Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Estabilización exponencial de un sistema de edo afín no lineal

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Robert CAMASCA QUISPE

ASESOR

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Camasca, R. (2022). *Estabilización exponencial de un sistema de edo afín no lineal*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Robert Camasca Quispe
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	15437998
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-6965-0915
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9177-1561
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Edinson Raúl Montoro Alegre
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09627181
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar.
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Datos de investigación	
Línea de investigación	Ecuaciones Diferenciales y análisis funcional,
Grupo de investigación	Ecuaciones diferenciales ordinarias, aplicada a las ciencias básicas e ingeniería.

Agencia de financiamiento	Vice rectorado de investigación y post grado de la UNMSM.
Ubicación geográfica de la investigación	Lima – Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2020- 2021
URL de disciplinas OCDE	https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:03 horas del martes 19 de julio del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre (PRESIDENTE), Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada**:** ***"ESTABILIZACIÓN EXPONENCIAL DE UN SISTEMA DE EDO AFÍN NO LINEAL"*** presentado por el señor Bachiller *Robert Camasca Quispe,* para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación sobresaliente con mención con un calificativo promedio de ..17.(Diecisiete).

A continuación, el presidente del Jurado, Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre, manifestó que el señor Bachiller Robert Camasca Quispe, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 12:11 am horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre
PRESIDENTE

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO

Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO ASESOR

DEDICATORIA

Lleno de regocijo, dedico a esta tesis a mis seres queridos, quienes han sido mis pilares para lograr el objetivo; a mis padres HERMOGENES y FAUSTINA, a mi esposa NICOLASA y a mis amados hijos JAHIR y ALDAIR.

AGRADECIMIENTOS

Llegar a esta instancia no ha sido fácil, gracias a Dios por ser mi fortaleza y permitirme concluir mi carrera, gracias a cada una de las personas que me alentaron a lograr esta hermosa realidad.

Agradecer a mis padres HERMOGENES y FAUSTINA por haberme proporcionado la mejor educación y lecciones de vida, a mis hermanos por que ellos estuvieron a mi lado brindándome su apoyo y sus consejos, a mi abuelo Felipe aunque no esté físicamente conmigo, pero sé que desde el cielo siempre me cuida y me guía para que todo salga bien.

También agradezco de manera muy especial a mi maestro tutor Magister. Willy Barahona Martínez; que me brindo valiosos consejos a lo largo del trabajo y me animó en todo momento a concluir con el presente proyecto; a mis maestros de la Facultad de Ciencias Matemáticas que dejaron en mi valiosos aportes académicos y mi alma mater Universidad Nacional Mayor de San Marcos, a mis compañeros de carpeta; Carlos Alcántara M, Hermes Roque C, Miguel Rosadio, Sonia Alanya, Joaquin Pérez, Miguel Cutimanco, Nancy Montoya, Socrates Linares, Eduardo Cuba, Julio Ordinola, Angel Rivera, Caparachin, Devis Ordoño V; quienes sin esperar nada a cambio compartieron su conocimiento.

El agradecimiento a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, especialmente al Vicerectorado de Investigación y Posgrado (VRIP) por la ayuda económica recibida, que contribuyó significativamente en el avance y conclusión del trabajo de tesis.

Agradezco a mi adorada esposa NICOLASA con quien comparto mis triunfos, mi alegría, mis tristezas y éxitos en mi vida, finalmente a mis amados hijos JAHIR Y ALDAIR por ser mi fuente de motivación para nunca rendirme en los estudios y ser ejemplo para ellos.

RESUMEN

Estabilización Exponencial de un Sistema de EDOs Afín No Lineal

Robert, Camasca Quispe

Marzo - 2022

Asesor : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

En este trabajo de tesis determinaremos la estabilización exponencial de un sistema afín no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por el

Sistema:

$$
(P) \qquad \left|\begin{array}{l} x^{'}(t) = Ax(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_k(x(t))u_k(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(t) = Cx(t). \\ x(0) = x_0 \end{array}\right.
$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector entrada de control y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la medida de salida, g_k es una función medible y acotada, donde A, B y C son matrices de dimensiones apropiadas y con entradas reales.

Se tratan dos casos para la estabilización exponencial: la retroalimentación de estado estático y la retroalimentación de salida estática. Para lograr nuestro objetivo seguiremos un nuevo enfoque generalizado del Lema de Gronwall-Bellman, con el cual obtendremos la estabilización exponencial del sistema para el caso nominal.

Palabras claves: Estabilización exponencial, Sistema afín no lineal, Lema generalizado de Gronwall-Bellman, Control de retroalimentación de estado estático, Control de retroalimentación de salida estática.

ABSTRACT

Exponential Stabilization of a Nonlinear Affine EDO System
Camasca, Robert

March - 2022

Adviser : Mg. Willy David, Barahona Martínez.
Obtained : Graduate in Mathematics.

In this thesis work we will determine the exponential stabilization of a nonlinear affine system of ordinary differential equations given by the

System:

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} x'(t) = Ax(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x(t))u_k(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(t) = Cx(t). \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ is the control input vector and $y(t) \in \mathbb{R}^p$ is the output measure, g_k is a measurable bounded function, where A, B and C are arrays of appropriate dimensions and with real entries.

Two cases are discussed for exponential stabilization: steady state feedback and static output feedback. To achieve our objective we will follow a generalized Gronwall-Bellman Lemma approach, with which we will obtain the exponential stabilization of the system for the nominal case.

Keywords: Exponential Stabilization, Nonlinear Affine System, Gronwall-Bellman Generalized Lemma, Static State Feedback Control, Static Output Feedback Control.

INDICE GENERAL

Introducción

Mediante los modelos matemáticos podemos descubrir fenómenos económicos, sociales, ecológicos, climáticos etc., mediante variables representamos las diversas situaciones o elementos de dichos fenómenos, al relacionar estas variables entre si y expresadas en un número finito de ecuaciones.

Con la tecnología actual en las instalaciones industriales, fábricas modernas, etc,. es indispensable contar con un sistema de control, que nos permitan mejorar y optimizar una gran cantidad de procesos. Los sistemas de control son casos particulares de los sistemas dinámicos, el conocimiento de la teoría de control proporciona una base sólida para comprender el comportamiento de estos sistemas.

Existen una cantidad considerable de desigualdades integrales de mucha importancia para el estudio en el análisis numérico y funcional; sobre todo aquello que permita determinar la existencia, unicidad, acotación, oscilación y estabilidad de las soluciones de ecuaciones integró diferenciales, una de ellas es la desigualdad integral del tipo Gronwall - Bellman.

En 1919 Gronwall, planteo a la comunidad científica la famosa desigualdad de Gronwall, mediante la cual se abordaron estudios relacionados a la solución de una ecuación diferencial; desde ese entonces hasta la actualidad se viene obteniendo muchas contribuciones al respecto, así mismo generalizaciones de la desigualdad de tipo Gronwall no Daniel y, son ellas las que nos facilitan el análisis de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, así como el estudio de los sistemas de control (Ver [5]).

Diversos procesos físicos pueden modelarse como sistemas afines no lineales, bilineales, etc., en biología se aborda el problema de las columnas de destilación, en la mecánica, el manejo o manipulación de robots, el funcionamiento de un motor entre otros. Actualmente se viene trabajando en el control y la determinación del estado de dichos sistemas.

