Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Convergencia uniforme de una sucesión de funciones armónicas sobre un conjunto compacto

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Yeni Magnolia RAMÍREZ MONTALVO

ASESOR

Lic. Víctor Emilio CARRERA BARRANTES

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Ramírez, Y. (2021). *Convergencia uniforme de una sucesión de funciones armónicas sobre un conjunto compacto*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	YENI MAGNOLIA RAMIREZ MONTALVO
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	47025167
URL de ORCID	NO APLICA
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	VICTOR EMILIO CARRERA BARRANTES
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445788
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-2048-9494
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	CARLOS ALBERTO PEÑA MIRANDA
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	FELIX GREGORIO PARIONA VILCA
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	07366081
Datos de investigación	
Línea de investigación	NO APLICA
Grupo de investigación	NO APLICA
Agencia de financiamiento	SIN FINANCIAMIENTO
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima

	Latitud: -12.05611582267559 Longitud: -77.08468053573509
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Julio 2021 - octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 19:45 horas del sábado 23 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Mg. Felix Gregorio Pariona Vilca (MIEMBRO) y el Lic. Víctor Emilio Carrera Barrantes (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES ARMÓNICAS SOBRE UN CONJUNTO COMPACTO",** presentado por la señorita **Bachiller Yeni Magnolia Ramírez Montalvo**, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de **dieciocho (18).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que la participante **Bachiller Yeni Magnolia Ramírez Montalvo** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 20:15 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE

Mg. Felix Gregorio Pariona Vilca
MIEMBRO

Lic. Víctor Emilio Carrera Barrantes
MIEMBRO ASESOR

FICHA CATALOGRÁFICA

Yeni Magnolia, Ramírez Montalvo

Convergencia uniforme de una sucesión de funciones armónicas sobre un conjunto compacto, (Lima) 2021
VIII.,51p.,29.7cm (UNMSM, Titulo, Matemática, 2021) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática, UNMSM/FCM II. Título
(Series).

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mi mamá Eudosia Montalvo Jara y a mis hermanos German, Simeón y mi hermana Julia que siempre me apoyaron e incentivaron a seguir adelante con mis objetivos a pesar de las dificultades.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios y a Mama Ashu por guiar mis pasos día a día, ser el apoyo y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y de debilidad.
A mi mamá Eudosia Montalvo Jara, mi hermana Julia, mis hermanos German y Simeón, quienes son mi mayor fortaleza y los que siempre me brindaron su apoyo incondicional.
A mis hermanos Alejandro y Ceferino que siempre estuvieron presentes.
A mi esposo y a mi hijita por ser mi apoyo y fortaleza.
A mis amigas: Ingrid, Kelly y Marisol con quienes enfrentamos muchas dificultades.
A mi asesor el Lic. Víctor Emilio Carrera Barrantes.
Al Mg. Willy David Barahona Martínez por haber dedicado tiempo orientándome con sus conocimientos sobre el tema en la elaboración de mi tesis.
A la Dra. Soledad Ramírez Carrasco, por su apoyo y tiempo dedicado.
A mis maestros por sus enseñanzas y haberme brindado todos sus conocimientos.
A la inigualable labor de todo el profesorado de la sección de matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, cuya dedicación, esfuerzo y excelencia en su labor docente me han permitido comenzar a adentrarme en el amplio universo de las Matemáticas y apreciar su belleza.

RESUMEN

Convergencia Uniforme de una Sucesión de Funciones Armónicas Sobre un Conjunto Compacto

Yeni Magnolia, Ramírez Montalvo

Setiembre - 2021

Asesor : Lic. Víctor Emilio, Carrera Barrantes.

Título obtenido : Licenciada en Matemática.

En este trabajo de tesis, consideramos una sucesión de funciones armónicas monótonamente creciente, las cuales convergen uniformemente en un subconjunto compacto de un conjunto abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.

El objetivo de este trabajo, es demostrar que definido un conjunto con elementos de Ω tal que evaluados en la sucesión mencionada, dicha sucesión es acotada; este conjunto así definido es abierto y cerrado a la vez. Luego, se demuestra que la convergencia de $\{u_n\}$ es uniforme en un subconjunto compacto de Ω.

Palabras claves: Convergencia Uniforme, Series de Potencias, Funciones Holomorfas, Funciones Armónicas, Desigualdad de Harnack.

ABSTRACT

Uniform Convergence of a Sequence of Harmonic Functions of a Compact Set

Ramírez, Yeni

September - 2021

Adviser : Lic. Víctor Emilio, Carrera Barrantes.

Obtained : Graduate in Mathematics.

In this thesis work, we consider a monotonically increasing sequence of harmonic functions, which converge uniformly in a compact subset of a connected open set $\Omega \subset \mathbb{C}$. The objective of this work is to show that defined a set with elements of Ω such that evaluated in the mentioned sequence, said sequence is bounded; this set thus defined is open and closed at the same time. Then it is shown that the convergence of $\{u_n\}$ is uniform over a compact subset of Ω.

Keywords: Uniform Convergence, Power Series, Holomorphic Functions, Harmonic Functions, Harnack Inequality.

INDICE GENERAL

Introducción

Es sabido que el Análisis Complejo es fundamental en el estudio de las EDP's, en las ciencias e ingenierías; las funciones holomorfas juegan un papel muy importante para la solución de PVF para la ecuación de Laplace, debido a la interacción entre las funciones holomorfas y las funciones armónicas.

Las funciones holomorfas se definen en un subconjunto del plano complejo $\mathbb{C}$ y diremos que son diferenciables en el plano complejo si son diferenciables en algún entorno de un punto de su dominio. Por esta razón, la diferenciabilidad en $\mathbb{C}$ es mucho más fuerte que en $\mathbb{R}$, ya que dicha diferenciabilidad implica diferenciabilidad infinita y puede ser expresado por su serie de Taylor.

En este trabajo, nos enfocaremos en una parte de las funciones holomorfas, denominadas FUNCIONES ARMÓNICAS que aparecen en muchas aplicaciones matemáticas y físicas, desempeñanando así un papel fundamental, como es en el caso de problemas de conducción de calor, potencial eléctrico o flujo de fluidos.

1 Preliminares

Introducimos algunas nociones básicas de espacios métricos y el análisis complejo, que son indispensables en el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Espacios Métricos

1.1.1. Noción de distancia y métrica

Sea un conjunto X, con $X \neq \emptyset$, y sea d una aplicación definida como $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

Definición 1. *La función d es una métrica en X si, y solo si las siguientes propiedades se cumplen para cada x, y, z de X.*

M1) $d(x, y) \geq 0$; *(d es real no negativa)*

M2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$; *(d es una identidad)*

M3) $d(x, y) = d(y, x)$; *(d es simétrica)*

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$; *(propiedad de desigualdad triangular)*

La función d se denonomina distancia y $d(x, y)$ se lee *distancia de x a y*.

Nota: Cuando sea necesario usaremos la notación completa (X, d).

Observación: Los elementos del conjunto X se llaman puntos.

Definición 2. ***(Límite de una Sucesión)****: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d); $x \in X$ decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, denotado por $x_n \to x$ si $n \to +\infty$, cuando $d(x_n, x) \to 0$ si $n \to +\infty$, es decir:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, d(x_n, x) < \varepsilon; \forall n > n_0.$$

Definición 3. *: Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión sobre (X, d); $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es llamada **sucesión de Cauchy** si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, d(x_n, x_m) < \varepsilon; \forall n, m > N.$$

Definición 4. *: Decimos que (X, d) es un espacio métrico **completo**, si y solo si cada sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X.*

1.2. Sucesiones en $\mathbb{C}$

En esta sección, analizaremos las sucesiones en el campo complejo en base a las sucesiones del caso real.

1.2.1. Módulos en $\mathbb{C}$

Definición 5. *: El **módulo** o valor absoluto de un número complejo $z = x + iy$ se define como el número real no negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se denota por $|z|$, esto es,*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geométricamente, $|z|$ es la distancia del punto (x, y) al origen, es decir, la longitud del vertor posición de z.

Proposición 1. *:Se cumple la siguiente propiedad:*

$$|\,|z| - |w|\,| \leq |z - w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Demostración:

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, tenemos:

$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$, luego:

$$|z| - |w| \leq |z - w| \tag{1.1}$$

Análogamente, $|w| = |(w - z) + z| \leq |z - w| + |z|$, luego:

$$-|z - w| \leq |z| - |w| \tag{1.2}$$

De (1.2) y (1.3), se tiene:

$$-|z - w| \leq |z| - |w| \leq |z - w|$$

Esto es, $|\,|z| - |w|\,| \leq |z - w|$.

$\square$

1.2.2. Discos en $\mathbb{C}$

Las normas euclideanas en $\mathbb{R}^2$, nos permiten definir algunas nociones geométricas fundamentales en $\mathbb{C}$. En $\mathbb{C}$, las bolas abiertas o cerradas lo llamaremos **discos**.

Definición 6. *: Sea $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$:*

1. *El **Disco Abierto** de centro a y radio r, es el conjunto definido por:*

$$D_r(a) = \{z \in \mathbb{C}/ \ |z - a| < r\}$$

2. *El **Disco Cerrado** de centro a y radio r, es el conjunto definido por:*

$$D_r\left[a\right] = \{z \in \mathbb{C}/ \ |z - a| \leq r\}$$

3. *La **Esfera** de centro a y radio r, es el conjunto definido por :*

$$S_r\left[a\right] = \{z \in \mathbb{C}/ \ |z - a| = r\}$$

Observación:

1. $D_r\left[a\right] = D_r(a) \uplus S_r\left[a\right]$, donde $\uplus$ denota unión disjunta.

2. Denotamos $S^{n-1} = S_1\left[\theta\right] = \{z \in \mathbb{C}/ \ |z| = 1\}$.

1.2.3. Sucesiones

Una sucesión en $\mathbb{C}$ es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$ y, su rango es $\mathbb{C}$.

