Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Caracterización del espacio de Grothendieck

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Marco Antonio VIGO ESQUECHE

ASESOR

Dr. Leonardo Henry ALEJANDRO AGUILAR

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Vigo, M. (2022). *Caracterización del espacio de Grothendieck*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Marco Antonio Vigo Esqueche
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	45892827
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43069051
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5354-4325
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Augusto Ruiz de la Cruz Melo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08249640
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10078450
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis funcional
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	No aplica
Ubicación geográfica de lainvestigación	País: Perú Departamento: Lima Puente Piedra
Año o rango de años en que se realizó la investigación	abril 2022 - julio 2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:30 horas del sábado 23 de julio del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I): Mg. Willy David Barahona Martínez (PRESIDENTE), Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo (MIEMBRO) y el Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**CARACTERIZACIÓN DEL ESPACIO DE GROTHENDIECK**", presentado por el señor **Bachiller Marco Antonio Vigo Esqueche**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de **diecisiete (17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Marco Antonio Vigo Esqueche** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 17:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Willy David Barahona Martínez
PRESIDENTE

Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
MIEMBRO

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO ASESOR

Resumen

El principal objetivo de este informe de tesis es —además de presentar una caracterización de los subconjuntos débilmente compactos del espacio de los operadores compactos— definir el espacio de Grothendieck y dar una condición necesaria y suficiente para que un espacio de Banach sea un espacio de Grothendieck.

A lo largo de este trabajo se estudiarán de manera detallada los conceptos de operadores adjuntos, compactos y débilmente compactos. En este sentido, entre los teoremas más importantes relacionados con dichos tipos de operadores destacan el teorema de Schauder, que señala que un operador lineal T es compacto si y solamente si su adjunto (T^*) es compacto, y el teorema de Gantmacher, el cual es el equivalente al teorema de Schauder, pero en el contexto de los operadores débilmente compactos.

Palabras clave: *espacio de Banach*, *operador compacto*, *operador débilmente compacto*, *operador adjunto*, *espacio de Grothendieck*.

Abstract

The main purpose of this thesis report is —besides presenting a characterization of the weakly compact subsets of the space of compact operators— to define the Grothendieck space and to give a necessary and sufficient condition for a Banach space to be a Grothendieck space.

Throughout this work the concepts of adjoint, compact and weakly compact operators will be studied in detail. In this sense, among the most important theorems related to these types of operators are Schauder's theorem, which states that a linear operator T is compact if and only if its adjoint (T^*) is compact, and Gantmacher's theorem, which is the equivalent of Schauder's theorem, but in the context of weakly compact operators.

Keywords: *Banach space, compact linear operator, weakly compact operator, adjoint operator, Grothendieck space*.

Índice general

Introducción

En este trabajo estudiaremos la estructura del espacio $K(X, Y)$, el cual está formado por todos los operadores compactos de X en Y; veremos que, cuando Y es un espacio de Banach, $K(X, Y)$ se convierte también en un espacio de Banach. Además, presentaremos una caracterización de los subconjuntos débilmente compactos del espacio $K(X, Y)$, que se debe a Grothendieck y que establece un criterio de compacidad débil en $C(K)$, donde K es compacto.

En el capítulo 1, enunciaremos sin demostración algunos teoremas de análisis funcional y topología general, los cuales serán utilizados a lo largo del trabajo. Estos teoremas pueden ser encontrados en los textos básicos de análisis funcional y topología general.

En el capítulo 2, introduciremos las nociones sobre una clase especial de operadores. En la primera sección de este capítulo comenzaremos con la definición del concepto de operador adjunto (T^*) de un determinado operador lineal acotado T. En la segunda sección presentaremos el operador proyección y veremos que, si Y es isomorfo a un subespacio complementario de un espacio de Banach X, entonces Y^* es isomorfo a un subespacio complementario de X^*. En la tercera sección, después de definir operador compacto, presentaremos diversos resultados que involucran a esos operadores; de estos, hacemos especial énfasis en el teorema de Schauder, el cual señala que un operador lineal T es compacto si y solamente si su adjunto (T^*) es compacto. En la última sección definiremos el concepto de operador débilmente compacto y haremos un estudio de las propiedades de estos operadores. Además de los resultados que serán útiles en el tercer capítulo, probaremos importantes teoremas, como el de Gantmacher, el cual afirma que un operador lineal T es débilmente compacto si y solo si su adjunto (T^*) es débilmente compacto. Al final de la sección mostraremos que, si Y no contiene una copia de ℓ_∞, entonces todo operador continuo de ℓ_∞ en Y es débilmente compacto, y presentaremos espacios X e Y tales que la clase de los operadores compactos de X en Y coincide con la clase de los débilmente compactos.

Comenzaremos el tercer y último capítulo definiendo, en la primera sección, algunas topologías que nos serán útiles en las subsiguientes secciones. En la segunda sección presentaremos una caracterización de los subconjuntos débilmente compactos del espacio de los operadores compactos de X en Y. Finalmente, concluiremos con la definición del espacio de Grothendieck y daremos una condición necesaria y suficiente para que un espacio de Banach X sea un espacio de Grothendieck.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

En este primer capítulo estableceremos la notación y presentaremos las nociones básicas de topología general y análisis funcional, las cuales serán utilizadas a lo largo de este trabajo. Nuestro estudio estará centrado en los espacios vectoriales reales o complejos; en ese sentido, representaremos por $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales o complejos.

1.1 Definiciones y resultados de topología general

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una topología en X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, con las siguientes propiedades*:

i) *$\varnothing$ y X son elementos de $\mathcal{T}$.*

ii) *La unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.*

iii) *La intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.*

El par $(X, \mathcal{T})$ —con las propiedades descritas anteriormente— es llamado espacio topológico. En algunos casos (cuando quede sobrentendida la topología asociada), representaremos el espacio topológico simplemente con la letra X.

Definición 1.2. *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en el conjunto X. Diremos que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ (o que $\mathcal{T}$ es menos fina que $\mathcal{T}'$) si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. En este caso, denotaremos $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ o $\mathcal{T}' \geq \mathcal{T}$.*

Definición 1.3. *Sea X un conjunto cualquiera. Una base para una topología en X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, llamados elementos básicos, con las siguientes propiedades:*

i) *Para cada $x \in X$, existe por lo menos un elemento básico B' tal que $x \in B'$.*

ii) *Si $x \in B_1 \cap B_2$, con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$ y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Definición 1.4. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología en X. La topología $\mathcal{O}$ que genera $\mathcal{B}$ se puede describir así: un subconjunto $U \subset X$ es abierto en X, es decir, $U \in \mathcal{O}$, si para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ (un elemento básico) tal que $x \in B$ y $B \subset U$.*

Definición 1.5. *Una subbase $\mathcal{S}$ para una topología en X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a todo el conjunto X. La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se define como la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.*

Definición 1.6. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Diremos que U es una vecindad de x si existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subset U$.*

Definición 1.7. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Diremos que $F \subset X$ es cerrado si F^c es abierto, es decir, si $F^c \in \mathcal{T}$.*

Definición 1.8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que x es un punto de acumulación del conjunto A si para toda vecindad U de x se tiene que $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.*

Definición 1.9. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. La cerradura de A en $(X, \mathcal{T})$, que denotaremos por $\bar{A}^{\mathcal{T}}$ —o simplemente por $\bar{A}$—, es igual a la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen al conjunto A; y el interior de A, que denotamos por $\mathring{A}$, es igual a la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A.*

De acuerdo con la definición anterior, $\bar{A}$ es un subconjunto cerrado de X y A es un subconjunto abierto de X.

Teorema 1.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces, $\mathring{A}$ es un conjunto cerrado si y solamente si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Demostración: Revisar [11], pág. 41. □

Definición 1.10. *Sean* $(X, \mathcal{T}_1)$ *y* $(Y, \mathcal{T}_2)$ *dos espacios topológicos y* $f\colon X \longrightarrow Y$ *una aplicación. Diremos que* f *es continua en* $x \in X$ *si, dado cualquier* $V \in \mathcal{T}_2$ *tal que* $f(x) \in V$, *existe* $U \in \mathcal{T}_1$ *tal que* $x \in U$ *y* $f(U) \subset V$.

Definición 1.11. *Sea* $\mathcal{D}$ *un conjunto no vacío. Diremos que* D *es un conjunto dirigido si existe en él una relación binaria* $\leq$ *que cumple las siguientes condiciones*:

i) $a \leq a$ *para todo* $a \in \mathcal{D}$.

ii) *Si* $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $a \leq c$, *para todo* $a, b, c \in \mathcal{D}$.

iii) *Dados* $a, b \in \mathcal{D}$, *existe* $d \in \mathcal{D}$ *tal que* $a \leq d$ *y* $b \leq d$.

Definición 1.12. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Una red en* X *es una aplicación* $\lambda\colon \mathcal{D} \longrightarrow X$, *donde* $\mathcal{D}$ *es un conjunto dirigido. Si denotamos por* $\lambda(\alpha) = x_\alpha$ $(\alpha \in \mathcal{D})$, *podemos denotar esta red por* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$. *Además, diremos que una red* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ *converge a* $x \in X$ *si para toda vecindad* U *de* x *en* X *existe* $\alpha_0 \in \mathcal{D}$ *tal que* $x_\alpha \in U$ *siempre que* $\alpha_0 \leq \alpha$.

Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ converge a x, usaremos la notación $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ o, en algunos casos, $x = \mathcal{T}\text{-}\lim\limits_{\alpha} x_\alpha$.

Observación 1.1. Un elemento $x \in (X, \mathcal{T})$ es un punto de acumulación de un conjunto A si y solo si existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}} \subset A$, con $x_\alpha \neq x$, $\forall\ \alpha \in \mathcal{D}$, tal que $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

Definición 1.13. *Dadas dos redes* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ *y* $(y_\beta)_{\beta\in\mathcal{C}}$ *en un espacio topológico X, diremos que* (y_β) *es una subred de* (x_α) *si*:

i) *Existe una aplicación* $\phi\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *entre los conjuntos dirigidos* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}$ *tal que* $y_\beta = x_{\phi(\beta)}$.

ii) *Para cada* $d \in \mathcal{D}$, *existe* $c_0 \in \mathcal{C}$ *tal que* $\phi(c) \geq d$ *siempre que* $c \geq c_0$.

Observación 1.2. En un espacio topológico X, si $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ es una red que converge a $x \in X$, entonces cualquier subred $(y_\beta)_{\beta\in\mathcal{C}}$ de dicha red converge también a x.

Proposición 1.1. *Sean* $(X, \mathcal{T}_1)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_2)$ *dos espacios topológicos y sea* $f\colon X \longrightarrow Y$ *una aplicación. Para que* f *sea continua en* $x \in X$ *es necesario y suficiente que para toda red* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}} \subset X$ *tal que* $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}_1} x$ *se cumpla que* $f(x_\alpha) \xrightarrow{\mathcal{T}_2} f(x)$.

Demostración: Revisar [5], pág. 27. □

Proposición 1.2. *Sean* $(X, \mathcal{T}_1)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_2)$ *dos espacios topológicos y* $f\colon X \longrightarrow Y$ *una aplicación. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones*:

a) f *es continua.*

b) *La imagen inversa de todo conjunto cerrado es un conjunto cerrado.*

c) *Si* $B \subset Y$, *entonces* $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

d) *Si* $A \subset X$, *entonces* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Demostración: Revisar [11], pág. 86. □

Definición 1.14. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Un subconjunto* $K \subset X$ *es llamado compacto si todo cubrimiento abierto de* K *admite un subcubrimiento finito. Es decir, si* $K \subset \bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda$, *con* $A_\lambda \in \mathcal{T}$, $\forall\ \lambda \in J$, *entonces es posible encontrar* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ *tales que* $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Definición 1.15. *Sea* $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ *una familia de espacios topológicos. Entonces, la topología producto es la topología* $\mathcal{T}$ *en* $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ *que es obtenida al considerar como base la familia de conjuntos* $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$, *donde cada* U_α *es abierto en* X_α *y* U_α *es abierto en* X_α, *excepto para una cantidad finita de índices* α.

Teorema 1.2. *Sea* $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ *una familia de espacios topológicos y* $(S_\alpha)_{\alpha \in J}$ *una familia de conjuntos con las siguientes propiedades*:

i) $S_\alpha \subset X_\alpha$ *para todo* $\alpha \in J$.

ii) S_α *es compacto en* X_α *para todo* $\alpha \in J$.

Entonces, $S = \prod_{\alpha \in J} S_\alpha$ *es compacto en la topología producto de* $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

Demostración: Revisar [11], pág. 143. □

Definición 1.16. *Un espacio de Hausdorff es un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *con la siguiente propiedad: dados dos puntos distintos* $x_1, x_2 \in X$, *es posible encontrar abiertos disjuntos* A_1 *y* A_2 *tales que* $x_1 \in A_1$ *y* $x_2 \in A_2$.

Teorema 1.3. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Entonces,* $K \subset X$ *es compacto si y solamente si toda red en* K *posee una subred convergente a un punto de* K.

Demostración: Revisar [11], pág. 136. □

Proposición 1.3. *Sean* $(X, \mathcal{T}_1)$ *y* $(Y, \mathcal{T}_2)$ *dos espacios topológicos y* $F \subset K$ *dos subconjuntos de* X.

a) *Si* K *es compacto y* F *es cerrado, entonces* F *es compacto.*

b) *Si* K *es compacto y* $h\colon X \longrightarrow Y$ *es una función continua, entonces* $h(K)$ *es compacto.*

c) *Si* X *es un espacio de Hausdorff, entonces* K *será cerrado siempre que* K *sea compacto.*

Demostración: Revisar [5], pág. 17. □

1.2 Definiciones y resultados de análisis funcional

Recordemos que un espacio normado es un espacio vectorial con una norma definida sobre él. Consideremos dos espacios normados X e Y. Un operador lineal $T\colon X \longrightarrow Y$ es acotado si existe $c > 0$ tal que $\| Tu \| \leq c \| u \|$ para todo $u \in X$. (En sentido estricto, deberíamos escribir $\| \cdot \|_X$ y $\| \cdot \|_Y$ para denotar las normas en X e Y, respectivamente; pero, por simplicidad, usaremos la misma notación para ambas normas). Por otro lado, un operador de X en Y es continuo si y solo si es acotado. El conjunto de todos los operadores lineales acotados $T\colon X \longrightarrow Y$ será denotado por $\mathcal{L}(X, Y)$. Si $X = Y$, la notación será simplemente $\mathcal{L}(X)$.

Si definimos $\| T \| = \inf\{c > 0;\, \| Tu \| \leq c \| u \| \text{ para todo } u \in X\}$ para cada $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, tenemos las siguientes proposiciones:

1) $\| T \| = \sup\limits_{u \neq 0} \dfrac{\| Tu \|}{\| u \|} = \sup\limits_{\|u\|=1} \| Tu \| = \sup\limits_{\|u\| \leq 1} \| Tu \|$.

2) T es continuo si y solo si $\| T \| < \infty$.

3) $\| \cdot \|$ define una norma en $\mathcal{L}(X, Y)$.

Se puede comprobar que $\mathcal{L}(X, Y)$, con las operaciones usuales de funciones y con la norma definida anteriormente, es un espacio normado. De aquí en adelante, $\mathcal{L}(X, Y)$ denotará dicho espacio normado.

Definición 1.17. *Sean X e Y dos espacios normados. Diremos que X e Y son isomorfos si existe un operador lineal biyectivo continuo (o acotado)* $T\colon X \longrightarrow Y$ *tal que su inverso* $T^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ *también es continuo. Si además T fuese una isometría, es decir,* $\| Tx \| = \| x \|, \forall\, x \in X$, *entonces se dirá que X e Y son isométricamente isomorfos.*

Recordemos que un homeomorfismo es una función continua cuya inversa también es continua. Ahora daremos algunas definiciones para espacios vectoriales que no necesariamente son normados.

Definición 1.18. *El dual algebraico de un espacio vectorial X, denotado por* X^+, *se define como el conjunto de todos los funcionales lineales de X en* $\mathbb{K}$.

Definición 1.19. *Sea X un espacio vectorial. Un subespacio vectorial* Ω *de* X^+ *es llamado total si el único elemento* $x \in X$ *tal que* $f(x) = 0$ *para todo* $f \in \Omega$ *es el vector nulo.*

Definición 1.20. *Sea X un espacio vectorial y* Ω *un subespacio vectorial de* X^+. *Entonces, la* Ω*-topología de X es la topología que se obtiene al tomar como base de vecindades todos los conjuntos de la forma* $U(x_0, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) = \{x \in X\,;\, | f_i(x - x_0) | < \varepsilon;\, i = 1, \dots, n\}$, *donde* $n \in N^*$, $f_1, \dots, f_n \in \Omega$, $x_0 \in X$ *y* $\varepsilon > 0$. *Denotaremos la* Ω*-topología de X por* $\sigma(X, \Omega)$.

Si añadimos la condición adicional de que Ω sea un subespacio total de X^+, entonces la Ω-topología será de Hausdorff.

Observación 1.3. La Ω-topología es la menor topología en la cual todo funcional en Ω es continuo.

Lema 1.1. *Sea X un espacio vectorial. Si* $g, f_1, \dots, f_n \in X^+$ *son tales que* $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker g$, *entonces g es una combinación lineal de los* f_i.

Demostración: Revisar [5], pág. 421. □

Sea X un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto compacto. El conjunto de todas las funciones continuas de S en $\mathbb{K}$ será denotado por $C(S)$. Se puede comprobar que $C(S)$, dotado de las operaciones usuales de adición y producto por un escalar, es un espacio vectorial. Como S es compacto, toda función en $C(S)$ es acotada en $\mathbb{K}$. De este modo, podemos definir en $C(S)$ la norma

$$\| f \| = \sup_{s \in S} f(s).$$

Observación 1.4. La norma que acaba de definirse convierte al espacio vectorial $C(S)$ en un espacio de Banach.

