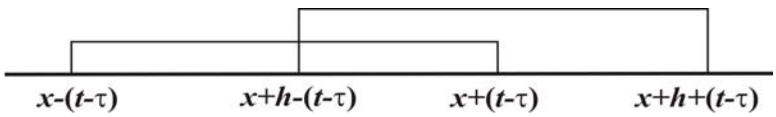
entonces

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x,t,\tau)=\frac{\partial F}{\partial t}(x-t+\tau,\tau)+\frac{\partial F}{\partial t}(x+t-\tau,\tau).$$

- $\displaystyle \frac{\partial G}{\partial x}(x,t,\tau)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[G(x+h,t,\tau)-G(x,t,\tau)\right]$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{x+h-(t-\tau)}^{x+h+(t-\tau)}F(\sigma,\tau)d\sigma-\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}F(\sigma,\tau)d\sigma\right].$$

Gráficamente $h>0$, tenemos:



Similarmente a lo que hicimos para $\dfrac{\partial G}{\partial t}(x,t,\tau)$, llegamos a

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,t,\tau)=F(x+t-\tau,\tau)-F(x-t+\tau,\tau)$$

entonces

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t,\tau)=\frac{\partial F}{\partial x}(x+t-\tau,\tau)-\frac{\partial F}{\partial x}(x-t+\tau,\tau).$$

Luego reemplazamos las expresiones obtenidas en:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\int_0^t\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x,t,\tau)d\tau-\int_0^t\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t,\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t\left[\frac{\partial F}{\partial t}(x-t+\tau,\tau)+\frac{\partial F}{\partial t}(x+t-\tau,\tau)\right]d\tau-\int_0^t\left[\frac{\partial F}{\partial t}(x+t-\tau,\tau)-\frac{\partial F}{\partial t}(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau$$

$$=F(x,t)+F(x,t)$$

$$-\int_0^t\left\{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F\left((x+h)+t-\tau,\tau\right)-F\left(x+t-\tau,\tau\right)\right]-\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F\left((x+h)-t+\tau,\tau\right)-F\left(x-t+\tau,\tau\right)\right]\right\}d\tau$$

$$=2F(x,t)$$

$$-\int_0^t\left\{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F\left(x+(t+h)-\tau,\tau\right)-F\left(x+t-\tau,\tau\right)\right]-\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F\left(x-t+(\tau+h),\tau\right)-F\left(x-t+\tau,\tau\right)\right]\right\}d\tau$$

$$= 2F(x,t) - \int_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x+t-\tau,\tau) - \frac{\partial F}{\partial \tau}(x-t+\tau,\tau) \right] d\tau$$

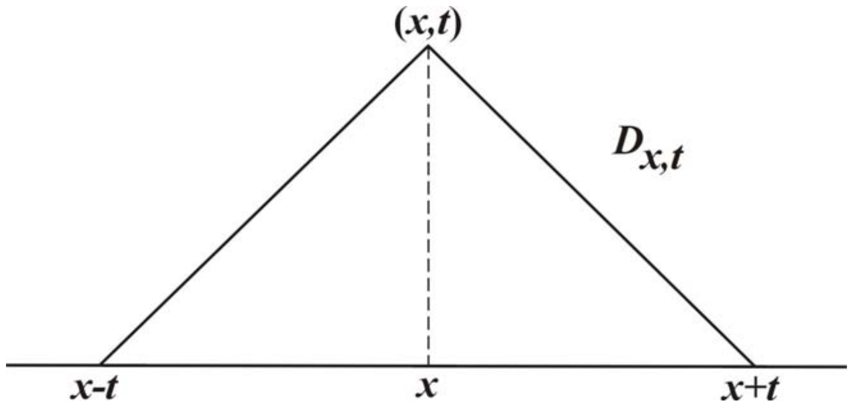
$$= 2F(x,t) - F(x,t) + F(x,t) = 2F(x,t).$$

Recordemos que ignoramos la constante $\frac{1}{2}$ que acompaña a la ecuación integral, por lo tanto tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = F(x,t). \quad \blacksquare$$

Notemos, que en (II.4.2.1), el dominio de integración es el triángulo:

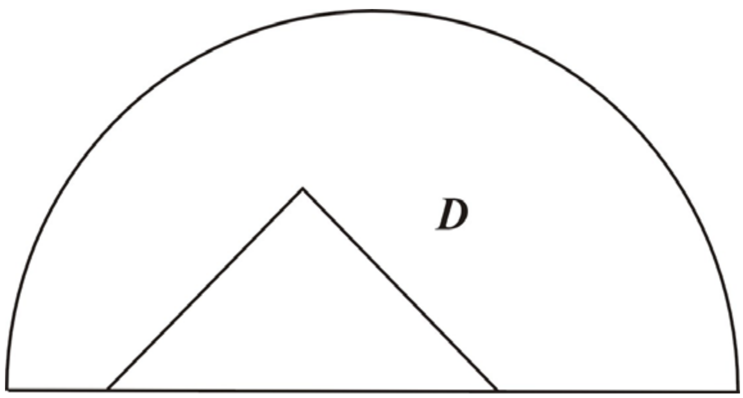
$$D_{x,t} = \left\{ (\sigma,\tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : |x-\sigma| \le t-\tau \right\}.$$



Vamos pues a considerar el problema de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación integral (II.4.2.1), es decir de

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} [f(\sigma,\tau) + g(\sigma,\tau)u(\sigma,\tau)] d\sigma$$

en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Para eso es suficiente probar que, en todo dominio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con la condición $D_{x,t} \subset D$, para todo $(x,t) \in D$ existe y es única la solución de (II.4.2.1).



Consideremos el espacio de Banach $X = C(D,\mathbb{C})$, y sea $u \in X$; definimos Tu por

$$\left(Tu\right)\left(x,t\right) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left[f(\sigma,\tau) + g(\sigma,\tau)u(\sigma,\tau)\right] d\sigma .$$

Afirmación: $Tu \in X$.

En efecto, análogamente a lo usado en (II.4.2.A) tenemos que

$$\left(Tu\right)(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t G(x,t,\tau)d\tau$$

donde

$$G(x,t,\tau) = \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\sigma,\tau)d\sigma .$$

Nuevamente volvemos a ignorar la constante $\frac{1}{2}$. Consideremos $\left(x,t\right)$, $\left(x_0,t_0\right) \in D$ tal que

$$\left(x,t\right) \to \left(x_0,t_0\right)$$

entonces

$$\left(x - x_0\right) \to 0 \text{ y } \left(t - t_0\right) \to 0 .$$

Luego, para todo $u \in X$ tenemos

$$\left|\left(Tu\right)(x,t) - \left(Tu\right)\left(x_0,t_0\right)\right| = \left|\int_0^t G(x,t,\tau)d\tau - \int_0^{t_0} G(x_0,t_0,\tau)d\tau\right| \qquad \textbf{(II.4.2.B)}$$

Además supongamos que $t > t_0$, con esto la primera integral de (II.4.2.B) se transforma en

$$\int_0^t G(x,t,\tau)d\tau = \int_0^{t_0} G(x,t_0,\tau)d\tau + \int_{t_0}^t G(x,t_0,\tau)d\tau \qquad \textbf{(II.4.2.C)}$$

Reemplazamos (II.4.2.C) en (II.4.2.B) y agrupando el primer término de (II.4.2.C) con el segundo término de (II.4.2.B), obtenemos

$$\left|\left(Tu\right)(x,t) - \left(Tu\right)\left(x_0,t_0\right)\right| \leq \left|\left(\int_0^{t_0} G(x,t_0,\tau)d\tau - \int_0^{t_0} G(x,t_0,\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^t G(x,t,\tau)d\tau\right|$$

$$\leq \int_0^{t_0} \left|\left(G(x,t_0,\tau) - G(x_0,t_0,\tau)\right)\right| d\tau + \int_{t_0}^t \left|G(x,t,\tau)\right| d\tau . \qquad \textbf{(II.4.2.D)}$$

Ahora calculemos el límite de cada una de las integrales de (II.4.2.D):

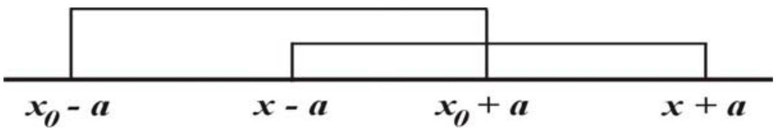
- Para la segunda integral, observemos que se está integrando sobre el intervalo $\left[t_0,t\right]$ el cual tiene medida nula, pues $\left(t - t_0\right) \to 0$, entonces ella misma tiende a cero.

- Para la primera integral, hacemos $a = t_0 - \tau$ y explicitamos

$$G(x,t_0,\tau) - G(x_0,t_0,\tau) = \int_{x-a}^{x+a} F(\sigma,\tau)\,d\sigma - \int_{x_0-a}^{x_0+a} F(\sigma,\tau)\,d\sigma . \qquad \textbf{(II.4.2.E)}$$

Aquí supondremos que $x > x_0$ de donde $x + a > x_0 + a$ y $x - a > x_0 - a$.

Gráficamente tenemos:



Luego (II.4.2.E) se transforma en

$$G(x,t_0,\tau) - G(x_0,t_0,\tau) = \int_{x_0+a}^{x+a} F(\sigma,\tau)\,d\tau - \int_{x_0-a}^{x-a} F(\sigma,\tau)\,d\tau$$

De forma similar a como tratamos la segunda integral de (II.4.2.D), pero ahora teniendo presente $(x - x_0) \to 0$, concluimos que cada una de las integrales anteriores tiende a cero.

Por lo tanto, de (II.4.2.B) para todo $u \in X$ tenemos

$$\left|(Tu)(x,t) - (Tu)(x_0,t_0)\right| \to 0$$

entonces

$$(Tu)(x,t) \to (Tu)(x_0,t_0).$$

i.e. Tu es continua en D, luego $Tu \in X$.

También obtenemos

$$\left|(Tu)(x,t) - (Tv)(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left|g(\sigma,\tau)\right| \left|u(\sigma,\tau) - v(\sigma,\tau)\right| d\sigma d\tau .$$

Si $\left|g(\sigma,\tau)\right| \le M$ en el dominio D, entonces

$$\left|(Tu)(x,t) - (Tu)(x,t)\right| \le \frac{1}{2} M \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left|u(\sigma,\tau) - v(\sigma,\tau)\right| d\sigma d\tau$$

$$\le \frac{1}{2} M \sup_D \left|u(\sigma,\tau) - v(\sigma,\tau)\right| \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\sigma d\tau$$

$$d(Tu,Tv) \le \frac{1}{2} M t^2 d(u,v);\ u,v \in X .$$

Análogamente conseguimos

$$\left|\left(T^2u\right)(x,t)-\left(T^2v\right)(x,t)\right|=\left|T(Tu)(x,t)-T(Tv)(x,t)\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}\left|\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}g(\sigma,\tau)\left[(Tu)(\sigma,\tau)-(Tv)(\sigma,\tau)\right]d\sigma d\tau\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}M\,\frac{1}{2}M\tau^2 d(u,v)\,d\sigma d\tau$$

$$=\frac{1}{4}M^2 d(u,v)\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau^2 d\sigma d\tau$$

$$d\left(T^2u,T^2v\right)\leq\frac{1}{24}M^2t^4d(u,v);\ u,v\in X\ .$$

Por inducción, resulta

$$d(T^nu,T^nv)\leq\frac{1}{(2n)!}M^n(t^*)^{2n}d(u,v)$$

donde

$$t^*=\sup\{(x,t)\in D\}.$$

Para cada $n\in\mathbb{Z}^+$, sea

$$c_n=\frac{\left|M(t^*)^2\right|^n}{(2n)!},$$

ahora utilizamos el criterio de la razón para sucesiones de números reales

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\left|M(t^*)^2\right|^{n+1}}{\left[2(n+1)\right]!}}{\dfrac{\left|M(t^*)^2\right|^n}{(2n)!}}=M(t^*)^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0<1,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|M(t^*)^2\right|^n}{n!}=0,$$

por lo tanto $\left\{\dfrac{M(t^*)^2}{n!}\right\}_{n\geq1}$ converge, luego sigue por definición de límite de sucesiones de números reales que:

Dado $0<\varepsilon<1$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>n_0$ tenemos $\dfrac{\left|M(t^*)^2\right|^n}{(2n)!}<\varepsilon<1$.

