Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Existencia y unicidad de la representación decimal de los números reales, a través de una construcción alternativa para la expansión decimal de los números reales

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Hans Erick MORALES ORTEGA

ASESOR

Mg. Rocío Julieta DE LA CRUZ MARCACUZCO

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Morales, H. (2021). *Existencia y unicidad de la representación decimal de los números reales, a través de una construcción alternativa para la expansión decimal de los números reales*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor 1	
Nombres y apellidos	Hans Erick Morales Ortega
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	46887751
URL de ORCID	https://orcid.org/**0000-0003-3131-6772**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Rocío Julieta De la Cruz Marcacuzco
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09493986
URL de ORCID	https://orcid.org/**0000-0003-1496-6255**
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Felix Gregorio Pariona Vilca
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	07366081
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Rocío Julieta De la Cruz Marcacuzco
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09493986
Datos de investigación	

Línea de investigación	No aplica
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.060287 Longitud: -77.082086
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Julio 2021-Octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 18:00 horas del sábado 23 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Mg. Felix Gregorio Pariona Vilca (MIEMBRO) y la Lic. Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA REPRESENTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES, A TRAVÉS DE UNA CONSTRUCCIÓN ALTERNATIVA PARA LA EXPANSIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES**", presentado por el señor **Bachiller Hans Erick Morales Ortega**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **17 sobresaliente,** con un calificativo promedio de **diecisiete (17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Hans Erick Morales Ortega** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 18:30 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE

Mg. Felix Gregorio Pariona Vilca
MIEMBRO

Lic. Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco
MIEMBRO ASESOR

FICHA CATALOGRÁFICA

Hans Erick, Morales Ortega

Existencia y unicidad de la representación decimal de los números reales, a través de una construcción alternativa para la expansión decimal de los números reales, (Lima) 2021
VIII.,68p.,29.7cm (UNMSM, Titulo, Matemática, 2021) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática, UNMSM/FCM II. Título
(Series).

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mis padres Lucio Morales, Ovilia Ortega y hermanos que siempre me apoyaron e incentivaron incondicionalmente a seguir adelante con mis objetivos a pesar de las adversidades.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por guiar mis pasos día a día, ser el apoyo y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y debilidad.

A mis padres Lucio Morales y Ovilia Ortega quienes son mi mayor fortaleza y brindarme su apoyo incondicional.

A mis hermanos que siempre estuvieron presentes.

A mi asesora la Mg. Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco por haber dedicado tiempo orientándome con sus conocimientos sobre el tema en la elaboración de mi tesis.

A mis maestros por sus enseñanzas y haberme brindado todos sus conocimientos.

A mis amigos y personas que siempre me apoyaron.

RESUMEN

Existencia y unicidad de la representación decimal de los números reales, a través de una construcción alternativa para la expansión decimal de los números reales.

Hans Erick, Morales Ortega

Octubre - 2021

Asesora : Mg. Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

En este trabajo de tesis, consideramos la representacion decimal de los números reales.

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

El objetivo de este trabajo, es demostrar la existencia y unicidad de la representación decimal utilizando infimos y supremos, generalizandolo a otras bases distintas a la decima.

Palabras claves: Representación decimal, ínfimos y supremos, existencia y unicidad, expansión n-area.

ABSTRACT

Existence and uniqueness of the decimal representation of real numbers, through an alternative construction for the decimal expansion of real numbers

Morales, Hans

October - 2021

Adviser : Mg. Rocío Julieta, De La Cruz Marcacuzco.

Obtained : Graduate in Mathematics.

In this thesis work, we consider the decimal representation of real numbers.

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

The objective of this work is to demonstrate the existence and uniqueness of the decimal representation using infimum and supremum, generalizing it to other bases other than the decimal.

Keywords: Decimal representation, lowest and highest, existence and uniqueness, n-area expansion.

INDICE GENERAL

Introducción

En este trabajo estudiaremos la representación decimal de los números reales a partir de su sistema axiomática, teniendo presente que la construcción de los números naturales y enteros es una consecuencia de ello.

Mostraremos la existencia y la unicidad del máximo entero $[\![x]\!]$ que sera de suma importancia para el proceso de la expansión decimal cuya definición de la representación decimal estará bien puesta, es decir, que sera única cuando definamos el decimal admisible y se utilizara el concepto de ínfimos y supremos para demostrarlo.

Extenderemos el proceso para la expansión n-aria, en otras bases menores e iguales que 10. Teniendo en cuenta los resultados ya demostrados en el proceso de la expansión decimal, mostrando ejemplos en distintas bases para generalizar ideas.

1 Preliminares.

Comencemos introduciendo algunas nociones básicas del análisis real, que son indispensables en el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Los Números Reales ($\mathbb{R}$).

1.1.1. Axioma de Cuerpo.

Asumiremos la existencia de dos operaciones, llamada suma y producto, tales que a cada par de números reales x e y la suma $x+y$ y el producto $x \cdot y$ son números reales unívocamente determinados por x e y y satisfacen las siguientes axiomas:

1. **Axioma de la Suma:**

    a) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple $(x+y)+z = x+(y+z)$.

    b) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple $x+y = y+x$.

    c) Existe un elemento de $\mathbb{R}$, denotado por 0 talque $x+0 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

    d) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x+y = 0$.

2. **Axioma del Producto:**

    a) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

    b) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple $x \cdot y = y \cdot x$.

    c) Existe un elemento de $\mathbb{R}$, distinto de 0, que denotamos por 1 talque $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

    d) Para cada $x \in \mathbb{R}$ talque no sea cero, existe un $y \in \mathbb{R}$ talque $x \cdot y = 1$.

3. **Axioma de Distributividad:**

    a) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

1.1.2. Axioma de Orden.

Asumimos la existencia de una relación " $\leq$ " que establece un orden entre los números reales y satisface las siguientes axiomas:

1. Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$.
2. Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$.
3. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple $x \leq y$ ó $y \leq x$.
4. Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.
5. Si $0 \leq x$ y $0 \leq y$ entonces $0 \leq x.y$.
6. Si $x < y$, se cumple $x \neq y$ y $x \leq y$.

1.1.3. Axioma del Supremo.

Antes de enunciar el axioma del supremo, veamos algunas definiciones.

