



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Codificación neuronal vía métodos algebraicos

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Moisés Samuel TOLEDO JULIÁN

ASESOR

Mg. Alex MOLINA SOTOMAYOR

Lima, Perú

2022



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Toledo, M. (2022). *Codificación neuronal vía métodos algebraicos*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Moisés Samuel Toledo Julián
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42433319
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9586-3498
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alex Molina Sotomayor
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06092720
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-6270-9654
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Gabriel Armando Muñoz Márquez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	44444774
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Napoleón Caro Tuesta
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10192983
Miembro del jurado 3	
Nombres y apellidos	Alex Molina Sotomayor
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06092720

Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.3. Álgebra
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Los Olivos Urbanización: AA.HH 28 de Julio Manzana y lote: B1, Lt1 Calle: 6 de noviembre Latitud: -12.0043797 Longitud: -77.0797424
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Enero 2019 - Octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

**ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO
ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA PURA**

Siendo las 17:00 horas del día Jueves doce de Mayo de dos mil veintidos, en la sala virtual meet.google.com/ais-rycn-anf, el Jurado de Tesis conformado por los siguientes docentes:

PRESIDENTE	:	Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez
MIEMBRO	:	Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
MIEMBRO EXTERNO	:	Dr. Napoleón Caro Tuesta
MIEMBRO ASESOR	:	Mg. Alex Molina Sotomayor

se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «**CODIFICACIÓN NEURONAL VÍA MÉTODOS ALGEBRAICOS**» presentada por el Señor Bachiller **Moisés Samuel Toledo Julián**, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Señor Bachiller **Moisés Samuel Toledo Julián**, el calificativo de dieciocho (**muy bueno**).

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura** al **Bachiller Moisés Samuel Toledo Julián**.

Siendo las 18:45 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez
PRESIDENTE

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
MIEMBRO

Dr. Napoleón Caro Tuesta
MIEMBRO EXTERNO

Mg. Alex Molina Sotomayor
MIEMBRO ASESOR

DEDICATORIA

En memoria a mi madre,
al valor de mi padre,
y en amor a mi hermosa idónea Iris.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dios de Abraham, Isaac, Jacob y David, nuestro Creador y Rey Celestial. Quien me fortalece y proporciona la sabiduría en su infinita gracia y misericordia.

Eterno agradecimiento a mis padres, por su amor íntegro, dedicación y compromiso para con mis estudios académicos. Sobre todo por mi formación Cristiana.

A mi hermosa idónea, mi esposa Iris Fernández Tinco, quien me ha infundido el ánimo para culminar este trabajo. Dios me ha bendecido con su vida, en amor mutuo y la consolidación de nuestra familia en matrimonio.

Agradezco a mi asesor, Prof. Alex Molina Sotomayor, por su aporte con la excelencia académica así como por la amistad amplia y sincera desde mi formación en pregrado, a él debo mi interés por el álgebra.

Agradecer también al Prof. Napoleón Caro Tuesta por compartir su don y talento con el álgebra y la matemática en general, orientando y definiendo una ruta que anima a deleitarse con el arte de la matemática.

Agradecimiento especial al Dr. Gabriel Muñoz Márquez por la revisión y sugerencias, muy necesarias para la mejora de la tesis.

Índice general

	Introducción	xvii
Capítulo 1	Códigos Neuronales	1
1.1	Campos receptivos	2
1.2	Complejo simplicial asociado	6
1.3	Teorema del nervio y relaciones tipo Helly	8
Capítulo 2	Anillo e Ideal Neuronal	11
2.1	Ideales y variedades	11
2.2	Ideal neuronal	12
2.3	Anillo neuronal	14
2.4	Espectro del anillo neuronal	16
Capítulo 3	Estructura Algebraica del Campo Receptivo	21
3.1	Relaciones alternativas para el anillo neuronal	21
3.2	Relaciones para campos receptivos	23
3.3	Forma canónica del ideal neuronal	24
3.4	Ideales Stanley-Reisner	27
Capítulo 4	Homomorfismo de Anillos Neuronales	29
4.1	Aplicaciones elementales entre códigos	29
4.2	Anillo de homomorfismos de anillos neuronales	32
4.3	Homomorfismo de anillos neuronales	36
4.4	Aplicaciones código preservador de neuronas	37
4.5	Anillos neuronales como módulos	40
Capítulo 5	Conclusiones	45
	Referencias Bibliográficas	48
Apéndice A	Terminología biológica	49
Apéndice B	Algoritmo para determinar $FC(J_c)$	51

CODIFICACIÓN NEURONAL VÍA MÉTODOS ALGEBRAICOS

Moisés Samuel Toledo Julián

2022

Asesor : Mg. Alex Molina Sotomayor
Grado obtenido : Magíster en Matemática Pura

.....

RESUMEN

En este trabajo nos proponemos entender la estructura algebraica y geométrica que subyace a la actividad neuronal en el cerebro, la cual está relacionada con algún estímulo externo específico. Se usa la teoría de códigos neuronales a fin de obtener la estructura organizativa de circuitos neuronales, con funciones desconocidas en el cerebro, y comprobamos que no es preciso conocer el estímulo externo para determinar dicha estructura en las neuronas. Finalmente mostramos que en la teoría de códigos neuronales es posible desarrollar métodos algebraicos, topológicos, geométricos y computacionales a fin de abordar preguntas en neurociencias asociadas a la codificación neuronal y las redes neuronales.

Palabras clave

Códigos neuronales, código convexo, anillo neuronal, ideal neuronal, forma canónica.

NEURONAL CODING VIA ALGEBRAIC METHODS

Moisés Samuel Toledo Julián

2022

Advisor : Mg. Alex Molina Sotomayor
Degree obtained : Master in Pure Mathematics

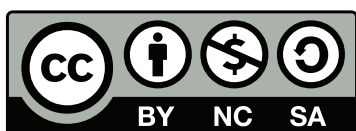
.....

ABSTRACT

In this work, we intend to understand the algebraic and geometric structure that underlies the neuronal activity in the brain, which is related to some specific external stimulus. The theory of neural codes is used in order to obtain the organizational structure of neural circuits, with unknown functions in the brain, and we found that it is not necessary to know the external stimulus to determine this structure in neurons. Finally we show that in the theory of neural codes it is possible to develop algebraic, topological, geometric and computational methods in order to address questions in neuroscience associated with neural coding and neural networks.

Keywords

Neural codes, convex code, neural ring, neural ideal, canonical form.



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Moisés Samuel Toledo Julián
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42433319
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9586-3498
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alex Molina Sotomayor
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06092720
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-6270-9654
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Gabriel Armando Muñoz Márquez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	44444774
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Napoleón Caro Tuesta
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10192983
Miembro del jurado 3	
Nombres y apellidos	Alex Molina Sotomayor
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06092720

Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.3. Álgebra
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Los Olivos Urbanización: AA.HH 28 de Julio Manzana y lote: B1, Lt1 Calle: 6 de noviembre Latitud: -12.0043797 Longitud: -77.0797424
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Enero 2019 - Octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

Referencia bibliográfica

Toledo, M. (2022). *Codificación neuronal vía métodos algebraicos*. Tesis para optar el grado de Magíster en Matemática Pura. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Introducción

Para el cerebro del ser humano, las neuronas han constituido un componente fundamental en el funcionamiento sistemático interno y en la relación con su entorno exterior [1]. Ha sido sujeto de múltiples estudios desde diversas áreas, y en particular de la neurobiología, sin embargo se desconocen aspectos como el diagrama completo de conexiones neuronales, y dado que el conocimiento de la conectividad en el sistema nervioso es esencial para comprender su función, crear métodos que permitan completar el esquema de conexiones neuronales es un reto. Entre los datos conocidos del cerebro, se sabe que: pesa menos del 2 % del peso del cuerpo y consume más del 20 % de energía, sin embargo en actividades como la solución de un problema matemático utiliza menos del 1 % del total de energía disponible [2].

Sebastian Seung plantea el término *conectoma* para definir a la estructura viva que cambia por la experiencia, expandiéndose cada vez que se aprende algo nuevo, esta consiste en un diagrama completo de todas las neuronas y las conexiones sinápticas contenidas en un sistema nervioso. Dado que un milímetro cúbico del cerebro humano¹ posee, aproximadamente, cien mil neuronas y mil millones de conexiones [3], Seung afirma que reconstruir una parte del cerebro tan pequeña como la cabeza de un alfiler requeriría al menos un millón de años [4], de modo que se debe contar con métodos eficientes y alternativos a fin de obtener avances sustanciales en el conocimiento de la estructura de las conexiones neuronales. Ya para el nemátodo *Caenorhabditis Elegans* (*C. Elegans*) cuyo sistema nervioso, en el caso hermafrodita, está compuesto por 302 neuronas y 6418 sinápsis, se ha podido determinar la estructura total de su conectoma, después de 30 años de estudio y a raíz del uso de métodos computacionales, y se ha constituido una descripción digital con fines a realizar estudios clínicos viables en seres humanos con autismo, esquizofrenia y otros trastornos neurológicos [5].

La habilidad para realizar mediciones no invasivas en el cerebro humano dio un gran vuelco al incluirse las imágenes por resonancia magnética funcional (fMRI por sus siglas en inglés). Un estímulo o tarea evoca una dependencia del nivel de oxígeno en la sangre, ya que al activarse un grupo de neuronas una mayor cantidad de oxígeno es enviado mediante el flujo sanguíneo, modificando el campo magnético inducido por el dispositivo con fMRI y siendo registrado en imágenes. Este procedimiento permite localizar áreas especializadas en el procesamiento de tareas como la motora, lenguaje, etc. Aunque la localización es importante en medicina e investigación del cerebro humano, un enfoque computacional discreto sirve como una vía diferente y complementaria. De este modo, es natural indagar sobre lo que es procesado o

¹aproximadamente 4 kilómetros de fibra nerviosa, del total de más de un millón y medio de kilómetros.

representado al interior de un área específica del cerebro, así como explicar patrones de respuesta cerebral como una función de estímulos y tareas.

El campo receptivo es un principio fundamental en neurociencia sensorial, unificando mediciones a través de la electrofisiología, fMRI y comportamiento. Sherrington [6] en 1906 acuñó la frase campo receptivo para describir un comportamiento (como el acto reflejo de rascarse de un perro) no en unidades de salida de datos (como la velocidad o intensidad de contracción de un músculo) sino en términos de entrada de datos (como las regiones de piel que provocan el comportamiento de rascado). Este cambio de unidades permite indagar, por ejemplo, sobre el área de extensión máxima cubierta en la relación estímulo-respuesta, la localización de regiones de mayor o menor sensibilidad, combinación de regiones que producen el mismo acto reflejo, etc. Por tanto un campo receptivo se puede extender a una población de células, en particular de neuronas.

Las neuronas en el cerebro representan estímulos externos a través de códigos neuronales, estos códigos se obtienen de la relación estímulo-respuesta, asociando a cada neurona un campo receptivo convexo. Es decir, la neurona responde ante un estímulo mediante una función de respuesta, la cual constituye un campo receptivo, esta toma una región de un cierto espacio, denominado espacio de estímulos, donde la neurona supera un valor umbral, alcanzando la mayor tasa de activación. En tanto que para otras regiones el valor alcanzado es nulo o no supera el valor umbral.

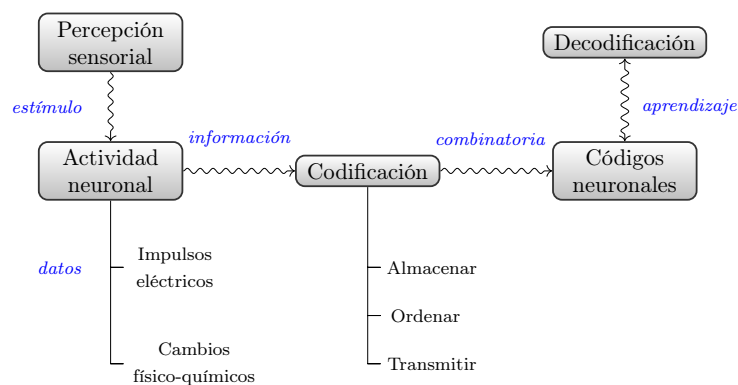
Matemáticamente un código neuronal \mathcal{C} es una colección de vectores binarios de longitud dada n que registra los patrones de activación de un conjunto de neuronas. Por ejemplo, podemos considerar a los códigos neuronales que surgen de las células de lugar del hipocampo, neuronas que responden al estímulo de posicionamiento geográfico. En esta configuración, el espacio de estímulos se puede visualizar como un subconjunto de \mathbb{R}^2 cubierto por una colección \mathcal{U} de conjuntos convexos de manera que la disposición \mathcal{U} forme un diagrama de Euler [7] para \mathcal{C} . Hay algunos métodos para determinar si existe tal realización convexa; sin embargo, estos métodos no describen cómo dibujar una realización [8].

Un problema importante confrontado por el cerebro es inferir propiedades de un espacio de estímulos representado por códigos neuronales sin conocer los campos receptivos, usando solamente la estructura intrínseca del código neuronal. Es decir, inferir o extraer el espacio de estímulos del código neuronal. Para ello se hace uso del anillo neuronal y el ideal neuronal asociado. Estos son objetos algebraicos que codifican la totalidad de los datos combinatorios de un código neuronal. A su vez estos objetos algebraicos pueden ser expresados en una forma canónica que traslada directamente una descripción minimal de la estructura de campo receptivo vinculado al código neuronal [9].

Las aplicaciones entre dos códigos neuronales están en biyección con los homomorfismos entre anillos neuronales. Se establece una relación con los anillos de Stanley-Reisner y usando la teoría de ideales monomiales se obtiene un algoritmo para calcular la forma canónica asociada a cualquier código neuronal. Siendo este el proceso previo para inferir características del espacio de estímulos y por ende de la actividad neuronal.

Códigos Neuronales

El cerebro construye una concepción del mundo exterior codificando la información a partir de la actividad neuronal realizada en su interior, siendo los estímulos sensoriales el medio para generar dicha actividad. La información es almacenada, ordenada y transmitida mediante códigos neuronales, donde los datos se obtienen de los impulsos eléctricos y cambios físico-químicos, permitiéndole al cerebro receptionar y decodificar. El procesamiento de información realizado a partir de los códigos neuronales es denominado codificación neuronal, mediante ella podemos saber como se transforma la información a través de cada una de las etapas después de la percepción sensorial e interconectada a la actividad neuronal en el cerebro.



Mediante palabras código podemos describir el estado (activas o no) de n neuronas, etiquetadas como $[n] = \{1; \dots; n\}$. A fin de que podamos describir todos los estados de una colección de n neuronas en un periodo de tiempo, usaremos códigos neuronales en el espacio de codificación de la actividad neuronal $\{0; 1\}^n$.

Definición 1.1 (código neuronal). Una palabra código es un vector binario $c \in \{0; 1\}^n$. Un código neuronal \mathcal{C} es un conjunto de palabras códigos, $\mathcal{C} \subset \{0; 1\}^n$.

Ejemplo 1.1. Consideremos la actividad neuronal para tres neuronas

$$\mathcal{C} = \{(0; 0; 0), (1; 0; 0), (0; 1; 0), (1; 1; 0), (1; 0; 1), (1; 1; 1)\} \subset \{0; 1\}^3$$

La interpretación es la siguiente

- $(0;0;0)$ indica que ninguna neurona está activa
- $(1;0;0), (0;1;0)$ indica que la neurona 1 o la neurona 2 está activa
- $(1;1;0), (1;0;1)$ indica que las neuronas 1-2 y 1-3 están activas
- $(1;1;1)$ indica que las tres neuronas están activas

Observación. Haremos algunos cambios en la notación, en el ejemplo anterior suprimimos la notación de vector, escribiendo el código $\mathcal{C} = \{000, 100, 010, 110, 101, 111\} \subset \{0;1\}^n$. Así también, en vez de definir el código neuronal en términos de vectores binarios, describiremos el código neuronal en términos de neuronas que se activan juntas, usando el concepto de soporte.

Definición 1.2 (soporte). El soporte de una palabra código $c = (c_1; \dots; c_n) \in \{0;1\}^n$ es el conjunto $\text{sop}(c) = \{i \in [n] \mid c_i = 1\} \subset [n]$. El soporte de un código neuronal \mathcal{C} es $\text{sop}(\mathcal{C}) = \{\text{sop}(c) \mid c \in \mathcal{C}\}$.

Para el código neuronal del ejemplo 1.1 tenemos $\text{sop}(\mathcal{C}) = \{\emptyset; 1; 2; 12; 13; 123\}$.

Bajo la literatura de neurociencia, tales códigos son llamados códigos neuronales combinatorios [9, 10], puesto que descartan el tiempo y la tasa de actividad neuronal y sólo retienen información combinatoria sobre los subconjuntos de neuronas que se activan juntas.

1.1. Campos receptivos

En neurociencias, el término *campo receptivo* es reservado para subconjuntos del campo visual, consideraremos el término en un sentido más amplio. La actividad de las neuronas, en diversas áreas del cerebro, pueden ser caracterizadas por campos receptivos, estos son aplicaciones $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, para cada célula i , del espacio de estímulos X , a la tasa de activación promedio de una neurona i , en respuesta a cada estímulo. En lo que sigue identificamos, por abuso de notación, $\text{sop}(f_i) = \{U \subset X \mid f_{i|U} > 0\}$ con el campo receptivo en sí. De este modo, campos receptivos convexos son subconjuntos convexos del espacio de estímulos X , con $X \subset \mathbb{R}^d$.

Las células de lugar, células del hipocampo, están asociadas a campos de lugar, de modo que cada célula i tiene una alta tasa de activación en alguna región U (aproximadamente convexa) y mucho menor en otras V , en el posicionamiento espacial de un ser vivo [11].

Un código de campo receptivo es un código neuronal que corresponde a la representación que el cerebro hace del espacio de estímulos cubierto por los campos receptivos. Cuando un estímulo está en la intersección de diversos campos receptivos, las neuronas asociadas pueden activarse juntas y el resto permanecer inactivas.

El interés está centrado en determinar cuánta información del espacio de estímulos se puede recuperar de la estructura intrínseca de los códigos neuronales que surgen de la actividad de las células de lugar. Para ello se requiere que los campos de lugar sean

abiertos, para evitar comportamientos patológicos, como puede suceder, en campos bidimensionales que se cruzan en un solo punto o a lo largo de una línea. Con ello se desea evitar palabras código que corresponden a conjuntos de medida nula, pues la probabilidad de que un conjunto de neuronas correspondientes a un conjunto de medida nula se activen, es cero. En adelante consideramos campos receptivos en general teniendo como referencia los campos de lugar.

Sea $\mathcal{C} \subset \{0;1\}^n$ un código neuronal, y sea $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ una colección de campos receptivos en un espacio de estímulos X , tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. La estructura de campo receptivo de \mathcal{C} se refiere al conjunto de relaciones entre los U_i , tales como

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j, \text{ tal que } \sigma \cap \tau = \emptyset$$

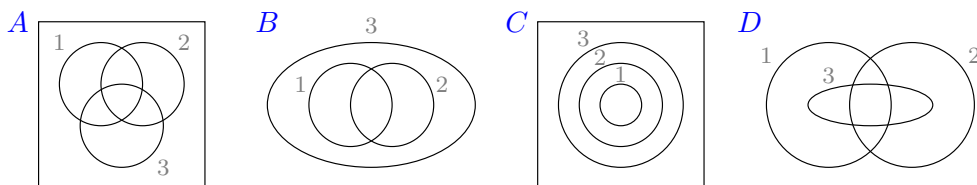
En particular, esto incluye cualquier intersección vacía $\bigcap_{i \in \sigma} U_i = \emptyset$ (donde $\tau = \emptyset$).

Definición 1.3 (realización). Sea $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ es una colección de conjuntos en un espacio topológico X . El código de \mathcal{U} es el código neuronal definido por

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \left\{ c \in \{0;1\}^n \mid \bigcap_{c_i=1} U_i \setminus \bigcup_{c_j=0} U_j \neq \emptyset \right\}$$

Deseamos determinar códigos neuronales que posean una realización convexa.

Ejemplo 1.2. En la siguiente figura se tiene cuatro arreglos de tres campos receptivos convexos $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$, el rectángulo denota el espacio de estímulos X si $\bigcup_{i=1}^3 U_i \subsetneq X$.