Entonces tomamos $m = n_0$, para concluir que existe $m \geq 1$ tal que T^m es una contracción en $C([a,b],\mathbb{C}) = X$. Así, por el corolario I.4.2. demostramos la existencia y unicidad en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ de la solución de (II.4.2.1). ■

II.4.3. EJEMPLO

Consideremos ahora la ecuación diferencial parcial

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \qquad \textbf{(II.4.3.1)}$$

Sobre una curva C, dada por $y = \varphi(x)$ con $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $\varphi'(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$. Sean dadas las funciones continuamente diferenciables u_0 y u_1 (ó u_2). Queremos estudiar la existencia de $u \in C^{(2)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R},\mathbb{C})$ satisfaciendo (II.4.3.1) y

$$\mathrm{u}|_{\mathrm{C}} = u_0, \quad (u_x)|_{\mathrm{C}} = u_1, \quad [\text{ ó } (u_y)|_{\mathrm{C}} = u_2 \ ],$$

esto es, tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$u(x,\varphi(x)) = u_0(x), \ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,\varphi(x)) = u_1(x) \quad [\text{ ó } \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,\varphi(x)) = u_2(x) \ ].$$

Vamos a mostrar inicialmente como podemos reducir el problema a la búsqueda de una solución u de una ecuación análoga a (II.4.3.1) con

$$u \equiv u_x \equiv u_y \equiv 0 \text{ sobre la recta } x + y = 0.$$

Observemos preliminarmente que, dadas u_0, u_1 [respectivamente u_2], queda determinada u_2 [respectivamente u_1], pues; si $\mathrm{u}|_{\mathrm{C}} = u_0$, $(u_x)|_{\mathrm{C}} = u_1$ y si $(u_y)|_{\mathrm{C}} = u_2$, entonces

$$\frac{d}{dx}u_0(x,\varphi(x)) = u_x(x,\varphi(x)) + u_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = u_1(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)u_2(x,\varphi(x))$$

lo que determina u_2.

Observar además que no hay pérdida de generalidad en suponer que la curva C es dada por

$$x + y = 0 \qquad \textbf{(II.4.3.2)}$$

pues siempre podemos hacer un cambio de variables poniendo

$$\xi = -y, \ \eta = \varphi(x).$$

Además de eso, si tuviéramos

$$
\begin{aligned}
u\left[x(t),y(t)\right] &= \bar{u}(t)\,, \\
u_x\left[x(t),y(t)\right] &= p(t)\,, \\
u_y\left[x(t),y(t)\right] &= q(t)\,,
\end{aligned} \qquad \textbf{(II.4.3.3)}
$$

a lo largo de la recta $x = t$, $y = -t$, consideremos la ecuación

$$u_{xy} = 0 \qquad \textbf{(II.4.3.4)}$$

sujeta a esas condiciones. La solución es entonces,

$$u_1(x,y) = \frac{\bar{u}(x) + \bar{u}(y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-y}^{x} p(t)dt + \frac{1}{2}\int_{-x}^{y} q(t)dt\,.$$

Sustrayendo u_1 de una solución de (II.4.3.1) que satisfaga también a (II.4.3.3), obtenemos una solución de una nueva ecuación (cuyo segundo miembro, para simplificar, también denotamos por f).

$$u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y) \text{ i.e.} \qquad \textbf{(II.4.3.1)}$$

satisfaciendo

$$u \equiv u_x \equiv u_y \equiv 0 \text{ sobre la recta } x + y = 0\,. \qquad \textbf{(II.4.3.5)}$$

El problema de existencia de una solución de los sistemas (II.4.3.1) y (II.4.3.5), que pasamos a considerar.

II.4.4. <u>PROPOSICIÓN</u>

Supongamos que dado $a > 0$, la función $f : \left[-a,a\right] \times \left[-a,a\right] \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ es continua y lipschitziana en las tres últimas variables, esto es, existe una constante $L > 0$ tal que

$$\left| f(x,y,u_2,p_2,q_2) - f(x,y,u_1,p_1,q_1) \right| \le L\left[\left|u_2 - u_1\right| + \left|p_2 - p_1\right| + \left|q_2 - q_1\right|\right]$$

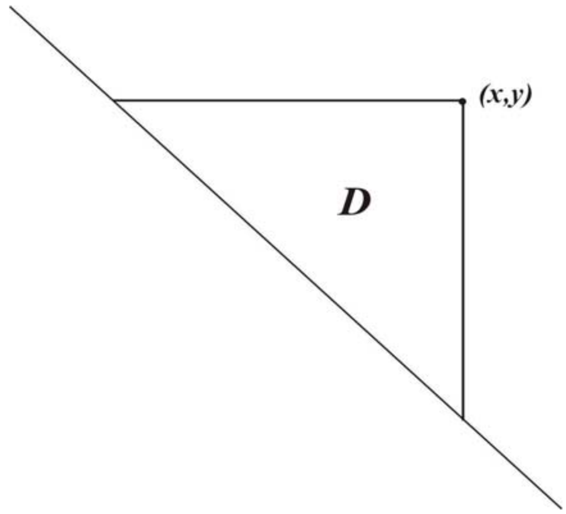
para cualesquiera $x,y \in \left[-a,a\right]$ con $u_1,u_2,p_1,p_2,q_1,q_2 \in \mathbb{C}$. Entonces u es solución de (II.4.3.1) sujeta a las condiciones (II.4.3.5) si y sólo si es solución de

$$u(x,y) = \iint_D f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)d\xi d\eta \qquad \textbf{(II.4.4.1)}$$

donde D es el triangulo limitado por las rectas

$$\xi + \eta = 0\,,\ \xi = x\,,\ \eta = y\,,$$

Gráficamente tenemos:



con lo que:

$$u(x,y)=\int_{-x}^{y}d\eta\int_{-\eta}^{x}f(\xi,\eta,u,u_{\xi},u_{\eta})d\xi \qquad \textbf{(II.4.4.2)}$$

$$=\int_{-y}^{x}d\xi\int_{-\xi}^{y}f(\xi,\eta,u,u_{\xi},u_{\eta})d\eta\,.$$

<u>Demostración</u>:

También en este caso vamos aplicar el corolario 1.4.2. para demostrar la existencia de soluciones de (II.4.3.1) satisfaciendo (II.4.3.5).

Vamos a considerar dos casos, expuestos a seguir:

<u>Primer caso</u>: Supongamos además que f es lineal en las tres últimas variables i.e. cuando (II.4.3.1) tiene la forma

$$u_{xy}=g(x,y)u_x+h(x,y)u_y+r(x,y)u+s(x,y)$$

donde las funciones g,h,r,s son continuas en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Vamos a demostrar que existe $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ solución de (II.4.4.2) y por lo tanto, solución de (II.4.3.1) satisfaciendo (II.4.3.5). Para eso, es suficiente demostrar que, para todo $a>0$ existe una solución de (II.4.2.2) en $[-a,a]\times[-a,a]$.

Sea $X=C^{(1)}\left([-a,a]\times[-a,a],\mathbb{C}\right)$ i.e. X es el espacio de las funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas. Recordemos que X es un espacio de Banach provisto de la norma

$$\|u\|_X=\|u\|+\|u_x\|+\|u_y\|$$

donde,

$$\|v\|=\sup\left\{|v(x,y)|:x,y\in[-a,a]\right\}.$$

Para todo $u \in X$ y para cualesquiera $x, y \in [-a,a]$, definimos Tu por

$$(Tu)(x,y) = \iint_D f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,d\xi d\eta\,. \qquad \textbf{(II.4.4.3)}$$

Luego se cumplen

$$(Tu)_x(x,y) = \int_{-x}^{y} f(x,\eta,u,u_x,u_\eta)\,d\eta\,, \qquad \textbf{(II.4.4.4)}$$

$$(Tu)_y(x,y) = \int_{-y}^{x} f(\xi,y,u,u_\xi,u_\eta)\,d\xi\,. \qquad \textbf{(II.4.4.5)}$$

En efecto, mostraremos (II.4.4.4). De (II.4.4.3) y de la segunda igualdad de (II.4.4.2) tenemos

$$(Tu)(x,y) = \int_{-y}^{x} d\xi \int_{-\xi}^{y} f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,d\eta\,.$$

Sea

$$G\left(\xi,y,u,u_\xi,u_y\right) = \int_{-\xi}^{y} f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,d\eta\,.$$

con esto

$$(Tu)(x,y) = \int_{-y}^{x} G\left(\xi,y,u,u_\xi,u_y\right) d\xi\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(Tu)_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{(Tu)(x+h,y)-(Tu)(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{-y}^{x+h} G\left(\xi,y,u,u_\xi,u_y\right)d\xi - \int_{-y}^{x} G\left(\xi,y,u,u_\xi,u_y\right)d\xi\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} G\left(\xi,y,u,u_\xi,u_y\right)d\xi \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} G\left(w,y,u,u_w,u_y\right)h = G\left(x,y,u,u_x,u_y\right)
\end{aligned}$$

para algún w tal que $x \le w \le x+h$; usando el teorema del valor medio para integrales como $h \to 0$ entonces $w \to x$.

$$\text{i.e. } (Tu)_x(x,y) = G\left(x,y,u,u_x,u_y\right),$$

por lo tanto

$$(Tu)_x(x,y) = \int_{-x}^{y} f(x,\eta,u,u_x,u_\eta)\,d\eta\,.$$

Luego sigue de (II.4.4.3), (II.4.4.4) y (II.4.4.5) que $Tu \in X$, y para cualesquiera $u, v \in X$, mayoremos:

- $\left|\left(Tu-Tv\right)(x,y)\right| \leq \left|\int_{-x}^{y} d\eta \int_{-\eta}^{x} \left| f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) - f(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta)\right| d\xi\right|$

$$\leq L\left|\int_{-x}^{y} d\eta \int_{-\eta}^{x} \left[\|u-v\| + \|u_\xi - v_\xi\| + \|u_\eta - v_\eta\|\right] d\xi\right|$$

$$= L\|u-v\|_X \left|\int_{-x}^{y} d\eta \int_{-\eta}^{x} d\xi\right|$$

i.e. $\left|\left(Tu-Tv\right)(x,y)\right| \leq L\|u-v\|_X \left|x+y\right|^2$ **(II.4.4.6)**

- $\left|\left((Tu)_x-(Tv)_x\right)(x,y)\right| \leq \left|\int_{-x}^{y}\int_{-\eta}^{x} \left| f(\xi,\eta,u,u_x,u_\eta) - f(\xi,\eta,v,v_x,v_\eta)\right| d\xi d\eta\right|$

$$\leq L\left|\int_{-x}^{y} \left[\|u-v\| + \|u_x - v_x\| + \|u_\eta - v_\eta\|\right] d\eta\right|$$

$$= L\|u-v\|_X \left|\int_{-x}^{y} d\eta\right| = L\|u-v\|_X \left|x+y\right|$$

i.e. $\left|\left((Tu)_x-(Tv)_x\right)(x,y)\right| \leq L\|u-v\|_X \left|x+y\right|$ **(II.4.4.7)**

- Análogamente, conseguimos

$$\left|\left((Tu)_y-(Tv)_y\right)(x,y)\right| \leq L\|u-v\|_X \left|x+y\right| \qquad \textbf{(II.4.4.8)}$$

Para cualesquiera $x,y\in\left[-a,a\right]$ (i.e. $\left|x\right|\leq a$, $\left|y\right|\leq b$) tenemos

$$\left|x+y\right| \leq \left|x\right| + \left|y\right| \leq 2a,$$

luego tomando $c=\max\left\{2a,2\right\}$, tendremos

$$\left(x+y\right)^2 = \left|x+y\right|^2 = \left|x+y\right|\left|x+y\right| \leq 2a\left|x+y\right| \leq c\left|x+y\right|$$

i.e. $\left(x+y\right)^2 \leq c\left|x+y\right|$.

y, por tanto, en (II.4.4.6), (II.4.4.7) y (II.4.4.8) podemos tomar como segundo miembro a

$$cL\|u-v\|_X \left|x+y\right|. \qquad \textbf{(II.4.4.9)}$$

Entonces tenemos

$$\|Tu-Tv\|_X = \|Tu-Tv\| + \left\|\left(Tu-Tv\right)_x\right\| + \left\|\left(Tu-Tv\right)_y\right\|$$

$$\leq 3Lc\|u-v\|_X \left|x+y\right|.$$

Similarmente, encontraremos mayoraciones para:

- $\left|\left(T^2u - T^2v\right)(x,y)\right| = \left|T(Tu)(x,y) - T(Tv)(x,y)\right|$

$$\leq \left|\int_{-x}^{y} d\eta \int_{-\eta}^{x} \left| f(\xi,\eta,Tu,(Tu)_\xi,(Tu)_\eta) - f(\xi,\eta,Tv,(Tv)_\xi,(Tv)_\eta)\right| d\xi\right|$$

$$\leq L\left|\int_{-x}^{y} d\eta \int_{-\eta}^{x} \left[\left\|Tu - Tv\right\| + \left\|(Tu)_\xi - (Tv)_\xi\right\| + \left\|(Tu)_\eta - (Tv)_\eta\right\|\right] d\xi\right|$$

$$\leq 3Lc\left\|u - v\right\|_X \left|\int_{-x}^{y} d\eta \int_{-\eta}^{x} \left|\xi + \eta\right| d\xi\right| \text{ (Aquí utilizamos (II.4.4.9))} \qquad \textbf{(II.4.4.10)}$$

Análogamente, llegamos a conseguir las siguientes relaciones:

- $\left|\left((T^2u)_x - (T^2v)_x\right)(x,y)\right| \leq 3L^2c\left\|u - v\right\|_X \left|\int_{-x}^{y} \left|x + \eta\right| d\eta\right|$ **(II.4.4.11)**

- $\left|\left((T^2u)_y - (T^2v)_y\right)(x,y)\right| \leq 3L^2c\left\|u - v\right\|_X \left|\int_{-x}^{y} \left|\xi + y\right| d\xi\right|$ **(II.4.4.12)**

Observemos por ejemplo, como obtuvimos

$$\left|\int_{-x}^{y} \left|x + \eta\right| d\eta\right| = \int_{-x}^{y} (x + \eta)\, d\eta = \left(x\eta + \frac{\eta^2}{2}\right)\Bigg|_{-x}^{y} = xy + \frac{y^2}{2} - \left[x(-x) + \frac{x^2}{2}\right]$$

$$= xy + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}$$

donde hemos partido del hecho que:

$-x < \eta < y$ luego $x - x < x + \eta < x + y$ i.e. $0 < x + \eta < x + y$ entonces $\left|x + \eta\right| = x + \eta$.

