



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Matemáticas**

**Escuela Profesional de Matemática**

**Construcción del grado topológico de Brouwer en**

**$\mathbb{R}^2$  y aplicaciones**

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

**AUTOR**

Wilmer HUAMÁN QUISPE

**ASESOR**

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2023



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Huamán, W. (2023). *Construcción del grado topológico de Brouwer en  $R^2$  y aplicaciones*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

## Metadatos complementarios

<b>Datos de autor</b>	
Nombres y apellidos	Wilmer Huamán Quispe
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	41803566
URL de ORCID	<a href="https://orcid.org/0009-0003-0731-8046">https://orcid.org/0009-0003-0731-8046</a>
<b>Datos de asesor</b>	
Nombres y apellidos	Willy David BARAHONA MARTÍNEZ
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	<a href="https://orcid.org/0000-0001-9177-1561">https://orcid.org/0000-0001-9177-1561</a>
<b>Datos del jurado</b>	
<b>Presidente del jurado</b>	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
<b>Miembro del jurado 1</b>	
Nombres y apellidos	Gabriel Armando Muñoz Márquez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	44444774
<b>Datos de investigación</b>	
Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional

Grupo de investigación	EDOACBI
Agencia de financiamiento	Ninguna.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: -12.05611582267559 Longitud: -77.08468053573509
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Mayo 2023 – octubre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras <a href="https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01">https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01</a> Matemáticas aplicadas <a href="https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02">https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02</a>



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú. Decana de América  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO  
PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA  
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023)  
MODALIDAD PRESENCIAL**

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:00 horas del viernes 27 de octubre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023): Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (PRESIDENTE), Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: “**CONSTRUCCIÓN DEL GRADO TOPOLOGICO DE BROUWER EN  $\mathbb{R}^2$  Y APLICACIONES**”, presentado por el señor **Bachiller WILMER HUAMÁN QUISPE**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación sobresaliente, con un calificativo promedio de dieciocho (18)

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller WILMER HUAMÁN QUISPE** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 11:45 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar  
PRESIDENTE

Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez  
MIEMBRO

Mg. Willy David Barahona Martínez  
MIEMBRO ASESOR



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

Universidad del Perú. Decana de América

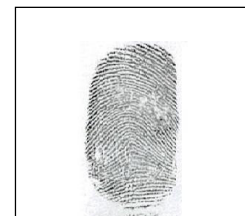
**Vicerrectorado de Investigación y Posgrado**



Yo Willy David, Barahona Martínez en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° 001656-2023-D-FCM/UNMS de la tesis, cuyo título es **Construcción del grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}^2$  y aplicaciones**, presentado por el bachiller Wilmer, Huamán Quispe para optar el título de Licenciado en Matemática.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 20% de similitud, nivel PERMITIDO para continuar con los trámites correspondientes y para su publicación en el repositorio institucional.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título de Licenciado en Matemática.



---

DNI N°. 10078450.

Mg. Willy David, BARAHONA MARTÍNEZ

# Construcción del grado topológico de Brouwer en $\mathbb{R}^2$ y aplicaciones

Por

Wilmer, Huamán Quispe

Tesis sometida al Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos - UNMSM, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar.

Presidente/ Jurado 1.

Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez.

Jurado 2.

Mg. Willy David, Barahona Martínez

Miembro Asesor de Tesis

LIMA - PERÚ

2023



# FICHA CATALOGRÁFICA

Wilmer, Huamán Quispe

Construcción del grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}^2$  y aplicaciones, (Lima) 2023. VIII.,46pág.,29.7cm (UNMSM, Título, Matemática, 2023) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. Matemática, UNMSM/FCM II. Título (Series).

# DEDICATORIA

Mi tesis se la dedico a mi señor Jesús, quien siempre me cuida y fortalece con su gracia.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a mi señor Jesús quien me lo ha dado todo desde el día que le acepte en mi corazón.

A mi asesor, el Magister Willy David Barahona Martínez por haberme ayudado en este proyecto.

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y a sus docentes quienes por su exigencia me han ayudado a ser un buen profesional.

# RESUMEN

Construcción del grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}^2$  y aplicaciones

Wilmer, Huamán Quispe

Octubre - 2023

**Asesor** : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

**Título obtenido** : Licenciado en Matemática.

---

En el presente trabajo de tesis, mostraremos la construcción detallada del grado topológico de Brouwer para  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ , con las principales aplicaciones que esta teoría nos proporciona.

Para resolver una gran variedad de problemas planteados en el análisis funcional, solo bastará resolver una ecuación del tipo  $f(x) = 0$ , donde  $f$  es una función definida sobre cierto espacio funcional.

**Palabras clave:**

Grado topológico de Brouwer, Teorema de Bolzano, Homotopía, Teorema de Poincaré-Miranda en  $\mathbb{R}^2$ .

# ABSTRACT

Construcción del grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}^2$  y  
aplicaciones

Wilmer, Huamán Quispe

October - 2023

**Adviser** : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

**Obtained** : Graduate in Mathematics.

---

In this thesis work, we will show the detailed construction of the Brouwer topological degree for  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{R}^2$ , with the main applications that this theory provides us.

To solve a great variety of problems posed in functional analysis, it is enough to solve an equation of the type  $f(x) = 0$ , where  $f$  is a function defined on a certain functional space.

**Keywords:**

Brouwer's topological degree, Bolzano's Theorem, Homotopía, Poincaré – Miranda's Theorem in  $\mathbb{R}^2$ .

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1. Definiciones, notaciones y resultados previos . . . . .	11
<b>2. Grado topológico de Brouwer en <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>13</b>
2.1. Grado topológico de Brouwer en $\mathbb{R}$ . . . . .	13
<b>3. Grado topológico de Brouwer en <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>22</b>
3.1. Construcción del grado topológico en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	23
3.2. Principales propiedades del grado topológico de Brouwer en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	32
3.2.1. Grado topológico de una transformación lineal . . . . .	34
3.3. Propiedades del grado topológico de Brouwer de forma axiomática en $\mathbb{R}^2$	36
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>39</b>
4.1. Aplicación 01:	
Teorema Fundamental del Álgebra . . . . .	40
4.2. Aplicación 02:	
Teorema de punto fijo de Brouwer en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	41
4.3. Aplicación 03:	
Teorema de Bolzano en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	42
4.4. Aplicación 04:	
Teorema del erizo o de la bola peluda. Caso $m = 3$ . . . . .	43
<b>5. Conclusiones y/o Sugerencias</b>	<b>44</b>



# Introducción

La teoría del grado topológico tiene una amplia y basta bibliografía, los primeros apuntes sobre el tema fueron presentados por Kronecker en el siglo XIX; fue Brouwer en 1911 quien formuló por primera vez una definición del grado de una función continua. Esta teoría es una herramienta muy eficaz para resolver una gran gama de problemas no lineales y sobre todo para obtener la correspondiente información cualitativa.

Mediante el grado topológico podemos determinar la cantidad de soluciones de la ecuación  $f(x) = 0$ , la utilidad de esta teoría es inmensa, para gozar de su eficacia en las aplicaciones, el grado de una función debe tener ciertas características y propiedades [1], [2] y [3]; en este trabajo de tesis presentaremos la construcción del grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ , mostrando cada detalle, para que a un estudiante de pregrado en matemáticas e ingeniería les sea difícil entender estas propiedades y poder aplicar dicha herramienta a EDOs, problemas con valores iniciales, problemas con valores en la frontera, sistemas de ecuaciones diferenciales, etc. Para la construcción del grado, seguiremos el enfoque analítico de Nagumo [4], [5] y [6].

La teoría del grado topológico es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Esta teoría fue desarrollada a principios del siglo XX por muchos matemáticos, entre los cuales se destacan Henri Poincaré, Leopold Kronecker, John Milnor y Marston Morse, entre otros.

Henri Poincaré fue uno de los pioneros en el estudio del grado topológico. En 1895, Poincaré introdujo el concepto de “grado”, que es una medida de cuánto se envuelve



una curva alrededor de un punto. Poincaré demostró que utilizando el grado topológico es posible probar la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales. En particular, el teorema del punto fijo, también conocido como teorema de Poincaré-Brouwer, establece que toda función continua del disco unitario cerrado en sí mismo tiene al menos un punto fijo. Este resultado fue fundamental para el desarrollo posterior de la teoría del grado topológico.

Otro matemático importante en la teoría del grado topológico fue Leopold Kronecker. En la década de 1880, Kronecker formuló un teorema que establece que toda ecuación algebraica no constante tiene al menos una solución en el conjunto de los números complejos. Esta idea fue ampliada por Poincaré y otros matemáticos a ecuaciones diferenciales, y es uno de los fundamentos de la teoría.

John Milnor y Marston Morse en 1950 hicieron importantes contribuciones a la teoría del grado topológico. Milnor estudió el grado en una variedad de dimensiones más altas y demostró varios teoremas fundamentales en el campo. Morse, por su parte, desarrolló la teoría del grado topológico en el contexto de los campos vectoriales, utilizando técnicas variacionales para probar la existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales.

# 1 Preliminares

## 1.1. Definiciones, notaciones y resultados previos

En el presente trabajo, consideramos las siguientes notaciones y definiciones:

**Definición 1. (Números Reales).** El conjunto de números Reales está denotado y determinado por

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ donde } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

**Definición 2. (Espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ).** Este espacio está formado por vectores  $x$  de  $n$  componentes reales, así tenemos

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n. \right\}$$

Para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  denota la  $i$ -ésima coordenada de  $x$ .

