Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Existencia de soluciones para una ecuación viscoelástica no lineal con memoria

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jim Anderson PORRAS CAJAHUAMAN

ASESOR

Dr. Yony Raúl SANTARIA LEUYACC

Lima, Perú

2023

Referencia bibliográfica

Porras, J. (2023). *Existencia de soluciones para una ecuación viscoelástica no lineal con memoria*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Jim Anderson Porras Cajahuaman
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	48085563
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42159219
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-8279-7460
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445705
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Dr. Victor Hilario Tarazona Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09264893
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	Dyamical Systems, Differential Equations and their Applications - EQUATION
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vicerrectorado de Investigación y Posgrado. Programa de Promoción de Tesis de Pregrado. B21140091-PTPGRADO
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima

	Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.0603526554608 Longitud: -77.0821112394333
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Diciembre 2021 - Marzo 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 17:05 horas del viernes 17 de marzo del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (PRESIDENTE), Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda (SECRETARIO) y el Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: **"EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA UNA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA NO LINEAL CON MEMORIA"**, presentado por el señor Bachiller Jim Anderson Porras Cajahuaman, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, la Presidenta invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación sobresaliente con un calificativo promedio de 18 (Dieciocho).

A continuación, la Presidenta del Jurado, Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala, manifestó que el señor Bachiller Jim Anderson Porras Cajahuaman, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 18:02 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala PRESIDENTE	Tarazona Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda MIEMBRO

Yony Santaria

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
MIEMBRO ASESOR

UNMSM
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América.

INFORME DE EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

1. FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
2. ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
3. AUTORIDAD ACADÉMICA QUE EMITE EL INFORME DE ORIGINALIDAD
   Director de La Escuela Profesional de Matemática
4. APELLIDOS Y NOMBRE DE LA AUTORIDAD ACADÉMICA
   Víctor Hilario Tarazona Miranda
5. OPERADOR DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUD
   Alex Armando Cruz Huallpara
6. DOCUMENTO DE EVALUACIÓN

   Título de pre grado: Existencia de soluciones para una ecuación viscoelástica no lineal con memoria

7. AUTOR DEL DOCUMENTO

   Nombre y Apellido: Jim Anderson Porras Cajahuaman

8. FECHA DE RECEPCIÓN DE DOCUMENTO

   ....

9. FECHA DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUDES

   Procesado el: 12-ene.-2023 23:14 -05
   Identificador: 1992118750
   Número de palabras: 17031
   Entregado: 1

10. SOFTWARE UTILIZADO

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
TURNITIN	x	
ITHENTICATE		x
OTROS(ESPECIFICAR)		x

11. CONFIGURACION DEL PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
EXCLUYE TEXTOS ENTRECOMILLADOS	x	
EXCLUYE BIBLIOGRAFÍA	x	
EXCLUYE CADENAS MENOS A 40 PALABRAS	x	
OTRO CRITERIO (ESPECIFICAR)		x

12. PORCENTAJE DE SIMILITUDES SEGÚN PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

EN LETRA	NÚMEROS
Ocho Porciento	8%

13. FUENTES ORIGINALES DE LAS SIMILITUDES ENCONTRADAS

4% match ()"Atratores globais para uma equação viscoelástica não linear com história", 'Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA)'
1% match ()
Potenciano Machado, Leyter. "Existencia, unicidad y regularidad p-maximal de la solución de un modelo parabólico semilineal", Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2012
1% match ()
Bocanegra Rodríguez, Lito Edinson. "Dinámica asintótica de una ecuación de onda elástica en un ambiente isotrópico", 'Baishideng Publishing Group Inc.', 2019
1% match (Internet desde 04-feb.-2022)
https://coek.info/pdf-a-well-posedness-result-for-nonlinear-viscoelastic-equations-with-memory-.html
1% match (Internet desde 25-oct.-2022)
http://repositorio.unac.edu.pe
<1% match (Internet desde 12-oct.-2022)
https://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12672/17223/Vilcas_ed.pdf?isAllowed=y&sequence=5
<1% match (Internet desde 01-nov.-2022)
http://repositorio.uns.edu.pe
<1% match (trabajos de los estudiantes desde 17-jun.-2022)
Submitted to Unviersidad de Granada on 2022-06-17

14. OBSERVACIONES

....

15. CALIFICACIONES DE ORIGINALIDAD

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, SIN OBSERVACIONES.	X	
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, CON OBSERVACIONES.		X
DOCUMENTO NO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD		X

16. FECHA DE INFORME

....

UNMSM
Firmado digitalmente por TARAZONA MIRANDA Victor Hilario FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 13.01.2023 09:16:11 -05:00

Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda
Director (e) de la EP de Matemática

Agradecimiento

Agradezco, principalmente a Dios, por todas las fuerzas y esperanzas que me ha brindado a lo largo de mi vida; a mi madre María Luz y a mis 4 hermanos por su consejos y asistencia incondicional; asimismo, agradezco a mi asesor, el Dr. Yony Santaria, por sus consejos y sugerencias que me sirvieron para terminar este proyecto.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo, probamos algunos resultados que garantizan la buena colocación para una versión modificada de la ecuación de Volterra. Más específicamente, estudiaremos la ecuación de la forma

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$, $\alpha > 0$, $\rho \in [0, 4)$, con condición de frontera tipo Dirichlet. Se probará la buena colocación del problema en el espacio $H^2(\Omega)$, para tal fin, usaremos el razonamiento y los argumentos realizados por Conti, Marchini y Pata [7]. Para la existencia de solución, utilizamos argumentos de la topología débil y débil$*$ y, principalmente, el método de Faedo-Galerkin, el cual será válido, siempre que se haya encontrado previamente una solución aproximada en dimensión finita, para ello haremos uso del teorema de Carathedory. Para la unicidad, utilizamos un resultado sobre la dependencia continua de la solución débil.

Palabras clave: Ecuación con memoria, método de Faedo-Galerkin y dependencia continua.

Abstract

In the present work, we prove some results that guarantee the well posedness of the modified version of the Volterra equation. More precisely, we will study the equation of the form

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} - \Delta \partial_{tt} - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^3$, $\alpha > 0$, $\rho \in [0, 4)$ and with Dirichlet boundary condition. It will be prove the well-posed of the problem in the space $H^2(\Omega)$, for this purpose, we will use the reasoning and arguments made by Conti, Marchini and Pata [7]. For the existence of a solution, we use weak and weak$*$ topology arguments and, mainly, the Faedo-Galerkin method, which remain valid, provided that an approximate solution in finite dimension has been previously found, for this we will use Carathedory's theorem. For uniqueness, we use a result on the continuous dependence of the weak solution.

Keywords: Memory equation, Faedo-Galerkin method and continuous dependence.

Introducción

En los últimos años se ha incrementado el estudio al análisis cualitativo de los problemas con valores iniciales de las ecuaciones no lineales que permiten modelar diversos fenómenos físicos, biológicos, químicos, etc.

El objetivo de este trabajo es demostrar la buena colocación de un problema, es decir, demostrar la existencia, unicidad y cambio continuo de las soluciones respecto al cambio de los datos iniciales de la siguiente ecuación

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta\partial_{tt} u - \alpha\Delta u + \int_0^\infty \mu(s)\Delta u(t-s)ds + f(u) = h \tag{$\mathcal{P}$}$$

definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ acotado con frontera suave, con condición de frontera tipo Dirichlet y considerando los parámetros $\alpha > 0$ y $\rho \in [0, 4)$.

El presente estudio es basado sustancialmente en los resultados propuestos por Conti, Marchini & Pata [7]; Conti, Ma, Marchini & Seminario [8]; Ferreira [5]; Cavalcanti M., Cavalcanti D., Prates & Soriano [5]. La viscoelasticidad del problema está representada por el término de integral de convolución que describe efectos de memoria del material, asimismo, la noción de historia (para este trabajo) viene de que en el término de convolución de $(\mathcal{P})$, se exige conocer $u(x,t)$ para $t \in (-\infty, 0)$. Por otra lado, se puede decir que la dificultad para probar la existencia de solución está en los términos no lineales $|u_t|^\rho u_{tt}$ y $f(u)$. La primera prueba sobre la buena colocación (en el sentido de Hadamard), fue realizada recientemente por Araújo, Ma & Qin [1] con la restricción $\rho > 1$. Es importante mencionar que la ecuación $(\mathcal{P})$ ha sido bastante estudiada por diversos autores, véase [1, 5, 7, 12] entre otros, con ligeras variaciones, generalizando algunas condiciones y restringiendo otras. Más precisamente, se estudiaron para el caso $\rho = 0$ y anulando el término Δu_{tt} con lo que se obtiene la ecuación de ondas viscoelásticas); también, para el caso $f(u) = \sigma(u^5)$; para un caso más general, donde se adiciona el término $\alpha(-\Delta)^\theta \partial_t u$ a la ecuación $(\mathcal{P})$ se estudio en [7] y para el caso cuando f puede alcanzar el polinomio crítico de orden 5, en [7], etc.

Este trabajo estará presentado de la siguiente forma: en el Capítulo I presentamos definiciones y resultados previos para la buena argumentación y comprensión de la ecuación y su respectivo estudio; en el Capítulo II, estudiamos la viscoelasticidad con historia, siguiendo la estructura y el razonamiento de los artículos de Conti, Marchini & Pata [8]; en el Capítulo III, presentamos la buena colocación del problema correspondiente a la ecuación $(\mathcal{P})$, para tal objetivo, primero demostramos la existencia de solución para un problema que se aproxime a $(\mathcal{P})$, luego, mediante convergencias convenientes logramos extender la solución a todo el espacio que deseamos, es decir, utilizaremos el método de Faedo-Galerkin para demostrar la existencia de soluciones débiles. Finalmente mostramos algunas conclusiones sobre nuestros resultados así como también proyectos a futuro sobre el problema $(\mathcal{P})$.

Capítulo I

Preliminares

En este apartado presentamos un breve y resumido repaso sobre las herramientas principales que debemos conocer para entender el planteamiento y la demostración de la existencia y unicidad de solución del problema viscoelástico no lineal. Para desarrollar estos preliminares nos guiamos de Folland [10], Medeiros [15] y Yosida [20].

1.1. Espacios de Sobolev

Iniciamos presentando algunas definiciones y resultados sobre los espacios de Sobolev. Para ello nos guiamos de Medeiros [15], para mayor detalle el lector también puede revisar Brezis [3].

Definición 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Definimos el siguiente conjunto.*

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} | \quad u \text{ es medible y} \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}.$$

Definición 1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Definimos el siguiente conjunto*

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} | \quad \sup\{|u(x)| : x \in \Omega \backslash N\} < \infty \text{ donde } m(N) = 0\}.$$

Lema 1.3. *(Desigualdad de Young). Para todo $p, q \in (1, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se cumple*
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{para todo } a, b \geq 0.$$

Demostración. Dado que la función exponencial $f(x) = e^x$ es una función convexa, puesto que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que, para todo $s, t \geq 0$ con $s + t = 1$ se cumple
$$f(sx + ty) \leq sf(x) + tf(y).$$

Ahora, si $a = 0$ o $b = 0$ la desigualdad se cumple inmediatamente. Supongamos $a, b > 0$, entonces asumiendo
$$s = \frac{1}{p}, \quad t = \frac{1}{q}, \quad x = p \ln a, \quad \text{e} \quad y = q \ln b,$$

obtenemos
$$ab = f(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y) \leq \frac{1}{p}e^{p \ln a} + \frac{1}{q}e^{q \ln b} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$
por lo que queda demostrado. □

Lema 1.4. *(Desigualdad de Young con ϵ). Para todo $p, q \in (1, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y cualquier $\epsilon > 0$, se cumple que*
$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q \qquad \text{para todo } a, b \geq 0.$$

donde $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{p}{q}} q^{-1}$. Cuando $p = q = 2$, se obtiene
$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2 \text{ para todo } a, b \geq 0.$$

Demostración. Haciendo los cambios de variable
$$\tilde{a} = (\epsilon p)^{\frac{1}{p}} a \quad \text{y} \quad \tilde{b} = (\epsilon p)^{-\frac{1}{p}} b,$$

para todo $\epsilon > 0$ y utilizando el lema 1.3, obtenemos
$$ab = \tilde{a}\tilde{b} \leq \frac{\tilde{a}^p}{p} + \frac{\tilde{b}^q}{q} = \frac{((\epsilon p)^{\frac{1}{p}} a)^p}{p} + \frac{((\epsilon p)^{-\frac{1}{p}} b)^q}{q} = \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q,$$

donde $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{p}{q}} q^{-1}$. □

Teorema 1.5. *Si u y v pertenecen al espacio $L^p(\Omega)$ y $L^q(\Omega)$ respectivamente, tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, entonces el producto uv pertenece al espacio $L^1(\Omega)$ y*

$$\|u(x)v(x)\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

Teorema 1.6. *Sean $1 \leq r_1, r_2, \cdots, r_n \leq \infty$ tales que $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\cdots+\dfrac{1}{r_n}=\dfrac{1}{r}\leq 1$. Si $u_i \in L^{r_i}(\Omega)$ para $i=1,2,\cdots,n$, entonces*

$$u := u_1 u_2 \cdots u_n \in L^r(\Omega)$$

y

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u_1\|_{L^{r_1}(\Omega)}\|u_2\|_{L^{r_2}(\Omega)} \cdots \|u_n\|_{L^{r_n}(\Omega)}.$$

Usando la desigualdad del Lema 1.3 y el teorema 1.5, se demuestra que el conjunto $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial normado completo para todo $1 \leq p < \infty$, con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En particular, se demuestra que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

para todo $u, v \in L^2(\Omega)$.
Asimismo, $L^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial normado completo, con la norma

$$\|u\|_\infty := \text{ínf}\{C > 0 \ | \ |u(x)| \leq C \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}.$$

Teorema 1.7. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto tal que $|\Omega| < \infty$ y sea $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces se satisface*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Ahora, para definir los espacios de Sobolev debemos considerar una nueva noción de derivada para funciones en L^p, esta es la derivada distribucional. Para mayor detalle sobre la definición y algunos ejemplos, remitimos a revisar Medeiros [15] (capítulo 1) o cualquier otro texto sobre espacios de Sobolev.

Definición 1.8. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1,\infty]$ y m un número* *natural. El "espacio de Sobolev de orden m"se define*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega)/\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha u$ denota "la derivada distribucional de orden α", donde α es un multi-índice: $\alpha := (m_1, \dots, m_n)$ para todo $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $|\alpha| := m_1 + \cdots + m_n$.

Se demuestra que el conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial normado para $1 \leq p < \infty$ con norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De igual forma, si $p = \infty$, el conjunto $W^{m,\infty}(\Omega)$ es un espacio vectorial normado, con

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Estos espacios nos permiten concluir que los espacios de Sobolev no son otra cosa que el conjunto de funciones Lebesgue integrables cuyas derivadas distribucionales también son funciones Lesbesgue integrables para un mismo valor $p > 1$. Estos espacios están incluido estrictamente en el espacio L^p puesto que existen funciones Lebesgue integrables con derivadas que no pertenecen a dicho espacio, más aún, existen funciones cuyas derivadas no son funciones, como la función de Heaviside. En lo que sigue, para evitar sobrecargar la notación, salvo excepciones, cambiaremos $L^p(\Omega)$ por L^p.

Teorema 1.9. *Dado Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y m un número natural.*

a) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

b) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$.

c) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio separable para $1 \leq p < \infty$.

d) Para $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno es

$$(u, v)_{W^{m,2}} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2},$$

en este caso se denotada como $H^m(\Omega)$.

Definición 1.10. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty)$ y m un número natural. El espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ se define de la siguiente forma:*

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$

esto quiere decir, que este espacio es la cerradura del conjunto de las funciones test $D(\Omega)$ con la norma de $W^{m,p}(\Omega)$. Si $p = 2$ se denota $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.

Definición 1.11. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty)$ y m un número natural. Se denota el dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ de la siguiente manera*

$$[W_0^{m,p}(\Omega)]' := W^{-m,q}(\Omega),$$

donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y para el caso $p = 2$ se denota $[W_0^{m,2}(\Omega)]' := H^{-m}(\Omega)$.

1.1.1. Inmersiones en los espacios de Sobolev

Veamos algunos resultados sobre inmersiones continuas.

Teorema 1.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado de clase C^m, $n \geq 2$ y $p \in [1, \infty)$, entonces*

a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq \dfrac{np}{n - mp} = p^* \quad$ *si* $mp < n$.

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$ *si* $mp = n$.

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}), \quad$ *si* $mp > n$.

Para c), tenemos que k es un número natural tal que $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$ y λ es un número real tal que $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p} = \lambda_0 < 1$ y $\lambda \in (0, 1)$ si $\lambda_0 = 1$.

Teorema 1.13. *Con las mismas condiciones del teorema 1.12 con $n \geq 1$, se obtiene*

$$W^{m,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\overline{\Omega}).$$

En los teoremas anteriores de inmersión se puede reemplazar los espacios W por los espacios W_0.