Entonces conseguimos

$$\left\|T^2u - T^2v\right\|_X = \left\|T^2u - T^2v\right\| + \left\|\left(T^2u - T^2v\right)_x\right\| + \left\|\left(T^2u - T^2v\right)_y\right\| \leq \frac{9L^2c^2}{3!}\left\|u - v\right\|_X \left|x + y\right|^2$$

siendo los segundos miembros de (II.4.4.10), (II.4.4.11) y (II.4.4.12) mayorados por

$$3L^2c^2\left\|u - v\right\|_X \left|x + y\right|^2.$$

Por inducción viene que

$$\left\|T^n u - T^n v\right\|_X \leq \frac{(3Lc)^n}{n!}\left\|u - v\right\|_X \; ; \; u, v \in X .$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea

$$b_n = \frac{\left|3Lc\right|^n}{n!},$$

ahora utilizamos el criterio de la razón para sucesiones de números reales

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|3Lc|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|3Lc|^{n}}{n!}} = 3Lc\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|3Lc|^{n}}{n!} = 0,$$

por lo tanto $\left\{\dfrac{3Lc}{n!}\right\}_{n\geq 1}$ converge, luego sigue por definición de límite de sucesiones de números reales que:

Dado $0<\varepsilon<1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > m_0$ tenemos $\dfrac{|3Lc|^{m}}{m!} < \varepsilon < 1$.

Entonces tomamos $n = m_0$ para concluir que existe $n \geq 1$ tal que T^n es una contracción en $C^{(1)}\left([-a,a]\times[-a,a],\mathbb{C}\right) = X$, luego por el corolario I.4.2. T tiene un único punto fijo en X, es decir existe una única función $u \in X$ la cual satisface (II.4.4.2).

<u>Segundo Caso</u>: Supongamos ahora que f esta definida en una vecindad de la recta $x + y = 0$ y que la constante de Lipschitz de f (en las tres últimas variables u, p y q) crezca con $|u|,|p|,|q|$; entonces podemos demostrar la existencia y unicidad de la solución de (II.4.2.2) sólo en una vecindad de la recta $x + y = 0$. Precisamente nos vamos a restringir a

$$A = [-\alpha,\alpha]\times[-\alpha,\alpha]\times B_r[0]\times B_R[0]\times B_R[0],$$

donde $B_r[0], B_R[0]$ son bolas cerradas centradas en 0 y de radio r y R respectivamente, además α es escogido de tal manera que, si $u:[-\alpha,\alpha]\times[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{C}$ toma valores en $B_r[0]$ y u_x, u_y en $B_R[0]$, entonces lo mismo vale para Tu definida por (II.4.4.3).

Es posible escoger α así, pues si $\|f\| = M$ en A; entonces de (II.4.4.3), (II.4.4.4), y (II.4.4.5) se sigue que:

- $\left|(Tu)(x,y)\right| = \left|\iint\limits_D f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)d\xi d\eta\right| \leq M\left(|x|+|y|\right)$

$$\leq \iint\limits_D \left| f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\right| d\xi d\eta \leq \|f\| \iint\limits_D d\xi d\eta = 4M\alpha^2 .$$

- $\left|(Tu)_x(x,y)\right| \leq \int_{-x}^{y} \left| f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)d\eta\right| \leq M\left|x+y\right|$

$$\leq M\left(|x|+|y|\right) \leq M\left(\alpha+\alpha\right) = 2M\alpha .$$

- $\left|(Tu)_y(x,y)\right| \leq 2\alpha M$.

Sea $X = C^1\left([-\alpha,\alpha]\times[-\alpha,\alpha], B_r[0]\right)$ cuyas derivadas asumen valores en $B_R[0]$, los cálculos hechos en el primer caso se aplican. ■

II.5.- APLICACIÓN AL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

El problema de Sturm-Liouville consiste en resolver la ecuación diferencial con valores en la frontera

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda f(x,u) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{II.5.1}$$

la cual presenta una conexión con el problema de una varilla elástica bajo compresión con extremos fijos; aquí u denota el desplazamiento axial y λ la carga axial. Para valores pequeños de λ, la solución es $u = 0$ (a menos que λ corresponda a un autovalor), el cual corresponde a la varilla recta. Pero como la carga λ es aumentada, la varilla será doblada; dando origen a la solución no nula.

Queremos encontrar una ecuación integral equivalente al problema de Sturm-Liouville (II.5.1). Sea u con segunda derivada continua y definamos $\varphi := -u''$. Ahora

$$\int_0^x \int_0^y \varphi(s) ds dy = \int_0^x \int_0^y (-u''(s)) ds dy = \int_0^x (-u'(s))\Big|_0^y dy$$

$$= \int_0^x (-u'(y) + u'(0)) dy = (-u(y) + u'(0)y)\Big|_0^x = -u(x) + u'(0)x + \underbrace{u(0)}_{0}$$

$$\text{i.e.} \quad \int_0^x \int_0^y \varphi(s) ds dy = -u(x) + u'(0)x$$

despejando $u(x)$ tenemos

$$u(x) = xu'(0) - \int_0^x \int_0^y \varphi(s) ds dy .$$

Integramos por partes la integral doble

$$u = \int_0^y \varphi(s) ds \qquad dv = dy$$

$$du = \varphi(y) \qquad v = y$$

$$\int_0^x \int_0^y \varphi(s) ds dy = \left(y \int_0^y \varphi(s) ds \right)\Big|_0^x - \int_0^x y\varphi(y) dy = x\int_0^x \varphi(s) ds - \int_0^x y\varphi(y) dy$$

$$= x\int_0^x \varphi(y) dy - \int_0^x y\varphi(y) dy = \int_0^x (x-y)\varphi(y) dy$$

$$\text{i.e.} \quad \int_0^x \int_0^y \varphi(s) ds dy = \int_0^x (x-y)\varphi(y) dy$$

Por lo que

$$u(x) = xu'(0) - \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy. \qquad \textbf{(II.5.2)}$$

Tenemos

$$\int_x^1\int_y^1 \varphi(s)dsdy = \int_x^1\int_y^1 \left(-u''(s)\right)dsdy = \int_x^1 \left(-u'(s)\right)\Big|_y^1 dy = \int_x^1 \left(-u'(1)+u'(y)\right)dy$$

$$= \left(-u'(1)y + u(y)\right)\Big|_x^1 = -u'(1) + \underbrace{u(1)}_{0} - \left(-u'(1)x + u(x)\right)$$

$$= -u(x) - u'(1)(1-x),$$

entonces sigue

$$u(x) = -u'(1)(1-x) - \int_x^1\int_y^1 \varphi(s)dsdy.$$

Integraremos por partes la integral doble

$$m = \int_1^y \varphi(s)ds \qquad\qquad dn = dy$$

$$dm = \varphi(y) \qquad\qquad n = y$$

$$\int_x^1\int_y^1 \varphi(s)dsdy = \int_x^1 \left(-\int_1^y \varphi(s)ds\right)dy$$

$$= -\int_x^1\int_1^y \varphi(s)dsdy = -\left[\left(y\int_1^y \varphi(s)\,ds\right)\Big|_x^1 - \int_x^1 y\varphi(y)\,dy\right]$$

$$= -\left[-x\int_1^x \varphi(s)\,ds - \int_x^1 y\varphi(y)\,dy\right] = -\left[x\int_x^1 \varphi(s)\,ds - \int_x^1 y\varphi(y)\,dy\right]$$

$$= -\left[x\int_x^1 \varphi(y)\,dy - \int_x^1 y\varphi(y)\,dy\right] = -\int_x^1 (x-y)\varphi(y)\,dy$$

$$\text{i.e. } \int_x^1\int_y^1 \varphi(s)dsdy = -\int_x^1 (x-y)\varphi(y)\,dy$$

entonces

$$u(x) = -u'(1)(1-x) + \int_x^1 (x-y)\varphi(y)dy. \qquad \textbf{(II.5.3)}$$

De igual forma

$$\int_0^1 \varphi(y)dy + u'(1) - u'(0) = \int_0^1 \left(-u''(y)\right)dy + u'(1) - u'(0) = \left(-u'(y)\right)\Big|_0^1 + u'(1) - u'(0)$$

$$= -u'(1) + u'(0) + u'(1) - u'(0) = 0$$

$$\text{i.e.} \quad \int_0^1 \varphi(y)dy + u'(1) - u'(0) = 0 \qquad \textbf{(II.5.4)}$$

para todo $x \in [0,1]$.Multiplicando (II.5.2) por $(1-x)$, (II.5.3) por x y (II.5.4) por $(1-x)x$ y entonces sumando estas tres nuevas ecuaciones y agrupando adecuadamente obtenemos

$$u(x) = \int_0^x (1-x)y\varphi(y)dy + \int_x^1 x(1-y)\varphi(y)dy \qquad \textbf{(II.5.5)}$$

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)\varphi(y)dy$$

donde G es la función de Green

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y), \; x \le y \\ \\ y(1-x), \; y \le x \end{cases}$$

Pero como $\varphi(x) = -u''(x) = \lambda f(x,u(x))$ tenemos

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x,y) f(y,u(y))dy \qquad \textbf{(II.5.6)}$$

con G definida como antes (Observemos que G es continua en $\mathbb{R}^2$).

Recíprocamente, sea $\varphi \in C[0,1]$ solución de la ecuación integral (II.5.5).

Para todo $x \in [0,1]$ definamos la función

$$u(x) = \int_0^x (1-x)y\varphi(y)dy + \int_x^1 x(1-y)\varphi(y)dy,$$

entonces $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$ y por la construcción de la ecuación integral tenemos $-u'' = \varphi = \lambda f(x,u)$. Por consiguiente, el problema con valor en la frontera (II.5.1) y la ecuación integral (II.5.5) son equivalentes.

Es decir, resolver el problema de Sturm-Liouville es equivalente a resolver la ecuación integral (II.5.6). Observemos que esta ecuación integral equivalente es la ecuación de Fredholm de primera especie (ver II.2.1.2, página 38) donde $a = 0$, $b = 1$ y el núcleo para cualesquiera $x, y \in [0,1]$ es $K(x,y) = G(x,y)$.

Consideremos el espacio de las funciones cuadrado integrable en el dominio $[0,1]$.

$$\text{i.e. } L^2([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} ; f \text{ medible en } [0,1] \text{ y } \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty . \}$$

Recordemos que $L^2\left(\left[0,1\right]\right)$ es un espacio de Banach.