Definición 7. *: Una sucesión en $\mathbb{C}$ es una función $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que a cada número natural n le asocia el vector $z(n) = z_n \in \mathbb{C}$ llamado $n-$ésimo término de la sucesión.*

Notación: Denotamos las sucesiones por $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$.

Definición 8. *: Sea $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$, decimos que $w \in \mathbb{C}$ es el límite de la sucesión $\{z_n\}$ cuando n tiende al infinito, lo que denotaremos por $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$ si y solamente si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $\Rightarrow \ |z_n - w| < \varepsilon$.*

Observación: En el lenguaje de bolas, tenemos:

$\lim_{n\to\infty} z_n = w$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{z_{n_0}, z_{n_0+1}, z_{n_0+2}, \ldots\} \subseteq B_\varepsilon(a).$$

De aquí es evidente que:

$\lim_{n\to\infty} z_n \neq w$ si y sólo si existe un $\varepsilon_0 > 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{z_n, z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots\} \nsubseteq D_{\varepsilon_0}(w)$

lo cual es equivalente a:

$\lim_{n\to\infty} z_n \neq w$ si y sólo si existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k_n \geq n$ con $|z_{k_n} - w| \geq \varepsilon_0$.

Definición 9. *: Sea $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$, entonces:*

1. *$\{z_n\}$ es **convergente** si y sólo si $\exists w \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = w$.*
2. *$\{z_n\}$ es **divergente** si y sólo si no converge.*

Proposición 2. ***(Unicidad de Límite)*** *Si existe el límite de una sucesión, entonces es único.*

* Ver demostración en [10], página 20.

Teorema 1. *: Dada $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$, son equivalentes:*

1. $\lim_{n\to\infty} z_n = w$
2. $\lim_{n\to\infty} \pi_i(z_n) = \pi_i(w)$, *para todo $i = 1, 2$.*

* Ver demostración en [10], página 20.

Corolario: Si $\{z_n\}$, $\{w_n\} \subseteq \mathbb{C}$ y $\{\alpha_n\} \subseteq \mathbb{R}$ son sucesiones convergentes, entonces $\{z_n + w_n\}$, $\{z_n - w_n\}$, $\{\alpha_n z_n\} \subseteq \mathbb{C}$, $\{|z_n|\}$, $\{d(z_n, w_n)\} \subseteq \mathbb{R}$ son sucesiones convergentes y se cumple:

1. $\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$.
2. $\lim_{n\to\infty} (z_n - w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} w_n$
3. $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n z_n) = (\lim_{n\to\infty} \alpha_n)(\lim_{n\to\infty} z_n)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right|$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, w_n) = d\left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n, \lim\limits_{n\to\infty} w_n\right)$.

* Ver deostración en [10], página 21.

Definición 10. *: Sea $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que $\{z_n\}$ es una sucesión **acotada** si solamente si existe una constante positiva C tal que $\|z_n\| < C, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 3. *: Si $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ es una sucesión convergente entonces $\{z_n\}$ es acotada.*

*Ver demostración en [10], página 21.

1.2.4. Subsucesiones

Definición 11. *: Sea $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ y $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función creciente. La composición $z \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que a cada número natural n le asocia el vector $(z \circ k)(n) = z(k(n)) = z_{k_n}$ es llamada **subsucesión** de $\{z_n\}$.*

Notación: En adelante, $\{z_{k_n}\} \subseteq \{z_n\}$ significará$\{z_{k_n}\}$ es una subsucesión de $\{z_n\}$.

Proposición 4. *: Sea $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, entonces toda subsucesión de $\{z_n\}$ converge hacia z.*

*Ver demostración en [10], página 22.

Una de las propiedades fundamentales del Análisis Real es el $Teorema\ de\ Bolzano - Weierstrass\ para\ sucesiones\ reales$: Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente. A continuación vamos a ver este resultado en el conjunto $\mathbb{C}$.

Teorema 2. *(**Bolzano-Weierstrass**): Toda sucesión acotada en $\mathbb{C}$ posee una subsucesión convergente.*

*Ver demostración en [10], página 22.

Definición 12. *: Un punto $z \in \mathbb{C}$ es **valor adherente** a la sucesión $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ si y sólo si existe $\{z_{k_n}\} \subseteq \{z_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_{k_n} = z$.*

Observación: Sea $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ acotada, por Bolzano - Weiertrass, el conjunto de los valores adherentes a la sucesión es no vacío.

1.2.5. Sucesiones de Cauchy

Definición 13. *: Decimos que* $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ *es una* ***sucesión de Cauchy*** *si y sólo si* $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n, n' \geq n_0 \ \Rightarrow\ \|z_n - z_{n'}\| < \varepsilon$.

"Un resultado básico del Análisis Real es la completitud de $\mathbb{R}$, es decir, toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente. Este resultado es generalizado a $\mathbb{C}$."

Teorema 3. *: Sea* $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$*,* $\{z_n\}$ *es una sucesión de Cauchy si y sólo si* $\{z_n\}$ *es convergente.*

*Ver demostración en [10], página 24.

1.2.6. Criterio de Cauchy para la Convergencia Uniforme

Daremos definiciones para caso general, ya que $\mathbb{C}$ es también un espacio métrico completo con la distancia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$d(z, w) = |z - w| \ \ \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Siendo así, en esta sección consideraremos S un subconjunto de un espacio métrico (X, d).

Definición 14. *: Una sucesión de funciones* $f_n : S \to X,\ n \in \mathbb{N}$ *y* $f : S \to X$*. Decimos que* $\{f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge uniformemente*** *a* f *en* S *si para cualquier* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$d_X(fn(z), f(z)) < \varepsilon, \ \ \forall n \geq n_0, \forall z \in S.$$

Definición 15. *: Una sucesión de funciones* $f_n : S \to X,\ n \in \mathbb{N}$ *es* ***uniformemente de Cauchy*** *en* S*, si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$d_X\left(f_n(z), f_m(z)\right) < \varepsilon, \ \ \forall m, n \geq n_0, \ \ \forall z \in S$$

Teorema 4. ***(Criterio de la Convergencia Uniforme de Cauchy)****: Sea* X *un espacio métrico completo. Una sucesión de funciones* $f_n : S \to X,\ n \in \mathbb{N}$*, converge uniformemente en* S *si y sólo si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es uniformemente de Cauchy en* S*.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en S, entonces por Definición 15, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X\left(f_n(z), f(z)\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall n \geq n_0, \ \forall z \in S. \tag{1.3}$$

Por otra parte:

$$d_X\left(f_n(z), f_m(z)\right) \leq d_X\left(f_n(z), f(z)\right) + d_X\left(f(z), f_m(z)\right) \tag{1.4}$$

Luego, de (1.3) y (1.4), se tiene:

$$d_X\left(f_n(z), f_m(z)\right) < \varepsilon, \ \ \forall n, m \geq n_0, \ \ \forall z \in S.$$

Es decir, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en S.

($\Leftarrow$) Por hipótesis, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en S; entonces para cada $z \in S$, la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X y como X es completo, por Definición 4, esta sucesión converge a un punto de X al que denotaremos por $f(z)$. Demostraremos ahora que $f_n \to f$ uniformemente en S. Sea $\varepsilon > 0$, como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X\left(f_n(z), f_m(z)\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall n, m \geq n_0, \ \ \forall z \in S \tag{1.5}$$

y como para cada $z \in S$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f_m(z) = f(z)$ en X, existe $n_z \in \mathbb{N}$ (que depende de z) tal que

$$d_X\left(f_m(z), f(z)\right) < \frac{\varepsilon}{2}; \ \forall m \geq n_z \tag{1.6}$$

Dado $n \geq n_0$ y $z \in S$, tomemos $n_0' = máx\left\{n_0, n_z\right\}$. Entonces:

$$d_X\left(f_n(z), f(z)\right) \leq d_X\left(f_n(z), f_m(z)\right) + d_X\left(f_m(z), f(z)\right) < \varepsilon; \ \ \forall n \geq n_0', \ \forall z \in S$$

debido a (1.5) y (1.6).

Por lo tanto:

$$d_X\left(f_n(z), f(z)\right) < \varepsilon; \ \ \forall n \geq n_0', \ \forall z \in S$$

Es decir, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en S.

$\square$

1.3. Topología en $\mathbb{C}$

1.3.1. Conjuntos Abiertos

1.3.1.1. Interior de un Conjunto

Definición 16. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$*

1. *Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es un **punto interior** de Z si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(z) \subseteq Z$.*

2. *El conjunto de todos los puntos interores de Z es llamado **interior** de Z y será denotado por $int(Z)$.*

3. *Decimos que $W \subseteq \mathbb{C}$ es un **entorno** o **vecindad** de z si y sólo si $z \in int(Y)$.*

4. *Decimos que Z es un conjunto **abierto** si y sólo si $Z = int(Z)$.*

Observación: Para cualquier $Z \subseteq \mathbb{C}$ se cumple $int(Z) \subseteq Z$. En consecuencia, para probar que un conjunto es abierto, es suficiente probar que $Z \subseteq int(Z)$.

Proposición 5. *: $D_r(z)$ y $\mathbb{C} - D_r[z]$ son conjuntos abiertos, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\forall\, r > 0$.*

*Ver demostración en [10], página 29.

Proposición 6. *: Sean Z, $W \subseteq \mathbb{C}$, entonces:*

1. $W \subseteq Z \;\;\Rightarrow\;\; int(W) \subseteq int(Z)$.

2. $int(int(Z)) = int(Z)$.

3. $int(Z \cap W) = int(Z) \cap int(W)$.

4. $int(Z) \cup int(W) \subseteq int(Z \cup W)$.

*Ver demostración en [10], página 30.