Definición 1.21. *Un subconjunto $K \subset C(S)$ es llamado equicontinuo si para todo $\varepsilon > 0$ y $s \in S$ existe una vecindad U de s tal que*

$$\sup_{f \in K} \sup_{t \in U} | f(s) - f(t) | < \varepsilon \text{ o, equivalentemente, } \sup_{t \in U} | f(s) - f(t) | < \varepsilon \text{ para todo } f \in K.$$

Definición 1.22. *El dual topológico de un espacio normado X, denotado por X^*, se define como el conjunto de todos los funcionales lineales continuos de X en $\mathbb{K}$, esto es, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$.*

Teorema 1.4. *Sea X un espacio normado y sea Y un espacio de Banach. Entonces, $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach. Consecuentemente, X^* es un espacio de Banach.*

Demostración: Revisar [6], pág. 11. □

Teorema 1.5. (Teorema de Hahn-Banach) *Sea M un subespacio propio de un espacio normado X. Si $f: M \longrightarrow \mathbb{K}$ es lineal y continua, entonces existe $\tilde{f} \in X^*$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in M$ y $\| \tilde{f} \| = \| f \|$.*

Demostración: Revisar [6], pág. 40. □

Los siguientes resultados son consecuencias del teorema de Hahn-Banach:

Corolario 1.1. *Sea X un espacio normado y $x_0 \in X$ un elemento no nulo. Entonces, existe $g \in X^*$ tal que $\| g \| = 1$ y $g(x_0) = \| x_0 \|$.*

Corolario 1.2. *Sea X un espacio normado. Si $g(x) = 0$ para toda $g \in X^*$, entonces $x = 0$.*

Observación 1.5. El anterior corolario garantiza que X^* es un subespacio total de X^+.

Corolario 1.3. *Sea X un espacio normado. Dado cualquier x en X, se cumple lo siguiente*:

$$\| x \| = \sup_{\substack{g \in X^* \\ \|g\|_{X^*} = 1}} | g(x) | = \sup_{\substack{g \in X^* \\ \|g\|_{X^*} \leq 1}} | g(x) |$$

Corolario 1.4. *Sea X un espacio normado y F un subespacio cerrado de X. Si* $x_0 \notin F$, *entonces existe* $x^* \in X^*$ *tal que* $x^*(x_0) \neq 0$ *y* $x^*(x) = 0,\ \forall\ x \in F$.

El siguiente resultado es conocido como el teorema de Banach-Steinhaus:

Teorema 1.6. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Sea* $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ *una sucesión de operadores en* $\mathcal{L}(X, Y)$ *tal que* $\sup\limits_{\alpha\in I} \| T_\alpha x \|$ *es finito para cada* $x \in X$. *Entonces,* $\sup\limits_{\alpha\in I} \| T_\alpha \|$ *es finito.*

Demostración: Revisar [6], pág. 68. □

Como consecuencia del teorema de Banach-Steinhaus, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.5. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Sea* $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *una sucesión con la siguiente propiedad:* $(T_n(x))_n$ *es convergente en Y para todo* $x \in X$. *Si se define* $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ *para cada* $x \in X$, *entonces* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *y* $\| T \| \leq \sup\limits_{n} \| T_n \|$.

Teorema 1.7. *Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Entonces, A es acotado en X si y solo si* $f(A)$ *es acotado en* $\mathbb{K}$ *para todo* $f \in X^*$.

Demostración: Revisar [6], pág. 69. □

Definición 1.23. *Dados dos espacios normados X e Y, se dice que una aplicación* $T\colon X \longrightarrow Y$ *es abierta si* $T(A)$ *es abierto en Y para todo abierto A en X.*

Teorema 1.8. (Teorema de la aplicación abierta) *Sean X e Y dos espacios de Banach y* $T\colon X \longrightarrow Y$ *una aplicación lineal continua sobreyectiva. Entonces, T es abierta.*

Demostración: Revisar [6], pág. 50. □

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.6. (Teorema de la aplicación inversa) *Si X e Y son espacios de Banach y* $T\colon X \longrightarrow Y$ *es una aplicación lineal continua biyectiva, entonces* T^{-1} *es continua.*

Definición 1.24. *Sea* $T\colon X \longrightarrow Y$ *un operador lineal, donde X e Y son dos espacios normados. El gráfico de T es el conjunto* $G_T = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = Tx\}$.

Teorema 1.9. (Teorema del gráfico cerrado) *Sea* $T\colon X \longrightarrow Y$ *un operador lineal, donde X e Y son espacios de Banach. Entonces, T es continuo si y solamente si su gráfico es cerrado.*

Demostración: Revisar [6], pág. 51. □

Denotaremos por B_X la bola cerrada de centro en el origen y radio 1, y por S_X la esfera de centro en el origen y radio 1; es decir, $B_X = \{x \in X; \| x \| \leq 1\}$ y $S_X = \{x \in X; \| x \| = 1\}$. Además, $B(x_0; \varepsilon) = \{x \in X; \| x - x_0 \| < \varepsilon\}$ denotará la bola abierta de centro x_0 y radio ε.

Definición 1.25. *Un subconjunto A de un espacio vectorial X es convexo si, dados x, y* $\in$ *A, el segmento de recta que une estos dos puntos está contenido en A, esto es,* $tx + (1 - t)y \in A$ *para todo* $t \in [0; 1]$.

A partir de la linealidad de T y de la definición de conjunto convexo, podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 1.4. *Sean X e Y dos espacios vectoriales. Si* $T\colon X \longrightarrow Y$ *es una aplicación lineal y A es un subconjunto convexo de X, entonces* $T(A)$ *es convexo en Y.*

Definición 1.26. *Un espacio vectorial topológico es un par* $(X, \mathcal{T})$*, donde X es un espacio vectorial y* $\mathcal{T}$ *es una topología en X que satisface las siguientes condiciones*:

i) *La aplicación* $(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$ *de* $X \times X$ *en X es continua.*

ii) *La aplicación* $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ *de* $\mathbb{K} \times X$ *en X es continua.*

Observación 1.6. Sea X un espacio vectorial y Ω un subespacio de X^+. Se puede demostrar fácilmente que $(X, \sigma(X, \Omega))$ es un espacio vectorial topológico.

Si X e Y son espacios vectoriales topológicos, llamaremos operador lineal a cualquier aplicación lineal $T\colon X \longrightarrow Y$. La siguiente proposición se deduce de la linealidad del operador y del hecho de que, si $x \in A$ y $A \in \mathcal{T}$, entonces $(x - A) \in \mathcal{T}$ y $0 \in (x - A)$.

Proposición 1.5. *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos. Un operador lineal* $T\colon X \longrightarrow Y$ *es continuo si y solamente si es continuo en el origen.*

Definición 1.27. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio vectorial topológico. Diremos que* $A \subset X$ *es acotado si para cada U, vecindad de cero en X, existe* $\alpha = \alpha(U) > 0$ *tal que* $A \subset \lambda U$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tal que* $| \lambda | \geq \alpha$.

Teorema 1.10. *En un espacio vectorial topológico, todo subconjunto compacto es acotado.*

Demostración: Revisar [5], pág. 51. □

Utilizando la convexidad de A y el hecho de que, dados $u, v \in \bar{A}^{\mathcal{T}}$, es posible encontrar dos redes $(u_\alpha)_\alpha$ y $(v_\alpha)_\alpha$ que convergen a u y v, respectivamente, se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 1.6. *Si A es un subconjunto convexo de un espacio vectorial topológico $(X, \mathcal{T})$, entonces $\bar{A}^{\mathcal{T}}$ es convexo.*

Definición 1.28. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es llamado relativamente compacto si $\bar{A}^{\mathcal{T}}$ es compacto.*

El siguiente teorema es conocido como el teorema de Arzelà-Ascoli:

Teorema 1.11. *Sea X un espacio topológico y S un subconjunto compacto de X. Entonces, un subconjunto F de $C(S)$, provisto de la topología de la norma, es relativamente compacto si y solamente si es acotado y equicontinuo.*

Demostración: Revisar [5], pág. 266. □

Definición 1.29. *La topología débil de un espacio normado X, denotada por $\sigma(X, X^*)$, es la topología que tiene como subbase la colección $\mathcal{S} = \{\varphi^{-1}(A);\ \varphi \in X^*, A \subset \mathbb{K}, A \text{ abierto}\}$.*

La topología de la norma $\Gamma_{\|\cdot\|}$ es muchas veces llamada topología fuerte de X. Se denotará por $(X, \Gamma_{\|\cdot\|})$ el espacio topológico X provisto de la topología de la norma. A partir de la definición, se puede probar que $\sigma(X, X^*) \subset \Gamma_{\|\cdot\|}$. Por la definición de topología débil, tenemos que la colección $\{U(x_0; \varphi; \varepsilon);\ x_0 \in X,\ \varphi \in X^*,\ \varepsilon > 0\}$, donde $U(x_0; \varphi; \varepsilon) = \{x \in X;\ |\varphi(x - x_0)| < \varepsilon\}$, forma una subbase para la topología débil de X. Así, una red $(x_d)_{d\in\mathcal{D}} \subset X$ converge a $x \in X$ en la topología débil si y solo si $\varphi(x_d) \to \varphi(x)$ para toda $\varphi \in X^*$. En este informe de tesis —salvo que se especifique lo contrario—, cada vez que trabajemos en un espacio normado y no se mencione nada respecto de la topología considerada, se sobrentenderá que estamos usando la topología de la norma. Por ejemplo, si dijésemos que una red $(x_\alpha)_\alpha \subset X$ converge, esta sería convergente en la norma de X. Además, como se puede notar, la topología débil es un caso particular de la Ω-topología, donde $\Omega = X^*$. Luego, $(X, \sigma(X, X^*))$ es —por la observación 1.6— un espacio vectorial topológico, y la topología débil es una topología de Hausdorff, pues X^* es total (por el corolario 1.2).

Observación 1.7. Por el teorema 1.7, se sabe que, en un espacio normado, un conjunto es $\sigma(X, X^*)$-acotado si y solo si es acotado (en la topología de la norma).

En general, $\overline{K}$ está contenido propiamente en $\overline{K}^{\sigma(X,X^*)}$. El siguiente teorema se desprende del teorema de Hahn-Banach:

Teorema 1.12. *Sea K un subconjunto convexo de un espacio normado X. Entonces, se cumple que* $\overline{K}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{K}$.

Demostración: Revisar [6], pág. 70. □

De este último teorema, podemos inferir el siguiente resultado:

Corolario 1.7. *Sea X un espacio normado y* $K \subset X$ *un subconjunto convexo. Entonces, K es cerrado si y solo si K es* $\sigma(X, X^*)$*-cerrado.*

Teorema 1.13. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Entonces,* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *si y solo si T es* $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(Y, Y^*)$ *continuo.*

Demostración: Revisar [5], pág. 422. □

Definición 1.30. *Un subconjunto A de un espacio topológico X es secuencialmente compacto si toda sucesión de puntos en A posee una subsucesión que converge a un punto de A.*

Teorema 1.14. (Teorema de Eberlein-Šmulian) *Sea A un subconjunto de un espacio de Banach X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*:

a) *A es débilmente compacto.*

b) *A es débilmente secuencialmente compacto.*

Demostración: Revisar [6], pág. 130. □

Consideremos un espacio normado X. El dual topológico de X^* será denotado por X^{**}. Definimos $J: X \longrightarrow X^{**}$ por $Jx = \hat{x}$ para todo $x \in X$, donde $\hat{x}: X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ es tal que $\hat{x}(f) = f(x)$ para toda $f \in X^*$. La aplicación J es llamada aplicación canónica de X en X^{**}. Se puede probar que J está bien definida, es lineal y $\| Jx \| = \| x \|$ para cada $x \in X$. Por tanto, X es isométricamente isomorfo a $J(X) \subset X^{**}$. Luego, $J(X)$ es un subespacio total de $(X^*)^+$ (según el corolario 1.1). Algunas veces usaremos la notación $\hat{X}$ en vez de $J(X)$. En rigor, se debería escribir J_X y J_Y para representar las aplicaciones canónicas de X en X^{**} y de Y en Y^{**}, respectivamente; pero, para evitar recargar la notación, escribiremos simplemente J para referirnos a dichas aplicaciones.

Definición 1.31. *Un espacio de Banach X es llamado reflexivo si la aplicación J* (*definida líneas arriba*) *es sobreyectiva. En este caso, X y* X^{**} *son isométricamente isomorfos.*

Teorema 1.15. *Sea X un espacio de Banach. Entonces, X es reflexivo si y solamente si* B_X *es* $\sigma(X, X^*)$*-compacta*.

Demostración: Revisar [6], pág. 75. □

A partir de los teoremas 1.14 y 1.15, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.16. *Para que un espacio de Banach X sea reflexivo es necesario y suficiente que* B_X *sea* $\sigma(X, X^*)$*-secuencialmente compacta*.

Proposición 1.7. *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si M es un subespacio vectorial cerrado de X, entonces M es un espacio de Banach reflexivo*.

Demostración: Revisar [6], pág. 75. □

En el dual topológico de un espacio normado X, es decir, en X^*, además de las topologías fuerte y débil, existe otra topología importante: la topología débil estrella.

Definición 1.32. *En un espacio normado X, la topología débil estrella de* X^**, que será denotada por* $\sigma(X^*, X)$*, es la topología que tiene como subbase la siguiente colección:*
$\mathcal{S} = \{\varphi^{-1}(A);\ \varphi \in J(X) \subset X^{**}, A \subset \mathbb{K}, A \text{ abierto}\} = \{\hat{x}^{-1}(A);\ x \in X, A \subset \mathbb{K}, A \text{ abierto}\}$.

Es claro que la topología débil estrella de X^* es menos fina que la topología débil de X^*. De la definición se tiene que la colección $\mathcal{S} = \{U(\varphi_0; x; \varepsilon);\ x \in X,\ \varphi_0 \in X^*,\ \varepsilon > 0\}$, donde $U(\varphi_0; x; \varepsilon) = \{\psi \in X^*;\ |(\psi - \varphi_0)(x)| < \varepsilon\}$, es una subbase para la topología débil estrella. Además, una red $(\varphi_d)_{d\in\mathcal{D}} \subset X^*$ converge al operador $\varphi \in X^*$ en la topología débil estrella si y solamente si $\varphi_d(x) \to \varphi(x)$, $\forall\, x \in X$. En este caso, decimos que $(\varphi_d)_{d\in\mathcal{D}}$ converge débil estrella a φ y denotamos $\varphi_d \xrightarrow{\sigma(X^*, X)} \varphi$. Utilizando la definición de la aplicación J (que garantiza que X y $J(X)$ son isométricamente isomorfos), vemos que la topología débil estrella es un caso particular de la Ω-topología, donde $\Omega = J(X) \subset (X^*)^+$. Luego, se tiene que $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un espacio vectorial topológico y, como $J(X)$ es total (ver el corolario 1.1), la topología débil estrella es una topología de Hausdorff.

Teorema 1.17. (Teorema de Alaoglu) *Dado un espacio de Banach X, el conjunto* B_{X^*} *es* $\sigma(X^*, X)$-*compacto*.

Demostración: Revisar [6], pág. 71. □

Teorema 1.18. (Teorema de Goldstine) *En un espacio de Banach X se cumple lo siguiente:*

1) $B_{X^{**}} = \overline{J(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)}$

2) $X^{**} = \overline{J(X)}^{\sigma(X^{**},X^*)}$

Demostración: Revisar [6], pág. 73. □

Antes de continuar, es preciso recordar que, en un espacio normado *X*, un subconjunto *D* es llamado denso si se cumple que $\overline{D} = X$. Ahora, enunciaremos algunos resultados considerando espacios normados, si bien cabe precisar que estos también son válidos en el contexto (más general) de los espacios métricos:

Definición 1.33. *Sea X un espacio normado. Un subconjunto M de X es llamado separable si posee un subconjunto numerable denso*.

Proposición 1.8. *Sea X un espacio normado y M un subconjunto de X. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *M contiene un subconjunto numerable denso*.

b) *M posee una base numerable de abiertos*.

c) (Propiedad de Lindelöf) *Todo cubrimiento abierto de M admite un subcubrimiento numerable*.

Demostración: Revisar [13], pág. 274. □

Corolario 1.8. *Si K es un subconjunto compacto de un espacio normado X, entonces K es separable*.

Definición 1.34. *Sea X un espacio normado. Un subconjunto* $K \subset X$ *es llamado totalmente acotado si para cada* $\varepsilon > 0$ *existen* $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ *tales que* $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i;\varepsilon)$.

Proposición 1.9. *Sea F un subconjunto de un espacio normado X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Toda sucesión* $(x_n)_n \subset F$ *posee una subsucesión que converge a un punto de X.*

b) $\overline{F}$ *es compacto.*

c) *F es totalmente acotado y* $\overline{F}$ *es completo.*

Demostración: Revisar [5], pág. 22. □

Capítulo 2

Operadores compactos y débilmente compactos

En este capítulo, introduciremos los conceptos de operador adjunto, operador proyección, operador compacto y operador débilmente compacto, y estudiaremos las propiedades de dichos operadores, los cuales serán utilizadas en el capítulo 3. De ahora en adelante, X, Y y Z representarán espacios de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (salvo que se indique lo contrario).

2.1 Operadores adjuntos

Definición 2.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, donde X e Y son espacios normados. El operador adjunto de T se denota por T^* y se define como la aplicación $T^* : Y^* \to X^*$ tal que $T^*(y^*) = y^* \circ T$, $\forall\, y^* \in Y^*$.*

Notemos que, desde que $T: X \longrightarrow Y$ e $y^*: Y \longrightarrow \mathbb{K}$ son lineales y continuos, el operador $y^* \circ T$ es lineal y continuo; de ahí que T^* está bien definido.

Proposición 2.1. *La aplicación $T \to T^*$ es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(X, Y)$ en $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

Demostración: Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Consideremos $y^* \in Y^*$ arbitrario. Entonces:

$$((T_1 + \lambda T_2)^* y^*)\, x = y^*(T_1 + \lambda T_2)\, x = y^*(T_1 x) + \lambda y^*(T_2\, x) = (T_1^* y^*)\, x + \lambda(T_2^* y^*)\, x,\ \forall\, x \in X$$

Luego, $(T_1 + \lambda T_2)^*(y^*) = T_1^*(y^*) + \lambda T_2^*(y^*)$, $\forall\, y^* \in Y^*$. Por tanto, la aplicación $T \to T^*$ es lineal.

Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Para todo $x \in X$, $y^* \in Y^*$, se tiene lo siguiente:

$$\| (T^* y^*)x \| = \| y^*(T\,x) \| \leq \| y^* \| \, \| T \| \, \| x \|$$

De este modo, $\| (T^* y^*)x \| \leq \| T \| \, \| y^* \|$, para todo $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$, lo cual implica que $\| T^* y^* \| = \sup_{\|x\|=1} \| (T^* y^*)x \| \leq \| T \| \, \| y^* \|$. Entonces, $\| T^* \| \leq \| T \| < \infty$ y $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

Sea $x_0 \in X$ tal que $\| x_0 \| = 1$. Si $\| Tx_0 \| \neq 0$, por el corolario 1.1 podemos encontrar $y_0^* \in Y^*$ tal que $\| y_0^* \| = 1$ y además $y_0^*(Tx_0) = \| Tx_0 \|$. (*)

Por otro lado, se tiene lo siguiente:

$$\| T^* \| = \sup_{\|y^*\|=1} \| T^* y^* \| = \sup_{\|y^*\|=1} \| y^* \circ T \| = \sup_{\|y^*\|=1} \sup_{\|x\|=1} \| y^*(Tx) \| \qquad (**)$$

De las relaciones (*) y (**), se obtiene que $\| T^* \| \geq \sup_{\|y^*\|=1} \| y^* T x_0 \| \geq \| T x_0 \|$, de donde se concluye que $\| Tx_0 \| \leq \| T^* \|$.

