Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Existencia y unicidad de solución de una ecuación elíptica lineal con condición de frontera tipo Neumann no homogénea

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Dallana Dorila Reina CASTILLO LEÓN

ASESOR

Dra. María Natividad ZEGARRA GARAY

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Castillo, D. (2021). *Existencia y unicidad de solución de una ecuación elíptica lineal con condición de frontera tipo Neumann no homogénea*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Dallana Dorila Reina Castillo León
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	48332811
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	María Natividad Zegarra Garay
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09206994
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-3418-9185
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Gavino Aymituma Puma
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08025924
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	María Natividad Zegarra Garay
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09206994
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales(Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional.
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.056445 Longitud: -77.085994
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Julio 2021-Octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:10 horas del domingo 24 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Mg. Gavino Aymituma Puma (MIEMBRO) y la Dra. María Natividad Zegarra Garay (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada:
"**EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN ELIPTICA LINEAL CON CONDICIÓN DE FRONTERA TIPO NEUMANN NO HOMOGÉNEA**", presentado por la señorita **Bachiller Dallana Dorila Reina Castillo León**, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación **Sobresaliente,** con un calificativo promedio de **dieciocho (18).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que la participante **Bachiller Dallana Dorila Reina Castillo León** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 10:40 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE

Mg. Gavino Aymituma Puma
MIEMBRO

Dra. María Natividad Zegarra Garay
MIEMBRO ASESOR

AGRADECIMIENTO

A mi madre por su apoyo incondicional durante todos estos años, por ser la inspiración para alcanzar mis objetivos.

Índice

RESUMEN

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN ELÍPTICA LINEAL CON CONDICIÓN DE FRONTERA TIPO NEUMANN NO HOMOGÉNEA

Castillo León, Dallana Dorila Reina

2021

Asesor: Dra. María Natividad Zegarra Garay

Título obtenido: Licenciado en matemática

En el presente trabajo analizamos la existencia y unicidad de solución de una ecuación elíptica lineal con frontera tipo Neumann no homogénea debido a que tiene diversas aplicaciones en ingeniería y sobre todo en física. Esta ecuación describe principalmente fenómenos estacionarios, por ejemplo, la transferencia de calor estacionaria, elasticidad lineal, la ecuación de Poisson, etc.

Concretamente, plantearemos el siguiente problema elíptico lineal

$$(1)\begin{cases} -\nabla.(k\nabla u) + cu = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_D \\ \hat{n}.(k\nabla u) = g & \text{sobre } \partial\Omega_N \end{cases}$$

con sus respectivas asunciones $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega_N)$, y $k, c \in C^0(\overline{\Omega})$.

Asimismo, con el apoyo de los espacios de Sobolev y algunos de sus resultados, mostramos la existencia y unicidad de solución a traves del teorema de Lax-Milgram, el cual será previamente enunciado y demostrado via el teorema de Stampacchia.

Palabras claves: ecuación elíptica, existencia, unicidad, teorema de Lax-Milgram.

ABSTRACT

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTION OF A LINEAR ELLIPTICAL EQUATION NON-HOMOGENE NEUMANN-TYPE BOUNDARY CONDITION

Castillo León, Dallana Dorila Reina

2021

Adviser: Dra. María Natividad Zegarra Garay

Obtained title: Licenciado en matemática

In the present work we analyze the existence and uniqueness of solution of a linear elliptic equation with inhomogeneous Neumann-type boundary due to the fact that it has several applications in engineering and especially in physics. This equation mainly describes stationary phenomena, for example, stationary heat transfer, linear elasticity, Poisson's equation, etc.
Specifically, in this work we pose the following linear elliptic problem

$$(1)\begin{cases} -\nabla.(k\nabla u) + cu = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_D \\ \hat{n}.(k\nabla u) = g & \text{sobre } \partial\Omega_N \end{cases}$$

with their respective assumptions $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega_N)$, y $k, c \in C^0(\overline{\Omega})$.
Likewise, with the support of Sobolev spaces and some results, we show the existence and uniqueness of the solution through the Lax-Milgram theorem, which will be previously stated and proved via the Stampacchia theorem.

Keywords: elliptic equation, existence, uniqueness, Lax-Milgram theorem.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

Este proyecto tiene como objetivo demostrar la existencia de solución de un sistema elíptico lineal -con frontera no homogénea, de igual forma, la unicidad. Para tal objetivo, utilizaremos como herramienta el teorema de Lax-Milgram, el cual enunciamos y demostramos vía el teorema de Stampacchia.

La motivación de este trabajo es la ecuación estacionaria de advección-difusión, la cual describe la transformación o mezcla de dos o mas fluidos en un sistema físico debido a dos procesos: difusión y advección.

$$-\nabla.(k\nabla u) + \beta\nabla u + cu = f$$

donde el primer término del lado izquierdo corresponde a la difusión; el segundo, a la advección; el tercero, a la destrucción o producción del soluto(en caso de una reacción química), mientras que el término del lado derecho es una fuente externa. En este trabajo, se discutirá principalmente un modelo mas específico, precisamente

$$-\nabla.(k\nabla u) + cu = f$$

Asímismo, este trabajo está organizado como sigue: en el primer capítulo presentamos algunas definiciones preliminares y resultados que servirán para enunciar y demostrar el teorema de Lax-Milgram, para esto, hemos consultado el libro de H. Brezis [5] y el trabajo de M. Lopez. [2]. En el segundo capítulo, enunciamos y demostramos el teorema de Stampacchia y como consecuencia demostramos el teorema de Lax-Milgram. En el tercer capítulo, presentamos el problema elíptico lineal con frontera no homogénea, y mostramos la existencia y unicidad de solución gracias al mencionado teorema de Lax-Milgram, para esto hemos revisado L. A. Medeiros [4], H. Brezis [5] y Evans [3]. Finalmente, en el último capítulo mencionamos algunos ejemplos, casos particular, de nuestra ecuación elíptica, para esto hemos considerado S. Prudhomme [1] y Alexandre E.[7].

