Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Acotación de la solución límite de una EDO no lineal con un argumento avanzado mediante desigualdades integrales

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Marco Antonio ENCISO SIVIRICHE

ASESOR

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Enciso, M. (2022). *Acotación de la solución límite de una EDO no lineal con un argumento avanzado mediante desigualdades integrales*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Marco Antonio Enciso Siviriche
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	41170456
URL de ORCID	**No aplica**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9177-1561
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08249640
Datos de investigación	
Línea de investigación	Matemática aplicada: Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales

Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	No aplica
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: 12.059032 Longitud: -77.082164
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Abril – julio 2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:00 horas del sábado 23 de julio del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I): Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (PRESIDENTE), Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**ACOTACIÓN DE LA SOLUCIÓN LÍMITE DE UNA EDO NO LINEAL CON UN ARGUMENTO AVANZADO MEDIANTE DESIGUALDADES INTEGRALES**", presentado por el señor **Bachiller Marco Antonio Enciso Siviriche**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de **diecisiete (17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Marco Antonio Enciso Siviriche** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 11:30 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE

Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
MIEMBRO

Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO ASESOR

DEDICATORIA

Mi tesis se la dedico a mi madre, quien siempre me ha apoyado y me ha enseñado con el ejemplo a no rendirse ante las adversidades.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a mi madre quien siempre me esta apoyando y me da el empujón cuando lo necesito, a mis hermanos Jessica y Cristhyan quienes me apoyaron cuando lo necesite y al Sr. Segundo quien también me aconseja cuando lo necesito.

A mi asesor, el Magister Willy David Barahona Martínez por haberme dedicado su tiempo y orientación para culminar con éxito mi tesis.

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por haberme aceptado a ser parte de ella, también a mis profesores quienes me exigieron para convertirme en el profesional que soy.

Finalmente agradezco a mis compañeros y amigos, ya que con su amistad y apoyo moral, me han ayudado a dar paso a paso a lo largo de esta carrera para poder culminarla.

RESUMEN

Acotación de la Solución Límite de una EDO no Lineal con un Argumento Avanzado Mediante Desigualdades Integrales

Marco Antonio, Enciso Siviriche

Julio - 2022

Asesor : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

El presente trabajo de tesis tiene por objetivo general, bajo supuestos y condiciones de acotación, encontrar una acotación para la solución límite del problema de valor final de la ecuación diferencial no lineal con argumento avanzado.

$$\left\| \begin{array}{l} px^{p-1}(t)x'(t) = H\big(t, x(t+\sigma)\big) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ x(\infty) = x_\infty. \end{array} \right.$$

donde $p \geq 1, \sigma \in \mathbb{R}^+$ son constantes, $H \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ y $x_\infty \in \mathbb{R}^+$.

Palabras claves:

Solución limite, acotación de una solución, EDO no lineal, desigualdades integrales, argumento avanzado.

ABSTRACT

Bounding the Limit Solution of a Nonlinear ODE with an Advanced Argument Using Integral Inequalities

Marco Antonio, Enciso Siviriche

July - 2022

Adviser : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Obtained : Graduate in Mathematics.

The general objective of this thesis work, under bounded assumptions and conditions, is to find a bound for the limit solution of the final value problem of the nonlinear differential equation with an advanced argument.

$$\left\| \begin{array}{l} px^{p-1}(t)x'(t) = H\big(t, x(t+\sigma)\big) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ x(\infty) = x_\infty. \end{array} \right.$$

where $p \geq 1, \sigma \in \mathbb{R}^+$ they are constant, $H \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ and $x_\infty \in \mathbb{R}^+$.

Keywords:

Limit solution, bounding a solution, nonlinear ODE, integral inequalities, advanced argument.

INDICE GENERAL

Introducción

En los últimos tiempos, la existencia de una gran cantidad de aplicaciones a la vida cotidiana están estimulando un rápido desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales e integrales, y a su vez las desigualdades integrales; cada caso con sus respectivos métodos y herramientas que son desarrollados por diferentes investigadores para estudiar varios tipos de desigualdades integrales.

Es conocido que las desigualdades integrales que involucran funciones de una y más de una variable independiente que aportan límites explícitos a funciones desconocidas, desempeñan un rol fundamental en el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales, desigualdades integrales no lineales de tipo Volterra-Fredholm [1] y [12], desigualdades de Gronwall retardada [2], [3], [4] y [9]. A través de los años muchos estudiosos han encontrado y desarrollado una serie de desigualdades integrales, que fueron motivadas por ciertas aplicaciones.

En este artículo, seguimos las ideas seguidas por diferentes investigadores y, con esto desarrollamos algunas desigualdades integrales no lineales con un argumento avanzado que arroja límites explícitos en funciones desconocidas; estas desigualdades pueden ser utilizadas como herramientas en la teoría cualitativa de ciertas ecuaciones diferenciales no lineales avanzadas y ecuaciones diferenciales parciales.

Diversos trabajos presentados en [7], [11], [13],[14], [17], [18] y [19]proporcionan el estudio de acotaciones y limites explícitos de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales e integrales, así como las generalizaciones respectivas. Estos trabajos previos utilizaremos como instrumentos que nos permitirán llegar al objetivo general. El método de las desigualdades integrales con estimaciones explícitas es una herramienta muy poderosa para estudiar varias propiedades de soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales. Motivado por el deseo de aplicar tales desigualdades a numerosas aplicaciones, en los últimos años, una serie de nuevas desigualdades han sido investigadas en [5], [6], [8], [15] y [16]. En esta monografía mostramos algunas desigualdades integrales fundamentales, que pueden ser utilizadas como herramientas fundamentales en el análisis de ciertas clases de ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrodiferenciales, a su vez mostraremos una aplicación inmediata de una desigualdad integral con argumento avanzado.

Uno de los pocos artículos que estudiaron las desigualdades integrales con argumento avanzado es [10], del cual seguiremos las ideas dadas, las cuales vamos a enriquecer y logramos desarrollarlo de manera didáctica para que un estudiante de matemática interesado de este tema lo comprenda muy fácilmente; en el análisis cualitativo de algunas clases de ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales, los límites proporcionados por ciertas desigualdades no son lo suficientemente útiles, motivo por el cual resulta necesario buscar algunas nuevas desigualdades integrales para lograr una diversidad de resultados deseados.

Motivados por la aplicabilidad de las desigualdades integrales con argumento avanzado, ya que es muy poco lo que se ha avanzado en este tema. Estamos convencidos que el desarrollo teórico-práctico del presente trabajo, permitirá que otros investigadores continúen y mejoren la metodología que abordamos al tratar las desigualdades integrales en estudio.

1 Preliminares

1.1. Definiciones Previas

Las ecuaciones diferenciales cumplen un rol muy importante de las matemáticas puesto que con ellas se desarrollan los modelos matemáticos para fenómenos de la naturaleza y vida humana, animal y vegetal. Si tenemos una función $y = f(x)$, su derivada representa la variación o cambio de la variable dependiente y respecto de la independiente x. De esta manera, podemos intuir muchos fenómenos naturales. Por lo tanto, el objeto prioritario de las ecuaciones diferenciales es permitir el estudio de los cambios en multitud de aspectos de la ciencia y de la técnica.

