



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Físicas

Unidad de Posgrado

**Dinámica y modelado numérico del campo de la
velocidad de flujo en un maremoto**

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Física con
mención en Geofísica

AUTOR

Juan Pablo Alberto AVALOS CARRIÓN

ASESOR

Dr. Cesar Omar JIMENEZ TINTAYA

Lima, Perú

2024

Referencia bibliográfica

Avalos, J. (2024). *Dinámica y modelado numérico del campo de la velocidad de flujo en un maremoto*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas/Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Juan Pablo Alberto Avalos Carrión
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42867943
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0004-8598-9352
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Cesar Omar Jimenez Tintaya
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	08677351
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-3671-4748
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	César Augusto Aguirre Céspedes
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	25825765
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Luis Pablo Vilcapoma Lázaro
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08673585
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Nick Jhonatan Moreno Moreno
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	44337297
Miembro del jurado 3	
Nombres y apellidos	NO APLICA
Tipo de documento	NO APLICA

Número de documento de identidad	NO APLICA
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.2.4.1 Física de Fenómenos para la Previsión de Desastres
Grupo de investigación	NO APLICA
Agencia de financiamiento	SIN FINANCIAMIENTO
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Facultad de Ciencias Físicas País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Centro poblado: No corresponde Urbanización: No corresponde Manzana y lote: No corresponde Calle: Av. Carlos Germán Amezaga #375 Latitud: -12.059129 Longitud: -77.081221
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2021 - 2023
URL de disciplinas OCDE	Geociencias, Multidisciplinar https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.05.01 Ciencias del medio ambiente https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.05.08 Oceanografía, Hidrología, Recursos hídricos https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.05.11



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD PRESENCIAL
PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN FÍSICA
CON MENCIÓN EN GEOFÍSICA

Siendo las 9:00 am del 5 de enero de 2024, en el salón 304 de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, se reunieron los siguientes miembros del Jurado Examinador:

Mg. César Augusto Aguirre Céspedes	(Presidente)
Mg. Luis Pablo Vilcapoma Lázaro	(Miembro interno)
Mg. Nick Jhonatan Moreno Moreno	(Miembro externo)
Dr. Cesar Omar Jimenez Tintaya	(Asesor)

Para la sustentación oral y pública de la tesis para optar el Grado Académico de Magíster en Física con mención en Geofísica, del Bach. Juan Pablo Alberto Avalos Carrión, con código de matrícula N° 19137001.

Después de darse lectura al expediente de Grado, en el que consta haberse cumplido con todas las disposiciones reglamentarias, los señores miembros del Jurado Examinador, atendieron a la exposición de la tesis titulada:

“Dinámica y modelado numérico del campo de la velocidad de flujo en un maremoto”

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado Examinador, los asistentes y el tesista se retiraron del salón 304, para que el presidente y los miembros del Jurado Examinador puedan deliberar y calificar.

Al término de la deliberación, el Mg. César Augusto Aguirre Céspedes invitó al tesista y a los asistentes a pasar al salón 304 para dar lectura a la evaluación de la sustentación. Obteniendo como resultado la calificación de:

<u>17</u>	<u>Diecisiete</u>	<u>Muy bueno</u>
(NÚMERO)	(LETRAS)	(ESCALA)

A continuación, el presidente del Jurado Examinador entrega el Acta de Sustentación de Tesis a la Unidad de Posgrado, para continuar el trámite correspondiente para obtener el Grado Académico de Magíster en Física con mención en Geofísica, del Bach. Juan Pablo Alberto Avalos Carrión.

Siendo las 10:50 pm, se levantó la sesión.



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
UNIDAD DE POSGRADO

Los miembros del Jurado Examinador suscriben el Acta de sustentación de tesis en la Ciudad de Lima, el 5 de enero de 2024.

Acta de Sustentación de Tesis del Bach. Juan Pablo Alberto Avalos Carrión.

Mg. César Augusto Aguirre Céspedes
Presidente

Mg. Luis Pablo Vilcapoma Lázaro
Miembro interno

Mg. Nick Jhonatan Moreno Moreno
Miembro externo

Dr. Cesar Omar Jimenez Tintaya
Asesor

CALIFICACIÓN OBTENIDA: Diecisiete (17) Muy buena



Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Físicas
UNIDAD DE POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo **Cesar Omar Jimenez Tintaya** en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen N° 012-UPG-FCF-2020, de fecha 26 de febrero de 2020, de la tesis de investigación, cuyo título es **“Dinámica y modelado numérico del campo de la velocidad de flujo en un maremoto”**, presentado por el bachiller **Juan Pablo Alberto Avalos Carrión** para optar el grado de Magíster en Física con mención en Geofísica.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de **2%** de similitud, nivel PERMITIDO para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado correspondiente.

Lima, 18 de agosto de 2023.

Firma del asesor:

D.N.I. N°: 08677351

Nombres y apellidos del asesor: Cesar Omar Jimenez Tintaya



Dedicatoria

A mis ascendientes en particular a mis padres por su apoyo y ser el pilar fundamental de todo lo que soy.

Agradecimientos

Al Dr. César Jiménez Tintaya por su labor de mentor y asesoría a lo largo del desarrollo de la tesis de licenciatura y del presente trabajo.

Expreso mi agradecimiento al Lic. Martín Calvo Chia por su labor de mentor y asesoría en las bases de los métodos numéricos y la geofísica.

Agradezco a la Mg. Nabil Moggiano Aburto por su labor de mentora y asesoría en las bases de la programación aplicada a los Tsunamis.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	2
1.3. El terremoto y maremoto de Perú de 1746	3
2. Fundamento Teórico	4
2.1. Conceptos Fundamentales de Maremotos	4
2.1.1. Velocidad de fase	4
2.1.2. Movimiento de las partículas de fluido	6
2.1.3. Velocidad de las partículas de fluido	7
2.1.4. Cerca a la costa	8
2.2. Generación de un maremoto	9
2.2.1. Momento sísmico	9
2.2.2. Campo de la deformación cosísmica	11
2.3. Propagación de un maremoto	13
2.3.1. Incremento de la altura de ola	13
2.3.2. Rapidez de fase y velocidad de flujo	15
2.3.3. Ecuaciones lineales de aguas someras	18
2.4. Interacción con la costa	19
2.4.1. Altura máxima de inundación	19
2.4.2. Ascenso y descenso del nivel del agua	22
2.4.3. Ecuaciones no lineales de aguas someras	23
2.4.4. Velocidad de las partículas de agua	24
3. Metodología	25
3.1. Modelado numérico	25
3.2. Área de estudio	26
3.2.1. Grillas anidadas	27

3.3.	Deformación del suelo oceánico	29
3.4.	Propagación	31
3.4.1.	Propagación frente a la bahía de la Costa Verde	33
3.5.	Inundación en Costa Verde	35
3.6.	Validación	36
3.6.1.	Criterios de validación de modelos de simulación	36
4.	Resultados	39
4.1.	Resultados	39
4.2.	Discusión	42
4.2.1.	Influencia de las islas	42
4.2.2.	Validación	44
4.2.3.	Criterio de confiabilidad en los resultados de un modelo numérico	45
5.	Conclusiones	47
5.1.	Conclusiones	47
5.2.	Trabajo futuro	48
A.	Ondas en el océano	49
A.1.	Cinemática de ondas	49
A.2.	Ondas gravitacionales de superficie	50
A.2.1.	Condiciones de frontera	53
A.2.2.	Solucion analítica	54
B.	Aguas someras. Maremotos	57
B.1.	Aproximación hidrostática y columnar	57
B.2.	Condiciones de frontera e integración	58
B.3.	Ecuaciones de aguas someras	60
C.	Esquema del modelado numérico	62
C.1.	Método de diferencias finitas	62
C.2.	Criterios en el estudio de la solución de un esquema numérico en diferencias finitas	64
C.3.	Ecuaciones hiperbólicas bidimensionales	64
C.4.	Dispersión	64
C.4.1.	Dispersión y disipación en ecuaciones diferenciales parciales . .	65
C.4.2.	Dispersión y disipación en ecuaciones de diferencias	66

D. Programación	69
D.1. Subrutina modificada, Fortran	69
D.2. Posprocesamiento, Python	74

Índice de figuras

2.1. Parámetros de una onda	5
2.2. Trayectoria de las partículas de fluido	6
2.3. Longitud de la trayectoria elíptica	7
2.4. Velocidad de flujo	7
2.5. Valor medio de la velocidad de flujo	8
2.6. Modelo de generación de las ondas de maremoto	10
2.7. Parámetros de una falla rectangular	12
2.8. Altura de ola y batimetría	15
2.9. Longitud de la trayectoria	15
2.10. Trayectoria elíptica	16
2.11. Superficie de la ola y batimetría	17
2.12. Teoría lineal de ondas largas	18
2.13. Olas rompiendo	19
2.14. Altura máxima de inundación	20
2.15. Ascenso y descenso del nivel del agua	22
2.16. Ascenso y descenso del nivel del agua, $\alpha = 1/20$	23
2.17. Ascenso y descenso del nivel del agua, $\alpha = 1/10$	23
3.1. Área de estudio en coordenadas geográficas	26
3.2. Área de estudio en proyección Azimutal Ortográfica	27
3.3. Ejemplo de dos grillas anidadas	27
3.4. Grillas anidadas A, B, C y D	28
3.5. Campo de la deformación cosísmica: Mapa de elevación	29
3.6. Vistas 3D del campo de la deformación	30
3.7. Velocidad de flujo en la propagación e inundación en Grilla D	34
4.1. Campo de la velocidad de flujo máxima	40
4.2. Campo de la rapidez de flujo máxima	41
4.3. Isóbatas en la bahía Costa Verde	44

A.1. Ondas gravitacionales de superficie	53
--	----

Índice de tablas

3.1. Parámetros de las grillas anidadas	28
3.2. CFL en las grillas A y D	33
4.1. Velocidad de fase y velocidad de flujo	42

Resumen

El impacto de un maremoto es causado por el arribo de agua a la costa, donde el proceso de inundación tiene lugar. La interacción con las estructuras costeras está determinada por la velocidad de las masas de agua. La velocidad cambia dependiendo de la batimetría y la topografía costera, teniendo un comportamiento no lineal.

La velocidad del agua, la velocidad de flujo, es difícil de medir, lo cual motiva el uso del modelado numérico. TUNAMI es el modelo numérico utilizado en las simulaciones de maremotos, el cual considera la propagación no lineal de ondas en la fase de inundación. TUNAMI escribe los valores del nivel del agua pero no escribe los valores de la velocidad de flujo. Con el fin de calcular y guardar los datos de la velocidad de flujo, se han implementado rutinas de programación.

En el presente trabajo se estudia la velocidad de flujo, módulo y dirección, en el proceso de inundación en el maremoto de Callao de 1746.

Los resultados muestran que los mayores valores de la velocidad de flujo son cercanos a 10 m/s. Se concluye que en las regiones costeras con mayor pendiente tienen lugar estos mayores valores. Debido al incremento de la velocidad de flujo, el comportamiento no lineal es relevante en el proceso de inundación.

Palabras Clave: Modelamiento de tsunami, Inundación por tsunami, Velocidad de flujo, Costa Verde

Abstract

The impact of a tsunami is due to the arrival of water at the coast, where the inundation process takes place. It is the velocity of the mass of water that determines the interaction with coastal structures. The velocity changes depending on the bathymetry and coastal topography, and includes nonlinear behavior.

The velocity of the mass of water, the flux velocity, is difficult to measure, this motivates the numerical modelling approach. TUNAMI is a well known numerical model used for tsunami simulations, it takes into account nonlinear wave propagation in the inundation phase. TUNAMI outputs the water level, but not the flux velocity. To calculate and save flux velocity data, several programming codes have been implemented.

The flux velocity, modulus and direction, in the inundation tsunami process is studied in the present work at the 1746 Callao Tsunami.

The highest flux velocity values are close to 10 m/s according to the results. It is concluded that it is in coastal regions with greater slope where these highest values take place. Because of the increasing flux velocity, the nonlinear behavior is relevant in the inundation process.

Keywords: Tsunami modeling, Tsunami flooding, flow velocity, Costa Verde

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Los **maremotos impactan negativamente** en zonas costeras, y en sus alrededores; un ejemplo reciente es el caso de la refinería La Pampilla en Callao, Perú, en enero del 2022. Por tanto, el estudio de la dinámica de un maremoto en áreas costeras es relevante. En Perú, **los primeros estudios** con la metodología del modelado numérico fueron realizados por el Lic. Manuel Sullón alrededor del 2007.

Un maremoto propaga grandes cantidades de **energía** en forma de energía **potencial** gravitatoria y energía **cinética** (relacionada con el momentum) de las partículas de agua. Por ejemplo, se estima que el **maremoto de Callao de 1746** involucró una energía equivalente a 36 718 bombas nucleares de Hiroshima ([Jiménez, 2015](#)). En un maremoto, la energía potencial gravitatoria se estudia mediante la **altura de la superficie del agua** y la energía cinética se estudia mediante la **velocidad de las partículas de agua**. En el modelo físico de maremotos la velocidad de las partículas de agua es llamada **velocidad de flujo**.

En el análisis del **impacto** de un maremoto en las estructuras costeras no solo es necesario conocer la altura y rapidez de fase de las olas en la superficie, también es necesario conocer la **velocidad de flujo**; ya que el daño estructural está determinado principalmente por la velocidad de las masas de agua ([Foytong et al, 2013](#) y [Song et al, 2017](#)).

Medir la velocidad de flujo en la inundación por maremoto presenta dificultades. [Fritz et al, 2006](#) estimaron las componentes 2D de la velocidad de flujo **indirectamente** gracias al desarrollo de **cámaras de video** con la resolución adecuada, en el maremoto del 26 de diciembre del 2004 del norte de Sumatra. Solo se tienen los

registros de video en determinados lugares en la inundación, por lo cual no se puede estimar las velocidades en las otras regiones de la inundación.

Frente a las limitaciones de la instalación en número suficiente y el área de registro de las cámaras de video, la **simulación numérica** ayuda a conocer las **velocidades de flujo**, en la propagación y en la inundación, en regiones de mayor extensión. El modelo numérico TUNAMI es conocido en el modelado de las alturas de ola en maremotos (Jiménez, 2015). Sin embargo, TUNAMI ha sido utilizado en el estudio de la velocidad de flujo por los siguientes autores: Ruangrassamee y Saelem, 2009, modelaron la **velocidad máxima en la propagación**, mostrando la dirección con vectores, en el Golfo de Tailandia, para el maremoto del 2004, realizando la **validación indirectamente** mediante la inundación. Koshimura et al, 2009, modelaron la **rapidez** en la inundación, en el maremoto del 2004 de **Sumatra**, con datos GEBCO de 1 minuto; validando los resultados con las estimaciones a partir de las cámaras de video de Fritz et al, 2006. Suppasri et al, 2011, modelaron la **rapidez** en la inundación, en el maremoto del 2004 de Sumatra, validando los resultados con estimaciones a partir de registros de video. Foytong et al, 2013, modelaron la **rapidez** de flujo en la inundación en el maremoto de Tohoku del 2011, validando los resultados con imágenes de cámaras de video.

Los trabajos mencionados presentan como resultados solo la **rapidez máxima** de la velocidad de flujo en la inundación. El presente trabajo estudia la dinámica de las velocidades de flujo en el **proceso de inundación** mostrando 4 **pasos de tiempo** y las **direcciones** mediante vectores unitarios, frente a las costas y dentro del área de inundación, para el caso del maremoto de Perú de 1746 (Jiménez, 2015), en el área Costa Verde.

1.2. Objetivos

El objetivo principal es determinar la distribución del campo de la **velocidad de flujo**, es decir las velocidades de las partículas de agua, en un maremoto **mediante la simulación numérica**, considerando como escenario el **Maremoto de Perú de 1746** en el área de **Costa Verde**. Tomando como base el modelo numérico TUNAMI.

Los objetivos específicos son:

- Determinar la relación entre las **alturas de ola y las velocidades de las partículas** de agua en un maremoto.

- Determinar las **regiones** donde se presentan las **velocidades máximas** y sus direcciones correspondientes en el maremoto de Perú de 1746 en el área de Costa Verde.

1.3. El terremoto y maremoto de Perú de 1746

Perú se localiza al oeste de América del Sur. Su territorio limita al norte con Ecuador y Colombia, al este con Brasil, al sur con Chile y Bolivia, y al oeste con el Océano Pacífico. Perú se encuentra en la zona llamada “**Cinturón Sísmico del Pacífico**”, que bordea los países bañados por el Océano Pacífico, una de las regiones de mayor actividad sísmica del planeta.

En el Perú la **historia** de los sismos y sus efectos se inician con la llegada de los españoles y la colonización. Los datos corresponden principalmente a la parte europea de la población. Por ejemplo las **crónicas**, reportes administrativos y testimonios generalmente están relacionados a los habitantes de origen español y sus propiedades (Dorbath et al, 1990). Las descripciones más completas sobre los sismos en Perú pertenecen a Silgado, 1978.

El terremoto del **28 de octubre de 1746** es el más destructivo que Lima ha experimentado en su historia. El terremoto ocurrió a las 22:30 (Silgado, 1978). La duración del terremoto no fue más de 3 minutos. Luego de media hora un **maremoto impactó en Callao**. Solo sobreviven 200 personas de 4 000 habitantes en Callao (Dorbath et al, 1990).

La máxima altura de ola en Callao fue de unos 10 m de alto y en la Costa verde, fue de unos 24 m de alto. La máxima distancia de inundación fue de unos 3.3 km (Jiménez, 2015). De las 23 embarcaciones que se encontraban en el puerto, 19 se hundieron y 4 quedaron en el suelo continental. Según un jesuita: Callao era un cumulo de arena y piedras. Solo dos puertas y unas secciones de muros, que cercaban el pueblo, marcaban su anterior ubicación. Se reportó una **permanente modificación de la costa**. Los puertos a lo largo de la costa quedaron dañados severamente (Dorbath et al, 1990).

Capítulo 2

Fundamento Teórico

2.1. Conceptos Fundamentales de Maremotos

En una onda sinusoidal de una sola frecuencia, en una región del océano, se identifican los **parámetros de una onda** (Figura 2.1). Las ondas que se propagan en el océano debido principalmente a la aceleración de la gravedad son llamadas ondas gravitacionales (Holton, 2004). Un maremoto se describe como un conjunto de **ondas gravitacionales de superficie**. Las causas más comunes de un maremoto son de **origen sísmico**. Un sismo con una dimensión horizontal de ruptura $L \sim 100$ km genera en la superficie del océano una elevación. La elevación de la superficie da origen a ondas con longitudes de onda λ del orden de la dimensión de la fuente sísmica L . La longitud de onda $\lambda \sim 100$ km excede la dimensión de la profundidad de los océanos, de $H \sim 4$ km (Levin y Nosov, 2009), de manera que se tiene la proporción $\lambda : H = 25 : 1$. La aproximación de aguas someras (Shallow Water), también llamada aproximación de onda larga (Kundu y Cohen, 1990), describe las ondas que cumplen la relación $\lambda \gg H$, por lo cual las **ondas de superficie de maremoto son descritas con la aproximación de aguas someras** (Levin y Nosov, 2009).

2.1.1. Velocidad de fase

La rapidez de fase v de las **ondas de superficie** representa la **rapidez de propagación de las ondas** (Pedlosky, 2003). En la aproximación de **aguas someras** la frecuencia angular de las ondas no depende del número de onda, por lo cual la rapidez de fase de las ondas $v_{fase} = \omega/k$ y la velocidad de grupo $v_{grupo} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ coinciden (B.25). Las ondas que cumplen $v_{fase} = v_{grupo}$ son llamadas ondas no dispersivas

(Holton, 2004). En un determinado punto en la superficie del océano, para una onda de **superficie** de forma arbitraria, tenemos

$$v = \sqrt{gh} \tag{2.1}$$

es la **rapidez de propagación de ondas de superficie de maremoto**, donde g es la aceleración de la gravedad y h es la profundidad (Levin y Nosov, 2009). Con $g=9.8 \text{ m/s}^2$ y $h=4\ 000 \text{ m}$, tenemos una rapidez de $\sim 198 \text{ m/s}$. La rapidez de fase v no sigue las reglas de la adición vectorial (Pedlosky, 2003 y Kundu y Cohen, 1990).

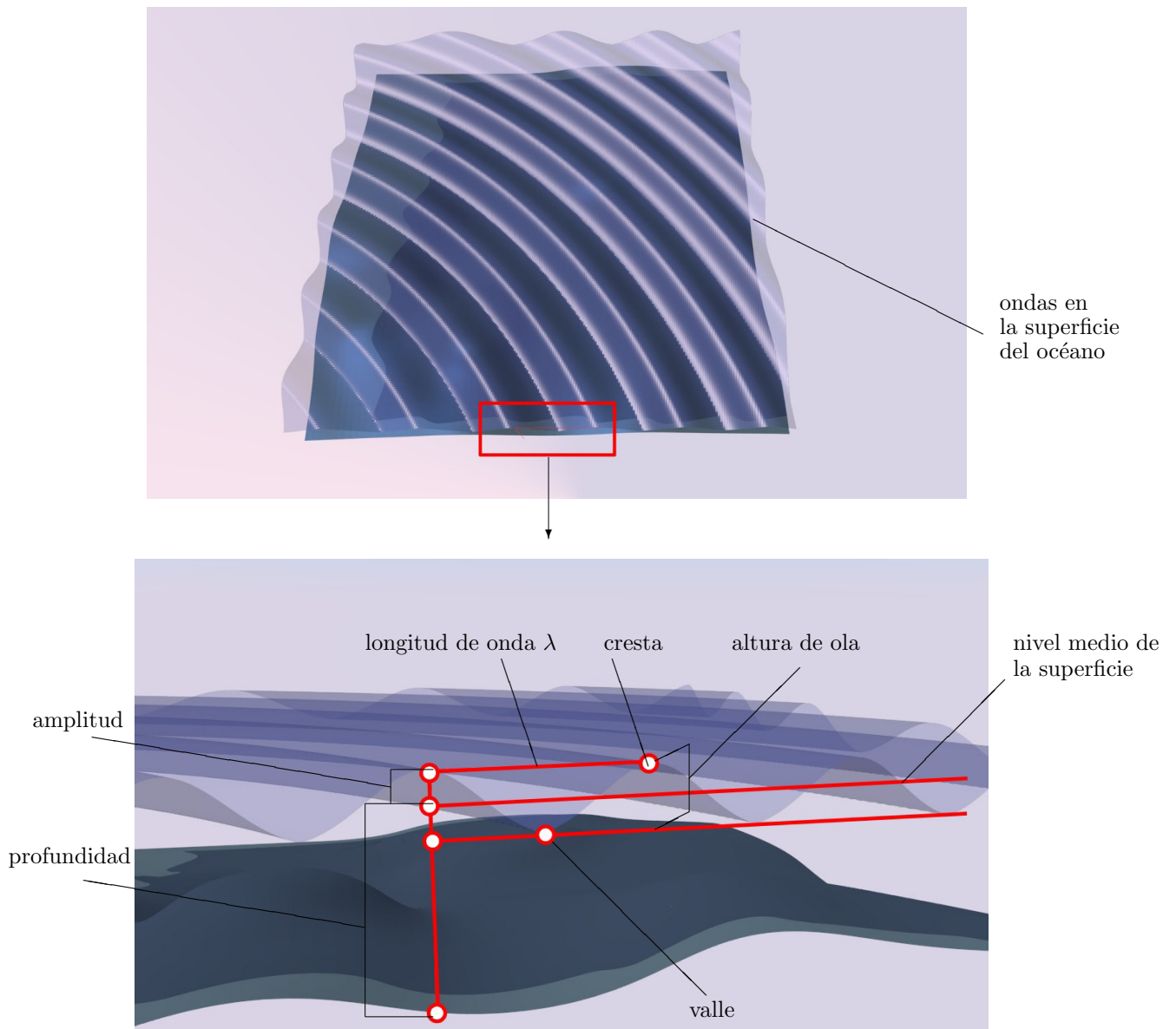


Figura 2.1: Parámetros de una onda en la superficie del océano (Avalos, 2019).