1.2. Planteamiento del problema

Los asuntos de nuestra investigación están estructurados de la manera siguiente

1.2.1. Determinación del problema

Uno de los resultados fundamentales de representación es el Teorema de Lax-Milgram, que resulta ser una herramienta fundamental dentro de las EDPs(Ecuaciones Diferenciales Parciales), pues permite establecer la existencia y unicidad de solución. En este sentido, el estudio de ecuaciones diferenciales parciales ha ayudado enormemente al entendimiento de algunos fenómenos, como, por ejemplo, ciertos tipos de fenómenos estacionarios, es decir, fenómenos que son independientes del tiempo y pueden ser descritos por ecuaciones de tipo:

$$Lu(x) = f(x)$$

donde L es un caso particular del operador elíptico de segundo orden, más precisamente:

$$(1)\begin{cases} -\nabla.(k\nabla u) + cu = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_D \\ \hat{n}.(k\nabla u) = g & \text{sobre } \partial\Omega_N \end{cases}$$

donde $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$.

En este trabajo, presentaremos una demostración del teorema de Lax-Milgram y gracias a este teorema podremos evidenciar la existencia y unicidad de solucion de nuestra ecuación elíptica (1).

1.2.2. Formulación del problema

1.2.2.1. Problema general

PG: ¿Sera posible encontrar una solución para el problema (1) y probar la unicidad de dicha solución?

1.2.2.2. Problemas específicos

PE1: ¿Será factible obtener una formulación varacional y por lo tanto poder definir una solución débil para el problema (1)?
PE2: ¿Será viable aplicar el teorema de Lax-Milgram para encontrar solución única al problema (1)?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Valernos del teorema de Lax-Milgram para demostrar la existencia y unicidad de la solución débil del problema (1).

1.3.2. Objetivos específicos

- Obtener una formulación varacional del problema (1).
- Aplicar el teorema de Lax-Milgram para demostrar la existencia y unicidad de solución del problema (1). Mas precisamente, demostraremos que el problema (1) tiene solución bajo las siguientes condiciones: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ o $n = 3$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega_N)$, y $k, c \in C^0(\overline{\Omega})$ con $k_{min}, k_{max}, c_{min}, c_{max} \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$0 < k_{min} \leq k(x) \leq k_{max} \quad \forall x \in \Omega \tag{1.1}$$

$$0 < c_{min} \leq c(x) \leq c_{max} \quad \forall x \in \Omega \tag{1.2}$$

- Mencionaremos algunos ejemplos de casos particulares de nuestro sistema que modelan un fenómeno físico.

1.4. Importancia y alcance de la investigación

La importancia es desde el punto de vista teórico, porque esta técnica de aplicación del teorema de Lax-Milgram, puede ser aplicada a otros problemas elípticos con operadores más generales que tengan propiedades análogas al operador que aparece en el probelma (1) y también con otros no lineales.

1.5. Limitaciones de la investigación

Se pretende aplicar un teorema de representación para mostrar la existencia y unicidad de solución para el problema (1).

1.6. Justificación

El teorema de Lax-Milgram es muy importante dentro del análisis funcional, así como también dentro de otras áreas, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales parciales elípticas, igualmente para el análisis de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Por otro lado, las ecuaciones diferenciales parciales elípticas se pueden encontrar con frecuencia en aplicaciones de ingeniería, fenómenos como transferencia de calor estacionaria, elasticidad lineal (por ejemplo: elasticidad lineal en una viga); en física, la ecuación de Laplace, el problema de la membrana que da lugar a la ecuación de Poisson, la ecuación de Helmholtz que es comúnmente encontrada en electromagnetismo. Es por ello, que las ecuaciones diferenciales parciales elípticas son de gran importancia, por lo que le dedicamos un estudio detallado a este problema. Asimismo, este problema es muy estudiado desde hace mucho tiempo a partir de varios enfoques, para dar algún tipo de información sobre la misma. Con este trabajo se pretende dar la información más relevante: presentar una demostración del teorema de Lax-Milgram y gracias a este teorema argumentar existencia y unicidad de solución de un sistema elíptico. Finalmente, a modo de ejemplo, mencionaré algunos casos particulares de este sistema.

Capítulo 2

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. Marco teórico

2.1.1. Preliminares

En esta primera subsección presentamos las definiciones necesarias y los principales resultados para la formulación y demostración del teorema de Stampacchia. Siendo pieza clave de este capítulo el teorema de la proyección sobre un convexo cerrado y el teorema de Representación de Riezs. Para este capítulo hemos estudiado H. Brezis [5] y E. Kreysig [8]. Es necesario mencionar que en todo este proyecto trabajaremos espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales.

2.1.1.1. Espacio de Banach

Definición 1 *(Espacio normado)*
Dado X un espacio vectorial. Una norma en X es una aplicación $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifica:

1. $\|x\| = 0$ *si, y solo si* $x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *y* $\forall x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X$

Al par $(X, \|.\|)$ llamaremos espacio normado.

Definición 2 *(Espacio normado completo)*
Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Decimos que X es completo si toda sucesion $(x_n)_{n\geq 1}$ de Cauchy en X converge en X.

Definición 3 *Un espacio de Banach es un espacio normado completo.*

Ejemplos
Dado un $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

1. El conjunto $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$ es un espacio normado completo, con la norma
$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$
para todo $p \geq 1$

2. El conjunto $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \; |f(x)| \leq M$ c.t.p en $\Omega\}$ es un espacio normado completo, con la norma
$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{M : |f(x)| \leq M \text{ c.t.p en } \Omega\}$$

2.1.1.2. Espacio de Hilbert

Definición 4 *(Espacio con producto interno)*
Dado un espacio vectorial X. La función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un producto interno si:

1. $\langle x, x \rangle = 0$ *si, y solo si* $x = 0$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \qquad \forall x, y \in X$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \qquad \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle \qquad \forall x, y, z \in X$

Al par $(X, \langle , \rangle)$ llamaremos espacio con producto interno.

Todo espacio con producto interno $(X, \langle , \rangle)$ es un espacio normado $(X, \|.\|)$, con la norma que proviene del producto interno
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

De ahora en adelante, escribiremos X en lugar de $(X, \langle , \rangle)$ o $(X, \|.\|)$.

Definición 5 *(Espacio con producto interno completo)*
Decimos que $(X, \langle , \rangle)$ es un espacio completo si cualquier sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de Cauchy en X es convergente en X con la norma que proviene del producto interno.

Definición 6 *Un espacio con producto interno completo será llamado espacio de Hilbert.*

Ejemplo
Dado un $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. El conjunto $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty\}$ es un espacio con producto interno, con

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

y es completo con la norma que proviene de su producto interno

$$\|f\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

2.1.1.3. Operador lineal

Definición 7 *(Operador Lineal)*
Sea X e Y dos espacios vectoriales. Un operador lineal es una aplicación $T : X \longrightarrow Y$ tal que

- $T(x + y) = T(x) + T(y) \qquad \forall x, y \in X$
- $T(\lambda x) = \lambda T(x) \qquad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Si $Y = \mathbb{R}$, entonces el operador lineal será llamado funcional lineal.