La desigualdad anterior también es válida cuando $\| Tx_0 \| = 0$. Entonces,

$$\| Tx_0 \| \leq \| T^* \|, \ \forall \ x_0 \in B_X .$$

Por tanto, $\| T \| \leq \| T^* \|$. Además, como $\| T \| \geq \| T^* \|$, concluimos que la aplicación $T \to T^*$ es una isometría. □

En la proposición anterior vimos que, si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Esto nos permite pensar en el segundo adjunto de T y así definir la aplicación

$$\begin{aligned} T^{**} : X^{**} &\to Y^{**} \\ x^{**} &\mapsto T^{**}(x^{**}) = x^{**} \circ T^* . \end{aligned}$$

Proposición 2.2. *Si $R \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$, entonces $(T \circ R)^* = R^* \circ T^*$. Además, el adjunto de la identidad en $\mathcal{L}(X)$ es la identidad en $\mathcal{L}(X^*)$.*

Demostración: Como $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $U \in \mathcal{L}(Y, Z)$, entonces $U \circ T \in \mathcal{L}(X, Z)$. De este modo, $(U \circ T)^* \in \mathcal{L}(Z^*, X^*)$ y está definido así:

$$\begin{aligned} (U \circ T)^* : Z^* &\to X^* \\ z^* &\mapsto (U \circ T)^*(z^*) = z^* \circ (U \circ T) \end{aligned}$$

Observemos lo siguiente:

$$(U \circ T)^* z^* = z^* \circ (U \circ T) = (U^* z^*) \circ T = T^* (U^* z^*) = (T^* \circ U^*) z^*, \ \forall z^* \in Z^*$$

Luego, $(U \circ T)^* = (T^* \circ U^*)$.

Además, notemos que

$$I^*(x^*) = x^* \circ I = x^*, \ \forall x^* \in X^*$$

Se sigue que el adjunto de la identidad es la identidad. □

Proposición 2.3. *El adjunto T^* de un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es una aplicación lineal $\sigma(Y^*, Y)$-$\sigma(X^*, X)$ continua. En particular, T^{**} es una aplicación $\sigma(X^{**}, X^*)$-$\sigma(Y^{**}, Y^*)$ continua.*

Demostración: Sea $U(0; x_1, ..., x_n; \varepsilon) = \{\varphi \in X^*; |\varphi(x_i)| < \varepsilon, i = 1, ..., n\}$ una $\sigma(X^*, X)$-vecindad básica del cero en X^*. Tomemos una $\sigma(Y^*, Y)$-vecindad básica del cero en Y^* dada por $U(0; Tx_1, ..., Tx_n; \varepsilon) = \{y^* \in Y^*; |y^*(Tx_i)| < \varepsilon, i = 1, ..., n\}$. Se mostrará que $T^*(U(0; Tx_1, ..., Tx_n; \varepsilon)) \subset U(0; x_1, ..., x_n; \varepsilon)$. En efecto, para cada $y^* \in U(0; Tx_1, ..., Tx_n; \varepsilon)$ se tiene lo siguiente:

$$|(T^* y^*) x_i| = |y^*(Tx_i)| < \varepsilon, \ i = 1, ..., n,$$

donde $T^* y^* \in U(0; x_1, ..., x_n; \varepsilon)$. De este modo, T^* es una aplicación continua en el origen. Como T^* es lineal y $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ y $(X^*, \sigma(X^*, X))$ son espacios vectoriales topológicos, se tiene una $\sigma(Y^*, Y) - \sigma(X^*, X)$ continuidad de T^*. □

Definición 2.2. *Sean $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ las imágenes de la aplicación canónica de X en X^{**} y de Y en Y^{**}, respectivamente. Para cada $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ definimos*

$$\hat{T}: \hat{X} \to \hat{Y}$$
$$\hat{x} \mapsto \hat{T}(\hat{x}) = \widehat{Tx} = J(Tx).$$

$\widehat{T}$ está bien definida, pues la aplicación canónica J es inyectiva. A partir de la definición y de la linealidad de la aplicación canónica, se deduce que $\widehat{T}$ es lineal. Además, como J es una isometría, se tiene la siguiente relación:

$$\| \widehat{T}(\hat{x}) \| = \| \widehat{Tx} \| = \| Tx \| \leq \| T \| \| x \| = \| T \| \| \hat{x} \|, \forall \hat{x} \in \widehat{X},$$

de donde $\| \widehat{T} \| \leq \| T \|$ y $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, \widehat{Y})$. En realidad, $\| \widehat{T} \| = \| T \|$, pues $\| Tx \| = \| \widehat{Tx} \|$ y $\| x \| = \| \hat{x} \|$ para todo $x \in X$.

Definición 2.3. *Sean $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$ las imágenes de las aplicaciones canónicas de X en X^{**} y de Y en Y^{**}, respectivamente. Una función R cuyo dominio es un subconjunto de X^{**} que contiene a $\widehat{X}$ es llamada extensión de T si $R(\hat{x}) = \widehat{T}(\hat{x})$ para todo $\hat{x} \in \widehat{X}$. Así, una extensión de T se define usando el hecho de que X y $\widehat{X}$ son isométricamente isomorfos. Si $X^{**} = \widehat{X}$, la igualdad $R = T$ es estricta, en el sentido que $Rx^{**} = \widehat{T}x^{**}$ para cada $x^{**} \in X^{**}$.*

Luego de leer la definición anterior, cabe preguntarse si dado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe una función U que extiende T. La siguiente proposición ofrece una respuesta:

Proposición 2.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.* El segundo adjunto $T^{**}: X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ *es una extensión de T. Si X es reflexivo, entonces $T = T^{**}$.*

Demostración: Por la definición de extensión de T, tenemos que mostrar que $T^{**}(\hat{x}) = \widehat{T}(\hat{x})$ para todo $\hat{x} \in \widehat{X}$. Fijemos $\hat{x} \in \widehat{X}$. Para cada $y^* \in Y^*$ tenemos:

$$(T^{**}\hat{x})y^* = (\hat{x}T^*)y^* = \hat{x}(T^*y^*) = \hat{x}(y^*T)$$

$$= y^*(Tx) = (\widehat{Tx})y^* = (\widehat{T}\hat{x})y^*$$

Entonces, $(T^{**}\hat{x})y^* = (\widehat{T}\hat{x})y^*$ para todo $y^* \in Y^*$. Se sigue que $T^{**}\hat{x} = \widehat{T}\hat{x}$ para todo $\hat{x} \in \widehat{X}$. □

La proposición anterior señala que $T^{**}(J(X)) \subset J(Y)$. En la próxima sección veremos una condición necesaria y suficiente para que se cumpla $T^{**}(X^{**}) \subset J(Y)$.

Proposición 2.5. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Un operador lineal $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ posee inversa $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ si y solo si su adjunto $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ posee inversa $(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$. En este caso se cumple que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Demostración: Para simplificar la notación, emplearemos la misma notación I para representar las identidades en X, Y, X^* e Y^*. Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que existe $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Por definición de función inversa, se tiene que $T \circ T^{-1} = I$. Además, por la proposición 2.2:

$$I^* = (T \circ T^{-1})^* = (T^{-1})^* \circ T^*$$

De este modo, $(T^{-1})^*$ es la inversa a izquierda de T^*. De forma análoga se prueba que $(T^{-1})^*$ es la inversa a derecha de T^*. Se deduce que $(T^{-1})^*$ es la inversa de T^*. Además, $(T^{-1})^* \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$.

Recíprocamente, sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que su inversa $(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ existe. (Recordemos que $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$). Entonces, por lo probado anteriormente, T^{**} posee inversa $(T^{**})^{-1} \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$. Luego, T^{**} es un homeomorfismo. Por la proposición 2.4, T^{**} es una extensión. Así, tenemos lo siguiente:

$$T^{**}\hat{x} = \hat{T}\hat{x} = \widehat{Tx} = J(Tx), \text{ para todo } x \in X \qquad (*)$$

Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $Tx_1 = Tx_2$. Por (*) se tiene que $T^{**}\widehat{x_1} = T^{**}\widehat{x_2}$; además, como T^{**} es un homeomorfismo, se sigue que $\widehat{x_1} = \widehat{x_2}$. Por otro lado, como J es una isometría, deducimos que $x_1 = x_2$. Luego, T es inyectiva.

Probemos ahora que T es sobreyectiva. Observemos primero que $T^{**}(J(X))$ es cerrado, pues J es una isometría y T^{**} es un homeomorfismo. Por (*) se tiene que $T^{**}(J(X)) = J(T(X))$, de donde se deduce que $T(X) = J^{-1}(T^{**}(J(X)))$ es cerrado. Supongamos, por reducción al absurdo, que T no es sobreyectiva. Entonces, existe $y \in Y$ tal que $y \notin T(X)$. Como $T(X)$ es un subespacio propio cerrado de Y, por el corolario 1.4 existe $y^* \in Y^*$ tal que $y^*(y) \neq 0$ e $y^*(Tx) = 0$ para todo $x \in X$. De ahí se sigue que $y^*(Tx) = (T^*y^*)x = 0$ para todo $x \in X$. Como $T^*y^* \in X^*$ y $(T^*y^*)x = 0$ para todo $x \in X$, se tiene que $T^*y^* = 0$. Esto contradice la inyectividad de T^*, pues $y^* \neq 0$.

Finalmente, como T es lineal, continua, inyectiva y sobreyectiva, tenemos (por el teorema de la aplicación inversa, corolario 1.6) que T^{-1} es continua.

2.2 Proyecciones

En esta sección, denotaremos por I la aplicación identidad en X, Y, X^* e Y^*.

Definición 2.4. *Se dice que un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es una proyección sobre un subespacio M de X si $T(X) = M$ y $T^2 = T$.*

Definición 2.5. *Sean M_1, M_2 subespacios de X que cumplen que $X = M_1 + M_2$. Diremos que X es la suma directa de M_1 y M_2 si $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. En este caso, escribiremos $X = M_1 \oplus M_2$.*

Observación 2.1. Sean M_1, M_2 subespacios de X tales que $X = M_1 + M_2$. Entonces, X será suma directa de M_1 y M_2 si y solo si cualquier elemento de X se puede expresar de manera única como $x = m_1 + m_2$, donde $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$. En efecto, si $x = m_1 + m_2 = n_1 + n_2$, con $m_1, n_1 \in M_1$ y $m_2, n_2 \in M_2$, vemos que $m_1 - n_1 = n_2 - m_2 \in M_1 \cap M_2 = \{0\}$. De aquí se deduce la unicidad de la descomposición. Recíprocamente, si $a \in M_1 \cap M_2$ y $a \neq 0$, tenemos que $x = m_1 + a \in M_1$, donde m_1 es un elemento arbitrario de M_1. Entonces, $x = \underbrace{x}_{\in M_1} + \underbrace{0}_{\in M_2} = \underbrace{m_1}_{\in M_1} + \underbrace{a}_{\in M_2}$, lo que contradice la unicidad de la descomposición.

Observación 2.2. Si T es una proyección, entonces $X = T(X) \oplus (I - T)(X)$. En efecto, dado $x \in X$, podemos escribir $x = T(x) + (I - T)(x)$, lo cual implica que $X = T(X) + (I - T)(X)$. Por otro lado, si $x \in T(X) \cap (I - T)(X)$, entonces $x = T(x_1) = (I - T)(x_2)$, para ciertos $x_1, x_2 \in X$. Luego, aplicando T en los dos lados de la segunda igualdad, tenemos $T(x_1) = T(x_2) - T^2(x_2) = 0$, es decir, $x = 0$. Concluimos que $T(X) \cap (I - T)(X) = \{0\}$ y, por tanto, $X = T(X) \oplus (I - T)(X)$.

Observación 2.3. Si T es una proyección y $x \in T(X)$, entonces $Tx = x$. En efecto, existe $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = x$. Si aplicamos T en esta igualdad, es fácil ver que $Tx = x$.

Observación 2.4. Si T es una proyección y $x \in (I - T)(X)$, entonces $Tx = 0$. En efecto, existe $x_0 \in X$ tal que $(I - T)x_0 = x$. Si aplicamos T en esta igualdad, se observa que $Tx = 0$.

Observación 2.5. Si T es una proyección, entonces $T(X)$ y $(I - T)(X)$ son cerrados. En efecto, si $(Tx_n)_n$ es una sucesión en $T(X)$ tal que $Tx_n \longrightarrow a$, vemos que $Tx_n \longrightarrow Ta$, pues T es una proyección. Por la unicidad del límite, tenemos que $a = Ta$, es decir, $a \in T(X)$. La verificación de que $(I - T)(X)$ es cerrado es análoga.

Observación 2.6. Sean M_1, M_2 subespacios cerrados de X tales que $X = M_1 \oplus M_2$. Entonces, existe $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que T es una proyección sobre M_1. En efecto, para cada $x \in X$ existen únicos $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$ tales que $x = m_1 + m_2$. Así, podemos definir T de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T\colon X &\longrightarrow M_1 \\ x &\longmapsto T(x) = m_1 \end{aligned}$$

Es fácil ver que $T^2 = T$ y que $T(X) = M_1$. Sea $(x_n)_n \subset X$ tal que $(x_n, Tx_n)_n \longrightarrow (x, m_1)$ en $X \times M_1$. Como M_1 es cerrado, tenemos que $m_1 \in M_1$. Observemos que $(x_n - Tx_n)_n \subset \ker(T) = M_2$. Así, concluimos que $(x - m_1) \in M_2$, pues M_2 es cerrado y $(x_n - Tx_n)_n \longrightarrow (x - m_1)$. De este modo, vemos que $x = m_1 + m_2$ para algún $m_2 \in M_2$, y, por la definición de T, tenemos que $T(x) = m_1$. Luego G_T es cerrado en el espacio de Banach $X \times M_1$. Por último, el teorema del gráfico cerrado (teorema 1.9) garantiza la continuidad de T; por tanto, T es una proyección.

Definición 2.6. *Un subespacio M de X es llamado complementario si existe una proyección T tal que $M = T(X)$.*

Definición 2.7. *Sea M_1 un subespacio cerrado de X. Entonces, M_2 es llamado complemento topológico de M_1 en X si $X = M_1 \oplus M_2$ y M_2 es un subespacio cerrado de X.*

Lema 2.1. *Si T es una proyección sobre un subespacio de X, entonces T^* es una proyección sobre un subespacio de X^*. Además, se cumplen las siguientes igualdades:*

1) $T^*(X^*) = \{x^* \in X;\ x^*(I-T)(X) = 0\} = \{x^* \in X^*;\ ((I-T)^*(x^*))(X) = 0\}$

2) $(I - T^*)(X^*) = \{x^* \in X;\ x^*(T(X)) = 0\}$

Demostración: Primero observemos la siguiente relación:

$$T^* = (T^2)^* = T^* \circ T^* = (T^*)^2$$

Esto indica que T^* es una proyección.

Sea $x_0^* \in T^*(X^*)$. Según la observación 2.3, $T^* x_0^* = x_0^*$. Luego, $x_0^*(x) = (T^* x_0^*)(x) = x_0^*(Tx)$ para cada $x \in X$. De aquí se deduce que $x_0^*(x - Tx) = x_0^*(I - T)(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Entonces,

$$T^*(X^*) \subset \{x^* \in X^*;\ ((I-T)^*(x^*))(X) = 0\}.$$

Sea $x_0^* \in \{x^* \in X^*;\, ((I-T)^*(x^*))(X)=0\}$. Entonces, $x_0^*(I-T)(x)=0$ para todo $x \in X$.

De donde $x_0^*(x) = x_0^*(Tx) = (T^*x_0^*)(x)$ para todo $x \in X$; es decir, $x_0^* = T^*x_0^*$, lo cual nos garantiza la otra inclusión:

$$\{x^* \in X^*;\, ((I-T)^*(x^*))(X)=0\} \subset T^*(X^*)$$

Esto completa la prueba de 1). La demostración de la segunda parte es análoga. □

Lema 2.2. *Sea M un subespacio complementario de X y T una proyección de X sobre M. Entonces, T^* es un operador que extiende elementos de M^* en X^*, esto es, dado $m^* \in M^*$ se tiene que $T^*(m^*) \in X^*$ y $T^*(m^*)|_M = m^*$.*

Demostración: Como $m^*(Tx) = (m^* \circ T)(x) = (T^*(m^*))(x)$ para todo $x \in X$, tenemos que T^* es una aplicación de M^* en X^*. Además, como T es una proyección, se cumple que $Tx = x$, $\forall\, x \in X$. Entonces,

$$(T^*(m^*))x = m^*(x) \text{ para todo } (x, m^*) \in M \times M^*.$$

Por tanto, la aplicación

$$\begin{aligned} T^*: M^* &\longrightarrow X^* \\ m^* &\longmapsto T^*(m^*) = m^* \circ T \end{aligned}$$

extiende elementos de M^* en X^*. □

Proposición 2.6. *Si T es una proyección de X sobre $T(X)$, entonces $(T(X))^*$ y $T^*(X^*)$ son isomorfos.*

Demostración: Sea $p^* \in (T(X))^*$. Por el lema 2.2, tenemos que $T^*(p^*) \in X^*$. Así, se observa que $T^*(T^*p^*) = (p^* \circ T) \circ T = p^* \circ T = T^*(p^*)$, o sea, $T^*p^* \in T^*(X^*)$. De este modo, concluimos que la imagen de la aplicación

$$\begin{aligned} T^*: (T(X))^* &\longrightarrow X^* \\ p^* &\longmapsto T^*(p^*) = p^* \circ T \end{aligned}$$

es un subconjunto de $T^*(X^*)$ (dado que $T^*(X^*) \subset X^*$). Verificaremos que esta aplicación es una biyección entre $(T(X))^*$ y $T^*(X^*)$. En efecto, sea $x_0^* \in T^*(X^*)$. Por la definición de T^*, se tiene que $T^*(x_0^*) \in X^*$. Observemos que $T^*(x_0^*) = x_0^* \circ T = x_0^*|_{T(X)}$. Así, $x_0^* \circ T \in (T(X))^*$.

Además, por el lema 2.1, tenemos lo siguiente:

$$T^*(X^*) = \{x^* \in X^*;\ x^*(I - T)(X) = 0\}\ .$$

Entonces, deducimos que $x_0^*(I - T)(x) = 0$ para todo x en X; de donde se concluye que

$$x_0^*(x) = (x_0^* \circ T)(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Esto implica que $x_0^* = x_0^* \circ T = T^*(x_0^* \circ T)$. Luego, T^* es sobreyectiva.