2.1.2. Movimiento de las partículas de fluido

En las ondas de superficie, las masas elementales del fluido siguen una trayectoria **oscilatoria elíptica** como resultado de la fuerza restauradora, la aceleración de la gravedad. El movimiento de las partículas origina las ondas de marmoto en **la superficie del océano**. En la Figura 2.2, donde se observa la trayectoria de una partícula de fluido localizada cerca a la superficie, notamos lo siguiente (Kundu y Cohen, 1990):

- En la cresta la dirección de las partículas de fluido coinciden con la de propagación de la ola.
- En el valle la dirección de las partículas de fluido es opuesta a la dirección de propagación de la ola

En la Figura 2.2, la **proporción** en la ola izquierda es $\eta : \lambda : h = 0.000025 : 25 : 1$ (tomando $\eta = 0.1$ m, $\lambda = 100\ 000$ m, $h = 4\ 000$ m) y en la ola derecha es $\eta : \lambda : h = 0.01 : 25 : 1$ (tomando $\eta = 10$ m, $\lambda = 25\ 000$ m, $h = 1\ 000$ m)

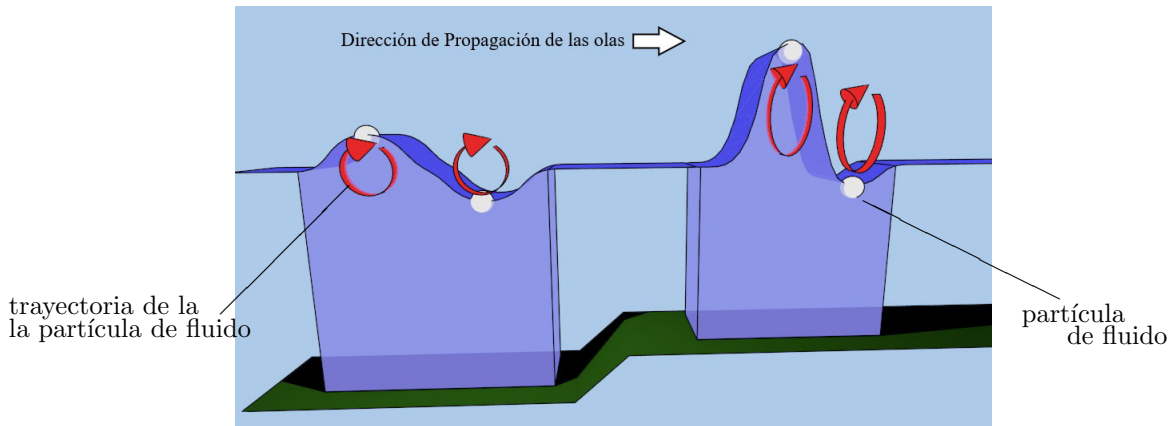


Figura 2.2: El esquema muestra la trayectoria de las partículas de agua (Avalos, 2019).

Sea ℓ la **longitud de la trayectoria elíptica**, de una partícula de fluido; en la superficie η , la longitud ℓ se puede “desenvolver” y corresponde a la **trayectoria sobre la superficie**. La proyección en la horizontal, de esta trayectoria, es la **longitud de onda** λ . En la Figura 2.3, desde un punto P en la trayectoria elíptica, se desenvuelve ℓ sobre η . La cinemática sobre ℓ se explica en la subsección 2.3.2.

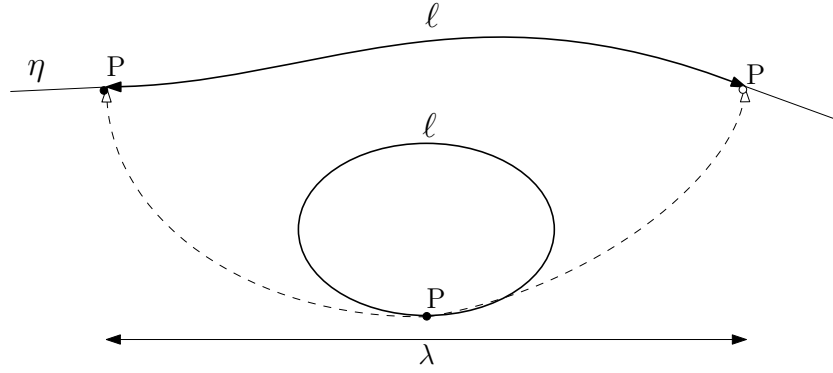


Figura 2.3: Se observa que se puede “desenvolver” la longitud de la trayectoria elíptica ℓ sobre la superficie η (elaboración propia).

2.1.3. Velocidad de las partículas de fluido

En las **ondas gravitacionales de superficie**, para una deformación inicial de la superficie η en forma de una onda armónica, se tiene la solución analítica de la velocidad de las partículas de fluido, por ejemplo una componente es (A.35)

$$u = A\omega \frac{k}{K} \frac{\cosh(K(z + H_0))}{\sinh(KH_0)} \cos(kx + ly - \omega t) \quad (2.2)$$

donde A es la amplitud de la función armónica η , y H_0 es la profundidad (Pedlosky, 2003). Por tanto la velocidad de las partículas de fluido es función de la **altura de ola** y de la **profundidad**. En la Figura 2.4 se representa u . En un maremoto, la velocidad de las partículas de fluido u definen un flujo de descarga M (B.9)

$$M = \int_{-H}^{\eta} u dz \quad (2.3)$$

por lo cual la **velocidad de las partículas de fluido es la velocidad de flujo**. Las ecuaciones de aguas someras (sección B.3) se expresan mediante el flujo de descarga (Goto y Ogawa, 1997).

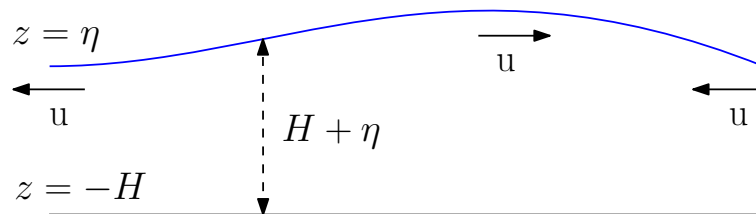


Figura 2.4: Velocidad de flujo u graficada en puntos cerca a la superficie (elaboración propia).

2.1.4. Cerca a la costa

Al aproximarse a la costa, donde **disminuye la profundidad** del océano, la **amplitud de onda del maremoto se incrementa** (Arnott, 2010 y Salmon, 2016). El incremento de la amplitud de las ondas de superficie es lo que determina el peligro en las zonas costeras. El maremoto en las costas está relacionado con: la inundación en zonas cercanas a la costa, la erosión y el impacto de las ondas en las construcciones. En el impacto en las construcciones es particularmente útil el conocimiento del campo de la **velocidad de flujo**, de las partículas de agua, del maremoto (Song et al, 2017). Sacando u , como un valor medio (ver Figura 2.5), de la integral de la ecuación 2.3, se tiene la ecuación B.9

$$M = \int_{-H}^{\eta} u dz = \bar{u}(\eta + H)$$

Si consideramos M constante (por tanto η también constante), siguiendo un trayecto $< \ell$, de una determinada partícula de agua, una disminución de la profundidad se traduce en un aumento de u . Con esto se puede decir que; al **incrementarse la altura de ola se incrementa la rapidez de las partículas de agua**. De lo anterior se concluye (Lipa et al, 2006):

La velocidad de flujo es mayor cerca a la costa. (2.4)

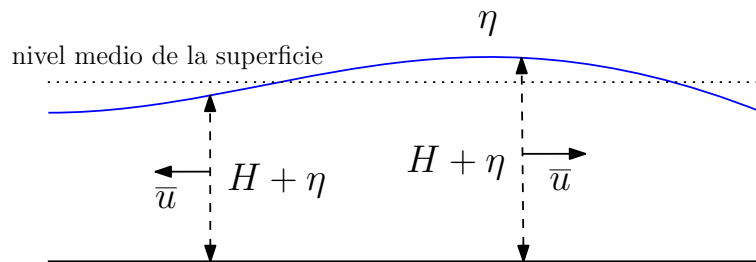


Figura 2.5: Valor medio de la velocidad de flujo \bar{u} (elaboración propia).

Se distinguen tradicionalmente los siguientes procesos en un maremoto, siguiendo la dirección desde el lugar donde se genera hasta su arribo a la costa: generación de las ondas, propagación en el océano y la interacción con la costa (Levin y Nosov, 2009).

2.2. Generación de un maremoto

La principal causa de los maremotos es el **desplazamiento vertical** de regiones del suelo oceánico debido a sismos. Los maremotos así generados son llamados *maremotos de origen sismotectónico*. En la simulación de maremotos de origen sismotectónico se aplica el siguiente método:

Se considera que un sismo causa una deformación repentina del fondo oceánico, el llamado campo de la deformación cosísmica. Se asume una deformación de la superficie del océano que ocurre simultáneamente al desplazamiento del suelo. La forma de la perturbación se asume similar a la deformación del fondo oceánico. La perturbación de la superficie del océano así obtenida es aplicada como la **condición inicial en la propagación** de un maremoto (Levin y Nosov, 2009). Estos pasos están representados en la Figura 2.6.

2.2.1. Momento sísmico

La cantidad física utilizada en el estudio de los sismos es el **momento sísmico** M_0 . Sea el sistema de coordenadas rectangular (x_1, x_2, x_3) , para un desplazamiento tangencial, en dirección x_1 , en los puntos con coordenadas $x_3 > 0$ (respecto a los puntos de coordenadas $x_3 < 0$), con **discontinuidad** $[U_1]$ y siendo μ el *módulo de rigidez de la zona de ruptura*, tenemos para M_0

$$M_0 = \mu \int [U_1] dx_1 dx_2 \quad (2.5)$$

donde la integral se puede **interpretar como** el producto del *área de la superficie de ruptura* S y la *dislocación media* \bar{u} sobre esta superficie. Así tenemos $M_0 = \mu \bar{u} S$ (Aki, 1966). Usando la notación D para la **dislocación media** (ver Figura 2.7), definimos el **momento sísmico**

$$M_0 = \mu S D \quad (2.6)$$

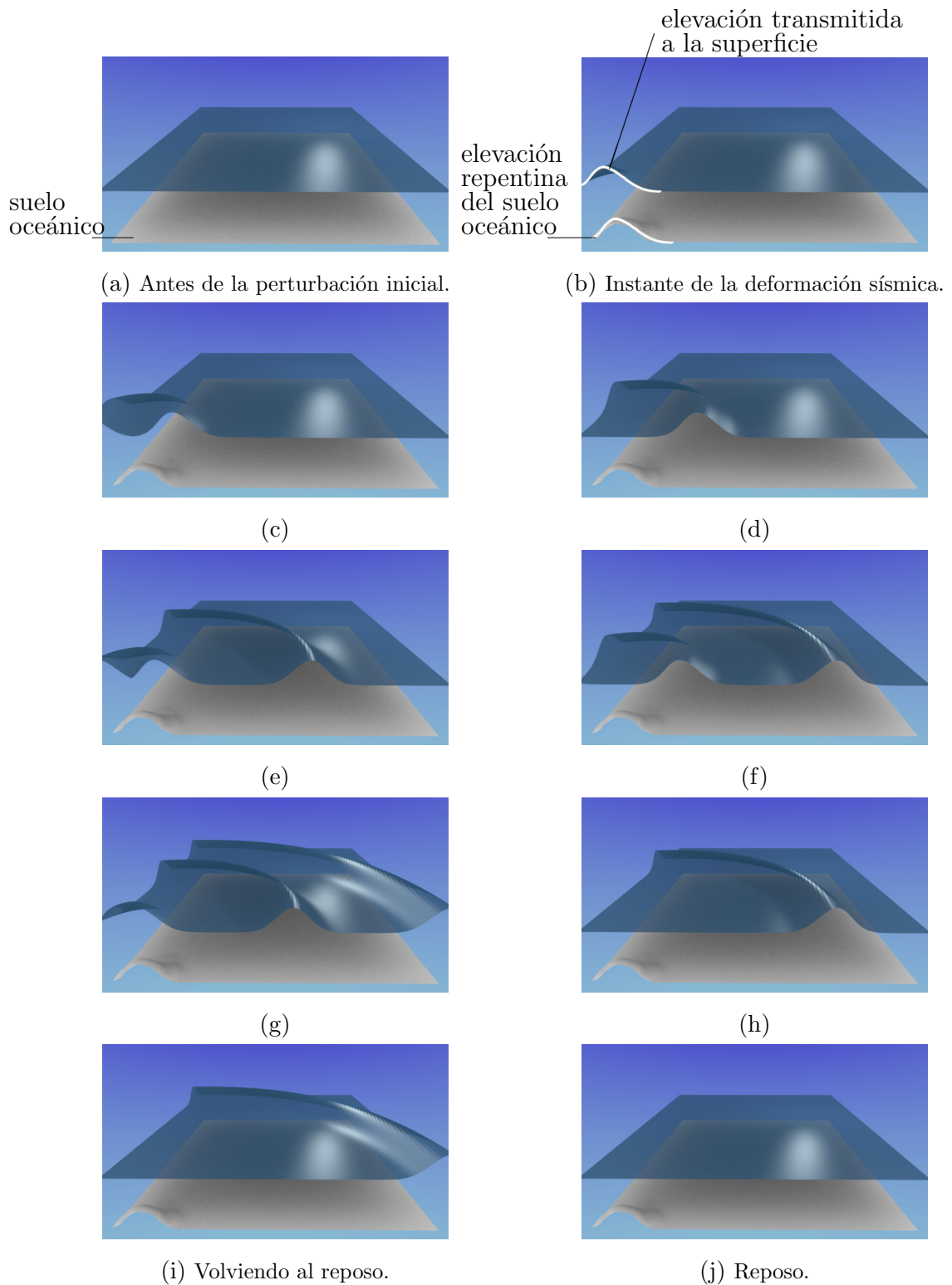


Figura 2.6: Modelo de generación de las ondas de maremoto. En (2.6a) la superficie del océano está en reposo, luego (2.6b) se produce la elevación del suelo oceánico la cual se transmite a la superficie instantáneamente y sin distorsiones. Por acción de la aceleración de la gravedad esta perturbación se desplaza en la superficie (2.6c hasta 2.6i) y luego de un tiempo (en 2.6j) se alcanza el reposo inicial (Avalos, 2019).

No todos las elevaciones del fondo marino por sismo causan maremotos. [Talandier, 1993](#) (para el área de la Polinesia Francesa) indica las siguientes **posibilidades de generación** de un maremoto en función del momento sísmico M_0 :

$10^{20} < M_0 < 10^{21}$ Nm; ya es probable la presencia de un maremoto

$10^{21} < M_0 < 5 \times 10^{21}$ Nm; probablemente se generan maremotos

2×10^{22} Nm $< M_0$; se desarrollan maremotos destructivos

El momento sísmico del terremoto de Perú de 1746 es de $3,98 \times 10^{22}$ Nm ([Jiménez, 2015](#)).

2.2.2. Campo de la deformación cosísmica

Un sismo esta relacionado a una dislocación. Se considera la dislocación Δu_k llamada **dislocación de Volterra, 1907**, expresada en la ecuación del campo de desplazamiento u_m . El campo de desplazamiento es función del tensor de esfuerzo τ_{kl}^m , para una fuerza actuando en la dirección m :

$$\tau_{kl}^m = \lambda \delta_{kl} u_{n,n}^m + \mu (u_{l,k}^m + u_{k,l}^m)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé y $u_{n,n}^m$ es el tensor de desplazamiento estático (tensor Somigliana). El campo de desplazamiento estático considera un medio homogéneo, isotrópico, semi-infinito y la fuerza elástica de Hooke como la única fuerza entre las partículas del medio.

Con la ecuación de Volterra se tiene el **campo de desplazamiento** u_m , $m = 1, 2, 3$, en $Q(x, y, z)$ ([Steketee, 1958](#))

$$u_m(Q) = \iint_{\Sigma} \Delta u_k(P) \tau_{kl}^m(P, Q) \nu_l(P) d\Sigma$$

donde $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ son los puntos sobre la superficie de ruptura Σ , la cual se define con las componentes ν_l . Al evaluar el campo de desplazamiento u_m , en la **superficie del suelo**, se tiene el campo de la deformación cosísmica. Con la formulación de [Okada, 1992](#), se calcula el campo de la deformación cosísmica. La componente vertical del campo de la deformación cosísmica u_3 es la **condición inicial en la propagación** de un maremoto, como se indicó al inicio de la sección [2.2](#).

Okada, 1992, considera una falla rectangular Σ definida por los siguientes parámetros, en el bloque de suelo inferior (Figura 2.7)

H: profundidad de la falla

L: longitud de la falla Define la dirección azimutal.

W: ancho de la falla

D: distancia de dislocación (slip vector) El módulo D del vector desplazamiento \vec{D} .

ϕ : ángulo azimutal (strike) Medido desde el Norte ($0^0 \leq \phi < 360^0$).

δ : ángulo de buzamiento (dip) ($0^0 \leq \delta \leq 90^0$)

λ : ángulo de deslizamiento (rake) En sentido antihorario ($-180^0 < \lambda \leq 180^0$).

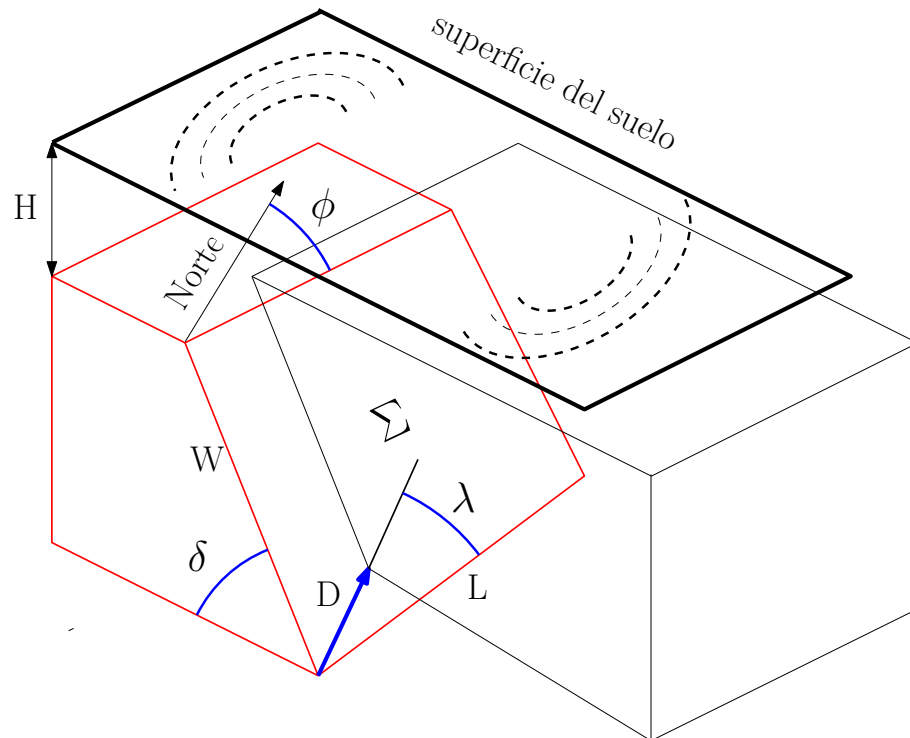


Figura 2.7: Parámetros que definen una falla rectangular Σ . El campo de la deformación u_3 calculado en “la superficie del suelo” (representado con la línea - - -) es la **condición inicial en la propagación** de un maremoto (elaboración propia)

2.3. Propagación de un maremoto

Los maremotos se clasifican según la distancia entre su lugar de origen y la costa (o el tiempo que tarda el maremoto en recorrer esta distancia) (Jiménez, 2015) en:

Maremotos lejanos Cuando la distancia entre el área de generación y la costa es mayor a 1000 km (a medio día o más de tiempo de viaje).

Maremotos locales Cuando la distancia entre el área de generación y la costa es menor de 1000 km o cuando el tiempo de viaje es de menos de una hora.

La amplitud de las ondas de maremoto $A \sim 0,1-1$ m es menor que la profundidad del océano $H \sim 1\ 000$ m y que la longitud de onda $\lambda \sim 100\ 000$ m. El parámetro no lineal $A/H \ll 1$ permite que se aplique la *teoría lineal de ondas largas*¹, la cual es la versión más simple de ondas gravitacionales de superficie (Levin y Nosov, 2009). El término *lineal* se refiere a la ecuación hidrodinámica ideal, la cual solo tiene términos lineales, y el término *ondas largas* se refiere a la relación $\lambda \gg H$ (Apéndices A y B). Como límite del menor valor de λ respecto de H , se puede considerar $\lambda = 10H$, pues para $\lambda \approx 10H$ el error en la aproximación lineal es de 7% (Satake, 1987).

La teoría lineal de ondas largas describe la propagación de maremotos locales. En la propagación de maremotos lejanos los efectos no lineales son de importancia (Levin y Nosov, 2009). Este trabajo considera la **propagación de maremotos locales**.

2.3.1. Incremento de la altura de ola

Partiendo de las ecuaciones de aguas someras

En las ecuaciones de aguas someras integradas del apéndice (B.13), (B.14) y (B.15), simplificadas al caso unidimensional con $N = 0$ y $\eta = \eta(x)$, se puede mostrar que

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

¹También llamada *aproximación lineal de aguas someras* (Kundu y Cohen, 1990). Goto y Ogawa, 1997, usan el término *ondas largas* para referirse al fenómeno y *aguas someras* para referirse a la teoría.

lo que justifica que M tenga forma de una función seno o coseno. En función de la **perturbación del nivel medio de la superficie η** , tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial t} \approx -H \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.8)$$

$$\eta(x, t) \propto \frac{1}{H} \cos(x, t) \quad (2.9)$$

donde H es la batimetría (Avalos, 2019). Lo cual muestra que **al disminuir la profundidad aumenta la altura de ola**.