Observación 1.14. *Para el caso* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$*, la mejor constante para tal inmersión es* λ_1*, siendo su valor el primer autovalor del operador* $-\Delta$*. En otras palabras, se cumple*

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \lambda_1^{-1}\|u\|_{H_0^1}^2 \quad \textit{para todo} \;\; u \in H_0^1(\Omega),$$

donde

$$\lambda_1 = \text{ínf}\left\{\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}| \quad u \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

A continuación algunos resultados sobre las inmersiones compactas.

Teorema 1.15. *(Teorema de Rellich–Kondrachov)*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto acotado, tal que* Ω *es de clase* C^1 *y sea* $1 \leq p \leq \infty$*. Entonces se obtiene las inmersiones compactas*

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p} = p^*$ *si* $p < n$*.*

b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$ *si* $p = n$*.*

c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}),$ *si* $p > n$*.*

Corolario 1.16. *Sea un abierto acotado* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* Ω *es de clase* C^{m+1} *y* $1 \leq p \leq \infty$*. Entonces las siguientes inmersiones son compactas*

a) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p} = p^*$ *si* $p < n$*.*

b) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$*si* $p = n$*.*

c) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}),$ *si* $p > n$*.*

Corolario 1.17. *Dados* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *y* $1 \leq p \leq \infty$*. Entonces*

a) si Ω *es de clase* C^{m+1} *entonces la siguiente inmersión*

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$$

es compacta.

b) si Ω no tiene condiciones de regularidad entonces la siguiente inmersión es compacta:

$$W_0^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m,q}(\Omega).$$

Teorema 1.18. *Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado, Ω de clase C^m y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces las siguientes inmersiones son compactas*

a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n-mp} = p^*$ *si* $mp < n$.

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$ *si* $mp = n$.

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \quad k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1$ *si* $mp > n$ *donde k es un entero no negativo.*

Teorema 1.19. *Si Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y $p \in (1, +\infty)$. Entonces existe $C \in \mathbb{R}$ positivo tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}, \qquad \textit{para todo } u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

La existencia de C depende, únicamente, de p y $|\Omega|$. Esta desigualdad es llamada desigualdad de Poincaré.

Definición 1.20. *Dado un X espacio de Banach e $p \in (1, +\infty)$. Definimos*

$$L^p(0,\tau;X) := \{u : (0,\tau) \to X| \ \|u(t)\|_X \in L^p(0,\tau)\},$$

se demuestra que este conjunto es un espacio de vectorial normado completo, con

$$\|u\|_{L^p(0,\tau;X)} := (\int_0^\tau \|u(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

y denotamos este espacio normado por

$$(L^p(0,\tau;X); \|.\|_{L^p(0,\tau;X)}).$$

Ahora, si $p = \infty$, entonces definimos el espacio

$$L^\infty(0,\tau;X) := \{u : (0,\tau) \to X| \ \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,\tau)\}.$$

También se demuestra que este conjunto es un espacio de vectorial normado, con

$$\|u\|_{L^\infty(0,\tau;X)} = \sup\{ess\|u(t)\|_X \mid \quad t \in (0,\tau)\},$$

este espacio normado se denota por

$$(L^\infty(0,\tau;X); \|.\|_{L^\infty(0,\tau;X)}).$$

Ahora que se ha definido este tipo de espacio L^p, podemos enunciar el siguiente teorema, el cual tendrá una recurrente utilidad a los largo del capítulo 3.

Teorema 1.21. *(Teorema de compacidad de Simon)*
Dados los espacios de Banach X, Y y Z que satisfacen $X \overset{c}{\hookrightarrow} Z \hookrightarrow Y$. Si

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada en* $L^\infty(0,\tau;X)$.

b) $(\partial_t u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada en* $L^p(0,\tau;Y)$, $p > 1$.

Entonces, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacto en $C(0,\tau;Z)$.

Ahora el siguiente lema que nos permitirá demostrar la dependencia continua de soluciones del problema viscoelástico.

Lema 1.22. *(Desigualdad de Gronwall)*
Sea A una constante positiva, $v \in L^1(a,b)$ y $u \in L^\infty(a,b)$ tales que $v > 0$ y $u \geq 0$. Si

$$u(t) \leq A + \int_a^b u(s)v(s)ds, \qquad \text{para todo } t \in (a,b),$$

entonces

$$u(t) \leq Ae^{\int_a^b v(s)ds}, \qquad \text{para todo } t \in (a,b).$$

1.2. Espacio de Bochner con peso

Para encontrar solución a la ecuación principal haremos un cambio de variable, el cual nos permitirá "cambiar" el término de historia por algún tipo de función. Este cambio nos permitirá un mejor estudio sobre la ecuación principal; sin embargo, este cambio de variable nos lleva a un nuevo espacio, llamado espacio de Bochner con peso.

Este apartado inicia con los resultados principales sobre el espacio de Bochner. Entonces, remitimos al lector a revisar los textos de Folland [10] y Yosida [20].

Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ (finito o no). Consideremos la función $f : I \to X$, donde X es un espacio de Banach. Dado μ una medida positiva continua, definimos ν una medida positiva en I tal que $d\nu(s) = \mu(s)ds$.

Definición 2.23. *Sea $\{E_i\}_{i=1}^k$ una sucesión finita de subconjuntos de $I = (a, b)$ tal que $E_i \cap E_j =$ para todo $i \neq j$ y $\nu(E_i)$ finita para todo $i = 1, ..., k$. Sean $\{x_i\}_{i=1}^k$ un subconjunto de X. Entonces, una función simple es una función de la forma*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i} x_i, \qquad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Cuya integral está definida

$$\int_a^b f(s)d\nu(s) = \sum_{i=1}^{k} \nu_{E_i} x_i = \sum_{i=1}^{k} (\int_{E_i} \mu(s)ds) x_i.$$

Se demuestra que la integral es independiente de la partición. Esta integral es llamada integral de Bochner.

Ahora, llamamos a una función $f : (a, b) \to X$ "fuertemente medible" en (a, b), si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples con soporte compacto en (a, b) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0, \qquad \text{c.t.p. en } (a, b).$$

Su integral de Bochner en (a, b) está definida como

$$\int_a^b f(s)d\nu(s) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(s)d\nu(s)$$

Se demuestra que la integral de Bochner no depende la sucesión de funciones simples cuyo limite es f. Veamos una caracterización para estas funciones.

Teorema 2.24. *Una función $f : (a, b) \to X$ es Bochner integrable si, y solo si, la función $\|f(.)\|_X : (a, b) \to \mathbb{R}$ es integrable en (a, b).*

Este espacio de funciones Bochner integrables es denotado por $L^p_\mu(a, b; X)$.

Definición 2.25. *En el espacio $L^p_\mu(a, b; X)$*

a) Si $1 \leq p < \infty$, su norma se define

$$\|f\|_{L^p_\mu(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|f(s)\|^p_X \mu(s) ds\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Denotamos este espacio normado por $(L^p_\mu(a,b;X); \|.\|_{L^p_\mu(a,b;X)})$.

b) Si $p = \infty$, su norma se define

$$\|f\|_{L^\infty_\mu(a,b;X)} := \sup\{ess\|f(s)\|_X \mid \quad s \in (a,b)\} < \infty.$$

Teorema 2.26. *El espacio $L^p_\mu(a,b;X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ es un espacio completo. En particular, si X es un espacio de Hilbert, entonces $L^2_\mu(a,b;X)$ es de Hilbert con*

$$\langle u, v\rangle_{L^2_\mu(a,b;X)\times L^2_\mu(a,b;X)} := \int_a^b \mu(s)\langle u, v\rangle_{X\times X} ds.$$

1.3. Solución débil

Ahora presentamos un breve repaso referente a la teoría de semigrupos, sistemas dinámicos y, finalmente, hacemos una revisión sobre las soluciones suaves en el sentido de A. Pazy [18].

Definición 3.27. *Decimos que una familia $\{S(t)\}_{t\geq 0} := \{S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)\}$ de operadores es un semigrupo si satisface las dos primeras condiciones*

a) $S(0) = I$ (I es operador identidad en X).

b) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para cada $\quad t, s \geq 0$.

c) La aplicación $[0,\infty) \times X \longrightarrow S(t)(x) \in X$ es continua para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times X$.

Si además el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisface la tercera condición, entonces es llamado C_0-semigrupo.

Definición 3.28. *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo. El operador $A : D(A) \to X$ definido por*

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x$$

es llamado "generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$". Donde

$$D(A) := \{x \in X|\ \lim_{h\to 0} \frac{S(h)-I}{h} x \ \textit{existe}\}.$$

Ahora consideremos el problema

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t),\ t > 0 \\ u(0) &= x \end{cases} \tag{1.1}$$

donde f es una función definida en $[0, \tau)$ al espacio X y A es el operador infinitesimal de un C_0-semigrupo, de tal manera que (1.1) admita una única solución para cualquier elemento x en $D(A)$.

Definición 3.29. *Decimos que una función u definida en el intervalo $[0, \tau]$ con valores X es una "solución clásica"del problema (1.1) en el intervalo $[0, \tau)$ si $u \in \mathcal{C}\big([0, \tau)\big) \cap \mathcal{C}^1\big(0, \tau)\big)$. Además, se cumple que $u(t) \in dom(A)$ para todo $0 < t < \tau$ y se satisface (1.1) en $0 \leq t < \tau$.*

Teorema 3.30. *Si f es una función en el espacio $L^1(0, \tau; X)$, entonces cada elemento x en X el PVI (1.1) tiene una única "solución clásica" u de la siguiente forma*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

donde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo.

Definición 3.31. *Dado $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo y su respectivo generador infinitesimal A. Además, si x es un elemento de X y f una función en $L^1(0, \tau; X)$, entonces la función*

$$u(t) := S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, \tau] \tag{1.2}$$

pertenece a $C([0, \tau], X)$. Esta es llamada solución débil de (1.1).

Observación 3.32.

a) Existen soluciones débiles que no son soluciones clásicas.

b) Por el teorema 3.30, si $f \in L^1(0,\tau;X)$ entonces (1.1) tiene una única solución clásica, luego tiene una única solución debíl.

Ahora veamos los tipos de convergencias que utilizaremos para extender nuestras soluciones aproximadas. Mas precisamente, veamos un repaso de las convergencias débil y débil*.

Definición 3.33. *Una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(0,T;X)$ converge débilmente para u en $L^p(0,T;X)$ si*

$$\int_0^T (v(t), u_n(t))_{X'\times X} dt \longrightarrow \int_0^T (v(t), u(t))_{X'\times X} dt,$$

para todo $v \in L^p(0,T;X')$. Esta convergencia se denota: $u_n \rightharpoonup u$.

Observación 3.34. *Si $X = H_0^1(\Omega)$. Entonces, $X' = H^{-1}(\Omega)$ y $u_n \rightharpoonup u$ significa*

$$\int_0^T (w(t), u_n(t)) dt \longrightarrow \int_0^T (w(t), u(t)) dt,$$

para cada elemento w en el espacio $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Definición 3.35. *Una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(0,T;X')$ converge débil* para $u \in L^\infty(0,T;X')$, si*

$$\int_0^T (u_n(t), w(t))_{X'\times X} dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w(t))_{X'\times X} dt,$$

para todo w en el espacio $L^1(0,T;X)$. Esta convergencia se denota: $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$.

Observación 3.36. *La convergencia $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en el espacio $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, quiere decir*

$$\int_0^T (u_n(t), w(t)) dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w(t)) dt,$$

para cualquier w en el espacio $L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Proposición 3.37. *Si $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en el espacio $L^\infty(0,T;X')$ entonces $u_n \rightharpoonup u$.*

Finalmente, mencionamos un teorema fundamental que servirá para extender las soluciones aproximadas.

Teorema 3.38. *(Banach-Alaoglu)*
Sea X es un espacio normado. Entonces la bola unitaria cerrada en X es compacta con la topología débil estrella.

1.4. Teorema de Caratheodory

Definición 4.39. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Decimos que una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cumple las "condiciones de Caratheodory", si*

(a) f(t,x) es medible en t, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fijo tal que $(t, x) \in \Omega$.

(b) f(t,x) es continua en x, para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo tal que $(t, x) \in \Omega$.

(c) Para todo subconjunto $K \subseteq \Omega$ compacto, existe $m_K(t)$ una función real e integrable que depende de la elección del subconjunto K, tal que

$$\|f(t, x)\| \leq m_K(t), \text{ para todo } (t, x) \in K.$$

Teorema 4.40. *(Teorema de Caratheodory)*
Supongamos que existan constantes reales positivas a, b y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función, siendo Ω definido por

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}.$$

Si la función f verifica las condiciones de la definición 4.39, entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

posee solución en un entorno $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.

1.5. Un ejemplo sobre una ecuación hiperbólica no lineal

En este apartado tratamos de forma concisa una ecuación hiperbólica no lineal estudiada en J,-L. Lions [13]. La idea de esta sección es presentar un esquema sobre como encontraremos solución en la ecuación viscoelástica no lineal con memoria y como utilizaremos el método de Faedo-Galerkin. Estudiamos la siguiente ecuación

$$u'' - \Delta u + |u'|^\rho u' = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \tag{1.3}$$

donde $\rho > 0$, con condiciones iniciales

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{1.4}$$

y condiciones de contorno

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Este problema es similar a la ecuación

$$u'' - \Delta u + |u|^\rho u = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T). \tag{1.6}$$

donde el término $|u'|^p u'$ es cambiado por el término $|u|^p u$. Observamos que la no linealidad de (1.3) es "más fuerte"que (1.6). No obstante, encontrar solución de (1.3) es menos dificultoso que para la ecuación (1.6) (para ver la solución de (1.6) ver [13] Cap. 1) ya que se observa los siguientes detalles:

a) utilizando resultados sobre inmersiones compactas y o inmersiones continuas podemos obtener más desigualdades a priori sobre la ecuación (1.3) que la ecuación 1.6.

b) podemos usar el método de monotonicidad de [13] Cap. 2.

1.5.1. Teorema de existencia y unicidad

Teorema 5.41. *Sea el sistema (1.3) con condiciones (1.4)-(1.5) y sea f, u_0, u_1 tales que*

$$f \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \quad f' \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) := L^2(Q), \tag{1.7}$$

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{1.8}$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{1.9}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiene frontera regular.
Entonces el problema (1.3)-(1.4)-(1.5) admite una única solución u tal que

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1)\Omega)), \tag{1.10}$$

$$u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega), \tag{1.11}$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{1.12}$$

$$u' \in L^{\rho+2}(Q). \tag{1.13}$$

Demostración.

Unicidad

Sea u y v dos soluciones del sistema (1.3)-(1.4)-(1.5). Sea $w := u - v$, entonces $w = 0$ sobre $\partial\Omega$ y $w_0 = 0$, $w_1' = 0$ en Ω.
Como ambas soluciones, u y v, satisfacen (1.3), restando obtenemos

$$w'' - \Delta w + |u'|^\rho u' - |v'|^\rho v' = 0, \tag{1.14}$$

multiplicando (1.16) por w' (el producto interno en $L^2(\Omega)$ lo denotamos: $(\cdot,\cdot)$)

$$(w'', w') - (\Delta w, w') + (|u'|^\rho u' - |v'|^\rho v', w') = 0, \tag{1.15}$$

que es lo mismo que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w'\| + \|\nabla w\|) + \int_\Omega (|u'|^\rho u' - |v'|^\rho v')(u' - v')dx = 0. \tag{1.16}$$

Por la monotonicidad

$$0 \leq \int_\Omega (|u'|^\rho u' - |v'|^\rho v')(u' - v')dx$$

reemplazando esta desigualdad en (1.16), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w'\| + \|\nabla w\|) \leq 0, \tag{1.17}$$

como $w(x,0) = 0$ y $w'(0,x) = 0$, integrando (1.17) de 0 a t , obtenemos

$$\frac{1}{2}(\|w'\| + \|\nabla w\|) \leq 0, \tag{1.18}$$

lo que implica $w = 0$; es decir, $u = v$.

Existencia de Solución

Solución Aproximada.

La solución aproximada es una solución de un problema aproximado. Para plantear dicho problema aproximado necesitamos una base de funciones w_j la cual se obtiene como valores propios del operador $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet, es decir,

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}, \quad w_j = 0 \text{ en } \partial\Omega. \tag{1.19}$$

Debemos suponer que la frontera de Ω es lo suficientemente regular como para que

$$w_j \in H^2(\omega) \quad \text{y} \quad w_j \in L^{2(\rho+1)}(\Omega), \tag{1.20}$$

elegimos (u_{0m}), $(u_{1m}) \subset gen\{w_1, \cdots, w_m\}$ tal que

$$u_{0m} \to u_0 \quad \text{ en } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{1.21}$$

$$u_{1m} \to u_1 \quad \text{ en } H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega), \tag{1.22}$$

luego definimos $u_m(t) \in gen\{w_1, \cdots, w_m\}$ solución de

$$(u_m''(t), w_j) + a(u_m(t), w_j) + (|u_m'(t)|^\rho u_m'(t), w_j) = (f(t), w_j), \tag{1.23}$$

para todo $1 \leq j \leq m$, donde $a(u,v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$.
Con condiciones iniciales

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_m'(0) = u_{1m}. \tag{1.24}$$

Luego, de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias tenemos que el sistema (1.23)-(1.24) admite solución local en $[0, t_m]$. Lo que sigue es obtener estimaciones a priori que implican $t_m = T$.