Definición 8 *(Operador lineal acotado)*
Sea X e Y dos espacios normados. Una transformación u operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ es acotado, siempre que exista una constante $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \qquad \forall x \in X$$

De ahora en adelante, usaremos $\|.\|$ en lugar de $\|.\|_X$, salvo algunas excepciones. También, si $Y = \mathbb{R}$ entonces T es llamado funcional lineal o simplemente funcional.

Teorema 1 *Dado un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *T es un operador acotado.*
2. *T es un operador continuo.*
3. *T es un operador continuo en 0.*

Dado un espacio X normado, definimos el espacio de los funcionales lineales acotados:

$$X^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} |\text{ f es un funcional acotado}\}$$

El conjunto X^* es un espacio vectorial conocido como el dual topológico de X. A partir de ahora H denotará un espacio de Hilbert.
Ahora presentamos algunos resultados preliminares que servirán de apoyo para demostrar el Teorema de Stampacchia. Iniciamos con un teorema que será ingrediente fundamental en la demostracion del teorema de Stampacchia. Asímismo, este puede puede ser encontrado en Brezis [5], teorema V.5, pág 81.

Teorema 2 *(Teorema de representación de Riesz-Fréchet)*
Para todo $f \in H^*$, existe un único $u_0 \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u_0, u\rangle \qquad \forall u \in H$$

Además se verifica que $||f||_{H^*} = ||u_0||_H$.

El teorema a seguir puede ser encontrado en Brezis [5], teorema V.2, pág 79.

Teorema 3 *(Teorema de la proyección sobre un convexo cerrado)*
Sea $K \subset H$ un convexo, cerrado no vacío. Entonces para cualquier $u \in H$, existe un único $u_0 \in K$ tal que

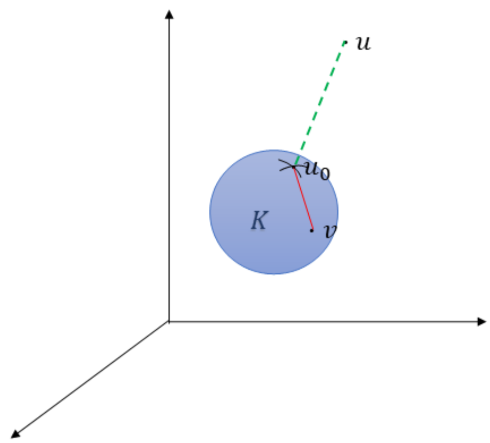
$$|u - u_0| = \min_{v\in K} |u - v| \tag{2.1}$$

Mas aún, u_0 se caracteriza por:

$$\begin{cases} u \in K \\ \langle u - u_0, v - u_0\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.2}$$

Denotamos $u_0 = P_K u$, y llamaremos la proyección de u sobre K.

Figura 2.1: Proyección de u sobre K



Observación Por el teorema 2: para cada $u \in H$ existe un único $u_0 \in K$, conlleva de forma natural a definir $P_K : H \longrightarrow K$ como una aplicación de H en K.

Proposición 1 *Dado $K \subset H$ un convexo, cerrado no vacío, se verifica*

$$|P_K u_1 - P_K u_2| \leq |u_1 - u_2| \qquad \forall u_1, u_2 \in H$$

Prueba:
De la caracterización (1.2) tenemos

$$\langle u_1 - P_K u_1, v - P_K u_1 \rangle \leq 0 \qquad \forall v \in K \tag{2.3}$$

$$\langle u_2 - P_K u_2, v - P_K u_2 \rangle \leq 0 \qquad \forall v \in K \tag{2.4}$$

Entonces, reemplazando $v = P_K u_2$ en (1.3) y $v = P_K u_1$ en (1.4), y sumando ambas desigualdades obtenemos

$$\langle u_1 - P_K u_1, P_K u_2 - P_K u_1 \rangle + \langle u_2 - P_K u_2, P_K u_1 - P_K u_2 \rangle \leq 0$$

Resolviendo la suma tenemos

$$|P_K u_1 - P_K u_2|^2 = \langle P_K u_1 - P_K u_2, P_K u_1 - P_K u_2 \rangle \leq \langle u_1 - u_2, P_K u_1 - P_K u_2 \rangle$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos el resultado.

2.1.2. Teorema de Lax-Milgram via el teorema de Stampacchia

En este capítulo presentamos la herramienta fundamental para demostrar la existencia y unicidad de nuestro problema elíptico lineal. Mas precisamente, demostraremos los teoremas de Samtapacchia y Lax-Milgram. Antes, daremos las siguientes definiciones.

Definición 9 *Una aplicación $a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, si es lineal en cada argumento, es decir*

$$a(\alpha u + w, v) = \alpha a(u,v) + a(w,v) \qquad \forall u,v,w \in H, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$a(u, \alpha v + w) = \alpha a(u,v) + a(u,w) \qquad \forall u,v,w \in H, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Definición 10 *Una forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ es*

- ***Continua** si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \qquad \forall u,v \in H$$

- ***Coerciva** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$|a(u,u)| \geq \alpha\|u\|^2 \qquad \forall u \in H$$

2.1.2.1. Teorema de Stampacchia

Antes de enunciar el teorema de Stampacchia, debemos recordar el siguiente teorema, para mas detalle sobre el teorema a seguir revisar Sotomayor [6].

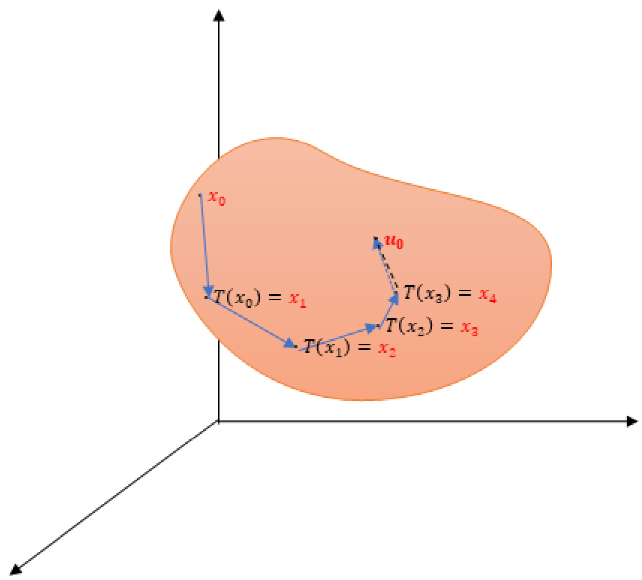
Teorema 4 *(Teorema del punto fijo de Banach)*
Dado un espacio métrico completo X y sea una apliación $T : X \longrightarrow X$ tal que

$$d(Tu_1, Tu_2) \leq kd(u_1,u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in X, 0 < k < 1$$

Entonces T tiene un único punto fijo; es decir, existe un único $u_0 \in X$ tal que $Tu_0 = u_0$.