Definición 1.1.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}$.*

1. *Un conjunto X es* ***acotado superiormente*** *si y solo si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. El número b es llamado* ***cota superior*** *de X.*
2. *Un conjunto X es* ***acotado inferiormente*** *si y solo si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$ para todo $x \in X$. El número a es llamado* ***cota inferior*** *de X.*
3. *X es* ***acotado*** *si y solo si X es acotado superior e inferiormente.*

Definición 1.1.2. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ distinto del vacío y acotado superiormente, un $b \in \mathbb{R}$ es llamado* ***supremo*** *de X si y solo si*

1. *Para todo $x \in X$ se cumple que $x \leq b$* ***(b es cota superior de X).***
2. *Si $b' < b$ entonces existe $x \in X$ tal que $b' < x$* ***(b es la mínima cota superior de X).***

Observación 1.1.1. *Se puede probar que si existe el supremo de X este es único, y es denotado como* ***Sup(X)****.*

Definición 1.1.3. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ distinto del vacío y acotado inferiormente, un $a \in \mathbb{R}$ es llamado **ínfimo** de X si y solo si*

1. *Para todo $x \in X$ se cumple que $a \leq x$ (a **es cota inferior de** X**).***

2. *Si $a < a'$ entonces existe $x \in X$ tal que $x < a'$(a **es la mayor cota inferior de** X**).***

Observación 1.1.2. *Se puede probar que si X admite un ínfimo entonces él es único, y es denotado como **Inf(X).***

Observación 1.1.3. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ distinto del vacío, se cumple:*

1. *Si X es acotado superiormente y $Sup(X) \in X$ entonces $Sup(X)$ es el máximo de X y se le denota por $max(X)$.*

2. *Si X es acotado inferiormente y $Inf(X) \in X$ entonces $Inf(X)$ es el mínimo de X y se le denota por $min(X)$.*

Definición 1.1.4. *Todo subconjunto no vació de números reales acotados superiormente posee un supremo. Es decir:*

Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ es acotado superiormente entonces tiene supremo en $\mathbb{R}$.

Observación 1.1.4. *El axioma del supremo es lo que distingue a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, es decir, $\mathbb{Q}$ no tiene el axioma del supremo.*
Por ejemplo, considere el conjunto

$$X = \left\{q \in \mathbb{Q}^+ : q^2 < 2\right\}.$$

Se puede probar que $X \subset \mathbb{Q}$ es no vacío, es acotado superiormente; pero no existe el $Sup(X)$ en $\mathbb{Q}$. De hecho $Sup(X) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Teorema 1.1.1. *Se cumple que:*

1. *El conjunto de los $\mathbb{N}$ no esta acotado superiormente.*

2. *Si $X = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ entonces $Inf(X) = 0$.*

3. *Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot n > b$ (Propiedad Arquimediana).*

Demostración:

1. Suponiendo que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente.

   Entonces existe $b = Sup(\mathbb{N})$. Como $b - 1 < b$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b - 1 < n_0$ lo que resulta
   $$b < n_0 + 1.$$
   Pero $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ entonces $n_0 + 1 \leq b$. Lo que resulta $b < n_0 + 1 \leq b$ es decir $b < b$, lo que es una contradicción, que proviene de suponer que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente.

   $\therefore \mathbb{N}$ no esta acotado superiormente.

2. Se cumple que $\dfrac{1}{n} \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego tenemos que 0 es cota inferior de X.

   Sea $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$, por la parte (1) tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{a} < n_0$ entonces $a > \frac{1}{n_0}$, como $\frac{1}{n_0} \in X$ entonces
   $$Inf(X) = 0.$$

3. Sea $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}^+$ entonces por la parte (2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
   $$\frac{1}{n_0} < \frac{a}{b},$$
   entonces
   $$b < n_0 \cdot a.$$

$\square$

Observación 1.1.5. *Consideremos el conjunto*

$$B = \left\{ \frac{1}{10^m} : m \in \mathbb{Z}_0^+ \right\}.$$

Se cumple que el $Inf(B) = 0$.

Dado un $\varepsilon > 0 = Inf(B)$ entonces $Inf(B) < \varepsilon$. Por definición de ínfimo existe $\frac{1}{10^m}$, un elemento del conjunto X con $m \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que

$$Inf(B) \leq \frac{1}{10^m} < \varepsilon.$$

Teorema 1.1.2. *(Principio de buena ordenación). Todo subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{N}$ posee elemento mínimo.*

Demostración: véase [7].

□

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS.

Definición 1.1.5. *Sean X, Y conjuntos no vacíos. Decimos que X e Y son **coordinables** si y solo si existe $f : X \to Y$ biyección.*

Denotaremos lo siguiente:

$$I_n = \{1, 2, ..., n\}$$

Definición 1.1.6. *Sea $X \neq \emptyset$ decimos que X es **finito** si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ talque X es coordinable con I_n.*

Definición 1.1.7. *Decimos que X es un conjunto **infinito** si y solo si X no es un conjunto finito.*

1.2. Los Números Racionales ($\mathbb{Q}$).

Se define $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Donde a es el numerador y b es el denominador.

Definición 1.2.1. *Un conjunto A se llama **denso** si dados dos elementos x, y de A tales que $x < y$ existe un $c \in A$ tal que $x < c < y$.*

Teorema 1.2.1. $\mathbb{Q}$ *es denso.*

Demostración:

Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ donde $x < y$, debemos demostrar que existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $x < c < y$.

Como $x < y$ entonces $x + x < y + x$ lo que resulta $2x < x + y$,

$$\therefore x < \frac{x+y}{2} \in \mathbb{Q}.$$

También $x < y$ entonces $x + y < y + y$ lo que resulta $x + y < 2y$,

$$\therefore \mathbb{Q} \ni \frac{x+y}{2} < y.$$

Luego $c = \dfrac{x+y}{2} \in \mathbb{Q}$, entonces existe un c tal que

$$x < c < y.$$

□

1.3. Los Números Irracionales ($\mathbb{I}$).

Un número irracional es aquel que no puede ser expresado como un cociente $\frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$.

Es cualquier número real que no es racional y su expresión decimal no es ni exacta ni periódica.

$$\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} | x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Observación 1.3.1. *Se observa lo siguiente:*

1. *El conjunto de los números racionales es infinito y denso, pero no es continuo en la recta numérica real, es decir, entre dos números racionales es posible encontrar un elemento que no es racional.*

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R} \quad \wedge \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

2 Problema Principal.

En este capítulo desarrollaremos una representación de los números reales a los que generalmente se le hace referencia con la expansión decimal.

2.1. Representación de la Expansión Decimal.

Veamos con detalle el proceso de expansión decimal.

Demostraremos la existencia y la unicidad el máximo entero de un número real mediante el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1. *Dado un $x \in \mathbb{R}$ existe un único $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p \leq x$ y $x < p + 1$.*

Demostración:

Dado un $x \in \mathbb{R}$, y definimos un conjunto A de la siguiente manera:

$$A = \{n \in \mathbb{Z} | x < n\}.$$

Afirmación: $A \neq \emptyset$. En efecto:

Supongamos que $A = \emptyset$ se tendrá que no existe un entero n tal que n sea mayor que x, es decir, x es cota inferior de $\mathbb{Z}$ lo cual es absurdo. Por lo tanto se concluye que A es distinto del vacío.

