Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Existencia y multiplicidad de soluciones para una clase de ecuaciones elípticas

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Elard JUÁREZ HURTADO

ASESOR

Dr. Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Juárez, E. (2021). *Existencia y multiplicidad de soluciones para una clase de ecuaciones elípticas*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Elard Juárez Hurtado
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42065231
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-6799-8253
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alfonso Pérez Salvatierra
Tipo de documento de identidad	DNI:
Número de documento de identidad	06445739
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9944-4020
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI:
Número de documento de identidad	43069051
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Víctor Hilario Tarazona Miranda
Tipo de documento	DNI:
Número de documento de identidad	09264893
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Alfonso Pérez Salvatierra
Tipo de documento	DNI:
Número de documento de identidad	06445739
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.2. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: -12.058076 Longitud: -77.081588
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2020 - 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 horas del jueves 28 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (PRESIDENTE), Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda (MIEMBRO) y el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: **«EXISTENCIA Y MULTIPLICIDAD DE SOLUCIONES PARA UNA CLASE DE ECUACIONES ELÍPTICAS»,** presentado por el señor Bachiller Elard Juarez Hurtado, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **Sobresaliente con mención** con un calificativo promedio de **diecinueve (19).**

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar, manifestó que el señor Bachiller Elard Juarez Hurtado, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 17:20 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta, en archivo PDF.

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE

Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda
MIEMBRO

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
MIEMBRO ASESOR

La Vicedecana (e) de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Mg. Zoraida Judith Huamán Gutiérrez, certifica virtualmente la participación del Jurado Evaluador, el titulando, el acto de instalación y el inicio, desarrollo y término del acto académico de sustentación, dejando constancia en el acta respectiva.

FICHA CATOLOGRÁFICA

Elard Juárez Hurtado

Existencia y Multiplicidad de Soluciones para una Clase de Problemas Elípticos,
LaTeX, (Lima) 2021.
v, 99 p., 21,0 cm $\times$ 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2021).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas
I. Matemática. UNMSM/FdeCM.
II. Existencia de soluciones.

DEDICATORIA

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

A Dios por tantas bendiciones, por su inmerecida gracia y misericordia por medio de Nuestro Señor Jesucristo.

Al Prof. Dr. Alfonso Pérez Salvatierra por la dirección de este trabajo. Al que quiero transmitir mi agradecimiento por sus consejos y ensenanzas durante la graduación.

Quiero expresar mi agradecimiento también a la UNMSM en especial a todos los miembros de la Facultad de Ciencias Matemáticas.

A los que en algún momento hemos compartido momentos de estudio y aprendizaje, en especial a Lisiane Böck, Lauren Bonaldo, Karol Rizzotto, Yury Rojas y Julio.

A mi família por su apoyo incondicional en todos estos tiempos.

Finalmente, a mi mamá por tanto amor y cariño, siempre estarás con nosotros.

RESUMEN

Existencia y Multiplicidad de Soluciones para una Clase de Problemas Elípticos

ELARD JUÁREZ HURTADO

2021

Asesor: ***DR. ALFONSO PÉREZ SALVATIERRA***

Título Obtenido: ***Licenciado en Matemática Pura***

En este trabajo haremos uso de herramientas de métodos variacionales para probar resultados de multiplicidad de soluciones para un problema de Dirichlet envolviendo el operador $p-$Laplaciano. Luego, estudiaremos la existencia de soluciones para un problema elíptico envolviendo el operador $1-$Laplaciano en el marco de los espacios de variación limitada, para lo cual será necesario obtener estimativas uniformes independientes de p, y aproximar el problema del $p-$Laplaciano para obtener nuestros resultados. Además, se demuestra una identidad de tipo Pohožaev.