Partiendo de la conservación de masa

En dos puntos de profundidades diferentes se tiene dos partículas de fluido en la superficie, a cada una le corresponde una columna de fluido de volumen V_i (determinado por la profundidad y la longitud de onda λ) debido a su movimiento elíptico. Considerando que:

- a) Si el fluido es incompresible, el desplazamiento oscilatorio del volumen V de mayor profundidad causa el desplazamiento de un mismo volumen V de menor profundidad.
- b) En la relación $v = \lambda f$ se reemplaza la rapidez de fase

$$\sqrt{gh} = \lambda f \quad (2.10)$$

Si no hay presencia de fuentes ni sumideros, la frecuencia f de las olas es constante (Lipa et al, 2006), indicando que al disminuir la profundidad, disminuye la longitud de onda.

se tiene de a) y b) que **al disminuir la profundidad**, la longitud de onda disminuye y para mantener el volumen constante se **incrementa la altura de ola** (Figura 2.8). La proporción entre la altura de ola en el fondo oceánico y cerca a la costa es por ejemplo de 0,1: 2 (Avalos, 2019) .

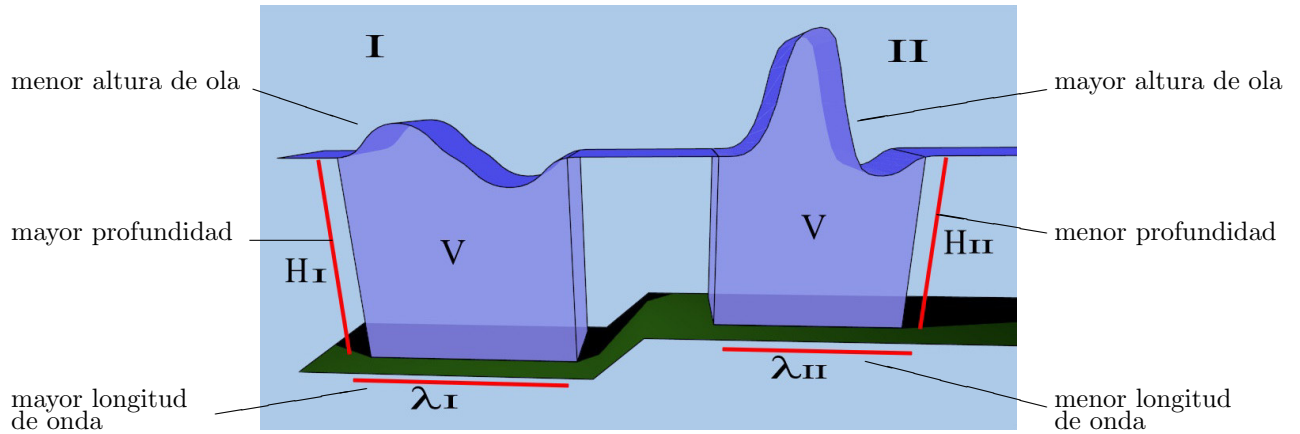


Figura 2.8: De la conservación de la masa, la altura de la ola es mayor en la región de menor profundidad II. El esquema no está a escala, la relación es $\lambda : H = 25 : 1$ (elaboración propia).

2.3.2. Rapidez de fase y velocidad de flujo

Buscamos mostrar que al disminuir la rapidez de fase, se incrementa la velocidad de flujo. Para esto se buscan expresiones del tipo $u = u(\ell)$ y $\lambda = \lambda(\ell)$, donde ℓ es la longitud de la trayectoria elíptica (Figuras 2.3 y 2.9).

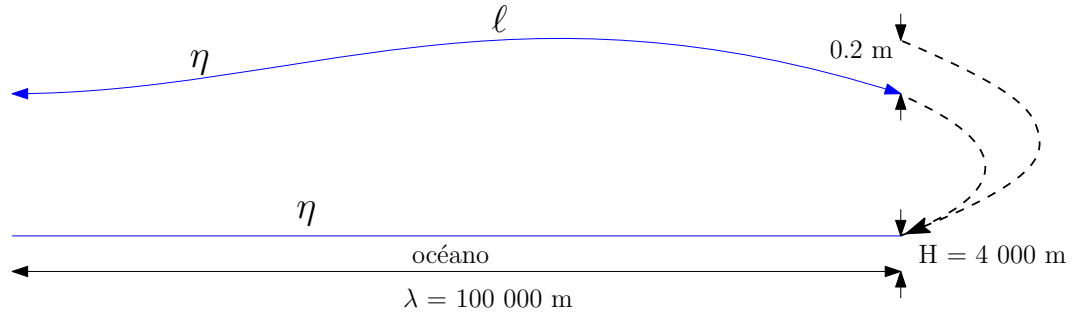


Figura 2.9: Longitud de la trayectoria. Se observa la proporción entre ℓ , η , λ y H en un punto con 4 000 m de profundidad. Se tiene una ampliación de la dimensión vertical de η (elaboración propia).

Primero buscamos $u = u(\ell)$; para una partícula de fluido, en las ondas gravitacionales de superficie, tenemos la ecuación de la trayectoria elíptica en el plano XZ (Kundu y Cohen, 1990). Evaluamos la trayectoria elíptica cerca a la superficie, con centro en $z = 0$ ²

$$\frac{x^2}{\left[A \frac{\cosh(KH)}{\sinh(KH)} \right]^2} + \frac{z^2}{\left[A \frac{\sinh(KH)}{\sinh(KH)} \right]^2} = 1$$

²es equivalente a evaluar en $z = \eta$

$$\frac{x^2}{\left[A \frac{\cosh(KH)}{\sinh(KH)}\right]^2} + \frac{z^2}{A^2} = 1$$

aplicando la condición de ondas largas $\frac{H}{\lambda} \ll 1 \rightarrow KH \ll 1$

$$\frac{x^2}{\left[A \frac{1}{KH}\right]^2} + \frac{z^2}{A^2} = 1$$

donde el semieje menor es A , en la vertical, y el semieje mayor es $A \frac{1}{KH}$, en la horizontal (Figura 2.10). La longitud de la trayectoria ℓ es el perímetro de la elipse. Aproximando el perímetro a 4 veces la hipotenusa del triángulo formado por los semiejes, y aplicando la condición de ondas largas

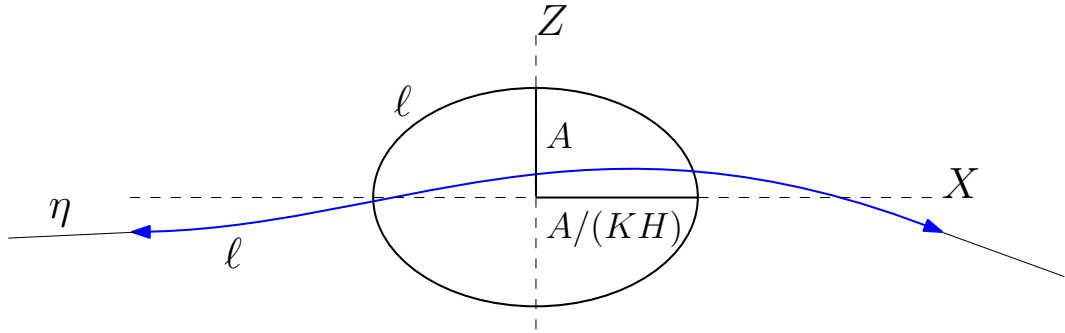


Figura 2.10: Trayectoria elíptica con la aplicación de la condición de ondas largas $KH \ll 1$ (elaboración propia).

$$\ell = 4A \sqrt{1 + \frac{1}{(KH)^2}} \approx 4A \left(1 + \frac{1}{2(KH)^2}\right) \quad (2.11)$$

Expresando la velocidad de flujo (2.2) en el plano XZ en función de ℓ , con la condición de ondas largas

$$u \approx A\omega \sqrt{\frac{\ell - 4A}{2A}} \cos(kx + ly - \omega t) \quad (2.12)$$

con el máximo valor de u , tenemos la velocidad de flujo para aguas someras en función de ℓ , ω y A .

$$u \approx A\omega \sqrt{\frac{\ell - 4A}{2A}} \quad (2.13)$$

$$u \approx \omega \sqrt{\frac{A\ell - 4A^2}{2}} \quad (2.14)$$

De 2.14 se tiene que $u \propto \ell$ por lo cual la **velocidad de flujo aumenta al aumentar la longitud de la trayectoria** (y al aumentar la amplitud de la onda). En la Figura 2.11 se observa que la longitud de la trayectoria ℓ aumenta al disminuir la profundidad.

Ahora buscamos $\lambda = \lambda(\ell)$; despejamos H de la relación (2.10) para aguas someras $\sqrt{gH} = \lambda f$ y reemplazamos en (2.11) de donde se tiene

$$\lambda \propto \frac{1}{\ell} \quad (2.15)$$

Por lo cual la **longitud de la trayectoria aumenta al disminuir λ** .

De (2.10), (2.15) y (2.14) finalmente tenemos la secuencia:

$$H \propto v \propto \lambda \propto \frac{1}{\ell} \propto \frac{1}{A} \propto \frac{1}{u} \quad (2.16)$$

Por tanto tenemos que (Lipa et al, 2006):

Al disminuir la rapidez de fase, la velocidad de flujo se incrementa

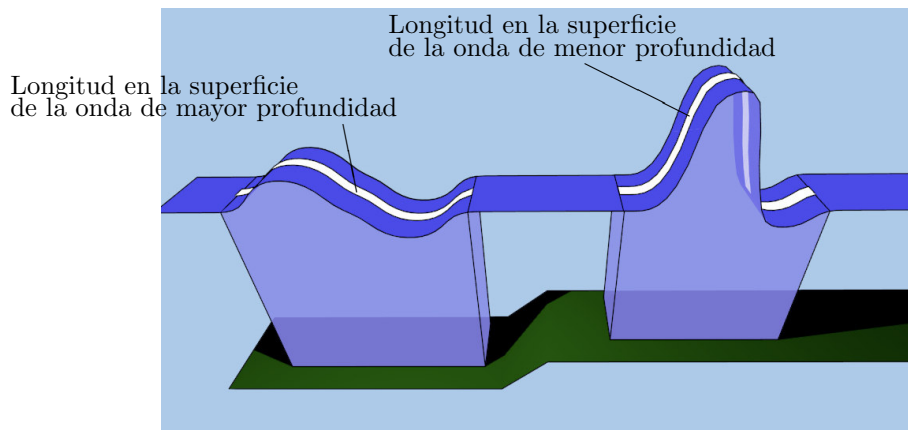


Figura 2.11: El esquema muestra la longitud de una curva ℓ en la superficie que, en la aproximación lineal, es igual al recorrido de una partícula sobre la superficie. Se representa ℓ en dos olas a diferentes profundidades.

2.3.3. Ecuaciones lineales de aguas someras

Las ecuaciones de la teoría lineal de ondas largas, las cuales se utilizan para solucionar las ecuaciones de ondas gravitacionales de superficie, sin considerar los términos de Coriolis, los términos no lineales ni la fricción, son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.17b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (2.17c)$$

con las coordenadas x y y en la superficie del fluido, z la coordenada vertical, t el tiempo, η la perturbación del nivel de la superficie, u y v las componentes horizontales de la Velocidad de las partículas de fluido, $H(x, y)$ la profundidad, $M = \int_{-H}^{\eta} u dz$ y $N = \int_{-H}^{\eta} v dz$ (Figura 2.12).

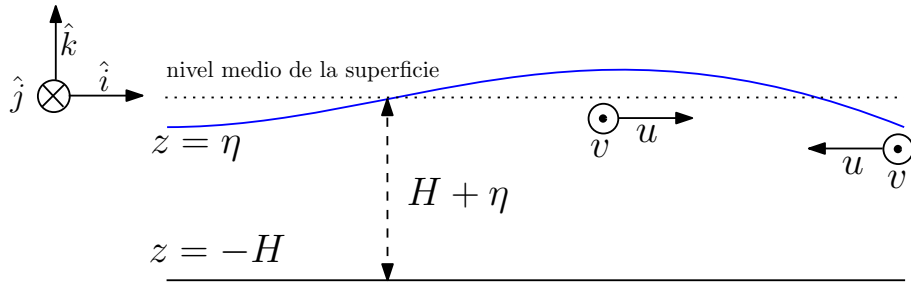


Figura 2.12: El esquema muestra las variables en las ecuaciones de la teoría lineal de ondas largas. \odot y \otimes son vectores que salen y entran a la página respectivamente.

Al aplicar la condición de que las componentes u y v son independientes de z , se tienen las ecuaciones de aguas someras lineales ((B.13), (B.14) y (B.15)).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial}{\partial y} N = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$M = \bar{u}(\eta + H) dz$, $N = \bar{v}(\eta + H) dz$, siendo los valores medios en la vertical \bar{u} y \bar{v} .

2.4. Interacción con la costa

Al aproximarse las olas hacia la costa la profundidad del océano disminuye a la vez que la amplitud de las olas se incrementa ³. Al llegar a la costa las olas rompen. Son tres formas (Figura 2.13) en las que las olas pueden romper (Levin y Nosov, 2009):

- *Descrestamiento* ⁴ (spilling). La cresta de la ola rompe y la espuma desciende por la pendiente frontal. Suele darse en fondos ligeramente inclinados.
- *Voluta* (plunging). La cresta sobrepasa el valle, se curva e impacta en la pendiente frontal disipando energía (Mangor et al, 2017). Suele darse en fondos inclinados.
- *Colapso* (surging). La ola inunda la costa sin romper. Suele darse en fondos con alta inclinación. Una gran parte de la energía de la ola es reflejada en lugar de ser disipada (Mangor et al, 2017).



Figura 2.13: Olas rompiendo. De izquierda a derecha: Descrestamiento, voluta y colapso. En la definición de colapso, la ola no rompe propiamente (elaboración propia).

2.4.1. Altura máxima de inundación

La máxima altura que la superficie del agua alcanza en la costa es llamada *altura máxima de inundación* R (run up en Inglés). R se alcanza al romper la ola. En general los maremotos inundan la costa mediante el *colapso*, sin romper. En la Figura 2.14 vemos los parámetros que intervienen en el ascenso de la ola hacia la altura máxima.

³Este proceso es llamado shoaling (Arnott, 2010).

⁴Equivalente en español (Ortiz, 2015).

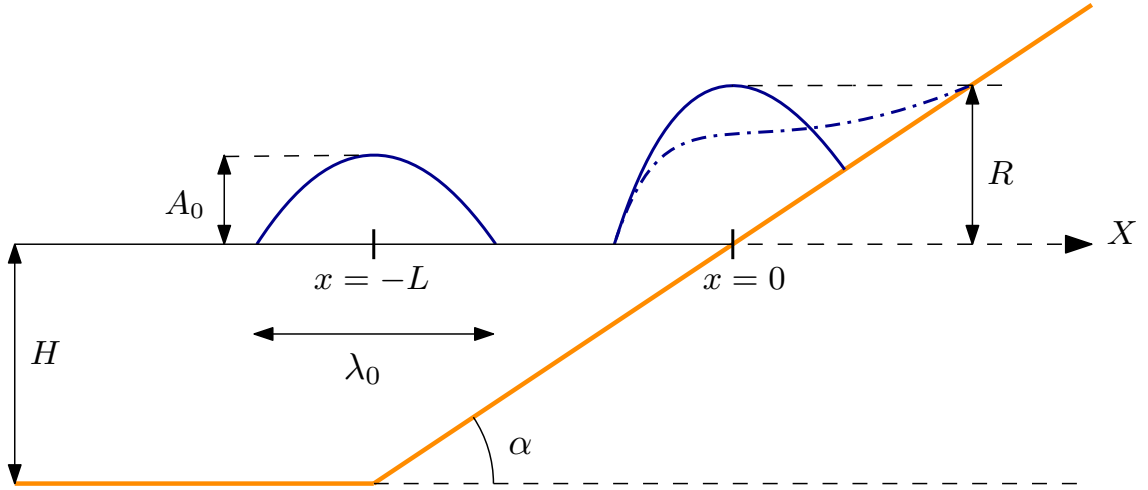


Figura 2.14: Altura máxima de inundación: desde mar adentro se aproxima a la costa una onda de amplitud A_0 . Al llegar a la línea de costa, la amplitud cambia a R , la cual se considera la **altura máxima de inundación** (elaboración propia).

Pared vertical

Para una amplitud de onda A_0 que se acerca a un pared vertical, la teoría lineal de ondas da R

$$R_L = 2A_0 \quad (2.18)$$

Al aproximarse a la costa, el parámetro lineal ya no cumple $A/H \ll 1$. Aplicando la teoría no lineal se tiene (en función de la amplitud lejos de la costa A_0)

$$R_N = 4H \left(1 + \frac{A_0}{H} - \left(1 + \frac{A_0}{H} \right)^{1/2} \right) \quad (2.19)$$

ya que la amplitud A_0 está lejos de la costa, se cumple la condición $\frac{A_0}{H} \ll 1$; aplicada en R_N se tiene $R_N = 2A_0$, lo cual indica que no es relevante la consideración del caso no lineal, pues da el mismo valor que R_L (Levin y Nosov, 2009).

Pendiente lineal

La solución en forma de onda $\eta(x, t)$, de la ecuación lineal de aguas someras sobre un suelo con pendiente lineal (Figura 2.14), es conocida, y tiene una amplitud A_{J0} . Lejos de la costa la onda $\eta(x, t)$ se puede representar como la superposición de dos ondas senoidales, con amplitud $A(x)$, que se propagan en sentido opuesto. Del análisis no lineal de altura máxima resulta que: la altura máxima depende linealmente de la amplitud de la ola cuando está mar adentro (Levin y Nosov, 2009). Debido a esta

dependencia, se justifica considerar una relación lineal entre A_{J0} y $A(x)$, resultando (Didenkulova et al, 2007) ⁵

$$A(x) = R \left(\frac{\alpha g}{4^2 \pi^2 \omega^2 |x|} \right)^{1/4} \quad (2.20)$$

donde R es la máxima amplitud de onda (en la línea de costa en reposo $x = 0$), ω es la frecuencia angular, α es la pendiente, con la relación de dispersión $\omega = vk$. El factor de amplificación entre R y la amplitud inicial A_0 , en el punto fijo $|x| = L$, para una onda que se aproxima a la costa con longitud de onda λ_0 , se encuentra a partir de (2.20) (Didenkulova et al, 2008)

$$\frac{R}{A_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{\lambda_0}} \quad (2.21)$$

Se tiene la altura máxima de inundación (Figura 2.14)

$$R = A_0 2\pi \left(\frac{2L}{\lambda} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

Sobre un suelo con pendiente lineal α , coinciden las soluciones del nivel máximo de la superficie $\eta(x, t)$, de la ecuación no lineal y lineal de aguas someras. Esta onda $\eta(x, t)$ se asume simétrica, es decir, la inclinación es la misma delante y detrás de la superficie de la onda.

En la propagación de ondas largas no lineales se presentan **deformaciones en la forma superficial de la onda**. Estas ondas tienen el frente más inclinado que la parte posterior. Aplicando la teoría no lineal, se tiene la siguiente aproximación para el valor máximo de la altura máxima de la ola

$$R_{max} = \xi_0 2\pi \left(\frac{2Ls}{\lambda_0 s_0} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

donde s_0 es la pendiente de la ola cuando está mar adentro, s es la pendiente en $x = L$ (L es el punto donde la pendiente se encuentra con el suelo plano), es decir cuando la ola empieza a “escalar” la pendiente. La expresión para R_{max} muestra que la pendiente de la ola es el parámetro más influyente en la altura máxima de inundación. De todas las olas con una misma altura y longitud de onda, **las olas con mayor pendiente en el frente ingresan una mayor distancia en las zonas costeras** (Didenkulova et al, 2007).

⁵En Didenkulova et al, 2007, falta “4²” en el denominador.

2.4.2. Ascenso y descenso del nivel del agua

El enfoque lagrangiano tiene las siguientes ventajas

- Es simple seguir el movimiento del frente de onda
- Las condiciones de frontera en el fondo y la superficie se satisfacen automáticamente
- En cierta medida los efectos no lineales están incluidos incluso si se usan ecuaciones lineales

Sea un fluido donde las olas no rompen, no se considera la viscosidad y se toma el caso unidimensional (dirección X); se tienen las siguientes expresiones, en el caso de un suelo con **pendiente lineal** α , para la perturbación del nivel de la **superficie** $\eta(a, t)$ y su coordenada $X(a, t)$ (Fujima, 2007):

$$\eta = -RJ_0 \left(2\omega \sqrt{\frac{a}{\alpha g}} \right) \cos(\omega t) \quad (2.24)$$

$$X = a + \frac{R}{\sigma} \sqrt{\frac{g}{\alpha a}} J_1 \left(2\omega \sqrt{\frac{a}{\alpha g}} \right) \cos(\omega t) \quad (2.25)$$

donde a es el parámetro tomado en el enfoque lagrangiano, J_0 y J_1 son las funciones de Bessel. En la Figura 2.15 tenemos un esquema de $\eta(X)$. En la Figura 2.16 tenemos la gráfica $\eta(X)$, a partir de las ecuaciones 2.24 y 2.25, donde se muestra el **proceso de colapso** mediante el cual se alcanza la **altura máxima R** . Donde la pendiente es mayor, Figura 2.17, se observa una mayor altura de ola en puntos mar adentro lejos de costa, por ejemplo a 1 500 m de la costa.

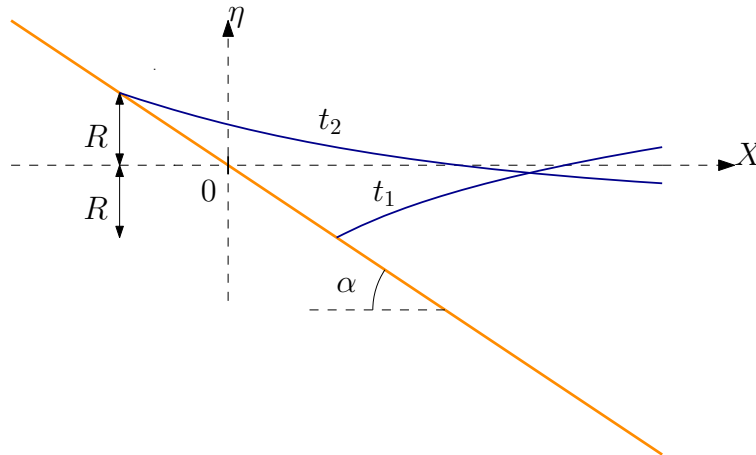


Figura 2.15: Nivel de la superficie $\eta(x)$ en el ascenso y descenso del nivel del agua, en los tiempos t_1 y t_2 (elaboración propia).