Analizaremos dos casos:

CASO 1: Si $x \geq 0$ y sea $A = \{n \in \mathbb{Z} | x < n\} \subset \mathbb{N}$, y por el Teorema (1.1.2) existe un menor elemento en el conjunto A que le denominamos q, entonces se cumple que $x < q$.

Supongamos que ocurre $x < q - 1$, entonces $q - 1 \in A$, y q es el menor elemento de A lo que resulta $q \leq q - 1$, lo cual es absurdo, pues q es el menor elemento de A y he encontrado un $q - 1$ que pertenece a A.

Por lo tanto se concluye

$$q - 1 \leq x < q,$$

denotamos $q - 1 = p$, entonces

$$p \leq x < p + 1.$$

CASO 2: Si $x < 0$, considere $A = [-x, +\infty) \cap \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$, y por el Teorema(1.1.2) existe un menor elemento en el conjunto A y lo denominamos q, por ello se cumple $-x \leq q$ entonces $x \geq -q$.

Supongamos que ocurre $x \geq -q + 1$, entonces $-x \leq q - 1$ lo que resulta $q - 1 \in A$ entonces $q \leq q - 1$ lo cual es absurdo, pues q es el menor elemento de A.

Entonces se cumple $-q \leq x < -q + 1$, denotamos $-q = p$ lo que resulta

$$p \leq x < p + 1.$$

Afirmación: (Unicidad). Es decir si existen p, p' tal que $p \leq x < p+1$ y $p' \leq x < p'+1$, por demostrar que $p = p'$. En efecto:

Caso I: Si consideramos que $p' < p$.

Si $p' < p \leq x < p' + 1$ entonces $p' < p < p' + 1$, luego $0 < p - p' < 1$ lo cual es una contradicción, pues $p - p' \in \mathbb{Z}$ y no existe un entero que esté entre 0 y 1.

Caso II: Si consideramos que $p < p'$.

Si $p < p' \leq x < p + 1$ entonces $p < p' < p + 1$, luego $0 < p' - p < 1$ lo cual es una contradicción, pues $p' - p \in \mathbb{Z}$ y no existe un entero que esté entre 0 y 1.

Por lo tanto podemos concluir por tricotomía que $p = p'$.

$\square$

Definición 2.1.1. *Dado $x \in \mathbb{R}$ el máximo entero de x es denotado por $[\![x]\!]$ y es tal que*

$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1.$$

Comenzaremos con la expansión decimal de los reales.

Sea $y \in \mathbb{R}$, y sea q su máximo entero, es decir cumplen $q \leq y < q+1$. Entonces existe $x \in [0,1)$ tal que $y = q + x$.

NOTA: Si $x \geq 1$ entonces $q + 1 \leq y$, contradice el hecho de que q es el mayor entero con la condición $q \leq y$.

Notemos que para expandir y en su forma decimal es necesario y suficiente expandir x.

Consideramos $x \in [0.1)$, construiremos una sucesión de racionales que describirán el número real. Definiremos inductivamente una sucesión (a_n) de enteros de manera que $n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq 9$.

Como $0 \leq x < 1$, multiplicamos por 10 tenemos $0 \leq 10x < 10$. Sea a_1 el máximo entero entonces $a_1 = [\![10x]\!] \leq 10x$ lo que resulta $a_1 \leq 10x$ por lo tanto

$$\frac{a_1}{10} \leq x, \tag{2.1}$$

como $x < 1$, entonces $a_1 < 10$, i.e., $a_1 \leq 9$; desde que a_1 es el mayor entero que verifica (2.1) entonces se tendrá que

$$\frac{a_1}{10} \leq x < \frac{a_1 + 1}{10} = \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$

Denotamos $A_1 = \dfrac{a_1}{10}$, tendremos que

$$A_1 \leq x < A_1 + \frac{1}{10} \wedge a_1 \leq 9. \tag{2.2}$$

Se cumple $\dfrac{a_1}{10} \leq x < 1$, luego $0 \leq x - \dfrac{a_1}{10} < 1 - \dfrac{a_1}{10} < 1$ entonces $0 \leq 100\left(x - \dfrac{a_1}{10}\right) < 100$.

Denotamos a $N = \left(x - \dfrac{a_1}{10}\right)$.

Ahora considere a_2 es el máximo entero tal que $a_2 = [\![100 \cdot N]\!] \leq 100 \cdot N$ por lo tanto $a_2 \leq 100 \cdot N$, luego tenemos $\dfrac{a_2}{100} \leq N = x - \dfrac{a_1}{10}$, entonces

$$\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_1}{10}\leq x,$$

entonces se tendrá que

$$\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_1}{10}\leq x<\frac{a_2+1}{10^2}+\frac{a_1}{10}$$

$$\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_1}{10}\leq x<\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2}.$$

Denotemos

$$A_2=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}>A_1,$$

entonces

$$A_2\leq x<A_2+\frac{1}{10^2}, \tag{2.3}$$

se observa que $a_2\leq 10^2(x-A_1)<10$, entonces $a_2\leq 9$.

Supóngase que se ha definido $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ tales que

$$A_n=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+...+\frac{a_n}{10^n}$$

y

$$A_n\leq x<A_n+\frac{1}{10^n}$$

donde $a_j\leq 9$ para todo $j\in\{1,2,3,...,n\}$.

Ahora considere que a_{n+1} es el mayor positivo entero tal que

$$A_n+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\leq x,$$

entonces

$$A_n+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\leq x<A_n+\frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}}$$

Sea $A_{n+1} = A_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} > A_n$, entonces se tiene

$$A_{n+1} \leq x < A_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}. \tag{2.4}$$

Queda definida por inducción, una sucesión $(a_1, a_2, a_3, ...)$ tales que

$$A_n \leq x < A_n + \frac{1}{10^n} \tag{2.5}$$

donde

$$A_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n}{10^n} \tag{2.6}$$

Ahora probaremos que la sucesión A_n tiende a x, es decir que

$$SupA_n = x.$$

Teorema 2.1.1. *Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [0,1)$ y dado el conjunto $(A_n) = \{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ como en* (2.6)*, se cumple que $Sup(A_n) = x$.*

Demostración: De (2.5) observamos que x es cota superior de la sucesión (A_n) y cota inferior de la sucesión $(A_n + \frac{1}{10^n})$

$$Sup(A_n) \leq x \leq Inf\left(A_n + \frac{1}{10^n}\right). \tag{2.7}$$

Debemos demostrar que

$$Sup(A_n) = Inf\left(A_n + \frac{1}{10^n}\right)$$

Afirmación 1:

Sea A, B conjuntos acotados tales que, si $x \in A$ e $y \in B$, $x \leq y$ entonces se cumple que $Sup(A) \leq Inf(B)$. En efecto:

Para todo $x \in A$, $x \leq Sup(A)$.