Ahora tomemos $m^* \in (T(X))^*$ tal que $T^*(m^*) = 0$. Esto significa que

$$(T^*m^*)(x) = (m^* \circ T)(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Luego, $m^* = 0$, pues $m^* \in (T(X))^*$, y como T^* es lineal tenemos que T^* es inyectiva.

Ahora notemos que

$$|(T^*m^*)(x)| = |(m^* \circ T)(x)| \leq \| m^* \| \| T \| \| x \|$$

De ahí se sigue que $\| T^*(m^*) \| \leq \| m^* \| \| T \|$, donde $T^* \in \mathcal{L}((T(X))^*, T^*(X^*))$. Por otro lado, $T^*(X^*)$ y $(T(X))^*$ son espacios de Banach, ya que $T^*(X^*)$ es un subespacio cerrado de X^* (pues T^* es proyección) y $(T(X))^*$ es el dual de un espacio normado. Finalmente, por el corolario 1.6, concluimos que T^* es un isomorfismo entre los espacios $(T(X))^*$ y $T^*(X^*)$. □

Teorema 2.1. *Si Y es isomorfo a un subespacio complementario de X, entonces Y^* es isomorfo a un subespacio complementario de X^*.*

Demostración: Sea M un subespacio complementario de X con la propiedad de ser isomorfo a Y. Además, sea T_1 un isomorfismo de Y en M y T una proyección de X sobre $M = T(X)$. Por la proposición 2.6, tenemos que T^* es un isomorfismo entre $M^* = (T(X))^*$ y $T^*(X^*)$. Como T_1 es un isomorfismo entre Y y M, tenemos (por la proposición 2.5) que T_1^* es un isomorfismo entre M^* e Y^*. Luego, la aplicación $T^* \circ (T_1^*)^{-1}: Y^* \longrightarrow T^*(X^*)$ es un isomorfismo entre Y^* y $T^*(X^*)$.

Como T^* es una proyección, tenemos que $T^*(X^*)$ y $(I - T^*)(X^*)$ son subespacios cerrados de X^* tales que $X^* = T^*(X^*) \oplus (I - T^*)(X^*)$; por ello, $T^*(X^*)$ es un subespacio complementario de X^*. Con eso concluye la prueba. □

Definición 2.8. *Un espacio de Banach M es llamado inyectivo si para todo espacio de Banach X tal que M es un subespacio cerrado de X tenemos que M es complementario en X.*

Definición 2.9. *El espacio* ℓ_∞ *denotará el espacio vectorial de las sucesiones limitadas* $\xi = (\xi_n)_n$ *en* $\mathbb{K}$, *provisto de la norma definida por*

$$\|\xi\|_\infty = \sup_n |\xi_n|.$$

La próxima proposición mostrará que ℓ_∞ tiene esta propiedad.

Proposición 2.7. *Sea X un espacio de Banach y* $M \subset X$ *un subespacio. Si M es isomorfo a* ℓ_∞, *entonces M es complementario en X.*

Demostración: Como M es isomorfo a ℓ_∞, existe un isomorfismo T de M en ℓ_∞. Es decir,

$$T: M \longrightarrow \ell_\infty$$
$$x \longmapsto T(x) = (T_n(x))_n$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente funcional lineal:

$$x_n^*: M \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto T_n(x)$$

Notemos que $x_n^* \neq 0$, pues T es un isomorfismo. Además,

$$|x_n^*(x)| \leq \sup_k |T_k(x)| \leq \|T\| \, \|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

Entonces, $x_n^* \in M^*$ y $\| x_n^* \| \leq \| T \|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema 1.5, podemos obtener una extensión lineal continua de x_n^* a X, la cual preserva la norma de x_n^*. Denotaremos también por x_n^* dicha extensión. Ahora definiremos estas dos aplicaciones lineales continuas:

$$Q: X \longrightarrow \ell_\infty \qquad \text{y} \qquad P: X \longrightarrow M$$
$$x \longmapsto (x_n^*(x))_n \qquad\qquad x \longmapsto P(x) = T^{-1}(Q(x))$$

Notemos que $Q|_M = T$, lo que implica que Q es sobreyectiva. Luego, $P(X) = M$, pues $T^{-1}(\ell_\infty) = M$. Por otro lado, para cada $x \in M$ tenemos

$$\begin{aligned} P^2(x) &= P(T^{-1}(Q(x))) = P(T^{-1}(T_n(x))_n) \\ &= P(T^{-1}(T(x))) \\ &= P(x). \end{aligned}$$

Si $x \in X$, podemos encontrar $x_0 \in M$ tal que $Q(x_0) = Q(x)$. De esto y de la igualdad de arriba, se tiene que $P^2 = P$. Con esto concluye la prueba. □

2.3 Operadores compactos

Definición 2.10. *Un operador lineal T: X ⟶ Y es llamado operador compacto si* $\overline{T(B_X)}$ *es compacto*.

Observación 2.7. Si T es compacto, entonces $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. En efecto, es suficiente observar que $T(B_X) \subset \overline{T(B_X)}$. Como $\overline{T(B_X)}$ es un conjunto compacto en un espacio métrico, se sigue que $T(B_X)$ es acotado. Esto prueba que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

A continuación, demostraremos un teorema importante: el teorema de Schauder.

Teorema 2.2. *Sea* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Entonces, T es compacto si y solamente si su adjunto* (T^*) *es compacto*.

Demostración: Sea T un operador compacto. Por definición, tenemos que $\overline{T(B_X)}$ es compacto. Luego, por el corolario 1.8, $\overline{T(B_X)}$ posee un subconjunto numerable denso. Denotemos dicho conjunto por A, y escribamos $A = \{y_1, y_2, y_3 \ldots\}$.

Ahora, sea $y = Tx$, donde $x \in X$. Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x}{n_0} \in B_X$. Entonces, $T\left(\frac{x}{n_0}\right) \in T(B_X)$ y, por la linealidad de T, $y = Tx \in n_0 T(B_X)$. Así, tenemos que

$$T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B_X) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{nT(B_X)} \qquad (*)$$

Además, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, donde $B_n = \{ny_1, ny_2, ny_3 \ldots\}$ es numerable, dado que es la reunión numerable de conjuntos numerables. Sea $z \in T(X)$. Por (*), existen $x \in X$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $z = n_0 T x_0$. Como $Tx_0 \in \overline{T(B_X)}$, podemos encontrar una sucesión $(y_{k_j})_j \subset A$ tal que $y_{k_j} \to Tx_0$. Por tanto, $(n_0 y_{k_j}) \to n_0 T x_0 = z$ y $(n_0 y_{k_j})_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Esto significa que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es denso en $T(X)$. Se sigue que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es denso en $\overline{T(X)}$; es decir, $\overline{T(X)}$ es separable.

Por la proposición 1.9, para probar que T^* es compacto, basta con probar que $T^*(B_{X^*})$ es secuencialmente compacto. Por lo visto anteriormente, $\overline{T(X)}$ posee un subconjunto numerable denso. Sea $A = \{y_1, y_2, y_3\ldots\}$ dicho conjunto. Consideremos la sucesión $(T^*(y_n^*))_n$ en $T^*(B_{X^*})$. Como $(y_n^*)_n \subset B_{X^*}$, tenemos que $\| y_n^* \| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora observemos que $(y_n^*(y_1))_n$ es una sucesión acotada en $\mathbb{K}$, pues

$$\| y_n^*(y_1) \| \leq \| y_n^* \| \, \| y_1 \| \leq \| y_1 \|.$$

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $(y_{1,n}^*)_n$ de $(y_n^*)_n$ tal que $(y_{1,n}^*(y_1))_n$ converge. Análogamente, existe una subsucesión $(y_{2,n}^*)_n$ de $(y_{1,n}^*)_n$ tal que $(y_{2,n}^*(y_2))_n$ converge. Además, $(y_{2,n}^*(y_1))_n$ converge. Por inducción, existe una subsucesión $(y_{k,n}^*)_n$ de $(y_{k-1,n}^*)_n$ tal que $(y_{k,n}^*(y_k))_n$ converge y $(y_{k,n}^*(y_i))_n$ converge para $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Si escribimos $z_n^* = y_{n,n}^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es claro que $(z_n^*)_n \subset B_{X^*}$ y $(z_n^*(y_k))_n$ converge para todo $k \in \mathbb{N}$ fijo.

Fijemos $y \in \overline{T(X)}$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| y - y_{k_0} \| < \frac{\varepsilon}{3}$. Por otro lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| z_n^*(y_{k_0}) - z_m^*(y_{k_0}) \| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $m, n \geq n_0$. Luego, si $m, n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned} | z_n^*(y) - z_m^*(y) | &\leq | z_n^*(y) - z_n^*(y_{k_0}) | + | z_n^*(y_{k_0}) - z_m^*(y_{k_0}) | + | z_m^*(y_{k_0}) - z_m^*(y) | \\ &\leq \| z_n^* \| \, \| y - y_{k_0} \| + \frac{\varepsilon}{3} + \| z_m^* \| \, \| y - y_{k_0} \| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Así, $(z_n^*(y))_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$. Por tanto, $(z_n^*(y))_n$ converge, ya que $\mathbb{K}$ es completo. De este modo, podemos definir la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{aligned} z^* : T(X) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\mapsto z^*(y) = \lim_{n\to\infty} z_n^*(y) \end{aligned}$$

Observemos que, por el corolario 1.5, $z^* \in \mathcal{L}(\overline{T(X)}, \mathbb{K})$ y $\| z^* \| \leq 1$; es decir, $z^* \in B_{X^*}$. Además, por el teorema 1.5, existe una extensión lineal continua de z^* a Y. Denotaremos dicha extensión con z^*.

Fijemos $y_j \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n(y_j) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| z_i^*(y_j) - z_k^*(y_j) \| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para cada } i, k \geq n(y_j) \qquad (**)$$

Por otro lado, dado $y \in \overline{T(B_X)}$, existe $y_{j_0} \in A$ tal que $\| y_{j_0} - y \| < \frac{\varepsilon}{3}$. De aquí, $y \in B(y_{j_0}; \frac{\varepsilon}{3})$.

Esto significa que

$$\overline{T(B_X)} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(y_j; \frac{\varepsilon}{3})$$

Como $T(B_X)$ es compacto, existe $\{j_1, j_2, \ldots, j_{k_0}\} \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(B_X)} \subset \bigcup_{i=1}^{k_0} B(y_{j_i}; \frac{\varepsilon}{3})$.

Sea $i_0 = \max\{n(y_1), \ldots, n(y_{k_0})\}$. Dado $y \in \overline{T(B_X)}$, existe $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq k_0$, tal que $y \in B(y_{j_k}; \frac{\varepsilon}{3})$.
Si $i, j \geq i_0$, por (**) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
| z_i^*(y) - z_j^*(y) | &\leq | z_i^*(y) - z_i^*(y_{j_k}) | + | z_i^*(y_{j_k}) - z_j^*(y_{j_k}) | + | z_j^*(y_{j_k}) - z_j^*(y) | \\
&\leq \| z_i^* \| \| y - y_{j_k} \| + \frac{\varepsilon}{3} + \| z_j^* \| \| y - y_{j_k} \| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Luego, $| z_i^*(y) - z_j^*(y) | < \varepsilon$ para $i, j \geq i_0$. Tomando el límite en j, para todo $i \geq i_0$ se cumple

$$| z_i^*(y) - z^*(y) | \leq \varepsilon, \ \forall \ y \in \overline{T(B_X)}. \qquad (1)$$

Además,

$$\begin{aligned}
\| T^* z_i^* - T^* z^* \| &= \sup_{\|x\| \leq 1} | T^*(z_i^* - z^*)(x) | \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} | (z_i^* - z^*)(Tx) |
\end{aligned}$$

Luego, por (1), si $i \geq i_0$, entonces $\| T^* z_i^* - T^* z^* \| \leq \varepsilon$. Eso quiere decir que $T^* z_i^* \longrightarrow T^* z^*$ y, como $(z_i^*)_i$ es una subsucesión de $(y_n^*)_n$, eso prueba que $T^*(B_{Y^*})$ es secuencialmente compacto.

Recíprocamente, sea T^* compacto. Entonces, por la primera parte, T^{**} es compacto. Esto implica que $\overline{T^{**}(B_{X^{**}})}$ es compacto. Ahora, recordemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
J(T(B_X)) &= \widehat{T(B_X)} = \hat{T}(\widehat{B_X}) \\
&= T^{**}(\widehat{B_X}) = T^{**}(J(B_X))
\end{aligned}
$$

Además, $T^{**}(J(B_X)) \subset T^{**}(B_{X^{**}})$, ya que $J(B_X) \subset B_{X^{**}}$. Por la igualdad anterior, se tiene que $J(T(B_X))) \subset T^{**}(B_{X^{**}})$, y por la proposición 1.3, $\overline{J(T(B_X))}$ es compacto, pues $\overline{T^{**}(B_{X^{**}})}$ es compacto. Luego, por la proposición 1.9 tenemos que $J(T(B_X))$ es secuencialmente compacto.

Sea $(Tx_n)_n$ una sucesión en $T(B_X)$. Entonces, $J(Tx_n)_n \subset J(T(B_X))$. Así, existen $y^{**} \in Y^{**}$ y una subsucesión $J(Tx_{n_k})_k$ de $J(Tx_n)_n$ tales que $J(Tx_{n_k}) \longrightarrow y^{**}$. De aquí que $J(Tx_{n_k})$ es de Cauchy; y, como J es una isometría, se tiene que $(Tx_{n_k})_k$ es una sucesión de Cauchy en Y. Concluimos que $(Tx_{n_k})_k$ converge, pues Y es completo. Eso implica que $T(B_X)$ es secuencialmente compacto y, por tanto, que T es compacto. □

Proposición 2.8. *El conjunto* $\{T: X \longrightarrow Y$; *T es un operador compacto*$\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{L}(X, Y)$.

Demostración: Sean T_1, T_2 operadores compactos y $\alpha \in \mathbb{K}$. Sea $(\alpha T_1 x_n + T_2 x_n)_n$ una sucesión en $(\alpha T_1 + T_2)(B_X)$. Como T es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $(T_1 x_{n_k})_k$ converge. Por la misma razón, existe una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_j$ de $(x_{n_k})_k$ tal que $(T_2 x_{n_{k_j}})_j$ converge. Se sigue que $(\alpha T_1 x_n + T_2 x_n)_n$ posee una subsucesión convergente. Por tanto, por la proposición 1.9, $\alpha T_1 + T_2$ es compacto. □

De ahora en adelante, $K(X, Y)$ denotará el espacio vectorial de los operadores compactos $T: X \longrightarrow Y$, provisto de la norma inducida por $\mathcal{L}(X, Y)$.

Proposición 2.9. *Sea X un espacio normado y sea Y un espacio de Banach. Entonces, $K(X, Y)$ es un espacio de Banach. En consecuencia, $K(X, Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Demostración: Sea $(T_n)_n$ una sucesión de Cauchy de operadores compactos. Como $\mathcal{L}(X, Y)$ es completo (teorema 1.4), existe $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $T_n \longrightarrow T$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| T_n - T \| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } n \geq n_0 \qquad (*)$$

Como T_{n_0} es compacto, por la proposición 1.9 se tiene que $T_{n_0}(B_X)$ es totalmente acotado. Por esta razón, existe $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subset B_X$ tal que $T_{n_0}(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(Tx_i; \frac{\varepsilon}{3})$. De esta manera, para cada $x \in B_X$ existe $i_0 = i_0(x) \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_0 \leq p$, tal que $T_{n_0}(x) \in B(Tx_{i_0}; \frac{\varepsilon}{3})$. Además,

$$\begin{aligned} \| T(x) - T(x_{i_0}) \| &\leq \| T(x) - T_{n_0}(x) \| + \| T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_{i_0}) \| + \| T_{n_0}(x_{i_0}) - T(x_{i_0}) \| \\ &\leq \| T - T_{n_0} \| \, \| x \| + \frac{\varepsilon}{3} + \| T_{n_0} - T \| \, \| x_{i_0} \| \\ \text{Por } (*) \qquad &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Luego, dado $x \in B_X$, existe $i_0 = i_0(x) \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_0 \leq p$, tal que $Tx \in B(Tx_{i_0}; \varepsilon)$. Así, $T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(Tx_i; \varepsilon)$. Esto significa que $T(B_X)$ es totalmente acotado. Además, $\overline{T(B_X)}$ es completo desde que Y es completo. Finalmente, por la proposición 1.9, $\overline{T(B_X)}$ es compacto. Así concluimos que T es compacto. □

Proposición 2.10. *Si* $T \in K(X, Y)$, $U_1 \in \mathcal{L}(Y, Z)$ *y* $U_2 \in \mathcal{L}(Z, X)$, *entonces* $T \circ U_2 \in K(Z, Y)$ *y* $U_1 \circ T \in K(X, Z)$.

Demostración: Por la continuidad de U_2, podemos encontrar $\lambda > 0$ tal que $U_2(B_Z) \subset \lambda B_X$. Luego, por la linealidad de T se tiene que

$$\overline{T(U_2(B_Z))} \subset \overline{\lambda T(B_X)}.$$

Como T es compacto, por la proposición 1.3 tenemos que $\overline{T(U_2(B_Z))}$ es compacto. Por tanto, $T \circ U_2$ es compacto.

Asimismo, de la continuidad de U_1 y del hecho de que T es compacto, se deduce que $U_1 \circ T$ también es un operador compacto. □

Proposición 2.11. *Sea $T \in K(X, Y)$. Si $(x_n)_n$ converge débilmente a x en X, entonces $(T(x_n))_n$ converge a $T(x)$ en la norma de Y. Si X es reflexivo, la recíproca también es válida.*

Demostración: Sea $T \in K(X, Y)$ y $(x_n)_n \subset X$ una sucesión que converge débilmente a algún $x \in X$. Por reducción al absurdo, supongamos que $T(x_n) \nrightarrow T(x)$. Entonces, podemos encontrar una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ y un $\varepsilon > 0$ tales que

$$\| T(x_{n_k}) - T(x) \| \geq \varepsilon . \qquad (*)$$

Además, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es $\sigma(X, X^*)$-acotado y, en consecuencia, acotado (en la norma). Luego, sin perder generalidad, se puede asumir que $(x_n)_n \subset B_X$ y $x \in B_X$. Por el teorema 1.13, T es $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(Y, Y^*)$ continua; además, por la proposición 1.1, se tiene que $(T(x_n))_n$ converge débilmente a $T(x)$ en Y. Por otro lado, $\overline{T(B_X)}$ es compacto en Y (por hipótesis), de modo que, por la proposición 1.9, $(T(x_{n_k}))_k$ posee una subsucesión que converge a algún $y \in Y$. Para evitar recargar la notación, representaremos esa subsucesión por $(T(x_{n_k}))_k$. Como $\sigma(Y, Y^*) \leq \Gamma_{\|\cdot\|}$, se tiene que

$$T(x_{n_k}) \xrightarrow{\sigma(Y,Y^*)} y.$$

Y, como $(T(x_n))_n$ converge débilmente a $T(x)$,

$$T(x_{n_k}) \xrightarrow{\sigma(Y,Y^*)} T(x).$$

Ahora, basta recordar que, como la topología débil es una topología de Hausdorff, la unicidad del límite implica que $y = T(x)$. De aquí que $T(x_{n_k}) \longrightarrow T(x)$, lo cual contradice (*). Por tanto, $T(x_n) \longrightarrow T(x)$.