Estimación a priori 1:

Si

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{jm}(t) w_j,$$

multiplicando (1.23) por $u_{jm}'(t)$ y sumando en j obtenemos

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + a(u_m(t), u_m'(t)) + (|u_m'(t)|^\rho u_m'(t), u_m'(t)) = (f(t), u_m'(t)),$$

lo que significa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u'_m(t)\|^2 + \|\nabla u_m(t)\|^2) + \int_\Omega |u'_m(t)|^{\rho+2}dx = (f(t), u'_m(t)),$$

luego integrando de 0 a t

$$\frac{1}{2}(\|u'_m(t)\|^2 + \|\nabla u_m(t)\|^2) + \int_0^t \int_\Omega |u'_m(s)|^{\rho+2}dxds = \tag{1.25}$$

$$= \int_0^t (f(t), u'_m(s))ds + \frac{1}{2}(\|u'_{1m}\|^2 + \|\nabla u_{0m}\|^2), \tag{1.26}$$

ahora, de (1.21)-(1.22), de (1.13), (1.7) y (1.11), conseguimos que a partir de un $m_0 \in \mathbb{N}$ existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u'_m(t)\|^2 + \|\nabla u_m(t)\|^2 \leq C \tag{1.27}$$

y

$$\int_Q \|u'_m\|^{\rho+2}dxdt \leq C \tag{1.28}$$

es decir, si la solución está acotada, entonces por la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias sabemos que la solución está definida en todo el intervalo de definición. Por lo tanto, $t_m = T$ para todo $m \geq m_0$.

Estimación a priori 2:

Por la igualdad (1.19) podemos reemplazar w_j por $-\Delta w_j$ en (1.23). Multiplicando nuevamente por $u'_{jm}(t)$ y sumando de $j = 1$ hasta $j = m$,

$$u'_m(t) = \sum_{j=1}^{n} u'_{jm}(t)w_j,$$

obtenemos

$$a(u''_m(t), u'(t)) + (\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)) + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^\rho u'_m)\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}dx = a(f(t), u'_m(t)), \tag{1.29}$$

el término no bilineal de (1.29) es igual a

$$(\rho+1)\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(|u'_m|^{\frac{\rho}{2}}\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}\right)^2 dx = \frac{\rho+1}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^{\frac{\rho}{2}}u'_m)\right)^2 dx$$

y reemplazando en (1.29), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u_m'(t)\|^2+\|\Delta u_m(t)\|^2)+\frac{\rho+1}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_m'|^{\frac{\rho}{2}}u_m')\right)^2dx=a(f(t),u_m'(t)),$$

e integrando de 0 a t

$$\frac{1}{2}(\|\nabla u_m'(t)\|^2+\|\Delta u_m(t)\|^2)+\frac{\rho+1}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_m'|^{\frac{\rho}{2}}u_m')\right)^2dxds=$$

$$=\frac{1}{2}(\|\nabla u_{1m}\|^2+\|\Delta u_{0m}\|^2)+\int_0^t a(f(s),u_m'(s))ds. \quad (1.30)$$

Usando (1.21)-(1.22) y con la misma idea de (1.27)-(1.28), llegamos a

$$u_m' \text{ pertenece a } L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)), \quad (1.31)$$

$$u_m \text{ pertenece a } L^\infty(0,T,H^2(\Omega)), \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_m'|^{\frac{\rho}{2}}u_m') \text{ pertenece a } L^2(Q) \text{ para todo } i=1,\dots,n. \quad (1.33)$$

Estimación a priori 3:

Reemplazando w_j por $u_m''(0)$ en (1.23), obtenemos:

$$|u_m''(0)|^2=(\Delta u_{0m},u_m''(0))+(f(0),u_m''(0))-(|u_{1m}|^\rho u_{1m},u_m''(0)),$$

utilizando la desigualdad del producto interno con la norma, obtenemos

$$|u_m''(0)|\le|\Delta u_{0m}|+|f(0)|-\left(\int_\Omega|u_{1m}|^{2(\rho+1)}dx\right)^2,$$

nuevamente de las convergencias de (1.21)-(1.22), obtenemos

$$|u_m''(0)|\le C. \quad (1.34)$$

Por otro lado, derivando (1.23) respecto de t, conseguimos:

$$(u_m'''(t),w_j)+a(u_m'(t),w_j)+(\rho+1)(|u_m'(t)|^\rho u_m''(t),w_j)=(f'(t),w_j). \quad (1.35)$$

Multiplicando (1.35) por $u''_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ a $j=m$, deducimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u''_m(t)\|^2+\|\nabla u'_m(t)\|^2)+(\rho+1)\int_\Omega |u'_m(t)|^\rho u''_m(t)^2dx=(f'(t),u''_m(t)), \quad (1.36)$$

el término no bilineal en (1.36) es igual a

$$(\rho+1)\int_\Omega |u'_m(t)|^\rho u''_m(t)^2dx=\frac{\rho+1}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}(|u'_m(t)|^{\rho/2}u'_m(t)\right)^2dx,$$

por tanto, integrando (1.36) de 0 a t llegamos a

$$\frac{1}{2}(\|u''_m(t)\|^2+\|\nabla u'_m(t)\|^2)+\frac{\rho+1}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}(|u'_m|^{\rho/2}u'_m\right)^2dxds=$$

$$=\frac{1}{2}(\|u''_m(0)\|^2+\|\nabla u'_{1m}\|^2)+\int_0^t(f'(s),u''_m(s))ds, \quad (1.37)$$

así, a partir de (1.34) obtenemos (1.31) y

$$u''_m \text{ pertenece a } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)), \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u'_m|^{\frac{\rho}{2}}u'_m) \text{ pertenece a } L^2(Q). \quad (1.39)$$

Pasando el límite

A partir de (1.27),(1.28),(1.31),(1.32),(1.33),(1.38) y (1.39) deducimos que podemos extraer una subsucesión $(u_k)_{k\geq 1}$ de $(u_m)_{k\geq 1}$ tal que

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \quad (1.40)$$

$$u'_k \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad (1.41)$$

$$u''_k \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \quad (1.42)$$

$$u'_k \to u' \text{ en } L^2(Q), \quad (1.43)$$

$$|u'_k|^\rho u'_k \to \varphi \text{ en } L^{(\rho+2)/(\rho+1)}(Q), \quad (1.44)$$

$$|u'_k|^{\rho/2}u'_k \to \phi \text{ en } H^1(Q), \quad (1.45)$$

A partir del lema 1.3 de J.Lions [13] cap. 1 pag 12, obtenemos

$$\varphi = |u'|^{\rho} u', \quad \phi = |u'|^{\rho/2} u'.$$

Por lo tanto, la afirmación del teorema se satisface. □

Veamos la siguientes observaciones.

Observación 5.42.

a) *El teorema 5.41 se extiende para el caso donde Ω no está acotado, "acercándose" a Ω por una secuencia de conjuntos abiertos acotados.*

b) *Usando teoremas de compacidad más elaborados que podemos obtener una solución (más débil) bajo condiciones más generales.*

c) *El problema del teorema 5.41 se extiende al problema*

$$u'' + A(t)u + |u'|^{\rho} u' = f,$$

donde A es un operador elíptico de segundo orden tal que $A(t)^* = A(t)$.

Capítulo II

Ecuación viscoelástica no lineal con memoria

En este capítulo presentamos y estudiamos las condiciones que debe tener la ecuación viscoelástica para su buena colocación. Explicaremos minuciosamente el entorno funcional que envuelve al problema y como vamos a encaminar la "historia" envuelta en nuestra ecuación. Para ello seguiremos los argumentos de Dafernos [9]. Asimismo, trataremos de plasmar los estudios de Conti, Marchini & Pata [8], para este y el siguiente capítulo.

2.1. Hipótesis y consideraciones

A continuación, enunciamos las condiciones a la que sujeta la ecuación viscoelástica que estamos estudiando. Empezamos enunciado la ecuación viscoelástica

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h, \tag{2.1}$$

definida en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^3$ con frontera es suficientemente suave tal que satisface las condiciones de Dirichlet. Donde $\rho \in [0, 4)$ y $\alpha > 0$ son parámetros fijos.

Estudiamos el problema (2.1) bajo las siguientes condiciones:

(H_1) Se verifica

$$u(x, 0) = u_0, \quad \partial_t u(x, 0) = v_0, \quad u(x, -s)|_{s>0} = \phi_0(s) \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

donde u_0 y v_0 funciones definidas en Ω y $\phi_0 : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ son funciones establecidas. Se observa que la función ϕ_0 proporciona información acerca de la historia pasada de u.

(H_2) h pertenece al espacio $L^2(\Omega)$ y representa alguna fuerza externa al sistema y es independiente del factor temporal.

(H_3) f es posiblemente no lineal, localmente Lipschitz y cumple

$$f(0) = 0, \tag{2.2}$$

además

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|(1 + |u|^q + |v|^q), \tag{2.3}$$

donde c es una constante positiva, $q \in [0, 4)$ y además satisface la condición de disipación

$$\lim_{|u| \longrightarrow \infty} \inf \frac{f(u)}{u} > -\lambda_1, \tag{2.4}$$

donde λ_1 es el primer autovalor de $-\Delta$. Por otro lado, sea $\hat{f}(u) := \int_0^u f(y)dy$ con la condición que requerimos

$$f(u)u - \hat{f}(u) \geq -\frac{\beta}{2}u^2 - m_f \quad \text{para todo} \quad u \text{ en } \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

donde m_f es positivo y $0 < \beta < \lambda_1$.

(H_4) $\mu > 0$ cumple

$$\mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad \mu'(s) \leq 0, \tag{2.6}$$

esta función μ es denominada "El núcleo de la convolución". Además, existen $k_0, k_1 > 0, k_2 > 0$ tales que

$$\int_0^\infty \mu(s)ds = k_0, \quad \text{donde} \quad 0 < k_0 < \alpha, \tag{2.7}$$

$$\mu'(s) \leq -k_1\mu(s) \quad \text{para todo } s > 0 \tag{2.8}$$

y

$$\int_0^\infty -\mu'(s)ds = k_2, \quad 0 < k_2 < \infty. \tag{2.9}$$

Observación 1.1. *De las hipótesis anteriores se obtiene que* $k_2 \geq k_0 k_1$.

Observación 1.2. *Para hacer mas sencillos los calculos y, sin perder generalidad, asumiremos que*

$$\alpha - k_0 = 1. \tag{2.10}$$

2.2. Entorno funcional

Ahora, mediante las herramientas del capítulo 1, se construyen espacios donde estén definidas las soluciones débiles de la ecuación (2.1). Como mencionamos anteriormente,para ello tendremos que definir una nueva variable en el sistema (2.1) para evitar el término de convolución que refiere la historia del material.

Observación 2.3. *Para evitar recargar las notaciones usaremos ciertas notaciones:*

a) Asumiendo que Δ es el operador Laplaciano, lo denotamos por

$$A := -\Delta,$$

entonces

$$dom(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

b) Denotaremos $\|u\|_p := \|u\|_{L^p}$ para $1 \leq p \leq \infty$ y $(u, v) := \langle u, v\rangle_{L^2 \times L^2}$ para $p = 2$.

c) Para $H_0^1(\Omega)$ denotamos $\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_2$, este hecho se puede justificar usando la observación 1.14. Así, denotamos el producto interno $\langle u, v\rangle_{H_0^1 \times H_0^1} := (\nabla u, \nabla v) := \langle u, v\rangle_1$ en $H_0^1(\Omega)$.

d) La dualidad entre el espacio $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ se denota $\langle f, u\rangle := \langle f, u\rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$.

Definición 2.4. *Con las condiciones de (2.6), en $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ se define ν, una medida, de la siguiente forma*

$$d\nu(s) = \mu(s)ds.$$

Definición 2.5. *Dado ν como en la definición (2.4), se define el espacio*

$$\mathcal{M} := L^2_\mu(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)), \tag{2.11}$$

conocido como el espacio de historia (espacio de Bochner con peso μ).

Por la observación 2.3, se demuestra que $\mathcal{M}$ es un espacio de Hilbert con el siguiente producto interno

$$\langle u,v\rangle_{\mathcal{M}} := \int_0^\infty \mu(s)\langle u(s),v(s)\rangle_1 ds \quad \forall u,v\in\mathcal{M}.$$

Definición 2.6. *Definimos el siguiente semigrupo $S(t)$ en $\mathcal{M}$ dado por*

$$S(t)u(s) = \begin{cases} 0, & si \quad 0 < s \leq t, \\ u(s-t), & si \quad s > t. \end{cases} \tag{2.12}$$

Tal semigrupo será llamado 'Semigrupo traslación a la derecha'.

El semigrupo traslación a la derecha satisfaze que

a) Es un C_0-semigrupo.

b) Tiene generador infinitesimal $T : dom(T) \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que

$$Tu = -u', \; dom(T) = \{u \in \mathcal{M} : \; u' \in \mathcal{M}, u(0) = 0\}. \tag{2.13}$$

Teorema 2.7. *Sea $S(t)$ un semigrupo como en la definición 2.6, con su correspondiente generador infinitesimal T (2.13), se cumple que*

$$\langle T\eta,\eta\rangle_{\mathcal{M}} \leq 0, \forall \eta \in dom(T).$$

Demostración: Sea $\eta \in dom(T)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\langle T\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}} = \langle -\eta', \eta \rangle_{\mathcal{M}} &= \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta', \eta \rangle_1 ds \\
&= -\int_0^\infty \mu(s) [\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \eta'}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx] ds \\
&= -\int_\Omega [\int_0^\infty \mu(s) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \eta'}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} ds] dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_\Omega [\int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} (\sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right|^2) ds] dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_\Omega [\int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} \|\nabla \eta(s)\|^2 ds] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega [\int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta(s)\|^2 ds] dx - \int_\Omega [\mu(s) \|\nabla \eta(s)\|^2]_0^\infty dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_\Omega [\int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta(s)\|^2 ds] dx,
\end{aligned}
$$

por (2.6) tenemos que $\mu' \leq 0$, por lo tanto

$$\langle T\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}} \leq 0, \ \forall \eta \in dom(T).$$

2.3. Problema con historia

Para trabajar en el problema viscoelástico, vamos a modificar nuestra ecuación por medio de un 'desplazamiento', la cual generará una nueva variable. Para ello continuaremos con el trabajo de Dafernos [9].

Definición 3.8. *Definimos el 'desplazamiento relativo a la historia del sistema', denotado por η y definido por*

$$\eta = \eta^t(x, s) = u(x, t) - u(x, t - s), \ (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, t \geq 0. \tag{2.14}$$

Una pregunta que surge de manera natural es, ¿por qué la necesidad de definir un desplzamiento? La que tiene como respuesta: reescribir la integral de convolución con el objetivo de tratarla adecuadamente el prolema viscoelástico. Además, se observa que al derivar η se verifica

$$\eta_t^t(x,s) = -\eta_s^t(x,s) + u_t(x,t), \quad \text{para todo } (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \ t \geq 0, \tag{2.15}$$

entonces, reemplazando (2.14) en el término de la historia (convolución), obtenemos

$$\int_0^\infty \mu(s)\Delta u(t-s)ds = \underbrace{\left(\int_0^\infty \mu(s)ds\right)}_{k_0}\Delta u - \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds.$$

Reemplazando esta igualdad en (1.1), obtenemos

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt}u - \Delta\partial_{tt}u - \alpha\Delta u + \left(k_0\Delta u - \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds\right) + f(u) = h.$$

Ahora, recordando la observación (1.2) donde $\alpha - k_0 = 1$ y cambiando la notación ($\partial_t u = u_t$), reescribimos (2.1) como

$$|u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u - \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds + f(u) = h. \tag{2.16}$$

Por otro lado, para poder reescribir la ecuación en términos de desplazamiento, necesitamos definir nuestra condición inicial para η.

Usando (H_1) se obtiene la condición inicial para desplazamiento relativo a la memoria

$$\eta^0(x,s) := u_0(x,0) - u(x,-s) = u_0(x,0) - \phi_0(x,s), \text{ para todo } (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{2.17}$$

Observación 3.9. *Observemos que, la condición inicial (2.17) así definida, es compatible con (2.15), esto quiere decir que, ahora tendremos un sistema de ecuaciones con dos variables u y η, en lugar de una ecuación con una variable.*

Continuando la idea de justificar nuestra variable η nos preguntamos. ¿en qué espacio habita el desplazamiento? Precisamente por ello se ha tenido en cuenta el espacio de historia $\mathcal{M}$. Analizemos η.