Sea $y \in B$ fijo arbitrario, entonces $x \leq y$, para todo $x \in A$. Entonces se cumple

$$Sup(A) \leq y.$$

Como y es arbitrario entonces $Sup(A) \leq y$ para todo $y \in B$, entonces se cumple $Sup(A) \leq Inf(B)$, (pues $Sup(A)$ es cota inferior de B).

Afirmación 2:

En las condiciones de la afirmación 1, se cumple que $Sup(A) = Inf(B)$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existen $x \in A$ e $y \in B$ tal que $y - x < \varepsilon$. En efecto:

($\Rightarrow$)

Sea $Sup(A) = Inf(B)$. Dado un $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ se cumple que

$$Sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < Sup(A).$$

Por definición de supremo, existe $x \in A$ tal que

$$Sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < x. \tag{2.8}$$

También se cumple que $Inf(B) + \dfrac{\varepsilon}{2} > Inf(B)$, por definición de ínfimo existe $y \in B$ tal que $Inf(B) + \dfrac{\varepsilon}{2} > y$, entonces

$$-Inf(B) - \frac{\varepsilon}{2} < -y. \tag{2.9}$$

Sumando (2.8) y (2.9) tenemos que

$$Sup(A) - Inf(B) - \varepsilon < x - y$$

$$-\varepsilon < x - y$$

$$y - x < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$)

Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ e $y \in B$ tales que $y - x < \varepsilon$, por demostrar que $Sup(A) = Inf(B)$. En efecto:

Como

$$Inf(B) \leq y < \varepsilon + x$$

$$Inf(B) - \varepsilon < x \wedge x \leq Sup(A)$$

$$Inf(B) - \varepsilon < Sup(A)$$

$$Inf(B) - Sup(A) < \varepsilon.$$

De la afirmación 1, $Inf(B) - Sup(A) \geq 0$, entonces

$$0 \leq Inf(B) - Sup(A) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

entonces

$$Inf(B) = Sup(A).$$

Ahora considere los conjuntos $A = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \left\{A_n + \frac{1}{10^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, se sabe que $0 \leq A_n$. Como $A_n \leq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De (2.5) tenemos que

$$0 \leq A_n \leq x < A_n + \frac{1}{10^n} < x + 1,$$

pues $\dfrac{1}{10^n} < 1$. Entonces los conjuntos A y B son acotados.

Además de (2.5) notamos que si $a \in A$, $a \leq x$; y si $b \in B$, entonces $x < b$, por lo que $a < b$.

Además. Dado $\varepsilon > 0$, por la observación 1.1.5, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{10^m} < \varepsilon$. Pero

$$\underbrace{\left(A_m + \frac{1}{10^m}\right)}_{\in B} - \underbrace{(A_m)}_{\in A} < \varepsilon,$$

por la afirmación 2, tenemos que

$$Sup(A) = Inf(B),$$

por lo tanto de (2.7)

$$Sup(A_n) = x. \tag{2.10}$$

$\square$

Observación 2.1.1. *Usaremos la notación* $A_n = 0.a_1a_2\ldots a_n$ *y* $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$. *La* A_n *racional se llama decimal finitos aproximados para* x*, mientras* $0.a_1a_2a_3\ldots$ *se llamara un decimal infinito.*

Concluimos que la sucesión A_n es la mejor aproximación para x. Expresando A_n en su representación usual

$$A_n = 0.a_1a_2...a_n,$$

para n es más grande aproximamos a x, y podemos aproximar cuanto queramos. La expresión (2.10) nos dice que

$$x = 0.a_1a_2a_3... = SupA_n.$$

Definición 2.1.2. *Sea* $x \in \mathbb{R}$ *tiene su representación decimal* $0.a_1a_2a_3...$ *donde los* $0 \leq a_i \leq 9$*, para todo* $i \in \{1, 2, 3, ...\}$. *Esta representación estará bien puesta, es decir, que exista una única representación decimal de* x*, ello ocurrirá cuando sean* ***decimales admisibles***.

Observación 2.1.2. *El siguiente problema es caracterizar esas sucesiones* $(a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots)$ *de enteros entre 0 y 9, que surgen de la construcción anterior. Considere el decimal infinito* $0.4999\ldots$, *tenemos:*

$a_1 = 4$*,* $a_n = 9$ *para* $n > 1$

$$A_n = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ... + \frac{9}{10^n}$$

entonces

$$S = \frac{4}{10} + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots - 1\right)$$

$$S = \frac{4}{10} + \frac{9}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right)$$

$$S = \frac{4}{10} + \frac{9}{10}\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$S = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}.$$

Entonces

$$Sup(A_n) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2.1.1. *Si* $y = \frac{325}{8}$*; tenemos por el proceso anterior:* $y = q + x$*, donde* q *es el máximo entero, que resulta* $q = 40$*. Ahora nos queda extender la parte decimal de* x*.*

$$x = \frac{325}{8} - 40 = \frac{5}{8}$$

$$\frac{6}{10} \leq x < \frac{7}{10} \qquad \therefore a_1 = 6$$

$$\frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} \leq x < \frac{6}{10} + \frac{3}{10^2} \qquad \therefore a_2 = 2$$

$$\frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} = x < \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} \qquad \therefore a_3 = 5$$

Por lo tanto $\frac{325}{8} = 40 + 0.625.$

Ejemplo 2.1.2. *Si existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $A_N = x$*, entonces* $A_{N+i} = 0$*, para todo* $i \in \mathbb{N}$*.*
En efecto, Se cumple que

$$A_N = x < A_N + \frac{1}{10^N},$$

entonces

$$A_N + \frac{a_{N+1}}{10^{N+1}} \leq x < A_N + \frac{a_{N+1}}{10^{N+1}} + \frac{1}{10^{N+1}}$$

entonces

$$\frac{a_{N+1}}{10^{N+1}} \leq x - A_N < \frac{a_{N+1}}{10^{N+1}} + \frac{1}{10^{N+1}},$$

como $a_{N+1} \geq 0$ *entonces*

$$0 \leq \frac{a_{N+1}}{10^{N+1}} \leq 0 \leftrightarrow a_{N+1} = 0.$$

Supongamos que $a_{N+1} = a_{N+2} = ... = a_{N+m}$. *Probemos que* $a_{N+m+1} = 0$. *En efecto, como*

$$A_{N+m+1} \leq x \leq A_{N+m+1} + \frac{1}{10^{N+m+1}},$$

donde

$$A_{N+m+1} = \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_N}{10^N} + \frac{0}{10^{N+1}} + ... + \frac{0}{10^{N+m}} + \frac{a_{N+m+1}}{10^{N+m+1}},$$

de lo anterior tenemos

$$A_N + \frac{a_{N+m+1}}{10^{N+m+1}} \leq A_N \leq A_{N+m+1} + \frac{1}{10^{N+m+1}}$$

$$\frac{a_{N+m+1}}{10^{N+m+1}} \leq 0 \quad \leftrightarrow \quad a_{N+m+1} = 0.$$