ABSTRACT

Existence and Multiplicity to a Class Elliptic Equations

ELARD JUÁREZ HURTADO

2021

Advisor:: ***DR. ALFONSO PÉREZ SALVATIERRA***

Obtained title: ***Graduate in Mathematics***

In this work we will make use of variational methods tools to prove results of multiplicity of solutions for a Dirichlet problem involving the $p-$Laplacian operator. Then, we will study the existence of solutions for an elliptic problem involving the operator $1-$Laplacian in the framework of the space of functions of bounded variation, for which it will be necessary to obtain uniform estimates independent of p, and approximate the problem of the $p-$Laplacian to get our results. Furthermore, a Pohožaev type identity is proved.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar la multiplicidad de soluciones del siguiente problema de Dirichlet envolviendo el operador $p-$Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) \text{ en } \mathcal{O}, \\ u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

aqui Δ_p, $1 < p < \infty$, es el operador $p-$Laplaciano y $f : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory verificando adecuadas condiciones de crecimiento.

También será estudiado un problema elíptico envolviendo el operador $1-$Laplaciano

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = f(x,u) \text{ en } \mathcal{O}, \\ u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

para esto será utilizado los resultados obtenidos para la ecuación (1.1), de donde se obtendra las soluciones aproximadas y luego se hara un proceso de aproximación cuando $p \to 1^+$, para obtener las soluciones del problema (1.2), además, se demuestra una identidad de tipo Pohožaev, cabe resaltar que para el estudio de este segundo problema será necesario trabajar en los espacios de variación limitada.

Resaltamos que problemas similares tienen diversas aplicaciones y se han estudiado en los últimos años. En efecto, ecuaciones de difusión se han estudiado sistemáticamente desde fines de la década de 1970 (ver por ejemplo las referencias [18, 34]). Más precisamente, los problemas de Dirichlet con el operador de tipo $p-$Laplaciano $(p > 1)$ con un término con crecimiento subcrítico, es decir:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-1}u & \text{en } \mathcal{O}, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{$\mathfrak{P}$}$$

con $q \in (0, p^\star - 1)$ (donde $p^\star$ es el exponente crítico de Sobolev), han sido ampliamente estudiados en el contexto de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales mediante el uso de diferentes enfoques (vea por ejemplo [1, 15]).

Por ejemplo, en [16] los autores, han utilizado el conocido "Teorema del Paso de la Montaña"de Ambrosetti y Rabinowitz [28], probaron que la solución trivial es un mínimo local del funcional asociado y luego, dado que el funcional energia verifica la geometría, encuentran otros puntos críticos (a saber un punto positivo y un punto crítico negativo), que son soluciones del problema ($\mathfrak{P}$). Hacemos notar que en la prueba de la condición de Palais - Smale se usa la reflexividad de $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$. Además, la restricción $q < p^\star - 1$ asegura que la inmersión $W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{O})$ es compacta, lo cual es esencial para el enfoque abordado en [15].

El operador $1-$Laplaciano que aparece en (1.2) presenta algunas dificultades adicionales y características especiales. Recordamos que en los últimos años han sido muchos los trabajos dedicados a este operador (por ejemplo consulte [12, 13, 24]). Uno de los principales intereses para estudiar el problema de Dirichlet para ecuaciones que involucran el operator $1-$Laplaciano proviene del enfoque variacional de la restauración de imagen (nos referimos a [3] para una revisión de los primeros modelos variacionales en el procesamiento de imágenes y su conexión con el $1-$Laplaciano). Esto ha dado lugar a una gran cantidad de artículos que tratan problemas que involucran el operador $1-$

Laplaciano.

La modelización de un gran número de problemas en física, mecanica, o procesamiento de imagenes requiere la introducción de un nuevo espacio de funciones permitiendo discontinuidades de la solución. En transición de fase, segmentación de imagenes, teoría de plasticidad, la solución de los problemas presenta discontinuidades. Sus primeras derivadas distribucionales son ahora medidas y las soluciones de estos problemas pueden no pertenecer al clásico espacio de Sobolev. Así, la clásica teoría de espacios de Sobolev debe ser completada por el nuevo espacio de variación limitada BV.