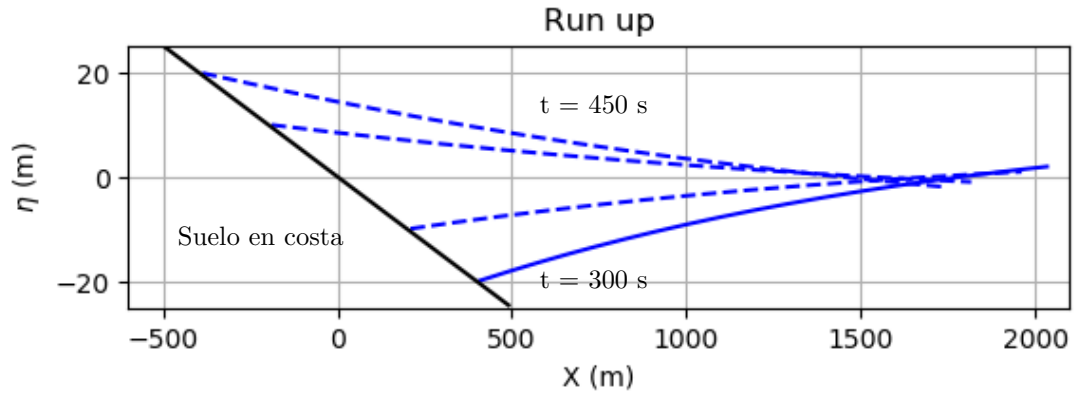


Figura 2.16: Ascenso y descenso del nivel del agua mediante el cual se alcanza la altura máxima. $R = 20$ m, $\alpha = 1/20$, $T = 300$ s; $t = 300, 350, 400$ y 450 s (elaboración propia).

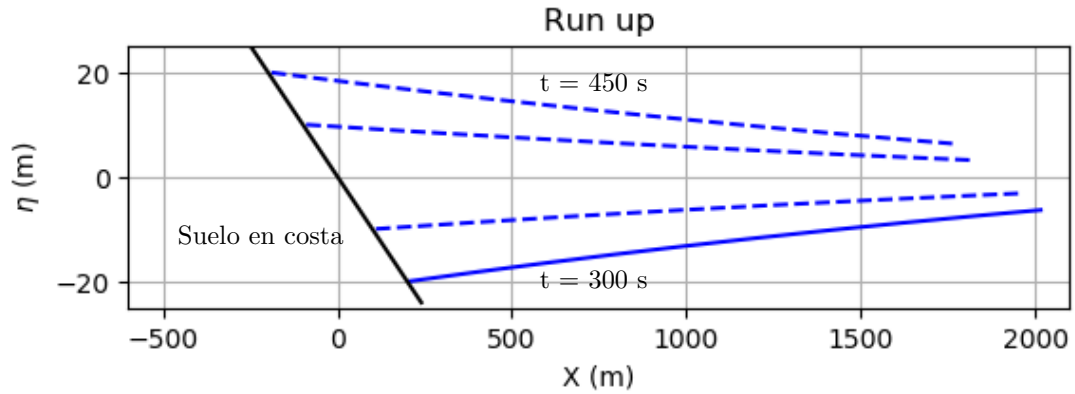


Figura 2.17: Ascenso y descenso del nivel del agua mediante el cual se alcanza la altura máxima. $R = 20$ m, $\alpha = 1/10$, $T = 300$ s; $t = 300, 350, 400$ y 450 s (elaboración propia).

2.4.3. Ecuaciones no lineales de aguas someras

Al aplicar la aproximación de aguas someras (las componentes u y v son independientes de z) a las ecuaciones de la **teoría no lineal de ondas largas**, sin considerar los términos de Coriolis, se tiene (B.19, B.20 y B.21):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial}{\partial y} N = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) = -gD \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) = -gD \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_{by}}{\rho} \quad (2.28)$$

donde la notación es la mencionada en la subsección [2.3.3 Ecuaciones lineales de aguas someras](#); los términos que contienen M^2 , N^2 y MN representan la advección, y $\frac{\tau}{\rho}$ representa la fricción en el fondo $z = -H$ ([Goto y Ogawa, 1997](#)).

2.4.4. Velocidad de las partículas de agua

La expresión ([Lipa et al, 2006](#)), que resulta de reemplazar la rapidez de fase (2.1) en la solución analítica para la velocidad de flujo (2.2)

$$v = \frac{\eta_0}{h} \sqrt{gh} = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (2.29)$$

nos indica que la **rapidez de las partículas de agua** u , mar adentro, es **proporcional a la amplitud de ola** η_0 y a la inversa de la profundidad h , g es la aceleración de la gravedad. Como ejemplo calculamos la velocidad en dos puntos: en $h = 4\,000$ m, $\eta_0 = 0,2$ m se tiene $v = 0,0098$ m/s ; y en $h = 500$ m, $\eta_0 = 1$ m se tiene $v = 0,14$ m/s.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Modelado numérico

El modelo físico de propagación de maremotos e inundación se expresa mediante el sistema de ecuaciones diferenciales parciales llamado: **ecuaciones de aguas someras** (sección [2.1. Conceptos Fundamentales de Maremotos](#)). El desarrollo de la propagación e inundación de un maremoto en un lugar geográfico en particular **depende de su batimetría**. La batimetría se considera, en las ecuaciones de aguas someras, como un campo escalar. Dar un **forma analítica** al campo escalar de batimetría y buscar una solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales parciales se considera impráctico. El **enfoque numérico** es utilizado con el fin de obtener soluciones aproximadas de sistemas de ecuaciones diferenciales. El presente trabajo está basado en el modelo numérico TUNAMI, el cual utiliza la técnica numérica de **diferencias finitas**. Mediante en modelo numérico TUNAMI se obtiene soluciones aproximadas de la altura del agua, en puntos específicos ([Goto y Ogawa, 1997](#)).

El sistema de ecuaciones de aguas someras expresa la relación entre el nivel de la **superficie del agua**, y los caudales **dentro del agua** en el transcurso del tiempo (subsecciones [2.3.3](#) y [2.4.3](#)). El modelo numérico TUNAMI calcula la superficie del agua y los caudales en momentos específicos de tiempo, sin embargo **solo guarda** datos de los valores de **nivel de la superficie** del agua. Con el objetivo de modelar las velocidades de flujo en la inundación por maremoto, se han **adicionado subrutinas** al modelo numérico TUNAMI, de manera que calcule la velocidad de flujo a partir del caudal y guarde los valores numéricos de las soluciones aproximadas de la **velocidad en puntos** específicos en la propagación **cerca a costa y en la**

inundación.

Se ha mencionado, en el párrafo anterior, que con las diferencias finitas se tiene **soluciones aproximadas en puntos específicos**. Los puntos son llamados **nodos** y se determinan mediante la representación del área de **estudio en grillas** (Figura 3.3). Análogamente se representa el transcurso del tiempo en **niveles de tiempo**. La elección del tamaño de las grillas y los niveles de tiempo da lugar a la presencia de una **resolución espacial y temporal**. Las resoluciones en el modelado numérico de un maremoto siguen criterios numéricos y físicos que se indicarán luego en este capítulo.

3.2. Área de estudio

En el presente trabajo, el área de estudio de la simulación numérica está delimitada por las latitudes: $-15,50^\circ$ y $-7,00^\circ$, y por las longitudes: $-82,00^\circ$ y $-75,00^\circ$, cubriendo la región del Océano Pacífico cercana a la costa centro del Perú (Figuras 3.1 y 3.2).

Con el propósito de modelar la velocidad de flujo en la **inundación en Costa Verde**, el área de estudio se divide en **grillas anidadas**.

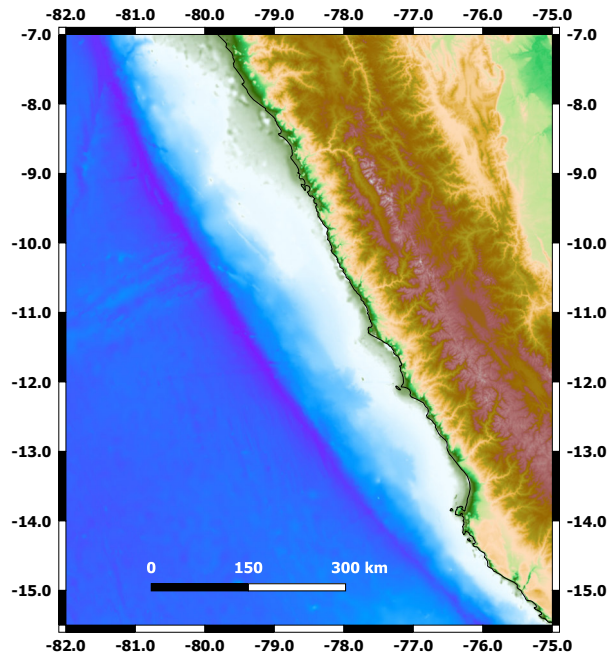
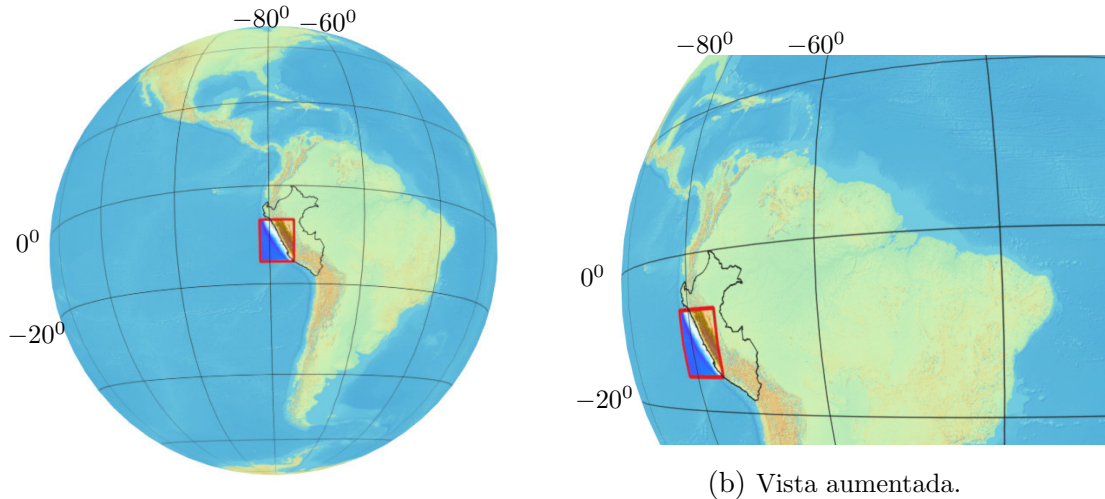


Figura 3.1: Área de estudio en coordenadas geográficas (elaboración propia).



(a) Vista en proporción a Sudamérica.

Figura 3.2: Área de estudio en proyección Azimutal Ortográfica (elaboración propia).

3.2.1. Grillas anidadas

En la Figura 3.4 se muestra la distribución de las áreas anidadas mediante grillas (el significado de grillas anidadas se ejemplifica en la Figura 3.3). Se tiene el **área de estudio general** llamada **Grilla A**. Dentro de la Grilla A se tienen las Grillas B, C y D de manera que todas las grillas contienen al **área de estudio de inundación**. Cada grilla tiene una resolución espacial diferente, de manera que desde la Grilla A hacia la Grilla D la resolución se va reduciendo a la tercera parte al pasar a la siguiente grilla. De esta manera **la resolución de la Grilla D es 1/27 de la resolución de la Grilla A**. En la Tabla 3.1 se listan los parámetros de cada grilla.

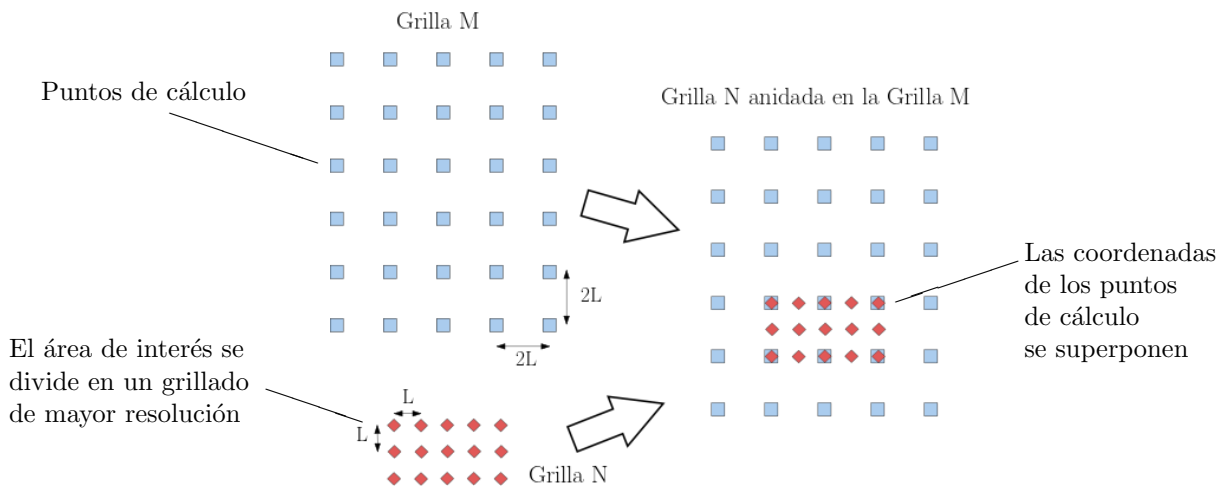


Figura 3.3: Ejemplo de grillas anidadas. Sea un área geográfica M (resolución $2L$), dentro se determina un área geográfica menor N (resolución L), de manera que se superponen.

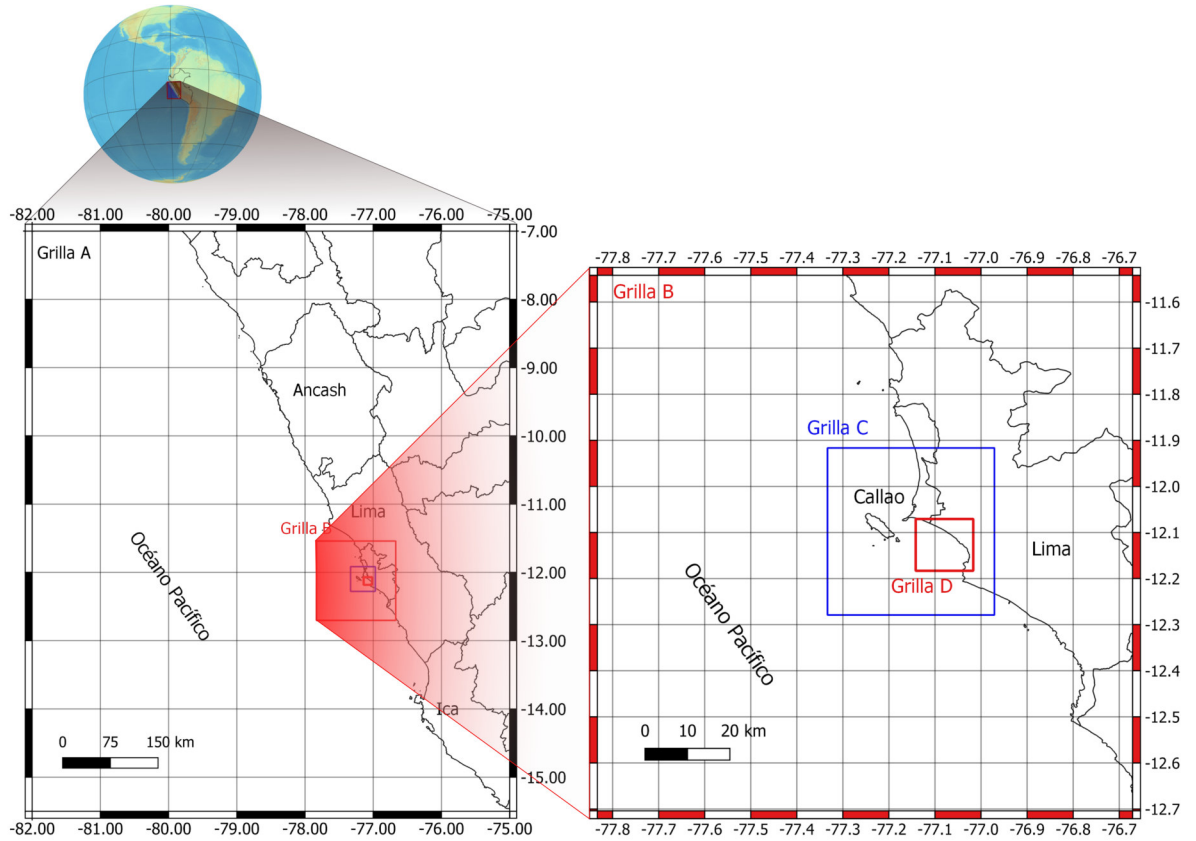


Figura 3.4: Mapas de la **ubicación de las grillas anidadas A, B, C y D**. En la generación del maremoto se da en la Grilla A y la inundación se da en la Grilla D.

Tabla 3.1: Parámetros de las grillas anidadas. Se indican los límites geográficos y la resolución espacial de las grillas anidadas en las que se divide el dominio de simulación.

Grilla	Longitud (°)		Latitud (°)		Resolución	
	mínima	máxima	mínima	máxima	(")	(m)
A	-82.000	-75.000	-15.500	-7.000	15	≈ 463
B	-77.833	-76.670	-12.704	-11.541	5	≈ 154
C	-77.333	-76.970	-12.279	-11.916	5/3	≈ 51
D	-77.141	-77.016	-12.183	-12.070	5/9	≈ 17

3.3. Deformación del suelo oceánico

El campo de la deformación cosísmica se calcula numéricamente mediante la **formulación de Okada, 1992**. La fuente sísmica del **maremoto de Perú de 1746**, cuya localización se muestra en la Figura 3.5, se considera como una **fente rectangular** de $550 \text{ km} \times 140 \text{ km}$, de 8 km de profundidad, presentando una dislocación de 11.49 m , con los **parámetros** del mecanismo focal dados por: azimut (strike) $\phi = 329^\circ$, buzamiento (dip) $\delta = 18^\circ$ y deslizamiento (rake) $\lambda = 90^\circ$, tomando los parámetros, Figura 2.7, citados por Jiménez, 2015.

En la Figura 3.5 se muestra el campo de la **deformación cosísmica** vertical. El rojo corresponde a la **elevación del suelo oceánico**, el cual se encuentra en el lado oeste de la deformación, y azul corresponde a la **depresión del suelo oceánico**, el cual se encuentra en el lado este de la deformación. En la Figura 3.5 también se representa las curvas de nivel, de la deformación, cada 0.5 m .

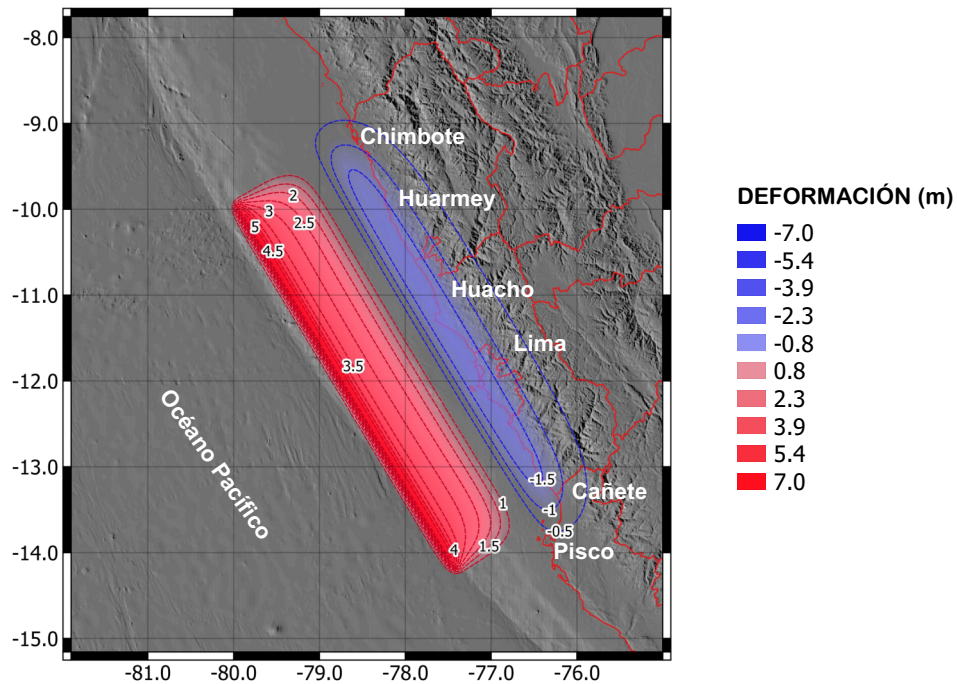


Figura 3.5: Mapa de la elevación vertical del **campo de la deformación cosísmica**, calculado con la **fórmula de Okada**, para el **maremoto de Perú de 1746**.

En la Figura 3.6 se muestran dos vistas de la **representación 3D** del campo de la deformación. Se aprecia que, en el desplazamiento vertical, la magnitud de la elevación es mayor que la magnitud de la depresión. En la Figura 3.6a se indican los puntos extremos.

La Grilla A (Figura 3.4) contiene el campo de la deformación, el cual es la **perturbación inicial que desencadena el maremoto** (Figura 2.6).

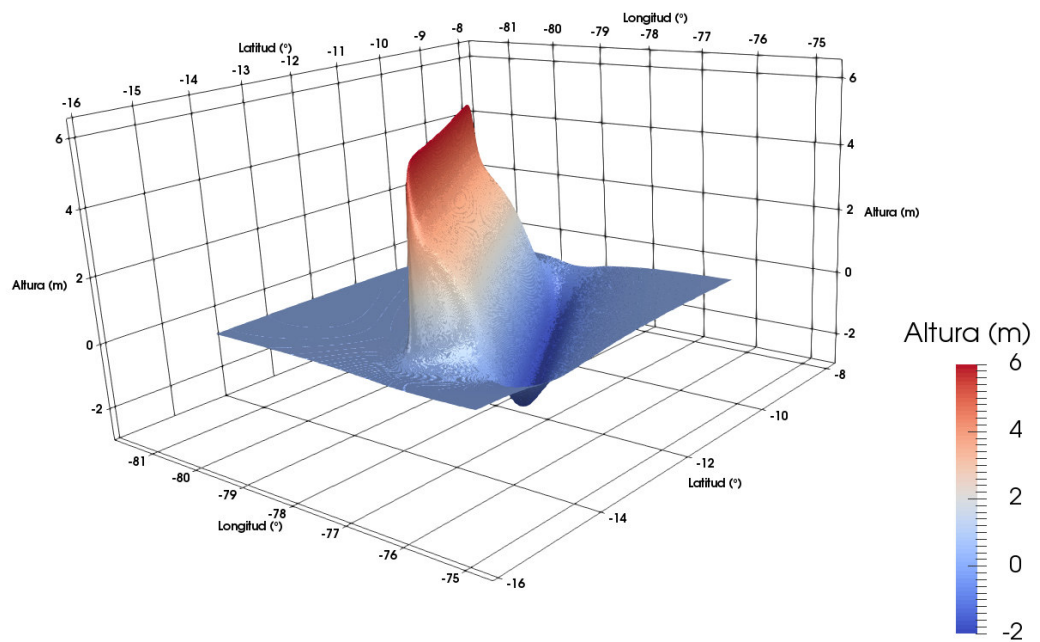
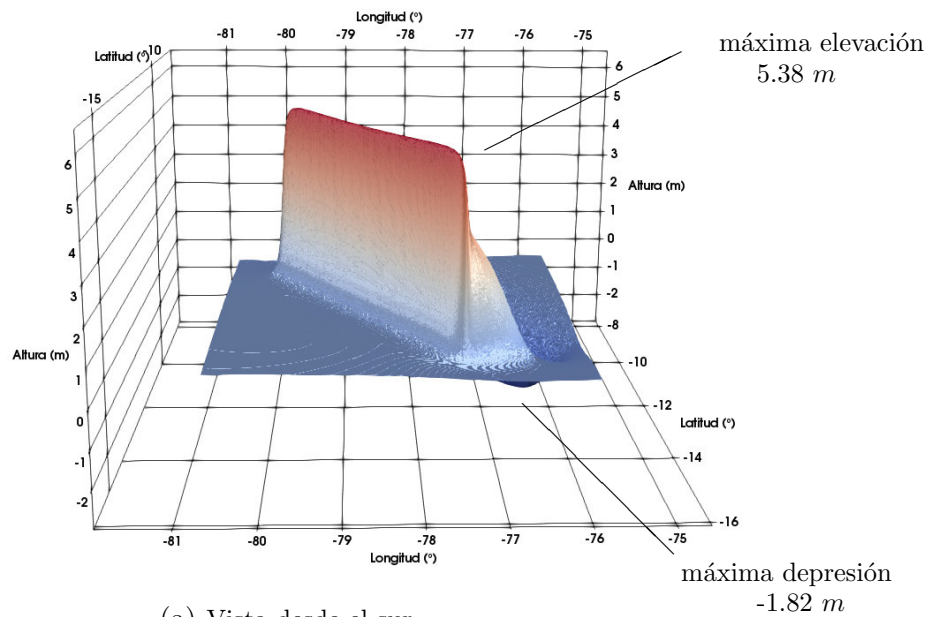


Figura 3.6: Vistas 3D del campo de la **deformación cósmica** (elaboración propia).