Lo que concluye que $a_{N+i} = 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

Así $x = 0.a_1a_2...a_n000...$, *claramente se cumple* $0 = 0.000...$

Ejemplo 2.1.3. *Si* $x = \frac{1}{3}$

$$\frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{4}{10} \qquad \therefore a_1 = 3$$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} \leq \frac{1}{3} < \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} \qquad \therefore a_2 = 3$$

procediendo de forma similar, resulta $a_n = 3$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *i.e,* $\frac{1}{3} = 0.333...$

Observamos lo siguiente si multiplicamos por 3 *a*

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots,$$

entonces

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0.333\ldots,$$

lo que resulta

$$1 = 0.999\ldots.$$

Definición 2.1.3. *Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$, y para todo $n > n_0$ tal que $a_n = 9$; decimos que $0.a_1a_2a_3...$ tiene todos menos un número finito de 9.*

*Si un decimal infinito no tiene todos menos un número finito de 9, lo llamaremos un **decimal admisible** y decimos que tiene "un número infinito de $a_n \neq 9$".*

Observación 2.1.3. *Dado 1 y sus representaciones decimales son $1.000\ldots$ y $0.999\ldots$, podemos observa que esas representaciones son distintas, es decir:*

$$1.000\ldots \neq 0.999\ldots.$$

Y esto sucede porque la representación decimal $0.999\ldots$ es no admisible.

Observación 2.1.4. *Dado $\frac{1}{4}$ y sus representaciones decimales son $0.24999\ldots$ y $0.25000\ldots$, las cuales son distintas, pues $0.24999\ldots$ es un decimal no admisible.*

Deseamos mostrar que cada número real x con $0 \leq x < 1$ está asociado con un decimal admisible (infinito) y que diferentes números reales están asociados a diferentes decimales admisibles.

Teorema 2.1.2. *Si x es cualquier número real $0 \leq x < 1$ y $0.a_1a_2a_3...$ es el decimal infinito asociado con x por la construcción anterior, entonces $0.a_1a_2a_3...$ es admisible.*

Demostración:

Supóngase que $0.a_1a_2a_3...$ no es admisible, entonces tiene todo menos un número finito de 9; es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = 9$, para todo $i > n_0$. Sabemos por la construcción anterior que

$$Sup(A_n) = x = Inf\left(A_n + \frac{1}{10^n}\right),$$

entonces

$$A_n \leq x < A_k + \frac{1}{10^k}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para $n > n_0$ se tiene

$$A_n = A_{n_0} + \frac{9}{10^{n_0+1}} + \frac{9}{10^{n_0+2}} + ... + \frac{9}{10^n}$$

$$A_{n_0} + \frac{9}{10^{n_0}}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{n-n_0}}\right) \leq x < A_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}$$

$$A_{n_0} + \frac{9}{10^{n_0}}\left(\frac{1 - \frac{1}{10^{n-n_0+1}}}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) \leq x < A_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}$$

$$A_{n_0} + \frac{9}{10^{n_0}}\left(\frac{10 - \frac{1}{10^{n-n_0}} - 9}{9}\right) \leq x < A_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}$$

$$A_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}\left(1 - \frac{1}{10^{n-n_0}}\right) \leq x < A_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}$$

como $Sup\left(1 - \frac{1}{10^{n-n_0}}\right) = 1$ se tiene que

$$A_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}} \leq x < A_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}},$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto $0.a_1a_2a_3...$ es admisible.

□

El siguiente teorema mostrará que cada decimal admisible es la expansión decimal (como se concluyó mediante el método anterior) para algún número real x con $0 \leq x < 1$. Eso implicara automáticamente que diferentes números tienen diferentes ecuaciones decimales infinitas. Ya que el número será determinado únicamente por el decimal por conveniencia, primero probaremos cuatro lemas.

Lema 2.1.1. *Para cualquier número entero* $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ *con* $0 \leq c_n \leq 9$ *se cumple*

$$\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + ... + \frac{c_n}{10^n} < 1$$

Demostración: Se cumple lo siguiente

$$\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + ... + \frac{c_n}{10^n} \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n}.$$

Ahora se tiene

$$1 - \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n}\right) = \left(\frac{1}{10} - \frac{9}{10^2} - ... - \frac{9}{10^n}\right) = \frac{1}{10^n}.$$

Así

$$1 - \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n}\right) > 0$$

y entonces

$$\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n}\right) < 1$$

luego se tiene

$$\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + ... + \frac{c_n}{10^n} \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n} < 1.$$

Por lo tanto

$$\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + ... + \frac{c_n}{10^n} < 1$$

$\square$

Denotamos $0.b_1b_2b_3...$ cualquier decimal admisible (Es decir $0 \leq b_n \leq 9$ y $0.b_1b_2b_3...$, contiene un número infinito de no-9).

Sea

$$B_n = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + ... + \frac{b_n}{10^n}.$$

Se cumple:

1. (B_n) esta acotado por 1. Por Lema(2.1.1)

2. $x = Sup(B_n)$.

Lema 2.1.2. *Para todo* $n, k \in \mathbb{N}$ *tal que* $B_k < B_n + \frac{1}{10^n}$.

Demostración:

Se observa que si $k \leq n$, $B_k \leq B_n < B_n + \frac{1}{10^n}$

Para $k > n$,

$$B_k = B_n + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + ... + \frac{b_k}{10^k} = B_n + \frac{1}{10^n}\left(\frac{b_{n+1}}{10} + \frac{b_{n+1}}{10^2} + ... + \frac{b_k}{10^{k-n}}\right)$$

por el Lema(2.1.1)

$$B_k < B_n + \frac{1}{10^n} \cdot 1$$

□

Lema 2.1.3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple* $x < B_n + \frac{1}{10^n}$.

Demostración:

Del lema 2.1.2 se cumple

$$B_k < B_n + \frac{1}{10^n}, \forall k.$$

Se cumple que $B_n + \frac{1}{10^n}$ es una cota superior del conjunto (B_k). Por lo tanto, como x es el supremo de (B_k), $x \leq B_n + \frac{1}{10^n}$.

Ahora ya que $0.b_1b_2b_3...$ contiene un número infinito de $no-9$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > n$ cumple $b_k \leq 8$. Por lo tanto

$$x \leq B_k + \frac{1}{10^k} = B_n + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + ... + \frac{b_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}$$

$$\leq B_n + \frac{9}{10^{n+1}} + ... + \frac{9}{10^{k-1}} + \frac{8}{10^k} + \frac{1}{10^k} = B_n + \frac{9}{10^{n+1}} + ... + \frac{9}{10^k} =$$

$$= B_n + \frac{1}{10^n}\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^{k-n}}\right) < B_n + \frac{1}{10^n}.$$

$$\therefore x < B_n + \frac{1}{10^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

□

Lema 2.1.4. *Se cumple* $x < 1$.