Ahora si estamos preparados para enunciar y demostrar el teorema.

Figura 2.2: Bosquejo del teorema del punto fijo de Banach.



Teorema 5 *(Teorema de Stampacchia)*
Sea $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal, continua y coerciva. Sea K convexo, cerrado y no vacío. Así, para todo $f \in H^*$, existe $u_0 \in K$ único tal que

$$f(v - u_0) \leq a(u_0, v - u_0) \qquad \forall v \in K$$

Prueba:
Para $f \in H^*$, por el teorema 2, existe un único $w_0 \in H$ tal que

$$f(u) = \langle w_0, u \rangle \qquad\qquad \forall u \in H \tag{2.5}$$

Para cada $v \in H$ fijo, definimos una aplicación

$$\begin{aligned} \phi : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi_v(u) &= \boldsymbol{a}(v, u) \end{aligned}$$

que resulta ser un funcional lineal continuo, pues

$$|\phi_v(u)| = |\boldsymbol{a}(v,u)| \leq \underbrace{C\|v\|}_{C_1} \|u\| = C_1\|u\| \qquad\qquad \forall u \in H$$

Entonces para $\phi_v \in H^*$, nuevamente por el teorema 2, existe un único Tv tal que

$$\phi_v(u) = \langle Tv, u\rangle \qquad \forall u \in H$$

Luego por la definición de ϕ_v, tenemos que

$$\boldsymbol{a}(v,u) = \langle Tv, u\rangle \qquad \forall u \in H \tag{2.6}$$

es decir, se ha probado que la forma bilineal $\boldsymbol{a}$ se puede expresar como un producto interno afectado por T, que resulta ser un operador lineal continuo; efecto, por la linealidad de $\boldsymbol{a}$ tenemos que T es lineal y por la continuidad de $\boldsymbol{a}$ obtenemos que

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu\rangle = \boldsymbol{a}(u, Tu) \leq C\|u\|\|Tu\|$$

$$\Longrightarrow \qquad \|Tu\| \leq C\|u\| \qquad \forall u \in H \tag{2.7}$$

Por otro lado, por la coercividad de $\boldsymbol{a}$ tenemos que

$$\langle Tu, u\rangle = \boldsymbol{a}(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \qquad \forall u \in H \tag{2.8}$$

Por otro lado, recordemos que el objetivo es probar que para cada $f \in H^*$ existe un único $u_0 \in H$ tal que

$$f(v-u_0) \leq \boldsymbol{a}(u_0, v-u_0) \qquad \forall v \in K \tag{2.9}$$

De (2.1) y (2.2) tenemos que (2.5) es equivalente a

$$\langle w_0, v-u_0\rangle \leq \langle Tu_0, v-u_0\rangle \qquad \forall v \in K$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \lambda\langle w_0, v-u_0\rangle \leq \lambda\langle Tu_0, v-u_0\rangle \qquad \forall v \in K, \lambda > 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \langle \lambda w_0 - \lambda Tu_0 + u_0 - u_0, v-u_0\rangle \leq 0 \qquad \forall v \in K, \lambda > 0$$

Esto equivale, por el teorema 3 (1.2), a demostrar que existe un único $u_0 \in H$ tal que

$$P_K(\lambda w_0 - \lambda Tu_0 + u_0) = u_0 \qquad \lambda > 0$$

Para esto, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} F : H &\longrightarrow H \\ F(u) &= P_K(\lambda w_0 - \lambda T u + u) \end{aligned}$$

Entonces debemos probar que existe un único $u_0 \in H$ tal que $F(u_0) = u_0$, que es lo mismo que $P_K(\lambda w_0 - \lambda T u_0 + u_0) = u_0$. Esto quiere decir, por el teorema del punto fijo de Banach, que debemos probar

$$\|F(u) - F(v)\| \leq k\|u - v\| \qquad \forall u, v \in H, 0 < k < 1$$

En efecto, por la desigualdad de la proposición 1, tenemos

$$\|F(u) - F(v)\| = \|P_K(\lambda w_0 - \lambda T u + u) - P_K(\lambda w_0 - \lambda T v + v)\| \leq \|u - v - \lambda(Tu - Tv)\|$$

$$\Longrightarrow \qquad \|F(u) - F(v)\|^2 \leq \|u - v\|^2 - 2\lambda\langle T(u - v), u - v\rangle + \lambda^2\|T(u - v)\|^2$$

Y por (2.3) y (2.4), tenemos

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|^2 &\leq \|u - v\|^2 - 2\alpha\lambda\|u - v\|^2 + \lambda^2 C^2\|u - v\|^2 \\ &\leq (1 - 2\alpha\lambda + \lambda^2 C^2)\|u - v\|^2 \end{aligned}$$

Debemos escoger un λ tal que

$$\begin{aligned} & 1 - 2\alpha\lambda + \lambda^2 C^2 < 1 \\ \Longleftrightarrow \qquad & \lambda^2 C^2 < 2\alpha\lambda \\ \Longleftrightarrow \qquad & \lambda < \frac{2\alpha}{C^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para λ_0 conveniente, obtenemos que F tiene un único punto fijo, lo que quiere decir que existe un único $u_0 \in H$ tal que

$$F(u_0) = P_K(\lambda w_0 - \lambda T u_0 + u_0) = u_0$$

Así, el teorema esta probado. ■

2.1.2.2. Teorema de Lax-Milgram

Corolario 1 *(Teorema de Lax-Milgram)*
Sea $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal continua y coerciva. Así, para todo $f \in H^*$, existe $u_0 \in H$ único tal que

$$f(u) = a(u_0, u) \qquad \forall u \in H$$

Prueba:
Asumiendo $K = H$, pues H es un convexo, cerrado y no vacío.
Por el teorema de Stampacchia, tenemos que para cada $f \in H^*$ existe un único $u_0 \in H$ tal que