Observemos, que η está definida como

$$\begin{aligned} \eta : [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow & \quad \mathbb{R} \\ \eta(t,x,s) \quad := & \quad \eta^t(x,s) = u(x,t) - u(x,t-s). \end{aligned}$$

Fijando $t \in [0, \infty)$ tenemos

$$\eta^t : s \longrightarrow \eta^t(\cdot, s) \in H_0^1(\Omega),$$

observando el término de la ecuación (2.16)

$$\int_0^\infty \mu(s) A\eta^t(s) ds,$$

vemos que necesitamos tener un buen espacio para tener control sobre el término anterior. Para ello, fijamos $t \in [0, \infty)$, y obtendremos que η^t es un elemento de $\mathcal{M}$, donde $\mathcal{M}$ es como en (2.11). De aquí se desprende la motivación de definir el espacio de historia de esa manera.

Por consiguiente, la ecuación (2.1) se escribirá (cambiando $A = -\Delta$):

$$|u_t|^\rho u_{tt} + Au_{tt} + Au + \int_0^\infty \mu(s) A\eta^t(s) ds + f(u) = h \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{2.18}$$

$$\eta_t^t(s) = -\eta_s^t(s) + u_t \text{ en } \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{2.19}$$

con condiciones de frontera

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{2.20}$$

$$\eta = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{2.21}$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad \eta^t(x, 0) = 0, \quad \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s), \tag{2.22}$$

donde

$$\eta_0(x, s) = u_0(x, 0) - \phi(x, s) \quad \text{para todo } (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Observación 3.10. *Por (2.19) $\eta_s^t \in \mathcal{M}$, y también $\eta^t(0) = 0$ para todo $x \in \Omega$, entonces por el resultado de (2.13) tenemos que $\eta^t \in dom(T)$. Por lo tanto, (2.19) se puede escribir en términos del operador lineal como*

$$\eta_t^t = T\eta^t(s) + u_t \textit{ en } \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{2.23}$$

Capítulo III

Buena colocación del problema

En este capítulo presentamos y desarrollamos el resultado principal de este trabajo: "la buena colocación del problema". Iniciamos este capítulo definiendo lo que es una solución débil, luego reducimos el problema (2.18)-(2.19) a un problema aproximado (una ecuación diferencial ordinaria) en la cual encontramos solución débil por el teorema de Caratheodory, luego extendemos las soluciones aproximadas gracias al teorema de compacidad. En otras palabras, utilizaremos el método de Faedo-Galerkind para encontrar solución débil, este método está desarrollado en Lions [13]. Para la prueba de existencia de soluciones estudiamos los resultados presentados por Cavalcanti, D. Cavalcanti & Ferreira [5] y Han y Wang [11]; asimismo, para mostrar la unicidad de solución y el cambio continuo respecto al cambio de datos iniciales, haremos un estudio detallado de los trabajos de Conti, Marchini & Pata [7] y Aráujo, Ma & Qin [1].

3.1. Planteamiento del problema

Comenzamos definiendo el 'Espacio de fase' para el sistema. Este espacio nos dirá donde habitan las soluciones débiles que vamos a definir.

Definición 1.1. *El 'Espacio de fase $\mathcal{H}$' se define*

$$\mathcal{H} := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{M},$$

donde $\mathcal{M}$ es como en (2.11).

Este espacio vectorial es normado con la norma definida

$$\|(u,v,\eta)\|^2_{\mathcal{H}} := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{\mathcal{M}} \quad \text{para todo } (u,v,\eta) \in \mathcal{H}.$$

Ahora que ya definimos el espacio de fase podemos definir solución débil para sistema considerando (2.18)-(2.19).

Definición 1.2. *(Solución débil)*
Sea τ positivo. Dado (2.18)-(2.19), con condiciones iniciales (2.22) y condiciones de frontera (2.20)-(2.21). Si (u_0, v_0, η_0) está en el espacio $\mathcal{H}$ y $h \in L^2(\Omega)$, implica que $z = (u, u_t, \eta) \in C([0,\tau], \mathcal{H})$ es una 'solución débil' de (2.18)-(2.19) si satisface la condición inicial $z(0) = (u_0, v_0, \eta_0)$ y

$$\langle |u_t|^\rho u_{tt}, \phi\rangle + \langle u_{tt}, \phi\rangle_1 + \langle u, \phi\rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^t(s), \phi\rangle_1 ds + \langle f(u), \phi\rangle = (h, \phi), \quad (3.1)$$

$$\langle \eta^t_t + \eta^t_s, \xi\rangle_{\mathcal{M}} = \langle u_t, \xi\rangle_{\mathcal{M}}, \quad (3.2)$$

para cualquier ϕ en $H^1_0(\Omega)$, ξ en $\mathcal{M}$ y t pertenece a $[0,\tau]$ en casi todo punto.

Observación 1.3. *Ahora, una pregunta que surge es, ¿qué sentido tiene las expresiones $\langle |u_t|^\rho u_{tt}, \phi\rangle$ y $\langle f(u), \phi\rangle$ en la ecuación (3.1)-(3.2)?. Para ello, analizamos los siguientes casos.*

i) Caso $\langle |u_t|^\rho u_{tt}, \phi\rangle$:
Si u y u_t en el espacio $C([0,\tau], H^1_0(\Omega))$ y ρ en el intervalo $[0,4)$, luego se cumple

$$|u_t|^\rho u_{tt} \in L^\infty(0,\tau; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)),$$

ya que

$$\int_\Omega |u_t(t)|^{\frac{(\rho+2)(\rho+1)}{\rho+1}} dx = \int_\Omega |u_t(t)|^{\rho+2} dx = \|u_t(t)\|^{\rho+2}_{\rho+2} \leq C^{\rho+2}\|\nabla u_t(t)\|_2^{\rho+2} < \infty,$$

donde C es una constante positiva que se obtiene de la inmersión $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ que se obtiene como caso particular del teorema 1.12, ya que $2^* \leq \rho + 2 \leq 2^* = \dfrac{(3)(2)}{(3)-(1)(2)} = 6$.
Además, si $\|\nabla u_t\|_2 \leq R$ para algún $R > 0$, se tiene que $|u_t|^\rho u_t$ es uniforme-

mente limitada en $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))$ *con respecto a* t*, dado que*

$$\int_0^\tau\int_\Omega |u_t(t)|^{\frac{(\rho+2)(\rho+1)}{\rho+1}}dxdt=\int_0^\tau\|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}dt\leq C^{\rho+2}\int_0^\tau\|\nabla u_t(t)\|_2^{\rho+2}dt\leq\tau R^{\rho+2}C^{\rho+2}.$$

Asimismo, tenemos:

$$\begin{aligned}\langle|u_t|^\rho u_{tt}(t),\phi(t)\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} &= \langle\frac{1}{1+\rho}\frac{d}{dt}\left(|u_t(t)|^{\rho+1}\right),\phi(t)\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)}\\ &= \frac{1}{1+\rho}\int_\Omega\frac{d}{dt}\left(|u_t(t)|^{\rho+1}\right)\phi(t)dx\\ &= -\frac{1}{1+\rho}\int_\Omega |u_t(t)|^{\rho+1}\phi_t(t)dx,\end{aligned}$$

para cualquier elemento ϕ *en el espacio* $D([0,\tau],\Omega)$ *y* $t\in[0,\tau]$ *c.t.p. Dado que* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)\hookrightarrow D'(\Omega)$*. Observando que* $H^1_0(\Omega)$ *es la cerradura de* $D(\Omega)$ *en la norma de* $H^1(\Omega)$*, entonces por densidad obtenemos* $\phi\in H^1_0(\Omega)$*, además como* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)=(L^{\rho+2}(\Omega))'$ *tenemos que* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$*, por consiguiente, podemos ver la expresión* $\langle|u_t|^\rho u_{tt}(t),\phi(t)\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)}$ *como* $\langle|u_t|^\rho u_{tt}(t),\phi(t)\rangle_{H^{-1}\times H^1_0}$ *para cualquier* ϕ *en* $H^1_0(\Omega)$ *y casi todo* $0\leq t\leq\tau$*. Entonces*

$$\langle|u_t|^\rho u_{tt}(t),\phi(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}=-\frac{1}{1+\rho}\langle|u_t(t)|^\rho u_t(t),\phi_t(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}.$$

ii) Caso $\langle f(u(t)),\phi\rangle$*:*
Procedemos como el caso anterior. Observamos que $f(u(t))\in L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$ *para casi todo* $t\in[0,\tau]$*. En el desarrollo que sigue omitiremos la variable temporal* t*.*

$$\begin{aligned}\int_\Omega|f(u)|^{\frac{q+2}{q+1}}dx &\leq \int_\Omega[c|u|(1+|u|^q]^{\frac{q+2}{q+1}}dx\\ &\leq c^{\frac{q+2}{q+1}}2^{\frac{q+2}{q+1}}[\int_\Omega[|u|^{\frac{q+2}{q+1}}dx+\int_\Omega|u|^{q+2}dx]\\ &= c^{\frac{q+2}{q+1}}2^{\frac{q+2}{q+1}}\|u\|^{\frac{q+2}{q+1}}_{\frac{q+2}{q+1}}+c^{\frac{q+2}{q+1}}2^{\frac{q+2}{q+1}}\|u\|^{q+2}_{q+2}\\ &\leq \left(\frac{C_f^1}{2}\right)^{\frac{q+2}{q+1}}\|\nabla u\|_2^{\frac{q+2}{q+1}}+\left(\frac{C_f^2}{2}\right)^{\frac{q+2}{q+1}}\|\nabla u\|_2^{q+2}<\infty,\end{aligned}$$

donde, para la primera desigualdad utilizamos (2.2)-(2.3), y para la penúltima desigualdad utilizamos las inmersiones $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$ *y* $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$

(Teorema 1.12) puesto que $q \in [0,4)$. Donde las constantes C_f^1 y C_f^2 dependen de c, q. Continuando con esta última desigualdad obtenemos

$$\|f(u)\|_{\frac{q+2}{q+1}} = \Big(\int_\Omega |f(u)|^{\frac{q+2}{q+1}}\, dx \Big)^{\frac{q+1}{q+2}} \leq C_f^1 \|\nabla u\|_2 + C_f^2 \|\nabla u\|_2^{q+1}. \tag{3.3}$$

Observación 1.4. *Si (u, u_t, η) es solución débil de (2.18)-(2.19) tendremos que $\eta \in C([0,\tau], \mathcal{M})$ y $u_t \in L^1(0,\tau;\mathcal{M})$. Por lo cual, podemos afirmar que η es una solución suave para la ecuación (2.19), y de su forma equivalente (2.23), es decir*

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= T\eta + u_t, \\ \eta^0 &= \eta_0. \end{aligned}$$

Entonces, como $\eta_0 \in \mathcal{M}$, por la definición tenemos que

$$\eta^t = S(t)\eta_0 + \int_0^t S(t-y) u_t(y) dy,$$

esto implica, por (2.12), que η^t en forma explícita esta dada por

$$\eta^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s), & si \quad 0 < s \leq t, \\ \eta_0(s-t) + u(t) - u_0, & si \quad s > t. \end{cases}$$

Observemos que esta expresión es acorde con nuestra definición de desplazamiento η^t.

Ahora, que ya tenemos definido lo que es una solución débil del sistema (2.18)-(2.19), comenzaremos demostrando la existencia de dichas soluciones débiles.

3.2. Existencia de soluciones débiles

En esta sección demostramos la existencia de solución débil mediante el método de F-G (Faedo-Galerkin), para los pormenores remitimos a ver Conti, Marchini & Pata [8] y Araujo, Ma & Qin [1]. Comenzamos enunciando el teorema que será probado a lo largo de esta sección.

Teorema 2.5. ***(Existencia de soluciones débiles)***
Dado el sistema (2.18)-(2.19), con condiciones de frontera (2.20)-(2.21) y condiciones iniciales (2.22). Supongamos ciertas (H1)-(H4). Si la condición (u_0, v_0, η_0)

está en el espacio $\in \mathcal{M}$ y h pertenece al espacio $L^2(\Omega)$, entonces (2.18)-(2.19) posee solución débil

$$(u, u_t, \eta) \in C([0,\tau], \mathcal{H}), \qquad \forall \tau > 0 \tag{3.4}$$

satisfaciendo

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)), \;\; u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),$$

$$u_{tt} \in L^2([0,\tau]; H_0^1(\Omega)), \;\; \eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}).$$

Para probar el teorema 2.5 comenzamos mostrando las herramientas que contribuirá a aplicar le método de F-G. Recordemos que el mecanismo de F-G radica en conseguir una base de autofunciones y sobre el espacio generado por una cantidad finita de autofunciones definir el problema aproximado para luego probar la existencia de soluciones en dicho espacio generado, estas soluciones son llamadas soluciones aproximadas, finalmente se utilizan tipos de convergencias para poder extender las soluciones aproximadas a la solución general. Comenzamos proporcionando la base de autofunciones.

Dada la ecuación $-\Delta u = \lambda u$ en Ω, con condiciones de Dirichlet, existe $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ una base de autofunciones que satisface la ecuación. Esta base es ortonormal en $L^2(\Omega)$ y ortogonal en $H_0^1(\Omega)$. Cada autofunción satisfaze

$$\begin{cases} -\Delta\omega_j = \lambda_j \omega_j, & si \quad x \in \Omega \\ \omega_j = 0, & si \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde λ_j son los autovalores positivos, j es natural y $\lambda_i \neq \lambda_j$ siempre que $i \neq j$.

Observación 2.6. *Observemos que dicha base de autofunciones existe, puesto que $-\Delta = A$ es operador con $A : dom(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ con la inmersión $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$. Asimismo, el operador A es cerrado, no acotado, definido positivo, autoadjunto (ver Temam [19] Cap. 2). Por lo tanto, de la teoría espectral, existe tal base $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$.*

Esto quiere decir que ya tenemos una base para $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$. Resta encontrar o construir una base para $\mathcal{M}$.

Lema 2.7. *Dado el espacio $\mathcal{M} = L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$, existe una base $\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty$ ortonormal tal que cada ζ_j es un elemento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$ para cualquier j número natural.*

Demostración. Sea $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $L^2_\mu(\mathbb{R}^+) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ y $\{\overline{\omega}_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\overline{\omega}_j = \frac{\omega_j}{\|\nabla \omega_j\|_2} \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Definiendo $\zeta_i = h_p\overline{\omega}_k$ y $\zeta_j = h_m\overline{\omega}_n$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_i, \zeta_j \rangle_{\mathcal{M}} &= \int_0^\infty \mu(s) \langle \zeta_i, \zeta_j \rangle_1 \, ds \\
&= \int_0^\infty \mu(s) \left(\int_\Omega \nabla \zeta_i \nabla \zeta_j dx \right) ds \\
&= \int_0^\infty \mu(s) h_p(s) h_m(s) \left(\int_\Omega \nabla \overline{\omega}_k \nabla \overline{\omega}_n dx \right) ds \\
&= \delta_{pm}\delta_{kn} \\
&= \delta_i \delta_j.
\end{aligned}$$

Así, el lema se satisface. □

Ahora que está justificadas las respectivas bases ortonormales para cada espacio, podemos comenzar la prueba del teorema 2.5.

Demostración del Teorema 2.5

La prueba será desarrollada en cinco etapas. En resumen, primero definiremos el problema aproximado para el sistema (2.18)-(2.19), en seguida probaremos la existencia de solución en dicho problema aproximado y finalmente procederemos a extender dicha solución de manera global. Para este último procedimiento, haremos tres tipos diferentes de estimativas y explicaremos de que manera se utilizarán los limites para extender el problema aproximado.