**Definición 3. (Espacio normado).** Un espacio normado es un par  $(X, \|\cdot\|)$  formado por un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $X$  y una aplicación.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

llamada norma; con las siguientes propiedades:

- a)  $\|x\| \geq 0$ ,  $\forall x \in X$
- b)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- c)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$
- d)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in X$

**Definición 4. (Espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^2$ ).**

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \right\}$$

Un entorno de centro  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y radio  $r > 0$  es

$$B_r(x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r \right\}$$

en el espacio unidimensional es un intervalo abierto centrado en el punto  $x_0$  y radio  $r > 0$ , en el plano representa un círculo de centro  $(x_0, y_0)$  con radio  $r > 0$  y en el espacio tridimensional una esfera de centro  $(x_0, y_0, z_0)$  y radio  $r > 0$ .

El punto  $x_0 \in A$  es llamado punto interior del conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  si  $\exists r > 0$  tal que

$$B_r(x_0) \subseteq A.$$

**Definición 5. ( Abiertos en  $\mathbb{R}^2$  ).** Diremos que un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es abierto, si

$$A = A^\circ = \text{int}A = \{x : x \text{ es punto interior de } A\}.$$

**Definición 6. ( Cerrados en  $\mathbb{R}^2$  ).** Diremos que un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es cerrado, si el complemento de  $A$  es abierto.

**Definición 7. (Funciones reales de variable real ).**

$$\begin{aligned} f : I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Llamamos función real de variable real a toda aplicación  $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , que a cada elemento  $x$  de  $I$  asocia a un único número real  $f(x)$ .

**Definición 8. (Función identidad).**

$$\begin{aligned} I_d : X \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto I_d(x) = x \end{aligned}$$

**Definición 9. (Homotopía ).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado. Una homotopía es una función continua, definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times \bar{\Omega} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, x) &\mapsto H(\lambda, x) \end{aligned}$$

**Definición 10. (Homotopía admisible ).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado. Una homotopía es admisible, si la función

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times \partial\Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, x) &\mapsto H(\lambda, x) \neq 0 \end{aligned}$$

es continua.

## 2 Grado topológico de Brouwer en $\mathbb{R}$

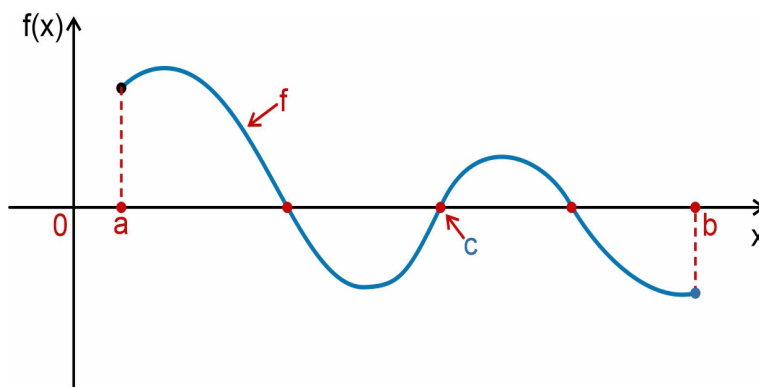
### 2.1. Grado topológico de Brouwer en $\mathbb{R}$

Utilizaremos el conocido teorema de Bolzano (teorema de las raíces), para la construcción del grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.** (*Teorema de Bolzano en  $\mathbb{R}$* ). Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua tal que

$$f(a)f(b) < 0$$

entonces  $f$  tiene una raíz  $c$  en  $]a, b[$ .



**Teorema de Bolzano.**

**Figura 01 .**

#### **Demostración:**

Definimos el conjunto acotado  $M = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\} \neq \emptyset$ , pues  $a \in M$ . Tomando  $c = \sup M$ , concluimos que  $c \in [a, b]$ , ahora nos falta probar que  $f(c) = 0$ , para  $c \neq a$  y  $c \neq b$ . Esta prueba lo realizamos por contradicción, por lo que para cualquiera de los casos  $f(c) < 0$  o  $f(c) > 0$ , buscamos llegar a una contradicción.

En efecto; Si  $f(c) < 0$ , al ser  $f$  una función continua en  $c$ , mediante la propiedad de la conservación del signo en un entorno de  $c$ ,  $\exists \gamma > 0$  tal que, para cada  $x \in [a, b]$  con  $|x - c| < \gamma$  tenemos  $f(x) < 0$ .

De lo anterior tenemos que  $b \geq c + \gamma$ , pues en otro caso sería  $|b - c| = b - c < \gamma$ , entonces  $f(b) < 0$ , lo cual es una contradicción con la hipótesis. Luego, para  $x \in ]c, c + \gamma[$ , tenemos que  $|x - c| = x - c < \gamma$ , entonces  $f(x) < 0$  para  $x \in M$ , resultando una contradicción, con el hecho que  $c$  es la menor cota superior de  $M$ .

Por otro lado, si  $f(c) > 0$  entonces  $c \notin M$ . Aplicando la propiedad de la conservación del signo, existe  $\gamma > 0$  tal que, para el entorno  $|x - c| < \gamma$  tenemos  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Entonces para  $x \in M$  tenemos que  $\gamma \leq |x - c| = c - x$ , de donde  $x \leq c - \gamma$ . Así  $c - \gamma$  es una cota superior de  $M$ , la cual es una contradicción, ya que  $c - \gamma < c = \sup M$ . ■

Por otro lado, consideramos el siguiente PVI, (problema de Dirichlet)

$$\left\{ \begin{array}{l} v''(t) = G(t, v(t)). \\ v(0) = v(1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

para  $G : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual es una función continua y acotada, además se cumple que existe unicidad de la solución para el problema de valores iniciales (PVI) y toda solución del PVI está bien definida en  $[0, 1]$ .

En efecto: para cada  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $v(t, \xi)$  es la solución de (2.1) con  $v(0, \xi) = 0$  y  $v'(0, \xi) = \xi$  y por la dependencia continua de los datos iniciales, la función

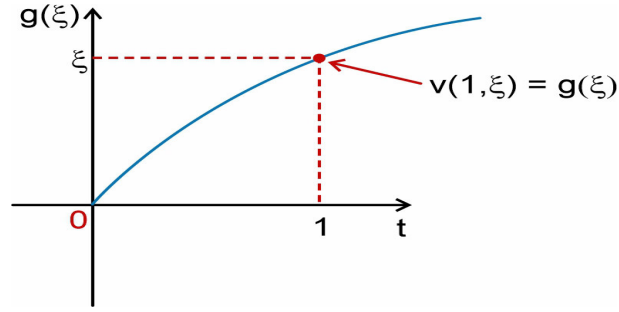
$$(t, \xi) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \mapsto v(t, \xi)$$

es continua, así definimos la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto g(\xi) = v(1, \xi) \end{aligned}$$

Para resolver el PVI (2.1) debemos tener en cuenta las raíces (ceros) de  $g$ , así hemos encontrado una solución  $v(t, \xi)$  para el PVI de Dirichlet.

A esta técnica la conocemos como el método del disparo.



El disparo.

Figura 02.

**Teorema 2. ( Verificación del método del disparo).** Si  $G$  es una función continua y acotada, entonces el PVI (2.1) por lo menos posee una solución.

**Demostración:**

Tenemos  $v(t, \xi)$  que satisface:

$$v(t, \xi) = \xi t + \int_0^t (t-s)G(s, v(s, \xi))ds$$

luego,

$$v(t, \xi) - \xi t = \int_0^t (t-s)G(s, v(s, \xi))ds.$$

Considerando,  $|G(t, v)| \leq K$ ,  $\forall (t, v) \in \text{Dom}(G)$  con  $K > 0$ , entonces

$$|v(t, \xi) - \xi t| \leq K \int_0^t (t-s)ds \leq \frac{K}{2}t^2$$

luego

$$|g(\xi) - \xi| \leq \frac{K}{2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

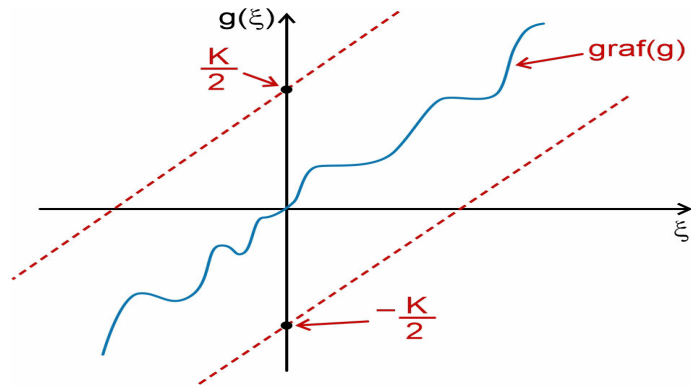
así, tenemos

$$-\frac{K}{2} + \xi \leq g(\xi) \leq \frac{K}{2} + \xi$$

como

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} g(\xi) = \pm\infty,$$

entonces,  $g$  tiene al menos un cero, en otras palabras el PVI (2.1) por lo menos posee una solución.



Método del disparo.