$$f(v - u_0) \leq a(u_0, v - u_0) \qquad \forall v \in H$$

en particular para $v = u_0 + \tau u$ donde $\tau \in \mathbb{R}$

$$f(\tau u) \leq a(u_0, \tau u) \qquad \forall u \in H$$

Para $\tau = 1$ y $\tau = -1$, obtenemos respectivamente

$$f(u) \leq a(u_0, u) \qquad \wedge \qquad f(u) \geq a(u_0, u)$$

Por lo tanto, $f(u) = a(u_0, u)$ para todo $u \in H$. ■

2.1.3. Ecuación elíptica con frontera no homogénea

En esta subsección se desarrolla el objetivo principal de este trabajo. Para desarrollar este capítulo de forma adecuada será necesario precisar de los espacios de Sobolev y de algunos de sus importantes resultados como la desigualdad de Poincaré y el resultado del operador trazo. Las demostraciones de los teoremas que enunciamos aquí pueden ser encontradas en L. A. Medeiros [4] y Evans [3].

2.1.3.1. Espacios de Sobolev

Definición 11 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Definimos el espacio*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \ \overline{\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}} \ \text{ es compacto } \}$$

El conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ es denominado el espacio de las funciones de prueba.

Observación:

La cerradura del espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ es $L^2(\Omega)$, es decir, $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$.

Definición 12 *(Derivada débil en $L^2(\Omega)$)*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Diremos que $u \in L^2(\Omega)$ tiene derivada parcial débil si existe un $v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ tal que

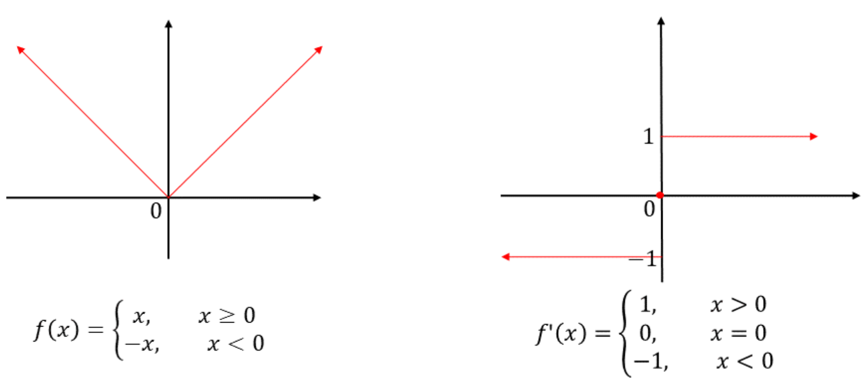
$$\int_\Omega u(x)\frac{d\varphi(x)}{dx_i}dx = (-1)\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, ..., n$$

Denotaremos $v(x) := \dfrac{du(x)}{dx_i}$.

Observación:

- La derivada débil generaliza a la derivada clásica. Es decir, si una función tiene derivada derivada clasica entonces necesariamente está tiene derivada débil y ambas derivadas conínciden, sin embargo no ocurre la recíproca. Por ejemplo, la función valor absoluto tiene derivada en el sentido débil, mas no en el sentido clásico; este ejemplo se puede ver en Evans [3], capítulo 5.

Figura 2.3: Derivada del valor absoluto en el sentido débil.



- Sea $u \in L^2(\Omega)$. Si existe $\dfrac{du(x)}{dx_i}$, no necesariamente satisface que $\dfrac{du(x)}{dx_i} \in L^2(\Omega)$

En vista de está última observación, definimos el siguiente espacio.

Definición 13 *(Espacio de Sobolev)*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. El espacio de Sobolev está definido

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \quad \frac{du(x)}{dx_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, ..., n\}$$

Observación:

- El espacio $H^1(\Omega)$ es de Hilbert cuyo producto interno es

$$\langle u, v\rangle_1 = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{du(x)}{dx_i}\frac{dv(x)}{dx_i}dx$$

  Es decir, $\langle u, v\rangle_1 = \langle u, v\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\frac{du}{dx_i}, \frac{dv}{dx_i}\rangle = \langle u, v\rangle + \langle\nabla u, \nabla v\rangle$

- Se define $H_0^1(\Omega)$ como la cerradura del espacio $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma de $H^1(\Omega)$, y se denota como $H_0^1 := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$. En Evans [3], capítulo 5, se caracteriza $H_0^1(\Omega)$ en la siguiente forma:

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \quad u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega\}$$

2.1.3.2. Teorema del operador trazo

En esta subsección enunciamos el teorema del trazo y teorema de la divergencia, cuyas demostraciones se pueden encontrar en Evans [3], Medeiros [4] y Elon Lima [8] respectivamente.

Teorema 6 *Dado un $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado bien regular, entonces existe una constante $K > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq K\|u\|_1 \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Por último, recordemos el siguiente resultado.

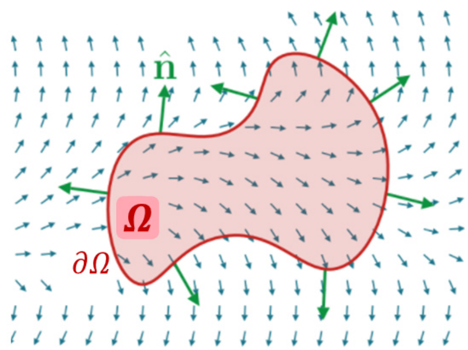
Teorema 7 *(Teorema de la divergencia)*

Sea un $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado y sea $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo suave. Entonces

$$\int_{\Omega} \nabla F(x) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \hat{n}.F(x) dx$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal unitario a la superficie.

Figura 2.4: Teorema de la divergencia



Para finalizar esta sección mostramos algunos ejemplos de nuestro modelo elíptico como: la ecuación de la capa límite, la ecuación de elasticidad lineal, la ecuación de transferencia de calor estacionaría y la ecuación de Poisson.