3.4. Propagación

Con el propósito de establecer las grillas anidadas se requiere los **datos de batimetría y topografía**, es decir los datos de nivel de la superficie de la Tierra que en adelante llamamos *datos de nivel*. Los *datos de nivel* se obtuvieron de la base de datos GEBCO, los cuales tienen una resolución de 15 segundos. Con los datos GEBCO se establecen los *datos de nivel* en la Grilla A. En las grillas B, C y D se obtiene los *datos de nivel*, con la resolución que se indica en la Tabla 3.1, realizando una **interpolación**. En la literatura, en los estudios topográficos y batimétricos la interpolación utilizada es el modelo Krigin. Mediante la interpolación Krigin se obtienen los *datos de nivel* en las grillas anidadas. En el área de estudio Costa Verde, **Grilla D**, al ser de resolución de 5/9 segundos, adicionalmente a los datos GEBCO se utilizan datos medidos en campo. Se ha utilizado datos de batimetría y datos de topografía medidos respectivamente por la DHN y el IGN.

El modelo numérico **inicia la propagación** en las grillas anidadas en un **tiempo inicial** t_0 , siendo la **perturbación inicial**: *el desplazamiento vertical debido a la deformación cosísmica*. En cada grilla correspondiente se calcula el nivel de la superficie del agua y el caudal (ver apéndices B y C). El caudal se representa en el modelo numérico en dos direcciones, orientadas a lo largo de la longitud y la latitud geográfica. Luego la **propagación continúa** en los **niveles de tiempo** t_1, t_2, \dots, t_k

Las magnitudes nivel de la superficie del agua y caudal, son magnitudes **continuas** en el espacio y el tiempo. El modelo numérico de maremotos, ya que realiza los cálculos numéricos en puntos específicos, utiliza la **representación discreta** del nivel de la superficie del agua y caudal. Ante lo cual se debe tomar en cuenta los conceptos de la teoría de señales discretas:

Teorema de Muestreo (Diniz et al, 2010) Una señal periódica $X(t)$, de periodo T , se puede representar adecuadamente por sus muestras temporales $X(nT)$, donde n son los números naturales. Se debe cumplir los siguientes criterios:

- El espectro de frecuencias de $X(t)$ debe estar limitado por una **frecuencia máxima** f_{max} . Es decir, la señal $X(t)$ debe tener banda limitada.
- *La razón de muestreo elegida f_s , debe ser al menos el doble de f_{max} :*

$$f_s \geq 2f_{max} \quad \text{de manera equivalente en el periodo} \quad T_s \leq T_{min}/2$$

La **menor frecuencia de muestreo**, que puede representar la señal $X(t)$, es decir $f_s = 2f_{max}$ es llamada la frecuencia de muestreo de Nyquist de $X(t)$.

En el modelado numérico del maremoto de Perú de 1746 **se cumple el Teorema de Muestreo** en la dimensión temporal y espacial. En la **dimensión temporal**: el periodo de muestreo T_s equivale a la resolución temporal $\Delta t = 0.5$ s; un maremoto tiene un periodo T_{min} de alrededor de 600 s (Jiménez, 2015), por tanto se cumple el Teorema de Muestreo con

$$\Delta t \leq 600/2$$

En la **dimensión espacial**: el Teorema de Muestreo se expresa en términos de longitud mediante la longitud de onda (haciendo uso de la relación $v = \lambda_{min} f_{max}$, la cual se obtiene de la rapidez de fase de las ondas $v = \lambda f$) como $\lambda_s \leq \lambda_{min}/2$; la “distancia de muestreo” λ_s equivale a la resolución espacial $\Delta x \approx 463$ m (Tabla 3.1); en el maremoto de Perú de 1746 se tiene $\lambda_{min} \approx 550\,000$ m (sección 3.3). Por tanto se cumple el Teorema de Muestreo con

$$\Delta x \leq 550\,000/2$$

Estabilidad Al discretizar las ecuaciones que describen el maremoto surge una “velocidad numérica” $v_{num} = \Delta x/\Delta t$. La velocidad de la propagación de las ondas es $v = \sqrt{gh}$. El criterio de estabilidad numérica llamado CFL (Courant - Friedrichs - Lewy) indica que **la velocidad de propagación no debe superar a la velocidad numérica**, esto es: $v \leq v_{num}$, o también escrito en la forma $v/v_{num} \leq 1$. Al cociente v/v_{num} se le llama CFL. Debe cumplirse por tanto

$$CFL = v\Delta t/\Delta x \leq 1$$

Para evitar riesgos numéricos se elijen en la práctica valores menores o iguales a 0.7 para CFL (Jiménez, 2015).

En el modelado numérico se aplica el criterio de estabilidad **evaluando CFL** en las grillas que corresponden a los **extremos de resolución espacial**, es decir las grillas A y D. Al cumplirse $CFL \leq 1$ en las grillas anidadas de mayor y de menor resolución, se puede mostrar que también se cumple $CFL \leq 1$ en las grillas de resoluciones intermedias. Con los datos de la Tabla 3.1 se tiene los siguiente valores de **CFL en las grillas A y D**, en la Tabla 3.2, para la resolución temporal $\Delta t = 0,5$ s.

Tabla 3.2: CFL en las grillas A y D. H es el valor representativo de la máxima profundidad en la grilla, v es la velocidad de fase igual a \sqrt{gH} , Δx es la resolución espacial de la grilla estimada a un valor entero (el modelado numérico trabaja con grados y el radio de la Tierra), Δt es la resolución temporal elegida 0,5 s.

Grilla	$v = \sqrt{gH}$		Resolución		CFL
	H (m)	v (m/s)	Δx (m)	Δt (s)	< 1
A	4 000	200	463	0.5	0.21
D	38	19.5	17	0.5	0.56

3.4.1. Propagación frente a la bahía de la Costa Verde

Las ecuaciones de aguas someras, resueltas mediante el modelo numérico TUNAMI, considera dos componentes horizontales mutuamente perpendiculares de la velocidad de flujo, de manera que en el plano horizontal queda determinada la **velocidad de flujo**. En la Figura 3.7, que corresponde a la grilla de inundación D, se muestra el **módulo** (es decir la **rapidez**) y la **dirección** de la **velocidad de flujo**, en 4 instantes durante el proceso de propagación del maremoto de Perú de 1746. Considerando que las componentes de la velocidad de flujo **se propagan en forma de ondas** (subsección 2.1.2 [Movimiento de las partículas de fluido](#)) desde mar adentro hacia la costa, se tienen las siguientes **observaciones en la propagación** (la descripción respecto a la inundación se da en la siguiente sección 3.5 [Inundación en Costa Verde](#)) a partir de la Figura 3.7:

- A los 30 minutos (3.7a) la dirección de la velocidad de flujo es principalmente **hacia el este**; luego de una hora (3.7b) la dirección de la velocidad de flujo es principalmente **hacia el norte**; luego de dos (3.7c) y tres horas (3.7d) la velocidad de flujo no tiene una sola dirección predominante, ya que se tiene la **superposición de ondas reflejadas**. Se tiene regiones de convergencia y divergencia donde la rapidez es cercana a cero, son las regiones donde la velocidad de flujo está **cambiando de dirección gradualmente**¹.
- La **rapidez de flujo se incrementa conforme se acerca a la costa** (subsección 2.1.4 [Cerca a costa](#)). Este comportamiento es **diferente a la rapidez de fase**, la cual disminuye conforme se acercan a la costa las ondas de maremoto (2.3.2 [Rapidez de fase y velocidad de flujo](#)).

¹Se aclara que no es el caso de fuentes y sumideros, como podría sugerir las regiones de convergencia y divergencia

- En los tiempos 30 minutos y 1 hora (3.7a y 3.7b), alrededor de las latitudes -12.12° y -12.10° , lejos de costa se presenta una **rapidez de flujo alta** (color rojo de alrededor de 2 m/s), en comparación con el entorno (color amarillo de alrededor de 1 m/s), debido a la presencia de una **elevación de suelo en la batimetría**.

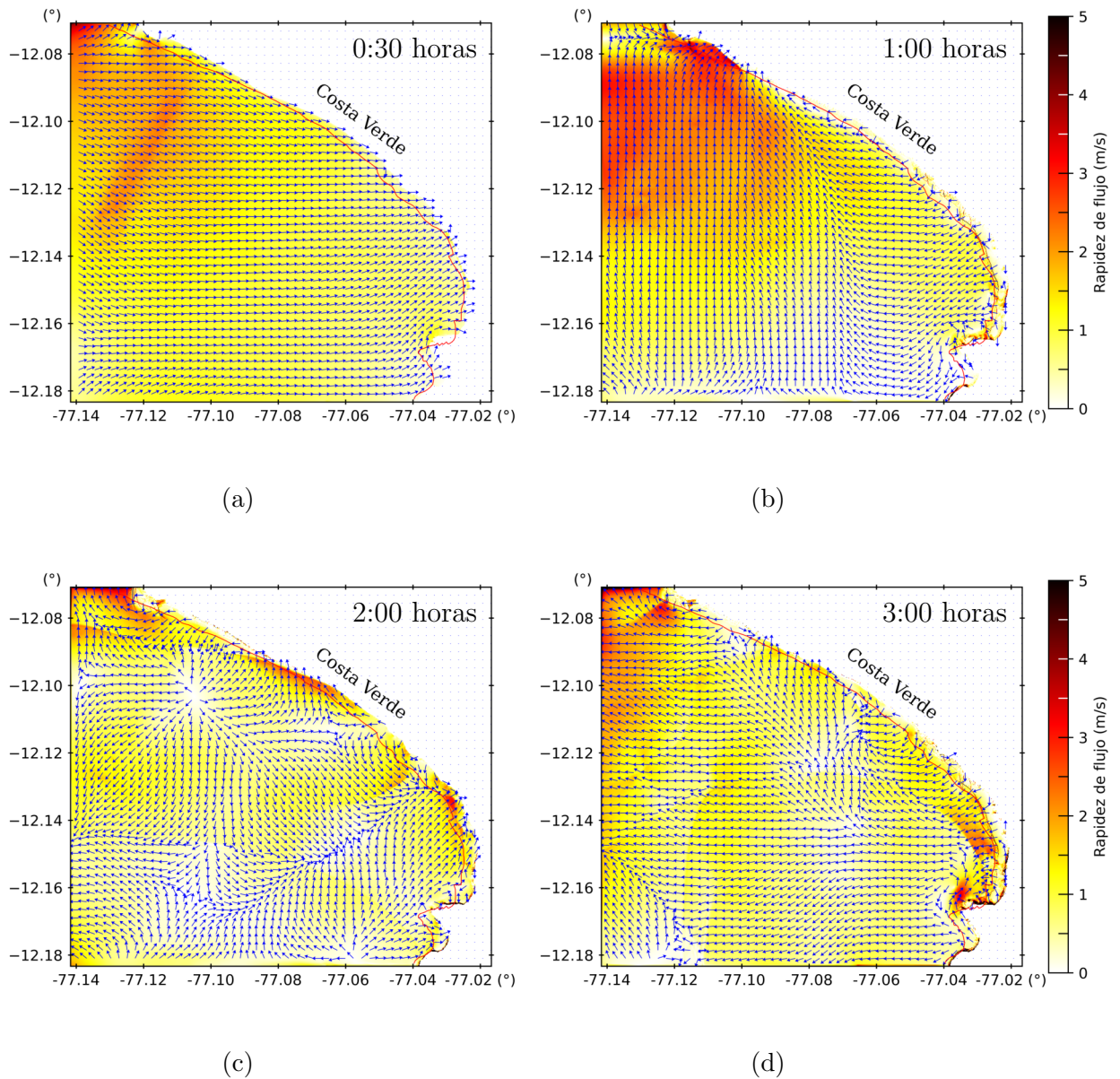


Figura 3.7: **Velocidad de flujo** en la **propagación e inundación** en la Grilla D. Se muestran 4 instantes de tiempo. En colores se indican los valores de la **rapidez de flujo** y con **vectores unitarios** se indica la dirección de la **velocidad de flujo**. Se evidencia la **dinámica de la velocidad de flujo** en la **propagación e inundación en Costa Verde**.

- En el **sur** de Costa Verde la batimetría se eleva con una **mayor inclinación** al acercarse a la costa (lo cual se evidencia con una mayor altura de la superficie del agua, como indica Jiménez, 2015 y acorde a la subsección 2.3.1 **Incremento de la altura de ola**). Al sur de la latitud -12.14° , Figura 3.7d, se presentan los **mayores valores de rapidez de flujo en la propagación** en Costa Verde (cercano a 5 m/s), debido a la mayor inclinación de la costa mencionada y en concordancia a la relación 2.16. La influencia de la inclinación de la costa en la dinámica del nivel del agua en el **proceso de run up** se describe en la subsección 2.4.2 **Ascenso y descenso del nivel del agua**.

3.5. Inundación en Costa Verde

En la Figura 3.7 se muestra 4 tiempos en el proceso de inundación. La descripción de la **dinámica** de las ondas de velocidad de flujo **frente a Costa Verde**, en la sección 3.4.1, **se corresponden con la dinámica en el área de inundación**. Con referencia al **área de inundación**, en la Figura 3.7 se observa en general que la **velocidad de flujo tiende a ser perpendicular** a la costa, adicionalmente:

- A los 30 minutos (Figura 3.7a) la dirección de la velocidad de flujo se orienta **ingresando a la costa**. Al norte la velocidad de flujo es **tangencial** a la costa. La rapidez de flujo es alrededor de 2 m/s.
- Luego de una hora (Figura 3.7b) la dirección de la velocidad de flujo en general se orienta **saliendo de la costa**. Algunas regiones presentan una velocidad de flujo tangencial o formando un **ángulo agudo** (es decir la velocidad tiene componentes perpendicular y tangencial) con la costa. Al norte se aprecia una región de mayor rapidez de flujo, alrededor de 3.5 m/s con dirección principalmente perpendicular ingresando a la costa.
- Luego de dos horas (Figura 3.7c), en la inundación la velocidad de flujo se orienta **ingresando** en algunas regiones y en otras **saliendo de la costa**. En este instante de tiempo ya se tiene la presencia de la **superposición** de ondas reflejadas. Hay regiones de inundación donde la velocidad de flujo es completamente **tangencial** a la costa. Se observan tres regiones con mayores valores de rapidez de flujo, en color rojo, alrededor de 3.5 m/s.
- Luego de tres horas (Figura 3.7d), la dinámica de la dirección de la velocidad de flujo es similar al instante de dos horas. Se observa al sur, regiones con

mayores valores de rapidez de flujo, cercanas a 5 m/s.

Se ha realizado una **descripción general** de la dinámica de la velocidad de flujo en la inundación. Se debe considerar la presencia de **escenarios puntuales** dentro del área de la distribución de la rapidez de flujo en la Figura 3.7, debido a que la **resolución espacial** es de 17 m.

3.6. Validación

El nivel de la superficie del agua en la propagación e inundación de un maremoto puede ser medida y de esta manera validar los resultados numéricos del modelado correspondiente. A diferencia del nivel de la superficie del agua, **la velocidad de flujo presenta dificultades en su medición**. Una forma de medir la velocidad de flujo por maremoto en la inundación es **de manera indirecta**, mediante el registro en cámaras de video del movimiento de un objeto que es transportado por el agua (Fritz et al, 2006 y Foytong et al, 2013). En el escenario del **maremoto de Callao de 1746** no hay registro de la velocidad de flujo y no se conoce metodología que permita medir la velocidad de flujo indirectamente a partir de otras magnitudes. Por lo cual, en el modelado de la velocidad de flujo del maremoto de Callao de 1746 se recurre a criterios de validación de modelos de simulación.

3.6.1. Criterios de validación de modelos de simulación

Generalmente se utilizan combinaciones de los siguientes criterios (Sargent, 2011) con el propósito de validar un Modelo de Simulación (MS):

- I **Animación:** El MS muestra pasos de tiempo.
- II **Comparación con otros Modelos:** Los resultados del MS se comparan con los de otros modelos que están validados.
- III **Pruebas de degeneración:** Variando las condiciones iniciales en el MS se evidencian cambios en sus resultados
- IV **Condiciones extremas:** En el MS, al ser la condición inicial cero, los resultados son los que se conocen en el evento real.
- V **Validación en persona:** Profesionales en el área determinan si el comportamiento del MS es razonable

- VI **Gráficas operacionales:** El MS muestra gráficamente el comportamiento de varias magnitudes en el tiempo
- VII **Variabilidad de parámetros:** En el MS, al cambiar datos de entrada se muestran cambios en los resultados (por ejemplo en el caso de la batimetría, es un dato de entrada que cambia en dirección espacial, que es más inclinada al sur)
- VIII **Rutas:** Se registra el comportamiento de diferentes magnitudes resultado del MS y se verifica su comportamiento lógico.

En el modelado numérico del campo de velocidad de flujo, basado en TUNAMI, en el Maremoto de Perú de 1746 **se cumplen los criterios de validación** de modelos de simulación del I al VIII:

- I **Animación:** El modelado utiliza pasos de tiempo. En la Figura 3.7 se muestran 4 pasos de tiempo. (Foytong et al, 2013, no muestran pasos de tiempo en el modelado de velocidad de flujo).
- II **Comparación con otros Modelos:** La distribución del campo de velocidad de flujo determina un área de inundación, la cual se corresponde con el modelado del área de inundación realizado por Jiménez, 2015 (Foytong et al, 2013, basan la validación en el área de inundación).
- III **Pruebas de degeneración:** Variando las condiciones iniciales en el MS se evidencian cambios en sus resultados. Esta condición se observó durante la implementación y el desarrollo del modelado.
- IV **Condiciones extremas:** Con la perturbación inicial cero, es decir no hay deformación del suelo oceánico, se cumple la solución trivial cero, pues la velocidad de flujo mantiene el valor *cero* en las dos componentes.
- V **Validación en persona:** Con la descripción de la **dinámica de la velocidad de flujo**, resultado de las salidas numéricas, en la subsección 3.4.1. Costa Verde, la sección 3.5. Inundación en Costa Verde (los cuales se basan en los 4 pasos de tiempo mostrados en la Figura 3.7) y en la sección 4.2. Resultados (la cual incluye las salidas numéricas representadas en la Figura 4.1), se puede concluir que el MS coincide razonablemente con los conceptos mencionados en la sección 2.2. Conceptos Fundamentales de Maremotos y la subsección 2.3.2. Rapidez de fase y velocidad de flujo.

- VI **Gráficas operacionales:** En la Figura 3.7 se muestra el comportamiento en 4 pasos de tiempo de las siguientes magnitudes: la rapidez de flujo, la dirección de la velocidad de flujo (resultado de dos componentes horizontales mutuamente perpendiculares) y el área inundada.
- VII **Variabilidad de parámetros:** Ya que el campo de velocidad de flujo es bidimensional, se puede observar que la variabilidad del parámetro batimetría a lo largo de la costa, en la Figura 3.7, evidencia cambios en el resultado numérico de la velocidad de flujo en cada paso de tiempo, ya que es un flujo no estacionario.
- VIII **Rutas:** En la Figura 3.7 se tiene el registro de 4 pasos de tiempo donde se observa el comportamiento lógico (sigue el comportamiento de la dinámica de ondas en fluidos) de la rapidez de flujo, la dirección de la velocidad de flujo y el área de inundación. En la sección 4.2. [Resultados](#) se comenta el comportamiento lógico de los resultados del modelo siguiendo la dinámica de fluidos.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Resultados

En la Figura 4.1 se muestra la distribución de la **rapidez máxima de la velocidad de flujo** y su respectivo **vector unitario** en el área de estudio Costa Verde correspondiente al **maremoto de Perú de 1746**. Se tiene los mayores valores de rapidez de flujo en puntos donde la **batimetría es menor** (en las costas en general y en las elevaciones del suelo oceánico mar adentro, ver las regiones resaltadas en la Figura 4.2) y donde la **pendiente en costa es mayor** (costas al sur). La distribución de la velocidad de flujo concuerda con la dinámica descrita en la subsección 3.4.1. [Costa Verde](#):

- La velocidad de flujo es mayor cerca a la costa (expresión 2.4).
- La rapidez de flujo es inversamente proporcional a la batimetría (expresión 2.16).

En general, la dirección de las máximas velocidades de flujo tienen orientación **ingresando a costa** y también **a lo largo de la costa** en sentido horario (se tiene un menor número de puntos donde la orientación es en sentido antihorario).

Los mayores valores puntuales de rapidez de flujo se encuentran en puntos al borde norte y sur del área de estudio. Sin embargo, se debe considerar que cerca a la **frontera del dominio** de simulación los resultados disminuyen su exactitud, como es el caso del modelado de nivel de la superficie del agua en la inundación, debido a consideraciones de la discretización numérica.