Definición 1.1. *Una **ecuación diferencial**, es aquella ecuación donde aparece una función desconocida con una o más de sus derivadas.*

Si la función depende sólo de una variable independiente, entonces la ecuación recibe el nombre de ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Definición 1.2. ***(Tipos de EDO)***

a) Llamaremos ***Ecuación diferencial ordinaria:***, cuando la función inc'ognita solo depende de una variable independiente, las derivadas que estan presentes en esta ecuación es una derivada ordinaria, por lo que decimos que se trata de una ecuación diferencial ordinaria (EDO). Las representamos de dos maneras:

   i) Ecuación en ***forma implícita:***, la derivada de mayor orden no aparece despejada

   $$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

   Ejemplo 1.1. $x^2y'' - 3xy = 0, \qquad y''' + 4x^2y' + 5ycosx = 0$

   ii) Ecuación en ***forma normal:***, pues aparece despejada la derivada de mayor orden.

   $$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$$

Ejemplo 1.2. $y'' = 4xy + senx, \quad y''' = -6xy'' - cosx$

b) Llamaremos ***ecuación en derivadas parciales***, cuando la función desconocida depende de más de una variable, es decir, las derivadas que aparecen en la ecuación son derivadas parciales, por lo que decimos que se trata de una ecuación en derivadas parciales (EDP).

Ejemplo 1.3. *Sea $z = f(x,y)$, dos ecuaciones en derivadas parciales son:*

$$1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \qquad 2) \quad \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z$$

Definición 1.3. ***(EDO Lineal).*** *Una EDO lineal de orden n es una ecuación en la que la derivada $n-$ésima de la variable y es una función lineal de las demás derivadas y de la propia función y, es decir, es de la forma:*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.4. *La ecuación diferencial:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

La EDO es lineal, porque los términos con derivadas no estan afectadas de un exponente mayor a 1, de una función exponencial, logarítmica, trigonométrica, ni multiplicada por alguna función que dependa de y y sus derivadas.

Ejemplo 1.5. ***(EDO No Lineal).*** *La ecuación diferencial*

$$xtan(y^2) + y' = x + cos(x) \tag{1.2}$$

no es lineal; porque en la ecuación la variable y aparece como argumento de la función tangente.

Definición 1.4.

Llamamos **solución** de una EDO a toda función $y = f(x)$ que satisface dicha ecuación diferencial

Ejemplo 1.6. *Verifique, que la función $y = sen(x)$ es una solución de la ecuación $y'' + y = 0$.*

Tomando en cuenta la función $y = sen(x)$, tenemos:

$$y' = cos(x), \quad y'' = -sen(x) \tag{1.3}$$

sustituyendo en la EDO tenemos

$$-sen(x) + sen(x) = 0 \tag{1.4}$$

De la misma manera comprobamos que $y = cos(x)$ también es solución.
En general, $y' = C_1sen(x) + C_2cos(x)$, son funciones solución para todo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; ya que

$$y' = C_1cos(x) - C_2sen(x), \quad y'' = -C_1sen(x) - C_2cos(x) \tag{1.5}$$

y sustituyendo en la EDO, conseguimos

$$-C_1sen(x) - C_2cos(x) + C_1sen(x) + C_2cos(x) = 0. \tag{1.6}$$

Ejemplo 1.7. *Dada la ecuación diferencial $y' - y = 0$, las funciones $y = Ce^x$ son soluciones de ella para todo $C \in \mathbb{R}$, como se comprueba fácilmente.*

Definición 1.5. *PVI - PVF*

Si todas las condiciones del problema se refieren a un mismo valor de x, se denomina problema con condiciones o valores iniciales, también es conocido como Problema de Cauchy.

Ejemplo 1.8. *PVI:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \tag{1.7}$$

Si las condiciones dadas se refieren a valores diferentes de x, se denomina problema con condiciones de valores en la frontera o de contorno.

Ejemplo 1.9. *PVF:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 5 \tag{1.8}$$

1.2. Existencia y Unicidad de Soluciones

La solución general de una ecuación diferencial es una familia de funciones, puede presentarse como un problema de valores iniciales (PVI) o como un problema con condiciones de frontera (PVF). Veamos los problemas con valores iniciales en ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado. Ante un problema de este tipo podemos plantearnos dos preguntas:

I. ¿Existe solución al problema?

II. ¿Existe una región del plano donde para cada (x_0, y_0) sea posible encontrar una y solo una curva integral de la ecuación que pase por él?

Es decir, se plantea la posibilidad de resolver:

$$\left\| \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{array} \right.$$

Como ya sabemos, este tipo de planteamientos reciben el nombre de problemas de condición inicial o problemas de Cauchy. La respuesta a las preguntas planteadas la recoge el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *(Teorema de Existencia y Unicidad). Dada la ecuación $y' = f(x, y)$, si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo Ω del plano, por cada (x_0, y_0) de él pasará una única curva integral de la ecuación.*

Demostración: Ver [21], pág.15.

Notas

1) Obsérvese que las condiciones dadas son suficientes; pero no necesarias, es decir, en el caso en que no se verifique alguna de las condiciones establecidas en el teorema, no podemos conocer si existe solución única o no al problema planteado. Puede ocurrir cualquier cosa.

2) El teorema hace referencia a una solución local de la ecuación en un punto determinado, no a una solución general.

3) Existe un enunciado general de este teorema (también llamado Teorema de Picard) válido para toda ecuación y sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo 1.10. *Aplicar el teorema de existencia y unicidad a la siguiente ecuación*

$$y' = xy + e^{-y}$$

Tenemos la función $f(x, y) = xy + e^{-y}$, la cual es continua $\forall(x, y)$, y $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ es también continua $\forall(x, y)$. Así, por cualquier punto del plano, existe una y solo una curva que pasa por el punto y, esta es la solución de la ecuación.

1.3. Espacio de Funciones Continuas

Definición 1.6. ***(Función No negativa).*** *Se dice que una función f es no negativa si $f(x) \geq 0$, para todo $x \in Dom(f)$.*

El gráfico de f se encuentra arriba del eje x o sobre el eje x.

Ejemplo 1.11. *$f(x) = x^2$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, es una función no negativa.*

Conocemos que su gráfica es una parábola, sentada sobre el eje x.

Definición 1.7. ***(Función Continua).*** *Una función f es **continua en** p, si*

- *$f(p)$ está definida,*
- *$\lim\limits_{x \to p} f(x)$ existe,*
- *$\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.*

Si alguna de estas tres condiciones no se cumple se dice que f no es continua en p.

Si f no es continua en p, decimos que f es **discontinua en** p.

Ejemplo 1.12. *Tenemos las siguientes funciones:*

(a) La función $f(x) = 3x - 2$ es continua en todo su dominio.

(b) La función constante $f(x) = k$ es continua en todo su dominio.