Teorema 5. *: Se cumplen:*

1. *Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{C}$ son abiertos.*

2. *Si Z_1 y Z_2 son conjuntos abiertos, entonces $Z_1 \cap Z_2$ es un conjunto abierto.*

3. *Si* $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *es una colección arbitraria de conjuntos abiertos, entonces* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ *es un conjunto abierto.*

*Ver demostración en [10], página 31.

Corolario: Si $Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ \ldots,\ Z_m \subseteq \mathbb{C}$ son conjuntos abiertos, entonces $\bigcap_{i=1}^{m} Z_i$ es un conjunto abierto.

Prueba:

Probaremos que $\bigcap_{i=1}^{m} Z_i = \bigcap_{i=1}^{m} intZ_i$.

Por inducción sobre m:

i) Para $m = 2$: Veamos que $int(Z_1 \cap Z_2) = Z_1 \cap Z_2$.

Sabemos que, por la Proposición 7 - parte 3, se cumple:

$$int(Z_1 \cap Z_2) = int(z_1) \cap int(Z_2) \tag{1.7}$$

Como Z_1 y Z_2 son conjuntos abiertos, entonces $Z_1 = int(Z_1)$ y $Z_2 = int(Z_2)$.

Luego, reemplazando en (1.7) se tiene:

$$int(Z_1 \cap Z_2) = Z_1 \cap Z_2$$

Esto es, $Z_1 \cap Z_2$ es un conjunto abierto.

ii) Para $m - 1$: $\bigcap_{i=1}^{m-1} Z_i = \bigcap_{i=1}^{m-1} intZ_i$ (Hipótesis Inductiva).

iii) Para $m \in \mathbb{N}$:

$$\bigcap_{i=1}^{m} Z_i = \bigcap_{i=1}^{m-1} Z_i \cap (Z_m)$$

Luego, por la Hipótesis Inductiva y que Z_m es un conjunto abierto, se tiene:

$$\bigcap_{i=1}^{m} Z_i = \bigcap_{i=1}^{m-1} int(Z_i) \cap int(Z_m)$$

De donde

$$\bigcap_{i=1}^{m} Z_i = \bigcap_{i=1}^{m} int(Z_i).$$

Así: $\bigcap_{i=1}^{m} Z_i$ es un conjunto abierto.

□

1.3.1.2. Frontera de un Conjunto

Definición 17. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$, la **frontera** o **borde** de Z, denotada por ∂Z, es el conjunto*

$$\partial Z = \Big\{ z \in \mathbb{C} /\, D_\varepsilon(z) \cap Z \neq \emptyset \text{ y } D_\varepsilon(z) \cap (\mathbb{C} - Z) \neq \emptyset \Big\}.$$

Sabemos que cualquier bola abierta $D_r(z)$ es disjunta con el círculo $S_r[z]$ el cual es su frontera. Este resultado es válido para cualquier subconjunto abierto.

Teorema 6. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$, Z es abierto si y sólo si $Z \cap \partial Z = \emptyset$*

*Ver demostración en [10], página 31.

1.3.1.3. Abiertos Relativos

Definición 18. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$, $Z \neq \emptyset$. Un subconjunto $A \subseteq Z$ es **abierto relativo a Z** o simplemente **abierto en Z** si y sólo si existe $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $A = U \cap Z$.*

Observación: Cuando $Z = \mathbb{C}$, en vez de decir A es abierto en $\mathbb{C}$ decimos simplemente A es abierto.

Proposición 7. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$, $Z \neq \emptyset$ y $A \subseteq Z$. Son equivalentes:*

1. *A es abierto en Z.*
2. *$\forall a \in A$, $\exists \delta = \delta(a) > 0$ tal que $B_\delta(a) \cap Z \subseteq A$.*

*Ver demostración en [10], página 32.

1.3.2. Conjuntos Cerrados

1.3.2.1. Clausura de un Conjunto

Definición 19. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$:*

1. *Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es un **punto adherente** de Z si y sólo si existe $\{z_n\} \subseteq Z$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.*
2. *El conjunto de todos los puntos adherente de Z es llamada **clausura** o **cerradura** de Z y será denotado por $\overline{Z}$.*

3. *Decimos que Z es un conjunto* ***cerrado*** *si y sólo si $Z = \overline{Z}$.*

Las primeras propiedades de la clausura o cerradura de un conjunto, son dadas en la siguiente Proposición.

Proposición 8. *: Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *$Z \subseteq \overline{Z}$, para todo $Z \subseteq \mathbb{C}$.*

2. *$Z \subseteq W \;\; \Rightarrow \;\; \overline{Z} \subseteq \overline{W}$.*

*Ver demostración en [10], página 35.

Observación: Desde que $Z \subseteq \overline{Z}$, para cualquier $Z \subseteq \mathbb{C}$; para probar que un conjunto es cerrado, es suficiente probar que $\overline{Z} \subseteq Z$.

Teorema 7. *: Sean $Z \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Son equivalentes:*

1. *$z \in \overline{Z}$.*

2. *$D_\varepsilon(z) \cap Z \neq \emptyset$, $\forall \varepsilon > 0$.*

*Ver demostración en [10], página 36.

Corolario 1: $z \notin \overline{Z}$ si y sólo si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(z) \subseteq \mathbb{C} - Z$.

Prueba:

($\Rightarrow$) Sea $z \notin \overline{Z}$, entonces de la Definición 20 (parte 1) podemos deducir que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq z, \;\; \forall \{z_n\} \subseteq Z$.

Por la Observación de la Definición 9, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, existe $k_n \geq n$ con $|z_{k_n} - z| \geq \varepsilon_0$. En particular $D_{\varepsilon_0} \cap Z = \emptyset$, lo cual es equivalente a $D_{\varepsilon_0}(z) \subseteq \mathbb{C} - Z$.

($\Leftarrow$) Por hipótesis $\exists \varepsilon > 0 \; / \; D_{\varepsilon_0}(z) \subseteq \mathbb{C} - Z$, lo cual, por teoría de conjuntos, esto es equivalente a decir que $\exists \varepsilon > 0 \; / \; D_{\varepsilon_0}(z) \cap Z = \emptyset$.

De donde, por el Teorema 7, $z \notin \overline{Z}$.

$\square$

Corolario 2: $\overline{\overline{Z}} = \overline{Z}$, para todo $Z \subseteq \mathbb{C}$.

*Ver demostración en [10], página 36.

Teorema 8. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$, Z es cerrado si y sólo si $\mathbb{C} - Z$ es abierto.*

*Ver demostración en [10], página 37.

Teorema 9. *: Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{C}$ son cerrados.*

2. *Si F_1 y F_2 son conjuntos cerrados, entonces $F_1 \cup F_2$ es un conjunto cerrado.*

3. *Si $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una colección arbitraria de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ es un conjunto cerrado.*

*Ver demostración en [10], página 37.

Teorema 10. *: Dado $Z \subseteq \mathbb{C}$, se cumple $\partial Z = \overline{Z} \cap \overline{\mathbb{C} - Z}$.*

*Ver demostración en [10], página 37.

1.3.2.2. Puntos de Acumulación

Definición 20. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$:*

1. *Decimos que $a \in \mathbb{C}$ es un **punto de acumulación** o **punto límite** de Z si y sólo si $D_\varepsilon(a) \cap (Z - \{a\}) \neq \emptyset, \ \ \forall \varepsilon > 0$.*

2. *El conjunto de todos los puntos de acumulación de Z es llamado **conjunto derivado** de Z y será denotado por Z'.*

3. *Si $a \in \mathbb{C}$ no es punto de acumulación de Z entonces decimos que a es un **punto aislado** de Z.*

4. *Decimos que Z es un **conjunto discreto** si y sólo si todos sus puntos son aislados.*

Proposición 9. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$. $a \in Z'$ si y sólo si $a \in \overline{Z - \{a\}}$.*

*Ver demostración en [10], página 40.

Teorema 11. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$. Son equivalentes:*

1. *$a \in Z'$*

2. Existe $\{z_n\} \subseteq Z - \{a\}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

3. $D_\varepsilon(a) \cap Z$ *es infinito,* $\forall > 0$.

*Ver demostración en [10], página 41.

1.3.3. Conjuntos Conexos

1.3.3.1. Escisión de un Conjunto

Definición 21. *: Sea* $Z \subseteq \mathbb{C}$*, los conjuntos* $A, B \subseteq Z$ *forman una* ***escisión*** *de* Z *si y sólo si, satisfacen:*

1. $Z = A \cup B$.

2. $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

3. $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Observación: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$, tomemos $A = Z$ y $B = \emptyset$, claramente A y B forman una escisión de Z, llamada *escisión trivial*.

Definición 22. *:* $Z \subseteq \mathbb{C}$ *es un* ***conjunto conexo*** *si y slo si* Z *solo admite escisiones triviales. Si no es conexo, decimos disconexo.*

Teorema 12. *: Sea* $Z \subseteq \mathbb{C}$ *y* $A, B \subseteq Z$*.* A *y* B *forman una escisión de* Z *si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $Z = A \cup B$.

2) $A \cap B = \emptyset$.

3) A *y* B *son abiertos en* Z.

*Ver demostración en [10], página 48.

Lema 12.1: Sean $Z \subseteq W \subseteq \mathbb{C}$. Si $A \subseteq W$ es abierto en W entonces $A \cap Z$ es abierto en Z.
*Ver prueba en [10], página 48.

Teorema 13. *: Sea $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección arbitraria de subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$ tales que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ es un conjunto conexo.*

*Ver demostración en [10], página 49.

Teorema 14. *: Sean $Z \subseteq W \subseteq \overline{Z}$ en $\mathbb{C}$. Si Z es conexo entonces W es conexo.*

*Ver demostración en [10], página 49.

Corolario: Si $Z \subseteq \mathbb{C}$ es conexo, entonces $\overline{Z}$ es conexo.

Prueba:

Por hipótesis, $Z \subseteq \mathbb{C}$ es conexo.