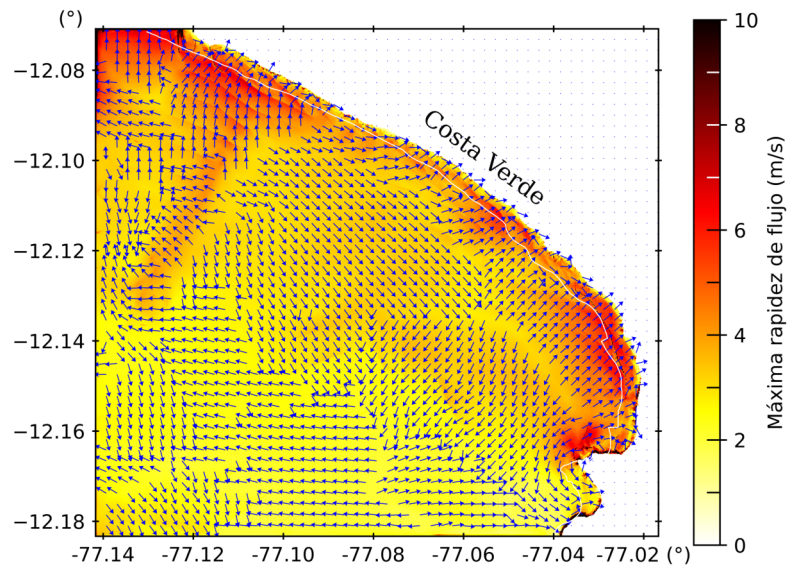


Figura 4.1: **Campo de la velocidad de flujo máxima**, es decir se muestra la distribución espacial de los mayores valores de rapidez de la velocidad de flujo, con su respectiva dirección. La **rapidez máxima** se representa en colores y la **dirección** se representa mediante los vectores unitarios.

Se pueden identificar 4 regiones, en el área de estudio, con los mayores valores de la rapidez de flujo. En la Figura 4.2 (son los mismos datos que en la Figura 4.1 pero no se muestra los vectores unitarios) se indican las 4 regiones nombradas con números romanos de norte a sur. Cada región incluye un área **mar adentro** y un área de **inundación**:

I Abarca un área similar a la región III. **Mar adentro** resalta la presencia de un mayor número de “puntos” ¹ con valores de rapidez de flujo de alrededor de 6 m/s. En el **área de inundación**: la máxima rapidez de flujo preponderante es alrededor de 4.5 m/s; en la Figura 4.1 se observa que la dirección es **ingresando a la costa**, en algunos puntos (dentro del área de inundación) se tienen direcciones orientadas a lo largo de la costa.

II **Mar adentro** se tienen puntos con valores de rapidez de flujo de alrededor de 5 m/s. El **área de inundación**: tiene una extensión similar a la región I; la

¹Se usa la palabra “puntos” considerando la naturaleza raster de la imagen resultado de la **discretización en el modelado numérico**, como indica la Figura 3.3 en la subsección 3.2.1 [Grillas anidadas](#).

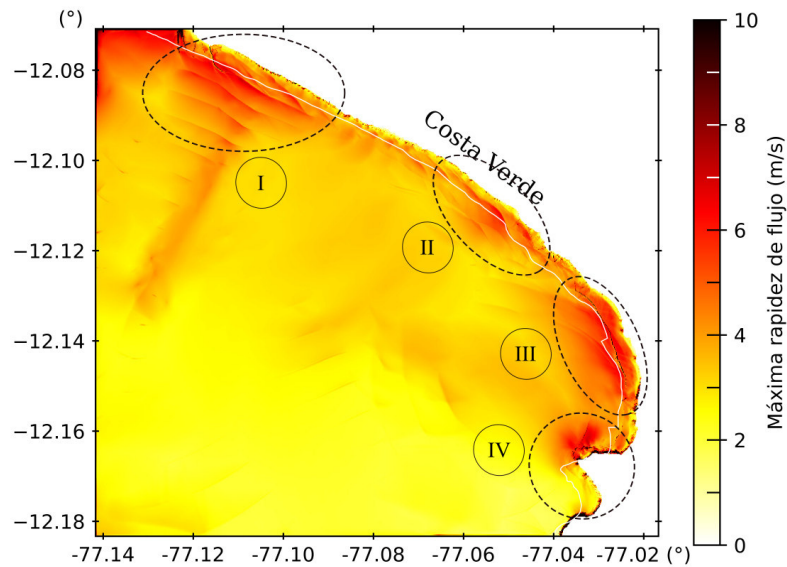


Figura 4.2: **Campo de la rapidez de flujo máxima**, es decir se muestra la distribución espacial de los mayores valores de rapidez de la velocidad de flujo (no se muestra la dirección) mediante colores.

máxima **rapidez de flujo** preponderante es alrededor de 5 m/s; la **orientación de los vectores** de la máxima velocidad de flujo es simimlar a la región I (Figura 4.1).

III **Mar adentro** la rapidez de flujo preponderante es alrededor de 5 m/s en un mayor número de puntos que en la región II y IV. El **área de inundación**: tiene la mayor extensión entre las 4 regiones, presenta una subregión con numerosos valores puntuales de **rapidez de flujo** cercanos a 10 m/s; a diferencia de las otras regiones, la **orientación** de la máxmima velocidad de flujo es preponderante ingresando hacia la costa (Figura 4.1).

IV **Mar adentro** resalta un grupo de puntos con rapidez de flujo alrededor de 6 m/s. El **área de inundación** tiene la menor extensión entre las 4 regiones, pero presenta el mayor número de valores puntuales de **rapidez de flujo** cercanos a 10 m/s, con **dirección** saliendo de la costa (Figura 4.1).

4.2. Discusión

Se ha comentado lo siguiente: en el análisis del impacto de un maremoto en las estructuras costeras es necesario conocer la velocidad de flujo (Foytong et al, 2013 y Song et al, 2017); y las dificultades de la medición de la velocidad de flujo en la inundación por maremoto (Fritz et al, 2006). Por lo cual, en el presente trabajo se propuso como objetivo determinar la distribución de la velocidad de flujo mediante el modelado numérico.

Hay poca literatura respecto a la rapidez y la dirección de la velocidad de flujo, así como su distribución en un determinado tiempo, por ejemplo Foytong et al, 2013, muestran únicamente una simulación de rapidez de flujo máxima, no presentan las direcciones de la rapidez máxima, tampoco la rapidez o las direcciones en determinados pasos de tiempo. Ante lo cual se simuló numéricamente la distribución espacial de la rapidez y la dirección de la velocidad de flujo en el proceso de inundación en Costa Verde, mostrándose el resultado numérico en determinados instantes de tiempo (Figura 3.7) y la rapidez máxima, con su respectiva dirección (Figura 4.1).

La dinámica de la velocidad de flujo mostrada en los instantes de tiempo de la Figura 3.7 concuerda con la literatura respecto al fenómeno de la propagación de ondas largas, maremotos. En los resultados, Figura 4.2 y Figura 4.1, se muestra que la altura de ola y la rapidez de flujo alcanzan valores mayores en zonas costeras. Se encontró que la dirección de las velocidades máximas no es únicamente perpendicular a la costa. Adicionalmente, al considerar los resultados numéricos (figuras 3.7, 4.2 y 4.1), los conceptos de rapidez de fase y velocidad de flujo 2.3.2, se pueden resaltar las siguientes diferencias:

Tabla 4.1: Diferencias entre la velocidad de fase y velocidad de flujo.

Velocidad	Ubicación	Al acercarse a costa
de Fase	Superficie del agua	disminuye la magnitud
de Flujo	Dentro del agua	aumenta la magnitud

4.2.1. Influencia de las islas

Mediante conceptos de **discretización** en el modelado de propagación de ondas se establece lo siguiente: para que una magnitud ondulatoria continua (por ejemplo una magnitud con longitud de onda λ) sea representada en valores discretos, la

resolución espacial Δx debe ser al menos la mitad (Ver el teorema de muestreo en la subsección [3.4 Propagación](#))

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$$

En la práctica para las ondas en la superficie del agua, se puede considerar que una resolución espacial de alrededor de la décima parte representa adecuadamente la magnitud oscilatoria continua.

La resolución de la **grilla D** es de alrededor de $\Delta x = 17$ m, suficiente para estudiar la propagación cerca a costa, y la inundación, de las olas de un maremoto. El área de estudio comprende un medio donde la batimetría cambia gradualmente de alrededor de 4 000 m (en la grilla anidada A), pasando por 0 m en costa, hasta convertirse en valores de topografía, dentro de la grilla anidada D. Como referencia [Jiménez, 2015](#), utiliza aproximadamente $\Delta x = 30$ m. Los cambios en batimetría deben ser graduales, dentro del rango del flujo irrotacional, para ser representados en el modelo TUNAMI.

Una **isla** puede ser considerada como una onda de longitud de onda λ . La isla se puede representar adecuadamente mediante valores discretos, de batimetría-topografía, con una resolución $\Delta x = \frac{\lambda}{10}$. Los gradientes de batimetría cercanos a la resolución espacial Δx de la grilla D no son representados adecuadamente con el Δx del presente modelado. Por lo anterior podemos concluir:

La isla Horadada, con longitud de alrededor de 64 m, es aproximadamente 3.7 veces Δx , por lo cual no es representada adecuadamente por el modelado, ya que la resolución en la batimetría no es suficiente (Figura [4.3](#)). Se debe tener en cuenta que una resolución espacial mayor en un modelado numérico, es decir con $\Delta x < 30$ m, debe considerar los límites de la teoría de ondas largas y los fenómenos descritos por la macrofísica.

Isla El Frontón tiene una mínima longitud de alrededor de 500 m. Se encuentra en la grilla anidada C (Figura [3.4](#)), donde aproximadamente $\Delta x = 3(17) = 51$ m. Considerando que 500 m es aproximadamente 9.8 veces Δx , la isla El Frontón sí es representada por el modelo.

Isla San Lorenzo, es mayor que la isla El Frontón, también se encuentra en la grilla anidada C (Figura [3.4](#)), por lo cual sí es representada por el modelo.

El fenómeno de **refracción** consiste en el cambio de la dirección del frente de onda debido a cambios en la velocidad de la propagación de la onda. Los cambios en la velocidad de propagación se deben a cambios en la **batimetría**. La isla San Lorenzo y el Frontón tienen el siguiente efecto en la propagación de las ondas de maremoto

(Jiménez, 2015) sobre la bahía Costa verde: **las islas** mencionadas **refractan las ondas** de manera que el frente de onda ingresa con dirección hacia el este. Sin la presencia de la isla San Lorenzo y El Frontón, las ondas ingresarían con dirección hacia el nor-este. En la Figura 3.7a se aprecia que la dirección de la velocidad de flujo, al ingresar la onda a la bahía Costa Verde, tiene dirección oeste-este.

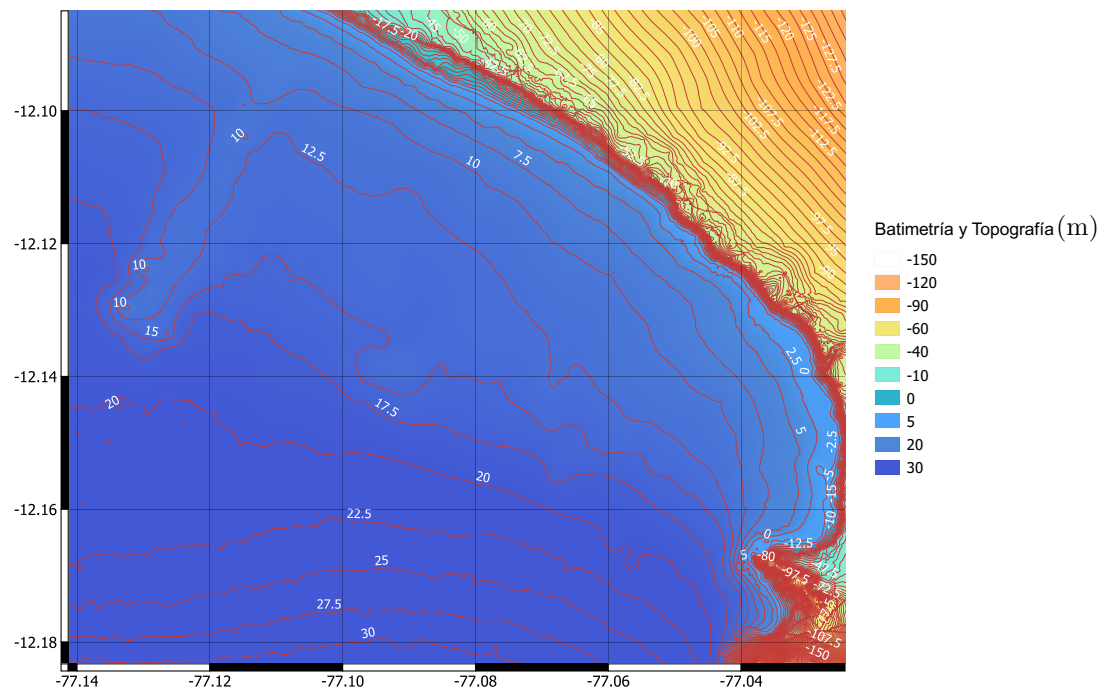


Figura 4.3: Mapa de batimetría (mayor que 0) y topografía (menor que 0) de la bahía Costa Verde, mostrando curvas de nivel, isóbatas, cada 2.5 m. El mapa centra la visualización en la batimetría.

4.2.2. Validación

La velocidad de flujo se valida indirectamente mediante la inundación (Ruangsamee y Saelem, 2009). El fundamento es el siguiente: los valores de la velocidad de flujo donde **inicialmente era suelo**, es decir en costa, indican que TUNAMI detectó inundación, es decir un nivel de la superficie del agua mayor que la topografía. En los nodos **donde se detecta inundación se calcula el flujo** y las subrutinas agregadas al programa TUNAMI guardaron estos datos. Por tanto, en los resultados del modelado numérico, (figuras 3.7, 4.2 y 4.1) *en los nodos de topografía con valores de velocidad de flujo se tiene la presencia de inundación.*

Adicionalmente, se utilizan los criterios de validación generales para modelos de simulación dados por Sargent, 2011; por ejemplo observando el comportamiento gráfi-

camente en la dimensión espacial y en el tiempo (figuras 3.7 y 4.1), se puede concluir que el comportamiento de la velocidad de flujo coincide con el estudio analítico de su dependencia con la batimetría (Figura 4.3), altura de ola y la refracción de las ondas (subsección 2.3.2 Rapidez de fase y velocidad de flujo), ante la presencia de las costas y de la Isla San Lorenzo.

4.2.3. Criterio de confiabilidad en los resultados de un modelo numérico

Es frecuente encontrarnos con situaciones donde una magnitud física Z **no debe superar determinado valor** numérico Z_0 . Ante lo cual se puede plantear matemáticamente una función de Z y Z_0 , la cual debe ser menor que 0. Esta función de Z puede estar planteada con valores **determinísticos**, pero también puede plantearse con valores **probabilísticos**, teniendo de esta manera un análisis probabilístico. Un análisis probabilístico considera una distribución de probabilidades de todos los posibles valores de las variables consideradas como aleatorias. Lo mencionado corresponde al **análisis probabilístico de confiabilidad** (Denoel, 2007).

La aplicación del análisis de confiabilidad a un modelo numérico es aún un tema en desarrollo. A continuación se comenta de manera general un caso simplificado adaptado para la magnitud de la **velocidad de flujo** en un maremoto:

Sea u la velocidad de flujo en x , λ la longitud de onda, f la frecuencia en Hz de una onda de maremoto, x se define mediante una función $G(\lambda, f)$. Consideramos λ y f como variables aleatorias. Se define una función de distribución acumulativa $F_u(u_0)$

$$F_u(u_0) = \text{prob}(u < u_0)$$

$$F_u(u_0) = \text{prob}(G(\lambda, f) < u_0)$$

de manera que nos de la probabilidad de que u tome valores menores que u_0 . Considerando todos los posibles valores de λ se tiene

$$F_u(u_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{prob}(\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_0 + d\lambda_0) \text{prob}(G(\lambda, f) < u_0) d\lambda_0$$

$$F_u(u_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p_\lambda(\lambda_0) F_f(G(\lambda_0, u_0)) d\lambda_0$$

Entonces la función de densidad de probabilidad de u es

$$p_u(u_0) = \frac{dF_u}{du_0} = \int_{-\infty}^{\infty} p_\lambda(\lambda_0) p_f(G(\lambda_0, u_0)) d\lambda_0$$

donde se tienen las distribuciones de probabilidad de λ y f . Si tenemos p_λ y p_f , por ejemplo pueden tener la forma gaussiana, podemos calcular la función de distribución acumulativa para u

$$F_u(u) = \int_{-\infty}^u p_u(u_0) du_0$$

Entonces la probabilidad de que u exceda un valor u_z , aplicando el análisis probabilístico de confiabilidad, es:

$$proba(u > u_z) = 1 - F_u(u_z)$$

lo cual puede interpretarse como una probabilidad de que el modelo numérico tenga salidas numéricas incorrectas.

Notamos que se requiere conocer la función $u = G(\lambda, f)$ y las funciones de densidad de probabilidad p_λ y p_f , es decir debemos tener conocimiento de la variable u antes de realizar el análisis de confiabilidad.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones

Se determinó la distribución del campo de velocidad de flujo en un maremoto, mediante la simulación numérica al implementar subrutinas en el modelo numérico TUNAMI y programas de posprocesamiento para la rapidez y la dirección, en el escenario del Maremoto de Perú de 1746. En áreas de batimetría poco profunda y de mayor pendiente se tiene la presencia de mayores valores de rapidez de la velocidad de flujo, como se muestra en la sección [4.1 Resultados](#). El comportamiento mencionado de la rapidez de flujo se comentó en [Avalos, 2019](#), en el marco de la influencia del efecto Coriolis. En la ecuación [2.14](#) se tiene una relación analítica aproximada entre la amplitud de ola y la velocidad de flujo, la cual se aplica a escala de las dimensiones de la fuente sísmica.

En cuanto a la dirección de la velocidad de flujo, se graficaron los vectores unitarios en instantes de tiempo determinados del proceso de propagación - inundación (Figura [3.7](#)), donde se observa la dinámica de la velocidad de flujo. En la rapidez máxima de la velocidad de flujo se encontró que dentro del área de inundación no todos los vectores unitarios son perpendiculares a la línea de costa (Figura [4.1](#))

De esta manera se puede concluir que:

- En un maremoto, la batimetría determina la magnitud de la rapidez de la velocidad de flujo. Donde la batimetría es menor se incrementa la rapidez de la velocidad de flujo de las partículas de agua. Considerando que la altura del nivel del agua también se incrementa donde la batimetría es menor, se tiene que: en la fase de inundación en un maremoto, **la altura de ola y la rapidez de flujo son directamente proporcionales**. La ecuación [2.14](#) muestra la

relación aproximada, a escala de la longitud de onda de un maremoto, entre la amplitud de ola y la velocidad de flujo:

$$u \approx \omega \sqrt{\frac{Al - 4A^2}{2}}$$

- En la inundación por maremoto, en las regiones de **mayor pendiente** en la costa se presentan los **mayores valores de la rapidez de flujo**.
- En la fase de inundación, al incrementarse la rapidez de flujo en la costa, los términos no lineales tienen mayor influencia en las ecuaciones de aguas someras (sección [2.4.3 Ecuaciones no lineales de aguas someras](#))

5.2. Trabajo futuro

- Estudiar la dinámica de la velocidad de flujo en la inundación considerando la interacción con los escombros generados por el sismo previo al maremoto.
- En un futuro se espera estudiar la influencia del efecto Coriolis en la velocidad de flujo en la inundación de zonas costeras causada por maremotos de origen lejano, considerando los estudios de [Avalos, 2019](#), sobre la influencia de la aceleración de Coriolis en el proceso de propagación.
- Estudiar la interacción de las corrientes oceánicas con la velocidad de flujo de un maremoto mediante la conservación de masa y momentum.
- Ante la dificultad en la medición de la velocidad de flujo en la inundación, se espera proponer la instalación de cámaras en lugares estratégicos (considerando las cámaras de la red mareográfica nacional de la DHN) de manera que al ocurrir un maremoto se pueda medir indirectamente la velocidad de flujo.

Apéndice A

Ondas en el océano

A.1. Cinemática de ondas

Si el medio es homogéneo al menos en la escala de las ondas, para ondas de pequeñas amplitudes encontramos soluciones en la forma de ondas planas (Pedlosky, 2003). Si $\phi(x_i, t)$ es un campo esalar armonico variable como la presión

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(x_i, t) = Re A \exp(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\theta(\mathbf{x}, t) = k_i x_i - \omega t \quad \text{fase de la onda}$$

$$A \quad \text{Amplitud de la onda}$$

$$\mathbf{K} = \nabla \theta \quad \text{Vector de onda}$$

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{Frecuencia angular de la onda}$$

$$Re \quad \text{Indica que se toma la parte real}$$

El **periodo espacial** es λ , y se relaciona con el módulo de \mathbf{K}

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} \quad (\text{A.2})$$

λ es la **longitud de onda**, es la distancia a lo largo del **vector de onda** entre dos puntos de igual fase.

El **periodo temporal** es T , y se relaciona con la **frecuencia**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{A.3})$$

La rapidez del movimiento de una superficie θ de fase constante

$$\theta = k_i x_i - \omega t = K s - \omega t \quad (\text{A.4})$$

la encontramos como

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial \theta / \partial t}{\partial \theta / \partial s} = \frac{\omega}{K} \quad (\text{A.5})$$

La velocidad de propagación de la fase en la dirección del vector de onda es definida como la **rapidez de fase**. Resaltamos que la **rapidez de fase** no cumple la suma de vectores (Pedlosky, 2003).

Rapidez de Fase

$$c = \frac{\omega}{K}$$

(A.6)

La relación entre el **vector de onda** y la **frecuencia angular** es llamada **relación de dispersión**, la cual está determinada por la dinámica del fenómeno (Pedlosky, 2003).

Relación de Dispersión

$$\omega = \Omega(k_j)$$

(A.7)

A.2. Ondas gravitacionales de superficie

Las Ondas gravitacionales de superficie se obtienen de la aplicación de las condiciones de frontera en la ecuación de momentum general. En este Apéndice, primero se simplifica la ecuación de momentum general, luego se aplican las 3 condiciones de frontera y finalmente se presenta una solución analítica para las ondas gravitacionales de superficie con una condición inicial en forma de onda armónica.

La ecuación de momentum se expresa (McWilliams, 2006)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi + \mathbf{F} \quad (\text{A.8})$$

es conocida como la ecuación de **Navier Stokes**. Aquí $\mathbf{u} = (u, v, w)$ es la velocidad, ρ es la densidad, p es la presión, Φ es el potencial de la fuerza (por ejemplo la gravedad $\Phi = -gz$) y \mathbf{F} son las fuerzas no conservativas (como la viscosidad).

La ecuación de **conservación de la masa** es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.9})$$

La derivada lagrangiana ¹ en coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Ahora consideramos lo siguiente:

- La fricción es ignorada.
- Comparando los operadores $\partial/\partial t$ y $\mathbf{u} \cdot \nabla$ sobre θ , ignoramos la no linealidad con $\partial\theta/\partial t \gg \mathbf{u} \cdot \nabla\theta$. Así notamos que la rapidez de fase es mayor que la rapidez de las partículas del fluido. Con esta condición la perturbación es transportada por la onda en la superficie y no por movimientos advectivos (Pedlosky, 2003).