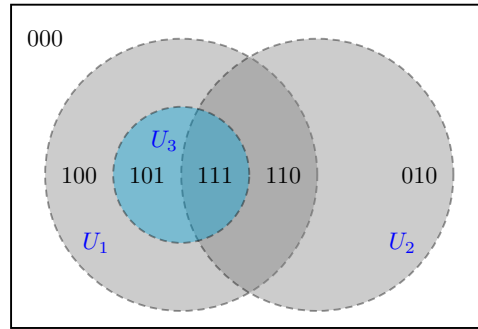


- $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = 2^{[3]}$ incluyendo la palabra código 000
- $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{111;101;011;001\}$ y $X = U_3$
- $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{111;011;001;000\}$
- $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{111;101;011;110;100;010\}$ y $X = U_1 \cup U_2$

Definición 1.4 (código neuronal convexo). Un código neuronal \mathcal{C} es abierto y convexo, con dimensión de embebimiento d , si existe una realización U_1, \dots, U_n de \mathcal{C} tal que U_1, \dots, U_n son subconjuntos abiertos y convexos de \mathbb{R}^d . El menor valor d del embebimiento convexo abierto, es la dimensión de \mathcal{C} .

La dimensión de embebimiento mínimo para los códigos en A y D es $d = 2$, en tanto que para B y C es $d = 1$.

Ejemplo 1.3. Una realización convexa del código $\mathcal{C} = \{000, 100, 010, 110, 101, 111\}$ es



Definición 1.5 (buen cubrimiento). Un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_1; U_2; \dots; U_n\}$ es un buen cubrimiento, si cada U_i es contractible (homotópicamente equivalente a un punto) y si $\bigcap_{k=1}^m U_{i_k}$, $m \leq n$, es contractible (siempre que la intersección sea no vacía).

De la definición tenemos que cualquier cubrimiento convexo es un buen cubrimiento, esto permite recuperar los grupos de homotopía del espacio de estímulos X a partir del código neuronal. Dado que $U_i \subset X$, asumimos que el espacio X puede ser embebido en un espacio euclidiano \mathbb{R}^d para algún d . Aunque la introducción de códigos neuronales convexos fue motivado por las células de lugar (células del hipocampo), la codificación convexa es utilizable en la representación de otros tipos de información neuronal

- en la corteza visual las células se activan con la orientación de los objetos en el entorno. Estas células también tienen campos receptivos, que son conjuntos de ángulos convexos
- en otras partes del cerebro en donde no se comprende bien el espacio de estímulos, como el sistema olfativo, es preciso caracterizar la convexidad en términos de la estructura intrínseca del código neuronal, en vez de hacer referencia a una realización en el espacio de estímulos, a fin de determinar la relevancia de la codificación convexa

Más aún, si se desea comprender cómo surgen los códigos convexos en el cerebro, se debe caracterizar las redes neuronales que dan lugar a los códigos neuronales convexos, ya que no experimentamos el mundo como una corriente de estímulos no relacionados, pues el cerebro organiza diferentes tipos de estímulos en espacios de estímulos altamente estructurados quedando representado en la estructura intrínseca del código neuronal.

En adelante, asumiremos U_i abierto y convexo, ya que de lo contrario no tendremos información relevante de los códigos neuronales.

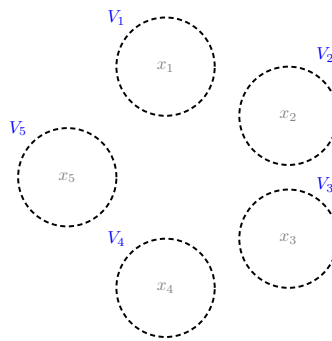
Lema 1. Sea $\mathcal{C} \subset \{0; 1\}^n$ un código neuronal. Entonces, para cualquier $d \geq 1$, existe un espacio de estímulos $X \subset \mathbb{R}^d$ y una colección de conjuntos abiertos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ (no necesariamente convexos), con $U_i \subset X$ para cada $i \in [n]$, tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{c_1; \dots; c_m\} \subset \{0; 1\}^n$ un código neuronal arbitrario. Para cada $c \in \mathcal{C}$ elegimos un punto $x_c \in \mathbb{R}^d$ y una vecindad abierta V_c de x_c tal que dos vecindades cualesquiera no se intersecan, esto es posible pues \mathbb{R}^d es un espacio de Hausdorff.

Definamos $U_j = \bigcup_{k \in A_j} V_{c_k}$, $A_j = \{k \in \{1; \dots; n\} \mid j \in \text{sop}(c_k)\}$, y consideremos $\mathcal{U} = \{U_1; \dots; U_n\}$, $X = \bigcup_{i=1}^m V_{c_i}$. Notemos que si la palabra código nula están en \mathcal{C} , entonces $V_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i$ corresponde al punto exterior no cubierto por cualquiera de los U_i . De este modo $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. ■

Matemáticamente, la pregunta sobre la dimensión más baja donde un código es realizable convexo requiere un enfoque diferente al de la posibilidad de realización y escapan a los propósitos del estudio [12].

Ejemplo 1.4. Sea $\mathcal{C} = \{001; 101; 011; 110; 100\} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, para cada c_i asociamos un $x_i \in \mathbb{R}^d$ y una vecindad abierta V_c de x_c tal que $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j$.



De este modo tenemos

$$\begin{aligned} \text{sop}(c_1) &= \{3\}, & \text{sop}(c_2) &= \{1; 3\}, & \text{sop}(c_3) &= \{2; 3\} \\ \text{sop}(c_4) &= \{1; 2\}, & \text{sop}(c_5) &= \{1\} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} A_1 &= \{2; 4; 5\} \Rightarrow U_1 = V_2 \cup V_4 \cup V_5 \\ A_2 &= \{3; 4\} \Rightarrow U_2 = V_3 \cup V_4 \\ A_3 &= \{1; 2; 3\} \Rightarrow U_3 = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \end{aligned}$$

para cada $\sigma \subset [n]$ se tiene

$$\begin{aligned} \sigma = \{1\} &\rightarrow U_1 - (U_2 \cup U_3) \neq \emptyset, & \sigma = \{13\} &\rightarrow (U_1 \cap U_3) - U_2 \neq \emptyset \\ \sigma = \{2\} &\rightarrow U_2 - (U_1 \cup U_3) = \emptyset, & \sigma = \{23\} &\rightarrow (U_2 \cap U_3) - U_1 \neq \emptyset \\ \sigma = \{3\} &\rightarrow U_3 - (U_1 \cup U_2) \neq \emptyset, & \sigma = \{123\} &\rightarrow (U_1 \cap U_2 \cap U_3) - \emptyset = \emptyset \\ \sigma = \{12\} &\rightarrow (U_1 \cap U_2) - U_3 \neq \emptyset, & \sigma = \emptyset &\rightarrow X - (U_1 \cup U_2 \cup U_3) = \emptyset \end{aligned}$$

Con ello se obtiene

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{1; 3; 12; 13; 23\} = \mathcal{C}$$

El espacio de estímulos es obtenido mediante la unión de los V_{c_k} , es decir $X = \bigcup_{k=1}^5 V_{c_k}$. Notemos que si incluimos 000 en \mathcal{C} , entonces asociamos un $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y un abierto V_0 de x_0 de modo que $V_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^3 U_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^5 V_{c_i}$.

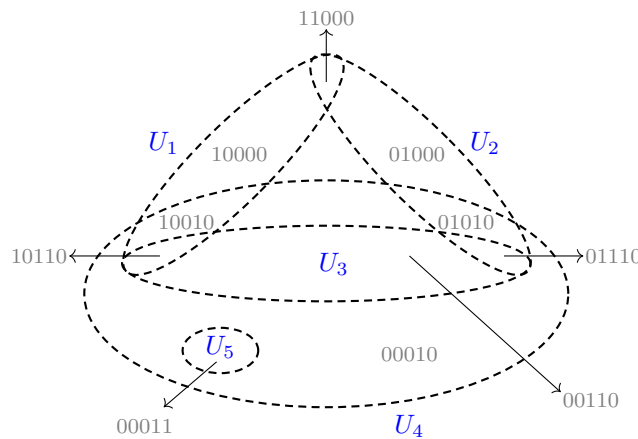
El lema nos indica que si ninguna restricción es hecha sobre los U_i entonces es posible obtener una realización de un código en cualquier espacio, lo cual no proporciona información estructural sobre el espacio estímulo asociado. En particular cualquier código \mathcal{C} puede ser realizado con abiertos en \mathbb{R} , en efecto: sea $C = \{c_1; \dots; c_m\}$ y B_1, \dots, B_m intervalos abiertos disjuntos en \mathbb{R} , sea $\mathcal{U}_i = \bigcup_{i \in \text{sop}(c_k)} B_k$ y $X = \bigcup_{j=1}^m B_j$, de este modo $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$.

Sin embargo, no cualquier código tiene una realización convexa. En efecto: el código $\mathcal{C} = \{0; 1\}^3 \setminus \{111; 001\}$ no posee una realización convexa. Para probar ello asumamos lo contrario, de este modo existe $\mathcal{U} = \{U_1; U_2; U_3\}$ un conjunto de abiertos convexos en \mathbb{R}^d tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Dado que $110 \in \mathcal{C}$ entonces $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, sin embargo $(U_1 \cap U_3) \setminus U_2 \neq \emptyset$ y $(U_2 \cap U_3) \setminus U_1 \neq \emptyset$, pues $101, 011 \in \mathcal{C}$. De este modo podemos elegir $p_1 \in (U_1 \cap U_3) \setminus U_2$ y $p_2 \in (U_2 \cap U_3) \setminus U_1$ tal que el segmento $l = [p_1; p_2] \subset U_3$, pues U_3 es convexo. Como $111, 001 \notin \mathcal{C}$ entonces $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ y $U_3 \setminus (U_1 \cup U_2)$ son vacíos, así $l \subseteq U_1 \cup U_2$ mas no en ambos. Luego $U_1 \cap l, U_2 \cap l$ son conjuntos abiertos no vacíos disjuntos que cubren l , lo cual es una contradicción al hecho de que l es conexo (con la topología de subespacio). Esto es una contradicción a la conexidad de l , por lo que ninguna realización convexa existe para \mathcal{C} .

Ejemplo 1.5. *El código*

$$\mathcal{C} = \{00000; 10000; 01000; 00010; 11000; 10010; 01010; 00110; 00011; 10110; 01110\}$$

posee una realización convexa, no necesariamente única, con abiertos convexos en \mathbb{R}^2 , $\mathcal{U} = \{U_1; U_2; U_3; U_4; U_5\}$.



1.2. Complejo simplicial asociado

En el caso de los códigos de las células de lugar del hipocampo, ciertas características topológicas del entorno exterior, que percibe el cerebro, pueden inferirse únicamente del código neuronal, sin conocer los campos de lugar. Esta información se puede extraer del complejo simplicial asociado al código neuronal.

Definición 1.6 (complejo simplicial). Un conjunto $\Delta \subset \{0;1\}^n$ es un complejo simplicial abstracto si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subset \sigma$ implica $\tau \in \Delta$.

Diremos que un código neuronal \mathcal{C} es un complejo simplicial si $\text{sop}(\mathcal{C})$ es un complejo simplicial. En caso el código no sea un complejo simplicial, podemos completar el código a un complejo simplicial añadiendo palabras códigos omitidas.

Definición 1.7 (Complejo simplicial de un código). El complejo simplicial de un código \mathcal{C} es el conjunto $\Delta(\mathcal{C}) = \{\sigma \subset [n] \mid \sigma \subseteq \text{sop}(c) \text{ para algún } c \in \mathcal{C}\}$.

En el ejemplo 1.2 para cada uno de los arreglos de los tres campos receptivos se tiene $\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1;2\}, \{1;3\}, \{2;3\}, \{1;2;3\}\} = 2^{[3]}$.

Ejemplo 1.6. Consideremos el código $\mathcal{C} = \{000;100;010;110;001\} \subset \{0;1\}^3$. Notemos que $\text{sop}(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1;2\}, \{3\}\}$, de donde $\Delta(\mathcal{C}) = \text{sop}(\mathcal{C})$.

Ejemplo 1.7. Para $\mathcal{D} = \{000;100;010;110;011\} \subset \{0;1\}^3$ se tiene $\text{sop}(\mathcal{D}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1;2\}, \{2;3\}\}$. Notamos que \mathcal{D} no es un complejo simplicial, pues $\{2;3\} \in \text{sop}(\mathcal{D})$, pero $\{3\} \notin \text{sop}(\mathcal{D})$. Completamos $\text{sop}(\mathcal{D})$ con $\{3\}$, ello implica modificar el código \mathcal{D} añadiendo la palabra código 001, de este modo obtenemos el código ampliado $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{001\}$, así $\Delta(\mathcal{D}') = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1;2\}, \{2;3\}\} = \text{sop}(\mathcal{D}')$.

Observación. Para el complejo simplicial de un código, suprimiremos la notación conjuntista de sus elementos. De este modo en el ejemplo anterior tendremos $\Delta(\mathcal{D}') = \{\emptyset; 1; 2; 3; 12; 23\}$.

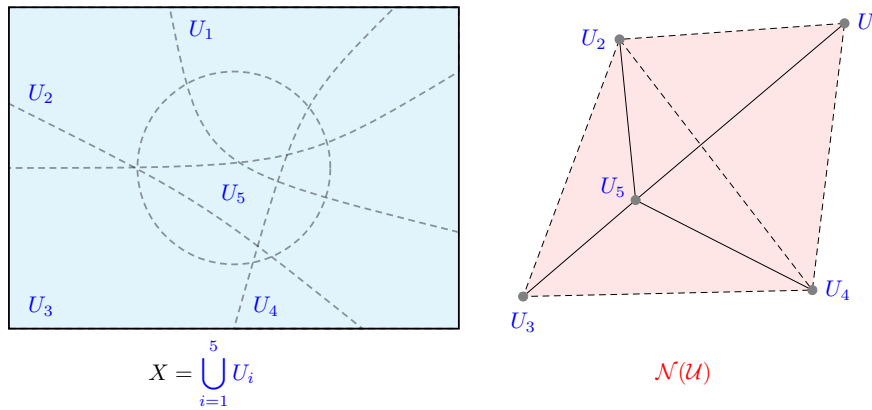
Precisamos relacionar la estructura del complejo simplicial $\Delta(\mathcal{C})$ con características del espacio de estímulos X . Para ello usaremos un teorema tipo Helly's (geometría convexa) y el teorema del nervio (topología) aplicados a los códigos de campos receptivos.

Sea $\mathcal{U} = \{U_1; \dots; U_n\}$ es una colección de subconjuntos abiertos y convexos de \mathbb{R}^d tal que $d < n$. Podemos asociar a \mathcal{U} un complejo simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ denominado el nervio de \mathcal{U} , en el que un subconjunto $\{i_1; \dots; i_k\} \subset [n]$ pertenece a $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ si y solamente si $\bigcap_{i=1}^k U_{i_i} \neq \emptyset$. Si los U_i son campos receptivos, no necesariamente convexos, entonces $\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$. En efecto:

$$\begin{aligned} \sigma = \{j_1; \dots; j_l\} \in \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})) &\Leftrightarrow \sigma \subset \text{sop}(c), c \in \mathcal{C}(\mathcal{U}) = \mathcal{C} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{i \in \sigma} U_i \setminus \bigcup_{j \notin \sigma} U_j \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

Es decir, el nervio del cubrimiento corresponde al complejo simplicial del código, convexo o no, asociado. Esto es aplicable a cubrimientos en general [13].

Ejemplo 1.8. Consideremos el espacio X y el cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}$, tal como se indica en la figura, obtenemos el nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ a partir de las intersecciones no vacías entre los U_i



De todo lo tratado hasta el momento tenemos que un código de un campo receptivo, es un código neuronal que corresponde a la representación que el cerebro hace del espacio estímulo cubierto por campos receptivos. Cuando un estímulo está en la intersección de diversos campos receptivos, las neuronas correspondientes pueden activarse en tanto que el resto permanece en silencio. Donde el subconjunto activo σ de neuronas puede ser identificada con una palabra código binaria $c \in \{0; 1\}^n$ mediante $\sigma = \text{sop}(c)$.

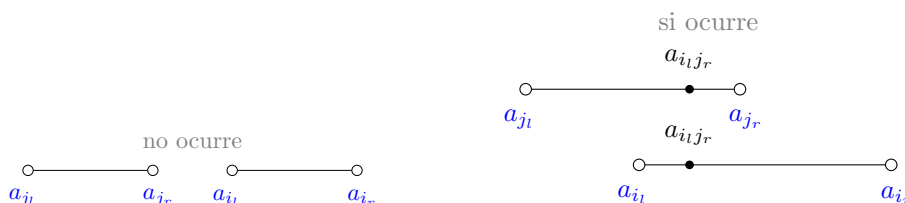
1.3. Teorema del nervio y relaciones tipo Helly

Generalmente un espacio estímulo X necesita solamente ser un espacio topológico. Sin embargo, se considera $X \subset \mathbb{R}^d$. El siguiente teorema es fundamental para caracterizar X .

Teorema 1 (Helly [14]). *Considere k subconjuntos convexos $U_1, \dots, U_k \subset \mathbb{R}^d$, donde $d < k$. Si la intersección de $d + 1$ cualesquiera de estos conjuntos es no vacía, entonces la intersección total $\bigcap_{i=1}^k U_i$ es también no vacía.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre d

Caso $d = 1$: los U_i son segmentos de recta con extremo izquierdo a_{i_l} y derecho a_{i_r} , donde cada dos segmentos tienen por lo menos un punto en común $U_i \cap U_j \neq \emptyset, \forall i \neq j$.



De allí sigue que ningún extremo izquierdo a_{i_l} de un segmento puede estar a la derecha del extremo derecho a_{j_r} de ningún otro segmento, de lo cual sigue la existencia de por lo menos un punto $a_{i_l j_r}$ que separa los extremos izquierdos a_{j_l}, a_{i_l} de los extremos derechos a_{j_r}, a_{i_r} esto ocurre para todos los k segmentos U_i , por lo que $\bigcap_{i=1}^k U_i \neq \emptyset$.

Hipótesis inductiva: se asume que el resultado es cierto para dimensión $d - 1$.

En dimensión d será suficiente considerar el caso de k regiones U_i , donde $k \geq d + 1$. Para $k = d + 1$ el resultado es trivial.

Sean $K_1 = \overline{U}_1, K_2 = \overline{U}_2, \dots, K_k = \overline{U}_k$ regiones convexas cerradas en \mathbb{R}^d , y sea K cualquier otra región, y supongamos que todas estas regiones cumplen con la condición del teorema. Sea G la región común a todas las regiones K_1, K_2, \dots, K_k , la cual, según la condición de la hipótesis, contiene al menos un punto y es una región convexa cerrada. Si la proposición no se cumple, entonces podemos suponer que las regiones K, K_1, K_2, \dots, K_k cumplen que K con cada d regiones de K_1, K_2, \dots, K_k tienen por lo menos un punto en común, pero que se encuentra fuera de G . Entonces existe un espacio \mathbb{R}^{d-1} , que separa G y K , sin que tengan un punto en común.

Sean H_1, H_2, \dots, H_k aquellas regiones que son las regiones comunes de cada d regiones de K_1, K_2, \dots, K_k . Cada una de ellas contiene G y por lo menos un punto de K , y en consecuencia tienen por lo menos un punto en común con \mathbb{R}^{d-1} el cual separa K y G . Este hecho puede expresarse de la siguiente manera: las regiones convexas K_1, K_2, \dots, K_k , que son las intersecciones de \mathbb{R}^{d-1} con K_1, K_2, \dots, K_k . Tienen cada d de ellas por lo menos un punto en común, y por lo tanto, de acuerdo a la validez de la hipótesis para dimensión $d - 1$, el conjunto de todos ellos, esto es K_1, K_2, \dots, K_k , tienen por lo menos un punto en común.

Lo que significa que \mathbb{R}^{d-1} con G tienen un punto en común, lo que contradice la suposición, de que \mathbb{R}^{d-1} no tiene ningún punto en común con G . Por lo tanto no puede existir ningún \mathbb{R}^{d-1} con la propiedad requerida, de lo cual sigue que K y G tienen por lo menos un punto en común, el cual también se encuentra en todos las $d + 1$ regiones K, K_1, K_2, \dots, K_k .

Dado que $U_i \subseteq K_i = \overline{U}_i$ entonces el resultado es válido para los U_i convexas. Con lo cual queda demostrada la proposición en general para todo número finito de regiones convexas. ■

A fin de relacionar la estructura del complejo simplicial de un código, $\Delta(\mathcal{C})$ a hechos topológicos del espacio estímulo $X(\mathcal{U}) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ se tiene el siguiente lema.

Lema 2 (Nervio, ver [15] Corolario 4G.3). *El tipo de homotopía de $X(\mathcal{U}) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ es igual al tipo de homotopía del nervio del cubrimiento, $\mathcal{N}(\mathcal{U})$. En particular $X(\mathcal{U})$ y $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ tienen el mismo grupo de homología.*

De este modo el nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$ es completamente determinado por su d -esqueleto, y corresponde al mayor complejo simplicial con el d -esqueleto. Mediante el teorema de Helly se impone restricciones sobre la dimensión minimal del espacio de estímulos X cuando $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ es asumido a ser un código de campo receptivo.