Demostración:

Sea n cualquier índice para el cual $b_n \neq 9$ es decir $b_n \leq 8$. Entonces se cumple por lema(2.1.2)

$$x < B_n + \frac{1}{10^n} = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + ... + \frac{b_n + 1}{10^n}$$

Pero $b_n + 1 \leq 9$ entonces por Lema(2.1.1) entonces la suma es < 1.

$\square$

Teorema 2.1.3. *Si $0.a_1a_2a_3...$ es el decimal admisible asociado con x (donde x es el supremo de (B_n) como se define para los lemas) entonces $b_n = a_n$, para todo n, es decir $0.a_1a_2a_3...$ y $0.b_1b_2b_3...$ son idénticos.*

Demostración:

Supóngase que la conclusión es falsa, es decir, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m \neq a_m$. Donde m sea el menor entero tal que $b_m \neq a_m$, entonces $b_n = a_n$ para cada $n < m$.

CASO 1: $b_m < a_m$ entonces $a_m - b_m > 0$ entonces $a_m - b_m \geq 1$.

$$A_m - B_m = \left(\frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{a_m}{10^m}\right) - \left(\frac{b_1}{10} + ... + \frac{b_{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{b_m}{10^m}\right),$$

$$A_m - B_m = \frac{a_m - b_m}{10^m} \geq \frac{1}{10^m},$$

$$A_m \geq B_m + \frac{1}{10^m} > x,$$

lo cual es absurdo, pues $x = Sup A_n \geq A_m$.

CASO 2: $a_m < b_m$ entonces $b_m - a_m \geq 1$,

$$B_m - A_m = \left(\frac{b_1}{10} + ... + \frac{b_{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{b_m}{10^m}\right) - \left(\frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{a_m}{10^m}\right),$$

$$B_m - A_m = \frac{b_m - a_m}{10^m} \geq \frac{1}{10^m},$$

$$B_m \geq A_m + \frac{1}{10^m} > x,$$

lo que es absurdo pues $x = Sup(B_n)$.

Por lo tanto tal entero m no existe, entonces $b_n = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3 Representación de la Expansión n-aria.

Para poder representar la expansión n-aria es necesario aclarar algunos conceptos.

3.1. Primeros Resultados.

CIFRA(dígito):

Son aquellos símbolos que se utilizaran convencionalmente para la formación de los numerales, las cuales son:

$$0; 1; 2; 3; 5; ...$$

ORDEN:

Toda cifra que conforma un numeral tiene asociado un orden, el cual se cuenta de derecha a izquierda a partir de cero, así como también el lugar contando de izquierda a derecha y a partir de uno.

Ejemplo 3.1.1. *Dado el numeral* 834079 *podemos apreciar lo siguiente:*

1. *La cifra* 7 *esta en el lugar 5 y el orden 1.*

2. *La cifra* 4 *esta en el lugar 3 y el orden 3.*

BASE(k):

Es un numeral referencial entero mayor que la unidad, el cual nos indica las unidades necesarias y suficientes de un orden cualesquiera para formar una unidad del orden siguiente (Orden inmediato superior) Es un numeral referencial

Ejemplo 3.1.2. *En base 10 (sistema decimal).*

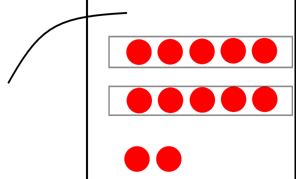
- *10 unidades conforman una decena.*

- *10 decenas conforman una centena.*

- *10 centenas conforman un millar y así sucesivamente.*

Ejemplo 3.1.3. *En base 5.*

- *5 unidades del orden cero conforman una unidad del orden uno.*
- *5 unidades del orden uno conforman una unidad del orden dos.*
- *5 unidades del orden dos conforman una unidad del orden tres y así sucesivamente.*

Base	Orden			
	3	2	1	0
5				
			2	$2_{(5)}$

Observación 3.1.1. *Las cifras que conforman un numeral son siempre un número entero menor que la base.*

Así en la base n se puede utilizar n cifras diferentes, las cuales son

$$0; 1; 2; 3; ...; (n - 1).$$

Presentamos algunos sistemas de numeración más utilizados.

1. *En el sistema **Binario** se utilizara las cifras* $\{0; 1\}$.
2. *En el sistema **Ternario** se utilizara las cifras* $\{0; 1; 2\}$.
3. *En el sistema **Cuaternario** se utilizara las cifras* $\{0; 1; 2; 3\}$.
4. *En el sistema **Quinario** se utilizara las cifras* $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.
5. *En el sistema **Senario** se utilizara las cifras* $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
6. *En el sistema **Heptanario** se utilizara las cifras* $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
7. *En el sistema **Octonario** se utilizara las cifras* $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

8. *En el sistema* ***Nonario*** *se utilizara las cifras* $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

9. *En el sistema* ***Decimal*** *se utilizara las cifras* $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Teorema 3.1.1. *Si a es positivo y $b \in \mathbb{R}$ es arbitrario, existen únicos enteros q, r tales que*

$$b = q \cdot a + r, \quad 0 \leq r < a.$$

Demostración: Véase [6].

$\square$

Ejemplo 3.1.4. *Para expresar 17 en base 3.*

$$17 = 3 \cdot 5 + 2, \quad 0 \leq 2 < 5$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2.$$

Entonces concluimos

$$17 = 122_{(3)}.$$

Podemos observar que $122_{(3)}$ *es el resultado de* 17 *en base 3.*

Ejemplo 3.1.5. *Para expresar 53 en base 3.*

$$53 = 3 \cdot 17 + 2; \quad 0 \leq 2 < 17,$$

$$17 = 3 \cdot 5 + 2; \quad 0 \leq 2 < 5,$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2.$$

Entonces concluimos

$$53 = 1222_{(3)}.$$

Podemos observar que $1222_{(3)}$ *es el resultado de* 53 *en base 3.*

3.2. Expansión n-aria.

Dado $y \in \mathbb{R}$, una base k con $1 < k \leq 10$. Sea $y'_{(k)}$ que representa y en base k, como se puede apreciar en el ejemplo 3.1.4. Ya hemos demostrado la existencia y la unicidad del máximo entero, es decir $[\![y'_{(k)}]\!] = q_{(k)}$ que por definición se cumple $q_{(k)} \leq y'_{(k)} < q_{(k)} + 1$ entonces existe $x_{(k)} \in [0, 1)$ tal que $y'_{(k)} = q_{(k)} + x_{(k)}$.

Notemos que para expandir $y'_{(k)}$ es suficiente expandir $x_{(k)}$.