2.2. Antecedentes de estudio

El teorema de Lax-Milgram es uno de los pilares del análisis funcional. Este teorema aparece de la indagación de las ecuaciones en derivadas parciales, mas precisamente, aflora como un lema, una herramienta para una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico. Sin embargo, hoy por hoy, tiene gran relevancia como teorema de representación dentro del análisis funcional. La demostración que presentamos en este trabajo está basada en H. Brezis [2], donde se puede ver el enunciado del teorema como un corolario del teorema de Stampacchia. Asimismo, una demostración del teorema de Lax-Milgram vía el teorema de Hahn-Banach se puede encontrar en la tesis de licenciatura de M. López Pérez[3] donde además se poder ver sus generalizaciones y algunas aplicaciones interesantes. Por otro lado, hace dos siglos atrás aproximadamente, los sistemas elípticos aparecen casi por primera vez con la publicación de la ecuación de Poisson. A partir de ese momento se iba generalizando las ecuaciones hasta llegar al operador elíptico comúnmente conocido. Sin embargo, en nuestro caso, solo analizamos un caso particular del operador elíptico, es decir, solo estudiaremos el sistema:

$$(1)\begin{cases} -\nabla.(k\nabla u) + cu = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_D \\ \hat{n}.(k\nabla u) = g & \text{sobre } \partial\Omega_N \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ o $n = 3$, un subconjunto abierto, acotado y Lipschitz, con frontera compuesta por dos partes $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$. Y las funciones conocidas f, g, c, k satisfacen las condiciones mencionadas en los objetivos específicos. Se puede ver en Serge Prudhomme [1], un estudio sobre la formulación débil y fuerte de este sistema para resolverla utilizando el método de elementos finitos, también se encuentra algunos casos particulares de este sistema, como, por ejemplo:

Elasticidad lineal

$$-\nabla(EA\nabla u) = \rho g A$$

donde u es el desplazamiento o deformación de una viga, A es el área de la sección transversal y E es el modulo de Young.

Transferencia de Calor Estacionaria

$$-\nabla(k\nabla\theta) = q(x)$$

donde θ es la temperatura de una viga de longitud L, k es la conductividad térmica y q(x) es la fuente de calor.

También, en H. Brezis [2] se puede ver la existencia y unicidad de la ecuación de Sturm-Liuville mediante el teorema de Lax-Milgram. Finalmente, para los preliminares de mi trabajo me he basado en Czenky, A. L [6] y en H. Brezis [2] donde se encuentra la teoría de espacios de Hilbert y sus resultados en el espacio L^p; en L. C. Evans [4] y L. A. Medeiros [5] donde se encuentra la teoría de espacios de Sobolev y sus propiedades.

2.3. Bases teóricas

Se logra enunciar y demostrar el teorema de Lax-Milgram gracias a las siguientes definiciones:
Espacio de Hilbert: Decimos que el espacio vectorial $(H, \langle , \rangle)$, es un espacio de Hilbert, si es completo con la normal asociada a su producto interno.
Forma bilineal: Una forma bilineal es una aplicación $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ que es lineal en sus dos argumentos.
Forma bilineal acotada: Una forma bilineal a es acotada siempre que exista una constante $c > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq c \parallel u \parallel\parallel v \parallel \qquad \forall u, v \in H$$

Forma bilineal coerciva: Una forma bilineal a es coerciva siempre que exista una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \alpha \parallel u \parallel^2 \qquad \forall u \in H$$

De la misma, logramos formular nuestro sistema elíptico lineal gracias a las siguientes definiciones:
Espacio de Hilbert: Dado un $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el p.i(producto interno).

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx \qquad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

Derivada débil: Dado un $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Decimos que $u \in L^2(\Omega)$ tiene derivada débil, si existe un $v \in L^2(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega u(x)\frac{d\varphi(x)}{dx_i}dx = (-1)\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, ..., n$$

Espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$: Dado un $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ está definido:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \quad \frac{du(x)}{dx_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, ..., n\}$$

Así, de acuerdo con el desarrollo previo al teorema de Lax-Milgram y su aplicación hemos basamos en ramas como Análisis Funcional, Topología y Espacios de Sobolev.

Capítulo 3

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis general

HG: Es posible encontrar única solución para el problema (1).

3.1.2. Hipótesis específicas

PE1: Es factible obtener una formulación varacional y por lo tanto poder definir una solución débil para el problema (1).
PE2: Es viable aplicar el teorema de Lax-Milgram para encontrar solución al problema (1).

3.2. Variables

La variable en nuestra investación es la función u que aparece en el problema (1).

3.3. Operacionalización de variables

En el resultado de existencia y unicidad de soluciones para el problema (1), se ha utilizado la herramienta de Lax-Milgram, para esto se ha realizado la formulación varacional del problema (1) y se ha rescrito de la siguiente forma.

$$a(u,v) = \int_\Omega k\nabla u \nabla v + \int_\Omega cuv \quad \text{y} \quad F(v) = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega_N} gv$$

Capítulo 4

METODLOGÍA

4.1. Área de estudio

Nuestro área de estudio está dentro de el desemvolvimiento de las ecuaciones diferenciales parciales. Mas especificamente, hemos utilizado las herramientas del análisis funcional como el teorema de Lax-Milgram y sus preliminares, teoría de la medida como los espacios $L^2(\Omega)$, y los espacios de Sobolev como los espacios $H^1(\Omega)$ y sus resultados. Para esto, hemos consultado los libros de Evans [3], Brezis H. [1], A. Medeiros [4] y algunos libros más que nos han servido de referencia y complemento. Asimismo, nuestro libro de cabezera a sido Prudhomme [1].

4.2. Diseño de investigación

En lo correspondiente a esta sección, diseño de investigación, el presente trabajo está restingido a un diseño de tipo no experimental.

Capítulo 5

RESULTADOS

Problema elíptico lineal con frontera no homogénea

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ o $n = 3$, un subconjunto abierto, acotado y Lipschitz, con frontera compuesta por dos partes $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$.

$$(1) \begin{cases} -\nabla.(k\nabla u) + cu = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_D \\ \hat{n}.(k\nabla u) = g & \text{sobre } \partial\Omega_N \end{cases}$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal exterior unitario de la frontera. Además $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega_N)$, y $k, c \in C^0(\overline{\Omega})$ con $k_{min}, k_{max}, c_{min}, c_{max} \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$0 < k_{min} \leq k(x) \leq k_{max} \quad \forall x \in \Omega \tag{5.1}$$

$$0 < c_{min} \leq c(x) \leq c_{max} \quad \forall x \in \Omega \tag{5.2}$$

Definimos el siguiente subespacio

$$V = \{u \in H^1(\Omega) \mid \quad u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega_D\}$$

Por simplicidad, denotaremos $\displaystyle\int_\Omega u(x)dx = \int_\Omega u$. Ahora, para saber que es solución para la ecuación (1), introducimos la siguiente definición:

Definición 14 *(Solución débil)*
Decimos que $u \in V$ es una solución débil del problema (1) si satisface la siguiente igualdad

$$\int_\Omega k\nabla u\nabla v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega_N} gv \tag{5.3}$$

para todo $v \in V$.