Si el espacio de estímulos X es mayor, esto es $\bigcup_{i=1}^n U_i \subsetneq X$, entonces el lema del nervio solo indica el tipo de homotopía de $X(\mathcal{U})$, mas no de X . De este modo la estructura del campo receptivo de un código tiene implicaciones para el espacio estímulo subyacente.

Sea d el menor entero para el cual el código puede ser realizado como un código convexo en \mathbb{R}^d , denominado como la dimensión de embebimiento mínimo de \mathcal{C} . El

complejo simplicial $\Delta(\mathcal{C})$, no es suficiente para determinar la dimensión de embebi-
miento mínimo de un código de campo receptivo, pero esta información está presente
en la estructura de campo receptivo del código.

Dado un campo receptivo $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ en un espacio estímulo X , existen rela-
ciones de contención entre intersecciones y uniones de los U_i que son obvias y no
tienen información sobre el ordenamiento particular de estos. Por ejemplo, $U_1 \cap U_2 \subseteq$
 $U_2 \cup U_3 \cup U_4$. En tanto que relaciones como $U_3 \subseteq U_1 \cup U_2$ no siempre ocurre, refle-
jando un ordenamiento particular del campo receptivo. Por la estructura de un campo
receptivo de \mathcal{C} nos referimos al conjunto de relaciones entre los U_i que no son obvias
y tienen la forma

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j, \sigma \cap \tau = \emptyset$$

En particular, se incluye cualquier intersección vacía $\bigcap_{i \in \sigma} U_i = \emptyset$ (aquí $\tau = \emptyset$). En el
ejemplo 1.2 el código mostrado en A no tiene una relación de estructura de campo
receptivo, en tanto que en B se tiene $U_1 \subset U_3$ y $U_2 \subset U_3$, en C se tiene $U_1 \subset U_2 \subset U_3$
y en D se tiene $U_3 \subset U_1 \cup U_2$.

A partir de un código \mathcal{C} se extraerá, algorítmicamente, una descripción minimal de la
estructura de campo receptivo. Esto sin obtener la realización $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ de \mathcal{C} para algún
ordenamiento del campo receptivo. Esto es un primer paso a fin de obtener característi-
cas del espacio de estímulos que no pueden ser obtenidas del complejo simplicial $\Delta(\mathcal{C})$.
Para ello se usará el marco algebraico geométrico de los anillos e ideales neuronales,
los cuales capturan los datos combinatorios de un código neuronal de modo que sea
algorítmicamente natural inferir una descripción compacta de la estructura de campo
receptivo deseado.

Anillo e Ideal Neuronal

Otras características del espacio de estímulos se pueden inferir de un código neuronal, para ello la geometría algebraica proporciona un marco útil a partir del cual obtener características geométricas y topológicas de los espacios de estímulos mediante la asociación de anillos de funciones. Todas las características relevantes del espacio están codificadas en la estructura intrínseca del anillo, donde las funciones coordenadas se vuelven indeterminadas y el espacio de estímulos en sí se define en términos de ideales en el anillo [9]. Esto es equivalente a lo que el cerebro enfrenta, al deducir características del espacio a partir de propiedades de funciones sin dominios específicos.

El anillo neuronal es un objeto algebraico geométrico que se puede asociar a cualquier código neuronal combinatorio. Al igual que el complejo simplicial de un código, el anillo neuronal codifica información sobre el espacio de estímulos, de modo que no considera los mapas de campos receptivos, y por tanto se acerca a la esencia de cómo el cerebro podría representar a los espacios de estímulo.

2.1. Ideales y variedades

Sea K un cuerpo, n el número de neuronas y $K[x_1; \dots; x_n]$ el anillo de polinomios con una indeterminada x_i para cada neurona. Consideramos K^n el espacio de actividad neuronal, donde cada punto $v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n$ es un vector de seguimiento del estado v_i de cada neurona.

Sea $J \subset K[x_1; \dots; x_n]$ es un ideal, la variedad del ideal es definida por

$$\mathbf{V}(J) = \{v \in K^n \mid f(v) = 0, \forall f \in J\}.$$

Sea $S \subset K^n$, el ideal de polinomios que se anulan en S es definido por

$$\mathbf{I}(S) = \{f \in K[x_1; \dots; x_n] \mid f(v) = 0, \forall v \in S\}$$

La correspondencia entre variedades e ideales revierten las inclusiones: $I \subseteq J \Rightarrow \mathbf{V}(J) \subseteq \mathbf{V}(I)$, y $S \subseteq T \Rightarrow \mathbf{I}(T) \subseteq \mathbf{I}(S)$. Mas aún $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ para cualquier variedad V , así también $\mathbf{I}(\mathbf{V}(J)) \supseteq J$, la inclusión contraria no siempre se cumple [16].

Consideramos que las neuronas tienen sólo dos estados, “activa” o “no activa”, de modo que $K = \mathbb{F}_2 = \{0; 1\}$ y en el caso de vectores $\{0; 1\}^n = \mathbb{F}_2^n$, puesto que haremos uso de la estructura de cuerpo de \mathbb{F}_2 .

2.2. Ideal neuronal

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_2^n$ un código neuronal. Consideremos el conjunto $I_{\mathcal{C}}$ correspondiente al conjunto de polinomios que se anulan en las palabras código de \mathcal{C} . Es decir

$$I_{\mathcal{C}} = I(\mathcal{C}) = \{f \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n] \mid f(c) = 0 \text{ para todo } c \in \mathcal{C}\}.$$

Proposición 1. $I_{\mathcal{C}}$ es un ideal de $\mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$.

Demostración. Notemos que $0 \in I_{\mathcal{C}}$, por lo que es un conjunto no vacío. Por otro lado

(i) para $f, g \in I_{\mathcal{C}}$, tenemos: $(f - g)(c) = f(c) - g(c) = 0 - 0 = 0$, entonces $f - g \in I_{\mathcal{C}}$

(ii) para $h \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$, $f \in I_{\mathcal{C}}$, tenemos $(h \cdot f)(c) = h(c) \cdot f(c) = h(c) \cdot 0 = 0$

De (i) y (ii) $I_{\mathcal{C}}$ es un ideal de $\mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$. ■

De este modo hemos asociado a cada código \mathcal{C} un ideal $I_{\mathcal{C}}$, el cual será denominado el ideal de anulamiento en \mathcal{C} .

A partir de la definición de $I_{\mathcal{C}}$ se cumple: $V(I_{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$. En efecto: sea el ideal $m_v = \langle x_1 - v_1; \dots; x_n - v_n \rangle$, definido para cualquier $(v_1; \dots; v_n) = v \in \mathbb{F}_2^n$, se tiene $V(m_v) = \{v\}$. Para un código $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_2^n$, definimos el ideal $J = \bigcap_{v \in \mathcal{C}} m_v$, entonces

$$V(J) = V\left(\bigcap_{v \in \mathcal{C}} m_v\right) = \bigcup_{v \in \mathcal{C}} V(m_v) = \bigcup_{v \in \mathcal{C}} \{v\} = \mathcal{C}$$

Finalmente notemos que

$$V(I_{\mathcal{C}}) = V(I(\mathcal{C})) = V(I(V(J))) = V(J) = \mathcal{C}$$

Ejemplo 2.1. Sea $I_{\mathcal{C}} \subset \mathbb{F}_2[x_1; x_2; x_3]$ un ideal que contiene a $f(x_1; x_2; x_3) = x_1(1 - x_2)$. Entonces el código \mathcal{C} no puede contener a 100 o 101 pues f no se anula en estos vectores.

El ideal $I_{\mathcal{C}}$ contiene a los polinomios $x_i(1 - x_i)$, $i \in [n]$ para cualquier código \mathcal{C} , estos polinomios son referidos como relaciones Booleanas. Los x_i constituyen funciones coordenadas, sin dominio específico, que permitirán conocer características relevantes del espacio estímulo, definiéndolo en términos de ideales del anillo. Dado que \mathbb{F}_2 es el cuerpo de referencia, estos polinomios se anulan bien en 0 o en 1, por lo que no

codifican información útil sobre el código al no establecer de forma fija su estado de activación.

Así también, el ideal generado por los $x_i(1 - x_i)$

$$\mathcal{B} = \langle x_1^2 - x_1; \dots; x_n^2 - x_n \rangle$$

está contenido propiamente en $I_{\mathcal{C}}$, con $\mathcal{C} \subsetneq \mathbb{F}_2^n$, independiente del código \mathcal{C} . En efecto: el polinomio $\rho_{\mathcal{C}} = \prod_{c_i=1} x_i \prod_{c_i=0} (1 - x_i)$ está en $I_{\mathcal{C}}$ pero no pertenece a \mathcal{B} . Mas aún, si $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^n$ entonces $V(\mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]) = \emptyset$ así $I_{\mathcal{C}} = \mathcal{B}$.

Precisamos que el ideal $I_{\mathcal{C}}$ separe la información relevante del código \mathcal{C} . A fin de cumplir con este cometido usaremos pseudomonomiales, los cuales capturan información no trivial de un código, es decir componentes de $I_{\mathcal{C}}$ que no contengan relaciones Booleanas.

Definición 2.1. Un pseudomonomial es un polinomio $f \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ el cual es el producto de factores lineales independientes

$$f = \prod_{i \in \sigma} x_i \cdot \prod_{j \in \tau} (1 - x_j)$$

donde $\sigma, \tau \subseteq [n]$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

En la definición anterior si $\sigma = \emptyset$ o $\tau = \emptyset$, consideramos $\prod_{i \in \sigma} x_i = 1$ o $\prod_{j \in \tau} (1 - x_j) = 1$. Notamos que $x_i(1 - x_i)$ no son pseudomonomiales, pues $\sigma = \tau = \{i\}$.

Definición 2.2. Sea $v \in \mathbb{F}_2^n$. El indicador para v es el pseudomonomial

$$\rho_v = \prod_{i \in \text{sop}(v)} x_i \cdot \prod_{j \notin \text{sop}(v)} (1 - x_j).$$

Notemos que $\rho_v(w) = 1$ si y solo si $w = v$, caso contrario $\rho_v(w) = 0$. También, cualquier pseudomonomial f de grado n es un polinomio indicador f_v para algún vector $v \in \mathbb{F}_2^n$, mas aún ningún pseudomonomial f_v posee grado menor a n .

Usaremos las propiedades de $I_{\mathcal{C}}$ para inferir propiedades de \mathcal{C} y sus realizaciones mediante abiertos convexos \mathcal{U} . Para ello, veamos la conexión entre los polinomios en $I_{\mathcal{C}}$ y los campos receptivos asociados a un código \mathcal{C} .

Teorema 2. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_2^n$ un código neuronal, $\mathcal{U} = \{U_1; \dots; U_n\}$ una colección de conjuntos abiertos en un espacio de estímulos X tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Entonces para cualesquiera $\sigma, \tau \subset [n]$ se cumple

$$\prod_{i \in \sigma} x_i \cdot \prod_{j \in \tau} (1 - x_j) \in I_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \bigcap_{i \in \sigma} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j$$

Demostración. (\Rightarrow) Vemos dos casos, según σ y τ se intersecan: (i) Si $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ y $\prod_{i \in \sigma} x_i \cdot \prod_{j \in \tau} (1 - x_j) \in I_{\mathcal{C}}$, entonces $\prod_{i \in \sigma} x_i \cdot \prod_{j \in \tau} (1 - x_j) \in \mathcal{B}$ y dado que $U_i \subseteq U_j$, $\forall i \in \sigma \cap \tau$ se tiene $\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j$. (ii) Si $\sigma \cap \tau = \emptyset$ y $\prod_{i \in \sigma} x_i \cdot \prod_{j \in \tau} (1 - x_j) \in I_{\mathcal{C}}$

entonces $\rho_v \in I_C$ para cada $v \in \mathbb{F}_2^n$ tal que $\text{sop}(v) \supseteq \sigma$ y $\text{sop}(v) \cap \tau = \emptyset$. Dado que $\rho_v(v) = 1$ entonces $v \notin C$ para cualquier v con $\text{sop}(v) \supseteq \sigma$ y $\text{sop}(v) \cap \tau = \emptyset$. Dado que $C = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ y $v \notin C$ entonces $\bigcap_{i \in \sigma} U_i \setminus \bigcup_{j \in \tau} U_j = \emptyset$. Luego $\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j$.
 (\Leftarrow) También separamos en dos casos, según σ y τ se intersecan: (i) Si $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ entonces $\prod_{i \in \sigma} x_i \cdot \prod_{j \in \tau} (1 - x_j) \in \mathcal{B} \subset I_C$. (ii) Si $\sigma \cap \tau = \emptyset$ entonces $\bigcap_{i \in \sigma} U_i \setminus \bigcup_{j \in \tau} U_j = \emptyset$ y $v \notin \mathcal{C}(\mathcal{U})$ para cualquier v tal que $\text{sop}(v) \supseteq \sigma$ y $\text{sop}(v) \cap \tau = \emptyset$, así

$$\prod_{i \in \text{sop}(v)} x_i \cdot \prod_{j \notin \text{sop}(v)} (1 - x_j) \in I_C$$

y en particular $\prod_{i \in \sigma} x_i \cdot \prod_{j \in \tau} (1 - x_j) \in I_C$. ■

La siguiente definición permite establecer una relación entre un código neuronal C e ideales en $\mathbb{F}_2^n[x_1; \dots; x_n]$.

Definición 2.3 (ideal neuronal). Sea $C \subset \mathbb{F}_2^n$ un código. El ideal neuronal de C , es el ideal $J_C = \langle \rho_v, \text{donde } v \notin C \rangle$.

Debido a que J_C es generado por polinomios indicadores, con vectores v que no están en C , entonces $J_C \subseteq I_C$. Una relación de mayor índole será dado en el teorema 5.

Ejemplo 2.2. Sea $C = \{000; 100; 101; 111; 110; 010\}$. Entonces $\mathbb{F}_2^3 \setminus C = \{001; 011\}$. Luego el ideal neuronal de C viene dado por

$$J_C = \langle (1 - x_1)(1 - x_2)x_3; (1 - x_1)x_2x_3 \rangle.$$

Notemos que

$$\rho_v = \prod_{i=1}^n ((x_i - v_i) - 1) = \prod_{\{i : v_i=1\}} x_i \prod_{\{j : v_j=0\}} (1 - x_j)$$

de donde $V(J_C) = V(\langle \rho_v : v \notin C \rangle) = C$.

2.3. Anillo neuronal

El anillo neuronal puede ser asociado a cualquier código neuronal combinatorio. Este anillo codifica información sobre el espacio de estímulos, descartando el conocimiento específico de mapas de campos receptivos, siendo un enfoque cercano al modo en que el cerebro representa el espacio de estímulos de manera intrínseca en los códigos neuronales.

Para cualquier ideal $I \subseteq \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ se tiene

$$\mathbf{I}(V(I)) = I + \mathcal{B}$$

este resultado es probado de forma general en el teorema 3 (Nullstellensatz para cuerpos finitos). De este modo los códigos neuronales son variedades algebraicas en \mathbb{F}_2^n .

Definición 2.4. El anillo neuronal R_C correspondiente al código C es el anillo cociente

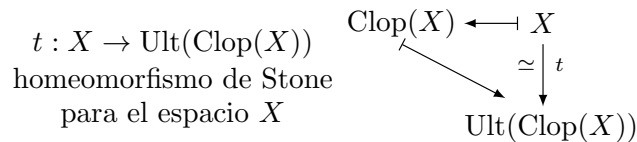
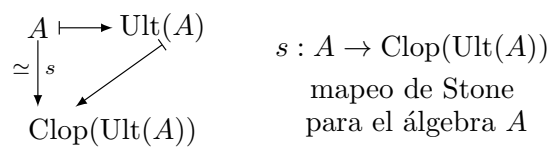
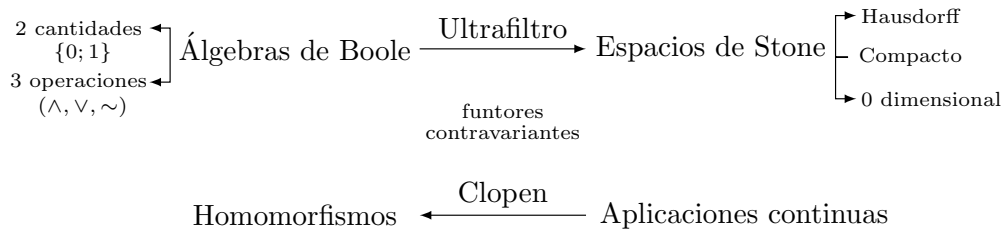
$$R_C = \frac{\mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]}{I_C} = \mathbb{F}_2[\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n]$$

junto con las funciones coordenadas x_1, \dots, x_n , donde $\bar{x}_i = x_i + I_C$.

El anillo R_C es un anillo booleano. En efecto: notemos que $R_C = \mathbb{F}_2[\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n] = \langle \bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n \rangle$, así también $x_i^2 - x_i \in I_C$, por lo que $\bar{x}_i^2 - \bar{x}_i = (x_i + I_C)^2 - (x_i + I_C) = x_i^2 - x_i + I_C$, de este modo $\bar{x}_i^2 - \bar{x}_i = \bar{0}$, de donde $\bar{x}_i^2 = \bar{x}_i$. Como los elementos \bar{x}_i generan R_C , entonces $\bar{f}^2 = \bar{f}, \forall \bar{f} \in R_C$. Debido a las relaciones Booleanas cualquier elemento $y \in R_C$ satisface $y^2 = y$, puesto que cualquier término cruzado se anula al ser $2 = 0$ en \mathbb{F}_2 . De este modo el anillo neuronal es isomorfo a $\mathbb{F}_2^{|C|}$.

Los elementos de $R_C = \mathbb{F}_2[\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n]$ son expresiones polinomiales que pueden ser simplificadas de acuerdo a las relaciones dadas en I_C .

La idempotencia tiene una fuerte influencia en la estructura de los anillos Booleanos, en particular en R_C , estos se relacionan con los conjuntos cerrados y abiertos de los denominados espacios de Stone. Anillos Booleanos y álgebras Booleanas son conceptos equivalentes, mediante el teorema de representación la estructura booleana puede ser representada por espacios de Stone [17]. En resumen



Así, podemos establecer un isomorfismo ϕ entre R_C y el anillo de funciones $\mathcal{F}(C; \mathbb{F}_2)$

$$\begin{aligned} \phi: R_C &\rightarrow \mathcal{F}(C; \mathbb{F}_2) \\ g &\mapsto \phi_g: C \rightarrow \mathbb{F}_2 \\ c &\mapsto g(c_1; \dots; c_n) \end{aligned}$$

Las propiedades algebraicas de $R_{\mathcal{C}}$ se vinculan con las propiedades combinatorias de \mathcal{C} , los x_i son funciones importantes para ello, así también \mathcal{C} se vincula con las propiedades topológicas de los campos receptivos U_i en el espacio de estímulos X .

2.4. Espectro del anillo neuronal

El espectro $\text{Spec}(R_{\mathcal{C}})$ del anillo neuronal, está constituido por todos los ideales primos en $R_{\mathcal{C}}$. Los elementos del espectro están en correspondencia uno a uno con los elementos del código neuronal \mathcal{C} .

Para cualquier punto $v \in \{0; 1\}^n$ del espacio de actividad neuronal, se define

$$m_v = I(v) = \{f \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n] \mid f(v) = 0\}$$

son los ideales maximales de $\mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ consistiendo de todas las funciones que se anulan sobre v .

Dado que $R_{\mathcal{C}}$ es un anillo booleano, entonces el espectro de ideales maximales y el espectro de ideales primos coinciden [18].

Polinomios reducidos

Un polinomio f^* con coeficientes en \mathbb{F}_q es la forma reducida de un polinomio $f(x_1; \dots; x_n)$, con coeficientes en \mathbb{F}_q , cuando

- (a) no aparece ninguna variable en f^* con exponente mayor a $p - 1$, $p \geq 2$
- (b) f^* es congruente a f módulo el ideal $\langle x_1^q - x_1; \dots; x_n^q - x_n \rangle = \Gamma$, $q \geq 2$

Todo polinomio f posee al menos una forma reducida, que se obtiene repitiendo un cierto número de veces a partir de f la operación que consiste en sustituir un factor x_i^q por x_i , esta operación no modifica f módulo Γ , y que rebaja la suma de todos los exponentes de todas las variables del polinomio (por lo que solo se puede hacer un número limitado de veces). Además, el grado de esta forma reducida es como máximo igual al grado de f .

Lema 3. Para que $f \in \mathbb{F}_q[x_1; \dots; x_n]$ sea cero para todos los valores de las indeterminadas, es necesario y suficiente que f pertenezca a Γ .