3.2.1. Problema aproximado

Para cada m natural, definimos el subespacio generado

$$S_m = \langle \omega_1, \cdots, \omega_m \rangle \subset H_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad T_m = \langle \zeta_1, \cdots, \zeta_m \rangle \subset \mathcal{M}.$$

Para (u_0, v_0, η_0) en $\mathcal{H}$, buscamos soluciones aproximadas

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^m a_{mj}(t)\omega_j \quad \text{y} \quad \eta^{t,m}(t) = \sum_{j=1}^m b_{mj}(t)\zeta_j(s), \tag{3.5}$$

tales que

$$\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, \omega_j\rangle + \langle u_{tt}^m, \omega_j\rangle_1 + \langle u^m, \omega_j\rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), \omega_j\rangle_1 ds + \langle f(u^m), \omega_j\rangle = (h, \omega_j), \tag{3.6}$$

$$\langle \eta_t^{t,m} + \eta_s^{t,m}, \zeta_j\rangle_{\mathcal{M}} = \langle u_t^m(t), \zeta_j\rangle_{\mathcal{M}} \tag{3.7}$$

para cada $j \in [1, m]$, con condiciones iniciales

$$u^m(0) = u_0^m, \quad u_t^m(0) = v_0^m \quad \text{y} \quad \eta^{0,m} = \eta_0^m. \tag{3.8}$$

Cada u_0^m, v_0^m, η_0^m es elegido de manera tal que

$$u_0^m \to u_0 \text{ en } H_0^1(\Omega), \qquad v_0^m \to v_0 \text{ en } H_0^1(\Omega), \qquad \eta_0^m \to \eta_0 \text{ en } \mathcal{M}. \tag{3.9}$$

Reemplazando (3.5) en (3.6)-(3.7), obtenemos

$$\sum_{i=1}^m a''_{mi}(t)\langle |u_t^m|^\rho \omega_i, \omega_j\rangle + \sum_{i=1}^m a''_{mi}(t)\langle \omega_i, \omega_j\rangle_1 + \sum_{i=1}^m a_{mi}(t)\langle \omega_i, \omega_j\rangle_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^m b_{mi}(t)\int_0^\infty \mu(s)\langle \zeta_i, \omega_j\rangle_1 ds + \langle f(\sum_{i=1}^m a_{mi}(t)\omega_i), \omega_j\rangle = (h, \omega_j), \tag{3.10}$$

$$\sum_{i=1}^m b'_{mi}(t)\langle \zeta_i, \zeta_j\rangle_{\mathcal{M}} + \sum_{i=1}^m b_{mi}(t)\langle \zeta'_i, \zeta_j\rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^m a'_{mi}(t)\langle \omega_i, \zeta_j\rangle_{\mathcal{M}} \tag{3.11}$$

Ahora, denotamos

$$a(t) = \begin{bmatrix} a_{m1}(t) \\ a_{m2}(t) \\ \vdots \\ a_{mm}(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_{m1}(t) \\ b_{m2}(t) \\ \vdots \\ b_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

Haciendo variar de $j = 1$ hasta $j = m$, obtenemos las siguientes matrices. Para el primer término de (3.10),

$$M(a'(t)) \cdot a''(t) = \begin{bmatrix} \langle |u_t^m|^\rho \omega_1, \omega_1 \rangle & \langle |u_t^m|^\rho \omega_1, \omega_2 \rangle & \cdots & \langle |u_t^m|^\rho \omega_1, \omega_m \rangle \\ \langle |u_t^m|^\rho \omega_2, \omega_1 \rangle & \langle |u_t^m|^\rho \omega_2, \omega_2 \rangle & \cdots & \langle |u_t^m|^\rho \omega_2, \omega_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle |u_t^m|^\rho \omega_m, \omega_1 \rangle & \langle |u_t^m|^\rho \omega_m, \omega_2 \rangle & \cdots & \langle |u_t^m|^\rho \omega_m, \omega_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a''_{m1}(t) \\ a''_{m2}(t) \\ \vdots \\ a''_{mm}(t) \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Para el segundo término de (3.10),

$$K \cdot a''(t) = \begin{bmatrix} \langle \omega_1, \omega_1 \rangle_1 & \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_1 & \cdots & \langle \omega_1, \omega_m \rangle_1 \\ \langle \omega_2, \omega_1 \rangle_1 & \langle \omega_2, \omega_2 \rangle_1 & \cdots & \langle \omega_2, \omega_m \rangle_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \omega_m, \omega_1 \rangle_1 & \langle \omega_m, \omega_2 \rangle_1 & \cdots & \langle \omega_m, \omega_m \rangle_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a''_{m1}(t) \\ a''_{m2}(t) \\ \vdots \\ a''_{mm}(t) \end{bmatrix},$$

como $\langle \omega_i, \omega_j \rangle_1 = \langle -\Delta \omega_i, \omega_j \rangle = \lambda_i \langle \omega_i, \omega_j \rangle$, entonces

$$K \cdot a''(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a''_{m1}(t) \\ a''_{m2}(t) \\ \vdots \\ a''_{mm}(t) \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Asimismo, para el tercer término de (3.10),

$$K \cdot a(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m1}(t) \\ a_{m2}(t) \\ \vdots \\ a_{mm}(t) \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Para el cuarto término de (3.10),

$$B \cdot b(t) = \begin{bmatrix} \langle \zeta_1, \omega_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle \zeta_1, \omega_2 \rangle_{\mathcal{M}} & \cdots & \langle \zeta_1, \omega_m \rangle_{\mathcal{M}} \\ \langle \zeta_2, \omega_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle \zeta_2, \omega_2 \rangle_{\mathcal{M}} & \cdots & \langle \zeta_2, \omega_m \rangle_{\mathcal{M}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \zeta_m, \omega_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle \zeta_m, \omega_2 \rangle_{\mathcal{M}} & \cdots & \langle \zeta_m, \omega_m \rangle_{\mathcal{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{m1}(t) \\ b_{m2}(t) \\ \vdots \\ b_{mm}(t) \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Para el sexto término de (3.10),

$$H = \begin{bmatrix} \langle h, \omega_1 \rangle \\ \langle h, \omega_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle h, \omega_2 \rangle \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Para el primer término de (3.11),

$$P_1 \cdot b'(t) = \begin{bmatrix} \langle \zeta_1, \zeta_1 \rangle & \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle & \cdots & \langle \zeta_1, \zeta_m \rangle \\ \langle \zeta_2, \zeta_1 \rangle & \langle \zeta_2, \zeta_2 \rangle & \cdots & \langle \zeta_2, \zeta_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \zeta_m, \zeta_1 \rangle & \langle \zeta_m, \zeta_2 \rangle & \cdots & \langle \zeta_m, \zeta_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_{m1}(t) \\ b'_{m2}(t) \\ \vdots \\ b'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_{m1}(t) \\ b'_{m2}(t) \\ \vdots \\ b'_{mm}(t) \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Para el segundo término de (3.11),

$$P_2 \cdot b(t) = \begin{bmatrix} \langle \zeta'_1, \zeta_1 \rangle & \langle \zeta'_1, \zeta_2 \rangle & \cdots & \langle \zeta'_1, \zeta_m \rangle \\ \langle \zeta'_2, \zeta_1 \rangle & \langle \zeta'_2, \zeta_2 \rangle & \cdots & \langle \zeta'_2, \zeta_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \zeta'_m, \zeta_1 \rangle & \langle \zeta'_m, \zeta_2 \rangle & \cdots & \langle \zeta'_m, \zeta_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{m1}(t) \\ b_{m2}(t) \\ \vdots \\ b_{mm}(t) \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Para el tercer término de (3.11),

$$Q(a'(t)) = \begin{bmatrix} \langle \sum_{i=1}^{m} a'_{mi}(t) \omega_i, \zeta_1 \rangle_{\mathcal{M}} \\ \langle \sum_{i=1}^{m} a'_{mi}(t) \omega_i, \zeta_2 \rangle_{\mathcal{M}} \\ \vdots \\ \langle \sum_{i=1}^{m} a'_{mi}(t) \omega_i, \zeta_m \rangle_{\mathcal{M}} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente ecuación matricial

$$(M(a'(t)) + K) \cdot a''(t) + K \cdot a(t) + B \cdot b(t) + F_1(a(t)) = H, \tag{3.20}$$

$$P_1 \cdot b'(t) + P_2 \cdot b(t) = Q(a'(t)), \tag{3.21}$$

con condiciones iniciales

$$a(0) := a_0 := \begin{bmatrix} a_{m1}(0) \\ a_{m2}(0) \\ \vdots \\ a_{mm}(0) \end{bmatrix}, \quad a'(0) := a'_0 := \begin{bmatrix} a_{m1}(0) \\ a_{m2}(0) \\ \vdots \\ a_{mm}(0) \end{bmatrix} \quad b(0) := b_0 := \begin{bmatrix} b_{m1}(0) \\ b_{m2}(0) \\ \vdots \\ b_{mm}(0) \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Haciendo el cambio de variable $c(t) = a'(t)$, conseguimos

$$\begin{bmatrix} a'(t) \\ c'(t) \\ b'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(t) \\ (M(c(t)) + K)^{-1}(H - F_1(a(t)) - B \cdot b(t) - K \cdot a(t)) \\ P_1^{-1}(Q(c(t)) - P_2 \cdot b(t)) \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{bmatrix} a(0) \\ c(0) \\ b(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a'_0 \\ b_0 \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Denotando $X(t) = (a(t), c(t), b(t))^{\perp}$, tenemos que

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{3.25}$$

Definida en el conjunto $\mathcal{S} = [0, \infty) \times W$, donde, $W = \{X \in \mathbb{R}^3 : \quad \|X\| \leq r_0\}$ para r_0 positivo tal que $X_0 \in W$.

Observemos en (3.23), que la inversa de las matrices P_1 y $M(c(t))+K$ está garantizado por (3.17), (3.12) y (3.13). Ahora, por la condiciones (H_2) y (H_3) impuestas sobre la función f y h, obtenemos que la función F de (3.25) satisface las dos primeras condiciones de la definición 4.39. Veamos la tercera condición, sea W un subconjunto compacto. Para conseguir la función m_W medible e integrable que domine a la función $F(t, X)$, tomaremos la norma de $F(t, X)$ e iremos estimando utilizando propiedades sobre matrices vistas como transformaciones lineales limitadas (puesto que estamos en dimensión finita). Para evitar cargar la notación utilizaremos el símbolo $\|.\|$ para denotar cualquier norma y sobrentenderemos el espacio en que la norma esta siendo utilizada.

$$\begin{aligned}
\|F(t,X)\| &\leq \|c(t)\| + \|(M(c(t))+K)^{-1}(H - F_1(a(t)) - B\cdot b(t) - K\cdot a(t))\| + \\
&\quad + \|P_1^{-1}(Q(c(t)) - P_2\cdot b(t))\| \\
&\leq \|c(t)\| + C_0(t)\|H - F_1(a(t)) - B\cdot b(t) - K\cdot a(t)\| + \\
&\quad + C_1\|Q(c(t)) - P\cdot b(t)\| \\
&\leq \|c(t)\| + C_0(t)(\|H\| + \|F_1(a(t))\| + C_4\|b(t)\| + C_2\|a(t)\|) + \\
&\quad + C_1(\|Q(c(t))\| + C_3\|b(t)\|).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Donde $C_0(t)$ es la norma de $\|(M(c(t))+K)^{-1}\|$ en el espacio de las transformaciones lineales; las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4 son positivas que acotan a las matrices P^{-1}, K, P y B respectivamente. Asimismo, observemos de (3.27) que $\|H\|$ es una constante, $\|F_1(a(t))\|$ es una función continua por (H_3) y $\|Q(c(t))\|$ es continua por (3.19). Así, podemos definir

$$m_W(t)=\|c(t)\|+C_0(t)(\|H\|+\|F_1(a(t))\|+C_4\|b(t)\|+C_2\|a(t)\|)+C_1(\|Q(c(t))\|+C_3\|b(t)\|).$$

Por lo tanto, el PVI (3.6)-(3.7) bajo la condición inicial (3.8), posee solución local vía el teorema 4.40. Ahora resta tomar el límite, en algún sentido, a cada término para poder extender esta solución de manera global, para ello necesitaremos estimar algunos términos, lo que nos permitirá extender, bajo el límite, estas soluciones locales $(u^m, u_t^m, \eta^{t,m})$ a todo $[0,\infty)$.

3.2.2. Primera estimativa

Como

$$u_t^m(t) = \sum_{j=1}^{m} a'_{mj}(t)\omega_j \quad \text{y} \quad \eta^{t,m}(t) = \sum_{j=1}^{m} b_{mj}(t)\zeta_j(s),$$

entonces multiplicando $a'_{mj}(t)$ a la ecuación (3.6) y $b_{mj}(t)$ a la ecuación (3.7) y sumando en j, obtenemos

$$\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_t^m\rangle + \langle u_{tt}^m, u_t^m\rangle_1 + \langle u^m, u_t^m\rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_t^m\rangle_1 ds + \langle f(u^m), u_t^m\rangle = (h, u_t^m), \tag{3.27}$$

$$\langle \eta_t^{t,m}, \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}} = -\langle \eta_s^{t,m}, \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}} + \langle u_t^m(t), \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}}. \tag{3.28}$$

Ahora definimos los funcionales de energía que nos permitirán conseguir las estimativas

Definición 2.8. *Se define*

$$\varepsilon(t) := \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla \eta^t(t)\|_{\mathcal{M}}^2 = \|(u(t), u_t(t), \eta^t(t))\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.29}$$

el cual es llamado "funcional de energía auxiliar de (2.18)-(2.19)".

Entonces, teniendo en cuenta el problema aproximado, denotamos

$$\varepsilon^m(t) := \frac{1}{2}\|\nabla u^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla \eta^{t,m}(t)\|_{\mathcal{M}}^2 = \|(u^m(t), u_t^m(t), \eta^{t,m}(t))\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.30}$$

el cual será llamado "funcional de energía auxiliar aproximada de (3.27)-(3.28)".

Definición 2.9. *Definimos el funcional*

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \varepsilon(t) + \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx - \int_\Omega hu(t)dx. \tag{3.31}$$

Este funcional será llamado "funcional de energía del sistema (2.18)-(2.19)".

Nuevamente, teniendo en cuenta el problema aproximado anterior, denotamos

$$E^m(t) := \frac{1}{\rho+2}\|u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \varepsilon^m(t) + \int_\Omega \hat{f}(u^m(t))dx - \int_\Omega hu^m(t)dx. \tag{3.32}$$

el cual llamamos "funcional de energía aproximada del sistema (3.27)-(3.28)". Derivando (3.32)

$$\frac{d}{dt}E^m(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{\rho+2}\|u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{d}{dt}\varepsilon^m(t) + \frac{d}{dt}\int_\Omega \hat{f}(u^m(t))dx - \frac{d}{dt}\int_\Omega hu^m(t)dx,$$

utilizando la relación entre el producto interno y la derivada de una norma conseguimos (omitiendo la variable t)

$$\frac{d}{dt}E^m = \langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_t^m \rangle + \langle u^m, u_t^m \rangle_1 + \langle u_{tt}^m, u_t^m \rangle_1 + \langle \eta_t^{t,m}, \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}} + \langle f(u^m), u_t^m \rangle - (h, u_t^m), \tag{3.33}$$

reemplazando en (3.27)-(3.28, obtenemos

$$\frac{d}{dt}E^m(t) = -\langle \eta_s^{t,m}, \eta^{t,m}\rangle_{\mathcal{M}} = \langle T\eta^{t,m}, \eta^{t,m}\rangle_{\mathcal{M}} \leq 0, \tag{3.34}$$

donde la última desigualdad es por el teorema 2.7. Integrando (3.34) de 0 a t, obtenemos

$$E^m(t) \leq E^m(0), \tag{3.35}$$

mas aún, podemos mejorar esta desigualdad a partir de las condiciones iniciales. Para ello analizamos $E^m(0)$, en efecto

$$E^m(0) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t^m(0)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \varepsilon^m(0) + \int_\Omega \hat{f}(u^m(0))dx - \int_\Omega hu^m(0)dx, \tag{3.36}$$

de donde se observa que:

- Si suponemos que $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, entonces

  $$\varepsilon^m(0) = \|(u_0^m, v_0^m, \eta_0^{t,m})\|_{\mathcal{H}}^2$$

  y por las convergencias de (3.8), obtendremos que $\varepsilon^m(0) \leq Q_1(R)$ donde $Q_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función creciente e independiente del tiempo.

- Si suponemos que $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, entonces

  $$\frac{1}{\rho+2}\|u_t^m(0)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq \frac{1}{\rho+2}C^{\rho+2}\|\nabla u_t^m(0)\|_2^{\rho+2} \leq \frac{1}{\rho+2}C^{\rho+2}R^{\frac{\rho+2}{2}} := Q_2(R),$$

  donde la primera desigualdad es por la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ (que se obtiene como caso particular del teorema 1.12 item a)) con constante $C > 0$. También, análogo a Q_1, tenemos que Q_2 es una función cresciente e independiente del tiempo.

- Si supongamos que $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, entonces

  $$\int_\Omega \hat{f}(u^m(0))dx = \int_\Omega \hat{f}(u_0^m)dx.$$

  por la hipótesis H_3 tenemos que

  $$\hat{f}(u) \leq f(u)u + \frac{\beta}{2}u^2 + m_u \leq c|u|(1+|u|^q)u + \frac{\beta}{2}u^2 + m_u \leq c(|u|^2 + |u|^{q+2}) + \frac{\beta}{2}|u|^2 + m_u,$$

integrando conseguimos

$$\int_\Omega \hat{f}(u) \leq C_0 \int_\Omega |u|^2 dx + c \int_\Omega |u|^{q+2} dx + m_u|\Omega| = C_0\|u\|_2^2 + c\|u\|_{q+2}^{q+2} + m_u|\Omega|,$$

nuevamente, por la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ tenemos

$$\int_\Omega \hat{f}(u) \leq \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 C_0\|\nabla u\|_2^2 + C^{q+2}c\|\nabla u\|_2^{q+2} + m_u|\Omega|,$$

por lo tanto, existe una función Q_3 creciente positiva tal que

$$\int_\Omega \hat{f}(u^m(0))dx \leq Q_3(R).$$

- Si suponemos $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, entonces utilizando la desigualdad de Young y la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega hu^m(0)dx \leq \|h\|_2\|u_0^m\|_2 \leq \epsilon\|h\|_2^2 + \frac{1}{4\epsilon}\|u_0^m\|_2^2 \leq \epsilon\|h\|_2^2 + \frac{1}{4\lambda_1\epsilon}\|\nabla u_0^m\|_2^2, \tag{3.37}$$

haciendo $\epsilon = \dfrac{1}{\lambda_1}$, obtenemos

$$\int_\Omega hu^m(0)dx \leq \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\nabla u_0^m\|_2^2. \tag{3.38}$$

Análogo a los otros casos, existe una función Q_4 tal que

$$\int_\Omega hu^m(0)dx \leq Q_4(R).$$

Por lo tanto, si $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, y reemplazando las desigualdades de los ítems anteriores en (3.36), obtenemos

$$E^m(0) \leq Q_2(R) + Q_1(R) + Q_3(R) + Q_4(R).$$

donde función $Q_0 := Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$ es creciente e independiente del tiempo, tal que

$$E^m(0) \leq Q_0(R). \tag{3.39}$$

Observación 2.10. *Observemos que $Q_0(R)$, depende de $\|h\|$, m_u, β, ρ, q, $|\Omega|$, λ_1*

y de las constantes de inmersiones.