Sean $A, B \subseteq \overline{Z}$ una escisión de $\overline{Z}$, luego por el Teorema 12:

$$\overline{Z} = A \cup B, \;\; A \cap B = \emptyset \textit{ y } A, B \textit{ son abiertos en } \overline{Z}$$

Como $Z \subseteq \overline{Z}$, se cumple:

* $Z = Z \cap \overline{Z} = Z \cap (A \cup B) = (Z \cap A) \cup (Z \cap B)$.

* $(Z \cap A) \cap (Z \cap B) \subseteq (A \cap B) = \emptyset$, entonces $(Z \cap A) \cap (Z \cap B) = \emptyset$.

Por el Lema 12.1., $Z \cap A$ y $Z \cap B$ son abiertos en Z y desde que Z es conexo, se sigue que:

$$Z \cap A = \emptyset \quad \vee \quad Z \cap B = \emptyset \tag{1.8}$$

Probaremos que si $Z \cap A = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$. En efecto, supongamos que $A \neq \emptyset$ (Hipótesis Auxiliar), sea $a \in A \subseteq \overline{Z}$, entonces $a \in \overline{Z}$. De donde:

$$D_\varepsilon(a) \cap Z \neq \emptyset \tag{1.9}$$

Por otra parte, como A es abierto en $\overline{Z}$ y $a \in A$, por la Proposición 8, se tiene:

$$\exists \delta > 0 \; / \; D_\delta(a) \cap \overline{Z} \subseteq A \tag{1.10}$$

De (1.9), $\exists\; b \in D_\delta(a) \cap Z \subseteq D_\delta(a) \cap \overline{Z} \subseteq A$, luego $a \in Z \cap A$, lo cual es una contradicción, esto prueba la afirmación. Análogamente, si $Z \cap B = \emptyset$, entonces $B = \emptyset$. De esta manera, (1.8) implica $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$, por lo tanto A y B forman una escisión trivial de $\overline{Z}$, luego $\overline{Z}$ es conexo.

$\square$

1.3.3.2. Componentes Conexas

Definición 23. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in Z$. La componente conexa de z en Z denotado por C_z es el mayor subconjunto conexo de Z que contiene a z.*

Observación: $z \in C_z, \ \forall z \in Z.$

Proposición 10. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in Z$, entonces C_z es la unión de todos los subconjuntos conexos de Z que contiene a z.*

*Ver demostración en [10], página 51.

En adelante denotamos por F_z a la familia de todos los conjuntos conexos que contienen a z.

Proposición 11. *: Sea $Z \subseteq \mathbb{C}$. Si $z, w \in Z$, entonces $C_z \cap C_w = \emptyset$ ó $C_z = C_w$.*

*Ver demostración en [10], página 51.

1.3.4. Conjuntos Compactos

1.3.4.1. Definición de Conjunto Compacto

Definición 24. *: Sea $K \subseteq \mathbb{C}$, decimos que K es un* ***conjunto compacto*** *si y sólo es cerrado y acotado.*

Teorema 15. *: Sea $K \subseteq \mathbb{C}$. Son equivalentes:*

1. *K es compacto.*
2. *$\forall \{z_n\} \subseteq K$, $\exists \{z_{k_n}\} \subseteq \{z_n\}$ y $\exists z \in K$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_{k_n} = z$.*

*Ver demostración en [10], páginas 53 - 54.

1.4. Series de Potencias

Definición de Serie de Potencias

Una serie infinita de números complejos, es de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

Definimos la serie parcial

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_N$$

$$\left(S_N = \left\{ \sum_{n=1}^{N} z_n \right\}_{N \geq 1} \right)$$

Diremos que la serie **converge** si existe algún $S \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N = S$. En este caso, decimos que S es igual a la suma de la serie, es decir

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n.$$

Si la sucesión de sumas parciales no converge, se dice que la serie **diverge**.

Sea $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ una serie de números complejos, decimos que la serie **converge absolutamente** si la serie de números reales positivos $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ converge.

Proposición 12. *: Sea* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ *una serie de números reales tal que* $c_n \geq 0$ *el cual converge. Si* $|z_n| \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$*; entonces* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ *converge absolutamente.*

*Ver demostración en [11], página 32.

Observación: Una serie de potencias sobre a es una serie infinita de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Uno de los ejemplos más fáciles de una serie de potencias (y uno de los más útiles) es la serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.

Proposición 13. *: Si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *es una serie de potencias dada con radio de convergencia R, entonces:*

$$R = lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

si este límite existe.

*Ver demostración en [11], página 32.

Lema 1 (Lema de Abel): Dada una sucesión de números complejos, existe $R \geq 0$, tal que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| > R$. Además, la serie converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto del disco $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < R\}$.

Prueba:

Sea $R = \sup\{r \,/\, r \geq 0,\, \exists M = M_r \text{tal que} |c_n| r^n \leq M,\, \forall n \geq 0\}$. Si $|z| > R$, la sucesión $|c_n||z|^n$ es no acotada, así que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ no puede converger.

Sea K un subconjunto compacto de $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < R\}$. Elegimos $\rho < R$ tal que $K \subset \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq \rho\}$ y sea r tal que $\rho < r < R$. Entonces existe un $M > 0$ tal que $|c_n| r^n \leq M$. Luego, tenemos para $z \in K$,

$$|c_n z^n| \leq |c_n| \rho^n \leq M \left(\frac{\rho}{r}\right)^n$$

Ya que $\rho < r$, la serie $M \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < \infty$, así $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge uniformemente en K.

□

Definición 25. *: Dada una sucesión $\{c_n\}_{n \geq 0}$ de números complejos, el R cuya existencia está garantizada por el Lema de Abel se llama* ***radio de convergencia*** *de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Lema 2: El radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

es la misma que la de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Prueba:

Sean R', R, respectivamente, los radios de convergencia de las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Para $n \geq 1$, tenemos $|c_n z^n| \leq |n c_n z^{n-1}| \cdot |z|$; por el cual, si $\{|n c_n| r^{n-1}\}$ es acotada,

también lo es $\{|c_n|r^n\}$, así que $R' \leq R$, es particular, si $R = 0$, entonces $R' = 0 = R$. Supongamos que $R > 0$.
Sea ahora $0 < \rho < R$ y sea $0 < r < \rho$. Entonces

$$n|c_n|r^{n-1} = \frac{1}{r}|c_n|\rho^n.n\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq \frac{1}{r}M\rho^n\left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Ya que $n\alpha^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ si $|\alpha| < 1$, de esto sigue que $\{n|c_n|r^{n-1}\}$ es acotada. Así, de la construcción del radio de convergencia dada en la prueba del Lema 1, se sigue que $R' \geq r$. Ya que los únicos requisitos en r y ρ son que $0 < r < \rho < R$, de esto sigue que $R' \geq R$.

$\square$

1.5. Teoría Fundamental de Funciones Holomorfas

1.5.1. Funciones $\mathbb{C}$-diferenciables

Definición 26. *: Sea f una función de valor complejo definida en Ω y sea $a \in \Omega$. Decimos que f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en a si*

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{f(a+\xi) - f(a)}{\xi}, \quad para\ \xi \neq 0 \tag{1.11}$$

existe. Cuando este límite existe, lo denotaremos por $f'(a)$ y llamamos la derivada de f en a.
*Decimos que f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en Ω si, para cada $a \in \Omega$, f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en a. Si este es el caso, la función $a \mapsto f'(a) \equiv f' : \Omega \to \mathbb{C}$, denotada por f', es llamado la **derivada de** f.*

Nota 1: Lo siguiente es equivalente a la Definición 26:
Sea f una función de valor complejo definida en Ω y sea $a \in \Omega$. Decimos que f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en a si

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \tag{1.12}$$

existe.

Observación 1: Si f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en $a \in \Omega$, entonces f es continua en a.

En efecto:

$$\lim_{z\to a}[f(z)-f(a)] = \lim_{z\to a}\left[\left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right)(z-a)\right] = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}.\lim_{z\to a}(z-a) = f'(a).0 = 0$$

Es decir:

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Por lo tanto, f es continua en a.

$\square$

Nota 2: Sea $z-a=\xi$, cuando $z\to a$, $\xi \to 0$.

Luego:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{\xi\to 0}\frac{f(a+\xi)-f(a)}{\xi} = f'(a).$$

Observación 2: Si f es continua en $a \in \Omega$, no implica que f sea $\mathbb{C}-diferenciable$ en a.

Definición 27. *(**Ecuaciones de Cauchy - Riemann**): Sea f una función de valor compleja definida por $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$; $z=x+iy\equiv(x,y)\in\Omega$ y un punto $a\in\mathbb{C}$.*

Si f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en a, entonces se cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial y}(a) = -\frac{\partial u}{\partial x}(a) \tag{1.13}$$

*La ecuaciones de (1.18) son llamadas las **"Ecuaciones de Cauchy - Riemann"**.*

Observación 3: Si existe $f'(a)$, entonces se cumple las ecuaciones de Cauchy - Riemann. El hecho que se verifique las ecuaciones de Cauchy - Riemann en el punto $a\in\Omega$ no basta para asegurar la existencia de $f'(a)$.

Definición 28. *: Sea f una función de valor compleja definida en Ω. Decimos que f es **holomorfa** en Ω si, para cada $a\in\Omega$, existe una vecindad U de a ($U\subset\Omega$), y una sucesión $\{c_n\}$, $n=0,1,2,3,\ldots$ de números complejos tal que, para cualquier $z\in\Omega$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

converge a $f(z)$.

En lo que sigue, mostraremos que una función es holomorfa, sobre un conjunto abierto Ω si y sólo si f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en Ω.

1.5.2. Propiedades Básicas de Funciones $\mathbb{C}$-diferenciables

Proposición 14. *: Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y f una función definida sobre Ω. Si f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en $a \in \Omega$, entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ existen y satisfacen*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a).$$

*Ver demostración en [5], página 4.