En las últimas décadas, el estudio del control de estos sistemas, se vienen dando mediante el enfoque de linealización y control óptimo o la teoría de Liapunov (Ver [2;3]). La estabilización de sistemas mediante el control óptimo, es bastante por mucho investigadores, por otro lado el estudio de sistemas afines no lineales se viene utilizando en la estabilización de los sistemas no lineales, la técnica utilizada es a través del lema de Gronwall - Bellman (Ver [6;7]), pues este resultado es fácilmente adaptado y aplicado a la estabilidad exponencial de los sistemas afines no lineales (Ver [8]). En [9] se muestra la estabilización robusta y el estudio de sistemas inciertos no lineales, mientras que en [10 ; 11] se estudia la estabilidad de sistemas lineales y para observar algunas generalizaciones del lema de Gronwall - Bellman revisar [12 ; 13].

Utilizamos el lema generalizado de Gronwall - Bellman, ya que la estabilización exponencial de algunos sistemas no lineales es muy afín al control, además de ello permite trabajar con sistemas afines no lineales que no necesitan ser del tipo Lipschitz, así obtendremos el control de retroalimentación de estado estático y el de salida estática.

Este trabajo de tesis, pretende mostrar un desarrollo didáctico de la generalización del Lema de Gronwall - Bellman y una aplicación a los sistemas dinámicos no lineales, ya que bajos ciertos supuestos convenientes harán posible determinar su estabilización exponencial; tomamos como referencia el trabajo realizado en [12].

1 Preliminares

Haremos una breve introdución de las nociones básicas que nos permitirán desarrollar adecuadamente el presente trabajo de tesis.

1.1. Nociones Básicas

Considerando el conocimiento básico de la teoría de matrices y el álgebra lineal, mencionamos los siguientes resultados necesarios para lograr el objetivo planteado.

1.2. Lema de Gronwall-Bellman y Generalidades

El lema estandar de Gronwall-Bellman es dado por

Lema 1. ***(Gronwall-Bellman).*** *Sean*

1. *f, g funciones y $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable.*
2. *$g \geq 0, \quad k \geq 0.$*
3. *$g \in \mathcal{L}_\infty$*
4. *$g.k$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^+$.*

Si

$$u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

satisface

$$u(t) \leq f(t) + g(t)\int_0^t k(\tau)u(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.1}$$

Entonces

$$u(t) \leq f(t) + g(t)\int_0^t k(\tau)f(\tau)e^{\int_\tau^t k(s)g(s)ds}d\tau, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.2}$$

Demostración:

Ver [12]pág.292 y [11]pág.252.

Corolario 1. *Sea* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *una función localmente integrable en* $\mathbb{R}^+$*,* z, f *no negativas y la constante* $c \geq 0$*.*
Si

$$z : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

satisface

$$z(t) \leq c + \int_0^t f(\tau)z(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.3}$$

Entonces

$$z(t) \leq ce^{\int_0^t f(\tau)d\tau}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.4}$$

Demostración:

Ver [12]pág.236 y [11]pág.252.

Corolario 2. ***(Desigualdad de Gronwall).*** *Sea* z, f *funciones continuas no negativas en* $0 \leq t \leq T$*, tales que para la constante* $c \geq 0$*, se saisface la desigualdad*

$$z(t) \leq c + \int_0^t f(s)z(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.5}$$

Entonces se cumple

$$z(t) \leq ce^{\int_0^t f(s)ds}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostración:

La demostración la dividimos en dos casos:

Caso $c > 0$.

Sea

$$F(t) = c + \int_0^t f(s)z(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$F'(t) = f(t)z(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

de la desigualdad dada en (1.5)

$$z(t) \leq F(t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.6}$$

entonces

$$\frac{z(t)}{F(t)} \leq \frac{c + \displaystyle\int_0^t f(s)z(s)ds}{F(t)} \leq 1$$

como f es no negativa, entonces

$$\frac{f(t)z(t)}{F(t)} \leq f(t)$$

implíca que

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq f(t), \quad \forall t \in [0,T] \tag{1.7}$$

luego integrando ambos miembros de (1.7), es tiene

$$\int_0^t \frac{F'(s)}{F(s)}ds \leq \int_0^t f(s)ds$$

entonces

$$Ln(F(t)) - Ln(F(0)) \leq \int_0^t f(s)ds \tag{1.8}$$

tomando $t = 0$ en (1.5) tenemos

$$F(0) = c + \int_0^0 f(s)z(s)ds = c$$

luego reemplazando $F(0) = c$ en (1.8), se tiene

$$Ln(F(t)) \leq Ln(c) + \int_0^t f(s)ds \tag{1.9}$$

como la función es estrictamente creciente, la aplicamos en (1.9) y tenemos

$$e^{Ln(F(t))} \leq e^{Ln(c)+\int_0^t f(s)ds} = e^{Ln(c)}.e^{\int_0^t f(s)ds}$$

entonces

$$F(t) \leq ce^{\int_0^t f(s)}ds. \tag{1.10}$$

Por lo tanto, de (1.6) y (1.10) concluimos que

$$z(t) \leq ce^{\int_0^t f(s)ds}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Caso c=0.

La desigualdad (1.5), se reduce a

$$z(t) \leq \int_0^t f(s)z(s)ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

sea $n \in \mathbb{N}$ (arbitrario), entonces

$$z(t) \leq \int_0^t f(s)z(s)ds \leq \frac{1}{n} + \int_0^t f(s)z(s)ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces por el primer caso, tenemos

$$z(t) \leq \frac{1}{n} e^{\int_0^t f(s)ds}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,T]$$

tomando limite cuando $n \to +\infty$, se cumple que

$$z(t) \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dado que, $0 \leq z(t)$, entonces se cumple

$$z(t) = 0.$$

Teorema 1. *Sean f, g funciones continuas en $I = [a,b]$ y z una función diferenciable y positiva, tales que para las constantes $c \geq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, satisfacen la siguiente desigualdad*

$$z(t) \leq c + \int_a^t \Big(f(s)z(s) + g(s)z^n(s) \Big) ds, \quad t \in I. \tag{1.11}$$

Entonces, se cumple

$$z(t) \leq \frac{c e^{(n-1)\int_a^t f(\tau)d\tau}}{\left[1 - (n-1)c^{n-1} \displaystyle\int_a^t g(s) e^{(n-1)\int_a^s f(\tau)d\tau} ds \right]^{\frac{1}{n-1}}} \tag{1.12}$$

donde $a \leq s \leq t \leq b$ y además

$$1 - (n-1)c^{n-1} \int_a^t g(s) e^{(n-1)\int_a^s f(\tau)d\tau} ds > 0. \tag{1.13}$$

Demostración:

A partir de (1.11) , obtenemos

$$z(t) \leq c + \int_a^t z(s) \Big(f(s) + g(s)z^{n-1}(s) \Big) ds, \quad t \in I. \tag{1.14}$$

luego aplicando el *corolario 2* en (1.14) obtenemos

$$z(t) \leq c e^{\int_a^t (f(s) + g(s)z^{n-1}(s))ds} \tag{1.15}$$

elevando la expresión (1.15) por $(n-1) > 0$, se tiene

$$z^{n-1}(t) \leq c^{n-1} e^{(n-1)\int_a^t (f(s) + g(s)z^{n-1}(s))ds} \tag{1.16}$$

como

$$-(n-1)g(t)e^{-(n-1)\int_a^t g(s)z^{n-1}(s)ds} \leq 0$$

multiplicando (1.16) por esta desigualdad, tenemos

$$[-(n-1)g(t)z^{n-1}(t)]e^{-(n-1)\int_a^t g(s)z^{n-1}(s)ds} \geq -(n-1)c^{n-1}g(t)e^{(n-1)\int_a^t f(s)ds} \tag{1.17}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-(n-1)\int_a^t g(s)z^{n-1}(s)ds}\right] \geq -(n-1)c^{n-1}g(t)e^{(n-1)\int_a^t f(s)ds} \tag{1.18}$$

integrando ambos miembros de (1.18) se tiene

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left[e^{-(n-1)\int_a^s g(\tau)z^{n-1}(\tau)d\tau}\right] \geq -(n-1)c^{n-1}\int_a^t g(s)e^{(n-1)\int_a^s f(\tau)d\tau}ds$$

de donde obtenemos

$$e^{-(n-1)\int_a^t g(s)z^{n-1}(s)ds} - 1 \geq -(n-1)c^{n-1}\int_a^t g(s)e^{(n-1)\int_a^s f(\tau)d\tau}ds$$

entonces

$$e^{-(n-1)\int_a^t g(s)z^{n-1}(s)ds} \geq 1-(n-1)c^{n-1}\int_a^t g(s)e^{(n-1)\int_a^s f(\tau)d\tau}ds \tag{1.19}$$

invirtiendo la expresión (1.19) tenemos

$$e^{(n-1)\int_a^t g(s)z^{n-1}(s)ds} \leq \frac{1}{1-(n-1)c^{n-1}\displaystyle\int_a^t g(s)e^{(n-1)\int_a^s f(\tau)d\tau}ds} \tag{1.20}$$

utilizando (1.16) y aplicando (1.20) se tiene

$$\frac{z^{n-1}(t)}{c^{n-1}e^{(n-1)\int_a^t f(s)ds}} \leq e^{(n-1)\int_a^t g(s)z^{n-1}(s)ds} \tag{1.21}$$

de las expresiones (1.20) y (1.21) obtenemos

$$z^{n-1}(t) \leq \frac{c^{n-1}e^{(n-1)\int_a^t f(s)ds}}{1-(n-1)c^{n-1}\displaystyle\int_a^t g(s)e^{(n-1)\int_a^s f(\tau)d\tau}ds} \tag{1.22}$$

Finalmente, tomando en cuenta que $n-1>0$ entonces elevando la expresión (1.22) al exponente $\frac{1}{n-1}$, obtenemos lo deseado

$$z(t) \leq \frac{ce^{(n-1)\int_a^t f(\tau)d\tau}}{\left[1-(n-1)c^{n-1}\displaystyle\int_a^t g(s)e^{(n-1)\int_a^s f(\tau)d\tau}ds\right]^{\frac{1}{n-1}}}$$

$\blacksquare$

Teorema 2. *Sea z una función diferenciable y positiva, que satisface la desigualdad*

$$z(t) \leq c + \int_a^t \sum_{i=1}^{n} \Big(f_i(s) z^i(s) \Big) ds, \quad t \in I. \tag{1.23}$$

donde $c \geq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ son constantes, las funciones f_i son continuas en $I, \forall i = 1, ..., n$. Entonces,

$$z(t) \leq \frac{c e^{\int_a^t f_1(s) ds}}{\left[1 - (n-1) c^{n-1} \int_a^t \sum_{i=2}^{n} c^{i-1} f_i(s) e^{\int_a^s (n-1) f_1(\tau) d\tau} ds \right]^{\frac{1}{n-1}}} \tag{1.24}$$

donde $t, s \in [a, b]$ y además

$$1 - (n-1) c^{n-1} \int_a^t \sum_{i=2}^{n} c^{i-1} f_i(s) e^{\int_a^s (n-1) f_1(\tau) d\tau} ds > 0. \tag{1.25}$$

Demostración:

De la desigualdad (1.23), tomamos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \Big(f_i(s) z^i(s) \Big) &= f_1(s) z(s) + f_2(s) z^2(s) + f_3(s) z^3(s) + \cdots + f_n(s) z^n(s) \\ &= f_1(s) z(s) + \Big(f_2(s) z(s) + f_3(s) z^2(s) + \cdots + f_n(s) z^{n-1}(s) \Big) z(s) \\ &= f_1(s) z(s) + \Big(\sum_{i=2}^{n} f_i(s) z^{i-1}(s) \Big) z(s) \end{aligned}$$

Luego, para $t \in I = [a, b]$, tenemos

$$z(t) \leq c + \int_a^t \Big(f_1(s) + \sum_{i=2}^{n} f_i(s) z^{i-1}(s) \Big) z(s) ds, \tag{1.26}$$

Aplicando el Corolario 2 en (1.26), se obtiene

$$z(t) \leq c . e^{\int_a^t \Big(f_1(s) + \sum_{i=2}^{n} f_i(s) z^{i-1}(s) \Big) ds}, \tag{1.27}$$

elevando a la potencia $(i-1)$ en ambos miembros de (1.27) obtenemos

$$z^{i-1}(t) \leq c^{i-1} . e^{(i-1) \int_a^t \Big(f_1(s) + \sum_{i=2}^{n} f_i(s) z^{i-1}(s) \Big) ds},$$

Como $2 \leqslant i \leqslant n$, entonces $i - 1 \leqslant n - 1$, luego

$$z^{i-1}(t) \leq c^{i-1}.e^{(i-1)\int_a^t \left(f_1(s)+\sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)\right)ds} \leq c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^t \left(f_1(s)+\sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)\right)ds}$$

por lo tanto

$$z^{i-1}(t) \leq c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^t \left(f_1(s)+\sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)\right)ds} \tag{1.28}$$

$$z^{i-1}(t) \leq c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^t \left(f_1(s)ds\right)} \cdot e^{(n-1)\int_a^t \left(\sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)\right)ds}$$

de donde

$$c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^t \left(f_1(s)ds\right)} \geq z^{i-1}(t) \cdot e^{-(n-1)\int_a^t \left(\sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)\right)ds} \tag{1.29}$$

Ahora multiplicando ambos miembros de la desigualdad (1.29) por el término negativo $-(n-1)f_i(t) \quad , \quad i = 2, 3, \cdots, n \quad , \quad t \in I = [a, b]$ obtenemos

$$-(n-1)f_i(t).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^t \left(f_1(s)ds\right)} \leq -(n-1)f_i(t)z^{i-1}(t) \cdot e^{-(n-1)\int_a^t \left(\sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)\right)ds}$$