Demostración. $[\Rightarrow]$ Probaremos que si un polinomio de forma reducida f^* toma el valor 0 en cualquier punto de \mathbb{F}_q^n , es idénticamente nulo. En efecto: usando inducción sobre n

- para $n = 0$ es trivial
- se asume que el resultado es cierto para los polinomios en $n - 1$ variables

- ordenando f^* con respecto a x_n

$$f^* = x_n^{q-1} A_1 + x_n^{q-2} A_2 + \cdots A_q$$

donde A_1, \dots, A_q son polinomios en x_1, \dots, x_{n-1} en forma reducida. La ecuación $f^* = 0$ se convierte en una ecuación de grado $q - 1$ en x_n que debe admitir como soluciones todos los elementos de \mathbb{F}_q . Por tanto, es necesario que todos los coeficientes sean cero. Siendo esto cierto, cualesquiera que sean los valores particulares elegidos, y probando la proposición para $n - 1$ variables, los coeficientes A_i son todos idénticamente nulas.

[\Leftarrow] Todo elemento $a \in \mathbb{F}_q$ es raíz de la ecuación $x^q - x = 0$, entonces los polinomios de Γ toma el valor 0 en todos los puntos \mathbb{F}_q^n . ■

El lema anterior puede ser interpretado como

$$I(\mathbb{F}_q^n) = \langle x_1^q - x_1; \dots; x_n^q - x_n \rangle$$

Con ello es posible considerar el anillo

$$R_q[x_1; \dots; x_n] = \frac{\mathbb{F}_q[x_1; \dots; x_n]}{\langle x_1^q - x_1; \dots; x_n^q - x_n \rangle}$$

Dados $f, g \in \mathbb{F}_q[x_1; \dots; x_n]$ entonces el producto $f \cdot g$ en $R_q[x_1; \dots; x_n]$ es obtenido de modo que se multiplican como dos polinomios en $\mathbb{F}_q[x_1; \dots; x_n]$, luego se divide por cada uno de los $x_i^q - x_i$ y se da como respuesta la suma de los residuos de cada división.

Lema 4. *El anillo*

$$R_q[x_1; \dots; x_n] = \frac{\mathbb{F}_q[x_1; \dots; x_n]}{\langle x_1^q - x_1; \dots; x_n^q - x_n \rangle}$$

es identificado canónicamente con el anillo de las aplicaciones de \mathbb{F}_2^n en \mathbb{F}_2 .

Demostración. Sea F el anillo de aplicaciones de \mathbb{F}_2^n en \mathbb{F}_2 .

El homomorfismo

$$\phi : \frac{\mathbb{F}_q[x_1; \dots; x_n]}{\langle x_1^q - x_1; \dots; x_n^q - x_n \rangle} \rightarrow F$$

cumple que

- (i) es inyectivo, en efecto: esto es consecuencia de que $[f] \in R_q[x_1; \dots; x_n]$ es cero si y solo si $f \in \langle x_1^q - x_1; \dots; x_n^q - x_n \rangle$
- (ii) es sobreyectivo, en efecto: todo elemento de F es la imagen por ϕ de su polinomio de interpolación

Por tanto ϕ es un isomorfismo. ■

Lema 5. $\text{Spec}(R_q[x_1; \dots; x_n]) = \{\langle x_1 - a_1; \dots; x_n - a_n \rangle : a_i \in \mathbb{F}_q, i = 1, \dots, n\}$.

Demostración. Basta con demostrar que cualquier $P \in \text{Spec}(R_q[x_1; \dots; x_n])$ es combinación de $x_i - a_i$. En efecto: Sea $P \in \text{Spec}(R_q[x_1; \dots; x_n])$, entonces

$$\begin{aligned} P \ni 0 &= x_1^q - x_1 = x_1(x_1 - 1) \dots (x_1 - (q - 1)) \\ &\quad \dots \quad \dots \\ P \ni 0 &= x_n^q - x_n = x_n(x_n - 1) \dots (x_n - (q - 1)) \end{aligned}$$

dado que P es primo entonces para cualquier i existe un j tal que $x_i - u_j \in P$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $u_j \in \mathbb{F}_q$. Para cada x_i solo un factor lineal debe pertenecer a P , pues caso contrario

$$x_i - k, x_i - l \in P \Rightarrow \frac{1}{l - k} ((x_i - k) - (x_i - l)) = 1 \in P \Rightarrow P = R_q[x_1; \dots; x_n]$$

Sea $a \in P$, dado que $x_i - u_i \in P$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, y considerando el algoritmo de la división y le orden lexicográfico (ver [16], teorema 3, pp 64), se tiene

$$a = b_1(x_1 - u_1) + \dots + b_n(x_n - u_n) + r, \quad b_i, r \in \mathbb{F}_q$$

si $r \neq 0$ entonces

$$1 = \frac{1}{r} \cdot r = \frac{1}{r} \cdot (a - b_1(x_1 - u_1) - \dots - b_n(x_n - u_n)) \in P \Rightarrow P = R_q[x_1; \dots; x_n]$$

de donde $r = 0$, por tanto $P \subseteq \langle x_1 - u_1; \dots; x_n - u_n \rangle$. ■

Notemos que en $R_q[x_1; \dots; x_n]$ se cumple

$$(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n})^q = (x_1^q)^{j_1} \dots (x_n^q)^{j_n} = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

Denotando por X_j a los monomios en $R_q[x_1; \dots; x_n]$, se tiene

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{F}_q^n} a_j X_j \right)^q = \sum_{j \in \mathbb{F}_q^n} a_j^q X_j^q = \sum_{j \in \mathbb{F}_q^n} a_j X_j$$

con ello $f^q = f$ para todo $f \in R_q[x_1; \dots; x_n]$.

Lema 6. $\text{Ideales}(R_q[x_1; \dots; x_n]) = \text{Rad}(R_q[x_1; \dots; x_n])$.

Demostración. Basta demostrar una inclusión. Sea $I \in \text{Ideales}(R_q[x_1; \dots; x_n])$, tal que $f^m \in I$, entonces

$$f^{q-m} \cdot f^m = f^q = f \in I, \quad q > m$$

así $I \in \text{Rad}(R_q[x_1; \dots; x_n])$. ■

Nullstellensatz para cuerpos finitos

Dado que estamos trabajando en \mathbb{F}_2 , si un ideal $J \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ cumple $J = \sqrt{J}$ no implica que $I(V(J)) = J$, esto significa que es necesario añadir elementos a fin de hacer el ideal radical.

El Nullstellensatz de Hilbert para un cuerpo algebraicamente cerrado K asegura que si $f \in K[x_1; \dots; x_n]$ se anula sobre $V(J)$ entonces $f \in \sqrt{J}$, es decir $I(V(J)) = \sqrt{J}$. El siguiente resultado es conocido como el Nullstellensatz para cuerpos finitos.

Teorema 3 (Nullstellensatz para Cuerpos Finitos). *Para un campo arbitrario \mathbb{F}_q , sea $J \subseteq \mathbb{F}_q[x_1; \dots; x_n]$ un ideal. Entonces*

$$I(V(J)) = J + \langle x_1^q - x_1; \dots; x_n^q - x_n \rangle$$

Demostración. Por el teorema de descomposición primaria de Noether-Lasker, cualquier ideal radical I puede ser escrito como

$$I = P_1 \cap \dots \cap P_k, P_i \in \text{Spec}(\mathbb{F}_q[x_1; \dots; x_n]), i \in \{1, \dots, k\}$$

Usando el lema 5 y 6, para cualquier ideal $J \in R_q[x_1; \dots; x_n]$ se tiene

$$J = P_{u^1} \cap \dots \cap P_{u^k}, P_{u^i} = \langle x_1 - u_1^i, \dots, x_n - u_n^i \rangle, u^i \in \mathbb{F}_q^n, i \in \{1, \dots, k\}$$

De este modo calculando la variedad asociada a J se tiene

$$\begin{aligned} V(J) &= V(P_{u^1} \cap \dots \cap P_{u^k}) \\ &= V(P_{u^1}) \cup \dots \cup V(P_{u^k}) \\ &= \{u^1\} \cup \dots \cup \{u^k\} \\ &= \{u^1, \dots, u^k\} \end{aligned}$$

Sea $A = \{u^1, \dots, u^k\}$ un subconjunto cualquiera de elementos de \mathbb{F}_q^n , entonces

$$\begin{aligned} I(A) &= I(\{u^1, \dots, u^k\}) \\ &= I(\{u^1\} \cup \dots \cup \{u^k\}) \\ &= I(\{u^1\}) \cap \dots \cap I(\{u^k\}) \\ &= P_{u^1} \cap \dots \cap P_{u^k} \\ &= J \end{aligned}$$

Por tanto $I(V(J)) = J, \forall J \in \text{Ideales}(R_q[x_1; \dots; x_n]) = \text{Rad}(R_q[x_1; \dots; x_n])$. ■

Notemos que para $v \in \mathbb{F}_2^n$, el ideal $m_v = I(v) = \{f \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n] \mid f(v) = 0\} = \langle x_1 - v_1; \dots; x_n - v_n \rangle$ es un ideal maximal en $\mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$. En efecto: considerando $A_v = \langle x_1 - v_1; \dots; x_n - v_n \rangle$, se tiene $V(A_v) = \{v\}$, de donde $I(V(A_v)) = I(v) = m_v$. Usando el teorema 3 se tiene

$$I(V(A_v)) = A_v + \langle x_1^2 - x_1; \dots; x_n^2 - x_n \rangle = A_v$$

para la última igualdad se consideró que $v_i \in \{0; 1\}$, $x_i^2 - x_i = x_i(1 - x_i)$ y que cada generador de $\langle x_1^2 - x_1; \dots; x_n^2 - x_n \rangle$ está contenido en A_v ; de este modo $A_v = m_v$. Es posible caracterizar a los ideales maximales de $\mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ a partir del espectro primero del anillo neuronal, esto será visto en el teorema 4.

Veamos ahora la característica de los elementos del espectro primo del anillo R_C . Con ello podemos asegurar que $V(\overline{m}_v) = \emptyset$ para todo $v \notin \mathcal{C}$.

Teorema 4. $\text{Spec}(R_C) = \{\overline{m}_v \mid v \in \mathcal{C}\}$, donde \overline{m}_v es el anillo cociente de m_v en R_C .

Demostración. Es suficiente mostrar que $m_v \supset I_C$ si y solamente si $v \in \mathcal{C}$. En efecto: para cada $v \in \mathcal{C}$, los elementos de I_C son funciones que se anulan para cada v , de ahí que $I_C \subseteq m_v$. Por otro lado, si $v \notin \mathcal{C}$ entonces $m_v \not\supseteq I_C$, en particular la función característica $\rho_v \in I_C$ para $v \in \mathcal{C}$, pero $\rho_v \notin m_v$ pues $\rho_v(v) = 1$. De esta manera los ideales maximales de R_C son de la forma \overline{m}_v para $v \in \mathcal{C}$. ■

Veamos ahora que los polinomios indicadores y las relaciones booleanas son suficientes para generar I_C .

Teorema 5. Sea \mathcal{C} un código. Entonces $I_C = J_C + \mathcal{B}$.

Demostración. Notemos que $I_C = I(\mathcal{C}) = I(V(J_C))$, aplicando el teorema 3, Nullstellensatz en cuerpos finitos, se tiene que $I(V(J_C)) = J_C + \langle x_1^2 - x_1; \dots; x_n^2 - x_n \rangle = J_C + \mathcal{B}$. ■

Estructura Algebraica del Campo Receptivo

Construir una representación precisa del mundo es una de las funciones básicas del cerebro. Por ejemplo, un entorno explorado no es percibido como una colección de localizaciones físicas disjuntas, sino como una aplicación espacial (funciones de estímulo-respuesta), organizando diferentes tipos de estímulos en un espacio de estímulos bien estructurado. Es decir, el espacio de estímulos emerge de la actividad de las neuronas, representando este espacio vía la estructura intrínseca del código neuronal.

Una de las preguntas principales que motivaron la construcción del ideal neuronal fue determinar qué códigos tienen realizaciones usando conjuntos convexos y cuáles no. Muchos tipos de neuronas con campos receptivos, incluidas las células de lugar $2D$ y $3D$, tienen campos receptivos convexos naturales [19]. Se conocen características estructurales del código que garantizan o prohíben la existencia de una realización con conjuntos convexos, y el ideal neuronal y la forma canónica que a menudo se pueden utilizar para detectar estas características. Nos referiremos a un código de realización convexa por abiertos y campos receptivos en \mathbb{R}^d para algún d , como un código convexo.

3.1. Relaciones alternativas para el anillo neuronal

Sea X un espacio de estímulos, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^n$ una colección de conjuntos abiertos en X , y $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ el código de campo receptivo. Denotamos al anillo neuronal correspondiente a dicho código por $R_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$. Las funciones $f \in R_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ pueden ser evaluadas en cualquier punto $p \in X$ mediante

$$x_i(p) = \begin{cases} 1 & , p \in U_i \\ 0 & , p \notin U_i \end{cases}$$

cada vez que x_i aparece en el polinomio. El vector $(x_1(p); \dots; x_n(p)) \in \{0; 1\}^n$ representa la respuesta neuronal al estímulo p .

Si $p \notin \bigcup_{i=1}^n U_i$, entonces $(x_1(p); \dots; x_n(p))$ es la palabra código cero. Para cualquier $\sigma \subset [n]$, se define

$$U_\sigma = \bigcap_{i \in \sigma} U_i, \quad x_\sigma = \prod_{i \in \sigma} x_i$$

con la convención $x_\emptyset = 1$, $U_\emptyset = X$, aún cuando $X \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Con esta notación, para cualquier $p \in X$ se cumple

$$x_\sigma(p) = \begin{cases} 1 & , p \in U_\sigma \\ 0 & , p \notin U_\sigma \end{cases}$$

Las relaciones anteriores codifican los datos combinatorios de \mathcal{U} .

Ejemplo 3.1. Si $U_\sigma = \emptyset$ entonces no es posible tener $x_\sigma(p) = 1$ en cualquier punto p del espacio de estímulos X . Por lo que se debe imponer a la relación x_σ remover estos puntos.

Ejemplo 3.2. Si $U_\sigma \subset U_i \cup U_j$, entonces $x_\sigma = 1$ implica $x_i = 1$ o $x_j = 1$, lo que se garantiza imponiendo la relación $x_\sigma(1 - x_i)(1 - x_j)$.

Consideramos el ideal $I_{(\mathcal{U})} \subset \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ definido a partir la estructura de campos receptivos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$

$$I_{\mathcal{U}} = \langle \{x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i\} \rangle$$

Si $\tau = \emptyset$, solo se obtiene la relación x_σ para $U_\sigma = \emptyset$. Si $\sigma = \emptyset$, entonces $U_\sigma = X$, y obtenemos relaciones del tipo $\prod_{i \in \tau} (1 - x_i)$ si $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$, lo cual es equivalente a exigir que no existe punto exterior correspondiente a la palabra código cero.

Las relaciones booleanas están presentes en $I_{\mathcal{U}}$ independiente de \mathcal{U} , puesto que $U_i \subseteq U_i$ de donde se obtiene la relación $x_i(1 - x_i)$ para cada i . Definimos el ideal $J_{\mathcal{U}}$ obtenido de $I_{\mathcal{U}}$ eliminando las relaciones booleanas.

Definición 3.1. $J_{\mathcal{U}} = \langle \{x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \sigma \cap \tau = \emptyset, \text{ y } U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i\} \rangle$.

Lema 7. $I_{\mathcal{U}} = J_{\mathcal{U}} + \langle x_1^2 - x_1; \dots; x_n^2 - x_n \rangle$.

Demostración. Notemos que si $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces para cualquier $i \in \sigma \cap \tau$ se tiene $U_\sigma \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j$, y la relación correspondiente es un múltiplo de la relación booleana $x_i(1 - x_i)$. Por otro lado si $\sigma \cap \tau = \emptyset$, entonces consideramos a las relaciones que definen a $J_{\mathcal{U}}$ junto a las relaciones booleanas. ■

Lema 8. Para cualquier $f \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ y $\tau \subseteq [n]$, se cumple

$$\langle \{f \prod_{i \in \tau} P_i \mid P_i \in \{x_i, 1 - x_i\}\} \rangle = \langle f \rangle$$

Demostración. Sea $I_f(\tau) = \langle \{f \prod_{i \in \tau} P_i \mid P_i \in \{x_i, 1 - x_i\}\} \rangle$. Se requiere mostrar que $I_f(\tau) = \langle f \rangle$ para cualquier $\tau \subseteq [n]$, sin embargo dado que cualquier generador de $I_f(\tau)$ es un múltiplo de f , entonces $I_f(\tau) \subseteq \langle f \rangle$. Para la segunda inclusión se realiza inducción sobre $|\tau|$, veamos

(i) si $|\tau| = 0$ entonces $\tau = \emptyset$, así $I_f(\tau) = \langle f \rangle$.

(ii) si $|\tau| = 1$ entonces $\tau = \{i\}$ para algún $i \in [n]$, por lo que $I_f(\tau) = \langle f(1 - x_i); f x_i \rangle = \langle f \rangle$, así $I_f(\tau) \supseteq \langle f \rangle$.

(iii) asumiendo que para algún $l \geq 1$ se tiene $I_f(\sigma) \supseteq \langle f \rangle$ para cualquier $\sigma \subseteq [n]$ con $|\sigma| \leq l$. Si $l \geq n$ la prueba acaba, por lo que solo es necesario mostrar que si $l < n$ entonces $I_f(\tau) \supseteq \langle f \rangle$ para cualquier τ de medida $l + 1$. Sea $\tau \subseteq [n]$ tal que $|\tau| = l + 1$ y j un elemento arbitrario de τ . Se define $\tau' = \tau \setminus \{j\}$, $|\tau'| = l$, por la hipótesis inductiva se cumple $I_f(\tau') \supseteq \langle f \rangle$. Se cumple que $I_f(\tau) \supseteq I_f(\tau')$, en efecto: sea $g = f \prod_{i \in \tau'} P_i$ un generador arbitrario de $I_f(\tau')$, las expresiones $f(1 - x_j) \prod_{i \in \tau'} P_i$, $f x_j \prod_{i \in \tau'} P_i$ son generadores de $I_f(\tau)$, de donde la suma está en $I_f(\tau)$, luego $g \in I_f(\tau)$ para cualquier generador g de $I_f(\tau')$. Por tanto $I_f(\tau) \supseteq I_f(\tau') \supseteq \langle f \rangle$. ■

El ideal $I_{\mathcal{U}}$ proporciona un conjunto alternativo de relaciones que pueden ser usados para refinar $R_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$. Mas aún $I_{\mathcal{U}}$ y $I_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ coinciden.

Teorema 6. $I_{\mathcal{U}} = I_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$.

Demostración. Basta con mostrar que $J_{\mathcal{U}} = J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ a partir del hecho que cada ideal contiene los generadores del otro. En efecto

(i) Generadores de $J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ están contenidos en $J_{\mathcal{U}}$: dado que los generadores de $J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ son de la forma

$$\rho_v = \prod_{i \in \text{sop}(v)} x_i \prod_{j \notin \text{sop}(v)} (1 - x_j), \quad v \notin \mathcal{C}(\mathcal{U})$$

si ρ_v es un generador de $J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$, entonces $v \notin \mathcal{C}(\mathcal{U})$, usando la definición de $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ se tiene $U_{\text{sop}(v)} \subseteq \bigcup_{j \notin \text{sop}(v)} U_j$. Tomando $\sigma = \text{sop}(v)$ y $\tau = [n] \setminus \text{sop}(v)$ se tiene $U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j$ con $\sigma \cap \tau = \emptyset$, usando la definición de $J_{\mathcal{U}}$ se tiene que $x_{\sigma} \prod_{j \in \tau} (1 - x_j)$ es un generador de $J_{\mathcal{U}}$. Dado que $\rho_v = x_{\sigma} \prod_{j \in \tau} (1 - x_j)$, por la elección de σ y τ , se tiene $\rho_v \in J_{\mathcal{U}}$, por tanto $J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})} \subseteq J_{\mathcal{U}}$.

(ii) Generadores de $J_{\mathcal{U}}$ están contenidos en $J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$: si $J_{\mathcal{U}}$ tiene como generador a $x_{\sigma} \prod_{i \in \tau} (1 - x_i)$, entonces $U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$ y $\sigma \cap \tau = \emptyset$. Esto a su vez implica que $\bigcap_{i \in \sigma} U_i \setminus \bigcup_{j \in \tau} U_j = \emptyset$, usando la definición de $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ se tiene $v \notin \mathcal{C}(\mathcal{U})$ para cualquier v tal que $\text{sop}(v) \supseteq \sigma$ y $\text{sop}(v) \cap \tau = \emptyset$. De aquí que $J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ contiene las relaciones $x_{\text{sop}(v)} \prod_{j \notin \text{sop}(v)} (1 - x_j)$ para cualquier v . Esto incluye todas las relaciones de la forma $x_{\sigma} \prod_{j \in \tau} (1 - x_j) \prod_{k \notin \sigma \cup \tau} P_k$ donde $P_k \in \{x_k, 1 - x_k\}$. Tomando $f = x_{\sigma} \prod_{j \in \tau} (1 - x_j)$ en el lema 8 se concluye que $J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ contiene $x_{\sigma} \prod_{j \in \tau} (1 - x_j)$, luego $J_{\mathcal{U}} \subseteq J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$. ■

3.2. Relaciones para campos receptivos

Debido al teorema 6 se puede interpretar los elementos de $I_{\mathcal{C}}$ en términos de relaciones entre campos receptivos. Usando el teorema 2 es posible extraer la estructura de campos receptivos a partir de los diferentes tipos de relaciones que aparecen en $I_{\mathcal{C}}$.