(c) La función $f(x) = |x|$ es continua en todo su dominio.

(d) La función $f(x) = e^x + 2$ es continua en todo su dominio.

(e) La función $f(x) = x^2 + x$ es continua en todo su dominio.

(f) La función $f(x) = x^3$ es continua en todo su dominio.

(g) La función $f(x) = Ln(x)$ es continua en todo su dominio.

Definición 1.8. ***(Espacio** $C(X)$**).***
El espacio de funciones continuas definidas sobre el intervalo $[a, b]$, es denotada por

$$C\big([a, b]\big) = \Big\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \ \textit{es contínua} \Big\}$$

1.4. Principales Desigualdades

1.4.1. Desigualdad de Young

Lema 1.1. ***(Desigualdad de Young).*** *Sean p, $q \in \langle 1, +\infty \rangle$ tales que, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces para todo a, $b \geqslant 0$ se cumple:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demostración:

Sea $a > 0$, $b > 0$ y $1 > p$, $q < +\infty$ tales que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

como $log(x)$ es cóncava, entonces:

$$\begin{aligned} log\Big(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\Big) &\geqslant \frac{1}{p}log(a) + \frac{1}{q}log(b) \\ &= log(a^{\frac{1}{p}}) + log(b^{\frac{1}{q}}) \\ &= log(a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}}) \end{aligned}$$

por lo que:

$$log\Big(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\Big) \geqslant log\Big(a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}}\Big)$$

como $log(x)$ es creciente, entonces:

$$\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \geqslant a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}}$$

■

Lema 1.2. *Sean $p \geqslant 1, a \geqslant 0$, entonces:*

$$a^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{p}k^{\frac{1-p}{p}}a + \frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}}\right)$$

para cualquier $k > 0$.

Demostración:

Si $p = 1$ no hay nada que probar, pues:

$$\begin{aligned}
&a^{\frac{1}{1}} \leqslant (\frac{1}{1}k^{\frac{1-1}{1}}a + \frac{1-1}{1}k^{\frac{1}{1}}) \\
&a^{1} \leqslant (k^{0}a + \frac{0}{1}k^{1}) \\
&a \leqslant a
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $p > 1$, entonces $0 < \dfrac{1}{p} < 1$.

Sea $q > 1$ el conjugado de p, es decir $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Por la desigualdad de Young, para $a \geqslant 0$ y $k > 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
a^{\frac{1}{p}}k^{\frac{1}{q}} &\leqslant \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}k \\
a^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}k\right)k^{-\frac{1}{q}} \\
a^{\frac{1}{p}} &\leqslant \frac{1}{p}ak^{-\frac{1}{q}} + \frac{1}{q}kk^{-\frac{1}{q}} \\
a^{\frac{1}{p}} &\leqslant \frac{1}{p}ak^{-\frac{1}{q}} + \frac{1}{q}k^{\left(1-\frac{1}{q}\right)} \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

como:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

obtenemos las siguientes igualdades:

$$-\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \qquad (1.10)$$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \qquad (1.11)$$

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} \tag{1.12}$$

finalmente, reemplazando (1.10), (1.11) y (1.12) en (1.9) tenemos:

$$a^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p} k^{\frac{1-p}{p}} a + \frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}}.$$

$\blacksquare$

1.4.2. Desigualdad de Gronwall

Lema 1.3. ***(Desigualdad de Gronwall)***

Sean $f, g \geqslant 0$ funciones no negativas definidas en $\langle 0, +\infty\rangle$ y $C \geqslant 0$ una constante real. Supongamos que:

$$f(x) \leqslant C + \int_0^x f(s)g(s)ds < +\infty \tag{1.13}$$

entonces:

$$f(x) \leqslant C\, e^{\int_0^x g(s)ds} \tag{1.14}$$

Demostración:

Definamos:

$$F(x) = C + \int_0^x f(s)g(s)ds \tag{1.15}$$

y supongamos que $C > 0$, por el teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$F'(x) = f(x)g(x) \tag{1.16}$$

Por (1.13) y (1.15) se tiene que $f(x) \leqslant F(x)$, usando esta desigualdad en (1.16) se tiene:

$$F'(x) \leqslant F(x)g(x)$$

como $F(x) \geqslant C > 0$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} \leqslant g(x)$$

Integrando de 0 hasta $x > 0$, se tiene:

$$\int_0^x \frac{F'(s)}{F(s)} ds \leqslant \int_0^x g(s)ds \tag{1.17}$$

así:

$$Ln\big(F(s)\big)\Big|_0^x \leqslant \int_0^x g(s)ds \tag{1.18}$$

evaluando:

$$Ln\big(F(x)\big) - Ln\big(F(0)\big) \leqslant \int_0^x g(s)ds \tag{1.19}$$

evaluemos $F(0)$ en (1.15)

$$\begin{aligned} F(x) =& C + \int_0^x f(s)g(s)ds \\ F(0) =& C + \int_0^0 f(s)g(s)ds \\ F(0) =& C + 0 \\ F(0) =& C \end{aligned}$$

como $F(0) = C$, sustituyendo en (1.19):

$$Ln\big(F(x)\big) \leqslant Ln(C) + \int_0^x g(s)ds \tag{1.20}$$

aplicando exponencial a (1.20)

$$\mathrm{e}^{Ln\big(F(x)\big)} \leqslant \mathrm{e}^{\left(Ln(C) + \int_0^x g(s)ds\right)} \tag{1.21}$$

aplicando propiedades de logaritmo neperiano en (1.21):

$$\mathrm{e}^{Ln\big(F(x)\big)} \leqslant \mathrm{e}^{Ln(C)}\mathrm{e}^{\int_0^x g(s)ds} \tag{1.22}$$

evaluando:

$$F(x) \leqslant C\mathrm{e}^{\int_0^x g(s)ds} \tag{1.23}$$

Como $f(x) \leqslant F(x)$, en (1.23) se tiene:

$$f(x) \leqslant F(x) \leqslant C \mathrm{e}^{\int_0^x g(s)ds} \tag{1.24}$$

finalmente, por transitividad en (1.24) obtenemos:

$$f(x) \leqslant C \mathrm{e}^{\int_0^x g(s)ds}$$

■

Lema 1.4. *Sean $f, g \geqslant 0$ funciones no negativas definidas en $\langle 0, +\infty\rangle$ y $C \geqslant 0$ una constante real.*
Supongase que:

$$f(x) \leqslant C + \int_x^{+\infty} f(s)g(s)ds < +\infty; \qquad (x > 0) \tag{1.25}$$

entonces:

$$f(x) \leqslant C\,\mathrm{e}^{\int_x^{+\infty} g(s)ds}; \qquad (x > 0) \tag{1.26}$$

Demostración:
Hacemos el cambio de variable $z = \dfrac{1}{s}$ y derivando obtenemos:

$$s = \frac{1}{z}; \qquad ds = -\frac{dz}{z^2} \tag{1.27}$$

evaluando en los limites de la integral:

$$\text{si } s = x \Rightarrow z = \frac{1}{x}; \qquad \text{si } s \to +\infty \Rightarrow z \to 0 \tag{1.28}$$

entonces:

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant C + \int_{\frac{1}{x}}^{0} f\left(\frac{1}{z}\right) g\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right) dz \\ &= C + \int_{\frac{1}{x}}^{0} -\left(f\left(\frac{1}{z}\right) g\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) dz \\ &= C + \int_0^{\frac{1}{x}} f\left(\frac{1}{z}\right) g\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right) dz \end{aligned}$$

por lo que

$$f(x) \leqslant C + \int_0^{\frac{1}{x}} f\left(\frac{1}{z}\right) g\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right) dz \tag{1.29}$$

haciendo el cambio

$$f(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{y} \qquad G(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{1.30}$$

sabiendo que $x = \frac{1}{z}$, por (1.28)

$$f(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = F\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)}\right)$$

por lo que

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = F(z) \tag{1.31}$$

sustituyendo (1.30) y (1.31) en (1.29) obtenemos:

$$F\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant C + \int_0^{\frac{1}{x}} F(z)G(z)dz; \qquad \frac{1}{x} > 0 \tag{1.32}$$

usando el lema 1.3 en (1.32) se tiene:

$$F\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant C e^{\int_0^{\frac{1}{x}} G(z)dz} \tag{1.33}$$

devolviendo el cambio (1.30) en (1.33)

$$F\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant C e^{\int_0^{\frac{1}{x}} g\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right) dz} \tag{1.34}$$

ahora consideramos el cambio $s = \dfrac{1}{z}$, y derivemos

$$z = \frac{1}{s}; \qquad\qquad dz = -\frac{1}{s^2}ds \tag{1.35}$$

evaluando en los limites de la integral

$$\text{si } z = \frac{1}{x} \Rightarrow s = x; \qquad\qquad \text{si } z \to 0 \Rightarrow s \to +\infty \tag{1.36}$$

sustituyendo (1.35) y (1.36) en (1.34)

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{x}\right) &\leqslant C\mathrm{e}^{\displaystyle\int_{+\infty}^{x} g(s)\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{s}\right)^2}\right)\left(-\frac{1}{s^2}\right)ds} \\
&= C\mathrm{e}^{\displaystyle\int_{+\infty}^{x} g(s)s^2\left(-\frac{1}{s^2}\right)ds} \\
&= C\mathrm{e}^{\displaystyle\int_{+\infty}^{x} -\left(g(s)s^2\cdot\frac{1}{s^2}\right)ds} \\
&= C\mathrm{e}^{\displaystyle\int_{+\infty}^{x} -g(s)ds} \\
&= C\mathrm{e}^{\displaystyle\int_{x}^{+\infty} g(s)ds}
\end{aligned}$$

por lo que

$$F\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant C\mathrm{e}^{\displaystyle\int_{x}^{+\infty} g(s)ds} \tag{1.37}$$

finalmente devolviendo el cambio (1.30) en (1.37)

$$f(x) \leqslant C\mathrm{e}^{\displaystyle\int_{x}^{+\infty} g(s)ds}$$

■

Lema 1.5. *Asumase que $u(t), a(t)$ y $b(t)$ son funciones no negativas definidas para $t \in \mathbb{R}^+$ y $a(t)$ es no creciente para $t \in \mathbb{R}^+$, si:*

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)u(s)ds, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.38}$$

entonces:

$$u(t) \leqslant a(t)\, e^{\displaystyle\int_t^{+\infty} b(s)ds}, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.39}$$

Demostración:

Sea $\tilde{t} > 0$ fijo y arbitrario.

Por hipótesis tenemos que $a(t)$ es no creciente, entonces se cumple lo siguiente

$$t \geqslant \tilde{t} \Rightarrow a(t) \leqslant a(\tilde{t}) \tag{1.40}$$

como $a(t) \leqslant a(\tilde{t})$

$$a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)u(s)ds \leqslant a(\tilde{t}) + \int_t^{+\infty} b(s)u(s)ds \tag{1.41}$$

por (1.38) y (1.41) se tiene

$$u(t) \leqslant a(\tilde{t}) + \int_t^{+\infty} b(s)u(s)ds \tag{1.42}$$

como $\tilde{t}$ es fijo, entonces $a(\tilde{t})$ es una constante, por lo que podemos usar el lema 1.4 en (1.42)

$$u(t) \leqslant a(\tilde{t})\, e^{\displaystyle\int_t^{+\infty} b(s)ds} \tag{1.43}$$

como $t \in \mathbb{R}^+$ y $\tilde{t} > 0$ podemos tomar $t = \tilde{t}$

$$u(\tilde{t}) \leqslant a(\tilde{t})\, e^{\displaystyle\int_{\tilde{t}}^{\infty} b(s)ds} \tag{1.44}$$

como $\tilde{t} > 0$ es arbitrario, entonces vale para todo t:

$$u(t) \leqslant a(t) e^{\int_t^{\infty} b(s)ds}, \qquad \forall \;\; t > 0$$

$\blacksquare$

2 Resultados Importantes

Con las desigualdades vistas anteriromente, podemos generalizar algunos resultados, principalmente el tipo de desigualdades integrales que involucran términos con argumentos avanzados. De acuerdo a los resultados previos, presentamos las siguientes desigualdades integrales no lineales:

2.1. Desigualdades Integrales no Lineales

Teorema 2.1. *Sean $x(t), a(t), c(t), f(t)$ y $g(t)$ funciones no negativas definidas por $t \in \mathbb{R}^+$. Si $a(t)$ y $c(t)$ son no crecientes en $\mathbb{R}^+$, entonces la desigualdad*

$$x^p(t) \leqslant a(t) + c(t) \int_t^{+\infty} \Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s) \Big) ds, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

implica:

$$x(t) \leqslant \left(a(t) + c(t)h(t)\, e^{\int_t^{+\infty} \frac{f(s)c(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

para cualquier $k > 0$, $t \in \mathbb{R}^+$, donde:

$$h(t) = \int_t^{+\infty} \left(f(s) \left(\frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} \right) + g(s) \right) ds \tag{2.3}$$

Demostración:

Elevando a la pontencia $\dfrac{1}{p}$ en (2.1), tenemos

$$x(t) \leqslant \left(a(t) + c(t) \int_t^{+\infty} \Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s) \Big) ds \right)^{\frac{1}{p}}; \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4}$$

Buscamos una cota superior para $x(t)$, para ello fijamos $\delta \geqslant 0$ y definimos la función $z(t)$ por

$$z(t) = \left(a(t) + \delta + c(t)\int_t^{+\infty}\Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s)\Big)ds\right)^{\frac{1}{p}}; \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

elevando a la p

$$z(t)^p = a(t) + \delta + c(t)\int_t^{+\infty}\Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s)\Big)ds; \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.5}$$

Como $a(t)$, $c(t)$, $f(t)$, $x(t)$ y $g(t)$ son no negativas, la función $z(t)$ es no negativa. Por hipótesis tenemos que $a(t)$ y $c(t)$ son no crecientes, veamos que $z(t)$ es no creciente, en efecto: sea

$$M(t) = \int_t^{+\infty}\Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s)\Big)ds \tag{2.6}$$

con $0 \leqslant r \leqslant t_1$

$$\int_{t_1}^{+\infty}\Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s)\Big)ds \leqslant \int_r^{+\infty}\Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s)\Big)ds \tag{2.7}$$

para $r \leqslant t_1$, (es decir $[r, +\infty\rangle \subset [t_1, +\infty\rangle$), luego, como $M(t_1) \leqslant M(r)$ por (2.7), entonces $M(t)$ es no creciente.