Recíprocamente, supongamos que la convergencia de una sucesión $(x_n)_n$ en la topología débil de X implique siempre la convergencia de $(T(x_n))_n$ en la norma de Y; es decir, $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ siempre que $x_n \xrightarrow{\sigma(X,X^*)} x$. Utilizaremos la proposición 1.9 para mostrar que $\overline{T(B_X)}$ es compacto. Sea $(T(x_n))_n \subset T(B_X)$. Como X es reflexivo, por el teorema 1.16, B_X es débilmente secuencialmente compacto. Así, existe $x \in X$ y una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{\sigma(X,X^*)} x$. Se sigue de la hipótesis que $T(x_{n_k}) \longrightarrow T(x)$, lo cual indica que $(T(x_n))_n$ posee una subsucesión convergente en la norma de Y. Luego, $\overline{T(B_X)}$ es compacto; es decir, T es un operador compacto. □

Ahora probaremos tres resultados que nos serán útiles para posteriormente demostrar el último teorema sobre operadores compactos.

Proposición 2.12. *Dado un conjunto* $K \subset C(S)$, *son equivalentes las siguientes afirmaciones*:

a) *K es equicontinuo*.

b) *Si* $(s_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ *es una red en S y* s_α *converge a un punto s de S*, *entonces* $f(s_\alpha) \longrightarrow f(s)$ *uniformemente con respecto a* $f \in K$.

Demostración: Sea K un subconjunto equicontinuo de $C(S)$. Consideremos una red $(s_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ en $C(S)$ tal que s_α converge a un cierto elemento s de S. Como K es equicontinuo, dado $\varepsilon > 0$, existe una vecindad de s, digamos U, tal que

$$\sup_{f\in K}\sup_{t\in U}|f(s)-f(t)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Por otro lado, como s_α converge a s, podemos encontrar $\alpha_0 \in \mathcal{D}$ tal que

$$s_\alpha \in U \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0. \qquad (**)$$

Luego, de (*) y (**), se deduce que $\sup_{f\in K}|f(s_\alpha)-f(t)| < \varepsilon$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$, lo cual indica que $f(s_\alpha) \longrightarrow f(s)$ uniformemente con respecto a $f \in K$.

Recíprocamente, sea K un subconjunto de $C(S)$ que posee la propiedad b). Procedamos por reducción al absurdo: supongamos que K no es equicontinuo. Entonces, podemos encontrar $\varepsilon_0 > 0$ y $s \in S$ tales que se cumple lo siguiente:

Para toda vecindad U de s existen elementos $t_U \in U$ y $f_U \in K$ que satisfacen

$$|f_U(t_U)-f_U(s)| \geq \varepsilon_0. \qquad (1)$$

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las vecindades de s; es decir, $\mathcal{D} = \{U; U \text{ es una vecindad de } s\}$. Definimos la relación binaria $\leq$ en $\mathcal{D}$ de la siguiente manera:

$$U_1 \leq U_2 \text{ siempre que } U_2 \subset U_1.$$

Se puede probar que $\mathcal{D}$, con la relación $\leq$ antes definida, es un conjunto dirigido. Además, de la definición de $\leq$ se sigue que $(t_U)_{U\in\mathcal{D}}$ converge a s.

Como t_U converge a s, por hipótesis podemos encontrar $U_1 \in \mathcal{D}$ tal que

$$\sup_{f \in K} | f(t_U) - f(s) | < \varepsilon_0 \text{ para todo } U \geq U_1.$$

Por tanto, $| f_{U_1}(t_{U_1}) - f(s) | < \varepsilon_0$, lo que contradice (1). Luego, K es equicontinuo. □

Proposición 2.13. *Dado un espacio vectorial X y un subespacio total Ω de X^+, se cumple que* $(X, \sigma(X, \Omega))^* = \Omega$.

Demostración: Como se sabe, todo funcional en Ω es $\sigma(X, \Omega)$-continuo. Luego se tiene que $\Omega \subset (X, \sigma(X, \Omega))^*$. Ahora, sea $g \in (X, \sigma(X, \Omega))^*$. Por la $\sigma(X, \Omega)$-continuidad de g, podemos encontrar $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$g(U(0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \varepsilon)) \subset B_{\mathbb{K}}. \qquad (*)$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos que $\ker f_i$ es un subespacio vectorial. Si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$, entonces $|f_i(x)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$; donde $x \in U(0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \varepsilon)$. Además, como $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$ es un subespacio vectorial de X, tenemos que $mx \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$, donde m es un número natural arbitrario. De este modo, $mx \in U(0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \varepsilon)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por (*), tenemos que

$$| g(x) | < \frac{1}{m} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Entonces, $g \supset \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$. Luego, por el lema 1.1, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$. Por tanto, $g \in \Omega$. □

Teorema 2.3. *Dado un espacio de Banach X, existe un espacio de Hausdorff compacto Λ tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $C(\Lambda)$. Más aún, $\Lambda = B_{X^*}$ provisto de la* $\sigma(X^*, X)$*-topología.*

Demostración: Sea $\Lambda = B_{X^*}$ provisto de la $\sigma(X^*, X)$-topología, esto es, provisto de la $\sigma(X^*, J(X))$-topología. Por el teorema 1.17, B_{X^*} es $\sigma(X^*, X)$-compacta. Además, B_{X^*} es un espacio de Hausdorff con la topología $\sigma(X^*, J(X))$, pues $J(X)$ es un subespacio total de X^{**}.
Por la proposición 2.13, $\hat{x}$ es $\sigma(X^*, X)$-continuo para todo $\hat{x} \in J(X)$. Así se tiene que $\hat{x}|_{B_{X^*}}$ es $\sigma(X^*, X)$-continuo. De este modo, podemos definir

$$J_0 \colon X \to C(B_{X^*})$$

$$x \mapsto J_0(x) = \hat{x}|_{B_{X^*}}.$$

Y recordemos que

$$\| x \| = \| \widehat{x} \| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \widehat{x}(x^*) = \| J_0(x) \|.$$

Luego, J_0 es un isomorfismo isométrico entre X y $J_0(X)$. Además, $J_0(X)$ es cerrado, pues X es un espacio de Banach y J_0 es una isometría. □

Teorema 2.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes*:

a) $T \in K(X, Y)$.

b) $T^*(y^*_\alpha) \longrightarrow T^* y^*$ *siempre que* $y^*_\alpha \xrightarrow{\sigma(Y^*, Y)} y^*$, *donde* y^* *es un elemento de* Y^* *y la red* $(y^*_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ *está contenida en* B_{Y^*}.

Demostración: Sea $T \in K(X, Y)$. Tomemos una red $(y^*_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $(y^*_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset B_{Y^*}$ y que para algún $y^* \in Y^*$. Como Y es un espacio de Banach, por el teorema 2.3, la aplicación

$$J_0 \colon Y \to C(B_{Y^*})$$

$$y \mapsto J_0(y) = \hat{y}|_{B_{Y^*}}$$

es un isomorfismo isométrico entre Y y un subespacio cerrado de $C(B_{Y^*})$, donde B_{Y^*} está provisto de la topología débil estrella. Como T es compacto, tenemos por la proposición 1.9 que $T(B_X)$ es secuencialmente compacto. Sea $(J_0(Tx_n))_n$ una sucesión en $A = \{J_0(Tx);\ x \in B_X\}$. Por lo visto anteriormente, se puede encontrar una subsucesión $(Tx_{n_k})_k$ de $(Tx_n))_n$ que es de Cauchy.

Dado que J_0 es una isometría y $C(B_{Y^*})$ es completo, tenemos que $(J_0(Tx_{n_k}))_k$ es una subsucesión convergente de $(J_0(Tx_n))_n$. Esto garantiza que A es secuencialmente compacto; es decir, A es relativamente compacto.

Luego, por el teorema de Arzelà-Ascoli (teorema 1.11), A es equicontinuo, pues A es un subconjunto relativamente compacto de $C(B_{Y^*})$.

Recordemos que, por hipótesis, $y^* \in Y^*$ es tal que $y_\alpha^* \xrightarrow{\sigma(Y^*, Y)} y^*$; además, desde que A es equicontinuo, por la proposición 2.12 se tiene que

$$(J_0(Tx))(y_\alpha^*) \longrightarrow (J_0(Tx))(y^*) \text{ uniformemente con respecto a } x \in B_X. \qquad (*)$$

Se sigue de la definición de J_0 y de (*) que $y_\alpha^*(Tx) \longrightarrow y^*(Tx)$ uniformemente en B_X. Esto significa que $T^*(y_\alpha^*) \longrightarrow T^*(y^*)$ en la norma de X^*.

Recíprocamente, sea T un operador que satisfice b) y tomemos $A = \{J_0(Tx);\, x \in B_X\}$. Como J_0 es una isometría y $\| T(x) \| \leq \| T \|$ para todo $x \in B_X$, se tiene que A es acotado en $C(B_{Y^*})$.

Ahora verifiquemos que A es un subconjunto equicontinuo de $C(B_{Y^*})$. En efecto, supongamos que A no es equicontinuo. Luego, por la proposición 2.12, podemos encontrar un elemento $y^* \in B_{Y^*}$ y una red $(y_\alpha^*)_{\alpha\in\Lambda}$ contenida en B_{Y^*} tales que

1) $y_\alpha^* \xrightarrow{\sigma(Y^*, Y)} y^*$.

2) $(J_0(Tx))(y_\alpha^*) \nrightarrow (J_0(Tx))(y^*)$ uniformemente con respecto a $x \in B_X$.

Para cada $x \in B_X$ tenemos

$$\big(J_0(Tx)\big)(y_\alpha^*) = y_\alpha^*(Tx) = (T^*y_\alpha^*)(x) \text{ para todo } \alpha \in \Lambda \text{ y}$$

$$\big(J_0(Tx)\big)(y^*) = y^*(Tx) = (T^*y^*)(x).$$

Así, vemos que $(T^*y_\alpha^*)(x) \nrightarrow (T^*y^*)(x)$ uniformemente con respecto a $x \in B_X$, lo cual indica que $T^*(y_\alpha^*) \nrightarrow T^*(y^*)$, y eso no es posible, pues contradice b). Por tanto, A es equicontinuo.

Así tenemos que A es acotado y equicontinuo. Luego, por el teorema de Arzelà-Ascoli (teorema 1.11), tenemos que A es relativamente compacto. Finalmente, usando el hecho de que J_0 es una isometría y que Y es un espacio de Banach, tenemos que $T(B_X)$ es relativamente compacto, esto es, $\overline{T(B_X)}$ es compacto. Esto demuestra que T es un operador compacto. □

2.4 Operadores débilmente compactos

Definición 2.11. *Un operador lineal T: $X \longrightarrow Y$ es llamado débilmente compacto si $\overline{T(B_X)}$ es $\sigma(Y, Y^*)$-compacto.*

De acuerdo con la proposición 1.4, $T(B_X)$ es un conjunto convexo. Luego, por el teorema 1.12, tenemos que $\overline{T(B_X)} = \overline{T(B_X)}^{\sigma(Y, Y^*)}$. De esta manera, podemos afirmar, equivalentemente, que un operador T: $X \longrightarrow Y$ es débilmente compacto si $\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y, Y^*)}$ es débilmente compacto.

Observación 2.8. Si T: $X \longrightarrow Y$ es débilmente compacto, entonces $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. En efecto, para cada $y^* \in Y^*$ fijado, definimos $U_n = \{y \in Y; |y^*(y)| < n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Cada U_n así definido es débilmente abierto. Se puede probar fácilmente que $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$; además, como T es débilmente compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T(B_X) \subset U_{n_0}$. Luego, $y^*(T(B_X))$ es acotado para todo $y^* \in Y^*$. Se sigue, por el teorema 1.7, que $T(B_X)$ es acotado, es decir, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Así concluimos que el conjunto de los operadores débilmente compactos es un subconjunto de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Observación 2.9. La aplicación canónica J: $X \longrightarrow X^{**}$ es $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(X^{**}, X^*)$ continua. En efecto, sea $U(0;\, x_1^*, \ldots, x_n^*;\, \varepsilon) = \{x^{**} \in X^{**};\, |x^{**}(x_i^*)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$ una $\sigma(X^{**}, X^*)$-vecindad básica del cero en X^{**}. Tomando $U(0;\, x_1^*, \ldots, x_n^*;\, \varepsilon) = \{x \in X;\, |x_i^*(x)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$, que es una $\sigma(X, X^*)$ vecindad del 0 en X, es fácil ver que $J(U) \subset U$. Siendo así, J: $X \longrightarrow X^{**}$ es $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(X^{**}, X^*)$ continua en el origen. Para terminar de probar la afirmación, basta ver que X y X^{**} son espacios vectoriales topológicos (provistos de la topología débil y débil estrella, respectivamente). Análogamente, J^{-1}: $J(X) \longrightarrow X$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-$\sigma(X, X^*)$ continua.

Teorema 2.5. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto si y solo si $T^{**}(X^{**}) \subset J(Y)$.*

Demostración: Primero, observemos que T^{**} es una aplicación $\sigma(X^{**}, X^*)$-$\sigma(Y^{**}, Y^*)$ continua (por la proposición 2.3). Luego, por las proposiciones 1.2 y 2.4 se tienen las siguientes relaciones de inclusión e igualdad, respectivamente:

$$T^{**}\left(\overline{J(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)}\right) \subset \overline{T^{**}(J(B_X))}^{\sigma(Y^{**}, Y^*)} = \overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**}, Y^*)}$$

Por el teorema de Goldstine (teorema 1.18), se tiene que $\overline{J(B_X)}^{\sigma(X^{**},\, X^*)} = B_{X^{**}}$. Luego, observamos que $T^{**}(B_X) \subset \overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**},\, Y^*)}$, y, como $J(T(B_X)) \subset J\left(\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,\, Y^*)}\right)$, se tiene

$$T^{**}(B_{X^{**}}) \subset \overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**},\, Y^*)} \subset \overline{J\left(\overline{(T(B_X))}^{\sigma(Y,\, Y^*)}\right)}^{\sigma(Y^{**},\, Y^*)}.$$

Por otro lado, $\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,\, Y^*)}$ es $\sigma(Y, Y^*)$-compacto, pues T es débilmente compacto. Entonces, por la observación 2.9 y la proposición 1.3, $J\left(\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,\, Y^*)}\right)$ es $\sigma(Y^{**}, Y^*)$-compacto y, en particular, como $(Y^{**}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$ es un espacio de Hausdorff, $J\left(\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,\, Y^*)}\right)$ es $\sigma(Y^{**}, Y^*)$-cerrado. Esto implica la siguiente igualdad:

$$\overline{J\left(\overline{(T(B_X))}^{\sigma(Y,\, Y^*)}\right)}^{\sigma(Y^{**},\, Y^*)} = J\left(\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,\, Y^*)}\right)$$

Luego,

$$T^{**}(B_{X^{**}}) \subset J\left(\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,\, Y^*)}\right) \subset J(Y),$$

lo que implica que $T^{**}(X^{**}) \subset J(Y)$.

Recíprocamente, sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $T^{**}(X^{**}) \subset J(Y)$. Por la proposición 2.3, tenemos que T^{**} es $\sigma(X^{**}, X^*)$-$\sigma(Y^{**}, Y^*)$ continua, y, por el teorema de Alaoglu (teorema 1.17), $B_{X^{**}}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacto. Así, por la proposición 1.3,

$$T^{**}(B_{X^{**}}) \text{ es } \sigma(Y^{**}, Y^*)\text{-compacto.} \qquad (*)$$

Además, como $J(B_X) \subset B_{X^{**}}$, por la hipótesis y por el hecho de que T^{**} es una extensión de T,

$$J(T(B_X)) = T^{**}(J(B_X)) \subset T^{**}(B_{X^{**}}) \subset J(Y). \qquad (**)$$

Ahora bien, la combinación de (*), (**) y la proposición 1.3 implica que $\overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**},\, Y^*)}$ es $\sigma(Y^{**}, Y^*)$-compacto.

Además,

$$\overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**},Y^*)} \subset \overline{T^{**}(B_{X^{**}})}^{\sigma(Y^{**},Y^*)} = T^{**}(B_{X^{**}}) \subset J(Y).$$

Por la observación 2.9, J es $\sigma(Y, Y^*)$-$\sigma(Y^{**}, Y^*)$ continua, de donde se obtiene que

$$J\left(\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)}\right) \subset \overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**},Y^*)} \subset J(Y).$$

Por otro lado, aplicando J^{-1}, y recordando que $J^{-1}\colon J(Y) \longrightarrow Y$ es $\sigma(Y^{**}, Y^*)$-$\sigma(Y, Y^*)$ continua (observación 2.9), se tiene que

$$\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)} \subset J^{-1}\left(\overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**},Y^*)}\right) \subset Y.$$

Por la proposición 1.3, $\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)}$ es $\sigma(Y, Y^*)$-compacto, pues la observación 2.9 permite afirmar que $J^{-1}\left(\overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y,Y^*)}\right)$ es $\sigma(Y, Y^*)$-compacto. Por tanto, T es débilmente compacto. □

Corolario 2.1. *Sean X e Y espacios de Banach. Si X o Y es reflexivo, entonces todo operador en $\mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto.*

Demostración: Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dado que T es continuo, podemos asumir —sin pérdida de generalidad— que $\| T \| \leq 1$. Luego se tiene que $T(B_X) \subset B_Y$. Si Y es reflexivo, entonces, por el teorema 1.15, B_Y es $\sigma(Y, Y^*)$-compacto. Además, observemos que

$$\overline{T(B_X)} = \overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)} \subset \overline{B_Y}^{\sigma(Y,Y^*)}.$$

Luego, por la proposición 1.3 (a), tenemos que T es débilmente compacto.