Ahora veamos que existe una relación entre $\varepsilon^m(t)$ y $E^m(0)$. En efecto, como

$$\frac{1}{\rho+2}\|u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \geq 0,$$

entonces

$$E^m(t) \geq \varepsilon^m(t) + \int_\Omega \hat{f}(u^m(t))dx - \int_\Omega hu^m(t)dx$$

y de (3.37) obtenemos

$$-\int_\Omega hu^m(t)dx \geq -\frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2 - \frac{1}{4}\|\nabla u^m(t)\|_2^2,$$

por lo cual

$$E^m(t) \geq \frac{1}{2}\varepsilon^m(t) + \int_\Omega \hat{f}(u^m(t))dx - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2. \tag{3.40}$$

Resta estimar el término central del lado derecho de la desigualdad. Para ello, observemos de las hipótesis (2.4), dado un $\epsilon > 0$ (pequeño) existe $R > 0$ tal que

$$\frac{f(y)}{y} > -\lambda_1 + \epsilon \quad \text{si} \quad |y| > R,$$

para $\lambda := \lambda_1 - \epsilon > 0$ con ϵ suficientemente pequeño existe una constante $C > 0$ tal que

$$f(y) \geq -\lambda y - C,$$

Observemos que la constante $C > 0$ también viene de $0 \leq |y| \leq R$. Luego, integrando de 0 a u respecto a y, obtenemos

$$\hat{f}(u) \geq -\frac{\lambda}{2}u^2 - Cu,$$

lo que implica

$$\int_\Omega \hat{f}(u)dx \geq -\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\, dx - C\int_\Omega |u|\, dx \geq -\bar{\lambda}\int_\Omega |u|^2\, dx, \tag{3.41}$$

donde $\bar{\lambda}$ se obtiene por la inmersión de L^2 en L^1. Asimismo, por la observación 1.14

existe λ_1 positivo tal que

$$\int_\Omega \hat{f}(u)dx \geq -\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1^2}\|\nabla u\|_2^2 \geq -\frac{2\bar{\lambda}}{\lambda_1^2}\varepsilon(t).$$

Entonces para ϵ positivo suficientemente pequeño, existe una constante A positiva tal que

$$E^m(t) \geq A\varepsilon^m(t) - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2,$$

para todo $m > m_0 = m_0(\epsilon)$. Por lo tanto,

$$\varepsilon^m(t) \leq \frac{E^m(t) + C_h}{A},$$

donde $C_h = \dfrac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2$. Considerando (3.35) y (3.39), suponiendo que $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, entonces existe $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ creciente que no depende de t de manera que

$$\varepsilon^m(t) := \frac{1}{2}\|\nabla u^m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t^m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla \eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}^2 \leq Q(R).$$

Con esta estimativa y recordando la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, concluimos que

$$(u^m(t)) \text{ es acotado en } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),$$

$$(u_t^m(t)) \text{ es acotado en } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),$$

$$(\eta^{t,m}(t)) \text{ es acotado en } L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}).$$

Esto implica, por el teorema 1.21, que estas sucesiones convergen débil estrella (siendo generalmente subsucesiones)

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t^m(t) \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),$$

$$\eta^{\bullet,m} \overset{*}{\rightharpoonup} \eta^\bullet \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}).$$

Observación 2.11. *La expresión $\eta^{\bullet,m}$ significa la función $\eta^{\bullet,m} : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}$, donde $\eta^{\bullet,m}(t) = \eta^{t,m}$. De la misma forma con $\eta^\bullet$.*

3.2.3. Segunda estimativa

Antes de iniciar esta subsección, recordemos que el objetivo de esta sección es poder tomarle el límite a cada término de nuestro problema aproximado (3.6)-(3.7). En la primera estimativa obtuvimos el límite de los términos u^m, u_t^m y $\eta^{t,m}$. En esta subsección el objetivo es tomarle el límite a u_{tt}^m y para ello debemos estimar $\displaystyle\int_0^t \|\nabla u_{tt}^m(s)\|_2^2 ds$ para $t \in [0,\tau]$ para $\tau > 0$ fijo.
Comenzamos multiplicando la ecuación (3.6) por a''_{mj} para enseguida sumar de 1 hasta m respecto de j, con lo que conseguimos

$$\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_{tt}^m\rangle + \|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 = -\langle u^m, u_{tt}^m\rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds - \langle f(u^m), u_{tt}^m\rangle + (h, u_{tt}^m), \tag{3.42}$$

y como $\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_{tt}^m\rangle$ es mayor o igual a cero, obtenemos

$$\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 \leq -\langle u^m, u_{tt}^m\rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds - \langle f(u^m), u_{tt}^m\rangle + (h, u_{tt}^m). \tag{3.43}$$

Observemos que para estimar $\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2$, necesitamos estimar el lado derecho de (3.43)

• **Estimando** $\langle u^m, u_{tt}^m\rangle_1$.

$$\langle u^m, u_{tt}^m\rangle_1 \leq \|\nabla u^m\|_2 \|\nabla u_{tt}^m\|_2.$$

• **Estimando** $\displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds &= \int_0^\infty \mu(s)\left[\int_\Omega \nabla\eta^{t,m}(s)\nabla u_{tt}^m dx\right] ds \\
&\leq \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^{t,m}(s)\|_2 \|\nabla u_{tt}^m dx\|_2 ds \\
&= \|\nabla u_{tt}^m dx\|_2 \left(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^{t,m}(s)\|_2 ds\right) \\
&= \|\nabla u_{tt}^m dx\|_2 \left(\int_0^\infty \mu^{\frac{1}{2}}(s)\mu^{\frac{1}{2}}(s)\|\nabla\eta^{t,m}(s)\|_2 ds\right) \\
&\leq \|\nabla u_{tt}^m dx\|_2 \left(\int_0^\infty \mu(s) ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^{t,m}(s)\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= k_0^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds \leq k_0^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}. \tag{3.44}$$

• **Estimando** $\langle f(u^m), u_{tt}^m \rangle$.

Por el item a) de la observación 1.3, tenemos que

$$\langle f(u^m), u_{tt}^m \rangle \leq \|f(u^m)\|_{\frac{q+2}{q+1}} \|u_{tt}^m\|_{q+2} \leq C\|\nabla u_{tt}^m\|_2 (C_f^1 \|\nabla u^m\|_2 + C_f^2 \|\nabla u^m\|_2^{q+1}).$$

donde $C > 0$ proviene de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$, ya que $q \in [0, 4)$.

• **Estimando** (h, u_{tt}^m).

Utilizando la desigualdad del producto interno y la observación 1.14, obtenemos

$$(h, u_{tt}^m) \leq \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2 \|\nabla u_{tt}^m\|_2.$$

Por lo tanto, reemplazando todas estas estimativas en (3.43), conseguimos que

$$\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 \leq \|\nabla u_{tt}^m\|_2 (\|\nabla u^m\|_2 + k_0^{\frac{1}{2}} \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}} + CC_f^1 \|\nabla u^m\|_2 + CC_f^2 \|\nabla u^m\|_2^{q+1} + \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2).$$

Análogamente, como (u_0, v_0, η_0) es dominada por la constante R, existe $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ creciente e independiente del tiempo de forma que

$$\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 + \frac{1}{2} Q(R),$$

entonces

$$\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 \leq Q(R).$$

Ahora, sea $\tau > 0$ fijo con $t \in [0, \tau]$. Integrando de 0 a t tenemos

$$\int_0^t \|\nabla u_{tt}^m(s)\|_2^2 ds \leq tQ(R) \leq \tau Q(R), \quad t \in [0, \tau]$$

Observemos que $\tau Q(R)$ depende de τ.
Por lo tanto, concluimos que

$$(u_{tt}^m) \text{ es acotada en } L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega))$$

nuevamente, por el teorema 1.21, obtenemos que esta sucesión (siendo generalmente subsucesión) converge débil estrella, es decir

$$u_{tt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \text{ en } L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega)).$$

3.2.4. Tercera estimativa

Finalmente, del problema aproximado (3.6)-(3.7), observamos que queda el término $|u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t)$ por justificar su límite. Para ello será necesario estimar $\||u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}$. Iniciando, tenemos

$$\||u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} = \|u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+1} \leq C^{\rho+1}\|\nabla u_t^m(t)\|_2^{\rho+1},$$

donde $C > 0$ se obtiene de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$. Procediendo del mismo modo que la segunda estimativa, asumiendo que $\|u_0, v_0, \eta_0\| \leq R$ tenemos que existe una función $Q_5 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ creciente e independiente del tiempo, tal que $\||u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \leq Q_5(R)$, por lo cual

$$(|u_t^m|^\rho u_t^m) \text{ es acotada en } L^\infty(0,\tau; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)).$$

3.2.5. Pasando el límite

Por las estimativas anteriores obtenidas podemos extender estas soluciones; sin embargo, tendremos problema para extender los términos no lineales, por tal motivo en esta subsección estudiamos la convergencia 'en algún sentido' para cada uno de estos términos. Notemos que los términos no lineales del problema son

$$f(u^m) \quad \text{y} \quad |u_t^m|^\rho u_{tt}^m.$$

De igual forma, analizamos la convergencia del problema aproximado.

- **Limite para** $|u_t^m|^\rho u_{tt}^m$.
  Como vemos en la observación 1.3, para cada $t \in [0,\tau]$, tenemos que $|u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t)$ pertenece al espacio $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$. Por la inmersión $W^{1,\infty}(0,\tau; H_0^1(\Omega)) \overset{c}{\hookrightarrow} C([0,\tau]; L^2(\Omega))$, y pasando a una subsucesión, si fuera necesario, obtenemos

  $$u_t^m \to u_t \text{ en } C([0,\tau]; L^2(\Omega)),$$

  esto se debe a las dos primeras estimativas. Además, tenemos

  $$|u_t^m|^\rho u_t^m \longrightarrow |u_t|^\rho u_t \text{ en casi todo punto en } \Omega \times [0,\tau].$$

Además, por la tercera estimativa tenemos que

$$(|u_t^m|^\rho u_t^m) \text{ es acotada en } L^\infty(0,\tau; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)),$$

es decir, $|u_t^m|^\rho u_t^m$ es uniformemente acotada en $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ respecto a $t \in [0,\tau]$. Por el TCD ("Teorema de la Convergencia Dominada") obtenemos

$$-\frac{1}{\rho+1}\int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t), \phi_t(t)\rangle dt \longrightarrow \int_0^\tau \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \phi(t)\rangle dt,$$

donde $\phi \in D([0,\tau]; H_0^1(\Omega))$. Por otro lado, como

$$-\frac{1}{\rho+1}\int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t), \phi_t(t)\rangle dt = \int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \phi(t)\rangle dt,$$

entonces

$$\int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \phi(t)\rangle dt \longrightarrow \int_0^\tau \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \phi(t)\rangle dt.$$

Por la arbitrariedad de ϕ, concluimos que

$$\langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \phi(t)\rangle \longrightarrow \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \phi(t)\rangle \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ c.t.p } t \in [0,\tau]. \tag{3.45}$$

- **Limite para** $f(u^m)$.
  De igual manera, de la inmersión $W^{1,\infty}(0,\tau; H_0^1(\Omega)) \overset{c}{\hookrightarrow} C([0,\tau]; L^2(\Omega))$ existe una subsucesión tal que

$$u^m \longrightarrow u \quad \text{c.t.p. en } \Omega \times [0,\tau],$$

por otro lado, dado que f es continua tenemos que

$$f(u^m) \longrightarrow f(u) \quad \text{c.t.p en } \Omega \times [0,\tau].$$

Por la observación 1.3 tenemos que $f(u^m)$ es uniformemente acotada en $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ en relación a la variable temporal t, entonces

$$\int_0^\tau \langle f(u^m), \phi\rangle dt \longrightarrow \int_0^\tau \langle f(u), \phi\rangle dt \quad \text{para todo } \phi \in D([0,\tau]; H_0^1(\Omega)).$$

Como $\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\langle f(u^m), \phi\rangle \longrightarrow \langle f(u), \phi\rangle \quad \text{para todo } \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ c.t.p } t \in [0,\tau].$$

- **Sobre el límite para la ecuación 2.19.**
  Se observa por la primera estimativa que $\eta^{t,m} \in dom(T)$, y procediendo de la misma forma que la observación (1.4), la representación para $\eta^{t,m}$ esta dado por
$$\eta^{t,m}(s) = \begin{cases} u^m(t) - u^m(t-s), & si \quad 0 < s \le t \\ \eta_0^m(s-t) + u^m(t) - u_0^m, & si \quad s > t. \end{cases}$$
  Ahora, como $u_0^m \to u_0$ y $\eta_0^m \to \eta_0$ fuertemente, y recordando la primera estimativa, conseguimos que $\eta^{\bullet,m} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\eta}^{\bullet}$ en $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M})$. Asimismo, obtenemos
$$\overline{\eta}^{t,m}(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s), & si \quad 0 < s \le t \\ \eta_0(s-t) + u(t) - u_0, & si \quad s > t \end{cases}$$
  y como $\eta^{\bullet,m} \overset{*}{\rightharpoonup} \eta^{\bullet}$ en $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M})$, lo cual nos dice que $\overline{\eta} = \eta$. Entonces, η^t es una solución suave para la ecuación (2.19), y en particular, dado que ya tenemos la representación de η^t, esto satisface (3.7).

Por lo tanto, por las diferentes estimativas y por los límites de cada término del problema aproximado (3.6)-(3.7), podemos garantizar la existencia de solución débil para (2.18)-(2.19), lo que prueba el Teorema 2.5.

3.3. Dependencia continua de las soluciones débiles

En esta sección presentamos y demostramos un resultado realizado por Conti, Marchini & Pata [7], que muestra el cambio de las soluciones respecto al cambio de las condiciones iniciales para el sistema (2.18)-(2.19). Este resultado será crucial para demostrar la unicidad de solución en la siguiente sección.
Sea τ un número real positivo. Sean $(u^1, u_t^1, \eta^{\bullet,1}), (u^2, u_t^2, \eta^{\bullet,2}) \in C([0,\tau], \mathcal{H})$ dos soluciones débiles para el sistema (2.18)-(2.19), satisfaciendo las condiciones iniciales

$$(u^i(0), u_t^i(0), \eta^{0,i}) = z_i(0),$$

donde $i = 1, 2$ tal que $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$. Dado que necesitamos probar la unicidad de solución, denotaremos la diferencia de dichas soluciones como

$$\overline{u} = u^1 - u^2, \quad \overline{\eta} = \eta^{\bullet,1} - \eta^{\bullet,2}. \tag{3.46}$$

De donde se deduce que $\overline{u}, \overline{\eta} \in C([0.\tau], \mathcal{H})$ y $\overline{u}_t = u_t^1 - u_t^2$.

3.3.1. Dependencia continua de soluciones débiles

Iniciamos esta subsección presentando el teorema que afirma el cambio continuo de soluciones respecto al cambio de las condiciones iniciales. Para demostrar este teorema definiremos un nuevo sistema de ecuaciones, luego conseguiremos estimativas convenientes para usar la desigualdad de Gronwall.

Teorema 3.12. *Sea R un número real positivo y $\overline{u}, \overline{u}_t$ y $\overline{\eta}$ como en (3.46). Si $\|z_i\| \leq R$ para $i = 1, 2$ entonces*

$$\|\nabla \overline{u}(t)\|_2^2 + \|\nabla \overline{u}_t(t)\|_2^2 + \|\overline{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leq (1+\tau)Q(R)e^{\tau(\tau+1)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{3.47}$$

para todo $t \in [0, \tau]$, donde $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es creciente y no depende de τ positivo.

Demostración. Definimos las variables

$$w(t) := \int_0^t u(y)dy \quad \text{y} \quad \xi^t(s) := \int_0^t \eta^y(s)dy.$$

También, definimos la función $\sigma : H_0^1(\Omega) \to L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ tal que

$$\sigma(\nu) = \frac{1}{1+\rho}\nu|\nu|^\rho. \tag{3.48}$$

Observación 3.13.

- *Si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $\sigma(u) \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$, pues*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\sigma(u)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}dx &= \int_\Omega \frac{1}{(1+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}}|u|^{\rho+2}dx = \frac{1}{(1+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}}\|u\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ &\leq \frac{C^{\rho+2}}{(1+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}}\|\nabla u\|_2^{\rho+2} < \infty, \end{aligned}$$

  donde $C > 0$ es la constante de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$.