Ahora, como $a(t)$, $c(t)$ y $M(t)$ son no crecientes, entonces $z(t)$ es no creciente por (2.4) y (2.5) observamos que

$$x(t) \leqslant z(t) \tag{2.8}$$

pues $z(t)$ tiene un sumando adicional $\delta \geqslant 0$, es claro que:

$$x(t+\sigma) \leqslant z(t+\sigma) \tag{2.9}$$

luego como $t \leqslant t+\sigma$ y z es no creciente, entonces:

$$z(t+\sigma) \leqslant z(t) \tag{2.10}$$

de (2.9) y (2.10) tenemos:

$$x(t+\sigma) \leqslant z(t+\sigma) \leqslant z(t); \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.11}$$

de (2.5) y (2.11) se tiene:

$$z^p(t) \leqslant a(t) + \delta + c(t) \int_t^{+\infty} \Big(f(s)z(s) + g(s) \Big) ds, \qquad r \in \mathbb{R}^+ \tag{2.12}$$

evaluando el limite cuando $\delta \to 0$ se obtiene:

$$z^p(t) \leqslant a(t) + c(t) \int_t^{+\infty} \Big(f(s)z(s) + g(s) \Big) ds, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.13}$$

ahora, definimos la función $u(t)$ por:

$$u(t) = \int_t^{+\infty} \Big(f(s)z(s) + g(s) \Big) ds, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.14}$$

entonces, podemos reformular (2.13)como:

$$z^p(t) \leqslant a(t) + c(t)u(t)$$

elevando a la $\dfrac{1}{p}$ obtenemos

$$z(t) \leqslant \Big(a(t) + c(t)u(t) \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2.15}$$

aplicando el lema 1.2 en la parte derecha de la desigualdad (2.15), para cualquier $k > 0$ se tiene

$$\Big(a(t) + c(t)u(t) \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p} k^{\frac{1-p}{p}} \cdot \Big(a(t) + c(t)u(t) \Big) + \frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} \tag{2.16}$$

luego, por (2.15) y (2.16)

$$z(t) \leqslant \Big(a(t) + c(t) \cdot u(t) \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p} k^{\frac{1-p}{p}} \Big(a(t) + c(t)u(t) \Big) + \frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}}$$

operando

$$z(t) \leqslant \Big(a(t) + c(t)u(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{c(t)u(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} \tag{2.17}$$

En (2.14), acotando $z(s)$ con (2.17) se tiene:

$$u(t) \leqslant \int_t^{+\infty} \left(f(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{c(s)u(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} \right) + g(s) \right) ds$$

agrupando convenientemente y usando la linealidad de la integral

$$u(t) \leqslant \int_t^{+\infty} \left(f(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} \right) + g(s) \right) ds + \int_t^{+\infty} \frac{c(s)f(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}u(s)ds \tag{2.18}$$

Reemplazando (2.3) en (2.18) se tiene

$$u(t) \leqslant h(t) + \int_t^{+\infty} \frac{f(s)c(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}u(s)ds, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.19}$$

en (2.3) notemos que, por la no negatividad de $f(s)$, $a(s)$ y ademas que $g(s)$, $h(s)$ es no negativa (pues $f(s)$, $a(s)$ y k son no negativas y la integral de una función no negativa es no negativa); además es no creciente, pues si $r \leqslant t$ entonces $h(t) \leqslant h(r)$ (la integral en el intervalo $[t, +\infty\rangle$ es menor que la integral en el intervalo $[r, +\infty\rangle$).

Aplicando el lema 1.5 en la desigualdad de (2.19), tenemos:

$$u(t) \leqslant h(t)\mathrm{e}^{\int_t^{+\infty} \frac{f(s)c(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}ds} \tag{2.20}$$

En la desigualdad (2.13) acotamos con la desigualdad (2.20) para obtener:

$$z(t) \leqslant \left(a(t) + c(t)h(t)\mathrm{e}^{\int_t^{+\infty} \frac{f(s)c(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}ds} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.21}$$

Combinando las desigualdades (2.8) con (2.21) se tiene

$$x(t) \leqslant z(t) \leqslant \left(a(t) + c(t)h(t) e^{\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{f(s)c(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.22}$$

finalmente por transitividad en (2.22)

$$x(t) \leqslant \left(a(t) + c(t)h(t) e^{\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{f(s)c(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \right)^{\frac{1}{p}}$$

■

Teorema 2.2. *Sean: $x(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ y $g(t)$ funciones no negativas para $t \in \mathbb{R}^+$, con $a(t)$ no creciente en $\mathbb{R}^+$, entonces la desigualdad:*

$$x^p(t) \leqslant a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)x^p(s)ds + \int_t^{+\infty} \Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s) \Big) \mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.23}$$

implica:

$$x(t) \leqslant B(t) \left(a(t) + F(t)\, e^{\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{f(s)B(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.24}$$

para cualquier $k > 0$, $t \in \mathbb{R}^+$, donde:

$$B(t) = \left(e^{\displaystyle\int_t^{+\infty} b(s)ds} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.25}$$

$$F(t) = \int_t^{+\infty} \left(f(s)B(s) \left(\frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} \right) + g(s) \right) ds \tag{2.26}$$

Demostración:
Al elevar (2.23) a la $\dfrac{1}{p}$, se tiene

$$x(t) \leqslant \left(a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)x^p(s)ds + \int_t^{+\infty} \Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s)\Big)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.27}$$

Vamos a conseguir una cota superior para $x(t)$, para ello fijamos cualquier $\delta \geqslant 0$ y se define la función

$$z(t) = \left(a(t) + \delta + \int_t^{+\infty} b(s)x^p(s)ds + \int_t^{+\infty} \big(f(s)x(s+\sigma) + g(s)\big)ds\right)^{\frac{1}{p}} \quad , t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.28}$$

como las funciones que intervienen son no negativas, la función $z(t)$ es no negativa; como $a(t)$ es no creciente, y del hecho que para todo $r \leqslant t$:

$$\int_t^{+\infty} b(s)x^p(s)ds \leqslant \int_r^{+\infty} b(s)x^p(s)ds$$

y

$$\int_t^{+\infty} \Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s)\Big)ds \leqslant \int_r^{+\infty} \Big(f(s)x(s+\sigma) + g(s)\Big)ds$$