Por otro lado, si X es reflexivo, por el teorema 1.15 se tiene que B_X es $\sigma(X, X^*)$-compacto. Además, por el teorema 1.13, T es $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(Y, Y^*)$ continuo. Finalmente, debido a la proposición 1.3 (b), $T(B_X)$ es $\sigma(Y, Y^*)$-compacto. Por tanto, T es débilmente compacto. □

Corolario 2.2. *El conjunto de todos los operadores débilmente compactos de X en Y es cerrado en $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Demostración: Sea A el conjunto de todos los operadores débilmente compactos y sea $T \in \bar{A}$. Entonces, es posible encontrar una sucesión $(T_n)_n \subset A$ tal que

$$\| (T_n - T)^{**} \| = \| (T_n - T)^* \| = \| T_n - T \| \longrightarrow 0.$$

Fijemos $x^{**} \in X^{**}$. Como $(T_n)_n$ es una sucesión de operadores débilmente compactos, por el teorema 2.5 se tiene que $(T_n^{**}x^{**})_n \subset J(Y)$. Por otro lado, $J(Y)$ es cerrado en Y^{**}, pues $J(Y)$ es isométricamente isomorfo al espacio de Banach Y. Además, notemos que

$$\| (T_n - T)^{**} x^{**} \| \leq \| (T_n - T)^{**} \| \| x^{**} \|.$$

Como $\| (T_n - T)^{**} \| \longrightarrow 0$, concluimos que $\| T_n^{**} x^{**} - T^{**} x^{**} \| \longrightarrow 0$. De ese modo se tiene que $T^{**}x^{**} \in J(Y)$, pues $J(Y)$ es cerrado y $(T_n^{**}x^{**})_n \subset J(Y)$. Luego $T \in A$, o sea, A es cerrado. □

Corolario 2.3. *El conjunto de todos los operadores débilmente compactos de X en Y es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Demostración: Como $(Y, \sigma(Y, Y^*))$ es un espacio vectorial topológico, la aplicación

$$F_\alpha: (Y, \sigma(Y, Y^*)) \times (Y, \sigma(Y, Y^*)) \longrightarrow (Y, \sigma(Y, Y^*))$$

$$(y_1, y_2) \longmapsto y_1 + \alpha y_2$$

es continua para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ fijado. Sean T_1, T_2 operadores débilmente compactos de X en Y y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $\overline{T_i(B_X)}$ es débilmente compacto (para $i = 1, 2$), $F_\lambda\left(\overline{T_1(B_X)} \times \overline{T_2(B_X)}\right)$ es débilmente compacto. De esa conclusión y de esta relación:

$$(T_1 + \lambda T_2)(B_X) = T_1(B_X) + \lambda T_2(B_X) \subset \overline{T_1(B_X)} + \lambda \overline{T_2(B_X)} = F_\lambda\left(\overline{T_1(B_X)} \times \overline{T_2(B_X)}\right),$$

podemos concluir que $T_1 + \lambda T_2$ es débilmente compacto. □

A partir de ahora, $\mathcal{W}(X, Y)$ denotará el espacio vectorial de los operadores débilmente compactos de X en Y, provisto de la norma inducida por $\mathcal{L}(X, Y)$.

Observación 2.10. Como $\sigma(Y, Y^*) \leq \Gamma_{\|\cdot\|}$, se puede probar que $K(X, Y) \subset \mathcal{W}(X, Y)$.

Corolario 2.4. *Si $T \in \mathcal{W}(X, Y)$, $U_1 \in \mathcal{L}(Y, Z)$ y $\mathcal{L}(Z, X)$, entonces se tiene que $T \circ U_2 \in \mathcal{W}(Z, Y)$* y $U_1 \circ T \in \mathcal{W}(X, Z)$.

Demostración: Podemos asumir —sin pérdida de generalidad— que $\| U_2 \| \leq 1$. Así, obtenemos que $U_2(B_Z) \subset B_X$. Dado que T es débilmente compacto, la proposición 1.3 permite concluir que $\overline{(T \circ U_2)(B_Z)}$ es $\sigma(Y, Y^*)$-compacto. Luego, $T \circ U_2 \in \mathcal{W}(Z, Y)$.

Por otro lado, como $T \in \mathcal{W}(X, Y)$, se tiene que $\overline{T(B_X)}$ es $\sigma(Y, Y^*)$-compacto. Entonces, por el teorema 1.13 y la proposición 1.3, tenemos que $U_1\left(\overline{T(B_X)}\right)$ es $\sigma(Z, Z^*)$-compacto. Además,

$$U_1(T(B_X)) \subset U_1\left(\overline{T(B_X)}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Proposición 1.2}}}{\subset} \overline{U_1(T(B_X))} = \overline{U_1(T(B_X))}^{\sigma(Z,Z^*)}.$$

Luego, $\overline{U_1(T(B_X))}$ es débilmente compacto. Por tanto, $U_1 \circ T \in \mathcal{W}(X, Z)$. □

Proposición 2.14. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto si y solo si T^* es $\sigma(Y^*, Y)$-$\sigma(X^*, X^{**})$ continuo.*

Demostración: Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto, por el teorema 2.5, $T^{**}(X^{**}) \subset J(Y)$. Luego, para cada $x^{**} \in X^{**}$ existe $y \in Y$ tal que $T^{**}x^{**} = Jy$. Eso significa que

$$x^{**}(T^* y^*) = (T^{**} x^{**}) y^* = (Jy) y^* = y^*(y), \text{ para todo } y^* \in Y^*. \qquad (*)$$

Fijemos $y^* \in Y^*$. Sea $(y_\alpha^*)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ una red en Y^* tal que $y_\alpha^* \xrightarrow{\sigma(Y^*, Y)} y^*$. Según la definición de topología débil estrella, tenemos que $y_\alpha^*(y) \longrightarrow y^*(y)$ para todo $y \in Y$. Demostraremos que $T^* y_\alpha^* \xrightarrow{\sigma(X^*, X^{**})} T^* y^*$, es decir, $x^{**}(T^* y_\alpha^*) \longrightarrow x^{**}(T^* y^*)$ para todo $x^{**} \in X^{**}$. En efecto, por (*), para cada $x^{**} \in X^{**}$ existe $y \in Y$ tal que $x^{**}(T^* y_\alpha^*) = y_\alpha^*(y)$ y $x^{**}(T^* y^*) = y^*(y)$.
Se sigue que $x^{**}(T^* y_\alpha^*) \longrightarrow x^{**}(T^* y^*)$ para todo $x^{**} \in X^{**}$. Luego, por la proposición 1.1 se tiene que T^* es $\sigma(Y^*, Y)$-$\sigma(X^*, X^{**})$ continuo en y^*. Como $y^* \in Y^*$ fue fijo pero arbitrario, obtenemos lo deseado.

Recíprocamente, sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que T^* es $\sigma(Y^*, Y)$-$\sigma(X^*, X^{**})$ continuo. Por definición, $T^{**}(X^{**}) \subset Y^{**}$. Probaremos que $T^{**}x_0^{**}$ es $\sigma(Y^*, Y)$-continuo para cada elemento $x_0^{**} \in X^{**}$. Sea $y^* \in Y^*$ fijo y consideremos una red $(y_\alpha^*)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ en Y^* tal que $y_\alpha^* \xrightarrow{\sigma(Y^*, Y)} y^*$. Por la hipótesis y por la proposición 1.1, se tiene que $T^* y_\alpha^* \xrightarrow{\sigma(X^*, X^{**})} T^* y^*$, o sea, $x^{**}(T^* y_\alpha^*) \longrightarrow x^{**}(T^* y^*)$ para todo $x^{**} \in X^{**}$.
Por otro lado,

$$x_0^{**}(T^* y_\alpha^*) = (T^{**} x_0^{**}) y_\alpha^* \quad \text{para todo } \alpha \in \mathcal{D},$$

$$x_0^{**}(T^* y^*) = (T^{**} x_0^{**}) y^*.$$

Esto indica que $(T^{**}x_0^{**})y^*_\alpha \longrightarrow (T^{**}x_0^{**})y^*$. Así, por la proposición 1.1, se tiene que $T^{**}x_0^{**}$ es $\sigma(Y^*, Y)$- continuo en y^*. Dado que y^* fue tomado arbitrariamente, obtenemos lo afirmado.

Ahora, recordemos que $\sigma(Y^*, Y) = \sigma(Y^*, J(Y))$; entonces, $T^{**}x_0^{**}$ es $\sigma(Y^*, J(Y))$-continuo. Además, por la proposición 2.13 se tiene que $T^{**}x_0^{**} \in J(Y)$. Luego, $T^{**}X^{**} \subset J(Y)$. Finalmente, por el teorema 2.5, concluimos que T es débilmente compacto. □

Teorema 2.6. (Teorema de Gantmacher) *Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto si y solo si su adjunto T^* es débilmente compacto.*

Demostración: Supongamos que $T \in \mathcal{W}(X, Y)$. Por el teorema de Alaoglu (teorema 1.17), tenemos que B_{Y^*} es $\sigma(Y^*, Y)$-compacto. Luego, como T es débilmente compacto, por las proposiciones 2.14 y 1.3 se tiene que $T^*(B_{Y^*})$ es $\sigma(X^*, X^{**})$-compacto. De este modo,

$\overline{T^*(B_{Y^*})}^{\sigma(X^*, X^{**})} = T^*(B_{Y^*})$ es $\sigma(X^*, X^{**})$-compacto.

Recíprocamente, si T^* es débilmente compacto, se sigue de la proposición 2.14 que T^{**} es $\sigma(X^{**}, X^*)$-$\sigma(Y^{**}, Y^{***})$ continuo. Además, por el teorema de Goldstine (teorema 1.18), se tiene que $\overline{J(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = B_{X^{**}}$. Recordemos también que

$$J(T(B_X)) = \widehat{T(B_X)} = \hat{T}(\widehat{B_X}) = T^{**}(\widehat{B_X}) = T^{**}(J(B_X)).$$

Luego, por la proposición 1.2 y la igualdad anterior tenemos que

$$T^{**}\left(\overline{J(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)}\right) \subset \overline{T^{**}(J(B_X))}^{\sigma(Y^{**}, Y^{***})} = \overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**}, Y^{***})};$$

de donde se desprende que

$$T^{**}(B_{X^{**}}) \subset \overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**}, Y^{***})}. \qquad (*)$$

Como B_X es convexo, las proposiciones 1.4 y 1.6 implican que $\overline{J(T(B_X))}$ es convexo. Además, el corolario 1.7 garantiza que $\overline{J(T(B_X))}$ es $\sigma(Y^{**}, Y^{***})$-cerrado. Como $J(T(B_X)) \subset \overline{J(T(B_X))}$, se tiene que

$$\overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**}, Y^{***})} \subset \overline{J(T(B_X))} = \overline{\overline{J(T(B_X))}}^{\sigma(Y^{**}, Y^{***})}.$$

Luego, $\overline{J(T(B_X))} = \overline{J(T(B_X))}^{\sigma(Y^{**}, Y^{***})}$. Así, por (*), $T^{**}(B_{X^{**}}) \subset \overline{J(T(B_X))} \subset \overline{J(Y)} = J(Y)$.

Finalmente, el teorema 2.5 nos permite concluir que T es débilmente compacto. □

Definición 2.12. *Se denotará con c_0 el espacio vectorial de todas las sucesiones $\xi = (\xi_n)_n$ en $\mathbb{K}$ tales que $\xi_n \longrightarrow 0$.*

Se puede ver que $c_0 \subset \ell_\infty$. Así, podemos dotar a c_0 de la norma inducida por ℓ_∞.

Definición 2.13. *El espacio vectorial de todas las sucesiones $\xi = (\xi_n)_n$ en $\mathbb{K}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ es convergente será denotado por ℓ_1. La norma para cada $\xi = (\xi_n)_n \in \ell_1$ se definirá así:*

$$\|\xi\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$$

Observación 2.11. Los espacios ℓ_∞, ℓ_1 y c_0 son espacios de Banach.

Recordemos que $\ell_1^* = \ell_\infty$; es decir, para cada $f \in \ell_1^*$, existe un único $\xi = (\xi_n) \in \ell_\infty$ tal que

$$f(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \gamma_n \text{, donde } \gamma = (\gamma_n) \in \ell_1,$$

y la aplicación $f \longmapsto \xi$ es una isometría de ℓ_1^* sobre ℓ_∞. Análogamente, $c_0^* = \ell_1$.

Teorema 2.7. *Sean X e Y dos espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador que no es débilmente compacto. Entonces, si X es inyectivo, existe un subespacio M de X con las siguientes propiedades*:

i) *M es isomorfo a ℓ_∞.*

ii) *$T|M: M \longrightarrow T(M)$ es un isomorfismo.*

Demostración: Revisar [15], pág. 18. □

Corolario 2.5. *Sea Y un espacio de Banach. Si Y no posee un subespacio isomorfo a ℓ_∞, entonces todo operador lineal $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, Y)$ es débilmente compacto.*

Demostración: Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que exista $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, Y)$ que no es débilmente compacto. Dado que ℓ_∞ es un espacio inyectivo, por el teorema anterior existe un subespacio M de ℓ_∞ tal que:

i) M es isomorfo a ℓ_∞.

ii) $T|M: M \longrightarrow T(M)$ es un isomorfismo.

Ahora, sea S el isomorfismo entre ℓ_∞ y M. Así, podemos definir la aplicación lineal

$$T \circ S: \ell_\infty \longrightarrow T(M).$$

De donde concluimos que el subespacio $T(M)$ es isomorfo a ℓ_∞, lo cual no es posible, pues $T(M)$ es un subespacio de Y. □

Teorema 2.8. (Teorema de Schur) *Un subconjunto A de ℓ_1 es débilmente relativamente compacto si y solo si es relativamente compacto en la norma. Consecuentemente, A es débilmente relativamente compacto si y solo si es totalmente acotado en la norma.*

Demostración: Revisar [16], pág. 135. □

Proposición 2.15. *Un operador $T: X \longrightarrow \ell_1$ es débilmente compacto si y solo si es compacto.*

Demostración: Sea $T: X \longrightarrow \ell_1$ un operador débilmente compacto. Por definición se tiene que

$$\overline{T(B_X)}^{\sigma(\ell_1, \ell_\infty)} \text{ es } \sigma(\ell_1, \ell_\infty)\text{-compacto.}$$

Además, por el teorema de Schur (teorema 2.8), $\overline{T(B_X)}$ es compacto (en la norma). Por tanto, T es un operador compacto.

La recíproca se obtiene como consecuencia directa de la observación 2.10. □

Un resultado que se desprende del teorema anterior es el siguiente:

Corolario 2.6. *Se cumple que $\mathcal{W}(X, \ell_1) = K(X, \ell_1)$.*

Proposición 2.16. *Un operador* T: $c_0 \longrightarrow Y$ *es débilmente compacto si y solo si es compacto*. *Consecuentemente*, $\mathcal{W}(c_0, Y) = K(c_0, Y)$.

Demostración: Sea T: $c_0 \longrightarrow Y$ un operador débilmente compacto. Por el teorema de Gantmacher (teorema 2.6) se tiene que T^*: $Y \longrightarrow c_0^* = \ell_1$ es débilmente compacto. Luego, por la proposición anterior, T^* es un operador compacto. Finalmente, por el teorema de Schauder (teorema 2.2), se concluye que T es compacto.

La recíproca se obtiene como consecuencia directa de la observación 2.10. □

Capítulo 3

El espacio de los operadores compactos

En este último capítulo, tendremos como objetivo proporcionar —dados dos espacios de Banach X e Y— una condición necesaria y suficiente para que el espacio $K(X, Y)$ posea un subespacio isomorfo a ℓ_∞. En particular, obtendremos una condición necesaria para que $K(X, Y)$ posea un subespacio complementario de dimensión infinita.

3.1 Las topologías de operador en $\mathcal{L}(X, Y)$

Hasta este momento, hemos considerado el espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ provisto siempre de la topología usual, es decir, de la topología inducida por la norma $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$, la cual es llamada topología de la norma en $\mathcal{L}(X, Y)$. Decimos que una red $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a T si y solo si $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge uniformemente a T en B_X, o sea, si $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a T en la topología de la norma. Evidentemente, se pueden definir diversas topologías en el espacio $\mathcal{L}(X, Y)$. Las tres topologías que definiremos y estudiaremos a continuación serán utilizadas en este capítulo. Todas las topologías que vamos a definir en esta sección convertirán a $\mathcal{L}(X, Y)$ en un espacio vectorial topológico. La demostración de esa afirmación sigue el camino usual en análisis funcional.

Definición 3.1. *La topología de operador fuerte en* $\mathcal{L}(X, Y)$ *es la topología definida por la base de vecindades formada por los conjuntos*

$$\mathcal{N}(T; A; \varepsilon) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y);\ \| (T - R)x \| \leq \varepsilon,\ x \in A\},$$

donde $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, *A es un subconjunto arbitrario y finito de X y* ε *es un número real positivo arbitrario*.

De este modo, en la topología de operador fuerte, una red $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a T si y solo si $(T_\alpha x)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a Tx para todo x en X. De ahora en adelante, cuando en $\mathcal{L}(X, Y)$ se considere la topología de operador fuerte, diremos $\mathcal{L}(X, Y)$ que está provisto de la topología $\mathcal{S}$.

Definición 3.2. *La topología de operador débil en* $\mathcal{L}(X, Y)$ *es la topología definida por la base de vecindades formada por los conjuntos*

$$\mathcal{N}(T; A; B^*; \varepsilon) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y);\ \| y^*(T - R)x \| \leq \varepsilon,\ x \in A,\ y^* \in B^*\},$$

donde $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, *A y* B^* *son subconjuntos arbitrarios y finitos de X e* Y^**, respectivamente, y* ε *es un número real positivo arbitrario*.

Así, en la topología de operador débil, una red $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a T si y solo si $(y^*T_\alpha x)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a y^*Tx para todo x en X y para todo y^* en Y^*. En lo que sigue, cuando en $\mathcal{L}(X, Y)$ se considere la topología de operador débil, diremos que $\mathcal{L}(X, Y)$ está provisto de la topología $\mathcal{W}$.