- *De la misma manera que en la observación (1.3), como* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) = (L^{\rho+2}(\Omega))'$ *y* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$, *dado que* $\rho \in [0,4)$ *entonces* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. *Por lo tanto, tiene sentido la siguiente expresión*

$$\langle \sigma(u), \phi \rangle := \langle \sigma(u), \phi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}, \qquad \textit{para todo } \phi \in H_0^1.$$

Puesto que $\sigma(u) \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$, *entonces se puede ver a* $\sigma(u)$ *como una distribución.*

- *Por la condición* $0 \leq \rho < 4$, *la función* σ *es monótona (Ver [22] sec. 25.5a).*

- *Sea* u *y* v *números reales cualesquiera. Entonces, para cada* $0 \leq \rho < 4$ *existe* $c_\sigma > 0$ *tal que*

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| \leq c_\sigma(|u|^\rho + |v|^\rho)|u - v|.$$

En efecto, probamos el resultado para $\rho \in (0,4)$, *ya que si* $\rho = 0$ *la prueba es inmediata. Observemos que*

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| = \frac{1}{\rho+1}||u|^\rho u - |v|^\rho v| = \frac{1}{\rho+1}(\rho+1)|\xi|^\rho|u - v|,$$

donde $\xi \in [u,v]$, *esto por el teorema del valor medio. Entonces, existe* $\theta \in [0,1]$ *tal que* $\xi = (1-\theta)u + \theta v$, *entonces*

$$\begin{aligned} |\sigma(u) - \sigma(v)| &= |(1-\theta)u + \theta v|^\rho |u - v| \\ &\leq 2^\rho||u - \theta u|^\rho + |\theta v|^\rho||u - v| \\ &\leq 2^\rho|2^\rho|u|^\rho + |u|^\rho + |v|^\rho||u - v| \\ &\leq 2^\rho|(2^\rho + 1)|u|^\rho + |v|^\rho||u - v| \\ &= c_\sigma||u|^\rho + |v|^\rho||u - v|. \end{aligned}$$

Donde $c_\sigma = 2^{2\rho} + 2^\rho$. *Con lo cual probamos el resultado.*

Entonces, integrando (2.18) de 0 a t, tenemos

$$\int_0^t \Big(\frac{1}{\rho+1}\frac{d}{dt}|u_t|^{\rho+1} + Au_{tt} + Au + \int_0^\infty \mu(s)A\eta^y(s)ds + f(u(y))\Big)dy = \int_0^t hdy,$$

así obtenemos

$$\sigma(u_t) + Aw_{tt} + Aw + \int_0^\infty \mu(s)A\xi(s)ds + \int_0^t f(u(y))dy = th + g, \tag{3.49}$$

donde

$$g = Au_t(0) + \sigma(u_t(0)).$$

Ahora, definimos una variable para cada una de las soluciones $(u^1, u_t^1, \eta^{t,1})$ y $(u^2, u_t^2, \eta^{t,2})$ de (2.18)-(2.19) de la siguiente manera

$$w^i(t) = \int_0^t u^i(y)dy, \quad \text{y} \quad \xi^{t,i} = \int_0^t \eta^{y,i}(s)dy, \quad i = 1, 2.$$

Además, denotamos

$$\overline{w}(t) = w^1(t) - w^2(t) \quad \text{y} \quad \overline{\xi}^t = \xi^{t,1} - \xi^{t,2}.$$

Reemplazamos cada solución $(u^1, u_t^1, \eta^{t,1})$ y $(u^2, u_t^2, \eta^{t,2})$ en la ecuación (3.49) y haciendo la diferencia, obtenemos que $(\overline{w}, \overline{\xi}^t)$ satisface el sistema

$$\sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2) + A\overline{w}_{tt} + A\overline{w} + \int_0^\infty \mu(s)A\overline{\xi}^t(s)ds + F = G, \tag{3.50}$$

$$\overline{\xi}_t^t = T\overline{\xi}^t + \overline{w}_t - \overline{u}(0) + \overline{\eta}^0, \tag{3.51}$$

con condición inicial

$$F(t) = \int_0^t [f(u^1(y)) - f(u^2(y))]dy, \quad G = A\overline{u}_t(0) + \sigma(u_t^1(0)) - \sigma(u_t^2(0)).$$

En efecto, como $\overline{\xi}^t = \xi^{t,1} - \xi^{t,2}$ y $T\eta = -\eta$ con $\eta \in Dom(T)$ y restando e integrando las respectivas soluciones $\eta^{t,1}$ y $\eta^{t,2}$, obtenemos

$$\int_0^t \eta_t^{y,1} - \eta_t^{y,2}dy = -\int_0^t \eta_s^{y,1} - \eta_s^{y,2}dy + \int_0^t u_t^1(y) - u_t^2(y)dy.$$

De donde se tiene

$$\eta^{t,1}(t) - \eta^{t,2}(t) - (\eta^{t,1}(0) - \eta^{t,2}(0)) = -\int_0^t \eta_s^{y,1} - \eta_s^{y,2}dy + \int_0^t \overline{u}_t(y)dy,$$

por lo cual

$$\overline{\xi}^t_t - \overline{\eta}(0) = T\overline{\xi}^t + \overline{u}(t) - \overline{u}(0).$$

De donde sigue la ecuación (3.51). Por otro lado, multiplicando $\overline{w}_{tt} = u^1_t - u^2_t$ a la ecuación (3.50) obtenemos

$$\langle\sigma(u^1_t)-\sigma(u^2_t),\overline{w}_{tt}\rangle+\langle A\overline{w}_{tt},\overline{w}_{tt}\rangle+\langle A\overline{w},\overline{w}_{tt}\rangle+\int_0^\infty \mu(s)\langle\overline{\xi}^t,\overline{w}_{tt}\rangle_1 ds+\langle F,\overline{w}_{tt}\rangle = \langle G,\overline{w}_{tt}\rangle. \tag{3.52}$$

y por la monotonía de la función σ, $\langle\sigma(u^1_t) - \sigma(u^2_t), \overline{w}_{tt}\rangle \geq 0$, obtenemos

$$\|\nabla\overline{w}_{tt}\|_2^2 \leq -\langle\overline{w},\overline{w}_{tt}\rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s)\langle\overline{\xi}^t(s),\overline{w}_{tt}\rangle_1 ds - \langle F,\overline{w}_{tt}\rangle + \langle G,\overline{w}_{tt}\rangle. \tag{3.53}$$

Con la idea de tener un mejor panorama sobre el sistema (3.50)-(3.51) definimos el siguiente funcional.

Definición 3.14. *Definimos*

$$\Lambda(t) := \frac{1}{2}\|\nabla\overline{w}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\overline{w}_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\overline{\xi}^t\|^2_{\mathcal{M}} = \|(\overline{w}(t),\overline{w}_t(t),\overline{\xi}^t)\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.54}$$

El cual es llamado "Funcional de energía auxiliar para (3.50)-(3.51)".

Nuestro objetivo en esta subsección es acotar de forma conveniente cada término de (3.47), para tal efecto servirá la Energía auxiliar de (3.50)-(3.51). Para ello, dividimos la prueba en tres etapas.

Prueba del teorema: Estimación para $\|\nabla\overline{u}(t)\|_2^2$

Observemos que

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \langle\overline{w}(t),\overline{w}_t(t)\rangle_1 + \langle\overline{w}_{tt}(t),\overline{w}_t(t)\rangle_1 + \langle\overline{\xi}^t_t,\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}}. \tag{3.55}$$

Entonces, multiplicando $\overline{w}_t$ a la ecuación (3.50) y $\overline{\xi}^t$ la ecuación (3.51), obtenemos

$$\langle\sigma(u^1_t) - \sigma(u^2_t),\overline{w}_t\rangle + \langle A\overline{w}_{tt},\overline{w}_t\rangle + \langle A\overline{w},\overline{w}_t\rangle + \langle\overline{\xi}^t,\overline{w}_t\rangle_{\mathcal{M}} + \langle F,\overline{w}_t\rangle = \langle G,\overline{w}_t\rangle,$$

$$\langle\overline{\xi}^t_t,\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}} = \langle T\overline{\xi}^t,\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}} + \langle\overline{w}_t,\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}} - \langle\overline{u}(0) - \overline{\eta}^0,\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}},$$

reemplazando estas dos ecuaciones en (3.55) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \langle T\overline{\xi}^t,\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}}-\langle\sigma(u^1_t)-\sigma(u^2_t),\overline{w}_t\rangle-\langle F,\overline{w}_t\rangle+\langle G,\overline{w}_t\rangle+\langle\overline{\eta}^0-\overline{u}(0),\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}}. \tag{3.56}$$

Además, observemos que

$$-\frac{d}{dt}\langle F,\overline{w}+\overline{w}_t\rangle+\langle F_t,\overline{w}+\overline{w}_t\rangle=-\langle F,\overline{w}_t\rangle-\langle F,\overline{w}_{tt}\rangle, \tag{3.57}$$

$$\frac{d}{dt}\langle G,\overline{w}+\overline{w}_t\rangle=\langle G,\overline{w}_t+\overline{w}_{tt}\rangle, \tag{3.58}$$

ahora, como $\langle T\overline{\xi}^t,\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}}\leq 0$ por el teorema 2.7, obtenemos que (3.56) resulta

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t)\leq-\langle\sigma(u_t^1)-\sigma(u_t^2),\overline{w}_t\rangle-\langle F,\overline{w}_t\rangle+\langle G,\overline{w}_t\rangle+\langle\overline{\eta}^0-\overline{u}(0),\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}}. \tag{3.59}$$

Sumando las desigualdades (3.53) y (3.59), y teniendo en cuenta las igualdades (3.57)-(3.58), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Lambda(t)+\|\nabla\overline{w}_{tt}\|_2^2 \;&\leq -\langle\sigma(u_t^1)-\sigma(u_t^2),\overline{w}_t\rangle-\frac{d}{dt}\langle F,\overline{w}+\overline{w}_t\rangle+\langle F_t,\overline{w}+\overline{w}_t\rangle\\ &+\frac{d}{dt}\langle G,\overline{w}+\overline{w}_t\rangle+\langle\overline{\eta}^0-\overline{u}(0),\overline{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}}-\langle\overline{w},\overline{w}_{tt}\rangle_1-\int_0^\infty\mu(s)\langle\overline{\xi}^t(s),\overline{w}_{tt}\rangle_1 ds.\end{aligned} \tag{3.60}$$

Por otro lado, de la hipótesis $\|z_i\|\leq R$, existe $Q_0:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ creciente que no depende de t, de modo que

$$\|\nabla u^i\|_2^2+\|\nabla u_t^i\|_2^2+\|\eta^{t,i}\|_{\mathcal{M}}^2\leq Q_0(R)\quad \text{para } i=1,2. \tag{3.61}$$

Observación 3.15. *Para evitar recargar la notación, en adelante, denotamos por $Q(R)$ a cualquier función cresciente no dependiente de t que mayore a $Q_0(R)$.*

Antes de estimar (3.60) veamos la siguiente observación.

Observación 3.16. *En la estimativa anterior, hemos utilizado la observación 3.15 y el teorema 1.6, puesto que*

$$\frac{\rho}{\rho+2}+\frac{1}{\rho+2}+\frac{1}{\rho+2}=1.$$

Esto se usará en adelante.

- **Estimativa para** $\langle\sigma(u_t^1)-\sigma(u_t^2),\overline{w}_t\rangle$.

Utilizando $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ y observando que $\overline{w}_{tt} = u_t^1 - u_t^2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), \overline{w}_t \rangle &\leq c_\sigma \int_\Omega (|u_t^1|^\rho + |u_t^2|^\rho)|\overline{w}_{tt}||\overline{w}_t|\, dx \\
&\leq c_\sigma \|u_t^1\|_{\rho+2}^\rho \|\overline{w}_{tt}\|_{\rho+2} \|\overline{w}_t\|_{\rho+2} + c_\sigma \|u_t^2\|_{\rho+2}^\rho \|\overline{w}_{tt}\|_{\rho+2} \|\overline{w}_t\|_{\rho+2} \\
&\leq c_\sigma C \|\nabla u_t^1\|_2^\rho \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2 \|\nabla \overline{w}_t\|_2 + c_\sigma C \|\nabla u_t^2\|_2^\rho \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2 \|\nabla \overline{w}_t\|_2 \\
&\leq Q(R) \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2 \|\nabla \overline{w}_t\|_2 + Q(R) \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2 \|\nabla \overline{w}_t\|_2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2^2 + Q(R) \|\nabla \overline{w}_t\|_2^2.
\end{aligned}$$

- **Estimativa para** $\langle \overline{\eta}^0 - \overline{u}(0), \overline{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}}$.

$$\langle \overline{\eta}^0 - \overline{u}(0), \overline{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}} \leq \|\nabla \overline{u}(0)\|_2^2 + \|\overline{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2 + c_1 \|\overline{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2,$$

donde $c_1 > 0$ es una constante del lema 1.4.

- **Estimativa para** $\langle \overline{w}, \overline{w}_{tt} \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \overline{\xi}^t(s), \overline{w}_{tt} \rangle_1 ds$.

$$\begin{aligned}
\langle \overline{w}, \overline{w}_{tt} \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \overline{\xi}^t(s), \overline{w}_{tt} \rangle_1 ds &\leq (\|\nabla \overline{w}\|_2 + k_0^{\frac{1}{2}} \|\overline{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}) \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2 \\
&\leq c_2 (\|\nabla \overline{w}\|_2^2 + \|\overline{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2) + \frac{1}{2} \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2^2,
\end{aligned}$$

donde $c_2 > 0$ es la constante que viene del lema 1.4.
Estas dos estimativas se consiguen de manera análoga a la segunda estimativa de la sección anterior. Así, reemplazando estas estimativas en la desigualdad anterior (3.60), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Lambda(t) + \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2^2 &\leq \frac{1}{2} \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2^2 + Q(R) \|\nabla \overline{w}_t\|_2^2 - \frac{d}{dt} \langle F, \overline{w} + \overline{w}_t \rangle + \langle F_t, \overline{w} + \overline{w}_t \rangle \\
&\quad + \frac{d}{dt} \langle G, \overline{w} + \overline{w}_t \rangle + \|\nabla \overline{u}(0)\|_2^2 + \|\overline{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2 + c_1 \|\overline{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2 \\
&\quad + c_2 (\|\nabla \overline{w}\|_2^2 + \|\overline{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2) + \frac{1}{2} \|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Recordando (3.54), $\Lambda(t) := \frac{1}{2}\|\nabla\overline{w}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\overline{w}_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\overline{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Lambda(t) &\leq 2Q(R)\Lambda(t) - \frac{d}{dt}\langle F, \overline{w}+\overline{w}_t\rangle + \langle F_t, \overline{w}+\overline{w}_t\rangle \\ &+\frac{d}{dt}\langle G, \overline{w}+\overline{w}_t\rangle + \|\nabla\overline{u}(0)\|_2^2 + \|\overline{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2 + C_0\Lambda(t),\end{aligned}$$

donde C_0 es una constante que depende de c_1, c_2. Por lo cual, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) \leq Q(R)\Lambda(t) - \frac{d}{dt}\langle F, \overline{w}+\overline{w}_t\rangle + \frac{d}{dt}\langle G, \overline{w}+\overline{w}_t\rangle + \langle F_t, \overline{w}+\overline{w}_t\rangle + \|\nabla\overline{u}(0)\|_2^2 + \|\overline{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2. \tag{3.62}$$

Ahora, integramos (3.62) en el intervalo $(0, s)$ respecto de t ($s \in [0, \tau]$), tenemos

$$\begin{aligned}\Lambda(s) - \Lambda(0) &\leq Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt - \langle F(s), \overline{w}(s) + \overline{w}_t(s)\rangle + \langle F(0), \overline{w}(0) + \overline{w}_t(0)\rangle \\ &+\langle G, \overline{w}(s) + \overline{w}_t(s)\rangle - \langle G, \overline{u}(0)\rangle + \int_0^s \langle F_t(t), \overline{w}(t) + \overline{w}_t(t)\rangle dt \\ &+s(\|\nabla\overline{u}(0)\|_2^2 + \|\overline{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2).\end{aligned}$$

Como que $\Lambda(0) = \frac{1}{2}\|\nabla\overline{w}_t(0)\| = \frac{1}{2}\|\nabla\overline{u}(0)\|$ y $F(0) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &\leq Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt - \langle F(s), \overline{w}(s) + \overline{w}_t(s)\rangle + \langle G, \overline{w}(s) + \overline{w}_t(s)\rangle \\ &-\langle G, \overline{u}(0)\rangle + \int_0^s \langle F_t(t), \overline{w}(t) + \overline{w}_t(t)\rangle dt + (1+s)\|\nabla\overline{u}(0)\|_2^2 + s\|\overline{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2.\end{aligned} \tag{3.63}$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}\langle F(s), \overline{w}(s) + \overline{w}_t(s)\rangle &\leq C\|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\nabla\overline{w}(s) + \nabla\overline{w}_t(s)\|_2 \\ &\leq \epsilon C^2\|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\epsilon}(\|\nabla\overline{w}(s)\|_2^2 + \|\nabla\overline{w}_t(s)\|_2^2) \\ &\leq \epsilon C^2\|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{\epsilon}\Lambda(s),\end{aligned}$$

donde $\epsilon > 0$ viene del lema 1.4 y la constante $C > 0$ de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$. Procediendo de manera similar para $\delta > 0$, obtenemos

$$\langle G, \overline{w}(s) + \overline{w}_t(s)\rangle \leq C^2\delta\|G\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta}\Lambda(s).$$

Entonces, ajustando valores para ϵ y δ obtenemos que

$$-\langle F(s), \overline{w}(s)+\overline{w}_t(s)\rangle + \langle G, \overline{w}(s)+\overline{w}_t(s)\rangle - \langle G, \overline{u}(0)\rangle \leq c\|F(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + c\|G\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2}\Lambda(s) + c\|\nabla\overline{u}(0)\|_2^2, \tag{3.64}$$

donde $c = c(\epsilon, \delta, C) > 0$.
Ahora, sustituyendo (3.64) en (3.63) obtenemos

$$\Lambda(s) \leq Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt + c\|F(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + c\|G\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2}\Lambda(s) + c\|\nabla\overline{u}(0)\|_2^2$$
$$[10pt] + \int_0^s \langle F_t(t), \overline{w}(t)+\overline{w}_t(t)\rangle dt + (1+s)\|\nabla\overline{u}(0)\|_2^2 + s\|\overline{\eta}^0\|_2^2.$$

Recordando que $\|z_1 - z_2\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\|\nabla\overline{u}(0)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\overline{u}_t(0)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\overline{\eta}^0\|^2_{\mathcal{M}}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\Lambda(s) \leq\ & Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt + c_0\|F(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + c_0\|G\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \\ & + c_0\int_0^s \langle F_t(t), \overline{w}(t)+\overline{w}_t(t)\rangle dt + c_0(1+s)\|z_1 - z_2\|^2_{\mathcal{H}},\end{aligned} \tag{3.65}$$

donde $c_0 > 0$ es una constante que depende $c > 0$.
Ahora estimamos el lado derecho de (3.65).