Relaciones booleanas: las relaciones $x_i(1 - x_i)$ corresponden a $U_i \subseteq U_i$ la cual no contiene información sobre el código \mathcal{C}

Relaciones tipo 1: la relación $x_\sigma = \prod_{i \in \sigma} x_i$ corresponde a $U_\sigma = \emptyset$

Relaciones tipo 2: la relación $x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i)$, $\sigma, \tau \neq \emptyset$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$, $U_\sigma \neq \emptyset$, $\bigcup_{i \in \tau} U_i \neq X$ corresponde a $U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$

Relaciones tipo 3: la relación $\prod_{i \in \tau} (1 - x_i)$ corresponde a $X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$

Las relaciones tipo 2 no incluyen polinomios que sean múltiplos de la relaciones tipo 1, 3 o booleanas. El polinomio constante 1 puede aparecer tanto en las relaciones tipo 1 y 3 solo si $X = \emptyset$. Las relaciones tipo 3 aparecen si X es totalmente cubierto por los campos receptivos y no existe palabra código cero correspondiente a un punto exterior. El ideal $J_{\mathcal{C}}$ es generado por las relaciones tipo 1, 2 y 3.

No todas las relaciones anteriores son necesarias para generar el ideal neuronal. En la siguiente sección veremos que es posible eliminar relaciones redundantes a fin de llegar a una lista minimal de generadores para $J_{\mathcal{C}}$ y $I_{\mathcal{C}}$ que captura la estructura esencial del código.

3.3. Forma canónica del ideal neuronal

Iniciamos definiendo pseudomonomiales e ideales pseudomonomiales, esto en vista a la analogía a los monomiales libres de cuadrados e ideales monomiales libre de cuadrados que tienen $x_i, 1 - x_i$ que son términos que conforman las relaciones tipo 1, 2 y 3. Con estas definiciones las relaciones booleanas son excluidas.

Definición 3.2. Un pseudomonomial es un polinomio $f \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ que tiene la forma $f = \prod_{i \in \sigma} x_i \prod_{j \in \tau} (1 - x_j)$ para algunos $\sigma, \tau \subset [n]$ con $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

Definición 3.3. Un ideal $J \subset \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ es un ideal pseudomonomial si J puede ser generado por un conjunto finito de pseudomonomiales.

Definición 3.4. Sea $J \subset \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ un ideal y $f \in J$ un pseudomonomial. Se dice que f es un pseudomonomial minimal de J si no existe otro pseudomonomial $g \in J$ con $\deg(g) < \deg(f)$ tal que $f = hg$ para algún $h \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$.

Considerando todos los pseudomonomiales mínimos en un ideal pseudomonomial J se define la forma canónica de J .

Definición 3.5. Un ideal pseudomonomial J está en forma canónica si $J = \langle f_1; \dots; f_l \rangle$ donde el conjunto $FC(J) = \{f_1, \dots, f_l\}$ es el conjunto de todos los pseudomonomiales minimales de J . Donde $FC(J)$ es la forma canónica de J .

Para cualquier ideal pseudomonomial $J \subset \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$, la forma canónica de J es única y $J = \langle FC(J) \rangle$. El conjunto de pseudomonomiales minimales que generan J , no necesariamente son generadores minimales para J . En efecto: el ideal pseudomonomial

$J = \langle x_1(1 - x_2), x_2(1 - x_3) \rangle$ no contiene ningún divisor propio de $x_1(1 - x_2)$ y $x_2(1 - x_3)$ pues estos pseudomonomiales no generan tales divisores propios, de este modo $x_1(1 - x_2)$ y $x_2(1 - x_3)$ están ambos en $FC(J)$. La forma canónica contiene un pseudomonomial minimal adicional, $x_1(1 - x_3)$ pues $x_1(1 - x_3) = (1 - x_3) \cdot (x_1(1 - x_2) + x_1(x_2(1 - x_3)))$, de donde $FC(J) = \{x_1(1 - x_2), x_2(1 - x_3), x_1(1 - x_3)\}$, sin embargo es posible remover $x_1(1 - x_3)$ y aún generar J . De este modo la forma canónica no precisa ser un conjunto generador minimal, en el sentido usual de minimal.

Para cualquier código \mathcal{C} , el ideal neuronal $J_{\mathcal{C}}$ es un ideal pseudomonomial puesto que $J_{\mathcal{C}} = \langle \{\rho_v \mid v \notin \mathcal{C}\} \rangle$ y cada ρ_v es un pseudomonomial. Debido a que las relaciones booleanas son excluidas de la definición de pseudomonomiales el ideal $J_{\mathcal{C}}$ no es pseudomonomial.

Definición 3.6. Sea $\sigma \subseteq [n]$, se dice que σ es minimal con respecto a una propiedad P si σ satisface P , pero P no es satisfecha para cualquier $\tau \subsetneq \sigma$.

El siguiente lema muestra que $J_{\mathcal{U}}$ es generado por las relaciones tipo 1, 2 y 3.

Lema 9. Para $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ una colección de conjuntos en un espacio de estímulos X

$$J_{\mathcal{U}} = \langle T_1; T_2; T_3 \rangle$$

donde

- $T_1 = \{x_{\sigma} \mid U_{\sigma} = \emptyset\}$
- $T_2 = \{\prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i\}$
- $T_3 = \{x_{\sigma} \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \sigma, \tau \neq \emptyset, \sigma \cap \tau = \emptyset, U_{\sigma} \neq \emptyset, \bigcup_{i \in \tau} U_i \neq X, U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i\}$

Demostración. Dado que el ideal $J_{\mathcal{U}}$ es definido por

$$J_{\mathcal{U}} = \langle \{x_{\sigma} \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \sigma \cap \tau = \emptyset, U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i\} \rangle$$

si $U_{\sigma} = \emptyset$ entonces considerando $\tau = \emptyset$ se obtiene la relación tipo 1 x_{σ} , pues $\prod_{i \in \emptyset} (1 - x_i) = 1$. Cualquier otra relación con $U_{\sigma} = \emptyset$ y $\tau \neq \emptyset$ será un múltiplo de x_{σ} . Así

$$J_{\mathcal{U}} = \langle \{x_{\sigma} \mid U_{\sigma} = \emptyset\}, \{x_{\sigma} \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \tau \neq \emptyset, \sigma \cap \tau = \emptyset, U_{\sigma} \neq \emptyset, U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i\} \rangle$$

si $\sigma = \emptyset$, en el segundo conjunto de la relación anterior, entonces se tiene la relación $\prod_{i \in \tau} (1 - x_i)$ con $U_{\emptyset} = X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$. Separando las relaciones tipo 3 y removiendo múltiplos de ellos que ocurren si $\bigcup_{i \in \tau} U_i = X$, se obtiene el resultado deseado. ■

Considerando las relaciones tipo 1 en el lema, tenemos que si $\tau \subseteq \sigma$, entonces x_{σ} es un múltiplo de x_{τ} . De este modo se puede reducir el conjunto de generadores del tipo 1, considerando solo a σ minimales con respecto a $U_{\sigma} = \emptyset$

$$\langle \{x_{\sigma} \mid U_{\sigma} = \emptyset\} \rangle = \langle \{x_{\sigma} \mid \sigma \text{ es minimal con respecto a } U_{\sigma} = \emptyset\} \rangle$$

Similarmente es posible hallar el conjunto reducido para las relaciones del tipo 3

$$\langle \{ \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i \} \rangle = \langle \{ \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \tau \text{ es minimal con respecto a } X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i \} \rangle$$

Finalmente es posible reducir los generadores de las relaciones tipo 2. Si $\rho \subseteq \sigma$ y $x_\rho \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \in J_{\mathcal{U}}$ entonces $x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \in J_{\mathcal{U}}$. Así, restringiendo a lo generadores para los cuales σ es minimal con respecto a $U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$. Análogamente, es posible reducir a τ minimal tal que $U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$. En resumen

$$\begin{aligned} \langle \{ x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \sigma, \tau \neq \emptyset, \sigma \cap \tau = \emptyset, U_\sigma \neq \emptyset, \bigcup_{i \in \tau} U_i \neq X, U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i \} \rangle = \\ \langle \{ x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \sigma, \tau \neq \emptyset, \sigma \cap \tau = \emptyset, U_\sigma \neq \emptyset, \bigcup_{i \in \tau} U_i \neq X, \\ \sigma, \tau \text{ son minimales con respecto a } U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i \} \rangle \end{aligned}$$

El siguiente teorema describe la forma canónica de $J_{\mathcal{C}}$.

Teorema 7. *Sea $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$ es un código neuronal y $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ es cualquier colección de conjuntos abiertos, no necesariamente convexos, en un espacio de estímulos no vacío X tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Entonces*

$$J_{\mathcal{C}} = \langle T'_1, T'_2, T'_3 \rangle$$

donde

- $T'_1 = \{x_\sigma \mid \sigma \text{ es minimal con respecto a } U_\sigma = \emptyset\}$
- $T'_2 = \{x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \sigma, \tau \neq \emptyset, \sigma \cap \tau = \emptyset, U_\sigma \neq \emptyset, \bigcup_{i \in \tau} U_i \neq X, \sigma, \tau \text{ son minimales con respecto a } U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i\}$
- $T'_3 = \{\prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \tau \text{ es minimal con respecto a } X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i\}$

La forma canónica de $J_{\mathcal{C}}$ es $FC(J) = \{T'_1, T'_2, T'_3\}$.

Demostración. Sea x_σ es una de las relaciones del tipo 1 y $x_\sigma \in \langle g \rangle$ con $\langle x_\sigma \rangle \neq \langle g \rangle$ entonces $g = \prod_{i \in \tau} x_i$ para algún $\tau \subsetneq \sigma$. Puesto que $U_\tau \neq \emptyset$ se sigue que $g \notin J_{\mathcal{C}}$, dado que $x_\tau = \prod_{i \in \tau} x_i$, y luego x_σ es un pseudomonial minimal de $J_{\mathcal{C}}$. Mediante un argumento similar las relaciones del tipo 2 y 3 son también pseudomoniales minimales en $J_{\mathcal{C}}$. Con ello se ha mostrado que los generadores son todos pseudomoniales.

Sea $f = x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i)$ un pseudomonial minimal en $J_{\mathcal{C}}$, por el lema 2, $U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$ y $\sigma \cap \tau = \emptyset$, así f es un generador de $J_{\mathcal{U}}$, por el lema 8. Dado que f es un pseudomonial minimal de $J_{\mathcal{C}}$, no existe $g \in J_{\mathcal{C}}$ tal que $g = x_{\sigma'} \prod_{i \in \tau'} (1 - x_i)$ con $\sigma' \subsetneq \sigma$ o $\tau' \subsetneq \tau$. Por consiguiente σ y τ son minimales con respecto a $U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$. Así, f es uno de los generadores de $J_{\mathcal{C}}$. Este es un generador minimal del tipo 1 si $\tau = \emptyset$, un generador minimal del tipo 3 si $\sigma = \emptyset$, caso contrario es un generador minimal del tipo 2. Los tres conjuntos de generadores son disjuntos pues las relaciones del tipo 1, 2 y 3 son disjuntos, siempre que $X \neq \emptyset$. Con ello se ha mostrado que no existen pseudomoniales minimales adicionales en $J_{\mathcal{C}}$. ■

Debido a la unicidad de la forma canónica, si un $FC(J_C)$ es dado, del teorema 7 se tiene las relaciones minimales que deben ser satisfechas por cualquier representación del campo receptivo del código $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$

- Tipo 1: $x_\sigma \in FC(J_C)$ implica que $U_\sigma = \emptyset$, pero todas las intersecciones de bajo orden U_γ con $\gamma \subsetneq \sigma$ son no vacías
- Tipo 2: $x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \in FC(J_C)$ implica que $U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$, pero ninguna intersección de bajo orden está contenida en $U_{i \in \tau} U_i$, y todas las U_i son necesarias para $U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$
- Tipo 3: $\prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \in FC(J_C)$ implica que $X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$, pero X no está contenido en ninguna unión de bajo orden $U_{i \in \gamma} U_i$ para $\gamma \subsetneq \tau$

La forma canónica $FC(J_C)$ provee una descripción minimal de la estructura del campo receptivo determinado por el código \mathcal{C} .

Ejemplo 3.3. Para los códigos del ejemplo 1.2, se tiene

- $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = 2^{[3]}$, $FC(J_C) = \{0\}$. No existen relaciones pues $\mathcal{C} = 2^{[3]}$
- $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{111; 101; 011; 001\}$, $X = U_3$, $FC(J_C) = \{1 - x_3\}$. La relación tipo 3 refleja el hecho que $X = U_3$
- $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{111; 011; 001; 000\}$, $FC(J_C) = \{x_1(1-x_2), x_2(1-x_3), x_1(1-x_3)\}$. Las relaciones tipo 2 corresponden a $U_1 \subset U_2$, $U_2 \subset U_3$ y $U_1 \subset U_3$, las dos primeras relaciones de los campos receptivos implican la tercera, la correspondiente forma canónica satisface $x_1(1-x_3) = (1-x_3) \cdot [x_1(1-x_2)] + x_1 \cdot [x_2(1-x_3)]$
- $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{111; 101; 011; 110; 100; 010\}$, $X = U_1 \cup U_2$, $FC(J_C) = \{(1-x_1)(1-x_2)\}$. La relación tipo 3 reflejan $X = U_1 \cup U_2$ e implica que $U_3 \subset U_1 \cup U_2$

3.4. Ideales Stanley-Reisner

Los ideales de Stanley-Reisner son generados por las relaciones tipo 1 de un código neuronal.

Definición 3.7 ([20], p.212). Sea $K[x_1; \dots; x_n]$ un anillo de polinomios sobre un cuerpo K . Si I es un ideal de $K[x_1; \dots; x_n]$ generado por monomiales libre de cuadrados, el complejo simplicial Stanley-Reisner Δ_I asociado a I tiene conjunto de vértices $V = \{x_i \mid x_i \notin I\}$ y sus caras son $\Delta_I = \{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \mid i_1 < \dots < i_k, x_{i_1} \cdots x_{i_k} \notin I\}$.

Definición 3.8 ([20], p.212). Si Δ es un complejo simplicial con conjunto de vértices V contenido en $\{x_1, \dots, x_n\}$, el ideal Stanley-Reisner I_Δ es

$$I_\Delta = \langle \{x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mid i_1 < \dots < i_r, \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \notin \Delta\} \rangle$$

y el anillo Stanley-Reisner $K[\Delta]$ asociado es el anillo cociente R/I_Δ .

Lema 10. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. El ideal generado por las relaciones tipo 1, $\langle x_\sigma \mid U_\sigma = \emptyset \rangle$, es el ideal Stanley-Reisner de $\Delta(\mathcal{C})$. Si $\text{sop}(\mathcal{C})$ es un complejo simplicial, entonces $FC(J_{\mathcal{C}})$ no contiene relaciones tipo 2 y 3, siendo $J_{\mathcal{C}}$ es ideal Stanley-Reisner de $\text{sop}(\mathcal{C})$.

Demostración. Dado que $\Delta(\mathcal{C}) = \{\sigma \subseteq [n] \mid \sigma \subseteq \text{sop}(c) \text{ para algún } c \in \mathcal{C}\}$ y $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ entonces $\Delta(\mathcal{C}) = \{\sigma \subseteq [n] \mid U_\sigma \neq \emptyset\}$ así sus complementos cumplen

$$\{\sigma \subseteq [n] \mid \sigma \notin \Delta(\mathcal{C})\} = \{\sigma \subseteq [n] \mid U_\sigma = \emptyset\}$$

luego

$$\langle x_\sigma \mid U_\sigma = \emptyset \rangle = \langle x_\sigma \mid \sigma \notin \Delta(\mathcal{C}) \rangle$$

es el ideal Stanley-Reisner de $\Delta(\mathcal{C})$.

Supongamos que $\text{sop}(\mathcal{C})$ es un complejo simplicial. Dado que \mathcal{C} contiene a la palabra código cero, entonces $X \supsetneq \bigcup_{i=1}^n U_i$ y no se tienen relaciones tipo 3. Asumiendo que $FC(J_{\mathcal{C}})$ contiene una relación tipo 2 $x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i)$, para algún $\sigma, \tau \subset [n]$ satisfaciendo $\sigma, \tau \neq \emptyset, \sigma \cap \tau = \emptyset$ y $U_\sigma \neq \emptyset$, entonces $\sigma \notin \text{sop}(\mathcal{C})$ mientras exista un $z \in \mathcal{C}$ tal que $\sigma \subset z$. Lo cual contradice el hecho que $\text{sop}(\mathcal{C})$ es un complejo simplicial. Por tanto $J_{\mathcal{C}}$ no posee relaciones tipo 2. ■

Homomorfismo de Anillos Neuronales

Relacionar entre sí los códigos neuronales permite considerar operaciones naturales de aumentar, quitar o reemplazar neuronas. Comprender cómo estas relaciones se traducen en información estructural permite extraer información de múltiples códigos simultáneamente. Bajo el enfoque algebraico las relaciones entre anillos neuronales se derivan de homomorfismos de anillos. Caracterizando el conjunto de homomorfismos entre anillos neuronales y relacionando cada uno con una aplicación de códigos a través de un pullback.

Para cualquier par de anillo neuronales $R_{\mathcal{C}}, R_{\mathcal{D}}$ existe una biyección natural entre homomorfismos de anillos $R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ y aplicaciones entre códigos $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Dado que cualquier aplicación código tiene un homomorfismo de anillos correspondiente, la existencia de un homomorfismo de anillos $R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ no garantiza una similitud en la estructura de \mathcal{C} y \mathcal{D} . El presente capítulo se propone definir el homomorfismo de anillos neuronales de modo que estructuras importantes en los códigos neuronales correspondan a importantes aplicaciones código.

4.1. Aplicaciones elementales entre códigos

Una aplicación código es una función $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ la cual asigna a cada elemento $c \in \mathcal{C}$ una imagen única $\phi(c) \in \mathcal{D}$, esta asignación no precisa ser inyectiva o sobreyectiva.

Algunas aplicaciones código que se pueden usar para obtener cualquier aplicación código.

Permutación de etiquetas: dos códigos \mathcal{C} y \mathcal{D} , de n neuronas, con el reetiquetado de neuronas, son los mismos. Se permuta las etiquetas de las neuronas, eligiendo una permutación $\delta \in \mathcal{S}_n$, y definiendo una aplicación código $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ por $\phi(c) = c'$, donde $c' = (c_{\delta(1)}, \dots, c_{\delta(n)})$. Así, $\mathcal{D} = \phi(\mathcal{C})$.