Observación 3.1. El espacio topológico $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{W})$ es un espacio de Hausdorff. En efecto, sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tales que $T_1 \neq T_2$. Entonces, podemos encontrar $x \in X$ tal que $T_1(x) \neq T_2(x)$. Por el teorema de Hahn-Banach (corolario 1.1), existe $y^* \in Y^*$ tal que $y^*(T_1x) \neq y^*(T_2x)$. Ahora, tomemos $\varepsilon = \dfrac{| y^*(T_1 - T_2)x |}{4}$. Si $T \in \mathcal{N}(T_1; x; y^*, \varepsilon) \cap \mathcal{N}(T_2; x; y^*, \varepsilon)$, se tiene que

$$\begin{aligned} | y^*(T_1 - T_2)x | &\leq | y^*(T_1 - T)x | + | y^*(T - T_2)x | \\ &\leq 2\varepsilon = \frac{| y^*(T_1 - T_2)x |}{2}, \end{aligned}$$

lo cual no es posible, pues $| y^*(T_1 - T_2)x | > 0$. Por tanto, $\mathcal{N}(T_1; x; y^*, \varepsilon) \cap \mathcal{N}(T_2; x; y^*, \varepsilon) = \varnothing$.

Esto nos permite concluir que $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{W})$ es un espacio de Hausdorff.

Antes de definir en $\mathcal{L}(X, Y)$ la última topología que nos interesa, demostraremos que $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{W})^* = (\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{S})^*$. Para ello, necesitamos el siguiente resultado:

Proposición 3.1. $\Gamma_{\|\cdot\|} \geq \mathcal{S} \geq \mathcal{W}$ en $\mathcal{L}(X, Y)$.

Demostración: Sea D un conjunto $\mathcal{W}$-abierto. Si fijamos $T \in D$, podemos encontrar un conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, $B^* = \{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\} \subset Y^*$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\mathcal{N}(T; A; B^*; \varepsilon) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y);\ \| y^*(T - R)x \| \leq \varepsilon, x \in A, y^* \in B^*\} \subset D$$

Sea $K_0 = \max\{\|y_1^*\|, \|y_2^*\|, \ldots, \|y_m^*\|\}$. Si $K_0 = 0$, entonces $D = \mathcal{L}(X, Y)$ y, por tanto, D es $\mathcal{S}$-abierto. En caso contrario, elegimos $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{K_0}$. Si $T_0 \in \mathcal{N}(T; A; \varepsilon_0)$, se tiene que $\| (T - T_0)x \| < \varepsilon_0$ siempre que $x \in A$. Por la forma en la que se eligió ε_0, se tiene que $K_0\| (T - T_0)x \| < \varepsilon$.

Luego, $\| y_i^*(T - T_0)x \| \leq \| y_i^*\| \, \| (T - T_0)x \| \leq K_0\| (T - T_0)x \| < \varepsilon$ si $x \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Esto nos indica que $T_0 \in \mathcal{N}(T; A; B^*; \varepsilon)$; por tanto, $\mathcal{N}(T; A; \varepsilon_0) \subset \mathcal{N}(T; A; B^*, \varepsilon)$. Entonces, D es $\mathcal{S}$-abierto.

Ahora, sea D un conjunto $\mathcal{S}$-abierto. Si fijamos $T \in D$, podemos encontrar un conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathcal{N}(T; A; \varepsilon) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y);\ \| (T - R)x \| \leq \varepsilon, x \in A\} \subset D$. Sea $M_0 = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_n\|\}$. Si $M_0 = 0$, entonces D es abierto en la norma. En caso contrario, consideramos $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{M_0}$. Sea T_0 tal que $\| T - T_0 \| \leq \varepsilon_0$. Por la definición de norma se tiene lo siguiente:

$$\| (T - T_0)x \| \leq \| T - T_0 \| \, \| x \| \leq \varepsilon_0 \| x \|, \text{ para todo } x \in X.$$

Luego, por la elección de ε_0, se tiene que $\| (T - T_0)x \| \leq \varepsilon$ para todo $x \in A$. Con ello concluimos que D es abierto en la topología de la norma. □

Por la proposición anterior vemos que, si un funcional lineal en $\mathcal{L}(X, Y)$ es $\mathcal{W}$-continuo, entonces también es $\mathcal{S}$-continuo, es decir, $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{W})^* \subset (\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{S})^*$. El siguiente teorema garantiza que, en realidad, se cumple la igualdad.

Teorema 3.1. *Un funcional lineal en $\mathcal{L}(X, Y)$ es $\mathcal{W}$-continuo si y solo si es $\mathcal{S}$-continuo. Dicho de otro modo*, $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{W})^* \subset (\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{S})^*$.

Demostración: Por los comentarios previos, basta demostrar que $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{S})^* \subset (\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{W})^*$. Sea F un funcional lineal $\mathcal{S}$-continuo. Como F es $\mathcal{S}$-continuo (en particular) en el origen, podemos encontrar $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\| F(T) - F(0) \| < 1, \text{ es decir, } \| F(T) \| < 1$$

siempre que $T \in \mathcal{N}(0; A; \varepsilon) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y); \| Rx \| \leq \varepsilon, x \in A\}$. Ahora consideremos el espacio de Banach $Y^n = Y \times Y \times \ldots \times Y$, que está conformado por todas las n-uplas $\xi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, donde $y_i \in Y$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, provisto de la norma $\| \xi \| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \| y_i \|$; y definamos las aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} H\colon \mathcal{L}(X, Y) &\longrightarrow Y^n \\ T &\longmapsto H(T) = (Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\colon H(\mathcal{L}(X, Y)) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ H(T) &\longmapsto F(T). \end{aligned}$$

Verifiquemos que f está bien definida. Sean $T, R \in \mathcal{L}(X, Y)$ tales que $H(T) = H(R)$. Entonces, $H(T - R) = ((T - R)x_1, (T - R)x_2, \ldots, (T - R)x_n) = 0$. Se sigue que

$$\| (T - R)x_i \| = 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Como $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, dado cualquier $\delta > 0$, por la igualdad anterior, $\frac{1}{\delta}(T - R) \in \mathcal{N}(0; A; \varepsilon)$, de donde se puede concluir que $\| F(\frac{1}{\delta}(T - R)) \| < 1$. Luego, por la linealidad de F y por el hecho de que δ fue tomado arbitrariamente, $F(T) = F(R)$. Esto muestra que f está bien definida.

Ahora, dado que f es lineal, es suficiente probar que f es continua en el origen para concluir que es continua. En efecto, sea $\delta > 0$. Si $\| H(T) \| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \| Tx_i \| < \delta\varepsilon$, entonces $\frac{1}{\delta} T \in \mathcal{N}(0; A; \varepsilon)$.

Luego, por la definición de f, $\| f(H(T)) \| = \| F(T) \| < \delta$. Así, tenemos que f es continua. Por el teorema 1.5, y recordando que $H(\mathcal{L}(X, Y))$ es un subespacio de Y^n, existe $f_1 \in (Y^n)^*$ tal que

$$f_1(H(T)) = f(H(T)), \ \forall\ T \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ y } \| f_1 \| = \| f \|. \qquad (*)$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, podemos definir la siguiente aplicación lineal:

$$y_i^*: Y \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$y \longmapsto y_i^*(y) = f_1(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

donde $a_i = y$; $a_j = 0$ si $j \neq i$.

Además, $\| y_i^*(y)\| = \| f_1(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\| \leq \| f_1 \| \| y \|$, lo que implica que y_i^* es continuo para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y^n$ se tiene que

$$f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_1(y_1, 0, \ldots, 0) + f_1(0, y_2, \ldots, 0) + \ldots + f_1(0, 0, \ldots, y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^*(y_i)\,. \qquad (**)$$

Por (*), (**) y la definición de f, se deduce la siguiente igualdad:

$$F(T) = f(H(T)) = f_1(H(T)) = f_1(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i^* T x_i\,,\ \forall\ T \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Ahora verificaremos que el funcional F es $\mathcal{W}$-continuo. Para ello, dado $\varepsilon_0 > 0$, consideremos $\mathcal{N}(0; A; B^*, \frac{\varepsilon_0}{n}) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y); \| y^*(R)x \| \leq \frac{\varepsilon_0}{n}, x \in A, y^* \in B^*\}$, donde $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y

$B^* = \{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\}$. Si $T \in \mathcal{N}(0; A; B^*, \frac{\varepsilon_0}{n})$, se tiene lo siguiente:

$$\| F(T) \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i^* T x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \| y_i^* T x_i \| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_0}{n} = \varepsilon_0$$

Luego, $\| F(T)\| \leq \varepsilon_0$ para todo $T \in \mathcal{N}(0; A; B^*, \frac{\varepsilon_0}{n})$. Así, F es $\mathcal{W}$-continuo en 0 y, como $\mathcal{L}(X, Y)$ provisto de la topología $\mathcal{W}$ es un espacio vectorial topológico, se tiene que F es $\mathcal{W}$-continuo. □

Definición 3.3. *La topología débil de operador dual en $\mathcal{L}(X, Y)$ es la topología definida por la base de vecindades formada por los conjuntos de la forma*

$$\mathcal{N}(T; A^{**}; B^*; \varepsilon) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y); \| x^{**}(T - R)^* y^* \| < \varepsilon, x^{**} \in A^{**}, y^* \in B^*\},$$

donde A^{**} y B^* son subconjuntos arbitrarios y finitos de X^{**} e Y^*, respectivamente, y ε es un número real positivo arbitrario.

De esta manera, en la topología débil de operador dual, una red $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a T si y solo si $x^{**}(T_\alpha^* y^*)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x^{**}(T^*y^*)$, $\forall\ x^{**} \in X^{**}$, $\forall\ y^* \in Y^*$. En lo que sigue, si en el espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ se considera la topología débil de operador dual, diremos que $\mathcal{L}(X, Y)$ está provisto de la topología $\mathcal{W}'$.

Observación 3.2. $\mathcal{W}' \geq \mathcal{W}$. En efecto, sea D un conjunto $\mathcal{W}$-abierto. Fijado $T \in D$, podemos encontrar conjuntos $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, $B^* = \{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\} \subset Y^*$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\mathcal{N}(T; A; B^*; \varepsilon) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y);\ |\ y^*(R - T)x\ | < \varepsilon,\ x \in A,\ y^* \in B^*\} \subset D.$$

Tomando $A^{**} = \{Jx_1, Jx_2, \ldots, Jx_n\} \subset X^{**}$, vemos que

$\mathcal{N}(T; A^{**}; B^*, \varepsilon) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y);\ |\ Jx(T - R)^* y^*\ | < \varepsilon,\ Jx \in A^{**},\ y^* \in Y^*\} = \mathcal{N}(T; A; B^*, \varepsilon) \subset D,$

ya que $|\ Jx(T - R)^* y^*\ | = |\ y^*(T - R)x\ |$. Con esto concluimos que D es $\mathcal{W}'$-abierto.

De la observación anterior se desprende que $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{W}')$ es un espacio de Hausdorff, puesto que $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{W})$ es también un espacio de Hausdorff. Además, si X es reflexivo, a cada $A^{**} = \{x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots, x_n^{**}\}$le corresponde un conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ tal que se tiene $A^{**} = \{Jx_1, Jx_2, \ldots, Jx_n\}$; luego, procediendo de modo similar a como se hizo en la observación anterior, concluimos que $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ en ese caso.

3.2 Compacidad débil en $K(X, Y)$

En esta sección denotaremos por U y V las bolas $B_{X^{**}}$ provista de la $\sigma(X^{**}, X^*)$-topología y B_{Y^*} provista de la $\sigma(Y^*, Y)$-topología, respectivamente. Por el teorema de Alaoglu, se tiene que U y V son compactos. Además, como $\sigma(X^{**}, X^*) = \sigma(X^{**}, J(X^*))$ y $\sigma(Y^*, Y) = \sigma(Y^*, J(Y))$, vemos que U y V son espacios de Hausdorff, ya que $J(X^*)$ y $J(Y))$ son subespacios totales de $(X^{**})^+$ y $(Y^*)^+$, respectivamente.

Consideraremos el espacio $U \times V$ provisto de la topología producto. Así, un subconjunto A es un abierto básico en $U \times V$ si y solo si $A = A_1 \times A_2$, donde A_1 y A_2 son abiertos básicos en U y V, respectivamente. Con esta topología se tiene que $U \times V$ es un espacio de Hausdorff compacto.

Además, una red $(u_\alpha, v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}} \subset U \times V$ converge a (u, v) si y solo si $u_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**}, X^*)} u$ y $v_\alpha \xrightarrow{\sigma(Y^*, Y)} v$. Denotaremos por $C(U \times V)$ el espacio de las funciones continuas de $U \times V$ en $\mathbb{K}$, provisto de la norma usual del supremo.

Lema 3.1. *Sea $T \in K(X, Y)$. Entonces, la aplicación*

$$H_T\colon U \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u, v) \longmapsto H_T(u, v) = u(T^* v)$$

es continua. Dicho de otro modo, $H_T \in C(U \times V)$.

Demostración: Sea $(u, v) \in U \times V$ fijo y sea $(u_\alpha, v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}} \subset U \times V$ una red que converge a (u, v). Puesto que T es compacto y $v_\alpha \xrightarrow{\sigma(Y^*, Y)} v$, se tiene por el teorema 2.4 que $T^*(v_\alpha) \longrightarrow T^*(v)$ en la topología de la norma de X^*. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_1 \in \mathcal{D}$ tal que

$$\| T^*(v_\alpha) - T^*(v) \| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ siempre que } \alpha \geq \alpha_1. \qquad (*)$$

Por otro lado, como $u_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**}, X^*)} u$ y $T^*(v) \in X^*$, existe $\alpha_2 \in \mathcal{D}$ tal que

$$\| u_\alpha(T^* v) - u(T^* v) \| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ siempre que } \alpha \geq \alpha_2. \qquad (**)$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} | H_T(u_\alpha, v_\alpha) - H_T(u, v) | &= | u_\alpha(T^* v_\alpha) - u(T^* v)| \\ &= | u_\alpha(T^* v_\alpha) - u_\alpha(T^* v) + u_\alpha(T^* v) - u(T^* v)| \\ &\leq | u_\alpha(T^* v_\alpha - T^* v)| + |u_\alpha(T^* v) - u(T^* v)| \\ &\leq \| u_\alpha \| \, \| T^*(v_\alpha) - T^*(v) \| + | u_\alpha(T^* v) - u(T^* v) | \end{aligned}$$

Sea $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Entonces, por (*) y (**) se tiene que

$$| H_T(u_\alpha, v_\alpha) - H_T(u, v) | \leq \varepsilon, \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0.$$

Por tanto, $H_T(u_\alpha, v_\alpha) \longrightarrow H_T(u, v)$. Luego, por la proposición 1.1, H_T es continua en (u, v). Así concluimos que $H_T \in C(U \times V)$, pues (u, v) fue tomado arbitrariamente en $U \times V$. □

Proposición 3.2. *La aplicación*

$$H\colon K(X, Y) \longrightarrow C(U \times V).$$
$$T \longmapsto H_T$$

define una isometría entre $K(X, Y)$ *y un subespacio cerrado de* $C(U \times V)$.

Demostración: El lema anterior garantiza que H está bien definida. Para probar la linealidad, sean $T_1, T_2 \in K(X, Y)$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces, para cada $(u, v) \in U \times V$ se tiene

$$\begin{aligned} H(T_1 + \lambda T_2)(u, v) &= H_{T_1+\lambda T_2}(u, v) = u(T_1 + \lambda T_2)^*(v) \\ &= u(T_1^* v + \lambda T_2^* v) = u(T_1^* v) + \lambda u(T_2^* v) \\ &= H_{T_1}(u,v) + \lambda H_{T_2}(u,v) \end{aligned}$$

Así queda probado que $H(T_1 + \lambda T_2) = H(T_1) + \lambda H(T_2)$.

Ahora, sea $T \in K(X, Y)$ arbitrario pero fijo. Por el corolario 1.3, $\| T^* v \| = \sup_{u \in U} | u(T^* v) |$ para cada $v \in V$. Entonces, se sigue que

$$\sup_{v \in V}\left(\sup_{u \in U} | u(T^* v) | \right) = \sup_{v \in V} \| T^* v \| = \| T^* \| = \| T \|. \qquad (*)$$

Luego,

$$\| T \| \overset{(*)}{=} \sup_{v \in V}\left(\sup_{u \in U} | u(T^* v) | \right) = \sup_{(u,v) \in U \times V} | u(T^* v) \| = \| H_T \| ,$$

lo cual implica que H es una isometría. En particular, se tiene que $H(K(X, Y))$ es un subespacio cerrado de $C(U \times V)$. □

Antes de demostrar el teorema más importante de esta sección, definiremos una topología en el conjunto $Y^X = \{f\colon X \longrightarrow Y\}$, conocida como topología de la convergencia puntual, donde X e Y son espacios topológicos.

Definición 3.4. *Sean X e Y dos espacios topológicos. Para cada $x \in X$ y cada abierto A en Y, se define $Q(x, A) = \{f \in Y^X; f(x) \in A\}$. La colección $\{Q(x, A); x \in X, A$ abierto en $Y\} \subset \mathcal{P}(Y^X)$ forma una subbase para una topología en Y^X denominada topología de la convergencia puntual.*

De ahora en adelante, cuando en Y^X se considere la topología de la convergencia puntual, diremos que Y^X está provisto de la topología $\mathcal{P}$.

Observación 3.3. Si Y es un espacio de Hausdorff, $(Y^X, \mathcal{P})$ es un espacio de Hausdorff. En efecto, si $f_1 \neq f_2$, existe x en X tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$. Como Y es de Hausdorff, existen A_1 y A_2, abiertos disjuntos en Y, tales que $f_1(x) \in A_1$ y $f_2(x) \in A_2$. Entonces, $Q(x, A_1) \cap Q(x, A_2) = \emptyset$, pues $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Y, dado que $f_1 \in Q(x, A_1)$ y $f_2 \in Q(x, A_2)$, concluimos que $(Y^X, \mathcal{P})$ es un espacio de Hausdorff.

Una consecuencia directa de la definición de convergencia puntual es que una red $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ en Y^X converge a una función $f_0 \in Y^X$ si y solo si $f_\alpha(x)$ converge a $f_0(x)$ para cada $x \in X$.

Nótese que $C(U \times V)$ es un subconjunto de $\mathbb{K}^{U \times V}$. Por esta razón, en $C(U \times V)$ podemos considerar la topología inducida por la topología $\mathcal{P}$ de $\mathbb{K}^{U \times V}$. Se puede verificar sin dificultad que $(C(U \times V), \mathcal{P})$ es un espacio vectorial topológico. Además, $\mathbb{K}^{U \times V}$ es un espacio de Hausdorff desde que $\mathbb{K}$ es también un espacio de Hausdorff. Luego, por la proposición 1.3, todo subconjunto $\mathcal{P}$-compacto es $\mathcal{P}$-cerrado.