• **Estimativa para** $\|F(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}$

Como $q \in [0,4)$ y por la inmersión de $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ en el espacio $H^{-1}(\Omega)$ conseguimos

$$\|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^{\frac{q+2}{q+1}} \leq C\|F(s)\|_{\frac{q+2}{q+1}}^{\frac{q+2}{q+1}} = C\|\int_0^s [f(u^1(y)) - f(u^2(y))]dy\|_{\frac{q+2}{q+1}}^{\frac{q+2}{q+1}}$$

$$\leq C\int_\Omega [\int_0^s c|u^1(y) - u^2(y)|(1 + |u^1(y)|^q + |u^2(y)|^q)dy]^{\frac{q+2}{q+1}}dx$$

$$\leq Cc^{\frac{q+2}{q+1}}\int_0^s\int_\Omega (1 + |u^1(y)|^q + |u^2(y)|^q)^{\frac{q+2}{q+1}}|u^1(y) - u^2(y)|^{\frac{q+2}{q+1}}dxdy$$

$$\leq Cs^{\frac{1}{q+1}}c^{\frac{q+2}{q+1}}\int_0^s \left(\int_\Omega (1 + |u^1|^q + |u^2|^q)^{\frac{q+2}{q+1}\frac{q+1}{q}}dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_\Omega |\overline{u}|^{q+2}dx\right)^{\frac{1}{q+1}} dy$$

$$\leq Cs^{\frac{1}{q+1}}c^{\frac{q+2}{q+1}}\int_0^s \left(C_1 + C_2\|\nabla u^1\|_2^{q+2} + C_2\|\nabla u^2\|_2^{q+2}\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(C_3\|\nabla \overline{u}\|_2^{q+2}\right)^{\frac{1}{q+1}} dy$$

$$\leq s^{\frac{1}{q+1}}Q(R)\int_0^s \|\nabla \overline{u}(y)\|_2^{\frac{q+2}{q+1}}dy,$$

donde en la primera desigualdad $C > 0$ es una constante de la inmersión $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$; en la cuarta desigualdad, se utilizó la desigualdad de Hölder Generalizada; en la quinta, las $C_1, C_2, C_3 > 0$ son constantes de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$, y para la última desigualdad utilizamos (3.61). Además, $Q(R)$ depende de $c, C, q, |\Omega|, R$. Ahora, como $\dfrac{2}{q+2} < 1$, conseguimos que

$$\begin{aligned}\|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &\leq s^{\frac{2}{q+2}}Q(R)(\int_0^s \|\nabla \overline{u}(y)\|_2^{\frac{q+2}{q+1}}dy)^{\frac{2(q+1)}{q+2}} \\ &\leq sQ(R)\int_0^s \|\nabla \overline{u}(y)\|_2^2 dy \\ &\leq sQ(R)\int_0^s \Lambda(y)dy.\end{aligned} \tag{3.66}$$

• **Estimativa para** $\|G\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$.

Realizando técnicas multiplicativas similares a la la estimativa $\|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\sigma(u_t^1(0)) - \sigma(u_t^2(0))\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} &\leq c_\sigma^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}\int_\Omega (|u_t^1(0)|^\rho + |u_t^2(0)|^\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}|\overline{u}_t(0)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}dx \\ &\leq Q(R)\|\nabla \overline{u}_t(0)\|_2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}},\end{aligned}$$

esto equivale a

$$\|G\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq Q(R)\|\nabla\overline{u}_t(0)\|_2^2. \tag{3.67}$$

• **Estimativa para** $\int_0^s \langle F_t(t), \overline{w}(t) + \overline{w}_t(t)\rangle dt.$

Razonando de igual manera que la estimativa de $\|G\|^2_{H^{-1}(\Omega)}$, obtenemos que F_t se estima

$$\|F_t\|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} = \|f(u^1)-f(u^2)\|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \leq c^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \int_\Omega (1+|u^1|^\rho+|u^2|^\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} |\overline{u}|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx \leq Q(R)\|\nabla\overline{u}\|_2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}},$$

donde $c > 0$ es de la hipótesis (2.3). Por lo cual

$$\|F_t(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \leq Q(R)\|\nabla\overline{u}\|_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^s \langle F_t(t), \overline{w}(t) + \overline{w}_t(t)\rangle dt &\leq \int_0^s (Q(R)\|\nabla\overline{u}\|_2)\,(\|\overline{w}(t)\|_{\rho+2} + \|\overline{w}_t(t)\|_{\rho+2})dt \\
&\leq Q(R)\int_0^s \|\nabla\overline{w}_t\|_2(\|\nabla\overline{w}(t)\|_2 + \|\nabla\overline{w}_t(t)\|_2)dt \\
&\leq Q(R)\int_0^s \frac{1}{2}\|\nabla\overline{w}_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\overline{w}(t)\|_2^2 + \|\nabla\overline{w}_t\|_2^2 dt \\
&\leq Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt.
\end{aligned}$$

Donde, principalmente, hemos utilizado la inmersión $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ y la observación 3.15.

Entonces, reemplazando estas estimativas en la desigualdad (3.65), obtenemos

$$\begin{aligned}
\Lambda(s) \leq\ & Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt + sQ(R)\int_0^s \Lambda(y)dy + Q(R)\|\nabla\overline{u}_t(0)\|_2^2 \\
&+Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt + c_0(1+s)\|z_1 - z_2\|^2_{\mathcal{H}},
\end{aligned} \tag{3.68}$$

esto implica que

$$\Lambda(s) \leq (1+s)Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt + (1+s)Q(R)\|z_1 - z_2\|^2_{\mathcal{H}},\ \forall s \in [0,\tau].$$

Finalmente, usando el Lema 1.22, obtenemos

$$\Lambda(s) \leq (1+s)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall s \in [0,\tau]. \tag{3.69}$$

Que en particular

$$\|\nabla \overline{u}(s)\|_2^2 \leq (1+\tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall s \in [0,\tau].$$

Prueba del teorema: Estimación para $\|\nabla \overline{u}_t\|_2^2$

Recordemos la estimación para $\overline{w}_{tt}$, que proviene de la desigualdad (3.53), es decir

$$\|\nabla \overline{w}_{tt}\|_2^2 \leq -\langle \overline{w} + \int_0^\infty \mu(s)A\overline{\xi}^t(s)ds + F(t) - G, \overline{w}_{tt}\rangle.$$

Notando que $\overline{w}_{tt} = \overline{u}_t$, obtenemos

$$\|\nabla \overline{u}_t\|_2^2 \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda_1}\|\nabla \overline{w}\|_2 + k_0^{\frac{1}{2}}\|\overline{\xi}^t\|_{\mathcal{M}} + \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|G\|_{H^{-1}(\Omega)})^2 + \frac{1}{2}\|\nabla \overline{u}_t\|_2^2,$$

y por la desigualdad (3.69) y (3.66)-(3.67), obtenemos

$$\|\nabla \overline{u}_t(s)\|_2^2 \leq (1+\tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall s \in [0,\tau].$$

Prueba del teorema: Estimación para $\|\overline{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2$

Finalmente, para estimar $\|\overline{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2$, primero aplicamos $\overline{\eta}$ a la siguiente igualdad

$$\overline{\eta}_t = T\overline{\eta} + \overline{u}_t.$$

De lo que sigue

$$\frac{d}{dt}\|\overline{\eta}\|_{\mathcal{M}}^2 = \langle T\overline{\eta}, \overline{\eta}\rangle_{\mathcal{M}} + \langle \overline{u}_t, \overline{\eta}\rangle_{\mathcal{M}} \leq k_0^{\frac{1}{2}}\|\nabla \overline{u}_t\|_2\|\overline{\eta}\|_{\mathcal{M}} \leq \|\overline{\eta}\|_{\mathcal{M}}^2 + c\|\nabla \overline{u}_t\|_2^2 \tag{3.70}$$

donde la constante $c > 0$ es por el lema 1.4.

Nuevamente, usando el Lema 1.22 en (3.70), y observando la estimativa sobre $\|\nabla \overline{u}_t\|_2$, obtenemos

$$\|\overline{\eta}^s\|_{\mathcal{M}}^2 \leq (1+\tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall s \in [0,\tau].$$

Por lo tanto, sumando todas las estimativas anteriores tenemos que

$$\|\nabla\overline{u}(s)\|_2^2 + \|\nabla\overline{u}_t(s)\|_2^2 + \|\overline{\eta}^s\|_{\mathcal{M}}^2 \leq (1+\tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall s \in [0,\tau],$$

con lo cual se prueba el teorema.

□

3.4. Unicidad de soluciones débiles

Teorema 4.17. *Sea $\tau > 0$ fijo pero arbitrario. Dado el sistema (2.18)-(2.19), con condiciones de frontera (2.20)-(2.21) y condiciones iniciales (2.22). Suponiendo ciertas las condiciones (H_1)-(H_4). Si (u_0, v_0, η_0) está $\mathcal{H}$ y h pertenece a $L^2(\Omega)$, entonces (2.18)-(2.19) posee una única solución débil en $[0,\tau]$.*

Demostración. Por el teorema 2.5, sean (u, u_t, η^t) y (v, v_t, ξ^t) dos soluciones para (2.18)-(2.19) con las condiciones iniciales (2.22). Entonces tomando

$$\overline{u} = u - v, \ \overline{\eta}^t = \eta^t - \xi^t, \ z_1 = (u_0, v_0, \eta_0) = z_2.$$

y por el Teorema 3.12 tenemos

$$\|\nabla\overline{u}(t)\|_2^2 + \|\nabla\overline{u}_t(t)\|_2^2 + \|\overline{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leq (1+\tau)Q(R)e^{\tau(\tau+1)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2 \ \forall t \in [0,\tau].$$

Como $z_1 = z_2$, obtenemos que $(u, u_t, \eta^t) = (v, v_t, \xi^t)$ para todo $t \in [0,\tau]$, lo que prueba la unicidad de la solución débil. □

Conclusiones

En el presente trabajo se estudió la ecuación viscoelástica no lineal con memoria

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h, \qquad (\mathcal{P})$$

con dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ acotado, con condición de frontera tipo Dirichlet y los parámetros $\alpha > 0$, $\rho \in [0, 4)$, asumiendo condiciones sobre f, h y μ. Asimismo, listamos las conclusiones a las que llegamos, así como también los trabajos a futuro.

[a)] Por las condiciones exigidas sobre la historia pasada de la solución futura u se consiguió formar el espacio de Bochner $\mathcal{M}$, y ello permitió definir un sistema equivalente a $(\mathcal{P})$ cuya solución estaba definida en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{M}$.

[b)] Por las condiciones exigidas sobre Ω y las funciones f, h y μ, se demostró la existencia y unicidad de solución de $(\mathcal{P})$.

[c)] Asimismo, las condiciones de crecimiento y de disipación sobre la función f fueron cruciales para demostrar la dependencia continua de soluciones, de donde se obtuvo la unicidad.

[d)] En adelante, puede estudiarse la ecuación de evolución con memoria hereditaria y variable densidad

$$\begin{cases} |\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \displaystyle\int_{-\infty}^t \mu(t-s) \Delta u(s) ds - \gamma \Delta \partial_t u = f(u) \\ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0 = u_0, \quad u_t(x,0) = u_1, \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

donde Ω es dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, bajo ciertas condiciones sobre f y μ se demuestra la existencia y unicidad del problema. Para mayor detalle consultar F. Li [14]. Así como analizar estudiar la existencia de atractores globales (véase [8, 16]).

Bibliografía

[1] Araújo, R. O, Ma T. F. & Qin Y. (2013). *Long time behavior of a quasilinear viscoelastic equation with past hitory*, Journal of Differential Equations 254 , 4066-4087.

[2] Adams, R. A. & Fourier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces, second edition*, Pure and Applied Mathematics(Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press.

[3] Brézis H. (1983). *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications*, Paris, Masson, 243 pags.

[4] Brezis H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential*, Springer, New York. DOI 10.1007/978-0-387-70914-7.

[5] Cavalcanti, M. M & Cavalcanti V. N. D.& Ferreira, J. (2001). *Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping*, Math. Methods. Appl. Sci. 24, 1043-1053.

[6] Cavalcanti, M. M, Cavalcanti V. N. D, Prates J. S. F. & Soriano, J.A. (2001). *Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping.* Differential and Integral Equation 14, 85-116.

[7] Conti, M., Marchini E. & Pata V. (2014), *A well posedness result for nonlinear viscoelastic equation with memory*, Nonlinear Anal, 94, 206-216.

[8] Conti M., Ma T. F., Marchini E. M. & Seminario P. N. H. (2017). *Asymptotics of viscoelastic materials with nonlinear density and memory effects*, J. Differential Equations, DOI:10.1016/j.jde.2017.12.010.

[9] Dafernos C. M. (1970). *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. 37 , 297-308.

[10] Folland G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd edition, Jhon Wiley and Sons, Canada.

[11] Han X. & Wang, M. (2009). *General decay of energy for a viscoelastic equation with non linear damping*, Math. Methods Appl. 70, 346-358.

[12] Leuyacc, Y. R. S. & Crisostomo, J. L. P. (2018). *Upper semicontinuity of global attractors for a viscoelastic equations with nonlinear density and memory effects*, DOI.10.1002/mma.5389.

[13] Lions J. L. (1969), *Quelques Méthodes de Resolution des Problemes aux Limites Non Linéaires.* Dunod Gauthier-Villars, Paris, 572 pags.

[14] Li F. & Jia Z. (2019). *Global existence and stability of a class of nonlinear evolution equations with hereditary memory and variable density*, School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Shandong, P.R. China.

[15] Medeiros L.A. R. (1976). *Introduçãos espaços de Sobolev aplicações*, textos matemáticos No9, IMUFRJ Rio de Janeiro, 186 pags.

[16] Figueroa, P. F. N., & Leuyacc, Y. R. S. (2022). Existencia de un atractor exponencial para un modelo de p-Kirchhoff con memoria infinita. Pesquimat, 25(1), 36-49.

[17] Ouchenane D., Boulaaras S. & Mesloub F. (2017). *General decay for a class of viscoelastic problem with not necessarily decreasing kernel*, DOI.10.1080/00036811.2018.1437421.

[18] Pazy A. (1983). *Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences Vol. 44, Springer-Verlag, New York, 282 pags.

[19] Temam R. (1998). *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Appl. Math. Sci. 68, 672 pags.

[20] Yosida K. (1965). *Functional Analysis*, Springer-Verlag. Berlin, 469 pags.

[21] Yin, J & Xu H. (2020). *Local upper semicontinuity of bispatial attractors for nonautonomous stochastic parabolic equations with singular perturbation*, (1-20), DOI:10.1002/mma.6210.

[22] Zeidler, E. (1989). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Part II-B*, Springer-Verlag, New York, 586 pags.

[23] Zhang J., Liu Z. & Huang J. (2022). *Upper semicontinuity of optimal attractors for viscoelastic equations lacking strong damping*, Applicable Analysis, DOI: 10.1080/00036811.2022.2088532.