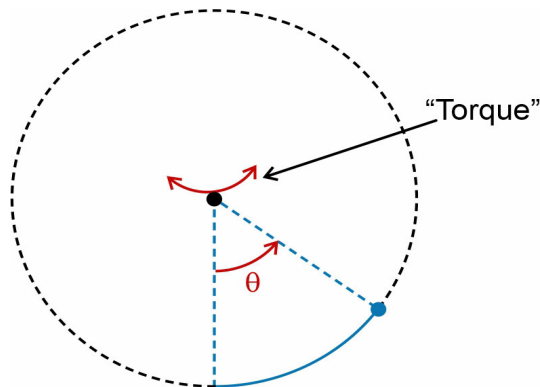
Figura 03.



**Ejemplo 1. ( El péndulo forzado).** Tenemos la EDO

$$\theta'' + \text{sen}\theta = f(t)$$

que modela al péndulo forzado, con  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua “torque”. Además se cumple que, dado cualquier momento de torsión  $f$ , hay un movimiento permanente y que termina ( $t = 0, t = 1$ ) en la posición más baja.



Péndulo forzado.

Figura 04.

A continuación presentamos un resultado sobre multiplicidad de soluciones.

**Lema 1.** Si  $G$  es una función acotada de clase  $C^1([0, 1] \times \mathbb{R})$ , tal que

$$G(t, 0) = 0, \quad \pi^2 < -G_v(t, 0) < 4\pi^2, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Entonces el problema de Dirichlet (2.1) tiene al menos tres soluciones (una de ellas es  $u \equiv 0$ ).

**Demostración:**

El teorema de diferenciabilidad con condición inicial implica que

$$(t, \xi) \mapsto v(t, \xi), \text{ es } C^1([0, 1] \times \mathbb{R})$$

además,  $\frac{\partial v}{\partial \xi}(t, \xi)$  es la solución de

$$u'' = G_v(t, v(t, \xi))u, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

sabemos que  $v(t, 0) = 0$  y así  $g(0) = 0$ . Calculando  $g'(0)$ , tenemos que

$$g'(0) = \frac{\partial v}{\partial \xi}(1, 0) = u(1)$$

donde

$$u'' = G_v(t, 0)u, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Por el teorema de comparación de Sturm, los ceros de  $u(t)$  pueden compararse con los de

$$u_1'' + \pi^2 u_1 = 0, \quad y \quad u_2'' + 4\pi^2 u_2 = 0,$$

los cuales son

$$u_1(t) = \text{sen}(\pi t), \quad y \quad u_2(t) = \text{sen}(2\pi t)$$

respectivamente.

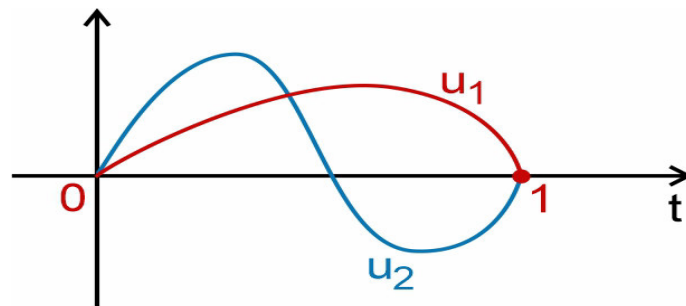
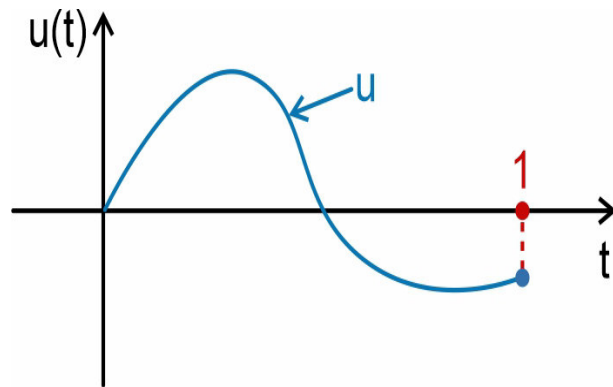


Figura 05.

Entonces  $u(t)$  tiene un cero en el intervalo  $]0, 1]$ , luego  $u(1) < 0$ . Por lo tanto,  $g'(0) < 0$ . ■



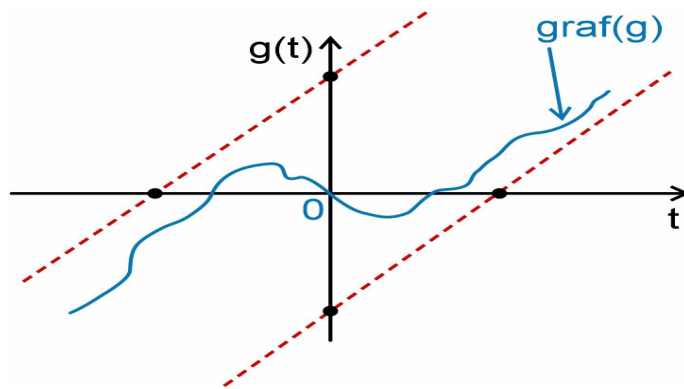
**Observación 1.** *Los ceros de  $u(t)$  son simples.*



**Figura 06.**

De la prueba anterior, tenemos que  $G$  es acotada, luego

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} g(\xi) = \pm\infty.$$



**Figura 07.**

Por lo tanto,  $g$  tiene al menos una solución positiva, una negativa y la nula.

**Definición 11.** (*Grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}$* ). Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, tal que  $f(a) \neq 0$  y  $f(b) \neq 0$ , entonces definimos el grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}$ , como

$$\deg(f, ]a, b[) = \begin{cases} 1, & \text{si } f(a) < 0 < f(b), \\ -1, & \text{si } f(a) > 0 > f(b), \\ 0, & \text{otros casos.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Veamos gráficamente, los siguientes casos:

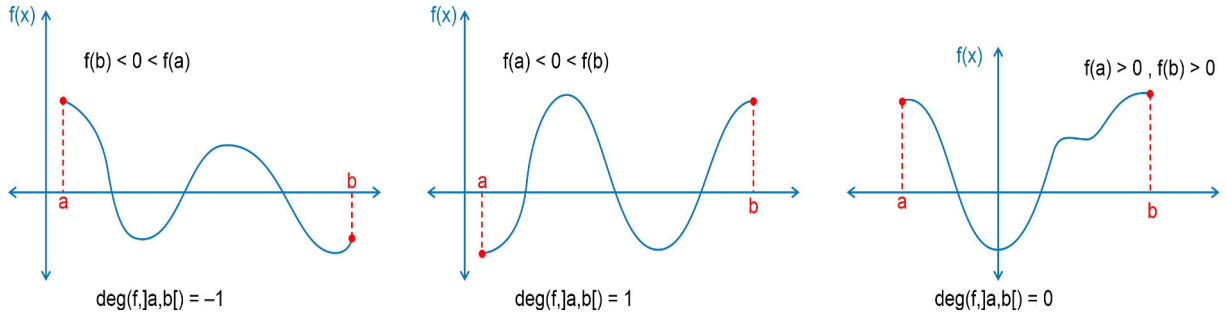


Figura 08.

Sabemos que todo conjunto abierto y acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , siempre puede ser expresado como

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

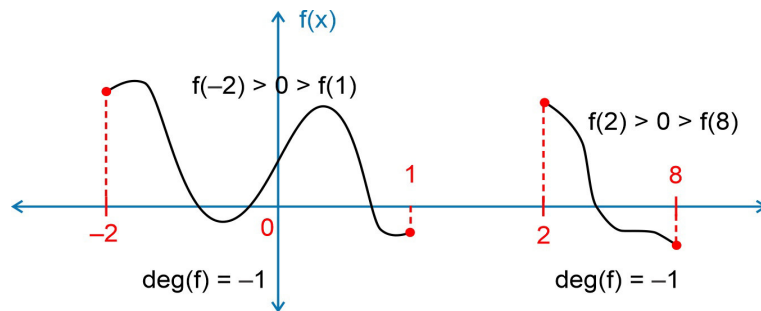
donde los intervalos abiertos y enumerables  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , son disjuntos.

Una definición equivalente es

**Definición 12.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, tal que  $f(a) \neq 0$  y  $f(b) \neq 0$ . Entonces definimos el grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}$ , como

$$\deg(f, \Omega) = \deg(f, I_1) + \deg(f, I_2) + \dots + \deg(f, I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \deg(f, I_n)$$

**Ejemplo 2.** Considere el conjunto  $\Omega = ]-2, 1[ \cup ]2, 8[$



$$\deg(f, \Omega) = \deg(f, ]-2, 1[) + \deg(f, ]2, 8[) = (-1) + (-1) = -2.$$

Figura 09.

**Observación 2.** Tenemos que  $f(x) = 0$  en una cantidad finita de componentes  $I_n$  y, la suma siempre está bien definida.

**Teorema 3.** Sea  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, tal que  $f(a) \neq 0$  y  $f(b) \neq 0$ , entonces  $f(x)$  se anula solo en una cantidad finita de componentes  $I_n$ .

### Demostración:

Para demostrar el teorema, podemos utilizar el teorema de la función continua en conjuntos compactos. Procedemos por contradicción.

Supongamos que  $f(x)$  se anula en una cantidad infinita de componentes  $I_n$ , es decir, existen infinitas componentes  $I_{n_1}, I_{n_2}, \dots$  en las cuales  $f(x)$  se anula.