Luego, aplicando la sumatoria de $i = 2$ hasta $i = n$, a la desigualdad anterior, se obtiene

$$-(n-1)\sum_{i=2}^n f_i(t).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^t \left(f_1(s)ds\right)} \leq -(n-1)\sum_{i=2}^n f_i(t)z^{i-1}(t) \cdot e^{-(n-1)\int_a^t \left(\sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)\right)ds}$$

$$\left(-(n-1)\sum_{i=2}^n f_i(t)z^{i-1}(t)\right)e^{-(n-1)\int_a^t \left(\sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)\right)ds} \geq -(n-1)\sum_{i=2}^n f_i(t).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^t f_1(s)ds}$$

luego,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-(n-1)\int_a^t \left(\sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)\right)ds}\right) \geq -(n-1)\sum_{i=2}^n f_i(t).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^t f_1(s)ds} \tag{1.30}$$

Integrando ambos miembros de (1.30), desde a hasta t, obtenemos

$$\int_a^t \frac{d}{dt}\left(e^{-(n-1)\int_a^s \sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(r)dr}\right) \geq -(n-1)\int_a^t \left(\sum_{i=2}^n f_i(s).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^s f_1(r)dr}\right)ds$$

Por el teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$\left(e^{-(n-1)\int_a^t \sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)ds}\right) - \left(e^{-(n-1)\int_a^a \sum_{i=2}^n f_i(s)z^{i-1}(s)ds}\right)$$

$$\geq -(n-1)\int_a^t \left(\sum_{i=2}^n f_i(s).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^s f_1(r)dr}\right)ds$$

luego

$$e^{-(n-1)\int_a^t \sum_{i=2}^{n} f_i(s)z^{i-1}(s)ds} - e^0 \geq -(n-1)\int_a^t \Big(\sum_{i=2}^{n} f_i(s).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^s f_1(r)dr}\Big)ds$$

Por (1.25) y ordenando tenemos:

$$e^{-(n-1)\int_a^t \sum_{i=2}^{n} f_i(s)z^{i-1}(s)ds} \geq 1-(n-1)\int_a^t \Big(\sum_{i=2}^{n} f_i(s).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^s f_1(r)dr}\Big)ds > 0 \tag{1.31}$$

Invirtiendo la expresión (1.31), obtenemos

$$e^{(n-1)\int_a^t \sum_{i=2}^{n} f_i(s)z^{i-1}(s)ds} \leq \frac{1}{1-(n-1)\int_a^t \Big(\sum_{i=2}^{n} f_i(s).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^s f_1(r)dr}\Big)ds} \tag{1.32}$$

extrayendo raíz $(n-1)$ en ambos miembros de (1.32), tenemos

$$e^{\int_a^t \sum_{i=2}^{n} f_i(s)z^{i-1}(s)ds} \leq \frac{1}{\Big(1-(n-1)\int_a^t \Big(\sum_{i=2}^{n} f_i(s).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^s f_1(r)dr}\Big)ds\Big)^{\frac{1}{n-1}}} \tag{1.33}$$

Luego, de (1.27)

$$z(t) \leq c.e^{\int_a^t \Big(f_1(s)+\sum_{i=2}^{n} f_i(s)z^{i-1}(s)\Big)ds} = ce^{\int_a^t f_1(s)ds}.e^{\int_a^t \sum_{i=2}^{n} f_i(s)z^{i-1}(s)ds}$$

Aplicando (1.33), obtenemos:

$$z(t) \leq ce^{\int_a^t f_1(s)ds} \cdot \frac{1}{\Big(1-(n-1)\int_a^t \Big(\sum_{i=2}^{n} f_i(s).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^s f_1(r)dr}\Big)ds\Big)^{\frac{1}{n-1}}}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $\forall t \in [a,b]$

$$z(t) \leq \frac{ce^{\int_a^t f_1(s)ds}}{\Big(1-(n-1)\int_a^t \Big(\sum_{i=2}^{n} f_i(s).c^{i-1}.e^{(n-1)\int_a^s f_1(r)dr}\Big)ds\Big)^{\frac{1}{n-1}}}$$

■

Lema 2. ***(Lema Generalizado de Gronwall-Bellman).*** *Sean*

1. $a, b, k \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq a < b, k > 0$ *y* $n \in \mathbb{Z}^+$

2. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *una función integrable talque* $\forall \alpha, \beta \in [a, b],(a \leq \alpha < \beta)$*,*

$$\int_\alpha^\beta f(s)ds > 0,$$

3. *Si* $x : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ *es una función escencialmente acotada, talque*

$$x(t) \leq k + \int_a^t f(s)(x(s))^n ds, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{1.34}$$

4. *Si la siguiente desigualdad*

$$1 - (n-1)k^{n-1} \int_a^b f(s)ds > 0 \tag{1.35}$$

se verifica,entonces

$$x(t) \leq \frac{k}{\left[1 - (n-1)k^{n-1} \int_a^b f(s)ds\right]^{\frac{1}{n-1}}}, \quad \forall t \in [a, b] \tag{1.36}$$

Demostración:

A partir de (1.34) , podemos escribir

$$x(t) \leq k + \int_a^t f(s)(x(s))^{n-1} x(s)ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

entonces por (1.3) del corolario 1, obtenemos

$$x(t) \leq k e^{\int_a^t f(s)(x(s))^{n-1} ds}$$

de donde se tiene

$$(x(t))^{n-1} \leq k^{n-1} e^{(n-1) \int_a^t f(s)(x(s))^{n-1} ds} \tag{1.37}$$

Como $-(n-1)f(t) < 0$, $\forall t \in [a, b]$, multiplicamos la expresión (1.37) por $-(n-1)f(t)$ y obtenemos

$$-(n-1)f(t)(x(t))^{n-1} \geqq -(n-1)f(t)k^{n-1} e^{(n-1) \int_a^t f(s)(x(s))^{n-1} ds}$$

por lo que, podemos expresarlo como

$$-(n-1)f(t)(x(t))^{n-1} e^{-(n-1) \int_a^t f(s)(x(s))^{n-1} ds} \geq -(n-1)f(t)k^{n-1} \tag{1.38}$$

Utilizando la primitiva de la expresión exponencial, tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-(n-1)\int_a^t f(s)(x(s))^{n-1}ds}\right) \geq -(n-1)f(t)k^{n-1} \tag{1.39}$$

integrando de a hasta t, ambos lados de (1.39) y usando el Teorema Fundamental del Cálculo en el lado izquierdo de (1.39), se tiene

$$e^{-(n-1)\int_a^t f(s)(x(s))^{n-1}ds} - e^0 \geq -(n-1)k^{n-1}\int_a^t f(s)ds \tag{1.40}$$

así

$$e^{-(n-1)\int_a^t f(s)(x(s))^{n-1}ds} \geq 1-(n-1)k^{n-1}\int_a^t f(s)ds$$

Al cumplirse la desigualdad anterior, se verifica

$$\frac{1}{1-(n-1)k^{n-1}\int_a^t f(s)ds} \geq e^{(n-1)\int_a^t f(s)(x(s))^{n-1}ds} \tag{1.41}$$

de las desigualdades (1.37) y (1.41) podemos deducir que

$$\frac{1}{1-(n-1)k^{n-1}\int_a^t f(s)ds} \geq k^{-(n-1)}(x(t))^{n-1}$$

ó de manera equivalente obtenemos, nuestro objetivo.

$$x(t) \leq \frac{k}{\left[1-(n-1)k^{n-1}\int_a^b f(s)ds\right]^{\frac{1}{n-1}}}, \quad \forall t \in [a,b].$$

■

2 Sistemas de Control

2.1. Teoría Básica de Control

Revisamos los principales resultados de la teoría de control, enfocados al trabajo que estamos realizando.