Existe una extensa literatura sobre los antecedentes de los temas aqui tratados. Varios de estos, cercanos a los problemas tratados en esta tesis, son citados en la bibliografía. No se ha pretendido que la bibliografía sea exhaustiva, pero es necesario mencionar que con las referencias en esta citadas, tenemos un espectro bastante detallado sobre el trabajo.

El trabajo esta organizado de la siguiente forma: En el Capítulo 1, se dan algunas definiciones y resultados que serán usados en toda la tesis. En el Capítulo 2 se estudia un problema de Dirichlet envolviendo el operador $p-$Laplaciano con una no linealidad en la parte derecha con crecimiento subcrítico y serán utilizadas técnicas variacionales para obtener las soluciones. En el Capítulo 3, se estudia un problema de Dirichlet envolviendo el operador $1-$Laplaciano en el marco de las funciones de variación limitada, se mostrara la existencia de soluciones via un proceso de aproximación de problemas envolviendo el operador $p-$Laplaciano.

Capítulo

2

Preliminares

Este capítulo es dedicado a presentar algunos resultados fundamentales, teoría de la medida, teoría de distribuciones, espacios de Sobolev y espacios de variación acotada, que usaremos en toda la tesis. Para evitar una exposición extensa, omitiremos los detalles de las demostraciones de algunos de los resultados. Para finalizar, presentamos la definición de solución de variación acotada y una versión del Teorema del Paso de la Montaña. De ahora en adelante denotaremos por $\mathcal{O}$ un conjunto abierto no vacio de $\mathbb{R}^N$.

En este capítulo presentamos resultados escenciales de la teoría de integración envolviendo medidas de Radon y sobre el operador $p-$Laplaciano, para más referencias [5, 7, 14, 21, 23, 30, 27].

2.1 Teoría de la medida

Definición 2.1. *Sea $\mathbb{X}$ un espacio topológico. Decimos que la $\sigma-$algebra generada por la família de conjuntos abiertos de $\mathbb{X}$ es la $\sigma-$algebra de Borel sobre $\mathbb{X}$, la cual es denotada por $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ o $\mathcal{B}(\mathbb{X})$. Sus elementos son llamados conjuntos de Borel o Borelianos.*

Definición 2.2. ***(Medida de Borel)*** *Considere $\mathbb{X}$ un espacio topológico. Decimos que una medida con dominio $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es una medida de Borel.*

2.2 Medidas de Hausdorff e dimensão de Hausdorff

Esta sección tiene como objetivo definir brevemente la noción intuitiva de longitud, área y volumen. Más precisamente, proporcionar una medida no negativa para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^N$, que concuerda con la conocida medida $k-$dimensional para superficies $k-$dimensionales regulares cuando k es un número entero. La construcción de Hausdorff es particularmente buena adecuado a la geometría de los conjuntos y no requiere ninguna parametrización local en estos conjuntos por lo tanto, no se necesita suposición de regularidad. Por ejemplo, la medida de Hausdorff ofrece la posibilidad de medir conjuntos fractales, así como definir una nueva noción de dimensión para cualquier conjunto, extendiendo así la dimensión topológica clásica. Tenga en cuenta que el proceso descrito en la primera subsección es el enfoque general para construir una medida a partir de una función de conjunto $\sigma-$subaditivo (o medida externa).

2.2.1 Medidas exteriores de Hausdorff y medidas de Hausdorff

Denotaremos la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ por $\mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ y para conjunto no vacio E de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$, definimos $\mathrm{diam}(E) = \sup\{d(x,y) : (x,y) \in E\}$, el diametro de E, donde d es la distancia euclidiana de $\mathbb{R}^N$. Cuando s es un entero positivo denotaremos el volumen de la bola unitária de $\mathbb{R}^s$ por $\mathcal{O}$; en el caso general $s \geqslant 0$, establecemos

$$\mathcal{O}_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+s/2)},$$

donde Γ es la función de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx.$$

También definimos $c_s = 2^{-s}\mathcal{O}_s$. Sea E cualquer conjunto de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ y $\delta > 0$.