Definición 29. *: Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función definida sobre el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea f ta que posee las primeras derivadas parciales en a.*
Definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

Luego, la Proposición 15, puede ser expresada como sigue:

Proposición 15. *: Si f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en $a \in \Omega$, entonces:*

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$$

Demostración:
Como $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ por Proposición 15, entonces $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$.
Por otra parte, sabemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a)$$

lo que completa la demostración.

□

Proposición 16. *: Sea f una función de valor compleja en Ω y consideremos $f = u + iv$, donde u y v son funciones de valor real. Si f es $\mathbb{C}-diferenciable$ en $a \in \Omega$, entonces:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial x}(a) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a)$$

llamadas las "Ecuaciones de Cauchy - Riemann".

Demostración:

Obtendremos un par de ecuaciones que deben satisfacer las primeras derivadas parciales de las funciones componentes u y v de la función f.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y); \quad para\ z \in \Omega$$

en el punto $a = (x_0, y_0) \in \Omega$, si existe $f'(a)$.

Si existe $f'(a)$, tenemos:

$$f'(a) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(a + \triangle z) - f(a)}{\triangle z}$$

* Sea $\triangle z = \triangle x + i.0$, entonces:

$$f'(a) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x}$$

Observar que:

$$f(a+i\triangle y) = f((x_0, y_0)+(0, \triangle y)) = f(x_0, y_0+\triangle y) = u(x_0, y_0+\triangle y)+iv(x_0, y_0+\triangle y)$$

Reemplazando:

$$f'(a) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x_0 + \triangle x, y_0) + iv(x_0 + \triangle x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\triangle x}$$

.

De donde:

$$f'(a) = \lim_{\triangle x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \triangle x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\triangle x} + i\frac{v(x_0 + \triangle x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\triangle x}\right]$$

Luego:

$$f'(a) = \left(\lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x_0 + \triangle x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\triangle x}\right) + i\left(\lim_{\triangle x \to 0} \frac{v(x_0 + \triangle x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\triangle x}\right)$$

Así:

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \tag{1.14}$$

* Sea $\triangle z = 0 + i \triangle y$, entonces:

$$f'(a) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(a + i \triangle y) - f(a)}{i \triangle y}$$

Observar que:

$$f(a+i\triangle y) = f((x_0, y_0)+(0, \triangle y)) = f(x_0, y_0+\triangle y) = u(x_0, y_0+\triangle y)+iv(x_0, y_0+\triangle y)$$

Reemplazando:

$$f'(a) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \triangle y) + iv(x_0, y_0 + \triangle y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i \triangle y}$$

De donde:

$$f'(a) = \lim_{\triangle y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \triangle y) - u(x_0, y_0)}{i \triangle y} + i\frac{v(x_0, y_0 + \triangle y) - v(x_0, y_0)}{i \triangle y} \right]$$

Luego:

$$f'(a) = \frac{1}{i} \left(\lim_{\triangle y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \triangle y) - u(x_0, y_0)}{\triangle y} \right) + \left(\lim_{\triangle y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \triangle y) - v(x_0, y_0)}{\triangle y} \right)$$

Así:

$$f'(a) = -i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{1.15}$$

De (1.14) y (1.15), si f es $\mathbb{C} - diferenciable$ en $a \in \mathbb{C}$, entonces se cumple que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

y son llamadas las “Ecuaciones de Cauchy - Riemann”.

Es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial y}(a)$$

□

Definición 30. *: Sea f una función de valor compleja sobre Ω, y escribimos $f = u+iv$, donde u y v son funciones de valor real. Las ecuaciones:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.19}$$

son llamadas ECUACIONES DE CAUCHY - RIEMANN.

1.5.3. Propiedades Fundamentales de Funciones Holomorfas

La notación que se da en la siguinete definición es una que usaremos en el resto de este trabajo.

Definición 31. *: Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Vamos a denotar por $H(\Omega)$ el* ***conjunto de todas las funciones holomorfas en*** *Ω. Bajo suma y mutiplicación de funciones holomorfas y multiplicación de funciones holomorfas por constantes, $H(\Omega)$ es un álgebra sobre el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos.*

Teorema 16. ***(El Principio de Continuación Analítica)****: Sea Ω un conjunto abierto conexo en $\mathbb{C}$ y sea $f \in H(\Omega)$. Si existe un conjunto no vacío $U \subset \Omega$ tal que $f|U \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$ en Ω.*

*Ver demostración en [5], página 22.

Definición 32. *: Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$, y $a \in \Omega$. La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(}n)(a)(z-a)^n$$

*es llamada la **serie de Taylor** de f en a.*

En el curso de la demostración del Teorema 19, tenemos probado lo siguiente:

Lema 1: Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$. Entonces la serie de Taylor de f en a converge a f en alguna vecindad de a. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ es la única serie con esta propiedad.

Teorema 17. *: "Sea Ω un conjunto abierto conexo en $\mathbb{C}$ y sea $f \in H(\Omega)$. El conjunto*

$$Z_f = \{z \in \Omega \, / \, f(z) =\}$$

Entonces Z_f es discreto, si $f \not\equiv 0$ (es decir, está cerrado y cada punto de Z_f está aislado)."

*Ver demostración en [5], página 23.

Corolario: Sea Ω un conjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$ y sean $f, g \in H(\Omega)$. Si el conjunto

$$\{z \in \Omega \, / \, f(z) = g(z)\}$$

tiene un punto de acumulación en Ω, entonces $f \equiv g$.

Prueba:

Esto es simplemente el Teorema 17 aplicado a $f - g$.

□

Lema 2: Sea I un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ y ϕ una función de valor real diferenciable dos veces continuamente en I. Si existe $t_0 \in I$ tal que $\phi(t) \leq \phi(t_0)$, $\forall t \in I$, entonces $\phi''(t) \leq 0$.

*Ver demostración en [5], página 24.

Proposición 17. *: Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^2$ y sea u una función de valor real diferenciable dos veces continuamente en Ω. Establecemos*

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Supongamos que existe $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $u(x,y) \leq u(x_0, y_0)$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Entonces

$$(\triangle u)(x_0, y_0) \leq 0.$$

Demostración:

En efecto, sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ y como u es diferenciable dos veces continuamente en Ω, por el Lema 2, tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \ \ \wedge \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

De donde:

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0.$$

□

Definición 33. *: Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y sea $u \in C^2(\Omega)$. Establecemos*

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

*El operador $u \mapsto \triangle u$ es llamado el **operador de Laplace** en $\mathbb{C}$ (o el Laplaciano).*
También:

$$\triangle^c u = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}};$$

*$\triangle^c$ es a veces llamado el **complejo laplaciano**.*
De la definición de $\partial/\partial z$ y $\partial/\partial \overline{z}$ (Definición 30), encontramos inmediatamente que

$$\triangle^c u = \frac{1}{4} \triangle u, \ \ \text{para } u \in C^2(\Omega).$$

Teorema 18. ***(El Principio de Máximo (Forma débil))**: Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, y sea $u \in C^2(\Omega)$ una función de valor real. Supongamos que*

$$(\triangle u)(z) \geq 0, \ \forall z \in \Omega.$$

Entonces, para cualquier conjunto $U \Subset \Omega$, tenemos:

$$u(z) \leq \sup_{\omega \in \partial U} u(\omega), \ \forall z \in U \tag{1.20}$$

Demostración:

Primero supongamos que $(\triangle u)(z) > 0$, $\forall z \in \Omega$. Supongo que dado $U \Subset \Omega$, y sea $z_0 \in \overline{U}$ tal que

$$u(z_0) = \sup_{\omega \in \partial U} u_\varepsilon(\omega) \tag{1.21}$$

Entonces, si (1.20) no se cumple, z_0 no puede estar en ∂U, y así tenemos $u(\omega) \leq u(z_0)$, $\forall \omega \in U$. La Proposición 18 implica que $(\triangle u)(z_0) \leq 0$, contrario a la hipótesis. Así, (1.20) se cumple si $\triangle u > 0$ en Ω.

Supongamos ahora que $\triangle u \geq 0$ en Ω, sea $\varepsilon > 0$ y sea

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon |z|^2, \;\; z \in \Omega.$$

Entonces, $\triangle u_\varepsilon = \triangle u + 4\varepsilon > 0$ en Ω. Por lo tanto, para $U \Subset \Omega$, tenemos:

$$u_\varepsilon(z) \leq \sup_{\omega \in \partial U} u_\varepsilon(\omega), \;\; z \in \Omega.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, obtenemos (1.20).

$\square$

1.6. La integral de Poisson

Definición 34. *: Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y sea $u \in C^2(\Omega)$ una función de valor compleja. Establecemos (por Definición 34)*

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 4 \triangle^c u.$$

Si $\triangle u \equiv 0$ en Ω, decimos que u es armónica en Ω.

Definición 35. *: Sea $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Definimos el **Núcleo de Poisson** para el disco $D(a, R)$ como la función*

$$P_{a,R}(z,t) = \Re e \left(\frac{Re^{it} + (z-a)}{Re^{it} - (z-a)} \right), \quad z \in D(a,R), \; t \in \mathbb{R}.$$

*Si ϕ es una función definida en $\{z \in \mathbb{C} \; / \; |z-a| = R\}$, definimos la **integral de Poisson** de ϕ como la función*

$$P_{a,R}(\phi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{a,R}(z,t)\phi(a + Re^{it})\, dt$$

(Si la función $t \mapsto \phi(a + Re^{it})$ es integrable en $[0, 2\pi]$). Si $a = 0, R = 1$, escribimos

$$P(z) = P_{0,1}(z, 0) = \Re e \left(\frac{1+z}{1-z} \right), \;\; para \; |z| < 1;$$

Si $z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0)$, también escribimos

$$P_r(\theta) = P(re^{i\theta}) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2rcos\theta}.$$

Ya que, para $|z|<1$, $\frac{1+z}{1-z}=(1+z)\sum_{n=1}^{\infty}z^n=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$, *tenemos*

$$P_r(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n cosn\theta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in\theta}.$$

Más generalmente, si $z\in D(a,R)$ *considerando* $z=a+re^{i\theta}$, *tenemos* $P_{a,R}(z,t)=P\left(\frac{r}{R}e^{i(\theta-t)}\right)$.