Definición 1. ***Sistema de control.*** *Es un arreglo de componentes físicos conectados de tal manera que el arreglo pueda comandar, dirigir o regular, asimismo o a otro sistema. Estos sistemas comandan dirigen o controlan dinámicamente.*

Definición 2. ***Ingreso o Entrada de un sistema de control.*** *Es una variable adherida al sistema controlado que es seleccionada de modo tal que a través de su manipulación el sistema logra cumplir un objetivo precisado. Estas variables de entrada, son aquellas que hacen su ingreso al sistema sin depender de variable alguna que esté en el interior del sistema.*

Definición 3. ***Escape o Salida de un sistema de control.*** *Es una variable que es parte del sistema controlado y es elegida de tal manera que a través de su estudio se examina si el sistema logró cumplir o no con los objetivos planteados. Generalmente en los sistemas retroalimentados (realimentados), esta variable de salida nos permite realizar el control conveniente.*

Observación 1. ***Realimentación o Retroalimentación:*** *"Es una propiedad de los sistemas que permiten que la salida del sistema o cualquier variable del mismo sea comparada con la entrada al sistema o con cualquier componente del sistema, de tal manera que pueda establecerse la acción de control apropiada entre la entrada y la salida."*

Por ejemplo en la electrónica la realimentación es utilizada para controlar la fuga de energía del circuito.

Existen dos tipos de retroalimentación

1. **Retroalimentación positiva**: cuando las dos variables comparadas tienen igual signo.

2. **Retroalimentación negativa**: cuando las dos variables comparadas tienen signos contrarios.

En control se usa y aplica la retroalimentación negativa.

Definición 4. ***Control de Retroalimentación.*** *Es una acción que se dá debido a la aparición de perturbaciones, la cual nos permite reducir las diferencias entre las variables de salida y entrada del sistema, esta diferencia es denominada señal de error.*

Definición 5. ***Sistema de control retroalimentado.*** *Es aquel que tiende, a mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada de referencia, comparando ambas y utilizando la diferencia como variable de control.*

Definición 6. ***Sistemas de Control de Lazo Abierto.*** *Un Sistema de Control de Lazo Abierto se caracteriza por que la salida no tiene efecto sobre acción de control. En estos sistemas de control, no se dá la comparación entre la salida y la entrada de referencia. Por lo que, a cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fijada.*

Definición 7. ***Sistemas de Control de Lazo Cerrado.*** *Un Sistema de Control de Lazo Cerrado es aquel en el que la señal de salida tiene efecto directo sobre la acción de control, además son sistemas de control retroalimentados. La señal de error es la que actúa sobre el sistema de modo que lleva la salida a un valor deseado.*

El término lazo cerrado implica el uso de acción de retroalimentación negativa para reducir el error del sistema.

2.2. Teoría de la Estabilidad Exponencial

Debido a las características particulares de los sistemas no lineales, el estudio de la estabilidad de estos tienen un tratamiento diferente al de los sistemas lineales .

Un sistema no lineal puede adoptar la siguiente forma

$$x' = f(x,t) \tag{2.1}$$

a pesar que esta expresión no contiene la variable u, puede reproducir a un sistema donde $u = g(x,t)$, por lo que la expresión inicial puede expresarse de la siguiente manera,

$$x' = f(x,u,t) = f(x, g(x,t), t) \tag{2.2}$$

de donde observamos que fácilmente toma la forma (2.1).

Un sistema es autónomo si (2.1) no depende del tiempo, es decir

$$x' = f(x).$$

Una caracteristica importante es que, en un sistema autónomo la función f no depende de la variable independiente t, es decir, tiene añadido un plano de estados que no dependen del tiempo.

Un estado x_0 es considerado estado de equilibrio (o punto de equilibrio) del sistema si al hacer $x(t) = x_0$, este permanece constante para cualquier tiempo futuro.

Definición 8. ***Punto de equilibrio.*** *Un punto de equilibrio es el vector* $x_0 = x(t_0)$ *en el instante* t_0 *si éste satisface*

$$f(x_0, t_0) = 0 \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.3}$$

En un sistema autónomo el punto de equilibrio también es conocido como punto estacionario o singular.

Definición 9. ***Estabilidad en el sentido de Lyapunov.*** *Un punto de equilibrio* $x_0 = 0$ *es estable si, para todo* $R > 0$*, existe* $r > 0$*, tal que se cumple* $\|x(0)\| < r$*, entonces* $\|x(t)\| < R \quad \forall t \geq 0$*, caso contrario el punto de equilibrio es inestable.*

Definición 10. ***Estabilidad Asintótica.*** *Un punto de equilibrio* $x_0 = 0$ *es asintóticamente estable si, es estable y si* $\exists r > 0$*, tal que* $\|x(t)\| < r$ *entonces* $x(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$*.*

Definición 11. ***Exponencialmente estable.*** *Un punto de equilibrio* $x_0 = 0$ *es exponencialmente estable si,* $\exists \alpha, \lambda \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\forall t > 0$, $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$ *en alguna esfera con centro en el origen y de radio* r.

donde:

1. λ es llamado razón de la convergencia exponencial.

2. La estabilidad exponencial implica estabilidad asintótica, la recíproca no necesariamente se cumple.

Definición 12. ***Estabilidad Asintótica o Exponencial.*** *Si la estabilidad asintótica (o exponencial) es válida para toda condición inicial, el punto de equilibrio es estable exponencial globalmente.*

La estabilización es una propiedad clave de los sistemas dinámicos, la cual es una relajación de la condición de controlabilidad que casi siempre es insatisfecha.

Las definiciones vistas nos permiten caracterizar el comportamiento local de sistemas, en otras palabras nos dan información de cómo, el sistema evoluciona después de partir próximo al punto de equilibrio.

Definición 13. ***Estados estabilizables.*** *Un sistema con matrices de espacio de estados* (A, B) *es estabilizable si existe una matriz de retroalimentación de estado* K *tal que el sistema de bucle cerrado* $A - BK$ *es estable.*

Tenemos las siguientes propiedades:

1. El par (A, B) es

   a) Estabilizable si y solo si rango $[\lambda I - AB] = n, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^+$.

   b) Controlable si y solo si rango $[\lambda I - AB] = n, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

   Nota: solo necesitamos verificar los valores propios.

2. "Un par (A, B) es estabilizable si y solo si rango$[\lambda I - AB] = n$ para todo valor propio λ de A con parte real no negativa."

3. "Si A es estable entonces (A, B) es estabilizable."

4. “Si (A, B) es controlable entonces es estabilizable.”

5. “Si (A, B) no es controlable, aún podría ser estabilizable.”

6. “Si (A, B) es estabilizable, entonces se puede estabilizar usando solo retroalimentación estática del estado, $u(t) = Kx(t)$.”

Definición 14. ***Estados observables (o detectables).*** *El par (A, C) es observable si y solo si no existe $x \neq 0$ y $\lambda \geq 0$ tal que*

$$Ax = \lambda x, \quad Cx = 0.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

1. “El sistema es totalmente observable si tenemos acceso a todos los estados desde el nodo de salida y.”