Como $0 \leq x_{(k)} < 1$ entonces $0 \leq k \cdot x_{(k)} < k$. Sea a_1 el máximo entero, entonces $a_1 = [\![k \cdot x_{(k)}]\!] \leq k \cdot x_{(k)}$ lo que resulta $a_1 \leq k \cdot x_{(k)}$

$$\frac{a_1}{k} \leq x_{(k)}. \tag{3.1}$$

Sabemos que $x_{(k)} < 1$, entonces $a_1 < k$, es decir, $a_1 \leq k - 1$, sabemos que a_1 es el máximo entero que verifica (3.1) entonces se tendrá

$$\frac{a_1}{k} \leq x_{(k)} < \frac{a_1 + 1}{k} = \frac{a_1}{k} + \frac{1}{k}.$$

Denotamos $A_1 = \dfrac{a_1}{k}$, tenemos que

$$A_1 \leq x_{(k)} < A_1 + \frac{1}{k} \wedge a_1 \leq k - 1$$

Ahora consideremos a_2 el máximo entero tal que

$$\frac{a_2}{k^2} + \frac{a_1}{k} \leq x_{(k)},$$

entonces se cumplirá que

$$\frac{a_2}{k^2} + \frac{a_1}{k} \leq x_{(k)} < \frac{a_2 + 1}{k^2} + \frac{a_1}{k}$$

$$\frac{a_2}{k^2} + \frac{a_1}{k} \leq x_{(k)} < \frac{a_2}{k^2} + \frac{a_1}{k} + \frac{1}{k^2}.$$

Denotaremos

$$A_2 = \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} > A_1$$

entonces

$$A_2 \leq x_{(k)} < A_2 + \frac{1}{k^2}, \tag{3.2}$$

se observa que $a_2 \leq k^2 \left(x_{(k)} - A_1\right) < k$, entonces $a_2 \leq k - 1$.

Supóngase que se ha definido $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ tales que

$$A_n = \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \frac{a_3}{k^3} + ... + \frac{a_n}{k^n}$$

y

$$A_n \leq x_{(k)} < A_n + \frac{1}{k^n},$$

donde $a_j \leq k - 1$ para todo $j = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Ahora considere que a_{n+1} es el máximo entero tal que

$$A_n + \frac{a_{n+1}}{k^{n+1}} \leq x_{(k)},$$

entonces

$$A_n + \frac{a_{n+1}}{k^{n+1}} \leq x_{(k)} < A_n + \frac{a_{n+1} + 1}{k^{n+1}}.$$

Sea $A_{n+1} = A_n + \frac{a_{n+1}}{k^{n+1}} > A_n$, entonces se tiene

$$A_{n+1} \leq x_{(k)} < A_{n+1} + \frac{1}{k^{n+1}}. \tag{3.3}$$

Por lo tanto queda definida por inducción, una secesión $(a_1, a_2, a_3...)$ tal que

$$A_{n+1} \leq x_{(k)} < A_n + \frac{1}{k^n} \tag{3.4}$$

donde

$$A_n = \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \frac{a_3}{k^3} + ... + \frac{a_n}{k^n} \tag{3.5}$$

Se observa que k esta en base 10. Queremos representarlo en base k entonces sería

$$k = 10_{(k)}$$

$$k^2 = 100_{(k)}$$

$$k^3 = 1000_{(k)}$$

$$\vdots$$

$$k^n = \underbrace{10\ldots0_k}_{n \quad ceros}$$

Entonces podemos redefinir (3.5) de la siguiente manera

$$A_n = \frac{a_1}{10_k} + \frac{a_2}{100_k} + \frac{a_3}{100_k} + ... + \frac{a_n}{\underbrace{10\ldots0_k}_{n \quad ceros}}. \tag{3.6}$$

Utilizando el teorema (2.1.1) se cumple de manera análoga

$$x_{(k)} = 0.a_1a_2a_3 \cdots = Sup(A_n). \tag{3.7}$$

3.2.1. Representación Binaria.

Ejemplo 3.2.1. *Expresar $x = \frac{1}{2}$ en su expansión binaria. Para ello el numerador y el denominador tienen que estar en dicha base.*

$x_{(2)} = \dfrac{1_{(2)}}{10_2}$, *tenemos*

$$x_{(2)} = \frac{1_{(2)}}{10_{(2)}} < \frac{10_{(2)}}{10_{(2)}} \qquad \therefore a_1 = 1$$

$$\frac{1_{(2)}}{10_{(2)}} + \frac{0_{(2)}}{100_{(2)}} \leq x_{(2)} < \frac{1_{(2)}}{10_{(2)}} + \frac{1_{(2)}}{100_{(2)}} \qquad \therefore a_2 = 0$$

$$\frac{1_{(2)}}{10_{(2)}} + \frac{0_{(2)}}{100_{(2)}} + \frac{0_{(2)}}{1000_{(2)}} \leq x_{(2)} < \frac{1_{(2)}}{10_{(2)}} + \frac{0_{(2)}}{100_{(2)}} + \frac{1_{(2)}}{1000_{(2)}} \qquad \therefore a_3 = 0$$

Lo que podemos concluir que $a_n = 0$, para todo $n > 1$. Por lo tanto la expansión binaria de $\dfrac{1}{2}$ es $x_{(2)} = 0.100...$

3.2.2. Representación Ternaria.

Ejemplo 3.2.2. *Expresar* $x = \frac{1}{4}$ *en su expansión ternaria. Para ellos el numerador y el denominador tienen que estar en dicha base.*

$x_3 = \dfrac{1_{(3)}}{11_{(3)}}$, *tenemos:*

Hallando a_1.

$$\frac{a_1}{10_{(3)}} \leq \frac{1_{(3)}}{11_{(3)}}$$

entonces

$$a_1 \leq \frac{10_{(3)} \cdot 1_{(3)}}{11_{(3)}} = \frac{10_{(3)}}{11_{(3)}} < 1.$$

Como a_1 *es el máximo entero. Entonces tendremos el siguiente resultado,*

$$\frac{0}{10_{(3)}} \leq \frac{1_{(3)}}{11_{(3)}} < \frac{1}{10_{(3)}} \quad \therefore \quad a_1 = 0.$$

Hallando a_2.

$$\frac{a_2}{100_{(3)}} + \frac{0}{10_{(3)}} \leq \frac{1_{(3)}}{11_{(3)}}$$

entonces

$$a_2 \leq \frac{100_{(3)} \cdot 1_{(3)}}{11_{(3)}} < 3.$$

Como a_2 *es el máximo entero. Entonces tendremos el siguiente resultado,*

$$\frac{2}{100_{(3)}} + \frac{0}{10_{(3)}} \leq \frac{1_{(3)}}{11_{(3)}} < \frac{0}{10_{(3)}} + \frac{3}{100_{(3)}} \quad \therefore \quad a_2 = 2.$$

Hallando a_3.