Una família finita o enumeráble $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos en $\mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ satisfaciendo $0 < \text{diam}(A_i) \leqslant \delta$ y $E \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ se llamará un $\delta-$recubrimiento de E.

Definición 2.3. *Para cada $s \geqslant 0$, $\delta > 0$ y $E \subset \mathbb{R}^N$, definimos*

$$\mathscr{H}^s_\delta := \left\{ c_s \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(A_i)^s : (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ es un } \delta - \textit{recubrimiento de} E \right\}.$$

La medida de Hausdorff externa de dimensión s es el mapeo de conjuntos $\mathscr{H}^s$ que toma sus valores en $[0,\infty]$ definido por

$$\mathscr{H}^s(E) = \sup_{\delta>0} \mathscr{H}^s_\delta(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{H}^s_\delta(E).$$

Proposición 2.1. *La función $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$ es una medida exterior, es decir, verifica*

(i) $\mathscr{H}^s(\emptyset) = 0$;

(ii) $(\sigma - \textit{subaditiva})$ *para todas las sucesiones $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ tal que $E \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} E_i$,*

$$\mathscr{H}^s(E) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^s(E_i);$$

(iii) *$\mathscr{H}^s$ es una función de conjunto no decreciente, esto es, $\mathscr{H}^s(A) \leqslant \mathscr{H}^s(B)$ cuando $A \subset B$.*

Siguiendo la construcción clásica de una medida a partir de una medida exterior, definimos el subconjunto $\mathcal{M}_s$ de conjuntos $\mathscr{H}^s-$medibles en el sentido de Carathéodory:

$$A \in \mathcal{M}_s \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^N),\ \mathscr{H}^s = \mathscr{H}^s(X \cap A) + \mathscr{H}^s(X \setminus A).$$

Note que $\emptyset$ and $\mathbb{R}^N$ pernecen a $\mathcal{M}_s$.

Proposición 2.2. *El conjunto* $\mathcal{M}_s$ *es un* $\sigma-$*álgebra y* $\mathscr{H}^s$ *es* $\sigma-$*aditivo sobre* $\mathcal{M}_s$.

Definición 2.4. *La restricción a* $\mathcal{M}_s$ *de la función de conjunto* $\mathscr{H}^s$ *es llamado la medida de Hausdorff de dimension* s.

La medida de Hausdorff de dimensión s es una medida de Borel valorada en $[0, \infty]$ en el siguiente sentido.

Proposición 2.3. *La* $\sigma-$*álgebra contiene la* $\sigma-$*álgebra de todos los conjuntos de Borel de* $\mathbb{R}^N$.

Teorema 2.1. *Para todos los conjuntos Lebesgue medibles* E *en* $\mathbb{R}^N$, *tenemos* $\mathscr{H}^s(E) = \mathcal{L}^s(E)$, *donde* $\mathcal{L}^s$ *denota la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^N$. *Además,* $\mathscr{H}^s(E) = 0$ *para* $s > N$, *mientras que* $\mathscr{H}^0$ *es la medida de conteo.*

Proposición 2.4. *Sea* A *un subconjunto cualquier de* $\mathbb{R}^N$ *y* $\lambda > 0$. *Entonces*

$$\mathscr{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathscr{H}^s(A).$$

Proposición 2.5. *Sea* A *un subconjunto cualquera de* $\mathbb{R}^N$ *y* $f : A \to \mathbb{R}^N$ *tal que para todos* $x, y \in A$