Definimos $f^*:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ por

$$f^* = f\circ\psi$$

donde $\psi:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^2$ con $\psi=\left(id,u\right)$, id denota la función identidad y $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es la función dada i.e. tenemos para cada $x\in\left[0,1\right]$

$$f^*(x)=\left(f\circ\psi\right)(x)=f(\psi(x))=f\left(x,u(x)\right).$$

Ahora definamos el operador

$$\begin{aligned} T: L^2\left(\left[0,1\right]\right) &\to L^2\left(\left[0,1\right]\right) \\ u &\mapsto Tu \end{aligned}$$

dado por

$$\left(Tu\right)(x)=\lambda\int_0^1 G(x,y)\,f^*\left(y\right)dy.$$

Es evidente que un punto fijo de T es solución de la ecuación integral y recíprocamente.

Para asegurar que T es una contracción en $L^2\left(\left[0,1\right]\right)$, asumimos que

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} \text{ es acotado i.e. } \left|\frac{\partial f^*}{\partial u}(x)\right|\le M\ ;\ 0\le x\le 1,\ u\in L^2\left(\left[0,1\right]\right).$$

Denotemos a

$$K(x,y,u)=G(x,y)\,f^*(y), \qquad \textbf{(II.5.A)}$$

entonces por el teorema del valor medio, tenemos

$$\begin{aligned} \left|K(x,y,u_1)-K(x,y,u_2)\right| &= \left|\frac{\partial K}{\partial u}(x,y,u)\right|\left|u_1(y)-u_2(y)\right| \\ &= \left|\frac{\partial}{\partial u}\left(G(x,y)\,f^*(y)\right)\right|\left|u_1(y)-u_2(y)\right| \\ &= \left|G(x,y)\right|\left|\frac{\partial f^*}{\partial u}(y)\right|\left|u_1(y)-u_2(y)\right| \\ &\le M\left|G(x,y)\right|\left|u_1(y)-u_2(y)\right| \end{aligned}$$

$$\text{i.e.}\left|K(x,y,u_1)-K(x,y,u_2)\right|\le M\left|G(x,y)\right|\left|u_1(y)-u_2(y)\right| \qquad \textbf{(II.5.B)}$$

para algún u entre u_1 y u_2.

Sea

$$\mu^2 = M^2 \int_0^1\int_0^1 |G(x,y)|^2\, dxdy. \qquad \textbf{(II.5.C)}$$

Probaremos que

$$\mu^2 = M^2 \int_0^1\int_0^1 |G(x,y)|^2\, dxdy = \frac{M^2}{90}.$$

En efecto, teniendo en cuenta la función de Green con la que estamos trabajando, calculemos

$$\int_0^1\int_0^1 |G(x,y)|^2\, dxdy = \int_0^1\int_0^1 \left(G(x,y)\right)^2 dxdy = \int_0^1\left[\int_0^y \left(G(x,y)\right)^2 dx + \int_y^1 \left(G(x,y)\right)^2 dx\right]dy$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^y x^2(1-y)^2\,dx + \int_y^1 y^2(1-x)^2\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^1\left((1-y)^2\int_0^y x^2dx + y^2\int_y^1 (1-x)^2\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^1\left((1-y)^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=y} - y^2 \left.\frac{(1-x)^3}{3}\right|_{x=y}^{x=1}\right)dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1\left((1-y)^2y^3 + y^2(1-y)^3\right)dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1\left(y^4 - 2y^3 + y^2\right)dy$$

$$= \frac{1}{3}\left.\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\right|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{90}.$$

$$\text{i.e. } \int_0^1\int_0^1 |G(x,y)|^2\, dxdy = \frac{1}{90}. \qquad \textbf{(II.5.D)}$$

Ahora mostraremos que T es una contracción en $L^2\left(\left[0,1\right]\right)$ para un valor fijo de λ.

En efecto, con (II.5.A) el operador T queda definido por

$$\left(Tu\right)(x) = \lambda\int_0^1 K\left(x,y,u(y)\right)dy.$$

Para cualesquiera $u_1, u_2 \in L^2\left(\left[0,1\right]\right)$ tenemos

$$\left\|Tu_1 - Tu_2\right\|_2 = \left\{\int_0^1 \left|\left(Tu_1\right)(x) - \left(Tu_2\right)(x)\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad \textbf{(II.5.E)}$$

Mayoraremos la función que estamos integrando i.e.

$$\left|\left(Tu_1\right)(x)-\left(Tu_2\right)(x)\right|=\left|\lambda\int_0^1 K\left(x,y,u_1(y)\right)dy-\lambda\int_0^1 K\left(x,y,u_1(y)\right)dy\right|$$

$$\le|\lambda|\int_0^1\left|K(x,y,u_1(y))-K(x,y,u_2(y))\right|dy$$

$$\le|\lambda|\int_0^1 M\left|G(x,y)\right|\left|u_1(y)-u_2(y)\right|dy \quad \text{(usamos (II.5.B))}$$

$$\le|\lambda|\left[\left(\int_0^1 M^2\left|G(x,y)\right|^2 dy\right)\left(\int_0^1\left|u_1(y)-u_2(y)\right|^2 dy\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=|\lambda|\left(\int_0^1 M^2\left|G(x,y)\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\left\|u_1-u_2\right\|_2$$

donde, el penúltimo paso lo conseguimos usando la desigualdad de Hölder para integrales. Entonces tenemos

$$\left|\left(Tu_1\right)(x)-\left(Tu_2\right)(x)\right|\le|\lambda|\left(\int_0^1 M^2\left|G(x,y)\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\left\|u_1-u_2\right\|_2 .$$

Reemplazamos esta desigualdad en (II.5.E)

$$\left\|Tu_1-Tu_2\right\|_2\le\left\{\int_0^1\left||\lambda|\left(\int_0^1 M^2\left|G(x,y)\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\left\|u_1-u_2\right\|_2\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=|\lambda|\left\|u_1-u_2\right\|_2\left(M^2\int_0^1\int_0^1\left|G(x,y)\right|^2 dydx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=|\lambda|\left\|u_1-u_2\right\|_2|\mu| \quad \text{(usamos (II.5.C))}$$

i.e. $\left\|Tu_1-Tu_2\right\|_2\le|\lambda||\mu|\left\|u_1-u_2\right\|_2$; $u_1,u_2\in L^2\left([0,1]\right)$.

Ahora sea $\alpha=|\mu||\lambda|>0$. Notemos que $\alpha<1$ sólo si $|\lambda|<\dfrac{1}{|\mu|}$.

Así, concluimos que T es una contracción en $L^2\left([0,1]\right)$ siempre que:

i). $f^*\in L^2\left([0,1]\right)$ y $\dfrac{\partial f^*}{\partial u}(x)\le M$, para cada $0\le x\le 1$ y para todo $u\in L^2\left([0,1]\right)$.

ii). $|\lambda|<\dfrac{1}{\mu}$, y existe $\mu^2=M^2\int_0^1\int_0^1\left|G(x,y)\right|^2 dxdy$.

Antes de aplicar el T.P.F.B., debemos probar que $Tu \in L^2([0,1])$.

En efecto, para todo $u \in L^2([0,1])$ tenemos que:

- Tu es medible, pues al ser aplicado sobre cada $x \in [0,1]$, es una integral de Riemann continua en $[0,1]$, luego Tu es integrable en el sentido de Lebesgue.

- $\|Tu\|_2 < \infty$.

En efecto, para todo $u \in L^2([0,1])$ tenemos

$$\|Tu\|_2 = \left\{\int_0^1 |(Tu)(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\int_0^1 \left|\lambda\int_0^1 K(x,y,u(y))dy\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\int_0^1 \left|\lambda\int_0^1 G(x,y)\, f^*(y)dy\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{(usamos (II.5.A))}$$

$$\text{i.e. } \|Tu\|_2 = \left\{\int_0^1 \left|\lambda\int_0^1 G(x,y)\, f^*(y)dy\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad \textbf{(II.5.F)}$$

Mayoraremos la función que se esta integrando i.e.

$$\left|\lambda\int_0^1 G(x,y)\, f^*(y)dy\right| \le |\lambda|\int_0^1 |G(x,y)||f^*(y)|dy$$

$$\le |\lambda|\left[\left(\int_0^1 |G(x,y)|^2 dy\right)\left(\int_0^1 |f^*(y)|^2 dy\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le |\lambda| C\left(\int_0^1 |G(x,y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(pues } f^* \in L^2([0,1])\text{)}$$

reemplazamos esta desigualdad en (II.5.F) y tenemos

$$\|Tu\|_2 \le \left\{\int_0^1 \left| |\lambda| C\left(\int_0^1 |G(x,y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\lambda| C\left\{\int_0^1\int_0^1 |G(x,y)|^2 dydx\right\}^{\frac{1}{2}} = |\lambda| C\left(\frac{1}{90}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(usamos (II.5.D))}$$

$$\text{i.e. } \|Tu\|_2 \leq \infty \text{, } u \in L^2([0,1]).$$

Por lo tanto, para todo $u \in L^2([0,1])$ se cumple que $Tu \in L^2([0,1])$.

Entonces tenemos todas las hipótesis del T.P.F.B. verificadas, concluyendo que existe una única solución de la ecuación integral (II.5.6) y consecuentemente del problema de Sturm-Liuoville considerado. ■

Supongamos por ejemplo, para el problema del doblado de una varilla que:

$$f(x,u) = sen(u(x))$$

es decir, tenemos

$$f^*(x) = sen(u(x)),$$

entonces

$$\left|\frac{\partial f^*}{\partial u}\right| \leq \left|\cos(u(x))\right| \leq 1$$

de donde

$$M = 1 \text{ y } \lambda < 3\sqrt{10}.$$

Por el análisis hecho en esta sección, podemos afirmar que:

- Para cargas menores a $3\sqrt{10}$, el problema de la varilla tiene una única solución.
- Como $u = 0$ satisface la ecuación (II.5.1), $u = 0$ es la única solución i.e. la varilla no se dobla para cargas mayores a $3\sqrt{10}$.
- Las soluciones no nulas existen para $\lambda > 3\sqrt{10}$.

II.6. APLICACIÓN A LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA

La **optimización Dinámica** como su nombre lo indica, estudia la optimización de sistemas dinámicos, es decir, sistemas que evolucionan en el tiempo. Dado un sistema, se trata de guiar o controlar el sistema de manera óptima mediante el manejo de otras magnitudes llamadas variables de control a lo largo de un horizonte temporal dado, de acuerdo a un objetivo previamente fijado.

Consideremos por ejemplo, nuestro propio cuerpo como un sistema dinámico el cual el médico examina tomándonos la presión arterial, la temperatura, analizando los estudios realizados, como son un electrocardiograma, la cantidad de plaquetas, de leucocitos, de glóbulos rojos, el nivel de colesterol, el nivel de enzimas que intervienen en el metabolismo de los aminoácidos (transaminasas), el azúcar de la sangre (glucosa), etc. De esta manera el médico determina el **estado** en que está nuestro organismo. Si considera que el mismo no es el adecuado, entonces tomará medidas de **control** para mejorar dicho estado.

Entre muchas prescripciones, nos puede recomendar hacer una mayor actividad física, ingerir ciertos medicamentos, seguir una dieta específica de comidas, etc. Llevadas a la práctica estas medidas tenderán a modificar el estado de nuestra salud.

Los campos de aplicación de la optimización dinámica no se circunscriben solamente a ciertas ramas de la matemática, como el análisis matemático, la geometría o los sistemas dinámicos, sino que abordan otras áreas del conocimiento, como por ejemplo la ingeniería, la física, la economía, la biología, etc.

De manera similar a la búsqueda de máximos y mínimos de una función que modeliza matemáticamente cierto problema, la finalidad de la optimización dinámica radica en determinar la existencia, y eventualmente el cálculo, de los valores de ciertas variables, llamadas **variables de estado**, consideradas como funciones de otras variables (por ejemplo, el tiempo y/o variables llamadas **variables de control**), que producen valores óptimos (máximos o mínimos, según sea el caso) de cierta cantidad de estudio llamada **funcional objetivo** durante cierto intervalo temporal.

En cuanto a su tratamiento matemático, los problemas de optimización dinámica pueden resolverse por alguna de estas tres técnicas:

1.- El cálculo de variaciones.

2.- El control óptimo.

3.- La programación dinámica.

Si bien las tres técnicas permiten abordar problemas en tiempo discreto y continuo, los métodos 1 y 2 se utilizan generalmente para el tiempo continuo y el restante para el tiempo discreto.

II.6.1. <u>DEFINICIÓN</u>

Sean X e Y dos conjuntos arbitrarios. Una **correspondencia** f de X en Y es una regla que asocia cada elemento x de X a un subconjunto $f(x)$ de Y.

$$\text{i.e. } f : X \to \mathsf{P}(Y)$$

donde $\mathsf{P}(Y)$ es el conjunto de partes de Y.