$$a_3 \leq 1000_{(3)} \left(\frac{1_{(3)}}{11_{(3)}} - \frac{2}{100_{(3)}} \right) = 1000_{(3)} \left(\frac{1_{(3)} \cdot 100_{(3)} - 22_{(3)}}{11_{(3)} \cdot 100_{(3)}} \right) =$$

$$= 1000_{(3)} \left(\frac{1_{(3)}}{1100_{(3)}} \right) = \frac{1000_{(3)}}{1100_{(3)}} < 1.$$

Como a_3 *es el máximo entero. Entonces tendremos el siguiente resultado,*

$$\frac{0}{1000_{(3)}}+\frac{2}{100_{(3)}}+\frac{0}{10_{(3)}}\leq\frac{1_{(3)}}{11_{(3)}}<\frac{0}{10_{(3)}}+\frac{2}{100_{(3)}}+\frac{1}{1000_{(3)}}\quad\therefore\quad a_3=0.$$

Hallando a_4.

$$\frac{a_4}{10000_{(3)}}+\frac{0}{1000_{(3)}}+\frac{2}{100_{(3)}}+\frac{0}{10_{(3)}}\leq\frac{1_{(3)}}{11_{(3)}}$$

entonces

$$a_4\leq 10000_{(3)}\left(\frac{1_{(3)}}{11_{(3)}}-\frac{2}{100_{(3)}}\right)=10000_{(3)}\left(\frac{1_{(3)}\cdot 100_{(3)}-22_{(3)}}{11_{(3)}\cdot 100_{(3)}}\right)=$$

$$=10000_{(3)}\left(\frac{1_{(3)}}{1100_{(3)}}\right)=\frac{10000_{(3)}}{1100_{(3)}}<3.$$

Como a_4 *es el máximo entero. Entonces tendremos el siguiente resultado,*

$$\frac{2}{10000_{(3)}}+\frac{0}{1000_{(3)}}+\frac{2}{100_{(3)}}+\frac{0}{10_{(3)}}\leq\frac{1_{(3)}}{11_{(3)}}<\frac{0}{10_{(3)}}+\frac{2}{100_{(3)}}+\frac{0}{1000_{(3)}}+\frac{3}{10000_{(3)}}\quad\therefore\quad a_4=2$$

Observamos que el proceso seguirá hasta el infinito, es decir: $x_2=0.020202\cdots=0.\widehat{02}$.

3.2.3. Representación Quinaria.

Ejemplo 3.2.3. *Expresar* $x=\frac{86}{125}$ *en su expansión quinario. Para ellos el numerador y el denominador tienen que estar en dicha base.*

$x_5=\dfrac{321_{(5)}}{1000_{(5)}}$, *tenemos:*

Hallando a_1.

$$\frac{a_1}{10_{(5)}}\leq\frac{321_{(5)}}{1000_{(5)}}$$

entonces

$$a_1\leq\frac{10_{(5)}\cdot 321_{(5)}}{1000_{(5)}}=\frac{3210_{(5)}}{1000_{(5)}}<4.$$

Como a_1 *es el máximo entero. Lo que resulta,*

$$\frac{3}{10_{(5)}} \leq \frac{321_{(5)}}{1000_{(5)}} < \frac{4}{10_{(5)}} \quad \therefore \quad a_1 = 3.$$

Hallando a_2.

$$\frac{a_2}{100_{(5)}} + \frac{3}{10_{(5)}} \leq \frac{321_{(5)}}{1000_{(5)}}$$

entonces

$$a_2 \leq 100_{(5)} \left(\frac{321_{(5)}}{1000_{(5)}} - \frac{3}{10_{(5)}} \right) = 100_{(5)} \left(\frac{3210_{(5)} - 3000_{(5)}}{1000_{(5)} \cdot 10_{(5)}} \right) =$$

$$= 100_{(5)} \left(\frac{210_{(5)}}{10000_{(5)}} \right) = \frac{21000_{(5)}}{10000_{(5)}} < 3.$$

Como a_2 *es el máximo entero. Lo que resulta,*

$$\frac{2}{100_{(5)}} + \frac{3}{10_{(5)}} \leq \frac{321_{(5)}}{1000_{(5)}} < \frac{3}{10_{(5)}} + \frac{3}{100_{(5)}} \quad \therefore \quad a_2 = 2.$$

Hallando a_3.

$$\frac{a_3}{1000_{(5)}} + \frac{2}{100_{(5)}} + \frac{3}{10_{(5)}} \leq \frac{321_{(5)}}{1000_{(5)}}$$

entonces

$$a_3 \leq 1000_{(5)} \left(\frac{321_{(5)}}{1000_{(5)}} - \frac{2}{100_{(5)}} - \frac{3}{10_{(5)}} \right) = 1000_{(5)} \left(\frac{321_{(5)} - 20_{(5)} - 300_{(5)}}{1000_{(5)}} \right) =$$

$$= 1000_{(5)} \left(\frac{1_{(5)}}{1000_{(5)}} \right) = 1_{(5)}.$$

Como a_3 *es el máximo entero. Lo que resulta,*

$$\frac{1}{1000_{(5)}} + \frac{2}{100_{(5)}} + \frac{3}{10_{(5)}} = \frac{321_{(5)}}{1000_{(5)}} < \frac{3}{10_{(5)}} + \frac{2}{100_{(5)}} + \frac{2}{1000_{(5)}} \therefore \quad a_3 = 1.$$

Generalizando el ejemplo (2.1.2) *para otras bases, se cumple que la representación* x_5 *sera* $0.321000\ldots$

4 Conclusiones y/o Sugerencias

1. El problema planteado fue de obtener una representación decimal de los números reales, logrando el objetivo.

2. Al investigar la existencia y unicidad de la representación decimal, se concluye que existe y es única.

3. Logramos generalizar la expansión de diferentes bases, llamado representación n-area. plantenado ejemplos basicos.

4. Despues de ya tener la representación decimal ahora podemos construir de una forma distinta los números reales como lo hizo Dedekind con sus cortaduras. Pero ello ya consiste en otro trabajo de investigación.

Bibliografía

[1] Lovaglia, A. R., Preston, G. C. (1966). *Foundations of Algebra and Analysis: An Elementary Approach*.

[2] Kirch, A. M. (1974). *Elementary Number Theory: A Computer Approach. Intext Educational Publishers.*

[3] Ore, O. (1988) *Number Theory and its History*. Courier Corporation.

[4] Dajani, K., Kraaikamp C. (2002) *Ergodic Theory of Numbers.*(Vol. 29). American Mathematical Soc.

[5] Niven, I. (2005) *Irrational Numbers*(Nº 11). Cambridge University Press.

[6] Le Veque, W. J. (1968) *Teoría Elemental de los Números Elementary theory of numbers.*

[7] Lima, E. L. (1991) *Curso de análisis matemático*. Edunsa.

[8] Hardy, G. H., Wright, E. M. (1979) *An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford, university Press.*

[9] Spivak, M. (1988) *Cálculo infinitesimal*. Reverté.