Lema 1: Si $f\in H(\Omega)$, entonces f y $\overline{f}$ son armónicas en Ω; en particular, $\Re e(f)=\frac{1}{2}(f+\overline{f})$ también es armónica.

Prueba:

De la Definicón 34, se tiene

$$\triangle^c f=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)=0;$$

$$\triangle^c \overline{f}=\frac{\partial}{\overline{\partial z}}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\overline{\partial z}}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}\right)=0.$$

□

Lema 2: El núcleo de Poisson $P_{a,R}(z,t)$ para $D(a,R)$, es, para un t fijo, armónica en $D(a,R)$. Además, $P_{a,R}(z,t)>0$ y

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_{a,R}(a+re^{i\theta,t})\,d\theta=1,\ para\,z\in D(a,R),\,0\le r<R.$$

Prueba:

Por el Lema 1:

$$\Re e\left[\frac{Re^{it}+z-a}{Re^{it}-z+a}\right]$$

es una función armónica de z.

Si $z=a+re^{i\theta}$ y $\rho=r/R$, tenemos:

$$P_{a,R}(z,t)=P(\rho e^{i(\theta-t)})=P_\rho(\theta-t).$$

Ya que $1+\rho^2-2\rho cos(\theta-t)\ge 1+\rho^2-2\rho=(1-\rho)^2>0$, tenemos $P_{a,R}(z,t)>0$, $z\in D(a,R)$.

Finalmente:

$$\int_0^{2\pi}P_\rho(\theta-t)\,dt=\sum_{-\infty}^{\infty}\rho^{|n|}e^{-int}\int_0^{2\pi}e^{in\theta}\,d\theta=2\pi.$$

De donde queda demostrado el lema.

$\square$

Lema 3: Sea $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$. Entonces, para $\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta$, tenemos

$$0 < P_r(\theta) \leq \frac{1-r^2}{1-cos^2\delta},\ para\ 0 \leq r < 1.$$

En particular, $P_r(\theta) \to 0$, cuando $r \to 1$, uniformemente para $\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta$.

*Ver prueba en [5], página 189.

Lema 4: Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y sea γ una curva diferenciable por partes en Ω. Definimos una función g en $\mathbb{C} - Im(\gamma)$ por

$$g(\omega) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz$$

donde $f$es una función continua en Ω. Entonces $g \in H(\mathbb{C} - Im(\gamma))$ y su derivada está dada por:

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega)^2}\, dz.$$

Prueba:

Fijamos $\omega \in \mathbb{C}, \omega \notin Im(\gamma)$. Sea $\xi \in \mathbb{C}$ y supongamos que $|\xi|$ es suficientemente pequeño.

Tenemos:

$$\frac{1}{\xi}(g(\omega+\xi) - g(\omega)) = \int_\gamma f(z) \left(\frac{1}{(z-\omega)-\xi} - \frac{1}{z-\omega} \right) . \frac{1}{\xi}\, dz$$

Luego; cuando $\xi \to 0$

$$\frac{1}{\xi} . \frac{1}{(z-\omega-\xi} - \frac{1}{z-\omega} \to \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

uniformemente para $z \in Im(\gamma)$ (siendo ω fijo).

De donde sigue el resultado del lema.

$\square$

Teorema 19. *: Sea ϕ una función continua en $T = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$. Si $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, consideremos la integral de Poisson de ϕ:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\phi(e^{it})\, dt.$$

Entonces, u es armónica en D y $u(z) \to \phi(e^{it})$ cuando $z \to e^{it}$; la convergencia es uniforme en t.

Demostración:

Para demostrar que u es armónica, podemos suponer que ϕ es de valor real, entonces u es la parte real de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\phi(e^{it})\,dt;$$

esta última función (de z) es holomorfa en D (por el argumento dado en la prueba del Lema 4).

Si $t_0 \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$u(z)-\phi(e^{it_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\left(\phi(e^{it})-\phi(e^{it_0})\right)\,dt.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que $|\phi(e^{it})-\phi(e^{it_0})| < \varepsilon$ para $|e^{it}-e^{it_0}| < \delta$.

Además, si $|e^{it}-e^{it_0}| \geq \delta$ y $e^{i\theta}$ está suficientemente cera a e^{it_0}, tenemos $|e^{i(t-\theta)}-1| \geq \frac{1}{2}\delta$.

Por el Lema 2 y 3, existe una constante $C(\delta)$ dependiente solamente de δ tal que

$$\begin{aligned}|u(z)-\phi(e^{it_0})| &\leq C(\delta).(1-r^2).\int_0^{2\pi}|\phi(e^{it})-\phi(e^{it_0})|\,dt + \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)\,dt\\ &\leq \left(M+2\pi|\phi(e^{it_0})|\right).C(\delta)(1-r^2)+\varepsilon\end{aligned}$$

donde $M = \int_0^{2\pi}|\phi(e^{it})|\,dt$. Si r está lo suficientemente cerca de 1, esto es $< 2\varepsilon$. De donde se sigue el resultado del teorema.

$\square$

1.7. Funciones Armónicas

1.7.1. Funciones Semicontinuas

En esta sección, recopilamos algunos hechos que necesitaremos.

Definición 36. *: Sea X un espacio métrico y sea u un mapeo de X sobre $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, por lo tanto u es una función de valor a la que se le permite tomar el valor $-\infty$ pero no el valor $+\infty$.*

Decimos que u es una función ***semicontinuo superior****, abreviado* ***usc****, si para cualquier $a \in X$, tenemos*

$$\overline{\lim}_{x\to a}u(x) \leq u(a)$$

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de a tal que $u(x) \leq u(a) + \varepsilon$ para $x \in U$ si $u(a) > -\infty$. Si $u(a) = -\infty$, la condición es que para cada $N > 0$, existe U tal que $u(x) < -N$ para $x \in U$.

Observaciones:

1. Dado un mapeo $u : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, u es *usc* si y solamente si, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto
$$\{x \in X \,/\, u(x) < \lambda\}$$
es abierto en X. Esto se puede ver de la siguiente manera. Si esta condición se mantiene y $\varepsilon > 0$, entonces $\{x \in X \,/\, u(x) < u(a) + \varepsilon\}$ es una vecindad abierta de a si $u(a) > -\infty$. Si $u(a) = -\infty$, entonces el conjunto $\{x \in X \,/\, u(x) < -N\}$ es una vecindad abierta de a para cualquier $N > 0$. En cambio, si u es *usc*, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in X$ y $u(a) < \lambda$, entonces, si $u(a) = -\infty$, podemos elegir una vencindad U de a tal que $u(x) \leq -|\lambda| - 1 < \lambda$ para $x \in X$. Si $u(a) > -\infty$, elegimos $\mu \in \mathbb{R}$ con $u(a) < \mu < \lambda$; entonces para $\varepsilon = \lambda - \mu$, existe yuna vecindad U de a con $u(x) \leq u(a) + \varepsilon < \lambda$, para $x \in U$. En otro caso, el conjunto $\{x \in X \,/\, u(x) < \lambda\}$ es una vecindad de a.

2. Si u es *usc*, entonces u está delimitado superiormente de cualquier conjunto compacto K en X. en efecto,
$$K \subset \bigcup_{n \geq 1} \{x \in X \,/\, u(x) < n\}$$
y así está contenida en una unión finita de los conjuntos abiertos $\{x \in X \,/\, u(x) < n\}$.

3. Supongamos que u es *usc* y acotado superiormente en X. Sea $M = \sup_{x \in X} u(x)$. Entonces el conjunto $\{x \in X \,/\, u(x) = M\}$ es cerrado en X. En efecto, tenemos $\{x \in X \,/\, u(x) = M\} = \{x \in X \,/\, u(x) \geq M\}$, el cual es el complemento del conjunto abierto $\{x \in X \,/\, u(x) < M.\}$.

4. Sean u_1, u_2 *usc* en el espacio métrico X, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. Entonces las funciones
$$u_1 + u_2, \;\; x \mapsto \textit{máx}\,(u_1(x), u_2(x))\,, \;\; \lambda u_1$$

son *usc*.

Si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones *usc* en X, y si

$$u_{n+1}(x) \leq u_n(x), \ \forall x \in X,$$

entonces la función u definida por $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ es nuevamente *usc*. En efecto, si $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\{x \in X \,/\, u(x) < \lambda\} = \bigcup_{n\geq 1} \{x \in X \,/\, u_n(x) < \lambda\}.$$

Si u es *usc* y $u(x) \geq 0$, $\forall x \in X$, entonces $v(x) = \log u(x)$ define una función v el cual es *usc*. Por supuesto, $v(x) = -\infty$, donde $u(x) = 0$.

5. Si X es un espacio métrico *compacto* y u es *usc*, entonces existe $x_0 \in X$ tal que

$$u(x_0) = \sup_{x\in X} u(x).$$

En efecto, si $M = \sup_{x\in X} u(x)$, podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\geq|1}$ de puntos de X con $u(x_n) > M - 1/n$. Ya que X es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\geq|1}$ el cual converge a un punto $x_0 \in X$. Luego, tenemos:

$$M \geq u(x_0) \geq \overline{\lim_{k\to\infty}} u(x_{n_k}) \geq \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(M - \frac{1}{n_k}\right) = M$$

De donde $u(x_0) = M$, esto es $\exists x_0 \in X$ tal que $u(x_0) = \sup_{x\in X} u(x)$.

1.7.2. Propiedades Básicas de Funciones Armónicas

Comenzamos recordando la siguiente definición y dando algunos ejemplos de funciones armónicas.

Definición 37. *: Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, entonces una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es **armónica** si u tiene segundas derivadas parciales continuas y*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Esta ecuación es llamada ECUACIÓN DE LAPLACE.