Nuestro interés en este trabajo se centra en correspondencias del tipo

$$f : X \to \mathsf{P}(X).$$

Si usamos la notación de funciones, podemos definir una correspondencia $X \to \mathsf{P}(X)$ como una función $X \mapsto \{Y \subseteq \mathsf{P}(X)\}$.

Sean X e Y dos espacios métricos arbitrarios y sea una correspondencia $f : X \to \mathsf{P}(Y)$.

El **grafo** de f es el conjunto $G_f = \bigcup_{x \in X} (x, f(x))$ donde $f(x)$ es el conjunto imagen del elemento x (recordemos que f es una correspondencia y por lo tanto la imagen de cualquier punto es un conjunto). Se dice que el grafo es **cerrado** si el conjunto G_f es un conjunto cerrado.

El concepto de continuidad se generaliza para correspondencias a partir de los conceptos más débiles de semicontinuidad inferior y semicontinuidad superior. Para nosotros sólo es relevante el último de estos conceptos.

II.6.2. <u>DEFINICIÓN</u>

Si $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, la correspondencia $f : X \to \mathsf{P}(Y)$ se llama **semicontinua superior** si su grafo es cerrado y para cada punto de X su imagen es un conjunto compacto.

Por otro lado, la extensión del concepto de punto fijo a correspondencias es directa.

II.6.3. <u>DEFINICIÓN</u>

Dado un conjunto X, se dice que un elemento $\overline{x} \in X$ es un **punto fijo** de la correspondencia $f : X \to \mathsf{P}(X)$ si $\overline{x} \in f(\overline{x})$.

Obviamente para cada correspondencia $f : X \to \mathcal{P}(X)$, podemos definir

$$fix(f) = \{x \in X : x \in f(x)\}.$$

Teniendo en mente esta definición y de la definición I.1. del capítulo I, podemos establecer que, tanto para correspondencias como para funciones, se verifica $fix(f) \subseteq X$. Es claro que si definimos recursivamente para cualquier $i \in \mathbb{N}$ y $x \in X$,

$$f^{(i+1)}(x) = f\left[f^{(i)}(x) \right]$$

con $f^{(1)} \equiv f$, esto implica

$$fix(f) \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^{(i)}(X).$$

En otras palabras, los puntos fijos de una función deben pertenecer a la intersección de las imágenes de sus sucesivas iteraciones.

II.6.4. APLICACIÓN DEL T.P.F.B. A LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA

La Teoría de la Programación Dinámica fue elaborada principalmente por Richard Bellman durante la década de 1950, trata acerca de la toma óptima de decisiones en procesos de etapas múltiples, frecuentemente estocásticos.

Dada una función continua

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

y una correspondencia nunca vacía

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

semicontinua superiormente, un problema determinístico típico de esta teoría es el de hallar el valor

$$v(x_0) = \max_{\{x_t\}} \sum_{t \in \mathbb{N}} \beta^{t-1} g\left(x_{t-1}, x_t\right),\ \left\{x_t \in f\left(x_{t-1}\right)\right\}_{t \in \mathbb{N}}$$

donde la sucesión $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ se elige en el espacio de sucesiones $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ y $\beta \in [0,1)$ es un parámetro que frecuentemente se interpreta como un factor de descuento entre dos tiempos. Siguiendo con esta interpretación de t como un índice de tiempo, esta clase de problema se denomina de **horizonte infinito**. La estructura recursiva que presenta permite mostrar que la función valor $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ debe satisfacer la ecuación funcional

$$v\left(x_{t-1}\right) = \max_{x_t \in f\left(x_{t-1}\right)} \left\{ g\left(x_{t-1}, x_t\right) + \beta v(x_t) \right\} \qquad \textbf{(II.6.4.1)}$$

En efecto, en (II.6.4.1) damos valores enteros positivos para t, encontrando para

- $t=1$: $v(x_0)=\max_{x_1\in f(x_0)}\{g(x_0,x_1)+\beta v(x_1)\}$
- $t=2$: $v(x_1)=\max_{x_2\in f(x_1)}\{g(x_1,x_2)+\beta v(x_2)\}$
- $t=3$: $v(x_2)=\max_{x_3\in f(x_2)}\{g(x_2,x_3)+\beta v(x_3)\}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

Reemplazando $v(x_2)$ en $v(x_1)$, tenemos

$$v(x_1)=\max_{x_2\in f(x_1)}\left\{g(x_1,x_2)+\beta\max_{x_3\in f(x_2)}\{g(x_2,x_3)+\beta v(x_3)\}\right\}.$$

Reemplazando $v(x_1)$ en $v(x_0)$, tenemos

$$\begin{aligned} v(x_0) &= \max_{x_1\in f(x_0)}\left[g(x_0,x_1)+\beta\max_{x_2\in f(x_1)}\left\{g(x_1,x_2)+\beta v\max_{x_3\in f(x_2)}\left(g(x_2,x_3)+\beta v(x_3)\right)\right\}\right] \\ &= \max_{\substack{x_1\in f(x_0)\\ x_2\in f(x_1)\\ x_3\in f(x_2)}}\left[\beta^0 g(x_0,x_1)+\beta^1 g(x_1,x_2)+\beta^2 g(x_2,x_3)+\beta^3 v(x_3)\right] \\ &= \max_{\substack{\{x_t\}\in f(x_{t-1})\\ t\in\mathbb{N}}}\sum_{t\in\mathbb{N}}\beta^{t-1}g(x_{t-1},x_t)=v(x_{t-1}) \end{aligned}$$

(La importancia de la relación (II.6.4.1) es que nos permite maximizar por partes.)

Esta ecuación se denomina **ecuación de Bellman** y se debe satisfacer para todo $t\in\mathbb{N}$ si v ha de ser una solución. Nótese que la estructura de la ecuación es invariante ante desplazamientos temporales, por lo que se refiere a la determinación de la función de valor, no hay inconveniente en prescindir del índice t.

Hacemos: $y=x_{t-1}$ y $x=x_t$, con esto la ecuación de Bellman es

$$v(y)=\max_{x\in f(y)}\left[g(y,x)+\beta v(x)\right].$$

Sea $X=C^*\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ el espacio de las funciones continuas y acotadas, el cual dotado de la métrica del $\sup$ es completo. De esta forma asumiendo que el $\max$ esta bien definido para cualquier "y", podemos definir unívocamente el **operador de Bellman** como $T:X\to X$ dado por

$$T(w)(y)=\max_{x\in f(y)}\left[g(y,x)+\beta w(x)\right],\ w\in X.$$

En lo que sigue asumiremos que la función g y la correspondencia semicontinua superior f son de tal tipo que $\max_{x\in f(y)}\left[g(y,x)+\beta w(x)\right]$ está bien definido y es una función continua y acotada de y.

Luego, si fuese posible mostrar que T es una contracción en X, el teorema del punto fijo de Banach garantiza la existencia de una única solución a la ecuación de Bellman.

Afirmación: T es una contracción en X.

En efecto; sean $w_1, w_2 \in X$

$$\left|T(w_1)(y)-T(w_2)(y)\right| = \left|\max_{x\in f(y)}\left[g(y,x)+\beta w_1(x)\right]-\max_{x\in f(y)}\left[g(y,x)+\beta w_2(x)\right]\right| \quad \textbf{(II.6.4.2)}$$

Para todo $x\in f(y)$, sea

$$u_y(x) = g(y,x)+\beta w_1(x).$$

Observemos que u_y es continua sobre el compacto $f(y)$, luego u_y tiene máximo. Digamos que $x^* \in f(y)$ es el punto donde u_y alcanza su máximo, entonces tenemos

$$\max_{x\in f(y)} u_y(x) = \max_{x\in f(y)}\left[g(y,x)+\beta w_1(x)\right] = u_y(x^*) = g(y,x^*)+\beta w_1(x^*).$$

Análogamente para

$$v_y(x) = g(y,x)+\beta w_2(x),\ x\in X(y)$$

se tiene que $x^{**} \in f(y)$ es el punto donde v_y alcanza su máximo,

$$\max_{x\in f(y)} v_y(x) = \max_{x\in f(y)}\left[g(y,x)+\beta w_2(x)\right] = u_y(x^{**}) = g(y,x^{**})+\beta w_2(x^{**}).$$

Luego reemplazando en (II.6.4.2), tenemos

$$\left|T(w_1)(y)-T(w_2)(y)\right| \le \left|\left(g(y,x^*)+\beta w_1(x^*)\right)-\left(g(y,x^{**})+\beta w_2(x^{**})\right)\right| \quad \textbf{(II.6.4.3)}$$

Ahora puede ocurrir que:

- Supongamos que

  $$g(y,x^*)+\beta w_1(x^*) \ge g(y,x^{**})+\beta w_2(x^{**});$$

  como $g(y,x^{**})+\beta w_2(x^{**})$ es el máximo de $v_y(x)$ para todo $x\in f(y)$, en particular para $x^* \in f(y)$ tenemos

  $$g(y,x^*)+\beta w_1(x^*) \le g(y,x^{**})+\beta w_2(x^{**}).$$

Reemplazando esta última relación en (II.6.4.3) conseguimos

$$\left|T(w_1)(y)-T(w_2)(y)\right| \le \left|\left(g(y,x^*)+\beta w_1(x^*)\right)-\left(g(y,x^*)+\beta w_2(x^*)\right)\right|$$

$$=\beta\left|w_1(x^*)-w_2(x^*)\right| \le \sup_x \left|w_1(x)-w_2(x)\right|$$

$$=\beta d\left(w_1,w_2\right).$$

- Si por el contrario, se verificase

$$g(y,x^*)+\beta w_1(x^*) < g(y,x^{**})+\beta w_2(x^{**});$$

como $g(y,x^*)+\beta w_1(x^*)$ es el máximo de $u_y(x)$ para todo $x\in f(y)$, en particular para $x^{**}\in f(y)$, tenemos

$$g(y,x^{**})+\beta w_2(x^{**}) \le g(y,x^*)+\beta w_1(x^*).$$

Luego de reemplazar esta desigualdad en (II.6.4.3), tenemos

$$\left|T(w_1)(y)-T(w_2)(y)\right| \le \left|\left(g(y,x^{**})+\beta w_2(x^{**})\right)-\left(g(y,x^{**})+\beta w_1(x^*)\right)\right|$$

$$=\beta\left|w_2(x^{**})-w_1(x^{**})\right| \le \sup_x \left|w_2(x)-w_1(x)\right|$$

$$=\beta d\left(w_2,w_1\right)=\beta d\left(w_1,w_2\right)$$

De ambos casos al final siempre tenemos

$$\left|T(w_1)(y)-T(w_2)(y)\right| \le \beta d\left(w_1,w_2\right);\ w_1,w_2\in X.$$

Luego, el primer miembro es acotado, entonces tiene supremo, y

$$\sup_y \left|T(w_1)(y)-T(w_2)(y)\right| \le \beta d\left(w_1,w_2\right)$$

$$d(Tw_1,Tw_2) \le \beta d(w_1,w_2);\ w_1,w_2\in X.$$

Pero como tenemos por hipótesis que $0\le\beta<1$, T es una contracción en $C^*\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)=X$.

Y por el teorema del punto fijo de Banach (T.P.F.B.), existe una única solución a la ecuación de Bellman. ■

II.7. APLICACIÓN A LA DINÁMICA COMPLEJA

II.7.1. FUNCIONES HOLOMORFAS DE VARIAS VARIABLES COMPLEJAS

Recordemos que $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{n-veces}$, y si un $z=(z_1,z_2,...,z_n)\in\mathbb{C}^n$ entonces cada z_j con $j\in\mathbb{N}$ es una coordenada compleja de z. Como $z_j = x_j + iy_j \in\mathbb{C}$ donde $x_j=\mathrm{Re}(z_j)$, $y_j=\mathrm{Im}(z_j)\in\mathbb{R}$, luego tenemos que:

Si $z\in\mathbb{C}^n$ entonces $(x_1,y_1,x_2,y_2,...,x_n,y_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ i.e. identificamos a $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$.

Para $z=(z_1,z_2,...,z_n)$, $w=(w_1,w_2,...,w_n)\in\mathbb{C}^n$ y $\alpha\in\mathbb{C}$, definimos

$$\begin{cases} z+w=(z_1+w_1,z_2+w_2,...,z_n+w_n) \\ \alpha z=(\alpha z_1,\alpha z_2,...,\alpha z_n) \end{cases}$$

con estas operaciones $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial.