5.1. Existencia y unicidad de solución

Teorema 8 *El problema (1), posee una única solución.*

Demostración:
Primeramente, gracias a la continuidad del operador trazo(Teorema 6) se obtiene sin dificultad que el subespacio $V \subset H^1(\Omega)$ es cerrado, por lo que V es un espacio de Hilbert.
Motivación: Multiplicando $v \in V$ en la primera ecuación de (1)

$$-\nabla.(k\nabla u)v + cuv = fv$$

Integrando

$$-\int_\Omega \nabla.(k\nabla u)v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fg \tag{5.4}$$

Por otro lado, recordando $\nabla[(k\nabla u)v] = \nabla.(k\nabla u)v + (k\nabla u).\nabla v$ e integrando, obtenemos

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \nabla.(k\nabla u)v &= \int_\Omega (k\nabla u).\nabla v - \int_\Omega \nabla[(k\nabla u)v] \\
&= \int_\Omega (k\nabla u).\nabla v - \int_{\partial\Omega} \hat{n}.((k\nabla u)v) \\
&= \int_\Omega (k\nabla u).\nabla v - \left(\int_{\partial\Omega_N} \underbrace{\hat{n}.(k\nabla u)}_{g} v + \int_{\partial\Omega_D} \hat{n}.(k\nabla u)v\right) \qquad (5.5) \\
&= \int_\Omega (k\nabla u).\nabla v - \int_{\partial\Omega_N} gv \\
&= \int_\Omega (k\nabla u).\nabla v - \int_{\partial\Omega_N} gv
\end{aligned}$$

Reemplazando (3.4) en (3.5), obtenemos

$$\int_\Omega k\nabla u\nabla v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fg + \int_{\partial\Omega_N} gv$$

Recordemos que deseamos encontrar un único $u \in V$ tal que satisfaga (3.3).
Definimos la aplicación a

$$\begin{aligned} a : V \times V \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a(u,v) = & \int_\Omega k\nabla u\nabla v + \int_\Omega cuv \end{aligned}$$

y también definimos

$$\begin{aligned} F : V \longrightarrow & \mathbb{R} \\ F(v) = & \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega_N} gv \end{aligned}$$

Por la linealidad de la integral y de la gradiente, se prueba sin dificultad que $a(u,v)$ es una forma bilineal, y de la misma forma que F es un funcional lineal.

- *Afirmación 1:* $a(u,v)$ es continua.

En efecto,

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left|\int_\Omega k\nabla u\nabla v + \int_\Omega cuv\right| \\ &\leq \int_\Omega |k||\nabla u\nabla v| + \int_\Omega |c||uv| \\ &\leq k_{max}\int_\Omega |\nabla u\nabla v| + c_{max}\int_\Omega |uv| \\ &\leq K\left(\int_\Omega |\nabla u\nabla v| + \int_\Omega |uv|\right) \qquad \text{donde} \quad K = \text{máx}\{k_{max}, c_{max}\} \end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)|^2 &\leq K^2 \left(\int_\Omega |\nabla u \nabla v| + \int_\Omega |uv| \right)^2 \\
&= K^2 \left[\left(\int_\Omega |\nabla u \nabla v| \right)^2 + 2 \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| \int_\Omega |u||v| + \left(\int_\Omega |uv| \right)^2 \right] \\
&\leq K^2 \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 + 2 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u|^2 \int_\Omega |v|^2 \right)^{1/2} + \int_\Omega |u|^2 \int_\Omega |v|^2 \right] \\
&\leq K^2 \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |v|^2 \int_\Omega |v|^2 + \int_\Omega |u|^2 \int_\Omega |v|^2 \right] \\
&= K^2 \left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 \right) \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 + |v|^2 \right) \right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
|a(u,v)| \leq K \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 + |v|^2 \right)^{1/2} = K\|u\|_1 \|v\|_1
$$

Luego a es continua.

- *Afirmación 2:* $a(u,v)$ es coerciva.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega k|\nabla u|^2 + c|u|^2 \\
&\geq \int_\Omega k_{min}|\nabla u|^2 + c_{min}|u|^2 \\
&\geq M \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 \right) \qquad \text{donde} \quad M = \text{mín}\{k_{min}, c_{min}\} \\
&= M\|u\|_1^2
\end{aligned}
$$

Luego a es coerciva.

- *Afirmación 3:* F es un funcional lineal continuo.

$$
\begin{aligned}
|F(u)| = \left| \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega_N} gv \right| &\leq \int_\Omega |f||v| + \int_{\partial\Omega_N} |g||v| \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_{\partial\Omega_N} |g|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega_N} |v|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|f\|\|v\| + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_N)}\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_N)}
\end{aligned}
$$

Y por el teorema 6. y por la desigualdad $\|v\| \leq \|v\|_1$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&\leq \|f\|\|v\|_1 + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_N)}(C\|v\|_1) \\
&\leq \underbrace{\left(\|f\| + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_N)}C\right)}_{C_1} \|v\|_1
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad |F(v)| \leq C_1\|v\|_1
$$

por lo cual F resulta ser un funcional continuo.

En consecuencia, por el teorema de Lax-Milgram tenemos que existe un único $u \in V$ tal que

$$
a(u, v) = F(v) \qquad \forall v \in V
$$

Es decir, existe un único $u \in V$, tal que

$$
\int_\Omega k\nabla u.\nabla v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega_N} gv \qquad \forall v \in V
$$

■

Capítulo 6

DISCUSIÓN

6.1. Contrastación de hipótesis con los resultados

- **En relación a la hipótesis genetal**
  HG: La respuesta a esta pregunta a sido afirmativa, ya que se ha utilizado el teorema de Lax-Milgram y para esto fue necesario la revisión exhaustiva de la bibliografía relacionada a las ecuaciones diferenciales parciales.

- **En relación a la hipótesis específica 1**
  H.E1: En efecto, para encontrar la formulación varacional se utilizó tecnicas multiplicativas.

- **En relación a la hipótesis específica 2**
  H.E2: Efectivamente, hemos utilizado el teorema de Lax-Milgram para encontrar un única solución para el problema (1) usando las herramientas del análisis funcional, las cuales pueden ser encontradas en Brezis [5] y Evans [3].