2. “En el caso de que no todos los estados sean observables, se dice que el sistema es detectable si, al menos, todos los estados inestables sí que son observables desde y.”

3. “Suponer que tenemos un sistema con n estados, algunos estables y otros inestables, entonces, el sistema es totalmente controlable si tenemos acceso a todos los estados desde el nodo de control u.”

4. “En el caso de que no todos los estados sean controlables, se dice que el sistema es estabilizable si, al menos, todos los estados inestables sí que son controlables desde u.”

3 Problema Principal

En este capítulo presentamos el resultado principal del trabajo de tesis, partimos considerando el sistema no lineal afín de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{l} x^{'}(t) = Ax(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_k(x(t))u_k(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(t) = Cx(t). \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector entrada de control y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la medida de salida, g_k es una función medible y acotada y, además A, B y C son matrices constantes de dimensiones apropiadas. Veamos la buena definición de los vectores, matrices y funciones que intervienen:

El vector (columna) de estado

$$\begin{aligned} x \ &: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & t \longmapsto x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1} \end{aligned}$$

La condición inicial

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

El vector (columna)control de entrada

$$\begin{aligned} u \ &: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ & t \longmapsto u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} \end{aligned}$$

La función no lineal, medible y acotada

$$\begin{aligned} g_k \quad : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & x(t) \longmapsto g_k(x(t)) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1} \end{aligned}$$

El vector (columna) de salida

$$\begin{aligned} y \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ & t \longmapsto y(t) = Cx(t) \end{aligned}$$

Las matrices $\quad A = \Big(a_{lj}\Big)_{n\times n}, \quad B = \Big(b_{lk}\Big)_{n\times m}$ y $\quad C = \Big(c_{il}\Big)_{p\times n}.$

Se tratan dos casos para la estabilización exponencial: la retroalimentación de estado estático y la retroalimentación de salida estática. Para lograr nuestro objetivo seguiremos un nuevo enfoque generalizado del Lema de Gronwall-Bellman, con el cual obtendremos la estabilización exponencial del sistema para el caso nominal (Retroalimentación de estado estático).

Consideremos las siguientes condiciones para resolver el problema (P).

1. Las funciones $g_k(x(t))$ son medibles y acotadas con $g_k(0) = 0$, $\forall k = 1, 2, ..., m$.

2. Para cada $k = 1, 2, ..., m$, existe un entero $q \geq 1$ tal que:

$$\|g_k(x(t))\| \leq \mu_k \|x(t)\|^q, \quad \mu_k \in \mathbb{R}^+ \text{(constantes).} \tag{3.2}$$

3. "El par (A, B) es estabilizable."

4. "El par (C, A) es detectable."

definimos $\mu = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mu_k$.

3.1. Estabilización Exponencial :Retroalimentación de Estado Estático

Consideramos el control de retroalimentación de estado y suponemos que el sistema no lineal (P) satisface las cuatro condiciones del supuesto dado.

El siguiente teorema nos proporciona la estabilización exponencial de retroalimentación de estado estático del sistema (P).

Teorema 3. *Bajo las condiciones*

1. *Las funciones $g_k(x(t))$ son medibles y acotadas con $g_k(0) = 0$, $\forall k = 1, 2, ..., m$.*

2. *Para cada $k = 1, 2, ..., m$, existe un entero $q \geq 1$ tal que:*

$$\|g_k(x(t))\| \leq \mu_k \|x(t)\|^q, \quad \mu_k \in \mathbb{R}^+ \text{ (constantes).}$$

3. *"El par (A, B) es estabilizable."*

4. *"El par (C, A) es detectable."*

El sistema (P) controlado por la siguiente retroalimentación de estado estático

$$u(t) = L.x(t) \tag{3.3}$$

es estable exponencialmente, si todos los autovalores de la matriz $A + BL$ tienen la parte real estrictamente negativa , si

$$0 < \|x(t)\| \leq \varepsilon_0 \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_0^q < \beta = \frac{|\omega|}{\mu M^{q+1}\|L\|}, q \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.5}$$

donde $\varepsilon_0 > 0, M > 0, \omega < 0$, son escalares dados, que satisfacen

$$\|e^{(A+BL)t}\| < Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0. \tag{3.6}$$

Entonces, existe un real $\varepsilon_1 > 0$ tal que el estado $x(t)$ está acotado de la siguiente manera

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon_1 M e^{\omega t}\|x_0\|}{\left(1 - \frac{M^{q+1}\mu\|L\|\varepsilon_1^q\|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{3.7}$$

Demostración:

Dado que el control de retroalimentación (3.3) es exponencialmente estable y, todos los autovalores de la matriz $(A + BL)$ tienen parte real negativa, luego reemplazando en el sistema (P), tenemos:

$$x^{'}(t) = Ax(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x(t))(Lx(t))_k + BLx(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

entonces el problema

$$(\widetilde{P}) \qquad \left| \begin{array}{l} x^{'}(t) = (A+BL)x(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_k(x(t))(Lx(t))_k \\ \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

tiene como solución

$$x(t) = e^{(A+BL)t}x_0 + \int_0^t e^{(A+BL)(t-s)} \sum_{k=1}^{m} g_k(x(s))(Lx(s))_k ds \tag{3.8}$$

donde $(Lx(t))_k$ es la k-ésima componente del vector $Lx(t)$.

Tomando normas en ambos lados, tenemos

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \left\| e^{(A+BL)t}x_0 + \int_0^t e^{(A+BL)(t-s)} \sum_{k=1}^{m} g_k(x(s))(Lx(s))_k ds \right\| \\ &\leq \left\| e^{(A+BL)t} \right\| \|x_0\| + \int_0^t \left\| e^{(A+BL)(t-s)} \right\| \sum_{k=1}^{m} \left\| g_k(x(s))(Lx(s))_k \right\| ds \end{aligned}$$

por (3.6)

$$\|x(t)\| \leq Me^{\omega t}\|x_0\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \sum_{k=1}^{m} \|g_k(x(s))\| \|(Lx(s))_k\| ds$$

utilizando (3.2) y (3.4) se tiene

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq Me^{\omega t}\|x_0\| + \int_0^t Me^{\omega t}e^{-\omega s} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \|(x(s))\|^q \|L\| \|x(s)\| ds \\ &\leq Me^{\omega t}\|x_0\| + Me^{\omega t} \int_0^t \mu \|L\| \|x(s)\|^{q+1} e^{-\omega s} ds \end{aligned}$$

luego

$$\|x(t)\| \leq Me^{\omega t}\|x_0\| + Me^{\omega t}\mu\|L\| \int_0^t \|x(s)\|^{q+1} e^{-\omega s} ds$$

con $\omega < 0, q \in \mathbb{Z}^+, M > 0$; así de (3.4)

$$\|x(t)\| \leq Me^{\omega t}\varepsilon_0 + Me^{\omega t} \int_0^t \mu\|L\| \|x(s)\|^{q+1} e^{-\omega s} ds \tag{3.9}$$

o equivalentemente a

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq M\varepsilon_0 + \mu\|L\|M \int_0^t \|x(s)\|^{q+1} e^{q\omega s} e^{-(q+1)\omega s} ds \tag{3.10}$$

así, $\forall t > 0, \omega < 0, q \in \mathbb{Z}^+, \mu > 0$; hacemos

$$h(t) = 1 - q\mu M^{q+1}\|L\|\varepsilon_0^q \int_0^t e^{q\omega s} ds. \tag{3.11}$$