Como cada componente  $I_n$  es un conjunto compacto, podemos considerar la sucesión de componentes  $I_{n_1}, I_{n_2}, \dots$ . Debido a que  $\Omega$  es acotada, podemos elegir una subsucesión convergente de componentes, digamos  $I_{n_{k_1}}, I_{n_{k_2}}, \dots$ , tal que convergen a algún conjunto compacto  $D \subset \bar{\Omega}$ . Note que  $D$  es también un conjunto compacto.

Ya que  $f(x)$  es continua en  $\bar{\Omega}$ , sabemos que  $f(x)$  se anula en cada punto de la sucesión  $I_{n_{k_1}}, I_{n_{k_2}}, \dots$ . Tomando límites, encontramos que  $f(x)$  también se anula en cada punto de  $D$ .

Sin embargo, esto contradice la hipótesis inicial de que  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in \partial\Omega$ . Entonces, no puede haber una cantidad infinita de componentes  $I_n$  en las cuales  $f(x)$  se anula.

Por lo tanto, concluimos que  $f(x)$  se anula solo en una cantidad finita de componentes  $I_n$ . ■

**Definición 13.** Sea  $f$  es una función de clase  $C^1[a, b]$ , tal que  $f(a) \neq 0$  o  $f(b) \neq 0$ . Un cero  $\xi$  de  $f$  en  $]a, b[$  es simple, si  $f'(\xi) \neq 0$ .

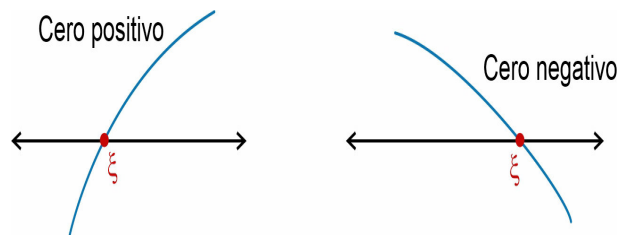


Figura 10.

Supongamos que todos ceros de  $f$  son simples y esta es una cantidad finita de ceros, entonces pueden ser ordenados de la siguiente manera

$$a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < b$$

Considerando que los ceros positivos y negativos se alternan, entonces tenemos el siguiente resultado

**Teorema 4.** Si  $f \in C^1[a, b]$ , tal que  $f(x) \neq 0$  cuando  $x = a$  o  $x = b$ , entonces

$$\deg(f, ]a, b]) = \sum_{i=1}^n \text{sign} f'(\xi_i)$$

donde  $\xi_i$  es un cero de  $f$  y

$$\text{sign} f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } f'(x) > 0, \\ -1, & \text{si } f'(x) < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

por convención asumiremos que  $\sum_{\emptyset} = 0$ .

### 3 Grado topológico de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

A continuación, se describen los principales pasos a seguir en la construcción del grado topológico en dimensión 2:

Consideramos una función continua  $f : D^2 \rightarrow S^1$ , donde  $D^2$  es el disco unitario en  $\mathbb{R}^2$  y  $S^1$  es la circunferencia unitaria en  $\mathbb{R}^2$ , además, un punto  $p$  base en  $S^1$ , por ejemplo, el punto  $(1, 0)$ .

Para cada punto  $x \in S^1$ , consideramos la preimagen de  $f(x) \in D^2$ , esta preimagen puede tener varios puntos y se denota como  $f^{-1}(x)$ . Así, para cada punto  $x \in S^1$ , consideramos el lazo  $f^{-1}(x)$  unido al lazo constante en el punto base  $p$ .

Utilizando la construcción de lazo libre, unimos todos los lazos  $f^{-1}(x)$  unidos al punto base  $p \in D^2$ , obteniendo así un lazo  $\phi$  en  $S^1$ .

Utilizando el teorema de Jordan, podemos subdividir el lazo  $\phi$  en una secuencia finita de lazos simples y cerrados  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ .

El índice de un lazo  $\phi_i$  es el número de veces que el lazo gira en sentido antihorario alrededor del punto base  $p$ , considerando el cambio de orientación.

La suma de los índices de los lazos  $\phi_i$  es el grado topológico de Brouwer de la función  $f$ .

En resumen, se construye un lazo a partir de las preimágenes de  $f(x)$  en  $D^2$ , se subdividen en lazos simples usando el teorema de Jordan, se calcula el índice de cada lazo y se suma para obtener el grado topológico de Brouwer.

### 3.1. Construcción del grado topológico en $\mathbb{R}^2$

**Lema 2.** *Supongamos que  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  es una función continua. Entonces existe una única función continua  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\alpha(t) = R(t)(\cos(\theta(t)), \text{sen}(\theta(t))), t \in [a, b]$$

con  $R(t) = \|\alpha(t)\|$  (norma euclidiana),  $\theta(t)$  es única salvo por la periodicidad de  $2\pi$ .

**Demostración:**

**Afirmación 1.** *Existe una única función  $\theta$ .*

En efecto: Sean  $\theta_1, \theta_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas, tales que

$$\left(\cos(\theta_1(t)), \text{sen}(\theta_1(t))\right) = \left(\cos(\theta_2(t)), \text{sen}(\theta_2(t))\right)$$

entonces,

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) + 2\pi k(t), \text{ para cada } t \in [a, b], \text{ y } k(t) \in \mathbb{Z}.$$

Como

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto k(t) \end{aligned}$$

es continua y de valores reales, entonces  $k(t) = k = \text{constante entera}$ .

Luego,

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto,

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta(t)$$

es única, salvo la periodicidad de  $2\pi$ .

**Afirmación 2. Existencia de  $\alpha \in C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ .**

Probaremos esta afirmación, considerando la validez del resultado y vamos en busca de una fórmula para  $\theta'$ . En efecto,

$$\alpha(t) = R(t)\left(\cos(\theta(t)), \text{sen}(\theta(t))\right), t \in [a, b]$$

entonces, la derivada de  $\alpha(t)$  esta dada por

$$\alpha'(t) = R'(t) \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} + R(t)\theta'(t) \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

Tomamos la matriz ortogonal (rotación de  $90^\circ$ )

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y consideramos  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ . Así, obtenemos

$$\langle \alpha'(t), J\alpha(t) \rangle = R^2(t)\theta'(t).$$

Definimos

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_a^t \frac{-\alpha_2(\tau)\alpha_1'(\tau) + \alpha_2'(\tau)\alpha_1(\tau)}{(\alpha_1(\tau))^2 + (\alpha_2(\tau))^2} d\tau$$

con  $\theta_0$  seleccionado a partir de

$$\alpha(a) = R(a) \begin{pmatrix} \cos(\theta(a)) \\ \sin(\theta(a)) \end{pmatrix} = \|\alpha(a)\| \begin{pmatrix} \cos(\theta(0)) \\ \sin(\theta(0)) \end{pmatrix}$$

de donde deducimos que  $\theta \in C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$  y

$$x_1(t) = \cos(\theta(t)), \quad x_2(t) = \sin(\theta(t))$$

es solución del sistema de EDOs

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\theta'(t)x_2(t) \\ x_2'(t) = \theta'(t)x_1(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Por otro lado, tenemos que:

$$y_1 = \frac{\alpha_1}{R} \quad y \quad y_2 = \frac{\alpha_2}{R}$$

también son soluciones del sistema anterior (3.1).

En efecto,

$$R^2 = (\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 \Rightarrow RR' = \alpha_1(\alpha_1)' + \alpha_2(\alpha_2)'$$

$$\begin{aligned}
y_1' &= \frac{(\alpha_1)'R - (\alpha_1)R'}{R^2} = \frac{(\alpha_1)'R^2 - (\alpha_1)RR'}{R^3} \\
&= \frac{(\alpha_1)'R^2 - (\alpha_1)^2(\alpha_1)' - (\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_2)'}{R^3} \\
&= \frac{(\alpha_2)^2(\alpha_1)' - (\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_2)'}{R^3} \\
&= \frac{(\alpha_2)(\alpha_1)' - (\alpha_1)(\alpha_2)'}{R^2} \frac{\alpha_2}{R} \\
&= -\theta'(t)y_2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

procediendo de igual forma obtenemos,

$$\begin{aligned}
y_2' &= \frac{(\alpha_2)'R - (\alpha_2)R'}{R^2} = \frac{(\alpha_2)'R^2 - (\alpha_2)RR'}{R^3} \\
&= \frac{(\alpha_2)'R^2 - (\alpha_1)^2(\alpha_1)' - (\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_2)'}{R^3} \\
&= \frac{(\alpha_1)^2(\alpha_2)' - (\alpha_2)(\alpha_1)(\alpha_1)'}{R^3} \\
&= \frac{(\alpha_1)(\alpha_2)' - (\alpha_2)(\alpha_1)'}{R^2} \frac{\alpha_1}{R} \\
&= \theta'(t)y_1.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Por la unicidad de la solución de un PVI, tenemos que

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2$$

Por otro lado, la siguiente estimativa:

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow |\theta_1 - \theta_2| \leq \sqrt{2}|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|$$

es suficiente para probar

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta \leq \sqrt{2}|e^{i\theta} - 1| \text{ donde } \theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$|e^{i\theta} - 1| \geq |\cos\theta - 1| + |\sin\theta| \geq |\sin\theta| \geq |\cos\xi|\theta \text{ para algún } \xi \in [0, \frac{\pi}{4}]$$



por lo tanto,

$$|e^{i\theta} - 1| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\theta$$

**Afirmación 3. Existencia de la función continua  $\alpha$ .**

Construimos una sucesión  $\alpha_n \in C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ , tal que

$$\alpha_n \longrightarrow \alpha, \text{ uniformemente,}$$

para  $n$  suficientemente grande tenemos que

$$\alpha_n \neq 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Construimos la función argumento  $\theta_n$  de acuerdo con el paso anterior y encontramos  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left\| \frac{\alpha_n(t)}{\|\alpha_n(t)\|} - \frac{\alpha_m(t)}{\|\alpha_m(t)\|} \right\| < \frac{\pi}{8\sqrt{2}}, \quad n, m \geq N, \quad t \in [a, b].$$

También podemos suponer que  $\alpha_n(a)$  es convergente a  $\theta_0$ .

es decir

$$|\theta_n(a) - \theta_m(a)| < \frac{\pi}{4}.$$

De la estimativa,

$$|\theta_n(t) - \theta_m(t)| < \frac{\pi}{8}$$

luego,

$$|\theta_n(t) - \theta_m(t)| < \frac{\pi}{4}.$$

Esto implica que

$$|\theta_n(t) - \theta_m(t)| < \frac{\pi}{4}, \quad \forall t \in [a, b], \quad n, m \geq N.$$

retornando a la estimativa anterior,

$$|\theta_n(t) - \theta_m(t)| \leq \sqrt{2} \left\| \frac{\alpha_n(t)}{\|\alpha_n(t)\|} - \frac{\alpha_m(t)}{\|\alpha_m(t)\|} \right\|$$

y entonces  $(\theta_n(t))$  es una sucesión de Cauchy uniformemente convergente, esto quiere decir que,  $\|\theta_n(t)\| \geq \delta > 0$ ,  $n \geq N$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

Así, por el pasaje al límite,  $\theta_n$  converge uniformemente a  $\theta$ .

■

**Lema 3.** Dada una sucesión de funciones continuas,  $\alpha_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  uniformemente convergentes a  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

Si, para  $a$  tenemos que  $\theta_n(a)$  converge a  $\theta(a)$ , entonces

$$\theta_n \quad \text{converge uniformemente a } \theta.$$

**Demostración:**

Por hipótesis, para cada  $\alpha_n$  es posible encontrar una sucesión  $\theta_n(t)$  de tal manera que

$$\frac{\alpha_n(t)}{\|\alpha_n(t)\|} = \left( \cos(\theta_n(t)), \operatorname{sen}(\theta_n(t)) \right) = e^{i\theta_n(t)}$$

Como, tenemos que  $\alpha_n$  converge a  $\alpha$ , entonces  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy y por consiguiente  $(\|\alpha_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  también es una sucesión de Cauchy, así concluimos que  $(\|\alpha_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.

Seleccionando  $n, m \geq N$  para un  $N$  convenientemente adecuado ( $N$  muy grande) tenemos,

$$\|\alpha_n\| = \|\alpha_m\| = k$$

por la estimativa realizada anteriormente

$$|\theta_n(t) - \theta_m(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{k} |\alpha_n(t) - \alpha_m(t)|$$

para  $m, n$  muy grandes ( $m, n \rightarrow +\infty$ ) se tiene

$$|\theta_n(t) - \theta_m(t)| \rightarrow 0$$

Por lo tanto, la sucesión  $(\theta_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, como  $\theta_n(a)$  converge a  $\theta(a)$ , concluimos que la sucesión  $(\theta_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $\theta(t)$ . ■

**Observación 3.** Note que la condición

$$\alpha([a, b]) \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

es esencial para encontrar un argumento continuo. Esto se muestra en la curva

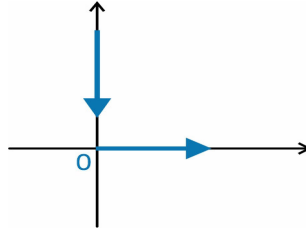


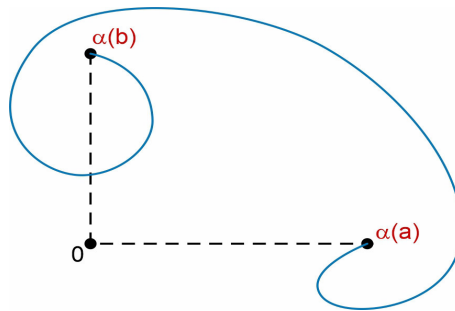
Figura 11.

que es continua, pero tiene un argumento discontinuo.

Dada  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  continua, observe que el número

$$WN = \frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)]$$

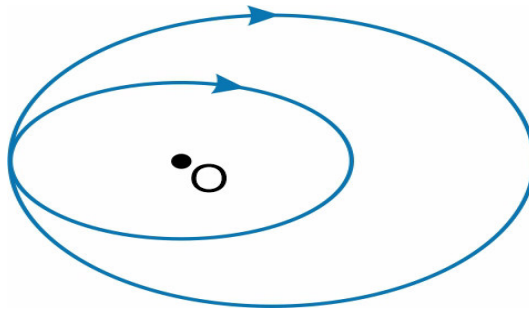
es independiente del argumento escogido y representa el número de vueltas de la curva  $\alpha(t)$  alrededor del origen, es también conocido como número zigzagueante (Winding Number WN).



$$WN = \text{Número de vueltas al origen} = \frac{1}{4}.$$

Figura 12.

Si la curva es cerrada ( $\alpha(a) = \alpha(b)$ ) el número de vueltas al origen es un entero. Intuitivamente hablando,  $+n$  significa  $n$  revoluciones alrededor del origen en el sentido contrario a las agujas del reloj,  $-n$  si es en el sentido de las agujas del reloj.



$$\text{Número de vueltas al origen} = -2.$$

Figura 13.



Supongamos que  $\Gamma$  es una curva de Jordan y  $\Omega$  es la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ .

Como  $\alpha$  es una parametrización de  $\Gamma$  con  $\alpha(0) = \alpha(1)$  donde  $\alpha|_{[0,1[}$  es uno a uno y  $\alpha([0, 1]) = \Gamma$ .

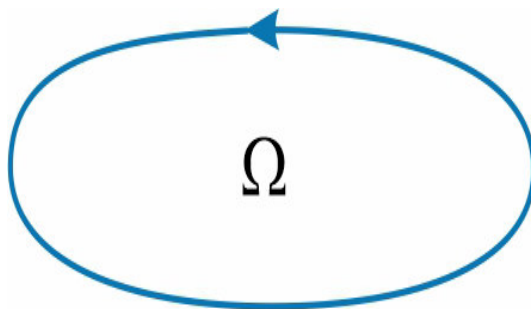
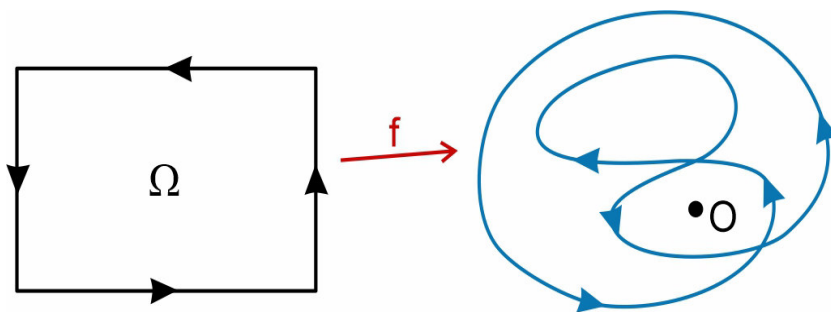


Figura 14.

**Definición 14.** Dada  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua,  $f(x) \neq 0, \forall x \in \partial\Omega = \Gamma$ . El número de vueltas de  $f \circ \alpha$  al rededor del origen =  $deg(f, \Omega)$ .

**Ejemplo 3.** Sea  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua, tal que  $f(x) \neq 0, \forall x \in \partial\Omega = \Gamma$ . Según el gráfico que se muestra, determine  $deg(f, \Omega)$ .



$$deg(f, \Omega) = 2.$$

Figura 15.

**Ejemplo 4.**  $\mathbb{C} = \mathbb{R}, g(z) = z^n, n = 1, 2, 3, \dots, \Omega : \text{disco unitario}, \beta(t) = e^{2\pi int}$ .