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant L|x - y|^\alpha,$$

donde $L > 0$ *y* $\alpha > 0$ *dos constantes. Entocnes*

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leqslant \frac{c_{s/\alpha}}{c_s} L^{s/\alpha} \mathscr{H}^s(A),$$

y si f *es una isometría, entonces*

$$\mathscr{H}^s(f(A)) = \mathscr{H}^s(A).$$

***Lema* 2.1.** Para todo conjunto fijo A de $\mathbb{R}^N$, el mapeo $s \mapsto \mathscr{H}^s(A)$ es no decreciente. Más precisamente, para todo $\delta > 0$ y para $t > s$, tenemos

$$\mathscr{H}^t_\delta(A) \leqslant \delta^{t-s}\frac{c_t}{c_s}\mathscr{H}^s_\delta(A).$$

Teorema 2.2. ***(definición de dimensión de Hausdorff)*** *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ y*

$$s_0 := \inf\{t \geqslant 0 : \mathscr{H}^t(A) = 0\}.$$

Entonces s_0 verifica

$$\mathscr{H}^s = \begin{cases} +\infty \text{ si } s < s_0, \\ 0 \text{ si } s > s_0. \end{cases}$$

*El número real s_0 se denomina **dimensión de Hausdorff** del conjunto A y se denota por dim$_H(A)$. En el valor crítico s_0, $\mathscr{H}^{s_0}(A)$ puede ser cero o infinito o puede satisfacer $0 < \mathscr{H}^{s_0}(A) < +\infty$. En en este último caso, A se denomina un s_0 conjunto.*

Note que $\dim_H(\mathbb{R}) = 1$ y $\mathscr{H}^1(\mathbb{R}) = +\infty$.

***Observación* 2.1.** Tomando, como $\delta-$recubrimiento, la clase de bolas de $\mathbb{R}^N$, se puede definir

$$\widetilde{\mathscr{H}^s_\delta}(E) = \inf\left\{c_s \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(B_i)^s \, : \, E \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_i, \; 0 < \text{diam}(B)_i \leqslant \delta, \; B_i \text{ bolas de } \mathbb{R}^N\right\},$$

y el conjunto de funciones $\widetilde{\mathscr{H}^s}$, por

$$\widetilde{\mathscr{H}^s}(E) := \sup_{\delta > 0} \widetilde{\mathscr{H}^s_\delta}(E) = \lim_{\delta \to 0} \widetilde{\mathscr{H}^s_\delta}(E).$$

Entonces no es dificil verificar la siguiente estimatica

$$\mathscr{H}^s(E) \leqslant \widetilde{\mathscr{H}^s}(E) \leqslant 2^s \mathscr{H}^s(E).$$

Gracias a esta estimativa, las dimensiones de Hausdorff definidas a partir de las dos mapeos $\mathscr{H}^s$ y $\widetilde{\mathscr{H}^s}$ son iguales.

El siguiente resultado es útil para encontrar la dimensión de Hausdorff.

Proposición 2.6. *Sea A cualquier conjunto en $\mathbb{R}^N$.*

(i) Las siguientes implicaciones son verdaderas:

$$\mathscr{H}^s(A) < +\infty \Rightarrow dim_H(A) \leqslant s,$$

$$\mathscr{H}^s(A) > 0 \Rightarrow dim_H(A) \geqslant s,$$

(ii) Sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ tal que para todo $x, y \in A$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|^\alpha,$$

donde $L > 0$ y $\alpha > 0$ constantes. Entonces $dim_H(f(A)) \leqslant \frac{1}{\alpha} dim_H(A)$.

***Ejemplo* 2.1.** Cuando U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, entonces $\dim_H(U) = N$.

***Ejemplo* 2.2.** Cualquier subconjunto enumerável A de $\mathbb{R}^N$ es un conjunto de dimensión cero de Hausdorff.

***Ejemplo* 2.3.** Consideremos $N \leqslant m$ una función inyectiva $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^1$. Sea E un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Se tiene que $\dim_H(f(E)) = N$.