Como

$$\omega < 0 \Rightarrow -|\omega| < 0$$

entonces

$$\int_0^t e^{q\omega s} ds = \int_0^t e^{-|\omega| qs} ds = \frac{1}{|\omega| q} - \frac{e^{-|\omega| qt}}{|\omega| q} = \frac{1 - e^{-|\omega| qt}}{|\omega| q} \tag{3.12}$$

reemplazando (3.12) en (3.11), tenemos

$$h(t) = 1 - \frac{q\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{|\omega| q} \left(1 - e^{q\omega t}\right)$$

debido a que

$$0 \leq 1 - e^{q\omega t} < 1, \forall t > 0, \omega < 0, q \in \mathbb{Z}^+$$

resulta que

$$\left(1 - e^{q\omega t}\right) \leq \left(1 - e^{\omega t}\right) < 1, \forall t > 0, \omega < 0, q \in \mathbb{Z}^+$$

entonces

$$h(t) = 1 - \frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{|\omega|} \left(1 - e^{\omega t}\right) \geq 1 - \frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{|\omega|}. \tag{3.13}$$

Por otro lado de (3.5), tenemos que

$$0 < \frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{|\omega|} < 1,$$

$$-1 < -\frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{|\omega|} < 0$$

luego

$$0 < 1 - \frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{|\omega|} \leq h(t), \ \forall t \geq 0. \tag{3.14}$$

Por lo tanto, existe $\varepsilon_2 > 0$ que satisface (3.5), así tenemos

$$0 < \varepsilon_2 \leq h(t), \ \forall t \geq 0. \tag{3.15}$$

Utilizando las expresiones (3.10) y (3.14) verificaremos las hipótesis del Lema generalizado de Gronwall-Bellman (Lema 2).

En efecto:

tenemos la función integrable

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ &\quad s \longmapsto f(s) = e^{\omega q s}, \ \forall s \in [0, t] \end{aligned}$$

tal que

$$\int_0^t e^{\omega qs} ds > 0$$

además:

$$x : [0,t] \to \mathbb{R}$$

es una función escencialmente acotada que satisface (3.10)

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq M\varepsilon_0 + \mu\|L\|M \int_0^t \|x(s)\|^{q+1} e^{q\omega s} e^{-(q+1)\omega s} ds$$

y, a su vez (3.14)

$$1 - q\mu M^{q+1}\|L\|\varepsilon_0^q \int_0^t e^{q\omega s} ds \geq 1 - \frac{\mu M^{q+1}\|L\|\varepsilon_0^q}{|\omega|} > 0$$

entonces por el teorema generalizado de Gronwall-Bellman , tenemos

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq \frac{\varepsilon_0 M}{\left(1 - \frac{M^{q+1}\mu\|L\|\varepsilon_0^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{3.16}$$

luego

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \,/\, \varepsilon_0 = \varepsilon_1 \|x_0\| \tag{3.17}$$

entonces

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon_0 M e^{\omega t}}{\left(1 - \frac{M^{q+1}\mu\|L\|\varepsilon_0^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{\varepsilon_1 \|x_0\| M e^{\omega t}}{\left(1 - \frac{M^{q+1}\mu\|L\|\varepsilon_1^q\|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{3.18}$$

por lo tanto

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon_1 \|x_0\| M e^{\omega t}}{\left(1 - \frac{M^{q+1}\mu\|L\|\varepsilon_1^q\|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}}, \forall t \geq 0. \tag{3.19}$$

■

Ahora veamos cuando la disponibilidad del estado del sistema no lineal es parcial y a través de una ecuación de medición.

Observación 2. *El hecho de que el par (A, B) es estabilizable, es una condición necesaria y suficiente para la existencia de la matriz de ganancia L, de modo que los autovalores de la matriz $A + BL$ tiene parte real negativa.*

Por otro lado, si el par (A, B) es estabilizable y (C, A) detectable, no son suficientes para determinar la existencia de la matriz de ganancia K, así tenemos que, estas dos *condiciones solo garantizan las condiciones necesarias para que todos los autovalores de la matriz $A + BKC$ tengan parte real negativa.*

Muchos autores han propuesto condiciones suficientes para la estática y el problema de estabilización de retroalimentación de salida para sistemas lineales, sin garantizar la existencia de una solución.

3.2. Estabilización Exponencial:Retroalimentación de Salida Estática.

La estabilización de retroalimentación exponencial de salida estática exponencial del sistema (P) viene dada por el siguiente teorema, que es directa extensión del teorema 3.

Teorema 4. *Considerando las condiciones*

1. *Las funciones $g_k(x(t))$ son medibles y acotadas con $g_k(0) = 0$, $\forall k = 1, 2, ..., m$.*
2. *Para cada $k = 1, 2, ..., m$, existe un entero $q \geq 1$ tal que:*

$$\|g_k(x(t))\| \leq \mu_k \|x(t)\|^q, \quad \mu_k \in \mathbb{R}^+ \text{ (constantes).}$$

3. *"El par (A, B) es estabilizable."*
4. *"El par (C, A) es detectable."*

El sistema (P) controlado por la siguiente retroalimentación de salida

$$u(t) = K.y(t) \tag{3.20}$$

es exponencialmente estable, si todos los autovalores de la matriz $A + BKC$ tienen la parte real estrictamente negativa , si

$$0 < \|x(t)\| \leq \varepsilon_0 \tag{3.21}$$

$$\varepsilon_0^q < \beta = \frac{|\omega|}{\mu M^{q+1} \|KC\|}, q \in \mathbb{Z}^+ \tag{3.22}$$

donde $\varepsilon_0 > 0, M > 0, \omega < 0$, son escalares dados, que satisfacen

$$\|e^{(A+BKC)t}\| < Me^{\omega t}, \, \forall t \geq 0. \tag{3.23}$$

Entonces, existe un real $\varepsilon_1 > 0$ talque el estado $x(t)$ está acotado de la siguiente manera

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon_1 Me^{\omega t}\|x_0\|}{\left(1 - \frac{M^{q+1}\mu\|KC\|\varepsilon_1^q\|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{3.24}$$

Demostración:

Con la retroalimentación de control (3.20), la solución de (P) es dada por

$$x(t) = e^{(A+BKC)t}x_0 + \int_0^t e^{(A+BKC)(t-s)} \sum_{k=1}^m g_k(x(s))(KCx(s))_k ds \tag{3.25}$$

donde $(KCx(t))_k$ es la k-ésima componente del vector $KCx(t)$.