6.2. Conclusiones

- El teorema de Lax-Milgram es una herramienta fundamental para demostrar la existencia y unicidad de solución de ecuaciones en general de tipo coercivo, ya sea elíptico o parabólico.

- Se puede demostrar el teorema de Lax-Milgram sin pasar por el teorema de Stampacchia, para esto ver H. Brézis [5].
- Nuestro ecuación elíptica del capítulo 3 es un sistema general que sirve para modelos mas específicos como los modelos que se vió anteriormente.
- Las funciones k y c que aparecen en el capítulo 3, mas precisamente en las condiciones del sistema elíptico, se pueden debilitar, es decir, podemos asumir que dichas funciones estan en $L^\infty(\Omega)$.
- Nuestro sistema puede ser generalizado, agregando el término advectivo, para esto ver Alexandre E.[6], pag 111, capítulo 3. problemas coercivos.

6.3. Recomendaciones

En esta sección mostramos algunas ejemplos de nuestro modelo elítico como: la ecuación de la capa límite, ecuación de elasticidad lineal, ecuación de transferencia de calor estacionaria y la ecuación de Poisson.

- **Capa Limite**
  Un cuerpo que este inmerso en un flujo experimenta una fuerza resultante debido a la acción entre el flujo y el cuerpo. La magnitud de estas fuerzas dependerá de la forma que tome el flujo alrededor del cuerpo y por lo tanto de la forma del cuerpo, de las condiciones del flujo y de la posición relativa del cuerpo con respecto al flujo. Se denomina capa límite a la región alrededor de un cuerpo en la cual los efectos viscosos no son despreciables. Dado un abierto Ω. La forma de una capa límite se puede modelar por la ecuación

$$\begin{cases} -\nabla.(\epsilon\nabla v) + v = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_D \\ -\epsilon\nabla v = p & \text{sobre } \partial\Omega_N \end{cases}$$

  Donde v es la deformación de la capa límite, p es la presión, f una fuerza externa y ϵ es el espesor de la capa límite. Asumiendo $\epsilon = k$ constante, $c = 1$ y $g = -p$ obtenemos que la ecuación de la capa límite, a través de nuestro sistema elíptico lineal, tiene solución y esta es única. Para mas detalles revisar Anzoátegui [9].

- **Elasticidad Lineal**
  Asumiendo una viga vertical $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = r, 0 \leq z \leq L\}$, área transversal A, módulo de Young E, sujeta a una presión P y una densidad ρ de fuerza gravitacional g. Entonces el desplazamiento o deformación $u = u(x)$ de la viga por efecto de la presión P, la densidad del material ρ y por la fuerza gravitacional g, está gobernada por la ecuación

$$\begin{cases} -\nabla(EA\nabla u) = \rho g A & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u = 0 & \text{sobre } z = 0 \\ EA\nabla u = -P & \text{sobre } z = L \end{cases}$$

  Entonces asumiendo $EA = k$, $-\rho g A = f$, $c = 0$ y $g = -P$ obtenemos que la ecuación de elasticidad lineal, a través de nuestro sistema elíptico lineal, tiene solución y esta es única. Para mas detalle revisar Alexandre E.[6].

- **Transferencia de calor estacionaria**
  Para esto consideremos una viga horizontal $\Omega = \{(x,y,z) : y^2 + z^2 = r, 0 \leq x \leq L\}$, con temperatura cero en un extremo y en el otro una variación de temperatura, además esta sometida al calor $q(x)$(fuente) a lo largo de la viga. Asumiendo que las paredes de la viga son adiabáticas(no hay flujo de calor) y k la conductividad térmica por unidad de volumen. La temperatura es uniforme en cada sección transversal y está modelado por la ecuacíon

$$\begin{cases} -\nabla(k\nabla\theta) = q & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ \theta = 0 & \text{sobre } x = 0 \\ k\nabla\theta = 0 & \text{sobre } x = L \end{cases}$$

  Entonces asumiendo que $k = k(x)$, $c = 0$, $f = q$ y $g = 0$, obtenemos que la ecuación de transferencia de calor estacionaria, a través de nuestra sistema elíptico lineal, tiene solución y esta es única. Para mas detalle estudiar Alexandre E.[6].

- **Ecuacion de Poisson**
  La ecuación de Poisson está descrita de la siguiente forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_D \\ \hat{n}.(k\nabla u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_N \end{cases}$$

  Esta ecuación aparece en diversas situaciones físicas, por ejemplo: u puede ser la temperatura en la ley de transferencia de calor, u puede ser la concentración química en la ley de Fick de difusión, u puede ser el potencial electrostático en la ley de Ohm de conducción. Todas estas son situaciones estacionarias.
  De la misma forma, asumiendo $k = 1$, $c = 0$ y $g = 0$, obtenemos que la ecuación de Laplace, a través de nuestra sistema elíptico lineal, tiene solución y esta es única.

Bibliografía

[1] Serge Prudhomme “An introduction to the finite element method,” Lecture Notes MTH 8207, 71 pages, 2016.

[2] M. Lopez Perez. “El Teorema de Lax-Milgram: origen, generalizaciones y aplicaciones,” Departamento de Análisis Matemático, Tesis de Licenciatura, 90 pages, 2017.

[3] Evans Lawrence C. “Partial differential equations,” Americal Mathematical Society, second ed., vol 19, 1998.

[4] L. A. Medeiros, M. Milla Miranda “Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogeneos),” Instituto de Matemática da UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[5] Haim Brézis. “ Análisis funcional Teoria y aplicaciones,” Version Española de J. Ramon Esteban, Editorial Alianza S. A, Madrid, 1984.

[6] J. Sotomayor. "Liçóes de quaçóes diferenciais ordináriasÏnstituto de Matematica Pura y Aplicada (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1979.

[7] Alexandre E., J-L. Guermond "Theory and Practice of Finite Elements", Applied Mathematical Sciences, Editors S.S. Antman J.E. Marsden L. Sirovich.,Volume 159, 2004.

[8] E. Kreyszig, Ïntroductoy Functional Analysis with ApplicationsÜniversity of Virginia, Reimpresa, 668 pages, 2008.

[9] D. Anzoátegui, E. Ordosgoitia. Monografía Çapa límite, su importancia en el flujo de fluidos y el diseño de tuberíasÜniversidad tecnológica de Bolivar, 116 pags, 2004.