Las ondas gravitacionales solo existen si el fluido tiene una superficie libre o una discontinuidad interna de densidad (Holton, 2004). Veamos las ondas en la interfase entre el agua y el aire. Consideramos al aire tan ligero como para aproximar su densidad ρ_0 a cero, y una capa de agua de densidad y profundidad uniformes. Aproximamos el movimiento de la onda a un movimiento lineal (las olas no romperán debido a que no están presentes los términos no lineales (Salmon, 2016)) y el medio en el que se propaga, un fluido incompresible. La conservación de la masa se reduce a ² (Pedlosky, 2003)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Asumiendo todas estas consideraciones, las ecuaciones de momentum en coordenadas cartesianas, donde los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ determinan un plano que corresponde a la superficie del mar en reposo (se ignora la curvatura de la Tierra) y $\hat{\mathbf{z}}$ es un vector unitario opuesto a la dirección local de la gravedad, y de conservación de la masa se reducen a (Salmon, 2016)

¹También es llamada advectiva, substancial o material

²Esto no implica directamente que $\frac{d\rho}{dt} = 0$, de por medio hay consideraciones termodinámicas

Ecuación Hidrodinámica Ideal

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \rho g \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

El rotacional de la ecuación de momentum es cero:

$$\frac{\partial \nabla \times \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.13})$$

por tanto si la vorticidad es cero inicialmente o en cualquier instante, seguirá siendo cero en el transcurso del tiempo. Lo cual nos permite representar la velocidad como el gradiente espacial de una **velocidad potencial** ϕ (Pedlosky, 2003). Un flujo que satisface esta relación es llamado un **flujo potencial** (Salmon, 2016)

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

Aplicando la velocidad potencial ϕ , La ecuacion de conservacion de la masa en (A.12) toma la forma de la **ecuación de Laplace** y la ecuacion de momentum en (A.12) toma la forma de la Ecuacion Lineal de Bernoulli ³:

Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

(A.15)

Ecuación Lineal de Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + p + gz = 0$$

(A.16)

³En Avalos, 2019, tomando como fuentes a Pedlosky, 2003 y Salmon, 2016, se dan detalles del desarrollo que llega a las ecuaciones de Laplace y Lineal de Bernoulli.

A.2.1. Condiciones de frontera

Las ecuaciones de Laplace y Bernoulli no representan ecuaciones de onda. Es en la superficie donde se encuentra la dinámica de ondas. Aplicando las condiciones de frontera se tendrán las ecuaciones de onda. Las ondas gravitacionales de superficie son un ejemplo de la importancia de las condiciones de frontera (Pedlosky, 2003).

Son 3 condiciones de frontera: una en el **fondo** (condición de frontera cinemática) y dos en la **superficie** (condición de frontera cinemática y dinámica). En este Apéndice se busca **expresiones analíticas** para la **velocidad de las partículas de fluido \mathbf{u}** en un fondo plano en H_0 . Se tiene solución analítica asumiendo una **perturbación inicial η de forma armónica**, seno o coseno (Kundu y Cohen, 1990)⁴.

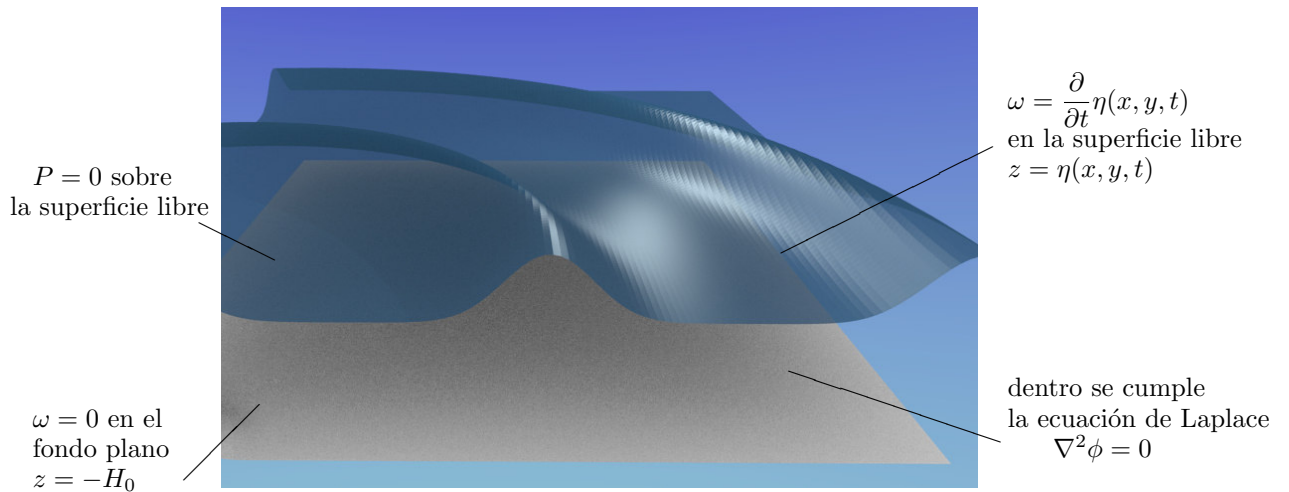


Figura A.1: Ondas gravitacionales de superficie. Condiciones de frontera

Consideremos un océano con un fondo plano en $z = -H_0$ y una superficie libre en $z = \eta(x, y, t)$ (Salmon, 2016 y Kundu y Cohen, 1990):

Condición de frontera cinemática en el fondo. no puede haber flujo a través del fondo del océano

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -H_0 \quad (\text{A.17})$$

⁴En Avalos, 2019, tomando como fuentes a Kundu y Cohen, 1990 y Salmon, 2016, se dan detalles del desarrollo que llega a η , \mathbf{u} y la rapidez de fase c .

Condición de frontera cinemática en la superficie. las partículas de fluido en la superficie libre deben permanecer en la superficie.

$$w = \frac{\partial}{\partial t}\eta(x, y, t) \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{A.18})$$

Condición de frontera dinámica en la superficie. establece que la presión debe ser continua en la superficie libre

$$p = p_a \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{A.19})$$

donde p_a es la presión atmosférica, al considerar cero la densidad del aire, tenemos para **ondas libres**

$$p = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{A.20})$$

A.2.2. Solucion analítica

Ahora juntamos las ecuaciones (A.15) y (A.16)

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \text{en} \quad -H_0 < z < \eta(x, y, t) \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + p + gz = 0 \quad \text{en} \quad -H_0 < z < \eta(x, y, t) \quad (\text{A.22})$$

y sus **condiciones de frontera**

$$w = \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, -H_0, t) = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, \eta(x, y, t)) = \frac{\partial}{\partial t}\eta(x, y, t) \quad (\text{A.24})$$

$$p = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{A.25})$$

Este problema lineal determina por completo ϕ y η . Veamos para (A.21) soluciones de la forma (Kundu y Cohen, 1990 y Pedlosky, 2003)

$$\phi(x, y, z, t) = F(z) \sin(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.26})$$

donde k y l son constantes arbitrarias, $F(z)$ será determinada y ω es una constante a determinar. Se tiene

$$\phi(x, y, z, t) = [C_1 \cosh(K(z + H_0))] \sin(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.27})$$

donde ω cumple la relación

Relación de Dispersión

$$\omega^2 = gK \tanh(KH_0) \quad (\text{A.28})$$

Se tiene la **perturbacion en la superficie** η debido a la **condicion inicial armonica** $\eta(t = 0) \propto \cos(x, y)$

$$\eta = \frac{\omega C_1}{g} \cosh(KH_0) \cos(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.29})$$

y la **velocidad** $\mathbf{u} = (u, v, w)$

$$u = kC_1 \cosh(K(z + H_0)) \cos(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.30})$$

$$v = lC_1 \cosh(K(z + H_0)) \cos(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.31})$$

$$w = KC_1 \sinh(K(z + H_0)) \sin(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.32})$$

donde $\mathbf{K} = (k, l)$ es el **vector de onda**, y su módulo es $|\mathbf{K}| = K = \sqrt{k^2 + l^2}$. Dando forma a la Relación de Dispersión (A.28) se define A (Salmon, 2016)

$$A = \frac{\omega C_1}{g} \cosh(KH_0) = \frac{KC_1}{\omega} \sinh(KH_0) \quad (\text{A.33})$$

con lo cual (Salmon, 2016 y Pedlosky, 2003)

$$\eta = A \cos(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.34})$$

$$u = A\omega \frac{k}{K} \frac{\cosh(K(z + H_0))}{\sinh(KH_0)} \cos(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.35})$$

$$v = A\omega \frac{l}{K} \frac{\cosh(K(z + H_0))}{\sinh(KH_0)} \cos(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.36})$$

$$w = A\omega \frac{\sinh(K(z + H_0))}{\sinh(KH_0)} \sin(kx + ly - \omega t) \quad (\text{A.37})$$

La frecuencia angular está determinada por la **relación de dispersión** con lo cual la **rapidez de fase de la onda** es (Pedlosky, 2003)

Rapidez de Fase

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{K}|} = \sqrt{g |\mathbf{K}|^{-1} \tanh(|\mathbf{K}| H_0)}$$

(A.38)

Apéndice B

Aguas someras. Maremotos

Se busca simplificar las ecuaciones de las ondas gravitacionales de superficie para el caso de maremotos, con el fin de resolverla numéricamente con condiciones iniciales arbitrarias que corresponden a la deformación inicial de la superficie del océano. En este Apéndice se simplifican las ecuaciones de las ondas gravitacionales mediante la aproximación de aguas someras y se aplican las condiciones de frontera de manera que se obtengan las ecuaciones que describen la onda de maremoto en la superficie.

B.1. Aproximación hidrostática y columnar

En la ecuación hidrodinámica ideal (A.12), escribimos las componentes de la **conservación del momentum**, donde la densidad constante es absorbida en la presión (Salmon, 2016)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{B.1b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (\text{B.1c})$$

y la **conservación de la masa**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.1d})$$

En la condición de **aguas someras**, donde se cumple $\lambda \gg H_0$, hay dos aproximaciones, la primera es la **aproximación hidrostática** (Holton, 2004)

La aceleración en la vertical $\partial w/\partial t$ es muy pequeña, y se omite.

Quedando de (B.1c)

Ecuación Hidrostática

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (\text{B.2})$$

Integrando desde un punto (x, y, z) interior hasta un punto en la superficie $(x, y, \eta(x, y))$, donde $p = 0$, tenemos (Koshimura, 2009)

$$0 - p(x, y, z) = -g(\eta(x, y) - z) \quad (\text{B.3})$$

con lo que la presión es igual a el peso de la columna de líquido sobre el punto $p(x, y, z)$. Reemplazando en las ecuaciones de conservación del momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.4a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{B.4b})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.4c})$$

La segunda **aproximación de fluido columnar** (Holton, 2004) es:

Las componentes de la velocidad u y v son independientes de z .

B.2. Condiciones de frontera e integración

Son 3 condiciones de frontera: una en el **fondo** (condición de frontera cinemática) y dos en la **superficie** (condición de frontera cinemática y dinámica). En este Apéndice se busca **las ecuaciones de aguas someras** que describen un maremoto ¹.

Condición de frontera cinemática en el fondo: indica que las partículas de fluido en el fondo $z = -H$ no atraviezan el fondo $H = H(x, y)$.

¹En Avalos, 2019, tomando como fuente a Koshimura, 2009, se dan detalles del desarrollo que llega a las ecuaciones de aguas someras lineales.

$$w = - \left(u \frac{\partial}{\partial x} H + v \frac{\partial}{\partial y} H \right) \quad \text{en} \quad z = -H(x, y) \quad (\text{B.5})$$

Condición de frontera cinemática en la superficie: indica que las partículas de fluido en la superficie $z = \eta(x, y, t)$ permanecen en la superficie

$$w = \left(\frac{\partial}{\partial t} \eta + u \frac{\partial}{\partial x} \eta + v \frac{\partial}{\partial y} \eta \right) \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{B.6})$$

Condición de frontera dinámica en la superficie: indica que la presión es cero: $P = 0$ (ya esta incluida en la aproximación hidrostática)

$$p = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{B.7})$$

Integración: integramos la conservación de la masa (B.4c) desde el fondo $z = -H$ hasta la superficie $z = \eta$ (Koshimura, 2009)

$$\int_{-H}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$$

aplicando la regla integral de Leibniz ², reemplazando en w las **condiciones de frontera cinemáticas** de fondo y superficie, queda

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial}{\partial y} N = 0 \quad (\text{B.8})$$

donde se definen un **flujo de descarga** M y N y una **velocidad promedio** \bar{u} y \bar{v}

$$M = \int_{-H}^{\eta} u dz = \bar{u}(\eta + H) \quad (\text{B.9})$$

$$N = \int_{-H}^{\eta} v dz = \bar{v}(\eta + H) \quad (\text{B.10})$$

²

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} U(x, z) dz = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} U(x, z) dz + U(x, b(x)) \frac{\partial b(x)}{\partial x} - U(x, a(x)) \frac{\partial a(x)}{\partial x}$$

Integramos la conservación del momentum (B.4a) y (B.4b) desde el fondo $z = -H$ hasta la superficie $z = \eta$ (Koshimura, 2009)

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{B.12})$$

B.3. Ecuaciones de aguas someras

De las ecuaciones integradas en la vertical (B.4a) tenemos las **ecuaciones lineales de aguas someras** (Koshimura, 2009)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial}{\partial y} N = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{B.15})$$

En la propagación se debe considerar la curvatura de la superficie de la Tierra (Levin y Nosov, 2009). El modelo numérico TUNAMI resuelve las ecuaciones lineales de aguas someras en coordenadas esféricas en los dominios de propagación (Goto y Ogawa, 1997)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} M + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N \cos \varphi) \right\} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{-g(\eta + H)}{R \cos \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{-g(\eta + H)}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \quad (\text{B.18})$$

donde R es el radio de la Tierra, φ es la coordenada latitud y λ es la coordenada longitud.

Ecuaciones no lineales de aguas someras: Incluye los términos de advección y de fricción (Goto y Ogawa, 1997)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial}{\partial y} N = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) = -gD \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) = -gD \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_{by}}{\rho} \quad (\text{B.21})$$

donde $D = \eta + H$, los términos que contienen M^2 , N^2 y MN representan la advección, y $\frac{\tau}{\rho}$ representa la fricción en el fondo $z = -H$

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = \frac{gn^2}{D^{7/3}} M \sqrt{M^2 + N^2} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\tau_{by}}{\rho} = \frac{gn^2}{D^{7/3}} N \sqrt{M^2 + N^2} \quad (\text{B.23})$$

n es el coeficiente de rugosidad de Manning.

El modelo numérico TUNAMI resuelve las ecuaciones no lineales de aguas someras en el dominio de inundación (Goto y Ogawa, 1997).

Rapidez de Fase: Para aguas someras la longitud de onda es grande comparada con la profundidad $\lambda \gg H_0$. Aplicando esta condición en (A.38) tenemos (Pedlosky, 2003)

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{K}|} = \sqrt{g |\mathbf{K}|^{-1} \tanh(|\mathbf{K}| H_0)} \approx \sqrt{g |\mathbf{K}|^{-1} (|\mathbf{K}| H_0)}$$

Rapidez de Fase en Aguas Someras

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{K}|} \approx \sqrt{g H_0} \quad (\text{B.24})$$

La velocidad de grupo $v_{grupo} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{K}}$ coincide con rapidez de fase. Estas ondas son llamadas no dispersivas (Holton, 2004).

Velocidad de Grupo en Aguas Someras

$$v_{grupo} = \frac{\partial \omega}{\partial |\mathbf{K}|} \approx \sqrt{g H_0} \quad (\text{B.25})$$

Apéndice C

Esquema del modelado numérico

C.1. Método de diferencias finitas

Se define una grilla de puntos en el plano (t, x) . Sean h y k números positivos, la grilla es el conjunto de puntos $(t_n, x_m) = (nh, mk)$ para enteros arbitrarios n y m . Para una función u definida sobre la grilla escribimos u_m^n para valores de u en el punto (t_n, x_m) . Para un valor n fijo, el conjunto de puntos (t_n, x_m) es llamado **nivel de grilla** n . Son de interés los valores pequeños de h y k ¹. El método de las diferencias finitas consiste en reemplazar las derivadas parciales por diferencias. Tenemos para la derivada parcial de u respecto a t (Thomas, 1995):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_m) &\simeq \frac{u(t_n + k, x_m) - u(t_n, x_m)}{k} \\ &\simeq \frac{u(t_n + k, x_m) - u(t_n - k, x_m)}{2k}\end{aligned}\tag{C.1}$$

Al ver las definiciones con límites, notamos que son aproximaciones válidas

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t, x)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t - \varepsilon, x)}{2\varepsilon}\end{aligned}\tag{C.2}$$

De manera similar se aproximan las derivadas respecto a x .

¹También se representan como Δx y Δt respectivamente

Tomando como ejemplo la siguiente ecuación ²

$$u_t + au_x = 0 \tag{C.3}$$

se tienen los siguientes esquemas, aproximaciones, de diferencias finitas (Strikwerda, 2004):

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0 \tag{C.4}$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0 \tag{C.5}$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 \tag{C.6}$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n-1}}{2k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 \tag{C.7}$$

con las siguientes denominaciones

- (C.4): adelante en el tiempo y adelante en el espacio
- (C.5): adelante en el tiempo y atrás en el espacio
- (C.6): adelante en el tiempo y centrado en el espacio
- (C.7): es llamado el **esquema leapfrog**.

²Una ecuación diferencial hiperbólica es de la forma

$$u_t + au_x = 0$$

donde a es una constante, t es el tiempo, y x es la variable espacial. Se usa la notación $u_t = \partial u / \partial t$. Asignamos a $u(t, x)$ en un tiempo inicial $t = 0$, el valor $u_0(x) \forall$ real x , y deseamos determinar los valores de $u(t, x)$ para $0 < t$. Esto es llamado **problema de valor inicial**. La solución es (se puede probar que es la única solución)

$$u(t, x) = u_0(x - at)$$

Se tienen dos resultados importante: 1) la solución en cualquier tiempo t_0 es una copia de la función original, pero desplazada a la derecha. Las líneas en el plano (t, x) donde $x - at$ es constante son llamadas **características**. El parámetro a es llamado la **rapidez de propagación** a lo largo de la característica. Así la solución es una **onda** no dispersiva con rapidez a ; 2) mientras que la ecuación diferencial parcial hiperbólica debe ser diferenciable, la solución no requiere ser diferenciable en u_0 . En general, se permiten soluciones discontinuas para problemas hiperbólicos (Strikwerda, 2004).

C.2. Criterios en el estudio de la solución de un esquema numérico en diferencias finitas

Se consideran los criterios generales de: consistencia, convergencia, estabilidad. Estos criterios se aplican el caso particular de las ecuaciones hiperbólicas, donde se encuentra la condición de Courant-Friedrichs-Lewy ([Thomas, 1995](#)).

C.3. Ecuaciones hiperbólicas bidimensionales

Consideramos la siguiente EDP

$$v_t + av_x + bv_y = 0 \quad (\text{C.8})$$

con la condición inicial

$$v(x, y, 0) = f(x, y) \quad (\text{C.9})$$

La solución esta dada por $v(x, y, t) = f(x - at, y - bt)$. Así como el caso unidimensional, la solución consiste en trasladar la condición inicial en la dirección apropiada. La rapidez de propagación en la dirección x es a , y en la dirección y es b .

Un esquema de diferencias es de la forma

$$u_{jk}^{n+1} = (1 - R_x(u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n) - R_y(u_{jk}^n - u_{j,k-1}^n))u_{jk}^n \quad (\text{C.10})$$

donde $R_x = a\Delta t/\Delta x$ y $R_y = b\Delta t/\Delta y$. Siguiendo un análisis similar para el caso unidimensional, encontramos que igualmente la condición CFL multi-dimensional es una medida imprecisa de la estabilidad y convergencia, sin embargo; la condición CFL es fácil de calcular y es un excelente límite superior para la condición de estabilidad ([Thomas, 1995](#)). Para nuestro esquema de diferencias la condición CFL se cumple si

$$0 \leq R_x \leq 1 \quad y \quad 0 \leq R_y \leq 1 \quad (\text{C.11})$$

es decir

$$\max\{|R_x|, |R_y|\} \leq 1 \quad (\text{C.12})$$

C.4. Dispersión

Al resolver $v_t + av_x = 0$ con el esquema (??), por ejemplo con la condición inicial $\sin^{40}(\pi x)$ para $0 < x < 1$, con $\Delta x = 0,01$ y luego con $\Delta x = 0,0001$ cumpliendo que $|R| = 0,8$; para niveles de tiempo $n\Delta t$ cercanos a 10, vemos que la solución (en

forma de una sola onda \sin^{40}) con $\Delta x = 0,0001$ es más suave que usando $\Delta x = 0,01$; y en ambos casos se ve un amortiguamiento de la solución (la amplitud de la onda va disminuyendo). Al aumentar los niveles de tiempo $n\Delta t$, el amortiguamiento es aún más notorio y hasta puede llegar a un valor constante. Este error se debe a la disipación o la dispersión (Thomas, 1995).

C.4.1. Dispersión y disipación en ecuaciones diferenciales parciales

Al resolver una EDP vemos que dependen de un términos de forma exponencial (Thomas, 1995)

$$v(x, t) = \hat{v}e^{i(\omega t + \beta x)} = \hat{v}e^{i\omega t}e^{i\beta x} \quad (\text{C.13})$$

Este término exponencial describe una onda en el espacio y tiempo. La **frecuencia angular** de la onda es ω , el **número de onda** es β y se relaciona con la **longitud de onda** λ mediante $\lambda = 2\pi/\beta$.

Si consideramos la solución (C.13) en las ecuaciones

$$v_t = \gamma v_{xx} \quad (\text{C.14})$$

$$v_t + av_x = 0 \quad (\text{C.15})$$

vemos que la función (C.13) no se satisface sin una relación entre ω y β . Esta es la llamada **relación de dispersión** $\omega = \omega(\beta)$ (veremos que es más lógico llamarla relación de dispersión-disipación). Veamos los siguientes casos:

- Si reemplazamos (C.13) en (C.14), vemos que v es una solución si $\omega = i\gamma\beta^2$
- Si reemplazamos (C.13) en (C.15), vemos que v es una solución si $\omega = -a\beta$

En general para que la expresión (C.13) satisfaga una EDP, existe una relación de dispersión entre ω y β .

Para (C.14) la solución es

$$v(x, t) = \hat{v}e^{-\gamma\beta^2 t}e^{i\beta x} \quad (\text{C.16})$$

Vemos que la onda no se mueve (no tiene la forma $x - ct$) y decae con el tiempo (la amplitud es una exponencial de la forma e^{-t}). Cuando ω es imaginario, la solución o bien crece o decae. Este es el caso de la **ecuaciones parabólicas**.

Para (C.15) la solución es

$$v(x, t) = \hat{v}e^{i\beta(x-at)} \quad (\text{C.17})$$

En general vemos que cuando ω es real, el modo se propaga con rapidez $-\omega/\beta$ (pues tiene la forma $x - ct$) y la amplitud no decae. Notamos que cuando ω es lineal, la rapidez de propagación $-\omega/\beta = -(-a\beta)/\beta = a$ es independiente de la frecuencia.

Al buscar aproximar una ecuación de diferencias a la solución de una determinada ecuación diferencial, se puede ver cuan bien el decaimiento de los modos de Fourier, de la ecuación de diferencias, se corresponden con los modos de la ecuación diferencial. Un esquema es inestable, si alguno de los modos de Fourier crece sin límites. Tenemos las siguientes definiciones para una solución de una EDP:

- **Disipación**; cuando, en la solución, los modos de Fourier no crecen con el tiempo y al menos uno de los modos decae
- **No disipación**; cuando, en la solución, los modos de Fourier no crecen ni decaen.
- **Dispersión**; cuando, en la solución, los modos de Fourier de diferentes longitudes de onda λ se propagan a diferentes rapidezces.