Tenemos que:  $g(\beta(t)) = e^{2\pi int}$  y por tanto  $\|g(\beta(t))\| = 1$ , ahora

a)  $g(\beta(1)) = e^{2\pi in} = (\cos(2\pi n), \text{sen}(2\pi n))$ ,

así  $\cos(2\pi n) = \cos(\theta(1))$  y  $\text{sen}(2\pi n) = \text{sen}(\theta(1))$ , entonces

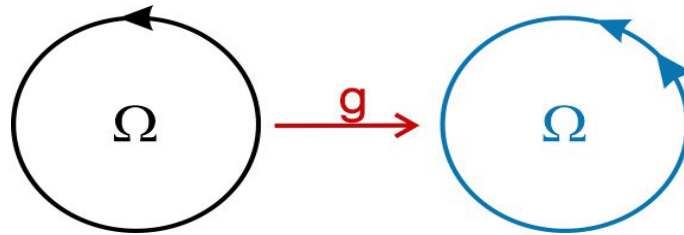
$$\theta(1) = 2\pi n$$

- b)  $g(\beta(0)) = e^{0i} = (\cos(0), \text{sen}(0)) = (1, 0)$ ,  
 así  $\cos(\theta(0)) = 1$  y  $\text{sen}(\theta(0)) = 0$ , entonces

$$\theta(0) = 0$$

por lo tanto,

$$\text{deg}(g, \Omega) = \frac{1}{2\pi}[\theta(1) - \theta(0)] = \frac{1}{2\pi}[2\pi n - 0] = n.$$



$$\text{deg}(g, \Omega) = n.$$

**Figura 16.**

**Ejemplo 5.**  $f(z) = \bar{z}$ ,  $\Omega$  : disco unitario,  $f(\alpha(t)) = e^{-2\pi it}$ .

Tenemos que  $\|f(\alpha(t))\| = 1$  puesto que  $f(\alpha(t)) = e^{-2\pi it}$ , por lo tanto

- a)  $f(\alpha(1)) = e^{-2\pi i} = (\cos(-2\pi), \text{sen}(-2\pi))$ ,

así, después de igualar componentes, tenemos

$$\cos(-2\pi) = \cos(\theta(1)) \text{ y } \text{sen}(-2\pi) = \text{sen}(\theta(1)), \text{ entonces } \theta(1) = -2\pi.$$

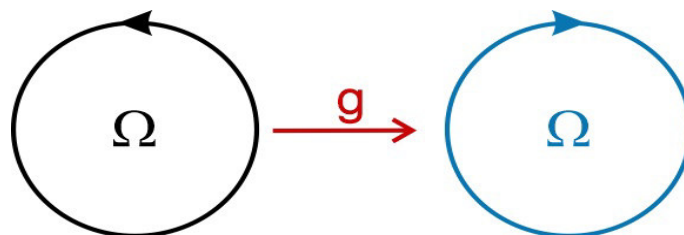
- b)  $f(\alpha(0)) = e^{0i} = (\cos(0), \text{sen}(0)) = (1, 0)$ ,

así, después de igualar componentes, tenemos  $\cos(\theta(0)) = 1$  y  $\text{sen}(\theta(0)) = 0$ ,  
 entonces

$$\theta(0) = 0$$

por lo tanto,

$$\text{deg}(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi}(\theta(1) - \theta(0)) = \frac{1}{2\pi}(-2\pi n - 0) = -1.$$



$$\text{deg}(f, \Omega) = -1.$$

**Figura 17.**

**Lema 4. (*Continuidad de la función grado*).** *Demostrar : El grado topológico de Brouwer en  $\mathbb{R}^2$  es una función continua.*

**Demostración:**

Sean  $f_n, f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dos funciones continuas,  $f_n(x) \neq 0$  y  $f(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$  tales que  $f_n(x)$  converge uniformemente a  $f(x)$  sobre  $\partial\Omega$ , entonces por el resultado obtenido en el Lema 3 tenemos

$$\deg(f_n, \Omega) \longrightarrow \deg(f, \Omega).$$

Por lo tanto, hemos demostrado que  $\deg$  es una función continua. ■

Por otro lado, como  $\deg(f_n, \Omega) \in \mathbb{Z}$ , para todo  $n \geq 1$ , y

$$\deg(f_n, \Omega) \longrightarrow \deg(f, \Omega),$$

entonces, la sucesión  $\left(\deg(f_n, \Omega)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  es constante para cierto número natural  $N$ .

Como consecuencia de esta observación deducimos la definición de homotopía y de una homotopía admisible (Ver definiciones 9 y 10).

**Proposición 1. (*Propiedad de Homotopía*).** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado. Si la función*

$$H : [0, 1] \times \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\lambda, \bullet) \mapsto H(\lambda, \bullet) \neq 0$$

*es continua, entonces  $\deg(H(\lambda, \bullet), \Omega)$  es independiente de la elección de  $\lambda$ .*

**Demostración:**

Tenemos que  $H$  es una homotopía admisible, tomando una sucesión  $(H_n(\lambda, \bullet))_{n \in \mathbb{N}}$  que converge uniformemente a  $H(\lambda, \bullet)$  con  $\lambda \in [0, 1]$ , como la función  $\deg(H(\lambda, \bullet), \Omega)$  es continua, entonces

$$\deg(H_n(\lambda, \bullet), \Omega) \longrightarrow \deg(H(\lambda, \bullet), \Omega)$$

En vista que  $\deg(H_n(\lambda, \bullet))$  solo toma valores enteros, podemos concluir que  $\deg(H(\lambda, \bullet), \Omega)$  es constante, para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Por lo tanto,  $\deg(H(\lambda, \bullet), \Omega)$  es independiente a la elección de  $\lambda \in [0, 1]$ . ■

## 3.2. Principales propiedades del grado topológico de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

Para lo que viene en adelante, es necesario considerar lo siguiente:

- a) Sean  $\alpha_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ,  $\alpha_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  dos funciones continuas, con  $\alpha_1(b) = \alpha_2(c)$ , podemos yuxtaponerlas (acercarlas) y obtenemos una nueva función  $\alpha_1 * \alpha_2 : [a, d] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  definida por:

$$\alpha_1 * \alpha_2(t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \alpha_2(c - b + t) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c \end{cases}$$

- b) El WN es aditivo:

$$WN(\alpha) = \frac{1}{4} \text{ y } WN(\beta) = \frac{3}{4}, \text{ entonces } \alpha * \beta = 1.$$

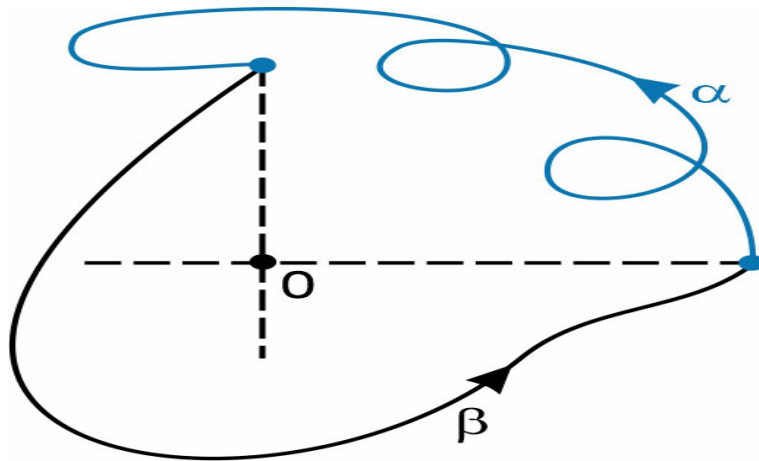
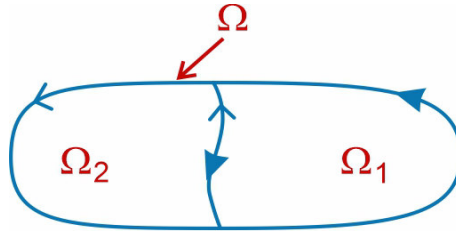


Figura 18.

$WN(\alpha) = \frac{1}{4}$ , pues  $\alpha$  gira un cuarto de vuelta (solo un cuadrante) y  $WN(\beta) = \frac{3}{4}$ , pues  $\beta$  gira tres cuartos de vuelta (tres cuadrantes), ambas en sentido antihorario. Por lo tanto,  $\alpha * \beta = 1$ .

**Proposición 2. (Propiedad de aditividad).**

Sea  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua tal que  $f(x) \neq 0 \forall x \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ . Considerando tres dominios de Jordan con  $\partial\Omega \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ , como se indica en la figura:



**Propiedad de aditividad.**

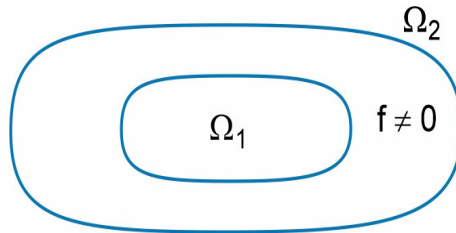
**Figura 19.**

Entonces

$$\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1) + \deg(f, \Omega_2).$$

Considerando argumentos similares a los seguidos, es posible inferir el siguiente resultado

**Proposición 3. (Propiedad de excisión).** Sean  $\Omega_1, \Omega_2$  dominios de Jordan y  $f : \bar{\Omega}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua tal que  $f(x) \neq 0 \forall x \in \bar{\Omega}_2 - \Omega_1$ , con  $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$  como se observa en la figura



**Propiedad de excisión.**

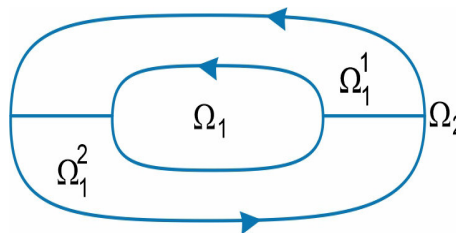
**Figura 20.**

Entonces

$$\deg(f, \Omega_1) = \deg(f, \Omega_2).$$

**Demostración:**

De la gráfica adjunta y por la aditividad del grado



**Figura 21.**



tenemos que

$$\deg(f, \Omega_2) = \deg(f, \Omega_1) + \deg(f, \Omega_1^2) + \deg(f, \Omega_1^1)$$

de la condición  $f(x) \neq 0 \forall x \in \overline{\Omega_2} - \Omega_1$  y por la negación de la propiedad de existencia concluimos que

$$\deg(f, \Omega_1^2) = \deg(f, \Omega_1^1) = 0$$

por lo tanto,

$$\deg(f, \Omega_1) = \deg(f, \Omega_2).$$

■

### 3.2.1. Grado topológico de una transformación lineal

Considerando que  $A$  es una matriz  $2 \times 2$  con determinante no nulo y,  $\Omega$  una bola unitaria de centro en el origen; tenemos  $Ax \neq 0 \forall x \in \partial\Omega$ .