Dotaremos a $\mathbb{C}^n$ de una topología, para esto definimos:

i). Un **polidisco abierto** en $\mathbb{C}^n$ de centro $a=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{C}^n$ y **poliradio** $r\in(\mathbb{R}^+)^n$ con $r=(r_1,r_2,...,r_n)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^n$ denotado por $\Delta\left(a,r\right)$, como el conjunto

$$\Delta\left(a,r\right)=\left\{z=(z_1,z_2,...,z_n)\in\mathbb{C}^n:\left|z_1-a_1\right|<r_1,\left|z_2-a_2\right|<r_2,\ldots,\left|z_n-a_n\right|<r_n\right\}.$$

ii). Un **polidisco cerrado** en $\mathbb{C}^n$ de centro $a=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{C}^n$ y **poliradio** $r\in(\mathbb{R}^+)^n$ con $r=(r_1,r_2,...,r_n)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^n$ denotado por $\Delta\left[a,r\right]$, como el conjunto

$$\Delta\left[a,r\right]=\left\{z=(z_1,z_2,...,z_n)\in\mathbb{C}^n:\left|z_1-a_1\right|\le r_1,\left|z_2-a_2\right|\le r_2,\ldots,\left|z_n-a_n\right|\le r_n\right\}.$$

II.7.1.2. OBSERVACIONES

II.7.1.2.1.- Si $z=(z_1,z_2,...,z_n)\in\mathbb{C}^n$ la norma de z denotada por $\|z\|$ está definida por

$$\|z\|=\sqrt{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\cdots+\left|z_n\right|^2}$$

es la norma euclidiana.

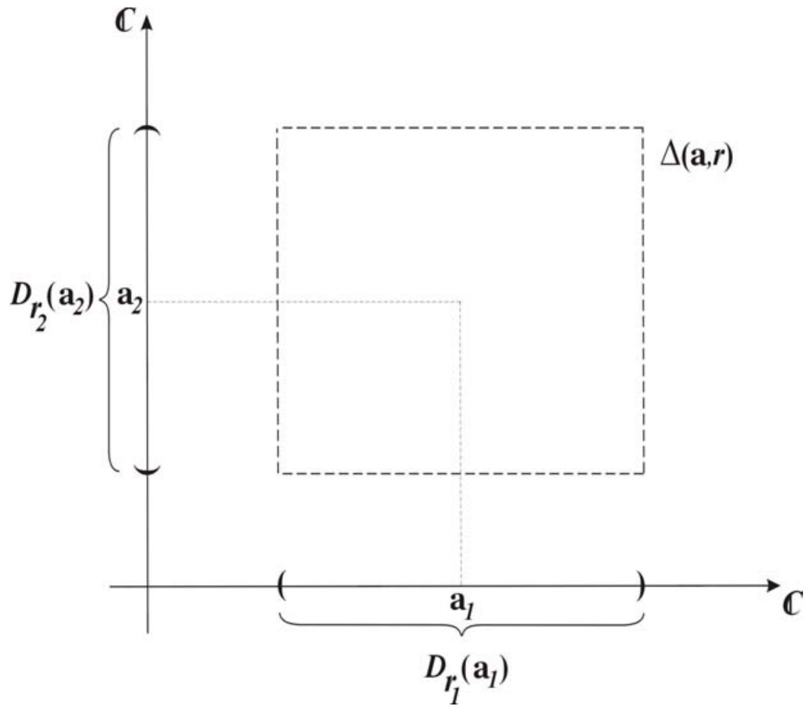
II.7.1.2.2.- Si denotamos:

- $D_{r_j}\left(a_j\right)=\left\{z_j\in\mathbb{C}:\left|z_j-a_j\right|<r_j, j\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathbb{C}$.
- $D_{r_j}\left[a_j\right]=\left\{z_j\in\mathbb{C}:\left|z_j-a_j\right|\le r_j, j\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathbb{C}$.

Obtenemos respectivamente:

- $\Delta(a,r)=D_{r_1}(a_1)\times D_{r_2}(a_2)\times\cdots\cdots\times D_{r_n}(a_n)$.
- $\Delta[a,r]=D_{r_1}[a_1]\times D_{r_2}[a_2]\times\cdots\cdots\times D_{r_n}[a_n]$.

Por ejemplo, gráficamente mostremos al polidisco abierto $\Delta(a,r)\subset\mathbb{C}^2$:



II.7.1.2.3.- $\mathbb{C}^n$ dotado de la topología cuya base es generada por los polidiscos abiertos es un espacio topológico equivalente a $\mathbb{R}^{2n}$ dotado de la topología cuya base es generada por las bolas abiertas i.e. tenemos:

$$\underset{\text{topológicamente}}{\mathbb{C}^n \underset{\uparrow}{\approx} \mathbb{R}^{2n}}$$

De esta manera todos los resultados conocidos de la topología de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^{2n}$ pueden ser aplicados a $\mathbb{C}^n$.

II.7.2. <u>NOTACIÓN DE MULTI-ÍNDICES DE SCHWARTZ</u>

- Un **multi-índice de dimensión** n, es una n-upla de números naturales

$$Q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)\in\left(\mathbb{Z}_0^+\right)^n.$$

- Su **norma** se define como

$$|Q|=q_1+q_2+\ldots+q_n.$$

- El **factorial** de Q se denota por $Q!$ y se define

$$Q! = q_1!q_2!\dots q_n!$$

- Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, definimos

$$\frac{\partial^Q f}{\partial z^Q} = \frac{\partial^{|Q|} f}{\partial z_1^{q_1} \partial z_2^{q_2} \dots \partial z_n^{q_n}}.$$

II.7.3. DEFINICIÓN

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$. Decimos que f es **holomorfa** (ó **analítica**) en $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in U$ si existe $\Delta(a, r) \subseteq U$ polidisco abierto tal que

$$f(z) = \sum_{|Q|=0}^{\infty} c_Q (z - a)^Q \ ; \ z \in \Delta(a, r) \subseteq U .$$

Decimos que f es **holomorfa** en U si es holomorfa en a, para todo $a \in U$.

Al conjunto de todas las funciones holomorfas en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ lo denotaremos por $\mathcal{O}(U)$.

II.7.3.1. EJEMPLO

Las funcionales lineales $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definidas por

$$f(z_1, z_2, ..., z_n) = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_n z_n$$

son funciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$.

En general, toda función polinomial es holomorfa en $\mathbb{C}^n$.

II.7.4. OBSERVACIÓN

De la teoría elemental de serie de potencias (en una variable en $\mathbb{C}$) tenemos el siguiente resultado:

“Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ una serie de potencias convergente en el disco $D_R(a) \subseteq \mathbb{C}$. Si $0 < r < R$ entonces la serie converge absolutamente y uniformemente en el disco cerrado $D_r[a]$”.

Este resultado se generaliza a serie de potencias de varias variables:

"Sea $\sum_{|Q|=0}^{\infty} c_n(z-a)^Q$ una serie de potencias convergente en el polidisco abierto $\Delta(a,R)$ con poliradio $R=(R_1,R_2,\cdots,R_n)\in\left(\mathbb{Z}_0^+\right)^n$, si $0<r_j<R_j$, para todo $1\leq j\leq n$ entonces la serie converge absoluta y uniformemente en el polidisco cerrado $\Delta\left[a,r\right]$, $r=(r_1,r_2,...,r_n)$".

Por lo tanto, tenemos:

"Si $U\subseteq\mathbb{C}^n$ es un abierto y $f:U\to\mathbb{C}$ es holomorfa en U entonces f es continua."

"i.e. $\mathcal{O}(U)\subseteq C(U)$".

II.7.5. <u>DEFINICIÓN</u>

Sea $U\subseteq\mathbb{C}^n$ un abierto. Un **campo vectorial holomorfo en** U es una función

$$\begin{aligned} Z:U &\to \mathbb{C}^n \\ z &\mapsto Z(z)=\left(Z_1(z),Z_2(z),...,Z_n(z)\right) \end{aligned}$$

tal que

1).- $Z_j:U\to\mathbb{C}$ son funciones holomorfas para todo $1\leq j\leq n$.

2).- Si $z\in U$ entonces $Z(z)\in\mathbb{C}^n$ es un vector cuyo punto de aplicación es z.

II.7.5.1. <u>NOTACIÓN</u>

Denotemos por $\mathrm{X}(U)$ al conjunto de todos los campos vectoriales holomorfos.

i.e. $\mathrm{X}(U)=\{\,Z:U\to\mathbb{C}^n;\ Z$ es campo vectorial holomorfo en $U\,\}$.

II.7.5.2. <u>EJEMPLOS</u>

II.7.5.2.1.- Sea $Z:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ definido por

$$Z(z_1,z_2)=(az_1+bz_2,cz_1+dz_2),$$

para cada $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ donde $a,b,c,d\in\mathbb{C}$.

Sigue que $Z\in\mathrm{X}(\mathbb{C}^2)$, el cual se denomina **campo lineal** en $\mathbb{C}^2$.

II.7.5.2.2.- Sea $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, y definimos $\begin{aligned} Z:\mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n \\ z &\mapsto Z(z)=Az \end{aligned}$

$$\text{i.e. } Z(z)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}z_k,\sum_{k=1}^{n}a_{2k}z_k,...,\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k\right).$$

Sigue que $Z\in\mathrm{X}(\mathbb{C}^n)$, el cual se denomina **campo lineal** de $\mathbb{C}^n$.

Note que el ejemplo II.7.5.2.1. es un caso particular del ejemplo II.7.5.2.2., para la matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

II.7.5.2.3.- Sea $A=\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b=\left[b_i\right] \in \mathbb{C}^{n\times 1} \approx \mathbb{C}^n$ definimos $Z:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ por

$$Z(z) = Az + b,\ z \in \mathbb{C}^n.$$

$$\text{i.e. } Z(z) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} z_k + b_1, \sum_{k=1}^{n} a_{2k} z_k + b_2, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk} z_k + b_n \right).$$

Sigue que $Z \in \mathrm{X}(\mathbb{C}^n)$ el cual se denomina **campo afín** en $\mathbb{C}^n$.

II.7.6. DEFINICIÓN

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $Z \in \mathrm{X}(U)$. Decimos que $z \in U$ es un **punto singular** de Z si $Z(z) = 0 \in \mathbb{C}^n$ (i.e. z anula el campo). Caso contrario, decimos que z es un **punto regular** de Z.

Denotaremos por $Sing(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares de Z.

$$\text{i.e. } Sing(Z) = \{ z \in U : Z(z) = 0 \} \subseteq U.$$

II.7.6.1. OBSERVACIONES

II.7.6.1.1.- Dado $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \in \mathrm{X}(U)$. Decir que

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in Sing(Z)$$

significa

$$\begin{cases} Z_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \\ Z_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \\ \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ Z_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \end{cases}$$

II.7.6.1.2.- Si $Z \in \mathrm{X}(\mathbb{C}^n)$ es un campo lineal (ver ejemplo II.7.5.2.2.) entonces $\theta = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{C}^n$ es un punto singular de Z.

II.7.6.1.3.- Si $Z \in \mathrm{X}(\mathbb{C}^n)$ es un campo afín (ver ejemplo II.7.5.2.3) con $b \neq 0$ entonces $\theta = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{C}^n$ es un punto regular de Z.

II.7.6.2. EJEMPLOS

II.7.6.2.1.- Sea $Z:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$Z\left(z_1,z_2\right)=(a,z_2)$$

para todo $\left(z_1,z_2\right)\in\mathbb{C}^2$ con $a\in\mathbb{R}-\left\{0\right\}$. Es claro que $Z\in \mathrm{X}(\mathbb{C}^2)$ y que Z no tiene puntos singulares.

II.7.6.2.2.- Sea $Z:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$Z\left(z_1,z_2\right)=(z_1-z_2^3,z_1z_2),\ \left(z_1,z_2\right)\in\mathbb{C}^2.$$

Entonces $Z\in \mathrm{X}\left(\mathbb{C}^2\right)$ y $(0,0)$ es el único punto singular de Z.

En efecto; sea $\left(w_1,w_2\right)\in Sing\left(Z\right)$ entonces tenemos

$$Z\left(w_1,w_2\right)=0,$$

de donde obtenemos

$$(w_1-w_2^3,w_1w_2)=(0,0),$$

esta igualdad se cumple si y sólo si

$$\begin{cases} w_1-w_2^3=0 \\ w_1w_2=0 \end{cases}$$

donde de la segunda igualdad obtenemos

$$w_1=0 \text{ ó } w_2=0$$

lo que implica

$$w_2^3=0 \text{ ó } w_1=0$$

respectivamente, de donde

$$(w_1,w_2)=(0,0).$$

Por lo tanto

$$Sing(Z)=\left\{(0,0)\right\}.$$

II.7.7. DEFINICIÓN

Sea $U\subseteq\mathbb{C}^n$ abierto y $Z\in \mathrm{X}(U)$.

i).- La **ecuación diferencial ordinaria asociada a** Z es dada por

$$z'=Z(z) \qquad \textbf{(II.7.7.A)}$$

ii).- Una **solución de la E.D.O.** (II.7.7.A) es una función holomorfa $\varphi : D \to U$ definida en un disco abierto $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que para todo $T \in D$

$$\varphi'(T) = Z\left(\varphi(T)\right).$$

II.7.7.1. OBSERVACIONES

II.7.7.1.1.- $z' = \dfrac{dz}{dT}$, $T \in \mathbb{C}$.