Remoción de neuronas: se toma una neurona del conjunto de neuronas y se remueve a través de la aplicación proyección. Si \mathcal{C} es un código con n neuronas,

y se desea remover la neurona n , se define $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ por $\phi(c) = c'$, donde $c' = (c_1, \dots, c_{n-1})$. Así, $\mathcal{D} = \phi(\mathcal{C})$ es un código de $n - 1$ neuronas

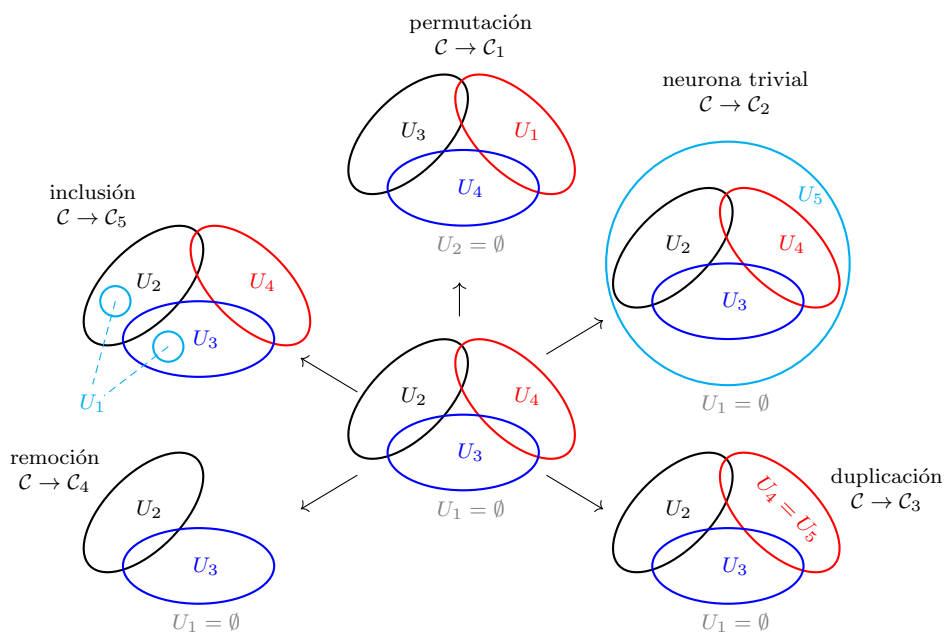
Adjunción de neuronas: sea $f \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$, se define $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ por $\phi(c) = c'$ donde $c' = (c_1, \dots, c_n, f(c))$. La misma función f sirve para nuevas neuronas en todas las palabras código. Así, $\mathcal{D} = \phi(\mathcal{C})$ es un código con $n + 1$ neuronas

Adjunción de palabras código: sea $\phi : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ la aplicación inclusión, tal que $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{D}$ y $\phi(c) = c$, de modo que \mathcal{D} contiene palabras códigos que no están en \mathcal{C} . Estas palabras códigos tiene a ser añadidas

Ejemplo 4.1. Dado el código $\mathcal{C} = \{0000; 0001; 0010; 0011; 0100; 0101; 0110\}$, si se aplica las siguientes aplicaciones código

- permutación cíclica (1234), se obtiene \mathcal{C}_1
- añadir una neurona trivial siempre activa, se obtiene \mathcal{C}_2
- duplicación de la neurona 4, se obtiene \mathcal{C}_3
- remoción de la neurona 4 (proyección sobre las neuronas 1 – 3), se obtiene \mathcal{C}_4
- inclusión en un código mayor, se obtiene \mathcal{C}_5

El efecto de estas aplicaciones código sobre una realización de \mathcal{C} se resumen en el siguiente diagrama y cuadro



\mathcal{C}	\mathcal{C}_1	\mathcal{C}_2	\mathcal{C}_3	\mathcal{C}_4	\mathcal{C}_5
0000	0000	00001	00000	000	0000
0001	1000	00011	00011	(000)	0001
0010	0001	00101	00100	001	0010
0011	1001	00111	00111	(001)	0011
0100	0010	01001	01000	010	0100
0101	1010	01011	01011	(010)	0101
0110	0011	01101	01100	011	0110
					1100
					1010

Proposición 2. *Todas las aplicaciones código preservadores de neuronas pueden ser escritas como composición de cuatro funciones elementales: permutación de etiquetas, remoción de neuronas, adjunción de neuronas de la forma $f(c)$, adjunción de nuevas palabras código.*

Demostración. Consideramos \mathcal{C} con n neuronas, \mathcal{D} un código con m neuronas y $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ una aplicación código preservadora de neuronas. Para $i = 1, \dots, m$ se define la función $f_i \in \mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ tal que $f_i(c) = [\phi(c)]_i, \forall c \in \mathcal{C}$, esto es posible pues cualquier función booleana $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ puede ser representada como un polinomio en $\mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$.

Sea $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$. Para $i = 1, \dots, m$ se define $\mathcal{C}_i = \{(c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_i) \mid c \in \mathcal{C}, c' = \phi(c)\} \subset \{0, 1\}^{n+i}$, para $j = 1, \dots, n$ se define $\mathcal{C}_{m+j} = \{(c'_1, \dots, c'_m, c_1, \dots, c_{n-j+1}) \mid c \in \mathcal{C}, c' = \phi(c)\} \subset \{0, 1\}^{m+n-j+1}$ y $\mathcal{C}_{m+n+1} = \phi(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$.

Para $i = 1, \dots, m$, $\phi_i : \mathcal{C}_{i-1} \rightarrow \mathcal{C}_i$ es definida por $\phi_i(v) = (v_1, \dots, v_{n+i-1}, f_i(v)) \in \mathcal{C}_i$. Si $v = (c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_{i-1})$ entonces $f_i(v) = f_i(c)$ pues solo importan los n primeros lugares. De este modo, si $v = (c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_{i-1})$ con $c' = \phi(c)$, entonces $\phi_i(v) = (c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_i)$. Neuronas a neuronas, se añaden componentes de $\phi(c)$ sobre c .

Tomando la aplicación permutación dada por $\delta = (n+1, \dots, n+m, 1, \dots, n)$, así todas las neuronas recién añadidas están al principio y las originales al final. Con ello se define $\phi_\delta : \mathcal{C}_m \rightarrow \mathcal{C}_{m+1}$ de modo que si $v = (v_1, \dots, v_{n+m})$ entonces $\phi_\delta(v) = (v_{n+1}, \dots, v_{n+m}, v_1, \dots, v_n)$.

Removemos la neurona $m+1$ por medio de la $n+m$, una a una en n aplicaciones código. Para $j = 1, \dots, n$ se define $\phi_{m+j} : \mathcal{C}_{m+j} \rightarrow \mathcal{C}_{m+j+1}$ por $\phi_{m+j}(v) = (v_1, \dots, v_{m+n-j})$.

Finalmente, si $\phi(\mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{D}$ entonces se añade la aplicación código inclusión $\phi_a : \phi(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{D}$ para incluir las restantes palabras código de \mathcal{D} .

Así, para $c = (c_1, \dots, c_n)$ con $\phi(c) = c' = (c'_1, \dots, c'_m)$, los primeros m pasos da

$$\phi_m \circ \dots \circ q_1(c) = (c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_m) = x$$

La permutación da $q_\delta(x) = (c'_1, \dots, c'_m, c_1, \dots, c_n) = y$ de donde $\phi_{m+n} \circ \dots \circ q_{m+1}(y) = (c'_1, \dots, c'_n) = c' = \phi(c)$.

Finalmente, si $\phi(c') \subsetneq \mathcal{D}$, se usa la aplicación inclusión, y dado que $\phi_a(c') = c'$, la composición conjunta es una aplicación $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que lleva c a $c' = \phi(c)$. ■

Ejemplo 4.2 (aplicación complemento). Sea \mathcal{C} un código con n neuronas, y $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ definido por $\phi(c_1, \dots, c_n) = (1 - c_1, \dots, 1 - c_n)$. Esto cambia los ceros en unos y los unos en ceros. El código \mathcal{D} es un código con n neuronas definido por el rango de ϕ . Lo cual puede ser obtenido por composición, añadiendo n nuevas neuronas, donde la i -ésima neurona es dada por la función $f(x) = 1 - x_i$, luego permutamos para que las nuevas neuronas estén al inicio y removemos las n neuronas originales del final.

Ejemplo 4.3 (aplicación de paridad). Se puede añadir nuevas neuronas de modo que se garantice que la palabra código tenga paridad uniforme. Dado un código \mathcal{C} , se define $\phi(c) = (c_1, \dots, c_n, \sum_{i=1}^n c_i)$, con ello se añade una nueva neurona, dada por la función $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Con ello, $\mathcal{D} = \phi(\mathcal{C})$.

Ejemplo 4.4 (repetición de neuronas). Una manera natural de añadir una neurona es replicando una de las neuronas originales. Si \mathcal{C} es un código con n neuronas, si se decide repetir la neurona i , se define la aplicación código $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ por $\phi(c) = c'$ donde $c' = (c_1, \dots, c_n, c_i)$, la nueva neurona es dada por la función $f(x) = x_i$. Con ello $\mathcal{D} = \phi(\mathcal{C})$ es un código de $n+1$ neuronas. De esta manera se preserva la estructura pues las neuronas originales permanecen como al inicio y continúan interactuando del mismo modo.

Ejemplo 4.5 (adjunción de neuronas triviales). Es posible añadir una nueva neurona, de modo que nunca esté activa, siempre es cero, o siempre esté activa, siempre vale uno. Es decir, si \mathcal{C} es un código de n neuronas y $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es definido por $\phi(c) = (c_1, \dots, c_n, 0)$ o $\phi(c) = (c_1, \dots, c_n, 1)$. La función que añade la nueva neurona es dada por $f(x) = 1$ o $f(x) = 0$. Así, $\mathcal{D} = \phi(\mathcal{C})$ es un código con $n+1$ neuronas.

Ejemplo 4.6 (fusión de dos neuronas). Si los datos son ordenados incorrectamente, de modo que lo que parecían ser dos neuronas es en realidad una, entonces se combinan estas neuronas. Bajo esta aplicación, se toman dos neuronas y se convierten en una que se activa exactamente como una u otra neurona original se activa. Si \mathcal{C} es un código con n neuronas y se desea fusionar las últimas dos neuronas, $n-1$ y n , entonces se define $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ por $\phi(c) = c'$, donde $c' = (c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1} + c_n + c_{n-1}c_n)$, así la última neurona es 1 si y solo si $c_{n-1} = 1$ o $c_n = 1$ o ambos. Por tanto, $f(x) = x_{n-1} + x_n + x_{n-1}x_n$ y $\mathcal{D} = \phi(\mathcal{C})$.

4.2. Anillo de homomorfismos de anillos neuronales

Existe una correspondencia natural entre el anillo de homomorfismos de anillos neuronales y las aplicaciones código.

Sea $f \in R_{\mathcal{D}}$, y f como una función $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}$. Dada una aplicación código $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, se toma el pullback de f a partir de ϕ^* , donde $\phi^*f : \mathcal{C} \rightarrow \{0, 1\}$, $\phi^*f = f \circ \phi$.

El pullback ϕ^*f es un elemento de $R_{\mathcal{C}}$, de este modo se define una aplicación natural entre anillos neuronales, $\psi_{\phi} : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$, $\psi_{\phi}(f) = \phi^*f = f \circ \phi$.

El siguiente lema garantiza que ψ_{ϕ} es siempre un homomorfismo de anillos.

Lema 11. Para cualquier aplicación código $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, la aplicación $\psi_{\phi} : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$, donde $\psi_{\phi}(f) = \phi^*f$, es un homomorfismo de anillos.

Demostración. Para cualquier $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\psi_\phi(f + g)(c) &= \phi^*(f + g)(c) \\ &= (f + g)(\phi(c)) \\ &= f(\phi(c)) + g(\phi(c)) \\ &= \phi^*f(c) + \phi^*g(c) \\ &= \psi_\phi(f)(c) + \psi_\phi(g)(c)\end{aligned}$$

por tanto $\psi_\phi(f + g) = \psi_\phi(f) + \psi_\phi(g)$.

Para cualquier $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\psi_\phi(fg)(c) &= \phi^*(fg)(c) \\ &= (fg)(\phi(c)) \\ &= f(\phi(c)) \cdot g(\phi(c)) \\ &= (\phi^*f)(c) \cdot (\phi^*g)(c) \\ &= \psi_\phi(f)(c) \cdot \psi_\phi(g)(c)\end{aligned}$$

por tanto $\psi_\phi(fg) = \psi_\phi(f) \cdot \psi_\phi(g)$.

Para cualquier $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\psi_\phi(1_{\mathcal{D}})(c) &= (\phi^*1_{\mathcal{D}})(c) \\ &= 1_{\mathcal{D}}(\phi(c)) \\ &= 1 \\ &= 1_{\mathcal{C}}(c)\end{aligned}$$

por tanto $\psi_\phi(1_{\mathcal{D}}) = 1_{\mathcal{C}}$.

De esta manera ψ_ϕ es un homomorfismo de anillos. ■

Ejemplo 4.7. Sean los códigos $\mathcal{C} = \{000, 100, 101\}$ y $\mathcal{D} = \{00, 10, 11\}$. Considerando la aplicación proyección ϕ dada por la remoción de la tercera neurona, entonces el homomorfismo de anillos neuronales $\psi_\phi : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ es dado por $\psi(x_1) = x_1$, $\psi(x_2) = x_2$, extendiéndose por linealidad a los demás elementos.

Dado que el anillo neuronal $R_{\mathcal{C}}$ es equivalente al anillo de funciones $f : \mathcal{C} \rightarrow \{0, 1\}$ (ver [final de la sección 2.3](#)), cualquier elemento f de $R_{\mathcal{C}}$ es completamente determinado por $f^{-1}(1)$, el conjunto de palabras códigos que f determina como activas. Si $f^{-1}(1) = \emptyset$, entonces $f \equiv 0$. Como una base natural para el anillo neuronal $R_{\mathcal{C}}$, consideramos el conjunto de funciones que determinan como activa una única palabra código de \mathcal{C} , dado por el conjunto $\{f \mid f^{-1}(1) = \{c\} \text{ para algún } c \in \mathcal{C}\}$. Para cada $c \in \mathcal{C}$, la función que determina c de forma única, es denotado por ρ_c , de esta manera la base para $R_{\mathcal{C}}$ es $\{\rho_c \mid c \in \mathcal{C}\}$, los ρ_c son llamados elementos base. La aplicación ρ_c puede ser expresada en notación polinomial

$$\rho_c = \prod_{c_i=1} x_i \prod_{c_j=0} (1 - x_j)$$

La aplicación ρ_c , también cumple $\rho_c(v) = 1$ si y solo si $v = c$, por lo que es también una función característica para c .

Cualquier elemento $f \in R_{\mathcal{C}}$, se escribe de forma única por los elementos básicos ρ_c

$$f = \sum_{f(c)=1} \rho_c$$

de aquí se desprenden las siguientes propiedades

1. $\forall c \in \mathcal{C}, \rho_c + \rho_c = 0$
2. $\forall c \in \mathcal{C}, \rho_c \cdot \rho_c = \rho_c$
3. $\forall c, c' \in \mathcal{C}$ con $c \neq c', \rho_c \cdot \rho_{c'} = 0$
4. Combinando las propiedades 2 y 3 se obtiene $\rho_c f = \rho_c$ si $f(c) = 1$ y $\rho_c f = 0$ si $f(c) = 0$

Notemos que $0_{\mathcal{C}}$ es la suma vacía y $1_{\mathcal{C}}$ es la suma de todos los elementos de la base.

Ejemplo 4.8. Sea $\mathcal{C} = \{000, 100, 101\}$. Una base para $R_{\mathcal{C}}$ es determinado considerando $\rho_{000} = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$, $\rho_{100} = x_1(1 - x_2)(1 - x_3)$, $\rho_{101} = x_1 x_3(1 - x_2)$. En particular $\rho_{000} + \rho_{100} = (1 - x_2)(1 - x_3) \in R_{\mathcal{C}}$, y $\rho_{000} + \rho_{100} + \rho_{101} = 1_{R_{\mathcal{C}}}$. La elección de polinomios representativos no es única, debido a la relación entre las variables que varían de acuerdo al anillo, para el anillo $R_{\mathcal{C}}$ calculado anteriormente se tiene $x_2 = 0$, $x_1 x_3 = x_3$, de este modo $\rho_{000} = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = (1 - x_1)(1 - x_3) = 1 - x_1$, $\rho_{100} = x_1(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1(1 - x_3) = x_1 - x_3$, $\rho_{101} = x_1 x_3(1 - x_2) = x_3$.

Lema 12. Sea $\psi : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ es un homomorfismo de anillos entre dos anillos neuronales. Entonces para todo $c \in \mathcal{C}$, existe un único $d \in \mathcal{D}$ tal que $\psi(\rho_d)\rho_c = \rho_c$.

Demostración. Veamos la existencia, para cada $c \in \mathcal{C}$ se cumple

$$\rho_c = 1_{\mathcal{C}}\rho_c = \psi(1_{\mathcal{D}})\rho_c = \psi\left(\sum_{d \in \mathcal{D}} \rho_d\right)\rho_c = \sum_{d \in \mathcal{D}} \psi(\rho_d)\rho_c$$

usando la propiedad 4 de los elementos base de $R_{\mathcal{C}}$, para al menos un $d \in \mathcal{D}$, se tiene $\psi(\rho_d)\rho_c = \rho_c$.

Veamos la unicidad, si $\psi(\rho_d)\rho_c = \psi(\rho_{d'})\rho_c = \rho_c$, con $d \neq d'$, entonces

$$\rho_c = \psi(\rho_d)\rho_c\psi(\rho_{d'})\rho_c = \psi(\rho_d)\psi(\rho_{d'})\rho_c = \psi(\rho_d\rho_{d'})\rho_c = 0_{\mathcal{C}}\rho_c = 0$$

lo cual es una contradicción. ■

Debido al último lema, se tiene las siguientes consecuencias

- los conjuntos $C_d = \{c \in \mathcal{C} \mid \psi(\rho_d)\rho_c = \rho_c\}$ son una partición de \mathcal{C}
- la aplicación $\phi_{\psi} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $\phi_{\psi}(c) = d$ donde d es el único elemento de \mathcal{D} tal que $\psi(\rho_d)\rho_c = \rho_c$, es bien definida

Definición 4.1. Sea \mathcal{C} y \mathcal{D} códigos neuronales. Se define los siguientes conjuntos

$$\text{Hom}(R_{\mathcal{D}, R_{\mathcal{C}}}) = \{\psi : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}} \mid \psi \text{ un homomorfismo de anillos}\}$$

$$\text{Map}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \{\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \mid \phi \text{ una función}\}$$

Debido a los dos últimos lemas, se tiene una aplicación para cada dirección entre los conjuntos definidos.

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) & \rightarrow & \text{Hom}(R_{\mathcal{D}, R_{\mathcal{C}}}) \\ \phi & \mapsto & \psi_{\phi} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Hom}(R_{\mathcal{D}, R_{\mathcal{C}}}) & \rightarrow & \text{Map}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \\ \psi & \mapsto & \phi_{\psi} \end{array}$$

Teorema 8. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} códigos neuronales, con $R_{\mathcal{C}}$ y $R_{\mathcal{D}}$ los respectivos anillos neuronales asociados. Entonces las aplicaciones ψ_{ϕ} , ϕ_{ψ} definidas entre $\text{Hom}(R_{\mathcal{D}, R_{\mathcal{C}}})$ y $\text{Map}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ son inversas, y los conjuntos están en biyección.

Demostración. Notemos que $\psi(\rho_d)\rho_c = \rho_c \Leftrightarrow \psi(\rho_d)(c) = 1$. Usando esta premisa se tiene

- para cualquier aplicación código $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ se cumple $\phi = \phi_{\psi_{\phi}}$. En efecto: sea $\psi = \psi_{\phi}$, entonces $\psi(f) = \phi^* f$ para todo $f \in R_{\mathcal{D}}$. En particular

$$\psi(\rho_d) = \phi^* \rho_d, \quad \psi(\rho_d)(c) = \phi^* \rho_d(c) = \rho_d(\phi(c)) = \begin{cases} 1 & , \phi(c) = d \\ 0 & , \phi(c) \neq d \end{cases}$$

así, $\psi(\rho_d)\rho_c = \begin{cases} \rho_c & , \phi(c) = d \\ 0 & , \phi(c) \neq d \end{cases}$, y se define $\phi_{\psi}(c) = d \Leftrightarrow \phi(c) = d$. Luego $\phi_{\psi_{\phi}} = \phi$

- para cualquier homomorfismo de anillos $\psi : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ se cumple $\psi = \psi_{\phi_{\psi}}$. En efecto: sea $\phi = \phi_{\psi}$, es decir $\phi(c) = d$ para el único d tal que $\psi(\rho_d)\rho_c = \rho_c$. Se debe mostrar $\psi_{\phi}(f) = \psi(f)$ para todo $f \in R_{\mathcal{D}}$, será suficiente mostrar $\psi_{\phi}(\rho_d) = \psi(\rho_d)$ para todo $d \in \mathcal{D}$. Estas dos funciones son iguales si $\psi_{\phi}(\rho_d)\rho_c = \psi(\rho_d)\rho_c$ para todo $c \in \mathcal{C}$. Por la definición de ψ_{ϕ} , esto significa que se debe mostrar que para todo $c \in \mathcal{C}$, $\psi(\rho_d)\rho_c = \phi^* \rho_d \rho_c$. Para evidenciar ello, notemos que por la definición de $\phi = \phi_{\psi}$ se tiene

$$\psi(\rho_d)\rho_c = \begin{cases} \rho_c & , d = \phi(c) \\ 0 & , d \neq \phi(c) \end{cases}$$

Por otro lado,

$$(\phi^* \rho_d)(c) = \rho_d(\phi(c)) = \begin{cases} 1 & , d = \phi(c) \\ 0 & , d \neq \phi(c) \end{cases} \Rightarrow \phi^* \rho_d \rho_c = \begin{cases} \rho_c & , d = \phi(c) \\ 0 & , d \neq \phi(c) \end{cases}$$

Por tanto $\psi = \psi_{\phi_{\psi}}$.

■

Este teorema no solo permite obtener una correspondencia biyectiva entre las aplicaciones código y los homomorfismos de anillo neuronales, también caracteriza a los homomorfismo de anillos neuronales al indicar que pueden ser obtenidos a partir de pullbacks de una aplicación código.