Definimos el conjunto

$$Gl(\mathbb{R}^2) = \{A \in M_{22}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

al cual dividimos en dos casos: matrices con determinante positivo y matrices con determinante negativo.

Si  $A$  es una matriz con  $\det(A) > 0$ , entonces definimos la función continua

$$A : [0, 1] \longrightarrow Gl_+(\mathbb{R}^2)$$

$$\lambda \mapsto A_\lambda$$

donde  $A_0 = A$  y  $A_1 = I_d$  y se tiene que la función

$$H(\lambda, x) = A_\lambda x$$

es una homotopía pues

$$A_\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

por lo tanto,

$$\deg(A_0, \Omega) = \deg(A, \Omega) = \deg(I, \Omega) = 1.$$

Ahora, suponiendo que  $\det(A) < 0$ , tenemos una homotopía con

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ya que el determinante de la matriz anterior es igual a  $-1$  y esta es menor que cero, entonces es una función con grado  $-1$ .

**Proposición 4. (El grado de una aplicación lineal).** Sea  $A \in M_{22}(\mathbb{R})$  una matriz con determinante  $\det(A) \neq 0$ , con  $\Omega$  una bola centrada en el origen y de radio 1, entonces

$$\text{sign}(\det A) = \text{deg}(A, \Omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \det(A) > 0, \\ -1, & \text{si } \det(A) < 0. \end{cases}$$

**Proposición 5. (Linealización y grado).** Supongamos que  $\Omega$  es un dominio arbitrario de Jordan y  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función de clase  $C^1$ , además  $f$  posee un único cero  $x_0 \in \Omega$  simple ( $\det(f'(x_0)) \neq 0$ ).

Entonces

$$\text{deg}(f, \Omega) = \text{deg}(f'(x_0), \Omega) = \text{sign}(\det(f'(x_0)))$$

**Demostración:**

El teorema de la función inversa implica que existe una bola pequeña  $B$  centrada en  $x_0$ , tal que  $f$  es un difeomorfismo de  $\bar{B}$  en su imagen. Por excisión,

$$\text{deg}(f, \Omega) = \text{deg}(f, B)$$

por simplicidad asumimos  $x_0 = 0$  y definimos la homotopía en  $\bar{B}$ ,

$$H(\lambda, x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}f(\lambda x), & \text{si } \lambda \in ]0, 1], \\ f'(0)x, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que  $H$  es continuo y no tiene ceros en  $\partial B$  (de hecho el único es  $x = 0$ ). Por lo tanto,

$$\text{deg}(H(1, \bullet), B) = \text{deg}(H(0, \bullet), B)$$

y esto completa la demostración. ■

**Ejemplo 6.** Determine el grado topológico de

$$f(x, y) = (e^{x+y} - 1, e^{x-y} - 1)$$

alrededor del origen.

**Solución:**

Primero veamos cuales son los ceros de  $f$ , en efecto

$$f(x, y) = (e^{x+y} - 1, e^{x-y} - 1) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow e^{x+y} = 1 \quad y \quad e^{x-y} = 1$$

entonces

$$x + y = x - y \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Calculando la derivada de  $f$ ,

$$Jf(x, y) = f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{bmatrix}$$

luego,

$$\det(f'(x, y)) = -e^{x+y}e^{x-y} - e^{x+y}e^{x-y} = -2e^{x+y}$$

entonces

$$\det(f'(0, 0)) = -2$$

como el determinante es negativo, entonces

$$\deg(f, \Omega) = \det(f'(0, 0), \Omega) = \text{sign}(\det f'(0, 0)) = -1.$$

### 3.3. Propiedades del grado topológico de Brouwer de forma axiomática en $\mathbb{R}^2$

En la construcción del grado de Brouwer dado anteriormente se siguió el enfoque analítico de Nagumo. En nuestro caso considerando la existencia de una única aplicación que verifica un conjunto de propiedades que podemos utilizarlas, definiremos el grado topológico de forma axiomática, de la siguiente manera.

Para  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto y acotado, y la función continua  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definimos el siguiente conjunto

$$M = \left\{ (f, \Omega) : 0 \notin f(\partial\Omega) \right\}$$

**Teorema 5.** *Existe una única aplicación  $\text{deg} : M \rightarrow \mathbb{Z}$ , llamada grado topológico de Brouwer, satisfaciendo las siguientes propiedades:*

$d_1)$  (Normalización). *Si  $0 \in \Omega$  entonces el grado de la función identidad  $I_d$  es 1.*  
 $(\text{deg}(I_d, \Omega) = 1)$

$d_2)$  (Aditividad). *Si  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ , con  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  y  $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$  entonces*  

$$\text{deg}(f, \Omega) = \text{deg}(f, \Omega_1) + \text{deg}(f, \Omega_2).$$

$d_3)$  (Independencia del parámetro mediante homotopías). *Si  $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continua y  $0 \notin H(\lambda, \partial\Omega)$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$  entonces*  

$$\text{deg}(H(\lambda, \bullet), \Omega) \text{ es independiente de } \lambda.$$

$d_4)$  (Existencia de un cero). *Si  $\text{deg}(f, \Omega) \neq 0$  entonces existe  $x \in \Omega$  tal que  $f(x) = 0$ .*

$d_5)$  (Dependencia de los valores en la frontera). *Si  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \partial\Omega$  entonces*  

$$\text{deg}(f, \Omega) = \text{deg}(g, \Omega)$$

$d_6)$  (Excisión). *Si  $\Omega_1 \subset \Omega$  es un abierto y  $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$  entonces*  

$$\text{deg}(f, \Omega) = \text{deg}(f, \Omega_1)$$

$d_7)$  (Grado de aplicaciones lineales inversibles). *Si  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es lineal con determinante no nulo  $\det(A) \neq 0$  y  $0 \in \Omega$  entonces*  

$$\text{deg}(A, \Omega) = \text{sign}(\det(A)).$$

**Observación 4.** *Analizamos cada una de las tres primeras propiedades*

$d_1)$  *es una propiedad que fija a 1, como el grado de la función  $I_d$ .*

$d_2)$  *es una propiedad que nos permite determinar la multiciplidad de las soluciones de*  
 $f(x) = 0.$

$d_3$ ) es una propiedad nos permite ver, que si  $f$  y  $g$  son funciones homótopas, entonces

$$\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega).$$

Tal vez, sea la propiedad de más importancia para la teoría de grado.

**Observación 5.** Analizamos cada una de las cuatro últimas propiedades

$d_4$ ) es una propiedad que nos permite garantizar de manera práctica, la existencia de una solución, probando que el grado es distinto de cero.

$d_5$ ) es una propiedad del grado que nos asegura que este solo depende de los valores que asume la función en la frontera.

$d_6$ ) es una propiedad que nos permite descartar todos los cerrados del dominio que no cuenten con un cero de  $f$ . Es un caso particular de ( $d_2$ ).

$d_7$ ) es una propiedad que nos permite garantizar que el grado de una cierta función es distinto de cero y poder aplicar  $d_4$ ).

“**El Teorema de Borsuk**, nos dice que el grado de una función impar definida en una bola que no se anula en la frontera es impar” también es un resultado muy importante.

## 4 Aplicaciones

El teorema de Bolzano es un resultado muy importante en análisis matemático que establece lo siguiente: Si  $f$  es una función continua sobre  $[a, b]$  tal que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos, entonces existe al menos un  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

Por otro lado, la teoría del grado también es un resultado fundamental en topología y análisis matemático. Esta teoría se refiere al estudio de las degeneraciones y acoplamientos de conjuntos cerrados y abiertos en un espacio topológico mediante el uso de grados topológicos.

Ambos resultados tienen aplicaciones en diversos campos de las matemáticas y la física, y también presentan algunas coincidencias importantes:

- El teorema de Bolzano puede ser considerado como un caso particular de la teoría del grado topológico de Brouwer. Esto se debe a que el teorema de Bolzano establece la existencia de al menos un punto donde una función se anula, mientras que el grado topológico generaliza esta idea a conjuntos más generales.
- Ambos resultados son parte de la teoría de la continuidad. El teorema de Bolzano se basa en la continuidad de la función en el intervalo cerrado, mientras que el grado topológico de Brouwer también se aplica a funciones continuas en espacios topológicos.
- Tanto el teorema de Bolzano como el grado topológico de Brouwer tienen aplicaciones en la resolución de ecuaciones y problemas de existencia de soluciones en matemáticas y física. Estos resultados permiten garantizar la existencia de puntos de intersección o de soluciones para ciertos problemas.

## 4.1. Aplicación 01:

### Teorema Fundamental del Álgebra

**Teorema 6. (Teorema Fundamental del Álgebra).** Sea  $p \in \mathbb{C}[z]$ , un polinomio de grado  $n \geq 1$  con  $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ . Entonces  $p$  tiene por lo menos una raíz.

**Demostración:**

De([8]) tenemos que

$$|r| \leq \max\{1, |a_0| + \dots + |a_{n-1}|\}$$

es una estimativa para una posible raíz  $r$  de  $p$ .