Se deduce que $z(t)$ es no creciente, además es claro que $x(t) \leqslant z(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ luego se tiene:

$$x(t+\sigma) \leqslant z(t+\sigma) \leqslant z(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.29}$$

aplicando (2.29) en (2.28), obtenemos

$$z^p(t) \leqslant a(t) + \delta + \int_t^{+\infty} b(s)z^p(s)ds + \int_t^{+\infty} \Big(f(s)z(s) + g(s)\Big)ds \tag{2.30}$$

haciendo $\delta \to 0$ se tiene:

$$z^p(t) \leqslant a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)z^p(s)ds + \int_t^{+\infty} \Big(f(s)z(s) + g(s)\Big)ds \tag{2.31}$$

Ahora definamos la función:

$$u(t) = a(t) + v(t) \tag{2.32}$$

donde:

$$v(t) = \int_t^{+\infty} \Big(f(s)z(s) + g(s)\Big)ds \tag{2.33}$$

como $a(t)$ y $v(t)$ son no crecientes, entonces $u(t)$ es no creciente, para $t \in \mathbb{R}^+$, tenemos

$$z^p(t) \leqslant u(t) + \int_t^{+\infty} b(s)z^p(s)ds \tag{2.34}$$

usando el lema 1.5 en (2.34) se tiene:

$$z^p(t) \leqslant u(t)\mathrm{e}^{\int_t^{+\infty} b(s)ds} \tag{2.35}$$

elevando (2.35) a la $\frac{1}{p}$, tenemos

$$z(t) \leqslant u(t)^{\frac{1}{p}} \left(\mathrm{e}^{\int_t^{+\infty} b(s)ds}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.36}$$

por (2.25) se obtiene

$$z(t) \leqslant u(t)^{\frac{1}{p}} B(t) \tag{2.37}$$

sustituyendo (2.32) en (2.37)

$$z(t) \leqslant B(t)\Big(a(t) + v(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2.38}$$

aplicando el lema 1.2 en $\Big(a(t) + v(t)\Big)^{\frac{1}{p}}$ de (2.38), se tiene que para todo $k \geqslant 0$

$$\Big(a(t) + v(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{p} k^{\frac{1}{p}} \left((a(t) + v(t)\right) + \frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}}\right) \tag{2.39}$$

operando (2.39) obtenemos

$$\Big(a(t) + v(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{v(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right) \tag{2.40}$$

acotando (2.38) con (2.40), se tiene:

$$z(t) \leqslant B(t)\Big(a(t) + v(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant B(t) \left(\frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{v(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right) \tag{2.41}$$

por transitividad

$$z(t) \leqslant B(t) \left(\frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{v(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right) \tag{2.42}$$

combinando (2.33) con (2.42) para obtener:

$$v(t) \leqslant \int_t^{+\infty} \left(f(s)B(s) \left(\frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{v(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right) + g(s)\right) ds \tag{2.43}$$

operando (2.43) convenientemente se obtiene

$$v(t) \leqslant \int_t^{+\infty} \left(f(s)B(s) \left(\frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} \right) + g(s) \right) ds + \int_t^{+\infty} \frac{f(s)B(s)v(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds \tag{2.44}$$

usando la igualdad (2.26) en (2.44)

$$v(t) \leqslant F(t) + \int_t^{+\infty} \left(\frac{f(s)B(s)}{p \cdot k^{\frac{p-1}{p}}} \right) v(s) ds \tag{2.45}$$

Como $f(s)$, $B(s)$, $a(s)$, $g(s)$ son no negativas, entonces $F(t)$ es no negativa, es evidente que $F(t)$ es no creciente, pues la función $t \to\mapsto \int_t^{\infty} G(s)\, ds$ es no creciente para cualquier función no negativa $G(s)$. Por el lema (1.5), de la desigualdad (2.45), se tiene:

$$v(t) \leqslant F(t) e^{\int_t^{+\infty} \frac{f(s) \cdot B(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \tag{2.46}$$

Luego, combinando (2.38) con (2.46) se obtiene:

$$z(t) \leqslant B(t) \left(a(t) + F(t) e^{\int_t^{+\infty} \frac{f(s)B(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.47}$$

pero $x(t) \leqslant z(t)$, entonces:

$$z(t) \leqslant x(t) \leqslant B(t) \left(a(t) + F(t) e^{\int_t^{+\infty} \frac{f(s)B(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.48}$$

finalmente, por transitividad en (2.48)se tiene

$$z(t) \leqslant B(t) \left(a(t) + F(t) e^{\int_t^{+\infty} \frac{f(s)B(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \right)^{\frac{1}{p}}$$

■

3 Problema Principal

Estudiaremos la acotación de la solución de una ecuación diferencial ordinaria con un argumento avanzado asociada al problema, bajo ciertas condiciones lograremos dicha acotación.

Consideremos el siguiente problema

$$\left\| \begin{array}{l} px^{p-1}(t)x'(t) = H\big(t, x(t+\sigma)\big) + g(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+ \\ x(+\infty) = x_{+\infty}. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

donde $p \geqslant 1$ y $\sigma \in \mathbb{R}^+$ son constantes, $H \in C\big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$, $g \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, y $x_{+\infty} \in \mathbb{R}^+$. Imponemos la siguiente condición

$$\left\| \begin{array}{l} \big|H\big(t, x(t+\sigma)\big)\big| \leqslant f(t)\big|x(t, x(t+\sigma))\big| + g(t) \\ \left|x^p(+\infty) - \displaystyle\int_t^{+\infty} g(s)ds\right| \leqslant a(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Si $x(t)$ es solución de (3.1), entonces

$$|x(t)| \leqslant \left(a(t) + h(t) e^{\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{f(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

Para cualquier $k > 0$, $t \in \mathbb{R}^+$, donde $a(t)$, $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son definidas como en el teorema 2.1. Para obtener (3.3), demostraremos el siguiente teorema

Teorema 3.1. *Sean $x(t)$, $a(t)$ y $b(t)$ funciones no negativas en $\mathbb{R}^+$, $a(t)$ es una función no creciente en $\mathbb{R}^+$. Donde L, $K \in C\big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\big)$ satisfacen*

$$0 \leqslant L(t,x) - L(t,y) \leqslant K(t,y)(x-y) \tag{3.4}$$

para $x \geqslant y \geqslant 0$, entonces la desigualdad

$$x^p(t) \leqslant a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)x^p(s)ds + \int_t^{+\infty} L\big(s, x(s+\sigma)\big)ds, \qquad t \in \mathbb{R}^+, p \geqslant 1, \sigma \in \mathbb{R}^+$$

implica

$$x(t) \leqslant B(t)\left(a(t) + G(t)\ e^{\displaystyle\int_t^{+\infty}\left[K\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\frac{B(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right]ds}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.5}$$

para cualquier $k > 0$, donde

$$G(t) = \int_t^{+\infty} L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)ds \tag{3.6}$$

y

$$B(t) = \left(e^{\displaystyle\int_t^{+\infty} b(s)ds}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.7}$$

Demostración:

Para $\delta \geqslant 0$ fijo arbitrario y $p \geqslant 1$ definimos la siguiente función:

$$z(t) = \left(a(t) + \delta + \int_t^{+\infty} b(s)x^p(s)ds + \int_t^{+\infty} L\big(s, x(s+\sigma)\big)ds\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.8}$$

entonces

$$\begin{aligned} x^p(t) &\leqslant a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)x^p(s)ds + \int_t^{+\infty} L\big(s, x(s+\sigma)\big)ds \\ &\leqslant a(t) + \delta + \int_t^{+\infty} b(s)x^p(s)ds + \int_t^{+\infty} L\big(s, x(s+\sigma)\big)ds \\ &= z^p(t) \end{aligned}$$

luego,

$$x^p(t) \leqslant z^p(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ p \geqslant 1.$$

La función $z(t)$ es no negativa, pues $a(t)$, $b(t)$, $x(t)$, $s(t)$ y $L(x,y)$ son no negativas, así mismo $z(t)$ es no creciente pues $a(t)$ y la función

$$t \mapsto \int_t^{+\infty} N(s)ds$$

son no crecientes para $N(t)$ integrable en $[t,+\infty\rangle$, luego se tiene que

$$x(t+\sigma) \leqslant z(t+\sigma) \leqslant z(t), \qquad \sigma, t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.9}$$

En la desigualdad (3.4) notemos que la función $L(t,x)$ es creciente respecto a la segunda variable, pues para $0 \leqslant y \leqslant x$ se tiene que $L(t,y) \leqslant L(t,x)$, entonces para $s, \sigma, t \in \mathbb{R}^+ = [0,+\infty\rangle$, se cumplen:

(1) $x(t) \leqslant z(t)$

(2) $x(s+\sigma) \leqslant z(s)$

(3) $z^p(t) = a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)x^p(s)ds + \int_t^{+\infty} L\big(s, x(s+\sigma)\big)ds + \delta, \quad p \geqslant 1.$

Como L es creciente respecto a la segunda variable y tomando en consideración **(2)**, tenemos:

$$L\big(s, x(s+\sigma)\big) \leqslant L\big(s, z(s)\big) \tag{3.10}$$

Ahora acotando **(3)** con (3.10) y de **(1)**, tenemos

$$z^p(t) \leqslant a(t) + \int_t^{+\infty} b(s)z^p(s)ds + \int_t^{+\infty} L\big(s, z(s)\big)ds + \delta, \qquad t \in \mathbb{R}^+, p \geqslant 1 \tag{3.11}$$

Si en (3.11) hacemos δ muy pequeño ($\delta \to 0$), tenemos

$$z^p(t) \leqslant a(t) + \int_t^{+\infty} L\big(s, z(s)\big)ds + \int_t^{+\infty} b(s)z^p(s)ds, \qquad t \in \mathbb{R}^+, p \geqslant 1. \tag{3.12}$$

Ahora definimos la función u de la siguiente forma

$$u(t) = a(t) + w(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.13}$$

donde

$$w(t) = \int_t^{+\infty} L\big(s, z(s)\big)ds \tag{3.14}$$

es no decreciente, sustituyendo (3.13) en (3.12) tenemos

$$z^p(t) \leqslant u(t) + \int_t^{+\infty} b(s)z^p(s)ds,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.15}$$

como $a(t)$ y $w(t)$ son no negativas y no crecientes, la función $u(t)$ es no negativa y no creciente. De (3.15) y el lema 1.5, concluimos

$$z^p(t) \leqslant u(t)\mathrm{e}^{\displaystyle\int_t^{+\infty} b(s)ds}, \qquad t \in \mathbb{R}^+, p \geqslant 1 \tag{3.16}$$

luego, sustituyendo (3.7) y (3.13) en (3.16) tenemos

$$z(t) \leqslant u(t)^{\frac{1}{p}} \left(\mathrm{e}^{\displaystyle\int_t^{+\infty} b(s)ds}\right)^{\frac{1}{p}} = \big(a(t) + w(t)\big)^{\frac{1}{p}} B(t)$$

es decir

$$z(t) \leqslant B(t)\big(a(t) + w(t)\big)^{\frac{1}{p}}, \qquad t \in \mathbb{R}^+, p \geqslant 1 \tag{3.17}$$

por el lema 1.2, para cualquier $k > 0$, de (3.17) se tiene:

$$z(t) \leqslant B(t)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{w(t)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right) \tag{3.18}$$

Como L es creciente respecto a la segunda variable, con la desigualdad (3.18) podemos acotar $w(t)$ en la igualdad (3.14)

$$w(t) = \int_t^{+\infty} L(s, z(s))ds \leqslant \int_t^{+\infty} L\big(s, B(s)\big(a(s) + w(s)\big)^{\frac{1}{p}}\big)ds$$

luego,

$$w(t) \leqslant \int_t^{+\infty} L\left((s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{w(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right) ds$$

ahora en el integrando sumamos y restamos el término

$$L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{1}{p}}}\right)\right)$$

así, tenemos

$$\begin{aligned} w(t) \leqslant \int_t^{+\infty} & \left\{ L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{w(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\right. \\ & -L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{p \cdot k^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right) \\ & \left. +L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right) \right\} ds \end{aligned}$$

distribuyendo la integral, por la desigualdad (3.4) tenemos:

$$\begin{aligned} w(t) \leqslant & \int_t^{+\infty} \left[L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{w(s)}{pk^{\frac{1}{p}}}\right)\right) - L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\right] ds \\ & + \int_t^{+\infty} L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right) ds \\ \leqslant & \int_t^{+\infty} K\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right) \frac{B(s)w(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds \\ & + \int_t^{+\infty} L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right) ds \end{aligned}$$

entonces

$$w(t) \leqslant \int_t^{+\infty} K\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\left(\frac{B(s)w(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)ds$$
$$+ \int_t^{+\infty} L\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)ds$$

tomando en cuenta (3.6), se tiene

$$w(t) \leqslant G(t) + \int_t^{+\infty} K\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{p \cdot k^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\frac{B(s)w(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}ds \tag{3.19}$$

La función $G(t)$ es no negativa y no creciente, pues la función $t \mapsto \int_t^{+\infty} N(s)ds$, para $N(s)$ integrable en $[t, +\infty\rangle$ es no creciente. Por el lema (1.5), la desigualdad (3.19) se tiene:

$$w(t) \leqslant G(t)\mathrm{e}^{\displaystyle\int_t^{+\infty} K\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\frac{B(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}ds} \tag{3.20}$$

Finalmente, combinando (3.17) con (3.20) y del hecho de que $x(t) \leqslant z(t)$ tenemos:

$$x(t) \leqslant z(t) \leqslant B(t)\left(a(t) + w(t)\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, p \geqslant 1$$

luego,

$$x(t) \leqslant B(t)\left(a(t) + w(t)\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, p \geqslant 1$$

por lo tanto,

$$x(t) \leqslant B(t)\left(a(t) + G(t)\mathrm{e}^{\displaystyle\int_t^{+\infty} K\left(s, B(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\frac{B(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}ds}\right)^{\frac{1}{p}}$$