II.7.7.1.2.- Sea $Z = \left(Z_1, Z_2, ..., Z_n\right) \in \mathrm{X}\left(U\right)$ donde cada $Z_j : U \to \mathbb{C}$ con $j = 1, 2, ..., n$ y $z = \left(z_1, z_2, ..., z_n\right) \in \mathbb{C}$ entonces (II.7.7.A) es equivalente a

$$\begin{cases} z_1' = Z_1(z_1, z_2, ..., z_n) \\ z_2' = Z_2(z_1, z_2, ..., z_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ z_n' = Z_n(z_1, z_2, ..., z_n) \end{cases} \qquad \textbf{(II.7.7.1.2.A)}$$

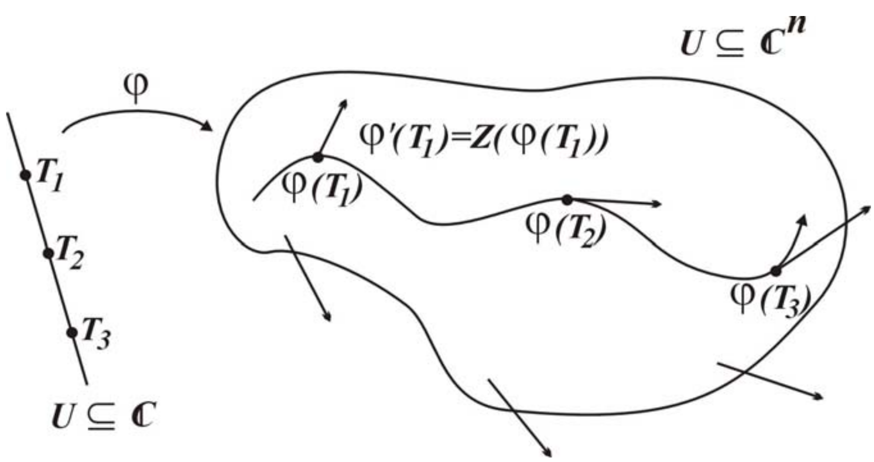
II.7.7.1.3.- Si $\varphi : D \to \mathbb{C}^n$ definido en un disco abierto $D \subseteq \mathbb{C}$ con $T \in \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(T) = \left(\varphi_1(T), \varphi_2(T), ..., \varphi_n(T)\right)$$

es solución de (II.7.7.A) ó (II.7.7.1.2.A) entonces

$$\begin{cases} \varphi_1'(T) = Z_1(\varphi_1(T), \varphi_2(T), ..., \varphi_n(T)) \\ \varphi_2'(T) = Z_2(\varphi_1(T), \varphi_2(T), ..., \varphi_n(T)) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \varphi_n'(T) = Z_n(\varphi_1(T), \varphi_2(T), ..., \varphi_n(T)) \end{cases} ; \; T \in D \subseteq \mathbb{C}.$$

Gráficamente tenemos:



II.7.7.1.4.- Si $Z \in \mathrm{X}(U)$ es **lineal** entonces la E.D.O. asociada a Z se llama **E.D.O. lineal**.

II.7.7.1.5.- Si $Z \in \mathrm{X}(U)$ es **afín** entonces la E.D.O. asociada a Z se llama **E.D.O. afín**.

II.7.8. <u>DEFINICIÓN</u>

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $Z \in \mathrm{X}(U)$, para todo $z_0 \in U$ y cualquier $T_0 \in \mathbb{C}$.

i).- El **problema de valor inicial** (P.V.I.) **asociado a** Z es dado por

$$\begin{cases} z' = Z(z) \\ z(T_0) = z_0 \end{cases} \qquad \textbf{(II.7.8.1)}$$

(II.7.8.1) es llamado **Problema de Cauchy para Campos Vectoriales Holomorfos**.

ii).- La **solución del P.V.I.** (II.7.8.1) es una función holomorfa $\varphi : D \to U$ donde $D \subseteq \mathbb{C}$, es un abierto, tal que para todo $T_0 \in D$

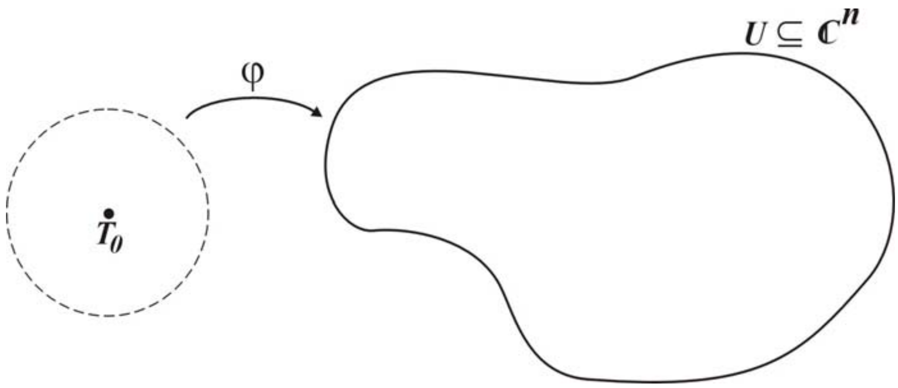
$$\begin{cases} \varphi' = Z(\varphi(T)),\ T \in D \\ \varphi(T_0) = z_0 \end{cases}$$

II.7.9. <u>PROPOSICIÓN</u>

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z \in \mathrm{X}(U)$, para todo $z_0 \in U$ y cualquier $T_0 \in \mathbb{C}$.

Entonces resolver el P.V.I. (II.7.8.1) es equivalente a resolver la ecuación integral

$$z(T) = z_0 + \int_{T_0}^{T} Z(z(\tau))d\tau \qquad \textbf{(II.7.9.1)}$$



<u>Demostración</u>:

Sea φ solución de (II.7.9.1) entonces existe $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $T_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi : D &\to U \\ T &\mapsto \varphi(T) \end{aligned}$$

es holomorfa, y

$$\begin{cases} \varphi' = Z(\varphi(T)), \ T \in D \\ \varphi(T_0) = z_0 \end{cases}$$

Sea $T \in D$ y consideremos el camino recto que une T_0 y T:

$$\int_{T_0}^{T} \varphi'(\tau)d\tau = \int_{T_0}^{T} Z(\varphi(\tau))d\tau$$

entonces

$$\varphi(T) - \varphi(T_0) = \int_{T_0}^{T} Z\left(\varphi(\tau)\right)d\tau$$

de donde obtenemos

$$\varphi(T) = z_0 + \int_{T_0}^{T} Z\left(\varphi(\tau)\right)d\tau .$$

Aquí tomamos $T = t_0$, obteniendo

$$\varphi(t_0) = z_0$$

Por lo tanto φ es solución de (II.7.9.1). El recíproco es evidente. ■

II.7.10. <u>DEFINICIÓN</u>

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, y $Z : U \to \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo.

II.7.10.1.- Decimos que Z es **Lipschitz** en U si y sólo si existe $c > 0$ tal que

$$\left\| Z(z) - Z(w) \right\| \leq c \left\| z - w \right\|; \ z, w \in U .$$

II.7.10.2.- Decimos que Z es **localmente Lipschitz** en U si y sólo si para cualquier $z_0 \in U$ existe el polidisco abierto de centro z_0 y poliradio $r \in \left(\mathbb{R}^n\right)^+$ tal que

$$Z|_{\Delta(z_0,r)} : \Delta(z_0, r) \to \mathbb{C}^n$$

es Lipschitz en $\Delta(z_0, r)$.

II.7.10.1. <u>OBSERVACIONES</u>

II.7.10.1.1.- Todo campo Lipschitz es localmente Lipschitz.

II.7.10.1.2.- Si $Z : U \to \mathbb{C}^n$ es lipschitziana en $U \subseteq \mathbb{C}^n$, entonces el conjunto

$$\left\{ \frac{\left\| Z(z) - Z(w) \right\|}{\left\| z - w \right\|} : z, w \in U, z \neq w \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

es acotado superiormente. El supremo de este conjunto es llamado **constante de Lipschitz** de Z y lo denotamos por $Lip(Z)$.

II.7.10.1.3.- En general se cumple

$$\|Z(z)-Z(w)\| \le Lip(Z)\|z-w\|;\ z,w\in U .$$

II.7.10.1.4.- Si $Z:U\to\mathbb{C}^n$ es localmente lipschitziana entonces la constante de Lipschitz de $Z|_{\Delta(z_0,r)}$ depende del polidisco abierto $\Delta(z_0,r)$.

II.7.11. <u>PROPOSICIÓN</u>

Sea $U\subseteq\mathbb{C}^n$ abierto, $Z:U\to\mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo. Entonces Z es localmente lipschitziana.

<u>Demostración</u>:

Sea $z_0\in U$ entonces existe $R=(R_1,R_2,...,R_n)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^n$ tal que $\Delta\left[z_0,R\right]\subset U$.

Como Z es holomorfa en U, entonces Z' es continua en U y $\Delta\left[z_0,R\right]$ es un compacto, entonces Z' es acotada en $\Delta\left[z_0,R\right]$ i.e. existe $M>0$ tal que

$$\|Z'(\omega)\|\le M ,\ \omega\in\Delta\left[z_0,R\right].$$

Sean $z,w\in\Delta\left[z_0,R\right]$ entonces el segmento de recta $\left[z,w\right]\subset\Delta\left[z_0,R\right]$.

Luego definimos

$$\begin{aligned}\psi:\left[0,1\right]&\to\mathbb{C}^n\\ t&\mapsto\psi(t)=Z\left((1-t)z+tw\right)\end{aligned}$$

claramente ψ es holomorfa. Además

$$\psi'(t)=Z'\left((1-t)z+tw\right)(w-z),\ t\in\left[0,1\right].$$

Entonces

$$Z(w)-Z(z)=\psi(1)-\psi(0)=\int_0^1\psi'(s)ds$$

$$\begin{aligned}\|Z(w)-Z(z)\| &\le \int_0^1\|\psi'(s)\|ds\\ &=\int_0^1\|Z'\left((1-s)z+sw\right)(w-z)\|ds\\ &\le\int_0^1\|Z'\left((1-s)z+sw\right)\|\|(w-z)\|ds\\ &\le\int_0^1 M\,\|(w-z)\|ds=M\,\|(w-z)\|\end{aligned}$$

$$\|Z(w)-Z(z)\|\le M\,\|w-z\|;\ z,w\in\Delta\left(z_0,R\right).$$

Por lo tanto Z es localmente lipschitziana. ■

II.7.12. <u>OBSERVACIONES</u>

II.7.12.1.- Sea $K \subseteq \mathbb{C}^n$ compacto y denotemos

$$C\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right)=\{\phi:D_\alpha\left[T_0\right]\to K;\ \phi \text{ continua}\}.$$

Para $\varphi,\psi \in C\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right)$ definimos

$$d\left(\varphi,\psi\right)=\max_{T\in D_\alpha\left[T_0\right]}\left\{\left\|\varphi(T)-\psi(T)\right\|\right\}.$$

$\left(C\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right),d\right)$ resulta ser un espacio métrico completo.

II.7.12.2.- Sea $K \subseteq \mathbb{C}^n$ compacto y denotemos

$$A\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right)=\{\phi:D_\alpha\left[T_0\right]\to K;\phi \text{ continua y holomorfa}\}.$$

Es claro que

$$A\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right)\subseteq C\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right).$$

Consideremos el espacio métrico $\left(A\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right),d\right)$ donde d es la métrica de $C\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right)$. Probaremos que $\left(A\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right),d\right)$ es completo.

Para esto, es suficiente probar que $A\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right)$ es cerrado.