También revisamos los siguinetes hechos sobre las funciones armónicas:

1. Una función f en un conjunto abierto Ω de $\mathbb{C}$ es holomorfa si y solamente si $Ref = u$ y $Imf = v$ son funciones armóonicas que satisfacen las Ecuaciones de Cauchy - Riemann (ver Teorema 21).

2. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función armónica , entonces existe una función armónica $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

Definición 38. *: Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces $u = Ref$ y $v = Imf$ son llamadas* ***conjugadas armónicas****.*

Proposición 18. *: Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica, entonces u es infinitamente diferenciable.*

Demostración:

Fijamos $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ y elegimos $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subset \Omega$.

Entonces u tiene una conjugada armónica v en $D(z_0, \delta)$. Es decir, $f = u + iv$ es holomorfa y por lo tanto infinitamente diferenciable en $D(z_0, \delta)$. De donde se sigue que u es infinitamente diferenciable.

$\square$

2 Problema Principal

La **Desigualdad de Harnack** es una desigualdad que relaciona los valores de una función armónica positiva a dos puntos, fue introducido por A. Harnack (1887), J. Serrin (1955) y J. Moser (1961, 1964) generalizaron esta desigualdad para hallar soluciones de ecuaciones elípticas o ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. La solución de Perelman de la conjetura de Poincaré utiliza una versión de la Desigualdad de Harnack. La desigualdad de Harnack su utiliza para demostrar el Principio de Harnack, que trata sobre la convergencia de sucesiones de funciones armónicas.
$(Fuente : Wikipedia)$.
En este capítulo presentamos el resultado principal del trabajo de tesis, partimos enunciando dos teoremas, con su respectiva demostración, antecedentes al **Principio de Harnack**.

Teorema 20. *: Sean Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y u una función continua en Ω.*

1. *Si $u \in C^2(\Omega)$ y es armónica en Ω, entonces, para cualquier $a \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$, tenemos:*
$$u(z) = P_{a,R}(u)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re\left(\frac{Re^{it} + z - a}{Re^{it} - z + a}\right) u\left(a + Re^{it}\right) dt \tag{2.1}$$
para $z \in D(a, R)$. En particular:
$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + Re^{it}\right) dt \tag{2.2}$$

2. *Si para cualquier $a \in \Omega$, existe $R_a > 0$ tal que (2.2) es válido para todo $R < R_a$, donde $R > 0$, entonces u es armónico en Ω. En particular, $u \in C^2(\Omega)$.*

Demostración :
Podemos asumir que u es de valor real.
Parte 1:
La notación es de la Definición 36.

La función $v = P_{a,R}(u)$ es, por el Teorema 19, armónica en $D(a,R)$ y $(v-u)(z) \to 0$, cuando $|z-a| \to R$. Por el Principio del Máximo (Teorema 18), tenemos, para $z \in D(a,R)$,

$$(v-u)(z) \leq \sup_{|w-a|=r} (v-u)(w) \to 0, \textit{ cuando } r \to R.$$

Por lo cual, $v-u \leq 0$ en $D(a,R)$. Del mismo modo, $u-v \leq 0$ en $D(a,R)$, que prueba (2.1).

Antes de probar lo contrario en (2.2), probaremos un lema que usaremos varias veces.

Lema 20.1: Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y sea u usc en Ω (*con valores en* $\mathbb{R} - \{-\infty\}$). Supongamos que para cualquier $a \in \Omega$, existe $R_a > 0$ tal que $D(a, R_a) \subset \Omega$ y

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + re^{i\theta}\right) \, d\theta \quad \textit{para } 0 < r < R_a \tag{2.3}$$

Entonces, para cualquier conjunto abierto $U \Subset \Omega$, tenemos:

$$u(z) \leq \sup_{w \in \partial U} u(w) \quad \textit{para todo } z \in U.$$

Es más, si U es conexo, tenemos:

$$u(z) < \sup_{w \in \partial U} u(w) \quad \textit{para } z \in U.$$

A no ser que $u|U$ sea constante.

Prueba del Lema 20.1: Supongamos que existe un $w_0 \in U$ tal que $u(w_0) \geq \sup_{w \in \partial U} u(w)$. Entonces, el conjunto $E = \left\{ a \in U / \, u(a) = \sup_{\xi \in U} u(\xi) \right\}$ es no vacío. En efecto, sea $b \in \overline{U}$ tal que

$$u(b) = \sup_{w \in \overline{U}} u(w)$$

Si $\sup_{w \in \overline{U}} u(w) > u(w_0)$, entonces $b \in U$, mientras, si $\sup_{w \in \overline{U}} u(w) = u(w_0)$, entonces

$$u(w_0) = \sup_{\xi \in \overline{U}} u(\xi)$$

Por la Observación (parte 3.) de la Definición 37, E es cerrado en U.

Decimos también que es abierto.

En efecto, sea $a \in E$ y sea $R_a > 0$ tal que $D(a,R) \subset U$ y (2.3) sostiene para $0 < r < R_a$.

Afirmamos que $D(a, R_a) \subset E$.

Supongamos que esto es falso.

Entonces existe un $z = a + re^{i\theta},\ \ 0 < r < R_a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$, tal que

$$u(z) < M \quad donde\ M = \sup_{\xi \in U} U(\xi);$$

en particular, $M > -\infty$. Ya que u es usc (ver Definición 37), entonces existen $\delta, \varepsilon > 0$ tal que

$$U(a + re^{it}) \leq M - \varepsilon\ , \quad para\ |t - \theta| \leq \delta.$$

Entonces $I = [0, 2\pi] \cap \{t \in \mathbb{R}/\ |t - \theta| \leq \delta\}$ es un intervalo de longitud $l > 0$. Ya que $u(a + re^{it}) \leq M,\ para\ t \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(a + re^{it}\right)\, dt = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{l \in I} + \int_{l \in [0,2\pi]-I}\right\} u(a{+}re^{it})\, dt \leq \frac{1}{2\pi}\left\{(M - \varepsilon)l + (2\pi - l)M\right\}$$

De donde

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(a + re^{it}\right)\, dt < M;$$

por (2.3), tenemos $u(a) < M$, contrario a nuestra suposición de que $a \in E$.

Por lo tanto, E es abierto y cerrado en U, y también lo es la unión de esos componentes conexos U_0 de U con $E \cap U_0 \neq \emptyset$. Esto significa que $u|U_0$ es constante si $U_0 \cap E \neq \emptyset$, mientras $u(z) < M$ si z pertenece a una componente conexa de U que no pertenece a E. Esto prueba el Lema 1.

$\square$

Prueba del Teorema 20, Parte 2:

Supongamos que para cualquier $a \in \Omega$, existe un $R_a > 0$ tal que $D(a, R_a) \subset \Omega$ y (2.2) se cumplen para $0 < r < R_a$. Elegimos un $\delta > 0$ tal que $\overline{D}(a, \delta) \subset \Omega$, y sea $D_0 = D(a, \delta)$. Entonces, si ponemos $h = P_{a,\delta}(u)$, h es armónico en D_0. Por el Teorema 20, la parte 1 se aplica a h y la hipótesis sobre u, $h - u$ satisface las condiciones del Lema 20.1 con Ω reemplazado por D_0. Por el cual, para $r < \delta$, tenemos:

$$h(z) - u(z) \leq \sup_{|w-a|=r} (h(w) - u(w)) \quad para\ \ |z - a| < r.$$

Si hacemos que $r \to \delta$, el término de la derecha $\to 0$, por el Teorema 20. Por ende, $h \leq u$ en D_0. Análogamente, aplicando éstos argumentos a $u - h$, encontramos que $u \leq h$ en D_0. Por lo tanto, $u = h$ en D_0 y así es armónica en D_0.

$\square$

Observaciones:

1. Si u es una función armónica de de valor real en Ω y $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$, entonces (2.1) muestra que u es la parte real de la función holomorfa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\frac{Re^{it} + z - a}{Re^{it} - z + a}\right) u(a + Re^{it})\, dt$$

en $D(a, R)$. En particular, una función armónica en Ω está en $C^\infty(\Omega)$.

2. Si (2.2) se cumple en cada punto a para una secesión $\{r_n\}$ de valores de R (la sucesión puede depender de a) con $r_n \to 0$, entonces u es armónica.

Teorema 21. ***(Desigualdad de Harnack)****: Sea u una función armónica en el disco $D(a, R)$. Supongamos que $u \geq 0$ en $D(a, R)$. Enotnces, si $r < R$ y $|z - a| \leq r$, tenemos*

$$\frac{R - r}{R + r} u(a) \leq u(z) \leq \frac{R + r}{R - r} u(a).$$

Demostración:

Elegimos un $\rho > 0$ tal que $r < \rho < R$ y considerando $z - a = re^{i\theta}$ tenemos

$$\Re e\left(\frac{\rho e^{it} + z - a}{\rho e^{it} - (z - a)}\right) = \Re e\left(\frac{\rho e^{it} + re^{i}\theta}{\rho e^{it} - re^{i}\theta}\right)$$

Luego:

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} \leq \Re e\left(\frac{\rho e^{it} + re^{i\theta}}{\rho e^{it} - re^{i\theta}}\right) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r}, \quad para \;\; t, \theta \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

Ya que $u \geq 0$, multiplicamos la desicualdad (2.4) por $\frac{1}{2\pi} u(a + \rho e^{it})$, de donde se tiene:

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} . \frac{1}{2\pi} u(a+\rho e^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} u(a+\rho e^{it}) . \Re e\left(\frac{\rho e^{it} + re^{i\theta}}{\rho e^{it} - re^{i\theta}}\right) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} . \frac{1}{2\pi} u(a+\rho e^{it}), \quad para \;\; t, \theta \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Aplicando integral a la desigualdad (2.5):

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho-r}{\rho+r}.\frac{1}{2\pi}u(a+\rho e^{it})\right)\,dt \leq \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}u(a+\rho e^{it}).\Re e\left(\frac{\rho e^{it}+re^{i\theta}}{\rho e^{it}-re^{i\theta}}\right)\right)\,dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho+r}{\rho-r}.\frac{1}{2\pi}u(a+\rho e^{it})\right)\,dt,\quad para\ \ t,\theta\in\mathbb{R} \tag{2.6}$$

Ordenando (2.6) de manera conveniente usando las propiedades de la integral se tiene:

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{it})\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{it}).\Re e\left(\frac{\rho e^{it}+re^{i\theta}}{\rho e^{it}-re^{i\theta}}\right)\,dt$$

$$\leq \frac{\rho+r}{\rho-r}.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{it})\,dt,\quad para\ \ t,\theta\in\mathbb{R} \tag{2.7}$$

Así, por (2.1), tenemos:

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{it})\,dt \leq u(z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r}.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+\rho e^{it})\,dt.$$

Debido a (2.2), esto da

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}u(a) \leq u(z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r}u(a).$$

Haciendo $\rho\to R$, obtenemos el teorema.