Definimos

$$H(\gamma, z) = z^n + \gamma a_{n-1}z^{n-1} + \dots + \gamma a_1z + \gamma a_0$$

y sea  $\Omega$  la bola de radio  $R > \max\{1, |a_0| + \dots + |a_{n-1}|\}$  centrada en el origen.

Entonces

$$H(\gamma, z) \neq 0 \quad \forall z \in \partial\Omega, \quad \gamma \in [0, 1]$$

así tenemos que

$$\begin{aligned} \deg(p, \Omega) &= \deg(H(1, \bullet), \Omega) \\ &= \deg(H(0, \bullet), \Omega) \\ &= n > 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

entonces por la propiedad de existencia, tenemos que  $p$  tiene por lo menos un cero en  $\Omega$ .

■

## 4.2. Aplicación 02:

### Teorema de punto fijo de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

**Teorema 7.** (*Teorema de punto fijo de Brouwer en  $\mathbb{R}^2$* ).

Sea

$$B = \left\{ \vec{x} = (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| < 1 \right\}$$

una bola abierta y  $\rho : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  una función continua, entonces  $\rho$  tiene un punto fijo en  $\overline{B}$ .

#### Demostración:

Mediante la contradicción demostramos este resultado. En efecto, supongamos que  $\rho$  no posee punto fijo en la bola  $\overline{B}$ , esto quiere decir que

$$\rho(\vec{x}) \neq \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \overline{B}.$$

Como se tiene que,  $\rho(\overline{B}) \subset \overline{B}$ , entonces definimos la homotopía admisible

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times \overline{B} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\gamma, (u, v)) &\mapsto H(\gamma, (u, v)) = (u, v) - \gamma\rho(u, v) \end{aligned}$$

de donde observamos que, si  $\|\vec{x}\| = 1$ ,  $\gamma \in [0, 1[$ ,

$$\|H(\gamma, (u, v))\| \geq \|(u, v)\| - \gamma\|\rho(u, v)\| \geq 1 - \gamma > 0.$$

Entonces

$$H(\gamma, (u, v)) \neq 0 \text{ si } (u, v) \in \partial B, \gamma \in [0, 1[$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned} \deg(I_d - \rho, B^\circ) &= \deg\left(H(1, \bullet), B^\circ\right) \\ &= \deg\left(H(0, \bullet), B^\circ\right) \\ &= \deg\left(I_d, B^\circ\right) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por lo tanto,  $I_d - \rho$  tienen un cero y que a su vez es un punto fijo de  $\rho$ .



### 4.3. Aplicación 03:

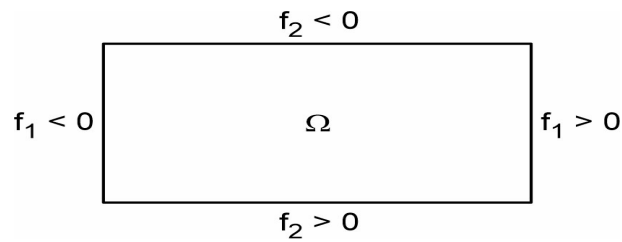
#### Teorema de Bolzano en $\mathbb{R}^2$

**Teorema 8. (Teorema de Poincaré - Miranda).**

Sea  $\Omega = ]-\alpha, \alpha[ \times ]-\beta, \beta[$ ,  $f = (f_1, f_2) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua, donde:

$$f_1(\alpha, y) > 0 > f_1(-\alpha, y), \quad \forall y \in [-\beta, \beta] \quad \text{y} \quad f_2(x, \beta) < 0 < f_2(x, -\beta), \quad \forall x \in [-\alpha, \alpha],$$

entonces  $f$  tiene un cero en  $\Omega$ .



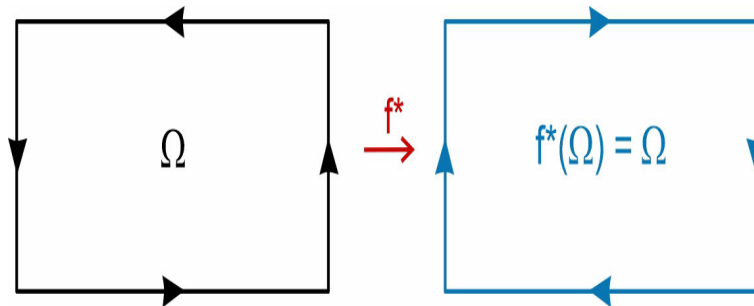
**Figura 22.**

#### Demostración:

Tenemos que

$$f^* = (f_1^*, f_2^*) = (x, -y)$$

satisfacen el teorema. En vista que  $f^*$  da una vuelta alrededor del origen  $(0, 0)$  en sentido horario, tenemos que  $\deg(f^*, \Omega) = -1$



**Figura 23.**

## 4.4. Aplicación 04:

### Teorema del erizo o de la bola peluda. Caso

$$m = 3.$$

**Teorema 9.** (*Teorema del erizo o de la bola peluda. Caso  $m$  impar*). Sean  $B$  una bola unitaria de  $\mathbb{R}^m$ ,  $m$  impar y  $f : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  una función continua. Entonces,  $\exists \lambda \neq 0$  y  $\exists x \in S^{m-1}$  tales que

$$f(x) = \lambda x.$$

#### **Demostración:**

Por [4], (Proposition 2.1), se garantiza la existencia de una extensión continua de  $f$ , es decir: existe

$$\bar{f} : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ continua, tal que } \bar{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Además,  $\deg(\bar{f}, B)$  está bien definido, pues no depende de la elección de la extensión de la función.

Procederemos a demostrar por contradicción. En efecto, supongamos que, no existen  $\lambda \neq 0$  y  $x \in S^{m-1}$  tal que  $f(x) = \lambda x$ ; entonces  $H_1(t, x) = (1 - t)\bar{f}(x) + tx$  y  $H_2(t, x) = (1 - t)\bar{f}(x) - tx$  son homotopías admisibles entre  $\bar{f}$  y la identidad  $I_d$  y la identidad  $-I_d$  respectivamente.

Por la Invarianza de la homotopía (propiedad  $d_3$ ) y el hecho que  $m$  es impar, llegamos al siguiente absurdo

$$1 = \deg(I_d, B) = \deg(\bar{f}, B) = \deg(-I_d, B) = (-1)^m = -1.$$

Por lo tanto, existen  $\lambda \neq 0$  y  $x \in S^{m-1}$  tales que

$$f(x) = \lambda x.$$

■

## 5 Conclusiones y/o Sugerencias

- 1) Según lo visto en la Aplicación 2. Sugerimos extender el teorema de Brouwer a cualquier espacio que sea homeomorfo a  $B$  para tratar de encontrar mejores resultados.
- 2) El teorema del erizo, infiere que todo campo de vectores tangentes y continuo sobre una esfera de dimensión par debe anularse en algún punto de una esfera de dimensión impar, no es complicado hallar un campo de vectores tangentes y continuo que no se anule. Por ejemplo, sobre  $S^1$  es suficiente rotar  $\frac{\pi}{2}$  radianes. (i.e.,  $f : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función continua,  $m$  impar y  $\langle x, f(x) \rangle = 0, \forall x \in S^{m-1}$ ).
- 3) La gran diferencia que existe en el teorema del punto fijo de Brouwer, cuando es considerado en dimensión 1 y cuando lo es en dimensión 2. Veamos:

### Dimensión 1:

Si  $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $[a, b] \subset \rho([a, b])$ , entonces

$\rho$  tiene un punto fijo.

Para probar esto, basta usar y aplicar el teorema de Bolzano.

### Dimensión 2:

Si  $\rho : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua, con  $B$  una curva de Jordan tal que  $\bar{B} \subset \rho(\bar{B})$ , entonces

**NO NECESARIAMENTE**

$\rho$  tiene un punto fijo.

- 4) De lo expuesto en 2) y 3), concluimos que el teorema de la bola peluda para una esfera de dimensión par, hace un paralelo al teorema de las raíces de un polinomio de grado impar, pues ambos garantizan la existencia de un cero en el dominio.
- 5) En conclusión, tanto el teorema de Bolzano como la teoría del grado topológico de Brouwer son resultados fundamentales en matemáticas y tienen aplicaciones y coincidencias importantes en varios campos.

# Bibliografía

- [1] E. Outerelo y J. M. Ruiz. (2009). Mapping Degree Theory, Graduate Studies in Mathematics 108, AMS-RSME.
- [2] Lloyd, N. G. (1978). Degree Theory, Cambridge University Press. Cambridge-New York-Melbourne.
- [3] Sánchez, D. A. (2002). Ordinary differential equations: a brief eclectic tour (Vol. 19). American Mathematical Soc.
- [4] Zeidler, E. (1986). Nonlinear Functional Analysis and It's Applications. Fixed-Point Theorems, 897.
- [5] Bolzano, B. (2004). ¿El teorema de Bolzano en varias variables? ©LA GACETA DE LA RSME, 7, 101-121.
- [6] Teoría del grado topológico y aplicaciones a las ecuaciones diferenciales. Julián Haddad. <https://web.dm.uba.ar/files/tesisic/2009/haddad.pdf>
- [7] Ortega, R. (2006). Degree theory and boundary value problems. In ICTP, Trieste.
- [8] Arcoya, D. (2006). Topological methods and differential equations II. In ICTP, Trieste.