C.4.2. Dispersión y disipación en ecuaciones de diferencias

Consideramos el modo de Fourier discreto (Thomas, 1995), análogo a (C.13)

$$u_k^n = \hat{u} e^{i(\omega(n\Delta t) + \beta(k\Delta x))} \quad (\text{C.18})$$

$\omega(\beta)$ es la relación de dispersión discreta. Notamos que si consideramos la transformada de Fourier discreta, el término $e^{i\beta k\Delta x}$ de (C.18) se corresponde con $e^{ik\xi}$. Así, considerando $0 \leq \beta\Delta x \leq \pi$ (de esta manera podemos aplicar la definición de la transformada de Fourier) obtenemos información de los modos de Fourier presentes en la solución.

En general la relación de dispersión $\omega = \omega(\beta)$ será compleja, por lo que es conveniente establecer $\omega = \alpha + ib$, donde $\alpha = \alpha(\beta)$ y $b = b(\beta)$, donde α y b se asumen reales. Si insertamos $\omega = \alpha + ib$ en (C.18) tenemos la forma

$$\begin{aligned} u_k^n &= \hat{u} e^{i(\alpha(n\Delta t) + ib(n\Delta t) + \beta(k\Delta x))} \\ u_k^n &= \hat{u} (e^{-b\Delta t})^n e^{i\beta[k\Delta x - (\alpha/\beta)n\Delta t]} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Notamos los siguiente:

- Si $b > 0$ para algún $\beta \rightarrow$ la ecuación de diferencias asociada es disipativa.
- Si $b < 0$ para algún $\beta \rightarrow$ la solución del esquema crece sin límites (y el esquema es inestable).
- Si $b = 0$ para todo $\beta \rightarrow$ el esquema es no disipativo.

también

- Si $\alpha = 0$ para todo $\beta \rightarrow$ no hay propagación de onda.
- Si $\alpha \neq 0$ para algún $\beta \rightarrow$ hay propagación de onda con rapidéz $-\alpha/\beta$.
- Si $-\alpha/\beta$ es una función no trivial de $\beta \rightarrow$ el esquema es dispersivo.

Disipación y dispersión del esquema FTFS Veamos el esquema (??)

$$u_k^{n+1} = u_k^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k+1}^n - u_k^n) \quad (\text{C.20})$$

donde $R = a\Delta t/\Delta x$ y $a < 0$. Si remplazamos (C.18) y damos forma

$$e^{i\omega\Delta t} = e^{i\alpha\Delta t} e^{i\beta\Delta x} = 1 + R - R \cos \beta\Delta x - iR \sin \beta\Delta x \quad (\text{C.21})$$

Disipación:

$$e^{-b\Delta t} = \sqrt{(1 + R)^2 - 2R(1 + R)\cos\beta\Delta x + R^2} \quad (\text{C.22})$$

Para $|R| < 1$ los modos $\beta \neq 0$ decaen y los $\beta = 0$ no decaen ni crecen. Por tanto, el esquema es disipativo.

Dispersión: Dividiendo $e^{i\omega\Delta t}$ entre $e^{-b\Delta t}$ se tiene una expresión para $e^{i\alpha\Delta t}$, de aquí se tiene

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t} \arctan \left\{ \frac{R \sin \beta\Delta x}{1 + R - R \cos \beta\Delta x} \right\}$$

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t} \arctan \left\{ \frac{R \sin \beta\Delta x}{1 + 2R \sin^2(\beta\Delta x/2)} \right\} \quad (\text{C.23})$$

α es no lineal, por lo cual el esquema de diferencias es dispersivo.

Esquema Leapfrog El esquema de leapfrog para la EDP [Thomas, 1995](#)

$$v_t + av_x = 0$$

es

$$u_k^{n+1} = u_k^{n-1} - R(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \quad (\text{C.24})$$

En los esquemas de tres niveles se construye un sistema de ecuaciones; se cumple el criterio de estabilidad discreto de Von Neumann si el autovalor λ (el cual es igual a $e^{i\omega\Delta t}$) de la matriz de amplificación cumple a su vez $|\lambda| \leq 1$. En el esquema (C.24) se tiene

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{1 - R^2 \sin^2 \xi} - iR \sin \xi \quad (\text{C.25})$$

donde $\xi = \beta\Delta x$ es la variable de la transformada de Fourier. Vemos que cuando $R^2 \leq 1$, se tiene $1 - R^2 \sin^2 \xi \geq 0$ y

$$|\lambda|_{\pm} = 1$$

Así se satisface el criterio de estabilidad discreto de Von Neumann.

Disipación: Usando los modos de Fourier se tiene que; el esquema de Leapfrog es uno de los pocos esquemas que propaga la forma de la onda sin disipación.

Dispersión: Dando la forma exponencial al autovalor

$$e^{i\omega\Delta t} = \pm\sqrt{1 - R^2 \sin^2 \xi} - iR \sin \xi \quad (\text{C.26})$$

tenemos

$$\alpha_{\pm} = -\frac{1}{\Delta t} \arctan \left\{ \frac{R \sin \xi}{\pm\sqrt{1 - R^2 \sin^2 \xi}} \right\} \quad (\text{C.27})$$

usando la expansión de Taylor de $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ y $\arctan z$ para $\xi \ll 1$

$$-\alpha_{\pm}/\beta = \pm a + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (\text{C.28})$$

α_{\pm} es llamada la raíz principal, es la raíz a la cual la solución se debe aproximar; en determinados casos se obtiene la aproximación. En el caso de TUNAMI, la dispersión del esquema de Leapfrog (con una elección adecuada del grillado Δx) reemplaza la dispersión física (Goto y Ogawa, 1997), es decir equivale al modelo matemático de la dispersión física. Esta equivalencia requiere un incremento del grillado espacial conforme la propagación se dirige a batimetrías profundas (el caso transoceánico). Mar adentro, aunque la dispersión es controlada; debe considerarse el efecto Coriolis (Avalos, 2019).

Apéndice D

Programación

D.1. Subrutina modificada, Fortran

```
SUBROUTINE NLMMT(IF, JF, Z, M, N, DZ, DM, DN, HZ, HM, HN, DX, DY, DT, FM, VMD, VND)
REAL M, N
DIMENSION Z(IF, JF, 2), M(IF, JF, 2), N(IF, JF, 2)
DIMENSION DZ(IF, JF, 2), DM(IF, JF, 2), DN(IF, JF, 2)
DIMENSION HZ(IF, JF), HM(IF, JF), HN(IF, JF)
GG=9.8
GX=1.0E-5
RX=DT/DX
RY=DT/DY
C
C      ----- CAL. OF TOTAL DEPTH AT POINT OF DISCHARGE -----
C
DO 10 J=1, JF
DO 10 I=1, IF-1
DM2=0.5*(DZ(I, J, 2)+DZ(I+1, J, 2))
DM1=0.25*(DZ(I, J, 2)+DZ(I, J, 1)+DZ(I+1, J, 2)+DZ(I+1, J, 1))
IF(DM1.LT.GX)DM1=0.0
IF(DM2.LT.GX)DM2=0.0
DM(I, J, 1)=DM1
DM(I, J, 2)=DM2
10 CONTINUE
DO 20 J=1, JF-1
```

```

DO 20 I=1,IF
DN2=0.5*(DZ(I,J,2)+DZ(I,J+1,2))
DN1=0.25*(DZ(I,J,2)+DZ(I,J,1)+DZ(I,J+1,2)+DZ(I,J+1,1))
IF(DN1.LT.GX)DN1=0.0
IF(DN2.LT.GX)DN2=0.0
DN(I,J,1)=DN1
DN(I,J,2)=DN2
20 CONTINUE
C
C ----- CAL. OF LINEAR TERMS (X-DIRECTION) -----
C
FN=0.5*DT*GG*FM**2
DO 200 J=2,JF
DO 200 I=2,IF-1
IF(HZ(I,J).LT.-20.0)GO TO 200
IF(HM(I,J).LT.-20.0)GO TO 30
IF(DZ(I,J,2))31,31,32
31     IF(DZ(I+1,J,2))30,30,34
32     IF(DZ(I+1,J,2))35,35,36
34     IF(Z(I+1,J,2)+HZ(I,J))30,30,37
35     IF(Z(I,J,2)+HZ(I+1,J))30,30,38
36     DD=DM(I,J,2)
GO TO 39
37     DD=Z(I+1,J,2)+HZ(I,J)
GO TO 39
38     DD=Z(I,J,2)+HZ(I+1,J)
39     XNN=0.25*(N(I,J,1)+N(I+1,J,1)+N(I,J-1,1)+N(I+1,J-1,1))
DF=DD
IF(DF.LT.1.0E-2)DF=1.0E-2
FF=FN*SQRT(M(I,J,1)**2+XNN**2)/DF**(7.0/3.0)
IF(DD.LT.GX)GO TO 30
XM=(1.0-FF)*M(I,J,1)-GG*RX*DD*(Z(I+1,J,2)-Z(I,J,2))
C
C ----- CAL. OF NON-LINEAR TERMS (CONVECTION TERMS) -----
C
IF(I.LE.2.OR.J.LE.3)GO TO 40

```

```

IF(I+2.GT.IF.OR.J+2.GT.JF) GO TO 40
IF(DM(I,J,1).LT.GX)GO TO 40
IF(M(I,J,1))41,41,42
41      IF(DM(I+1,J,1).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I+2,J,2).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I+1,J,2).LT.GX)GO TO 40
XM=XM-RX*(M(I+1,J,1)**2/DM(I+1,J,1)-M(I,J,1)**2/DM(I,J,1))
GO TO 43
42      IF(DM(I-1,J,1).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I-1,J,2).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I,J,2).LT.GX)GO TO 40
XM=XM-RX*(M(I,J,1)**2/DM(I,J,1)-M(I-1,J,1)**2/DM(I-1,J,1))
43      IF(XNN)44,44,45
44      XNE=0.25*(N(I,J+1,1)+N(I+1,J+1,1)+N(I,J,1)+N(I+1,J,1))
IF(DM(I,J+1,1).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I,J+1,2).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I,J+2,2).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I+1,J+1,2).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I+1,J+2,2).LT.GX)GO TO 40
XM=XM-RY*(M(I,J+1,1)*XNE/DM(I,J+1,1)-M(I,J,1)*XNN/DM(I,J,1))
GO TO 40
45      XNE=0.25*(N(I,J-1,1)+N(I+1,J-1,1)+N(I,J-2,1)+N(I+1,J-2,1))
IF(DM(I,J-1,1).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I,J-2,2).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I,J-1,2).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I+1,J-1,2).LT.GX)GO TO 40
IF(DZ(I+1,J-2,2).LT.GX)GO TO 40
XM=XM-RY*(M(I,J,1)*XNN/DM(I,J,1)-M(I,J-1,1)*XNE/DM(I,J-1,1))
40      XM=XM/(1.0+FF)
IF(ABS(XM).LT.1.0E-10)XM=0.0
C
C      ----- LIMITING OF DISCHARGE -----
C
IF(ABS(XM).LT.GX) XM=0.0
IF(XM.GT.10.0*DD)XM=10.0*DD
IF(XM.LT.-10.0*DD)XM=-10.0*DD

```



```

M(I,J,2)=XM
VMD=M/HZ
GO TO 200
30     M(I,J,2)=0.0

200     CONTINUE
C
C ----- CAL. OF LINEAR TERMS (Y-DIRECTION) -----
C
DO 220 J=2,JF-1
DO 220 I=2,IF
IF(HZ(I,J).LT.-20.0) GO TO 220
IF(HN(I,J).LT.-20.0)GO TO 130
IF(DZ(I,J,2))131,131,132
131     IF(DZ(I,J+1,2))130,130,134
132     IF(DZ(I,J+1,2))135,135,136
134     IF(Z(I,J+1,2)+HZ(I,J))130,130,137
135     IF(Z(I,J,2)+HZ(I,J+1))130,130,138
136     DD=DN(I,J,2)
GO TO 139
137     DD=Z(I,J+1,2)+HZ(I,J)
GO TO 139
138     DD=Z(I,J,2)+HZ(I,J+1)
139     XMM=0.25*(M(I,J,1)+M(I,J+1,1)+M(I-1,J,1)+M(I-1,J+1,1))
DF=DD
IF(DF.LT.1.0E-2)DF=1.0E-2
FF=FN*SQRT(N(I,J,1)**2+XMM**2)/DF**(7.0/3.0)
IF(DD.LT.GX)GO TO 130
XN=(1.0-FF)*N(I,J,1)-GG*RY*DD*(Z(I,J+1,2)-Z(I,J,2))
C
C ----- CAL. OF NON-LINEAR TERMS (CONVECTION TERMS) -----
C
IF(I.LE.2.OR.J.LE.2)GO TO 140
IF(I+2.GT.IF.OR.J+2.GT.JF) GO TO 140
IF(DN(I,J,1).LT.GX)GO TO 140
IF(N(I,J,1))141,141,142

```

```

141      IF(DN(I,J+1,1).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I,J+2,2).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I,J+1,2).LT.GX)GO TO 140
XN=XN-RY*(N(I,J+1,1)**2/DN(I,J+1,1)-N(I,J,1)**2/DN(I,J,1))
GO TO 143
142      IF(DN(I,J-1,1).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I,J-1,2).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I,J,2).LT.GX)GO TO 140
XN=XN-RY*(N(I,J,1)**2/DN(I,J,1)-N(I,J-1,1)**2/DN(I,J-1,1))
143      IF(XMM)144,144,145
144      XME=0.25*(M(I+1,J,1)+M(I+1,J+1,1)+M(I,J,1)+M(I,J+1,1))
IF(DN(I+1,J,1).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I+1,J,2).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I+2,J,2).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I+1,J+1,2).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I+2,J+1,2).LT.GX)GO TO 140
XN=XN-RX*(N(I+1,J,1)*XME/DN(I+1,J,1)-N(I,J,1)*XMM/DN(I,J,1))
GO TO 140
145      XME=0.25*(M(I-1,J,1)+M(I-1,J+1,1)+M(I-2,J,1)+M(I-2,J+1,1))
IF(DN(I-1,J,1).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I-2,J,2).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I-2,J+1,2).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I-1,J,2).LT.GX)GO TO 140
IF(DZ(I-1,J+1,2).LT.GX)GO TO 140
XN=XN-RX*(N(I,J,1)*XMM/DN(I,J,1)-N(I-1,J,1)*XME/DN(I-1,J,1))
140      XN=XN/(1.0+FF)
IF(ABS(XN).LT.1.0E-10)XN=0.0
C
C ----- LIMITING OF DISCHARGE -----
C
IF(XN.GT.10.0*DD)XN=10.0*DD
IF(XN.LT.-10.0*DD)XN=-10.0*DD
N(I,J,2)=XN
VND=N/HZ
GO TO 220
130      N(I,J,2)=0.0

```

```
220 CONTINUE
RETURN
END
```

D.2. Posprocesamiento, Python

```
pathDM0='C:\\Users\\juan\\Desktop\\Tverde3\\D_VM\\vM1000'
DM0=np.loadtxt(pathDM0)
DM0=np.rot90(DM0,1)
filDM=DM0.shape [0]; colDM=DM0.shape [1]

for file_step in range(1,288,1):
frame=1000+file_step

pathDM='C:\\Users\\juan\\Desktop\\Tverde3\\D_VM\\vM'+str(frame)
DM=np.loadtxt(pathDM); DM=np.rot90(DM,1)

pathDN='C:\\Users\\juan\\Desktop\\Tverde3\\D_VN\\vN'+str(frame)
DN=np.loadtxt(pathDN); DN=np.rot90(DN,1)

MN=np.zeros((filDM,colDM))
for x in range(0,filDM,1):
for y in range(0,colDM,1):
MN[x,y]= np.sqrt(DM[x,y]**2 + DN[x,y]**2)

np.savetxt('Vmod_'+str(frame),MN,fmt='%6.2f')

pathDmod1='C:\\Users\\juan\\Desktop\\Tverde3\\D_Vmod\\Vmod_1001'
Dmod1=np.loadtxt(pathDmod1)
filDM=Dmod1.shape [0]; colDM=Dmod1.shape [1]

VM=np.zeros((filDM,colDM))
VN=np.zeros((filDM,colDM))

for file_step in range(2,288,1):
frame=1000+file_step
```

```

pathDmod='C:\\Users\\juan\\Desktop\\Tverde3\\D_Vmod\\Vmod_'+str(frame)
Dmod=np.loadtxt(pathDmod)

pathDM='C:\\Users\\juan\\Desktop\\Tverde3\\D_VM\\vM'+str(frame)
DM=np.loadtxt(pathDM); DM=np.rot90(DM,1)

pathDN='C:\\Users\\juan\\Desktop\\Tverde3\\D_VN\\vN'+str(frame)
DN=np.loadtxt(pathDN); DN=np.rot90(DN,1)

for x in range(0,filDM,1):
for y in range(0,colDM,1):
if Dmod[x,y] > Dmod1[x,y]:
Dmod1[x,y] = Dmod[x,y]
VM[x,y]=DM[x,y]
VN[x,y]=DN[x,y]
else:
Dmod1[x,y]= Dmod1[x,y]

np.savetxt('VM_max_'+str(frame),VM,fmt='%6.2f')
np.savetxt('VN_max_'+str(frame),VN,fmt='%6.2f')

```

Referencias

- Aki, K. (1966). Generation and propagation of g waves from the niigata earthquake of june 16, 1964. part 2. estimation of earthquake moment, released energy, and stress-strain drop from the g wave spectrum. *Bull. Earthquake Res. Inst.* 44, pp 73-88.
- Arnott, R. (2010). *Introduction to Coastal Processes and Geomorphology*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- Avalos, J. (2019). El efecto coriolis en la propagación del maremoto de chile del 2010. *Tesis de Licenciatura, UNMSM, Perú*.
- Denoel, V. (2007). *An Introduction to Reliability Analysis*. Japan. University of Nagoya City.
- Didenkulova, I., Pelinovsky, E. and Sergeeva, A. (2008). Runup of long irregular waves on plane beach. en pelinovsky, e. extreme ocean waves. *Netherlands. SPRINGER*.
- Didenkulova, I., Pelinovsky, E., Soomere, T. and Zahibo, N. (2007). Runup of nonlinear asymmetric waves on a plane beach. en kundu, a. tsunami and nonlinear waves. *Alemania. SPRINGER*.
- Diniz, P., da Silva, E. and Netto, S. (2010). *Digital Signal Processing, system analysis and design*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- Dorbath, L., Cisternas, A. and Dorbath, C. (1990). Assessment of the size of large and great historical earthquakes in Perú. *Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 80, N°3, pp 551-576*.
- Foytong, P., Ruangrassamee, A., Shoji, G., Hiraki, Y. and Ezura, Y. (2013). Analysis of tsunami flow velocities during the march 2011 tohoku, japan, tsunami. *Earthquake Spectra, Volume 29, No. S1, pp S161-S181*.

- Fritz, H., Borrero, J., Synolakis, C. and Yoo, J. (2006). 2004 indian ocean tsunami flow velocity measurements from survivor videos. *Geophysical Research Letters*, Vol 33, L24605, doi 10.1029/2006GL026784.
- Fujima, K. (2007). Tsunami runup in lagrangian description. en kundu, a. tsunami and nonlinear waves. *Alemania. SPRINGER*.
- Goto y Ogawa, (1997). *Numerical Method of Tsunami simulation with the leap-frog scheme*. UNESCO.
- Holton, J. (2004). *An Introduction to Dynamic Meteorology*. USA. ELSEVIER.
- Jiménez, C. (2015). El maremoto notable de 1746. *Tesis de Maestría, UNMSM, Perú*.
- Koshimura, S. (2009). *TUNAMI-CODE*. JST-JICA Peru Project.
- Koshimura, S., Oie, T., Yanagisawa, H. and Imamura, F. (2009). Developing fragility functions for tsunami damage estimation using numerical model and post-tsunami data from banda aceh, indonesia. *Coastal Engineering Journal*, vol. 51, No.3, 243-273.
- Kundu, P. y Cohen, I. (2002). *Fluid Mechanics*. USA. ACADEMIC PRESS.
- Levin, B. y Nosov, M. (2009). *Physics of Tsunamis*. Netherlands SPRINGER.
- Lipa, B., Barrick, D., Bourg, J. and Nyden, B. (2006). Hf radar detection of tsunamis. *Journal of Oceanography*, Vol 62, pp 705-716.
- Mangor, K., Drønen, N., Kærgaard, K. and Kristensen S. (2017). *Shoreline Management Guidelines*. Danish Hydraulic Institute.
- McWilliams, J. (2006). *Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- Okada, Y. (1992). Internal deformation due to shear and tensile faults in a half space. *Bulletin of Seismological Society of America* Vol. 82, N°2, pp 1018-1040.
- Ortiz, J. (2015). *Introducción a la oceanografía física. Notas de clase*. Colombia. Editorial Universidad del Norte.
- Pedlosky, J. (2003). *Waves in the Ocean and Atmosphere. Introduction to Wave Dynamics*. USA. SPRINGER.

- Ruangrassamee, A. y Saelem N. (2009). Effect of tsunami generated in the manila trench on the gulf of thailand. *Journal of Asian Earth Science*, vol. 36, pp.56-66.
- Salmon, R. (2016). *Introduction to ocean waves*. Textbook, Scripps Institution of Oceanography University of California, San Diego.
- Sargent, R. (2011). Verification and validation of simulation models. *Proceedings of the 2011 Winter Simulation Conference*, 978-1-4577-2109 IEEE.
- Satake, K. (1987). Inversion of tsunami waveforms for the estimation of a fault heterogeneity: Method and numerical experiments. *J. Phys. Earth* 35 pp 241-254.
- Silgado, E. (1978). *Historia de los sismos más notables ocurridos en el Perú (1513 - 1974)*. Boletín N°3, Serie C. Instituto de Geología y Minería . Lima, Perú.
- Song, J., De Risi, R. and Goda, K. (2017). Influence of flow velocity on tsunami loss estimation. *Geoscience*, 7, 114.
- Steketee, J. A. (1958). On volterra's dislocation in a semi-infinite elastic medium. *J. Phys.* 36 pp 192-205.
- Strikwerda, J. C. (2004). *Finite differences schemes and partial differential equations*. USA. SIAM.
- Suppasri, A., Koshimura, S. and Imamura, F. (2011). Developing tsunami fragility curves based on the satellite remote sensing and the numerical modeling of the 2004 indian ocean tsunami in thailand. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci*, 11, 173-189, doi 10.5194/nhess-11-173-2011.
- Talandier, J. (1993). French polinesya tsunami warning center (cppt). *Natural Hazards and Earth System Sciences*, vol 7, p. 237-256.
- Thomas, J. W. (1995). *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. USA. Springer.
- Volterra, V. (1907). Sur l' équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Ann. Éc. Norm.(3)*,24,401-517.