□

2.1. Principio de Harnack

Teorema 22. ***(Principio de Harnack)****: Sea* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones armónicas de valor real en el conjunto abierto conexo* Ω *en* $\mathbb{C}$*. Supongamos que*

$$u_n(z)\leq u_{n+1}(z)\ \ \forall n\geq 1,\ \ z\in\Omega.$$

Si para algún $z_0\in\Omega$*, la sucesión* $\{u_n(z_0)\}$ *es acotada, entonces* $\{u_n\}$ *converge uniformemente en un subconjunto compacto de* Ω*. El límite es armónico en* Ω*.*

Demostración:

Sea $E = \{a \in \Omega / \ \{u_n(a)\} \ es\ acotado\}$.

Afirmación: E es abierto y cerrado a la vez.

En efecto:

i) E es abierto.

Por definición, se tiene que $int(E) \subseteq E$. Basta probar que $E \subseteq int(E)$. Sea $a \in E$ Consideremos $R > 0$ tal que $D(a, R) \subset \Omega$ y sea $u(z) = u_n(z) - u_1(z) \geq 0$, se observa que u es armónica en Ω; en particular, u es armónica en $D(a, R)$. Sea $r < R$, afirmamos que $D(a, R) \subset E$. En efecto, sea $z \in D(a, R)$, por el Teorema 21, se tiene:

$$u(z) \leq \frac{R+r}{R-r} u(a); \ \ si\ |z-a| \leq r.$$

Luego:

$$u_n(z) - u_1(z) \leq \frac{R+r}{R-r} \left(u_n(a) - u_1(a)\right); \ \ si\ |z-a| \leq r$$

Haciendo las operaciones respectivas, esto resulta

$$u_n(z) \leq \frac{R+r}{R-r} \left(u_n(a) - u_1(a)\right) + u_1(z); \ \ si \ \ |z-a| \leq r < R.$$

Desde que $\{u_n(a)\}$ es acotada, $\{u_n(z)\}$ también lo es, entonces $z \in E$. Así, $D(a, R) \subset E$. Esto es, $a \in int(E)$. Esto prueba que, $E \subset int(E)$. Por tanto, se tiene que $E = int(E)$. Esto es, E es abierto.

ii) E es cerrado.

Por definición, se tiene que $E \subseteq \overline{E}$.

Basta probar que $\overline{E} \subseteq E$.

Veamos, sea $a \in \overline{E}$.

Considero $R > 0$ tal que $D(a, R) \subset \Omega$ y sea $z_0 \in E \cap D\left(a, \frac{R}{2}\right)$. Por el Teorema 21, como $u_n(z) - u_1(z) \geq 0$ y $\frac{R}{2} < R$, se tiene

$$\frac{R - \frac{R}{2}}{R + \frac{R}{2}} \left(u_n(a) - u_1(a)\right) \leq u_n(z_0) - u_1(z_0); \ \ |z_0 - a| \leq \frac{R}{2}$$

Haciendo las operaciones respectivas, esto resulta

$$u_n(a) \leq u_1(a) + 3\left[u_n(z_0) - u_1(z_0)\right]$$

Como $z_0 \in E$, entonces $\{u_n(z_0)\}$ es acotada. Por ende, $\{u_n(a)\}$ es acotada, de donde $a \in E$.

Por lo tanto, si $E \neq \emptyset$, $\{u_n(z)\}$ es acotada para cualquier $z \in \Omega$ y desde que la sucesión es monótona, ésta converge cuando $n \to \infty$ para cualquier $z \in \Omega$.

Para demostrar que la convergencia es uniforme en un subconjunto compacto de Ω, es suficiente probar que cualquier $a \in \Omega$ tiene una vecindad U tal que la convergencia es uniforme en U.

En efecto, sea $R > 0$ tal que $D(a, R) \subset \Omega$ y sea $r < R$. Tomo $U = D(a, R)$.

Sea $k \geq l$ y sea $z \in D(a, R)$, por el Teorema 21, tenemos:

$$0 \leq u_k(z) - u_l(z) \leq \frac{R+r}{R-r}\left(u_k(a) - u_l(a)\right) \tag{2.8}$$

Como $\{u_n(a)\}$ es convergente en Ω, supongamos que $u_n(a) \to u(a)$, entonces por Definición 9, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n(a) - u(a)| < \frac{\varepsilon}{2\left(\frac{R+r}{R-r}\right)}, \quad \forall n > n_0 \; y \; a \in \Omega.$$

Luego:

$$\frac{R+r}{R-r}\left(u_k(a) - u_l(a)\right) \leq \frac{R+r}{R-r}|u_k(a) - u(a) + u(a) - u_l(a)|$$

$$\frac{R+r}{R-r}\left(u_k(a) - u_l(a)\right) \leq \frac{R+r}{R-r}|\,[u_k(a) - u(a)] - [u_k(a) - u(a)]\,|$$

Dado que:

$$\frac{R+r}{R-r}|\,[u_k(a) - u(a)] - [u_k(a) - u(a)]\,| \leq \frac{R+r}{R-r}\left(|u_k(a) - u(a)| + |u_l(a) - u(a)|\right)$$

Y

$$\frac{R+r}{R-r}\left(|u_k(a) - u(a)| + |u_l(a) - u(a)|\right) < \frac{R+r}{R-r}\left(\frac{\varepsilon}{2\left(\frac{R+r}{R-r}\right)} + \frac{\varepsilon}{2\left(\frac{R+r}{R-r}\right)}\right)$$

Tenemos:

$$\frac{R+r}{R-r}\left(u_k(a) - u_l(a)\right) < \varepsilon; \;\; \forall k, l > N_\varepsilon \;\; y \;\; a \in \Omega \tag{2.9}$$

De (2.8) y (2.9), se tiene:

$$0 \leq u_k(z) - u_l(z) = |u_k(z) - u_l(z)| < \varepsilon; \;\; \forall k, l > N_\varepsilon \;\; y \;\; z \in \Omega.$$

De aquí, por el Criterio de la Convergencia Uniforme de Cauchy (Teorema 4), $\{u_n\}$ converge uniformemente en U.

Finalmente, que el límite es armónico se sigue del Teorema 20 - parte 2 (el límite satisface (2.2) porque cada u_n lo hace y la convergencia es uniforme).

□

3 Conclusiones y/o Sugerencias

1. En Análisis Complejo, la definición de derivada para funciones complejas de variable compleja es similar a la que conocemos para funciones reales de una variable real. Como consecuencia, las reglas de derivación de sumas, productos y cocientes, así como la regla de la cadena; son exactamente las mismas que en variable real.

2. Las Ecuaciones de Cauchy-Riemann nos permiten aclarar la relación entre el nuevo concepto de derivada y la diferenciabilidad en el campo complejo, ya que, estamos trabajando con funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$. Dichas ecuaciones nos ayudarán a entender geométricamente la derivabilidad en el campo complejo.

3. El principio de Harnack, o también llamado "Segundo Teorema de Harnack", es un teorema fundamental en el Análisis Complejo, en la teoría de funciones holomorfas, que trata sobre la convergencia uniforme de sucesiones de funciones armónicas monótonamente crecientes sobre un conjunto compacto del dominio.

4. La aplicación de la desigualdad de Harnack a parte de ser base para la demostración de Principio de Harnack, es aplicada para demostrar la regularidad interior de soluciones débiles de las EDP's.

Bibliografía

[1] Axler, S., Bourdon, P., & Ramey, W. (2000), Harmonic function theory. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 137.

[2] Antonio Suárez Granero. Variable Compleja y Análisis Funcional.

[3] Castillo, C. I, Funciones de Variables Complejas.

[4] Marks, C. S. M. M. Sc./MA Course (First Semester).

[5] Narasimhan, R., & Nievergelt, Y. (2012). Complex analysis in one variable. Springer Science - Business Media.

[6] Rudin, W. (1987). Real and complex analysis. (mcgraw-hill international editions: Mathematics series).

[7] Serge Lang, "Harmonic functions", Complex Analysis, Fourth Edition, Graduate Texts in Mathematics 103, Editorial Board, Chapter VIII, pp. 241-245, 1999.

[8] Serov, V. S. (2015). Complex Analysis. University of Oulu, Oulu.

[9] Ward Brown, J., Churchill, R. V., Abellanas, L. (2004). Variable compleja y aplicaciones.

[10] Renato Benazic Tome, Topología en Espacios Euclidianos. Segunda Edición. 18° Coloquio, 3 - 7 de julio del 2000. IMCA. UNMSM.

[11] Jhon B. Conway., Functions of One Complex Variable. Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 11, Editorial Board

[12] Herrero,Pedro. (2020).Topología de Espacios Métricos. Murcia.

[13] Octavio Ismael Miloni (2019). Elementos de la Teoría de la Convergencia. Monografías, Versión 1.0.