No solo cualquier aplicación código tiene un correspondiente homomorfismo de anillos neuronales, si no que cualquier asignación aleatoria $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tiene un homomorfismo de anillos relacionado. El isomorfismo captura poco de la similitud, el siguiente lema muestra que solo se desprende un resultado sobre cardinalidad.

Lema 13. *Dos anillos neuronales $R_{\mathcal{C}}$ y $R_{\mathcal{D}}$ son isomorfos si y solo si $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|$.*

Demostración. Dado que el anillo neuronal $R_{\mathcal{C}}$ es exactamente el anillo de funciones $f : \mathcal{C} \rightarrow \{0, 1\}$, se tiene que $R_{\mathcal{C}} \cong \mathbb{F}_2^{|\mathcal{C}|}$ y $R_{\mathcal{D}} \cong \mathbb{F}_2^{|\mathcal{D}|}$, el resultado se sigue directamente usando el hecho que $\mathbb{F}_2^n \cong \mathbb{F}_2^m$ si y solo si $n = m$. ■

4.3. Homomorfismo de anillos neuronales

No cualquier aplicación código preserva la estructura de código. La actividad de una neurona i es recobrada considerando la acción de la variable x_i , permitiendo ver que elementos básicos corresponden a que palabras código. Para un homomorfismo de anillos en general, no se impone restricciones inusuales a las imágenes de los elementos básicos en el anillo ambiente, de modo que no llevamos dicha estructura al anillo imagen [21].

Definición 4.2. Sean $R[m] = \mathbb{F}_2[y_1, \dots, y_m]/\mathcal{B}$ y $R[n] = \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{B}$. Un homomorfismo de anillos $\tau : R[m] \rightarrow R[n]$ es denominado preservador de neuronas si $\tau(y_i) \in \{x_1, \dots, x_n, 0, 1\}$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Ejemplo 4.9. *No todos los homomorfismos son preservador de neuronas. En efecto: la aplicación $\tau : R[1] \rightarrow R[2]$ dado por $\tau(\rho_1) = \rho_{01} + \rho_{10}$ y $\tau(\rho_0) = \rho_{00} + \rho_{11}$. Cumple $\tau(y_1) = x_1 + x_2$ y $\tau(y_i) \notin \{x_1, x_2, 0, 1\}$ para todo i .*

Un homomorfismo preservador de neuronas $\tau : R[m] \rightarrow R[n]$ es definido por el vector $S = (s_1, \dots, s_m)$, donde $s_i \in [n] \cup \{0, u\}$, tal que

$$\tau(y_i) = \begin{cases} x_j & , s_i = j \\ 0 & , s_i = 0 \\ 1 & , s_i = u \end{cases}$$

El vector S almacena información pertinente sobre τ , y cada posible S con $s_i \in [n] \cup \{0, u\}$ define un posible τ preservador de neuronas. En adelante, se hará referencia a τ definido por S , como τ_S .

Se realizará una elección cuidadosa para definir la preservación de neuronas como una propiedad de las aplicaciones entre anillos booleanos solamente, y no entre anillos neuronales en general. Ya que, por ejemplo x_1 tiene un significado diferente en $R[n]$ que en $R_{\mathcal{C}}$. En un anillo neuronal es posible tener $x_i = x_j$ para $i \neq j$ en tanto que en el anillo booleano $R[n]$ ellos son distintos.

Lema 14. *La composición de dos homomorfismos preservador de neuronas es preservador de neuronas.*

Demostración. Sean $S = (s_1, \dots, s_n)$, $s_i \in [m] \cup \{0, u\}$ y $T = (t_1, \dots, t_m)$ con $t_i \in [l] \cup \{0, u\}$, $\tau_S : R[n] \rightarrow R[m]$, $\tau_T : R[m] \rightarrow R[l]$. A fin de probar el lema, se debe hallar $W = (w_1, \dots, w_n)$, $w_i \in [l] \cup \{0, u\}$, tal que $\tau_W = \tau_T \circ \tau_S : R[n] \rightarrow R[l]$.

Definimos el vector W por

$$w_i = \begin{cases} t_{s_i} & , s_i \in [m] \\ 0 & , s_i = 0 \\ u & , s_i = u \end{cases}$$

usando las variables z_i para $R[n]$, y_i para $R[m]$, x_i para $R[l]$. De este modo

$$\begin{aligned} \tau_W(z_i) &= \begin{cases} x_j & , t_{s_i} = j \\ 0 & , t_{s_i} = 0 \text{ o } s_i = 0 \\ 1 & , t_{s_i} = u \text{ o } s_i = u \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_j & , s_i = k \text{ y } t_k = j \\ 0 & , s_i = k \text{ y } t_k = 0 \text{ o } s_i = 0 \\ 1 & , s_i = k \text{ y } t_k = u \text{ o } s_i = u \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_j & , \tau_S(z_i) = y_k \text{ y } \tau_T(y_k) = x_j \\ 0 & , \tau_S(z_i) = y_k \text{ y } \tau_T(y_k) = 0 \text{ o } \tau_S(z_i) = 0 \\ 1 & , \tau_S(z_i) = y_k \text{ y } \tau_T(y_k) = 1 \text{ o } \tau_S(z_i) = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_j & , \tau_T \circ \tau_S(z_i) = x_j \\ 0 & , \tau_T \circ \tau_S(z_i) = 0 \\ 1 & , \tau_T \circ \tau_S(z_i) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

■

4.4. Aplicaciones código preservador de neuronas

Definición 4.3. Sea \mathcal{C} un código con n neuronas y \mathcal{D} un código con m neuronas. Una aplicación código $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es preservador de neuronas si existe algún $S =$

$$(s_1, \dots, s_m), s_i \in [n] \cup \{0, u\} \text{ tal que } \phi(c) = d \text{ si y solamente si } d_i = \begin{cases} c_j & , s_i = j \\ 0 & , s_i = 0. \\ 1 & , s_i = u \end{cases}$$

Si ϕ es una aplicación código preservador de neuronas con vector S , denotamos ello por $\phi = \phi_S$, donde S puede no ser único.

Dado $S = (s_1, \dots, s_m)$, $s_i \in [n] \cup \{0, u\}$, siempre se puede definir una aplicación código preservador de neuronas $\phi_S : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ con $\phi_S(c) = d$ donde

$$d_i = \begin{cases} c_j & , s_i = j \\ 0 & , s_i = 0 \\ 1 & , s_i = u \end{cases}$$

Lema 15. Sea $\mathcal{C} = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}^m$ y $\phi_S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ preservador de neuronas. Entonces $\psi_{\phi_S} = \tau_S$, y así $\phi_S = \phi_{\tau_S}$.

Demostración. Escribiendo $\phi_S = \phi$, $\tau_S = \tau$. Se tiene $\psi_{\phi}(y_i) = \phi^* y_i$ para cualquier $c \in \mathcal{C}$

$$\phi^* y_i(c) = y_i(\phi(c)) = d_i = \begin{cases} c_j & , s_i = j \\ 0 & , s_i = 0 \\ 1 & , s_i = u \end{cases}$$

Por otro lado, también se tiene

$$\tau(y_i)(c) = \begin{cases} x_j(c) & , \tau(y_i) = x_j \\ 0 & , \tau(y_i) = 0 \\ 1 & , \tau(y_i) = 1 \end{cases} = \begin{cases} x_j(c) & , s_i = j \\ 0 & , s_i = 0 \\ 1 & , s_i = u \end{cases} = \begin{cases} c_j & , s_i = j \\ 0 & , s_i = 0 \\ 1 & , s_i = 1 \end{cases}$$

De este modo τ y ψ_{ϕ} son idénticos sobre $\{y_i\}$, luego son idénticos en todas partes. ■

Sean \mathcal{C} es un código con n neuronas, \mathcal{D} un código con m neuronas y $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ una aplicación preservador de neuronas con vector S . Si $\phi_S : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ es una aplicación preservador de neuronas, se cumple que $\phi = \phi_S|_{\mathcal{C}}$ y también $\phi = \phi_{\tau_S}|_{\mathcal{C}}$, donde τ_S es el homomorfismo de anillos preservando neurona definido en el lema. Dado que S no es necesariamente único, entonces existen diversas posibilidades para τ_S .

Lema 16. La composición de dos aplicaciones código preservador de neuronas es preservador de neuronas.

Demostración. Sea $\phi_T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $\phi_S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ aplicaciones preservador de neuronas, tal que $\phi_T(c) = d$ y $\phi_S(d) = e$. Sea W definido por $w_i = t_{s_i}$, $t_0 = 0$, $t_u = u$. Entonces

$$\begin{aligned} e_i &= \begin{cases} d_j & , s_i = j \\ 0 & , s_i = 0 \\ 1 & , s_i = u \end{cases} \\ &= \begin{cases} c_k & , s_i = j \text{ y } t_j = k \\ 0 & , s_i = j \text{ y } t_j = 0 \text{ o } s_i = 0 \\ 1 & , s_i = j \text{ y } t_j = u \text{ o } s_i = u \end{cases} \\ &= \begin{cases} c_k & , t_{s_i} = k \\ 0 & , t_{s_i} = 0 \\ 1 & , t_{s_i} = u \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} c_k & , w_i = k \\ 0 & , w_i = 0 \\ 1 & , w_i = u \end{cases}$$

Así, $\phi_S(\phi_T(c)) = \phi_W(c)$, por tanto $\phi_S \circ \phi_T$ es preservador de neuronas. ■

Aplicaciones código elementales preservador de neuronas

De las cuatro aplicaciones código elementales, tres de ellos son preservador de neuronas sin ninguna restricción. El único problema se presenta en la adjunción de neuronas el cual puede o no ser preservador de neuronas, dependiendo de la función $f(x)$ la cual define la nueva neurona.

Remoción de la última neurona: sea $S = (1, 2, \dots, n-1)$. Entonces $\phi_S(c) = d$, donde $d = (c_1, \dots, c_{n-1})$. Se requiere $\phi_S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

Adjunción de 1 o 0 al final de cada palabra código: $S = (1, 2, \dots, n, 1)$ o también $S = (1, 2, \dots, n, 0)$. Entonces $\phi_S(c) = d$ donde $d = (c_1, \dots, c_n, 1)$ o $d = (c_1, \dots, c_n, 0)$. Se requiere $\phi_S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

Adjunción de una neurona la cual repite una neurona i al final de cada palabra: $S = (1, 2, \dots, n, i)$. Entonces $\phi_S(c) = d$, donde $d = (c_1, \dots, c_n, c_i)$. Se requiere $\phi_S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

Permutación de etiquetas: sea $\delta \in S_n$ una permutación. La neurona i es reetiquetada como $\delta(i)$, tal que $S = (\delta(1), \dots, \delta(n))$. Entonces $\phi_S(c) = d$, donde $d = (c_{\delta(1)}, \dots, c_{\delta(n)})$. Se requiere, $\phi_S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

Adjunción de una palabra código: sea $S = (1, 2, \dots, n)$. Se define la aplicación inclusión $\phi(c) = c$, toda vez que $\phi(\mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{D}$. Entonces todas las palabras código en $\mathcal{D} \setminus \phi(\mathcal{C})$ son adjuntadas.

Proposición 3. *Todas las aplicaciones código preservador de neuronas ϕ son composiciones de las siguientes aplicaciones preservador de neuronas elementales*

1. *Permutación de etiquetas*
2. *Remoción de la última neurona*
3. *Adjuntar un 1 al final de cada palabra código*
4. *Adjuntar un 0 al final de cada palabra código*
5. *Adjuntar una nueva neurona el cual repite otra neurona*
6. *Adjuntar una palabra código*

Demostración. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} códigos de n y m neuronas, $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ una aplicación código preservador de neuronas, con $\phi = \phi_S$ para $S = (s_1, \dots, s_m)$, $s_i \in [n] \cup \{0, u\}$.

Dado que la permutación, remoción de neuronas, y adjunción de palabras código son aplicaciones código preservador de neuronas, es suficiente mostrar que las funciones f que usamos para definir las nuevas neuronas corresponden a una de las siguientes tres: adjuntar un 1, 0, o una neurona repetida. Es decir, se debe mostrar que $f_i \in \{x_1, \dots, x_n, 0, 1\}$, $i = 1, \dots, m$. En efecto

$$f_i(x) = \begin{cases} x_j & , s_i = j \\ 0 & , s_i = 0 \\ 1 & , s_i = 1 \end{cases} \Rightarrow f_i(c) = \begin{cases} c_j & , s_i = j \\ 0 & , s_i = 0 \\ 1 & , s_i = u \end{cases}$$

■

4.5. Anillos neuronales como módulos

Para un código \mathcal{C} con n neuronas, se considera el anillo neuronal $R_{\mathcal{C}}$ como un $R[n] = R_{\{0;1\}^n}$ -módulo. El anillo $R[n]$ será referido como el *anillo ambiente*. Considerando $R_{\mathcal{C}}$ como un $R[n]$ -módulo, permite almacenar la estructura combinatoria del código y retiene la información sobre la presentación, incluso si $R_{\mathcal{C}}$ se considera solo como un anillo abstracto.

La acción del módulo es del siguiente modo: dado $r \in R[n]$ y $f \in R_{\mathcal{C}}$ se define

$$[r \cdot f](c) = r(c)f(c)$$

esto es, $(r \cdot f)^{-1}(1) = r^{-1}(1) \cap f^{-1}(1)$, la intersección es un subconjunto de \mathcal{C} . De este modo, f detecta un cierto conjunto de palabras código, en tanto que $r \cdot f$ detecta solo aquellos que son detectados por r también.

Esta acción de módulos es exactamente una multiplicación de polinomios, con el resultado considerado como un elemento de $R_{\mathcal{C}}$. En particular, en cualquier $R_{\mathcal{C}}$ se tiene las relaciones $x_i(1 - x_i) = 0$, lo cual también significa $x_i^2 = x_i$ y $(1 - x_i)^2 = 1 - x_i$.

Ejemplo 4.10. Para el código $\mathcal{C} = \{000; 100; 101\}$, se tiene que $R_{\mathcal{C}}$ es un módulo bajo $R[3] = R_{\{0;1\}^3}$. Notemos que

- para el elemento $1 - x_1$ de $R[3]$

$$(1 - x_1) \cdot (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$$

sin embargo

$$(1 - x_1) \cdot x_1(1 - x_2)(1 - x_3) = 0$$

- para el elemento x_1x_2 de $R[3]$, el cual es un elemento no nulo, se evalúa a 0 para todas las palabras código en \mathcal{C} , así para cualquier elemento $f \in R_{\mathcal{C}}$ se tiene $x_1x_2 \cdot f = 0$

4.5.1. Recobrando el código

La propiedad más potente de la acción es la capacidad para recobrar las palabras código únicamente de la acción del módulo. Para ello, se considera los generadores $x_i \in R[n]$ y $(x_i)^{-1}(1) = \{c \in \{0;1\}^n \mid c_i = 1\}$. De este modo x_i detecta exactamente aquellas palabras código en el cual la neurona i se activa. Usando estos elementos especiales, es posible recobrar el código. Veamos

- seleccionar un elemento base ρ
- para cada $i = 1, \dots, n$ considere $x_i \cdot \rho$. Dado que ρ detecta exactamente una palabra código c , entonces existen dos posibilidades
 - si $c_i = 1$, entonces $(x_i \rho)^{-1}(1) = \{c\}$, así $x_i \cdot \rho = \rho$
 - si $c_i = 0$, entonces $(x_i \rho)^{-1}(1) = \emptyset$, así $x_i \cdot \rho = 0$
- formar la palabra código c de modo que $c_i = 1$ si $x_i \rho = \rho$ y $c_i = 0$ si $x_i \rho = 0$

Considerando el conjunto de palabras código dado por el proceso, repitiendo los pasos para cada elemento base ρ , se obtiene el código original \mathcal{C} .

Ejemplo 4.11. Considere el código $\mathcal{C} = \{000; 100; 101\}$ y el anillo $R_{\mathcal{C}}$. Notemos que

- considerando el elemento base ρ_{101}
- se tiene
 - $x_1 \cdot \rho_{101} = x_1 \cdot x_1 x_3 (1 - x_2) = x_1 x_3 (1 - x_2) = \rho_{101}$, es decir $c_1 = 1$
 - $x_2 \cdot \rho_{101} = x_2 \cdot x_1 x_3 (1 - x_2) = 0$, es decir $c_2 = 0$
 - $x_3 \cdot \rho_{101} = x_3 \cdot x_1 x_3 (1 - x_2) = x_1 x_3 (1 - x_2) = \rho_{101}$, es decir $c_3 = 1$
- el elemento base ρ_{101} corresponde a la palabra código $c = 101$.

4.5.2. Módulos bajo diferentes anillos

Dado que es posible considerar un anillo neuronal $R_{\mathcal{C}}$ con n neuronas como un $R[n]$ -módulo que preserva la estructura de código, entonces es natural considerar el homomorfismo entre anillos neuronales. Sin embargo, no es inmediato puesto que para dos anillos neuronales $R_{\mathcal{C}}$ y $R_{\mathcal{D}}$ con n y m neuronas son considerados módulos bajo diferentes anillos $R[n]$ y $R[m]$ respectivamente.

Afin de considerar un homomorfismo de R -módulos entre $R_{\mathcal{C}}$ y $R_{\mathcal{D}}$ para algún anillo R , es necesario considerar a ambos anillos como módulos bajo el mismo anillo R . Para ello, se considera la siguiente construcción estándar del álgebra conmutativa.

Sean R, S anillos y $\tau : R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Dado un S -módulo M , se puede considerar M como un R -módulo mediante el homomorfismo τ , usando la acción $r \cdot m = \tau(r) \cdot m$ para cualquier $r \in R, m \in M$.

Para el caso de anillos neuronales, lo anterior indica que para un homomorfismo de anillos $\tau : R[m] \rightarrow R[n]$, se puede considerar el $R[n]$ -módulo $R_{\mathcal{C}}$ como un $R[m]$ -módulo.

Sin embargo, las aplicaciones módulo serán consideradas para aplicaciones entre anillos neuronales en vez de los anillos $R[n], R[m]$.

Definición 4.4. Dado el R -módulo M , S -módulo N y un homomorfismo $\phi : M \rightarrow N$. Se dice que un homomorfismo $\tau : R \rightarrow S$ es compatible con ϕ si ϕ es un homomorfismo de R -módulo, donde N es visto como un R -módulo a través de τ . Es decir, τ es compatible con ϕ si $\phi(r \times x) = \tau(r) \times \phi(x)$ para todo $r \in R, x \in M$.

Ejemplo 4.12. Considere los códigos $\mathcal{C} = \{000; 100; 101\}$ y $\mathcal{D} = \{00; 10; 11\}$ y sea la aplicación $\phi : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ es dada por $\phi(\rho_{00}) = \rho_{000} + \rho_{100}$, $\phi(\rho_{10}) = \rho_{100}$ y $\phi(\rho_{11}) = 0$. Por linealidad se extiende a todos los elementos de $R_{\mathcal{D}}$ obteniéndose así un homomorfismo de grupos.

No todo homomorfismo de grupo entre dos anillos neuronales tiene un homomorfismo de anillo compatible.

Ejemplo 4.13. Considerando \mathcal{C} y \mathcal{D} como en el ejemplo anterior, de modo que se consideren aplicaciones polinomiales. El homomorfismo de grupos ϕ dado por: $x_1 \rightarrow y_1(1 - y_2)(1 - y_3)$, $x_2 \rightarrow 0$. No existe homomorfismo de anillo compatible $\tau : R[2] \rightarrow R[3]$ tal que ϕ es un $R[2]$ -módulo. En efecto: si existiera el homomorfismo de anillo compatible, entonces cualquiera de dichos homomorfismos τ cumpliría

$$\phi(\rho_{00} \cdot \rho_{00}) = \tau(\rho_{00})\phi(\rho_{00}) = \tau(\rho_{00}) \cdot [\rho_{000} + \rho_{100}]$$

Dado que $\rho_{00} \cdot \rho_{00} = \rho_{00}$ este debe ser igual a $\rho_{000} + \rho_{100}$. Así $\tau(\rho_{00})$ debe preservar ρ_{000} y ρ_{100} . Así también $\tau(\rho_{10})$ debe preservar ρ_{100} y $\tau(\rho_{10})\tau(\rho_{00})$ debe preservar al menos a ρ_{100} , por lo que $\tau(\rho_{10})\tau(\rho_{00}) \neq 0$. Dado que $\tau(\rho_{00}\rho_{10}) = \tau(0) = 0$ y τ un homomorfismo de anillos entonces $\tau(\rho_{00}\rho_{10}) = \tau(\rho_{00})\tau(\rho_{10}) \neq 0$, contradiciendo al hecho anterior. Por tanto ningún τ existe, y no existe homomorfismo de anillos compatible para ϕ .