***Ejemplo* 2.4.** Consideremos el conjunto de Cantor en el intervalo $[0, 1]$. Entonces $\dim_H(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Proposición 2.7. *Existe un conjunto compacto E de $[0, 1]$ tal que $\mathscr{H}^1(E) = 0$ y $dim_H(E) = 1$.*

Teorema 2.3. *(medida $n-$dimensional de Hausdorff y la medida de Lebesgue) Se tiene que*

$$\mathscr{H}^N = \mathcal{L}^N \text{ en } \mathbb{R}^N.$$

Note también que se verifica $\mathscr{H}^s(\mathbb{S}^{N-1}) = 0$ si $s > n$ y $\mathscr{H}^s(\mathbb{S}^{N-1}) = \infty$ si $s < N$.

2.2.2 Medidas regulares y de Radon

Definición 2.5. *Una medida μ es una medida de Radon en $\mathcal{O}$ si es una medida de Borel que es finita en compactos, regular exterior sobre todo boreliano y regular interior sobre todo conjunto abierto. Esto es:*

- $\mu(K) < \infty$ *para todo conjunto compacto* $K \subset \mathcal{O}$.
- $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ abierto}\}$ *para todo boreliano* $A \subset \mathcal{O}$.
- $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$ *para todo boreliano* $A \subset \mathcal{O}$.

Se denotará por $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ el espacio de las medidas de Radon en $\mathcal{O}$.

Proposición 2.8. *Para una medida finita de Borel μ, la medida regular interior y exterior son equivalentes.*

Teorema 2.4. ***(Descomposición de Lebesgue-Radon-Nikodym)*** *Sea ν medida $\sigma-$finita con signo y μ medida positiva $\sigma-$finita sobre $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. Entonces, existen únicas medidas $\sigma-$finitas con signo λ, ϱ en $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ tales que*

$$\lambda \perp \mu, \;\; \varrho \ll \mu, \;\; \nu = \lambda + \varrho.$$

Mas aún, existe una función $\mu-$integrable $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ tal que $\varrho = f d\mu$ y cualesquiera dos de estas funciones son iguales μ-c.s.

Se define el soporte de $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ como el conjunto

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{O} : f(x) \neq 0\}}^{\mathcal{O}}.$$

Una función tiene soporte compacto si $\operatorname{supp}(f)$ es compacto. Además definimos los siguintes conjuntos:

$$\mathcal{C}_c(\mathcal{O}) := \big\{ f : \mathcal{O} \to \mathbb{R} : f \textit{ es continua con soporte compacto} \big\}$$

y

$$\mathcal{C}_0(\mathcal{O}) := \big\{ f : \mathcal{O} \to \mathbb{R} : f \in \mathcal{C}(\mathcal{O}) \textit{ se anula en el infinito} \big\}.$$

2.2.3 El espacio dual

Dado $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$, el espacio $\mathcal{C}_c(\mathcal{O})$ es denso en $\mathcal{C}_0(\mathcal{O})$ con respecto a la norma uniforme, por tanto si μ es una medida de Radon, entonces el funcional $\mathrm{L}(f) = \displaystyle\int_{\mathcal{O}} f d\mu$ definido en $\mathcal{C}_c(\mathcal{O})$ se extiende continuamente en $\mathcal{C}_0(\mathcal{O})$ si y solamente si, L es acotado con respecto a la norma uniforme.

Teorema 2.5. ***(Representación de Riesz-Alexandroff)*** *Sean $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$, $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{O})$ y $\mathrm{L}_\mu(f) := \int_{\mathcal{O}} f d\mu$. Entonces la aplicación $\mu \longmapsto \mathrm{L}_\mu$ es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ en $\mathcal{C}_0(\mathcal{O})^*$. Es decir, $\mathcal{C}_0(\mathcal{O})^*$ es isometricamente isomorfo a $\mathcal{M}(\mathcal{O})$.*

Definimos la convergencia debil en medida.