Tomando normas en ambos lados de (3.25), tenemos

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \left\|e^{(A+BKC)t}x_0 + \int_0^t e^{(A+BKC)(t-s)} \sum_{k=1}^m g_k(x(s))(KCx(s))_k ds\right\| \\ &\leq \left\|e^{(A+BKC)t}\right\|\|x_0\| + \int_0^t \left\|e^{(A+BKC)(t-s)}\right\| \sum_{k=1}^m \left\|g_k(x(s))(KCx(s))_k\right\| ds \end{aligned}$$

de la observación anterior, $\exists M > 0$ y $\omega < 0$ talque

$$\|e^{(A+BKC)t}\| \leq Me^{\omega t}, \, \forall t \geq 0. \tag{3.26}$$

por (3.22), tenemos

$$\|x(t)\| \leq Me^{\omega t}\|x_0\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \sum_{k=1}^m \|g_k(x(s))\|\|(KCx(s))_k\| ds$$

luego de (3.2) se verifica que

$$\|x(t)\| \leq Me^{\omega t}\|x_0\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \sum_{k=1}^m \mu_k\|(x(s))\|^q\|KCx(s)\| ds \tag{3.27}$$

para $\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k$, $q \in \mathbb{Z}^+$ se obtiene que

$$\|x(t)\| \leq Me^{\omega t}\|x_0\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\mu\|x(s)\|^q\|KC\|\|x(s)\| ds$$

de tal forma que

$$\|x(t)\| \leq M\|x_0\|e^{\omega t} + e^{\omega t}\mu M\|KC\|\int_0^t e^{-\omega s}\|x(s)\|^{q+1}ds \tag{3.28}$$

dividiendo la expresión (3.28) por $e^{\omega t}$ resulta

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq M\|x_0\| + \int_0^t \mu M\|KC\|e^{-\omega s}\|x(s)\|^{q+1}ds \tag{3.29}$$

luego

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq M\|x_0\| + \int_0^t \mu M\|KC\|\|x(s)\|^{q+1}e^{\omega sq}e^{-\omega s(q+1)}ds$$

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq M\|x_0\| + \int_0^t \Big(0.\|x(s)\|e^{-\omega s} + \mu M\|KC\|e^{\omega sq}\Big(e^{-\omega s}\|x(s)\|\Big)^{q+1}\Big)ds \tag{3.30}$$

Aplicando el teorema (1)

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq \frac{M\|x_0\|}{\Big[1 - \mu q(M\|x_0\|)^q \int_0^t \Big(\mu M\|KC\|e^{\omega sq}.e^{q\int_0^s 0.d\tau}\Big)ds\Big]^{\frac{1}{q}}}$$

desarrollando las integrales

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq \frac{M\|x_0\|}{\Big[1 - \mu q M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q(\frac{1}{\omega q})(e^{\omega qs} - 1)\Big]^{\frac{1}{q}}}$$

entonces

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq \frac{M\|x_0\|}{\Big[1 - \frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q}{\omega}(e^{\omega qs} - 1)\Big]^{\frac{1}{q}}} \tag{3.31}$$

como $t \geq 0, \quad q > 1, \quad \omega < 0$, tenemos que $\omega qt \leq 0$ entonces

$$e^{\omega qt} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - e^{\omega qt} \leq 1$$

de donde

$$\Big(\frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q}{-|\omega|}\Big) \leq \Big(\frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q}{-|\omega|}\Big)(1 - e^{\omega qt})$$

entonces

$$\frac{1}{\Big(1 - \frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q}{|\omega|}\Big)(1 - e^{\omega qt})} \leq \frac{1}{\Big(1 - \frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q}{|\omega|}\Big)} \tag{3.32}$$

luego utilizando las expresiones (3.27) y (3.28) tenemos

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq \frac{M\|x_0\|}{\Big(1 - \frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q}{|\omega|}(1 - e^{\omega qt})\Big)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{M\|x_0\|}{\Big(1 - \frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q}{|\omega|}\Big)^{\frac{1}{q}}}$$

así,

$$\|x(t)\|e^{-\omega t} \leq \frac{M\|x_0\|}{\left(1 - \frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\|x(t)\| \leq \frac{M\|x_0\|e^{\omega t}}{\left(1 - \frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.33}$$

Considerando (3.21) y (3.22) tenemos que $\exists \varepsilon_1 > 0$ talque el estado $x(t)$ está acotado de la siguiente manera

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon_1 M\|x_0\|e^{\omega t}}{\left(1 - \frac{\mu M^{q+1}\|KC\|\varepsilon_1^q\|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.34}$$

■

4 Conclusiones

Después de haber realizado el trabajo de tesis, se concluye que:

1. Aún es complicado encontrar una matriz de ganancia K con retroalimentación de salida, tal que todos los autovalores de la matriz $A + BKC$ tengan parte real negativa, esta dificultad nos conduce a problemas de optimización no convexos.

2. Dados autovalores estables de la matriz $A + BKC$, no existen las condiciones necesarias y suficientes para las matrices A, B y C dadas para que exista una matriz de ganancia K.

3. Se logró demostrar la estabilización exponencial de un tipo de sistemas afines no lineales, la cual resultó como una aplicación natural del lema generalizado de Gronwall- Bellman.

Bibliografía

[1] Gronwall, T. H. (1919). “Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations”. Annals of Mathematics, 292-296.

[2] Jacobson, D. H. (1976). “Stabilization and optimal control of nonlinear systems homogeneous-in-the-input”. In Directions in Large-Scale Systems (pp. 389-399). Springer, Boston, MA.

[3] Jurdjevic, V., & Quinn, J. P. (1978). “Controllability and stability”. Journal of differential equations, 28(3), 381-389.

[4] Slemrod, M. (1978).“Stabilization of bilinear control systems with applications to nonconservative problems in elasticity”. SIAM Journal on Control and Optimization, 16(1), 131-141.

[5] Ghrissi, T., & Hammami, M. A. (2017). “New nonlinear inequalities and application to control systems ”. Palestine J Math, 6, 47-55.

[6] Oguntuase, J. A. (2001).“On an inequality of Gronwall”. Journal of inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2(1), 1-6.

[7] Mota, R., Nadri, M., & Hammouri, H. (2008).“Nonlinear implicit on-line observer: application to the estimation in binary distillation columns”. IFAC Proceedings Volumes, 41(2), 3859-3864.

[8] Pachpatte, B. G. (1973). “A note on Gronwall-Bellman inequality”. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(3), 758-762.

[9] Vidyasagar,M.(1993) “Nonlinear Systems Analysis ”*2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs.* New Jersey.

[10] Zevin, A., & Pinsky, M. (2003).“Exponential stability and solution bounds for systems with bounded nonlinearities”. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(10), 1799-1804.

[11] Desoer, C. A., Vidyasagar, M., & Willson Jr, A. N. (1975). “Feedback Systems: Input-Output Properties”.

[12] Vidyasagar, M. (2002). “Nonlinear systems analysis ”. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[13] N’Doye, I., Zasadzinski, M., Darouach, M., Radhy, N. E., & Bouaziz, A. (2011). “Exponential stabilization of a class of nonlinear systems: A generalized Gronwall Bellman lemma approach”. Nonlinear Analysis., Theory, Methods and Applications, 74(18), 7333-7341.

[14] Botelho, G., Pellegrino, D., & Teixeira, E. (2012). “Fundamentos de análise funcional ”. SBM.

[15] Restrepo, G. (2010). Introducción al análisis funcional. Universidad del Valle. Cali., Texto.