Recordemos dos resultados de variable compleja:

a) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $\phi_k:U\to\mathbb{C}^n$ una sucesión de funciones y $\phi:U\to\mathbb{C}^n$ una función. Decimos que ϕ_k **converge** a ϕ **uniformemente en las partes compactas** de U lo que denotamos por $\phi_k\to\phi$ u.p.c. de U si y sólo si $\phi_k|_K\to\phi|_K$ uniformemente en K, para todo $K\subseteq U$ compacto (ver [24]).

b) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, si $\phi_k:U\to\mathbb{C}^n$ es una sucesión de funciones holomorfas en U y $\phi:U\to\mathbb{C}^n$ es tal que $\phi_k\to\phi$ u.p.c. de U entonces ϕ es holomorfa en U.

Teniendo presente estos dos resultados continuemos con la demostración.

Sea $\phi\in\overline{A\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right)}$ entonces existe $\left(\phi_k\right)\subseteq A\left(D_\alpha\left[T_0\right],K\right)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} d\left(\phi_k,\phi\right)=0.$$

Entonces tenemos $\phi \in C\left(D_\alpha\left[T_0\right], K\right)$.

Afirmación: ϕ es holomorfa en $D_\alpha\left(T_0\right)$.

En efecto, sea $K' \subseteq D_\alpha\left(T_0\right)$ compacto. Como

$$\lim_{k\to\infty} d\left(\phi_k, \phi\right) = 0,$$

tenemos que $\phi_k|_{K'} \to \phi|_{K'}$ uniformemente en K' entonces por a). $\phi_k \to \phi$ u.p.c de $D_\alpha\left(T_0\right)$, luego por b). $\phi \in A\left(D_\alpha\left[T_0\right], K\right)$.

Por lo tanto, concluimos que $\left(A\left(D_\alpha\left[T_0\right], K\right), d\right)$ es un espacio métrico completo.

II.7.13. <u>TEOREMA</u> (PICARD)

Sea $Z : \Delta\left[z_0, r\right] \to \mathbb{C}^n$ un campo vectorial Lipschitz en $\Delta\left[z_0, r\right]$ y holomorfo en $\Delta\left(z_0, r\right)$ entonces para todo $T_0 \in \mathbb{C}$ existe una única solución del P.V.I. (I.7.8.1)

$$\begin{cases} z' = Z(z) \\ z(T_0) = z_0 \end{cases}$$

definida en el disco $D_\alpha\left[T_0\right]$, donde $\alpha = \min\left\{\frac{r_1}{N}, \frac{r_2}{N}, \dots, \frac{r_n}{N}\right\}$, $r = \left(r_1, r_2, \dots, r_n\right) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n$ y $N = \max\left\{\left\|Z(z)\right\| : z \in \Delta\left[z_0, r\right]\right\}$.

<u>Demostración</u>:

Sabemos por la proposición (II.7.9) que el P.V.I. (II.7.8.1) es equivalente a

$$z(T) = z_0 + \int_{T_0}^{T} Z(z(\tau))d\tau .$$

Consideremos el espacio métrico completo $X = \left(A\left(D_\alpha\left[T_0\right], K\right), d\right)$.

Dado $\phi \in X$ definimos $F_\phi : D_\alpha\left[T_0\right] \to \mathbb{C}^n$ por

$$F_\phi(T) = z_0 + \int_{T_0}^{T} Z(\phi(\tau))d\tau ,$$

claramente F_ϕ es continua en $D_\alpha\left[T_0\right]$ y holomorfa en $D_\alpha\left(T_0\right)$.

Para $z = \left(z_1, z_2, \dots, z_n\right) \in \mathbb{C}^n$ denotemos por $\pi_j(z)$ a la proyección $j-$ésima definida por $\pi_j(z) = z_j$ para todo $1 \le j \le n$.

Ahora hacemos

$$\left|\pi_j(F_\phi(T)) - z_j^0\right| = \left|\int_{T_0}^{T} Z_j(\phi(\tau))d\tau\right|$$

$$\leq \int_{T_0}^{T}\left|Z_j(\phi(\tau))\right|d\tau \leq \max\left|Z_j(\phi(\tau))\right|\int_{T_0}^{T} d\tau$$

$$\leq N\left|T - T_0\right| \leq N\alpha \leq r_j$$

entonces $F_\phi \in X$, luego hemos construido

$$\begin{aligned} F : X &\to X \\ \phi &\mapsto F\left(\phi\right) = F_\phi \end{aligned}$$

Vamos a probar que F es continua y que existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que F^m es una contracción en X .

Afirmación:

$$\left\|F^n\left(\phi_1\right)(T) - F^n\left(\phi_2\right)(T)\right\| \leq \frac{Lip\left(Z\right)^n \left|T - T_0\right|^n}{n!}\; d\left(\phi_1,\phi_2\right); \qquad \textbf{(II.7.13.1)}$$

para cada $n \geq 0$, para cualesquiera $\phi_1,\phi_2 \in X$ y para todo $T \in D_\alpha\left[T_0\right]$.

En efecto:

- Para $n = 0$ ¡es evidente!
- Supongamos que la desigualdad se verifica para $n = k$. Probaremos que se cumple para $n = k+1$. Para cualesquiera $\phi_1,\phi_2 \in X$ y cada $T \in D_\alpha\left[T_0\right]$ tenemos

$$\left|\pi_j\left(F^{k+1}(\phi_1)(T)\right) - \pi_j\left(F^{k+1}(\phi_2)(T)\right)\right| = \left|\pi_j\left(F\left(F^k(\phi_1)\right)(T)\right) - \pi_j\left(F\left(F^k(\phi_2)\right)(T)\right)\right|$$

$$\leq \int_{T_0}^{T}\left|Z_j\left(F^k(\phi_1)(\tau)\right) - Z_j\left(F^k(\phi_2)(\tau)\right)\right|d\tau$$

$$\leq \int_{T_0}^{T} Lip(Z)\left\|F^k(\phi_1)(\tau) - F^k(\phi_2)(\tau)\right\|d\tau$$

$$\leq Lip(Z)\int_{T_0}^{T}\frac{Lip(Z)^k}{k!}d\left(\phi_1,\phi_2\right)\left|\tau - T_0\right|^k d\tau$$

$$= \frac{Lip(Z)^{k+1}}{k!}d\left(\phi_1,\phi_2\right)\int_{T_0}^{T}\left|\tau - T_0\right|^k d\tau$$

$$= \frac{Lip(Z)^{k+1}}{(k+1)!}d\left(\phi_1,\phi_2\right).$$

Lo cual prueba la afirmación.

Hacemos $n=1$ en (II.7.13.1) y tenemos

$$\left\|F(\phi_1)(T)-F(\phi_2)(T)\right\|\leq Lip(Z)\alpha d(\phi_1,\phi_2)$$

entonces

$$d\left(F(\phi_1),F(\phi_2)\right)\leq\left(Lip|Z|\alpha\right)d(\phi_1,\phi_2)$$

por lo tanto F es continua. Análogamente tenemos

$$\left\|F^n(\phi_1)(T)-F^n(\phi_2)(T)\right\|\leq\frac{Lip(Z)^n\alpha^n}{n!}\,d(\phi_1,\phi_2).$$

Para cada $m\in\mathbb{Z}^+$, sea

$$u_m=\frac{\left(Lip(Z)\alpha\right)^m}{m!}\quad,$$

utilizando el criterio de la razón para sucesiones de números reales tenemos que

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right|=0<1$$

i.e. $\left\{u_m\right\}_{m\geq 1}$ converge, luego sigue por definición de límite de sucesiones de números reales:

Dado $0<\varepsilon<1$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>n_0$ tenemos $\left|u_m\right|<\varepsilon<1$.

Entonces basta tomar $m=n_0$, para afirmar que F^m es una contracción en X, luego por el corolario I.4.2. F tendrá un único punto fijo, el cual es la solución del P.V.I. (II.7.8.1). ■

II.7.15. <u>COROLARIO</u>

Sea $U\subseteq\mathbb{C}^n$ abierto, $Z\in\mathrm{X}(U)$, para todo $z_0\in U$, para todo $T_0\in\mathbb{C}$, existe una única solución del P.V.I.(II.7.9.1) la cual está definida en una vecindad de T_0.

<u>Demostración</u>:

Como $Z\in\mathrm{X}(U)$ entonces por proposición (II.7.12.) Z es localmente Lipschitz, luego existe $\Delta\left[\mathrm{z}_0,r\right]\subseteq U$ tal que Z es Lipschitz en $\Delta\left[\mathrm{z}_0,r\right]$.

Como Z es holomorfo en $\Delta\left(\mathrm{z}_0,r\right)\subseteq U$ entonces por el teorema de Picard para campos holomorfos (teorema II.7.14.) se tiene que existe una única solución del P.V.I. (II.7.9.1). ■

Para más referencias sobre la teoría de dinámica compleja puede verse [3] y [15].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARIS R.; "The Optimal Design of Chemical Reactors", Academic Press Inc, New York, 1961.

[2] BELLMAN R.; "Dynamic Programing"; Princeton University Press., New Jersey 1957.

[3] BENAZIC R.; "Singularidades de Campos Vectoriales Holomorfos en el Domino de Poincaré", Pro Matemática, Vol. X, Nº 19-20, 1996.

[4] BOYCE W. – DIPRIMA R.; "Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera", Instituto Politécnico Rensselear, Troy New York, 1978.

[5] BURDEN R. – FAIRES J.; "Análisis Numérico", Iberoamericana, México D.F, 1985.

[6] CAMACHO C. – SAD, P.; "Puntos Singulares de Equaçoes Diferenciais Analiticas", 16 Coloquio Brasileiro de Matemática, 1987.

[7] CERDA E.; "Optimización Dinámica", Prentice Hall, España, 2001.

[8] CONTE S. - BOOR C.; "Análisis Numérico Elemental", McGraw - Hill S.A., México, 1985.

[9] CHAIM H.; "Aplicações da Topologia à Análise", Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Sao Paulo, 1976.

[10] CHAIM H.; " Functional Analysis and integro – differential with linear constraints", Sociedad Brasilera de Matemática, Reuniao de Análise funcional, Campinas, 1974.

[11] CHAIM H.; "Análise Funcional e Aplicações (Volume II)", Publicações ou edições do Instituto de Matemática e Estadística da Universidade de Sao Paulo, Sao Paulo, 1970.

[12] CHIANG A.; "Elements of Dynamic Optimization", McGraw-Hill, 1992.

[13] CHUMPITAZ M.; "Análisis Funcional I", Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería.

[14] CHURCHILL R. – WARD J.; "Variable Compleja y Aplicaciones", Mc Graw-Hill, España, 1990.

[15] GUNNING R.; " Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Vol I Function Theory", Wardsworth&Brooks/Cole, California, 1990.

[16] GUNNING R. – ROSSI H.; " Analytic Functions of Several Complex Variables", Prentice Hall, New York, 1965.

[17] HASSER B. – SULLIVAN J.; "Análisis Real", Editorial Trillas México, 1978.

[18] HIRSCH M. – SMALE S.; "Differential Equations, Dynamical Systems and Linear algebra", University of California, Berkeley Academic, INC. New York, 1974.

[19] KINCAID D. – CHENNEY W.; “Análisis Numérico: Las matemáticas del cálculo científico”, The University of Texas in Austin, Addison – Wesley Iberoamericana Wilmigton, Delaware, E.U.A., 1994.

[20] KOLMOGOROV K. – FOMIN S.; “Elements of Theory of Functions and Functional Analysis – Volume 2”, University Wisconsin –Rochester, New York, 1957.

[21] KREYSZIG E.; “Introductory Functional Analysis with Applications”, University to Windsor, New York, 1989.

[22] LIMA E.; “Curso de Análise-Vol. 2”, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1976.

[23] LIMA E.; “Espaços Métricos”, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1976.

[24] LINS A.; “Funções de uma Variável Complexa”, Proyecto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[25] MEDEIROS L. – DE ANDRADE G.; “Iniciação às Equações Diferenciais Parciais”, Livros Técnicos e Científicos Editora; Rio de Janeiro, 1978.

[26] NOLASCO A.; “Análise I”, ICMC, USP SAO CARLOS, Sao Carlos, 2004.

[27] NOWOSAD P.; “Introdução à Análise Funcional”, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, 1967.

[28] QUARTERONI A. – SACCO R. – SALERI F.; “Numerical Mathematics”, Springer – Verlag, New York Inc, 2000.

[29] REDDY J. – GARVIN C.; “Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering”, Virginia Polytechnic Institute and State, New York, 1986.

[30] SOTOMAYOR J.; “Lições de Equações Diferenciais Ordinárias”, Proyecto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[31] SHASHKIN YU.; “Lecciones populares de matemáticas: Puntos Fijos”, editorial MIR, Moscú, 1991.

[32] VILENKIN N.; “Lecciones populares de matemáticas: Método de aproximaciones sucesivas”, Editorial MIR, Moscú, 1991.