Proposición 4. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} códigos neuronales con n y m neuronas, respectivamente. Si $\phi : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ es un homomorfismo de anillos, entonces existe un homomorfismo de anillos $\tau : R[m] \rightarrow R[n]$ el cual es compatible con ϕ , y así ϕ es un homomorfismo de $R[m]$ -módulos. Más aún, el conjunto de τ compatibles es exactamente el conjunto de homomorfismo de anillos $R[m] \rightarrow R[n]$ los cuales son extensiones de ϕ , en el sentido que para todo $f \in R_{\mathcal{D}}$, $(\phi(f))^{-1}(1) \subseteq (\tau(f))^{-1}(1)$.

Demostración. Sea $\phi : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ un homomorfismo de anillos. Se obtiene el homomorfismo de anillo compatible τ del siguiente modo

- considerando un elemento base ρ_d de $R_{\mathcal{D}}$, el cual es también un elemento base de $R[m]$
- se define $\tau(\rho_d) = \phi(\rho_d) + \sum_{v \in \{0;1\}^n \setminus \mathcal{C}} \rho_v$, de este modo $\tau(\rho_d)$ detecta las mismas palabras código que $\phi(\rho_d)$, así como todas las palabras código de $\{0;1\}^n$ que no son parte de \mathcal{C}

- para cualquier otro $d \in \mathcal{D}$, se define $\tau(\rho_d) = \phi(\rho_d)$ y para todo $v \in \{0; 1\}^m \setminus \mathcal{D}$ se define $\tau(\rho_v) = 0$
- se extiende τ a todos los elementos de $R[m]$ por linealidad, esto es, si $f = \sum \rho_c$ entonces $\tau(f) = \sum \tau(\rho_c)$

lo anterior proporciona el homomorfismo de anillos.

Veamos que la propiedad de compatibilidad es equivalente a la propiedad de extensión. Sea $\tau : R[m] \rightarrow R[n]$ un homomorfismo de anillos, y $f = \sum_{d \in f^{-1}(1)} \rho_d \in R_{\mathcal{D}}$. Como $f \cdot f = f$, entonces τ es compatible con ϕ si y solamente si $\phi(f) = \phi(f \cdot f) = \tau(f) \cdot \phi(f)$, lo cual ocurre si y solamente si $\tau(f)$ detecta al menos las mismas palabras código que $\phi(f)$, esto acontece si y solamente si $\tau(f)^{-1}(1) \supseteq \phi(f)^{-1}(1)$. ■

4.5.3. Homomorfismo de anillos neuronales

Se desea preservar la estructura de código, ya que no cualquier aplicación código, $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, la preserva. Sin embargo cualquier aplicación código genera un homomorfismo de anillos, y así también un homomorfismo de $R[m]$ -módulos relacionado. De este modo, usando propiedades de módulo se puede extraer la estructura de código, mas no se puede asegurar que la estructura es preservada a través de aplicaciones. Esto motiva considerar la preservación de neuronas, de modo que la actividad de la neurona i es recobrada considerando la acción de la variable x_i , lo cual permite determinar que elementos básicos corresponden a que palabras código.

Bajo un homomorfismo general de anillos, no se considera restricción inusual sobre la imagen de elementos especiales del anillo ambiente, de modo que no se traslada esa estructura al anillo imagen. ¿Qué se obtendría si se restringe a aplicaciones compatibles donde los elementos que detectan neuronas se mapean a otros elementos que detectan neuronas?

A continuación se proporciona una mejor noción de homomorfismo de anillo neuronal a fin de mantener la propiedad de ser preservador de neuronas.

Definición 4.5. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} códigos con n y m neuronas respectivamente. Un homomorfismo de anillos $\psi : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ es denominado un homomorfismo de anillos neuronales si existe un homomorfismo de anillos $\tau : R[m] \rightarrow R[n]$ compatible con ser preservador de neuronas.

El siguiente lema, permite conocer que aplicaciones código corresponden a homomorfismo de anillos neuronales.

Lema 17. ψ es un homomorfismo de anillos neuronales si y solo si ϕ_{ψ} es una aplicación código preservador de neuronas.

Demostración. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} códigos con n y m neuronas. Dado que $\psi : R_{\mathcal{D}} \rightarrow R_{\mathcal{C}}$ es un homomorfismo de anillos neuronales si y solamente si existe algún preservador de neuronas $\tau : R[m] \rightarrow R[n]$ compatible con ψ . Sea $\tau = \tau_{\mathcal{S}}$, y $\phi_{\mathcal{S}} : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^n$ es

una aplicación preservador de neuronas, entonces $\phi_{\tau_S} = \phi_S$, por el lema 15 y $\phi_\psi = \phi_{\tau_S}|_{\mathcal{C}}$, pues τ es compatible con ψ (es decir $\psi(r \cdot x) = \tau(r) \cdot \psi(x)$, donde ψ es considerado como un homomorfismo de $R[m]$ -módulo). Así, $\phi_\psi = \phi_S|_{\mathcal{C}} = \phi$ es una aplicación código preservador de neuronas. ■

Teorema 9. *ψ es un homomorfismo de anillos neuronales si y solamente ϕ_ψ es una composición de las siguientes aplicaciones código elementales*

1. Remoción de una neurona
2. Permutación de etiquetas
3. Repetición de una neurona
4. Adjunción de una neurona trivial (0 o 1)
5. Adjunción de palabras códigos

Demostración. Por el lema anterior ψ es un homomorfismo de anillos neuronales si y solo si ϕ_ψ es una aplicación código preservador de neuronas. Por la proposición 3 ϕ_ψ es un preservador de neuronas entonces es una composición de aplicaciones código elementales. ■

Finalmente, el siguiente lema indica que aplicaciones código corresponden a isomorfismo de anillos neuronales.

Lema 18. *Isomorfismo de anillos neuronales corresponden exactamente a aquellas aplicaciones código que permutan las etiquetas de neuronas.*

Demostración. Sea $\tau = \tau_S : R[n] \rightarrow R[m]$ un isomorfismo. Dado que $R[n]$ y $R[m]$ son finitos, ellos tienen la misma medida. De donde $2^{2^n} = |R[n]| = |R[m]| = 2^{2^m}$, así $n = m$. De este modo se puede escribir $\tau : R[n] \rightarrow R[n]$.

Como τ es un isomorfismo, $\ker(\tau) = \{0\}$, por lo que no es posible tener $\tau(x_i) = 0$ ya que $x_i \in \ker(\tau_S)$. Similarmente, no es posible $\tau(x_i) = 1$, ya que $1 - x_i \in \ker(\tau)$. Como τ es preservador de neuronas, entonces $\tau(x_i) \in \{x_1, \dots, x_n\}$, para todo $i = 1, \dots, n$. Dado que $\tau = \tau_S$ para algún S , entonces $s_i \in [n]$ para todo i .

Si $\tau(x_i) = \tau(x_j) = x_k$ para $i \neq j$, entonces $x_i - x_j \in \ker(\tau)$, lo cual es una contradicción con $x_i - x_j \neq 0$. Así, τ induce una biyección sobre el conjunto de variables $\{x_1, \dots, x_n\}$, por lo que S contiene cada índice en $[n]$ exactamente una vez.

Sea $c \in \{0, 1\}^n$ y $\phi_\tau(c) = d$. Entonces $\tau(f)(c) = f(d)$, en particular $x_j(c) = x_i(d)$ o mejor aún $c_j = d_i$. De esta manera ϕ_τ lleva cada palabra código c a su permutación, donde $j \rightarrow i$ si y solo si $\tau(x_i) = x_j$.

Si τ es compatible con ψ , entonces ψ es una restricción de la aplicación τ , así $\phi_\psi(c) = \phi_\tau(c)$ para todo $c \in \mathcal{C}$. Como ψ es un isomorfismo, ϕ_ψ es una biyección, así cualquier palabra código en \mathcal{D} es la imagen de algún $c \in \mathcal{C}$, por lo que ϕ_ψ es una aplicación permutación sobre \mathcal{C} , y ninguna palabra código es añadida. ■

Conclusiones

A continuación listamos las conclusiones obtenidas como parte del enfoque algebraico de los códigos neuronales.

Sobre la actividad neuronal: lo que puede ser inferido sobre el espacio de estímulos subyacente, sin conocer las funciones de respuesta de estímulos o campos receptivos

- resultados topológicos, como la dimensión del espacio, que son inferidos del código neuronal a través del complejo simplicial asociado
- características geométricas y topológicas obtenidas mediante la asociación del anillo de funciones, considerando como indeterminadas a las funciones coordenadas, quedando el espacio de estímulos definido en términos de los ideales de este anillo
- el anillo neuronal asociado al código neuronal, al igual que el complejo simplicial, contiene información sobre el espacio, reteniendo datos combinatorios del código
- el ideal neuronal puede ser usado algorítmicamente para extraer de forma compacta una descripción minimal de la estructura de campo receptivo del código, permitiendo vincular propiedades combinatorias del código al espacio de estímulos

Sobre la naturaleza combinatoria: del modo en que fue definido el código neuronal, contiene como parte esencial un objeto combinatorio, de modo que es posible asociarle objetos algebraicos

- anillos de Stanley-Reisner son vinculados a los anillos neuronales a fin de obtener propiedades combinatorias
- los anillos neuronales son relacionados a través del homomorfismo de anillos, vinculando a cada homomorfismo una aplicación entre códigos mediante una aplicación de retorno o pullback

Referencias Bibliográficas

- [1] Ramón y Cajal S. *Textura del sistema nervioso del hombre y de los vertebrados*. Madrid, Imprenta y Librería de Nicolás Moya, 1899.
- [2] Raichle M. y Gusnard D. “Appraising the brain’s energy budget”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 99.16 (2002), págs. 10237-10239.
- [3] Zimmer C. “100 trillion connections”. En: *Scientific American* 304 (2011), págs. 58-63.
- [4] Seung H. “Towards functional connectomics”. En: *Nature* 471 (2011), págs. 171-172.
- [5] Cook S., Jarrel T. y Brittin C. “Whole-animal connectomes of both *Caenorhabditis elegans* sexes”. En: *Nature* 571 (2019), págs. 63-71.
- [6] Sherrington C. “Observations on the scratch-reflex in the spinal dog.” En: *Journal of Physiology* 34.1-2 (1906), págs. 1-50.
- [7] Stapleton G., Leishi J. y P. Rodgers. “Drawing Euler Diagrams with circles: the theory of piercings.” En: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 17.7 (2011), págs. 1020-1032.
- [8] Franke M. y Muthiah S. “Every binary code can be realized by convex sets.” En: *Advances in Applied Mathematics* 99.8 (2018), págs. 83-93.
- [9] Curto C., Veliz-Cuba A. y Youngs N. “Analysis of Combinatorial Neural Codes: An Algebraic Approach”. En: *Algebraic and Combinatorial Computational Biology*. Ed. por Robeva R. y Macauley M. Academic Press, 2018. Cap. 7, págs. 213-240.
- [10] Osborne L. “The neural basis for combinatorial coding in a cortical population response”. En: *Journal of Neuroscience* 28.50 (2008), págs. 13522-13531.
- [11] O’Keefe J. y Dostrovsky J. “The hippocampus as a spatial map. preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat”. En: *Brian Research* 1.34 (1971), págs. 171-175.
- [12] Mulas R. y Tran N. “Minimal Embedding Dimensions of Connected Neural Codes”. En: *Journal of Algebraic Statistics* 11.1 (2020), págs. 99-106.
- [13] Toledo M., A. Molina y Caro N. “Sobre dos teoremas combinatorios”. En: *Pesquimat* 24.1 (2021), págs. 80-90.
- [14] Helly E. “Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten”. En: *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 32 (1923), págs. 175-176.
- [15] Hatcher A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press., 2002.

- [16] Cox D., Little J. y O'Shea D. *Ideals, varieties, and algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. 4.^a ed. Springer Publishing Company, Incorporated, 2015.
- [17] Stone M. "The theory of representations for Boolean algebras". En: *Trans. Am. Math. Soc.* 40 (1936), págs. 37-111.
- [18] Atiyah M. y Macdonald I. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley, 1969.
- [19] Curto C. y col. "What Makes a Neural Code Convex?" En: *SIAM J. Appl. Algebra Geom.* 1 (2017), págs. 222-238.
- [20] Villarreal R. *Monomial Algebras*. 2.^a ed. Chapman y Hall, 2015.
- [21] Curto C. y Youngs N. "Neural Ring Homomorphisms and Maps Between Neural Codes". En: (2020). Ed. por Baas N. y col., págs. 163-180.

Terminología biológica

Espacio de estímulos

Región en la que cualquier agente, evento o situación, interna o externa, provoca una respuesta de un organismo.

Campos receptivos

Región espacialmente discreta y las características asociadas con ella que pueden estimularse para provocar la respuesta máxima de una célula sensorial. En la visión, por ejemplo, el campo receptivo de una célula ganglionar de la retina es el área de la retina (que contiene un número particular de fotorreceptores) que evoca una respuesta neural. Una neurona auditiva tiene un campo receptivo que puede describirse por la gama de tonos a los que responde o por los receptores que provocan esta respuesta. También se llama campo receptor.

Potencial de acción

Señal que transporta la información a través de la distancia en el sistema nervioso. Identificado como una onda, producido por una descarga eléctrica, que recorre una membrana celular. Esta modifica la carga eléctrica de la membrana celular.

Polarización

Proceso o acto de producir valores de carga eléctrica positiva y negativa en extremos opuestos, como la carga eléctrica dentro de una célula (nerviosa) en relación con el entorno circundante.

Algoritmo para determinar $FC(J_{\mathcal{C}})$

A diferencia del complejo simplicial, el anillo neuronal retiene los datos combinatorios completos de un código neuronal, a partir del ideal neuronal $J_{\mathcal{C}}$, sintetizando estos datos con un mejor aprovechamiento algorítmico computacional.

Determinando $FC(J_{\mathcal{C}})$ a partir de \mathcal{C}

Se determina los pseudomonomiales que componen $J_{\mathcal{C}}$

Algoritmo $FC(J_{\mathcal{C}})$

Dato de entrada: un código neuronal $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$

Paso 1: para cada $c \in \mathcal{C}$ se toma el ideal $\mathfrak{p}_c = \langle x_i - c_i \mid i = 1, \dots, n \rangle$

Paso 2: calcular $\mathcal{M}(J_{\mathcal{C}}) = \{\prod_{c \in \mathcal{C}} g_c \mid g_c = x_i - c_i \text{ para algún } i = 1, \dots, n\}$

Paso 3: reducir los elementos de $\mathcal{M}(J_{\mathcal{C}})$ imponiendo $x_i(1 - x_i) = 0$ a fin de eliminar elementos que no son pseudomonomiales, el conjunto reducido, conformado por elementos de la forma $f = \prod_{i \in \sigma} x_i \prod_{j \in \tau} (1 - x_j)$, $\tau \cap \sigma = \emptyset$, es denotado por $\tilde{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{C}})$

Paso 4: remover todos los elementos de $\tilde{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{C}})$ que son múltiplos de elementos de menor grado en $\tilde{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{C}})$

Dato de salida: la forma canónica del ideal neuronal $FC(J_{\mathcal{C}})$

Sea $z_i, y_i \in \{x_i, 1 - x_i\}$, de modo que cualquier pseudomonomial en $\mathbb{F}_2[x_1; \dots; x_n]$ es de la forma $\prod_{j \in \sigma} z_j$ para algún conjunto de índices $\sigma \subseteq [n]$.

Lema 19. Si $y_{i_1} \cdots y_{i_m} \in \langle z_{j_1}; \dots; z_{j_l} \rangle$ donde $\{i_k\}, \{j_r\}$ son conjuntos de índices distintos, entonces $y_{i_k} = z_{j_r}$ para algún $k \in [m]$ y $r \in [l]$.

Demostración. Sea $f = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ y $P = \{z_{j_1}; \dots; z_{j_l}\}$. Dado que $f \in \langle P \rangle$ entonces $\langle P \rangle = \langle P, f \rangle$, de este modo $V(\langle P \rangle) = V(\langle P; f \rangle)$.

Si no existen i_k, j_r tal que $y_{i_k} = z_{j_r}$, entonces es posible determinar $a \in \{0, 1\}^n$ tal que: para cada $j_r \in \{j_1, \dots, j_l\}$, $a_{j_r} = 0$ si $z_{j_r} = x_{j_r}$ y $a_{j_r} = 1$ si $z_{j_r} = 1 - x_{j_r}$. De modo que $z_{j_r}(a) = 0$ para todo $r \in [l]$. Para cada $i_k \in \omega = \{i_1, \dots, i_m\} \setminus \{j_1, \dots, j_l\}$, $a_{i_k} = 1$ si $y_{i_k} = x_{i_k}$ y $a_{i_k} = 0$ si $y_{i_k} = 1 - x_{i_k}$, de donde $y_{i_k}(a) = 1$ para todo $i_k \in \omega$. Para cualquier índice restante t , se considera $a_t = 1$.

Dado que $y_{i_k} \neq z_{j_r}$ para cualquier i_k, j_r , entonces para cualquier $i \in \{i_1, \dots, i_m\} \cap \{j_1, \dots, j_l\}$ se cumple $y_i(a) = 1 - z_i(a) = 1$, así $f(a) = 1$.

Por lo anterior $a \in V(\langle P \rangle)$ entonces $a \in V(\langle P; f \rangle)$, por tanto $f(a) = 0$, una contradicción. Esto muestra que necesariamente se debe tener $y_{i_k} = z_{j_r}$ para algún $k \in [m]$ y $r \in [l]$. ■

En el algoritmo de la forma canónica, cualquier polinomio obtenido es un pseudomonomio de J_C . Esto es porque el algoritmo construye productos de factores de la forma x_i o $1 - x_i$, reduciendo ellos de modo que ningún índice es repetido en el producto final, así no existen potencias de ningún factor x_i o $1 - x_i$, lo cual garantiza que se obtienen pseudomonomios. Mas aún, dado que los productos tienen cada uno al menos un factor en cada ideal primo de la descomposición primaria de J_C , los pseudomonomios están todos en J_C . La siguiente proposición garantiza que el conjunto de pseudomonomios es precisamente la forma canónica $CF(J_C)$.

Proposición 5. *El conjunto resultante del algoritmo es la forma canónica $FC(J_C)$.*

Demostración. Es suficiente mostrar que después del paso 4 del algoritmo, el conjunto reducido $\tilde{M}(FC(J_C))$ consiste enteramente de pseudomonomios de J_C e incluye todos los pseudomonomios minimales de J_C . Si esto es cierto, entonces después de remover múltiplos de elementos de grado inferior en el paso 5 se garantiza para obtener el conjunto de pseudomonomios minimales, $CF(J_C)$, ya que es precisamente los pseudomonomios no minimales que serán removidos en el paso final del algoritmo.

Dado que $\mathcal{M}(J_C)$, como definido en el paso 3 del algoritmo, es precisamente el conjunto de todos los polinomios g que son obtenidos eligiendo un factor lineal del conjunto generador de cada p_c :

$$\mathcal{M}(J_C) = \left\{ g = z_{p_1} \cdots z_{p_s} \mid z_{p_i} \text{ es un generador lineal de } p_{c_i} \right\}$$

Por la definición de $\tilde{M}(J_C)$ que es obtenido de $\mathcal{M}(J_C)$ por la reducción en el paso 4 del algoritmo. Todos los elementos de $\tilde{M}(J_C)$ son pseudomonomios contenidos en J_C .

Para mostrar que $\tilde{M}(J_C)$ contiene todos los pseudomonomios minimales de J_C , se mostrará que si $f \in J_C$ es un pseudomonomio entonces existe otro pseudomonomio $h \in \tilde{M}(J_C)$ tal que $h|f$, en efecto: si $f = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ es un pseudomonomio de J_C entonces $f \in P_i$ para cada $i \in [s]$, luego para $P_i = \langle z_{j_1}, \dots, z_{j_l} \rangle$ se tiene $y_{i_k} = z_{j_r}$ para algún $k \in [m]$, $r \in [l]$ por el lema 19.

De este modo cada ideal primo P_i posee un término generador z_{p_i} que aparece como uno de los factores lineales de f . Considerando $g = z_{p_1} \cdots z_{p_s}$, se tiene que $g \in \mathcal{M}(J_C)$ y $g|f$ o $z_{p_i} = z_{p_j}$ para algún par i, j . Removiendo factores repetidos en g se obtiene un pseudomonial $h \in \tilde{\mathcal{M}}(J_C)$ tal que $h|g$ y $h|f$. Finalmente considerando f desde el inicio como un pseudomonial minimal, se tiene $f = h \in \tilde{\mathcal{M}}(J_C)$. ■

Implementación del código

Dado que es sencillo el manejo matricial, en términos de códigos neuronales, se recomienda trasladar la información necesaria y operaciones en un formato matricial, a fin de implementar el algoritmo, por ejemplo, en MATLAB.