■

Retomando al problema (3.1) con las condiciones planteadas, supongamos que $x(t)$ es solución de la ecuación (3.1), entonces tenemos:

$$px^{p-1}(t)x'(t) = H\big(t, x(t+\sigma)\big) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

de donde obtenemos

$$(x^p(t))' = H\big(t, x(t+\sigma)\big) + g(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.21}$$

integrando (3.21) de t a $+\infty$, tenemos:

$$\begin{aligned} x^p(s)\Big|_t^{+\infty} &= \int_t^{+\infty} H\big(s, x(s+\sigma)\big)ds + \int_t^{+\infty} g(s)ds \\ x^p(+\infty) - x^p(t) &= \int_t^{+\infty} H\big(s, x(s+\sigma)\big)ds + \int_t^{+\infty} g(s)ds \end{aligned}$$

como $x(+\infty) = x_{+\infty}$, entonces

$$x^p(t) = x^p_{+\infty} - \int_t^{+\infty} g(s)ds - \int_t^{+\infty} H\big(s, x(s+\sigma)\big)ds \tag{3.22}$$

tomando valor absoluto en ambos miembros de (3.22)

$$|x^p(t)| \leqslant \left| x^p_{+\infty} - \int_t^{+\infty} g(s)ds + \int_t^{+\infty} H\Big(s, x(s+\sigma)\Big)ds \right|$$

por la desigualdad triangular tenemos

$$|x^p(t)| \leqslant \left| x^p_{+\infty} - \int_t^{+\infty} g(s)ds \right| + \left| \int_t^{+\infty} H\big(s, x(s+\sigma)\big)ds \right| \tag{3.23}$$

usando (3.2) para acotar (3.23), obtenemos

$$|x^p(t)| \leqslant a(t) + \int_t^{+\infty} \Big| H\big(s, x(s+\sigma)\big) \Big| ds$$

luego,

$$|x^p(t)| \leqslant a(t) + \int_t^{+\infty} \left(f(s)|x(s+\sigma))| + g(s) \right) ds \tag{3.24}$$

Por dato (teorema 2.1) la función $a(t)$ es no creciente, así podemos aplicar el teorema 2.1 a la desigualdad (3.24) considerando $c(t) = 1$ (constante) es no creciente, entonces por (2.2) tenemos

$$|x(t)| \leqslant \left(a(t) + h(t) \mathrm{e}^{\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{f(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}} ds} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.25}$$

donde

$$h(t) = \int_t^{+\infty} \left(f(s) \left(\frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pk^{\frac{1}{p}}} \right) + g(s) \right) ds$$

para cualquier $k > 0$, $p \geqslant 1$.

Como el término del lado derecho de (3.25) es un número real, pues las funciones $a(t)$, $c(t)$ y $h(t)$ nos brindan un valor real para cualquier t positivo, además la integral es convergente; por lo que obtenemos una acotación para la solución del problema (3.1)-(3.2), logrando el objetivo planteado.

4 Conclusiones y/o Sugerencias

i. Al estudiar minuciosamente algunas desigualdades integrales no lineales con argumento avanzado se logró obtener el límite en la solución de una EDO no lineal con argumento avanzado. Es más, con estas desigualdades integrales no lineales con argumento avanzado, es decir evaluadas en el infinito $u(+\infty)$, es posible encontrar límites explícitos en funciones desconocidas.

ii. Se comprobó que las desigualdades estudiadas aquí pueden servir como una herramienta vital para el estudio de la teoría cualitativa para ciertas ecuaciones diferenciales no lineales con argumento avanzado.

iii. Sugerimos la generalización del resultado obtenido, a través de desigualdades integrales que involucren funciones de una o más variables independientes que proporcionen límites explícitos en funciones desconocidas, con el objetivo de realizar el análisis cualitativo de algún tipo de ecuaciones diferenciales parciales (EDP).

Bibliografía

[1] Hacia, L. (1997). On some integral inequalities and their applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 206(2), 611-622.

[2] Lipovan, O. (2000). A retarded Gronwall-like inequality and its applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 252(1), 389-401..

[3] Máté, A., & Nevai, P. (1984). Sublinear perturbations of the differential equation $y(n) = 0$ and of the analogous difference equation. Journal of differential equations, 53(2), 234-257.

[4] Ma, Q. H., & Yang, E. H. (2000). On some new nonlinear delay integral inequalities. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 252(2), 864-878.

[5] Ma, Q. H., & Yang, E. H. (2002). Some new Gronwall-Bellman-Bihari type integral inequalities with delay. Periodica Mathematica Hungarica, 44(2), 225-238.

[6] Meng, F. W., & Li, W. N. (2004). On some new integral inequalities and their applications. Applied mathematics and computation, 148(2), 381-392.

[7] Pachpatte, B. G. (1995). On some new inequalities related to certain inequalities in the theory of differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 189(1), 128-144.

[8] Abdeldaim, A., & Yakout, M. (2011). On some new integral inequalities of Gronwall-Bellman-Pachpatte type. Applied Mathematics and Computation, 217(20), 7887-7899.

[9] Bellman, R. (2008). Stability theory of differential equations. Courier Corporation.

[10] Li, W. N., & Sheng, W. (2006). On some nonlinear integral inequalities with an advanced argument. Communications in Mathematical Analysis, 1(1), 12-20.

[11] Gronwall, T. H. (1919). Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Annals of Mathematics, 292-296.

[12] Li, W. N., Han, M., & Meng, F. W. (2005). Some new delay integral inequalities and their applications. Journal of Computational and Applied Mathematics, 180(1), 191-200.

[13] Kendre, S. D., Latpate, S. G., & Ranmal, S. S. (2014). Some nonlinear integral inequalities for Volterra-Fredholm Integral equations. Adv. Inequal. Appl., 2014, Article-ID.

[14] Kendre, S. D., & Latpate, S. G. (2013). On some nonlinear integral inequalities of Pachpatte type. Adv. Inequal. Appl., 2014, Article-ID.

[15] Kim, Y. H. (2009). Gronwall, Bellman and Pachpatte type integral inequalities with applications. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 71(12), e2641-e2656.

[16] El-Owaidy, H., Ragab, A., & Abdeldaim, A. (1999). On some new integral inequalities of Gronwall-Bellman type. Applied mathematics and computation, 106(2-3), 289-303.

[17] Feng, Q., Meng, F., & Zheng, B. (2011). Gronwall?Bellman type nonlinear delay integral inequalities on time scales. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 382(2), 772-784.

[18] Zhao, C. J. (2001). Some integral inequalities for differential equations, J. Binzhou Teachers College, 17(4), 41-46.

[19] Lipovan, O. (2000). A retarded Gronwall-like inequality and its applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 252(1), 389-401.

[20] Sotomayor, J. (1979), Licoes de Equacoes Diferenciais Ordinarias, Instituto de matemática pura e aplicada.