El siguiente teorema es de vital importancia para la demostración del resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2. *Sea S un subconjunto compacto de un espacio topológico X. Para que un subconjunto $A \subset C(S)$ sea débilmente relativamente compacto, es decir, para que $\overline{A}^{\sigma(C(S), C(S)^*)}$ sea $\sigma(C(S), C(S)^*)$-compacto es necesario y suficiente que A sea acotado (en la norma) y relativamente compacto en la topología de la convergencia puntual de $C(S)$.*

Demostración: Revisar [7], pág. 45. □

Teorema 3.3. *Sea K un subconjunto de $K(X, Y)$. Entonces, K es $\mathcal{W}'$-compacto si y solo si K es $\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$-compacto.*

Demostración: Tomemos un subconjunto K en $K(X, Y)$ que sea $\mathcal{W}'$-compacto. Consideremos el conjunto $H(K) = \{H_T;\, T \in K\}$, donde H es la función definida en la proposición 3.2; además, sea $(H_{T_\alpha})_{\alpha\in\mathcal{D}}$ una red en $H(K)$. Como K es $\mathcal{W}'$-compacto, el teorema 1.3 garantiza la existencia de una subred $(T_\beta)_{\beta\in\mathcal{D}'}$ de $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ y de un elemento $T_0 \in K$ tales que $T_\beta \xrightarrow{\mathcal{W}'} T_0$. Y, como $(T_\beta)_{\beta\in\mathcal{D}'}$ converge a T_0 en la topología $\mathcal{W}'$, tenemos que

$$x^{**}(T_\beta^* y^*) \longrightarrow x^{**}(T_0^* y^*) \text{ para todo } (x^{**},\, y^*) \in X^{**} \times Y^*.$$

Dado que $U \subset X^{**}$ y $V \subset Y^*$, vemos que $u(T_\beta^* v) = H_{T_\beta}(u,v) \longrightarrow H_{T_0}(u,v) = u(T_0^* v)$ para todo $(u, v) \in U \times V$. Esto significa que $H_{T_\beta} \xrightarrow{\mathcal{P}} H_{T_0}$ en $C(U \times V)$. Luego, utilizando nuevamente el teorema 1.3, concluimos que $H(K)$ es $\mathcal{P}$-compacto. Por otro lado, como K es $\mathcal{W}'$-compacto, para cada $(x^{**},\, y^*) \in X^{**} \times Y^*$ podemos encontrar $A = A(x^{**}, y^*) = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\} \subset K$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{N}(T_i; x^{**}; y^*; 1),$$

donde $\mathcal{N}(T_i; x^{**}; y^*; 1) = \{R \in \mathcal{L}(X, Y);\, |\, x^{**}(R - T_i)^* y^* \,| < 1\}$. Sea $\rho = 1 + \max_{1\le i\le n} |\, x^{**}(T_i^* y^*)\,|$.

Dado $T \in K$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$, $1 \le i_0 \le n$, tal que $T \in \mathcal{N}(T_{i0}; x^{**}; y^*; 1)$. Así tenemos que

$$|\, x^{**}(T^* y^*)\,| - |\, x^{**}(T_{i_0}^* y^*)\,| \le |\, x^{**}(T^* y^*) - x^{**}(T_{i_0}^* y^*)\,| < 1.$$

De donde se concluye que $|\, x^{**}(T^* y^*)\,| < \rho$ para todo $T \in K$. De este modo, para cada $y^* \in Y^*$ fijado, existe $\rho(x^{**}, y^*) = \rho > 0$ tal que

$$|\, x^{**}(T^* y^*)\,| < \rho \text{ para todo } T \in K.$$

Esto significa que $x^{**}(A_{y^*})$ es un subconjunto acotado de K para todo $x^{**} \in X^{**}$, donde $A_{y^*} = \{T^* y^*;\, T \in K\}$. Se sigue, por el teorema 1.7, que A_{y^*} es un subconjunto acotado de X^* para cada $y^* \in Y^*$. Luego existe $M(y^*) = M > 0$ tal que $\|\, T^* y^* \,\| < M$ para todo $T \in K$. Así, se tiene

$$\sup_{T\in K} \|\, T^* y^* \,\| < \infty \text{ para cada } y^* \in Y^*.$$

Entonces, por el teorema de Banach-Steinhaus (teorema 1.6) se tiene que $\sup_{T\in K} \|\, T^* \,\| < \infty$.

Recordemos que $\|\, T^* \,\| = \|\, T \,\| = \|\, H_T \,\|$. Esto implica que $H(K)$ es acotado en $C(U \times V)$.

Así, $H(K)$ es compacto en la topología $\mathcal{P}$ y acotado en la topología de la norma. De ahí, por el teorema 3.2, se desprende que

$$\overline{H(K)}^{\sigma(C(U\times V),\, C(U\times V)^*)} \text{ es } \sigma(C(U\times V),\, C(U\times V)^*)\text{-compacto.}$$

Sea $f \in \overline{H(K)}^{\sigma(C(U\times V),\, C(U\times V)^*)}$. Entonces, es posible encontrar una red $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}} \subset K$ tal que $\phi(H_{T_\alpha}) \longrightarrow \phi(f)$ para todo $\phi \in C(U\times V)^*$. Además, como K es $\mathcal{W}'$-compacto, existe una subred $(T_\beta)_{\beta\in\mathcal{D}'}$ de $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ y un elemento $T_1 \in K$ tales que $T_\beta \xrightarrow{\mathcal{W}'} T_1$.

Luego, se tiene que $H_{T_\beta}(u,v) \longrightarrow H_{T_1}(u,v)$ para todo $(u, v) \in U\times V$.

Ahora, para cada $(u, v) \in U\times V$ definamos la siguiente aplicación lineal:

$$\delta_{(u,v)}: C(U\times V) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$g \longmapsto \delta_{(u,v)}(g) = g(u, v)$$

Además, se tiene que

$$|\delta_{(u,v)}(g)| = |g(u,v)| \leq \sup_{(u_0,v_0)\in U\times V} |g(u_0,v_0)| = \|g\|,$$

donde $\delta_{(u,v)} \in C(U\times V)^*$. Así, $H_{T_\alpha}(u,v) = \delta_{(u,v)}(H_{T_\alpha}) \longrightarrow \delta_{(u,v)}(f) = f(u,v)$ y, por tanto, $H_{T_\beta}(u,v) \longrightarrow f(u,v)$ para todo $(u, v) \in U\times V$.

Así se tiene $f = H_{T_1}$, donde $T_1 \in K$; es decir, $f \in H(K)$. Luego, $H(K) = \overline{H(K)}^{\sigma(C(U\times V),\, C(U\times V)^*)}$, que es compacto en la topología débil. Por tanto, $H(K)$ es $\sigma(C(U\times V),\, C(U\times V)^*)$-compacto.

Por otro lado, recordemos que la aplicación

$$H: K(X, Y) \longrightarrow C(U\times V)$$
$$T \longmapsto H_T$$

es una isometría entre $K(X, Y)$ y un subespacio cerrado de $C(U\times V)$. Esto implica la buena definición de la aplicación inversa

$$H^{-1}: H(K(X, Y)) \longrightarrow K(X, Y)$$
$$H_T \longmapsto H^{-1}(H_T) = T.$$

Ahora, probaremos que H^{-1} es $\sigma(C(U\times V), C(U\times V)^*)$-$\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$ continua usando la proposición 1.1. En efecto, sea $H_{T_0} \in H(K(X,Y))$ y tomemos una red $(H_{T_\alpha})_{\alpha\in\mathcal{D}}$ en $H(K(X, Y))$ tal que $\varphi(H_{T_\alpha}) \longrightarrow \varphi(H_{T_0})$ para todo $\varphi \in C(U\times V)^*$, donde $H_{T_0} \in H(K(X,Y))$.

Para cada $\rho \in K(X, Y)^*$ podemos definir

$$\tilde{\rho}: H(K(X, Y)) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$H_T \longmapsto \tilde{\rho}(H_T) = \rho(T).$$

Observemos que

$$|\tilde{\rho}(H_T)| = |\rho(T)| \le \|\rho\|\,\|T\| = \|\rho\|\,\|H_T\|.$$

De la relación anterior se desprende que $\tilde{\rho} \in H(K(X, Y))^*$. Luego, por el teorema 1.5, existe $\widetilde{\rho_1} \in C(U\times V)^*$ tal que $\tilde{\rho}(f) = \widetilde{\rho_1}(f)$ para todo $f \in H(K(X, Y))$.

Como $\widetilde{\rho_1} \in C(U\times V)^*$ y H_{T_α} converge débilmente a H_{T_0}, se tiene que

$$\widetilde{\rho_1}(H_{T_\alpha}) = \tilde{\rho}(H_{T_\alpha}) = \rho(T_\alpha) \longrightarrow \rho(T) = \tilde{\rho}(H_T) = \widetilde{\rho_1}(H_T).$$

Eso significa que $\rho(T_\alpha) \longrightarrow \rho(T_0)$ para todo $\rho \in K(X, Y)^*$. De esta manera se tiene que la aplicación H^{-1} es $\sigma(C(U\times V), C(U\times V)^*)$-$\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$ continua. Luego, por la proposición 1.3, $H^{-1}(H(K)) = K$ es $\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$-compacto, dado que el conjunto $H(K)$ es $\sigma(C(U\times V), C(U\times V)^*)$-compacto.

Para probar la recíproca, basta demostrar que $\mathcal{W}'$ induce en $K(X, Y)$ una topología menos fina que $\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$. Tomemos un $\mathcal{W}'$-abierto básico, es decir, un conjunto de la forma

$$\mathcal{N}(T_0; A^{**}; B^*; \varepsilon) = \{T \in K(X, Y);\ |x^{**}(T - T_0)^* y^*| < \varepsilon,\ x^{**} \in A^{**},\ y^* \in B^*\},$$

donde $A^{**} = \{x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots, x_n^{**}\} \subset X^{**}$, $B^* = \{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\} \subset Y^*$ y ε es un número real positivo arbitrario. Además, se puede comprobar que

$$\mathcal{N}(T_0; A^{**}; B^*; \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}\{T \in \mathcal{L}(X, Y);\ |x_i^{**}(T - T_0)^* y_j^*| < \varepsilon\} \qquad (*)$$

Ahora fijemos $i, j \in \mathbb{N}$, con $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$, y definamos la aplicación lineal

$$\delta_{(x_i^{**}, y_j^*)}: K(X, Y) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$T \longrightarrow \delta_{(x_i^{**}, y_j^*)}(T) = x_i^{**}(T^* y_j^*)$$

Notemos que

$$|\delta_{(x_i^{**},y_j^*)}(T)| \leq \| x_i^{**} \| \| T^* \| \| y_j^* \| = \| x_i^{**} \| \| y_j^* \| \| T \|,$$

lo cual nos indica que $\delta_{(x_i^{**},y_j^*)} \in K(X, Y)^*$. Por otro lado,

$$U(T_0; \delta_{(x_i^{**},y_j^*)}; \varepsilon) = \{T \in K(X,Y); |\delta_{(x_i^{**},y_j^*)}(T - T_0)| < \varepsilon\} = \{T \in K(X,Y); |x_i^{**}(T - T_0)^* y_j^*| < \varepsilon\}$$

Por tanto, por (*) concluimos que $\mathcal{N}(T_0; A^{**}; B^*; \varepsilon)$ es $\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$-abierto. □

Observación 3.4. En la demostración del anterior teorema, se observó que $\mathcal{W}'$ induce en $K(X, Y)$ una topología menos fina que $\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$.

Corolario 3.1. *Si X es reflexivo, un subconjunto $K \subset K(X, Y)$ es* $\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$-compacto *si y solo si es $\mathcal{W}$-compacto.*

Demostración: Es suficiente observar que, desde que X es reflexivo, se tiene $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$. Luego, aplicando el teorema anterior, se obtiene el resultado deseado. □

Antes de enunciar el siguiente teorema (necesario para la prueba del próximo corolario), definiremos el concepto de combinación convexa. Dado un espacio vectorial X y un subconjunto A de X, un elemento $x \in X$ es llamado combinación convexa de A si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, donde $x_i \in A$, $\alpha_i \geq 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Teorema 3.4. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset X$ una sucesión tal que $x_n \xrightarrow{\sigma(X, X^*)} x$. Entonces, existe una sucesión $(S_n)_n$ de combinaciones convexas del conjunto $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ tal que* $\| S_n - x \| \longrightarrow 0$.

Demostración: Revisar [6], pág. 71. □

Corolario 3.2. *Sea $(T_n)_n \subset K(X, Y)$ una sucesión tal que $T_n \xrightarrow{\mathcal{W}'} T$, donde $T \in K(X, Y)$. Entonces, $T_n \longrightarrow T$ débilmente y existe una sucesión $(S_n)_n$ de combinaciones convexas de $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ tal que* $\| S_n - T \| \longrightarrow 0$.

Demostración: Como $T_n \xrightarrow{\mathcal{W}'} T$, se tiene que $K = \{T_n;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{T\}$ es $\mathcal{W}'$-compacto. Luego, por el teorema 3.3, K es $\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$-compacto. Procedamos por reducción al absurdo: supongamos que $T_n \nrightarrow T$ débilmente. Entonces, existe un conjunto $\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$-abierto U tal que $T \in U$ y una subsucesión $(T_{n_j})_j$ de $(T_n)_n$ tal que $T_{n_j} \notin U$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $(T_{n_j})_j \subset K$, por el teorema 1.3 existen una subred $(T_\beta)_\beta$ de $(T_{n_j})_j$ y un elemento $T_0 \in K$ tales que $T_\beta \longrightarrow T_0$ débilmente. Recordemos que $\mathcal{W}'$ induce en $K(X, Y)$ una topología menos fina que $\sigma(K(X, Y), K(X, Y)^*)$. Luego se tiene que $T_\beta \xrightarrow{\mathcal{W}'} T_0$.

Por otro lado, como $(T_\beta)_\beta$ es una subred de $(T_n)_n$, se tiene que $T_\beta \xrightarrow{\mathcal{W}'} T$. Desde que $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{W}')$ es un espacio de Hausdorff, se cumple que $T = T_0$. Así se concluye que $T_\beta \longrightarrow T$ débilmente, lo cual es una contradicción. Por tanto, $T_n \longrightarrow T$ débilmente. Finalmente, el teorema 3.4 implica que existe una sucesión $(S_n)_n$ de combinaciones convexas de $\{T_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\| S_n - T \| \longrightarrow 0$. □

Definición 3.5. *Un espacio de Banach X es llamado espacio de Grothendieck si toda sucesión débil estrella convergente en X^* converge débilmente en X^*.*

El dual del espacio ℓ_∞ es un ejemplo de un espacio de Grothendieck. (Revisar [4], pág. 103). Además, todo espacio de Banach reflexivo es un espacio de Grothendieck.

Teorema 3.5. *Sea X un espacio de Banach. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones*:

a) *X es un espacio de Grothendieck.*

b) *En todo espacio de Banach Y, si $T_n \xrightarrow{\mathcal{W}} T$ en $K(X, Y)$, donde $T \in K(X, Y)$ y $(T_n)_n \subset K(X, Y)$, entonces $T_n \longrightarrow T$ débilmente.*

Demostración: Supongamos que se cumple b). Sea $(x_n^*) \subset X^*$ una sucesión tal que $x_n^* \xrightarrow{\sigma(X^*, X)} x_0^*$ para algún $x_0^* \in X^*$. Tomemos $Y = \mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ tiene la propiedad de Heine-Borel, $X^* = K(X, \mathbb{K})$. Luego, por la definición de la topología débil estrella, se tiene que $x_n^*(x) \longrightarrow x_0^*(x)$, $\forall\, x \in X$.

Además, se puede notar que $y^*(x_n^*(x)) \longrightarrow y^*(x_0^*(x))$, $\forall\ (x, y^*) \in X \times \mathbb{K}^*$, lo cual implica que $x_n^* \xrightarrow{w} x_0^*$. Luego, por la hipótesis, $x_n^* \xrightarrow{\sigma(X^*, X^{**})} x_0^*$. De aquí vemos que toda sucesión débil estrella convergente en X^* es débilmente convergente.

Ahora supongamos que se cumple a). Sean $(T_n)_n \subset K(X, Y)$ y $T_0 \in K(X, Y)$ tales que $T_n \xrightarrow{w} T_0$. Por la definición de la topología $\mathcal{W}$, se tiene que

$$y^*(T_n(x)) \longrightarrow y^*(T_0(x)),\ \forall\ (x, y^*) \in X \times Y^*. \qquad (*)$$

Por la definición de operador adjunto, para cada $y^* \in Y^*$, se tiene que

$$y^* \circ T_0 = T_0^*(y^*)$$

$$y^* \circ T_n = T_n^*(y^*),\ \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así, por la igualdad anterior y por (*), vemos que $T_n^*(y^*) \xrightarrow{\sigma(X^*, X)} T_0^*(y^*)$ para cada $y^* \in Y^*$.
Y como X es un espacio de Grothendieck se tiene que

$$T_n^*(y^*) \xrightarrow{\sigma(X^*, X^{**})} T_0^*(y^*),\ \forall\ y^* \in Y^*.$$

Luego,

$$x^{**}(T_n^*(y^*)) \longrightarrow x^{**}(T_0^*(y^*)),\ \forall\ (x^{**}, y^*) \in X^{**} \times Y^*;$$

es decir, $T_n \xrightarrow{w'} T_0$. Finalmente, por el corolario 3.2, $T_n \longrightarrow T_0$ débilmente. □

Bibliografía

[1] Bessaga, C. & Pelczynski, A. (1958) Some remarks on conjugate spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Math. Astr. Phys, 6*, 249-250.

[2] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer.

[3] Day, M. (1962). *Normed linear spaces*. Springer-Verlag Berlin.

[4] Diestel, J. (1984). *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer-Verlag New York.

[5] Dunford, N. & Schwartz, J. (1988). *Linear Operators*. John Wiley & Sons.

[6] Fabian M., Habala, F., Hájek, P., Montesinos, V., Pelant, J., Zizler, V. (2001). *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*. Springer-Verlag New York.

[7] Floret, K. (1980). *Weakly Compact Sets*. Springer.

[8] Gatica, G. (2014). *Introducción al análisis funcional. Teoría y aplicaciones*. Editorial Reverté.

[9] Kadets, M. & Kadets, V. (1997) *Series in Banach Spaces*. *Conditional and Unconditional Convergence*. Birkhäuser Verlag.

[10] Kalton, N. (1974). Spaces of compact operators. *Math. Ann, 208*, 267-278.

[11] Kelley, J. (1955). *General Topology*. Springer.

[12] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.

[13] Lima, E. (1993). *Espaços métricos*. Projeto Euclides.

[14] Munkres, J. (2002). *Topología 2.ª edición*. Prentice Hall.

[15] Rosenthal, H. (1970). On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory. *Studia Mathematica, 37* (1), 13-36.

[16] Wojtaszczyk, P. (1996). *Banach spaces for analysts*. Cambridge University Press.