Definición 2.6. *Una sucesión (μ_n) en $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ converge debilmente para $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$, que será denotado por $\mu_n \rightharpoonup \mu$ en $\mathcal{M}(\mathcal{O})$, si para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{O})$ se tiene*

$$\int_{\mathcal{O}} \varphi d\mu_n \to \int_{\mathcal{O}} \varphi d\mu$$

cuando $n \to \infty$.

2.2.4 Los espacios L^p

Definición 2.7. *Sea $\mathcal{O}$ un dominio no vacio de $\mathbb{R}^N$, para $1 \leqslant p < \infty$. El conjunto de todas las funciones f medibles tal que*

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{O}} |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

será denotado por $L^p(\mathcal{O})$.

Proposición 2.9. ***(Lema de Fatou)*** *Sea $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, donde μ es una medida positiva. Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles de $\mathcal{O} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Entonces*

$$\int_{\mathcal{O}} f \, dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}} f_n \, dx.$$

Teorema 2.6. ***(Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue)*** *Sea $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, μ una medida positiva. Sea (f_n) una sucesión en $L^1(\mathcal{O})$ tal que*

(a) ***Convergencia simple.*** *Para todo $x \in X$ $f_n \to f$ c.s. en $\mathcal{O}$.*

(b) ***Dominación.*** *Existe una función no negativa $g \in L^1(\mathcal{O})$ tal que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ c.s. para todo $x \in \mathcal{O}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces $f \in L^1(\mathcal{O})$ y

$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}} |f - f_n| \, dx = 0,$ *lo que implica* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}} f_n \, dx = \int_{\mathcal{O}} f \, dx.$

***Lema* 2.2.** Si $p, p' \in (0, \infty)$ son exponentes conjugados y $a, b \geqslant 0$, entonces

$$b \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

y la igualdad vale si y solamente si $b = a^{p-1}$.

Esta desigualdad es también conocida como desigualdad de Young.

Teorema 2.7. *Suponga $1 \leqslant p < \infty$ y $1 < p' \leqslant \infty$ son exponentes conjugados y $f \in L^p(\mathcal{O})$, $h \in L^{p'}(\mathcal{O})$, entonces $fh \in L^1(\mathcal{O})$ y*

$$\int_{\mathcal{O}} |fh| dx \leqslant \left(\int_{\mathcal{O}} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathcal{O}} |h|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Esta desigualdad es también conocida como desigualdad de Hölder.

Proposición 2.10. *([20, Proposicion 2.46], [17, Teorema 1.42],[5, Corolário 2.4.3]) Sea $(X, \mu, \mathcal{M})$ un espacio de medida y $1 < p \leqslant \infty$. Seja $(u_n) \subset L^p(X)$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_p < \infty$, entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ en $L^p(X)$ para algun $u \in L^p(X)$. Esta propriedad vele en L^∞ con respecto a la convergencia debil estrella, si $L^1(X)$ es separable.*

2.3 Generalidades sobre distribuciones

En esta, sección presentamos algunos resultados sobre distribuiciones y derivada distribucional. De ahora en adelante en todo este caítulo denotaremos por $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ um conjutno aberto no vacio.

Definición 2.8. *El espacio de las funciones test o de prueba denotado por $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ es el conjunto:*

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) : \textit{ supp } (u) \textit{ es compacto } \}$$

Convergencia em $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$

Definición 2.9. ***(Convergencia de funciones test)*** *Una sucesión (φ_n) de funciones de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ converge en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ para una función $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ si:*

(i) *Existe $K \Subset \mathcal{O}$ tal que supp $(\varphi_n) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *$D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$.*

El espacio vectorial $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ con esta convergencia es denotado por $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Definición 2.10. *Una distribución en $\mathcal{O}$ es un funcional lineal $T : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ continua, es decir, para toda sucesión (φ_n) en $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ que converge para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, entonces $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$. El espacio de las distribuciones en $\mathcal{O}$ es denotado por $[\mathcal{D}(\mathcal{O})]'$.*

Notación. Para $(T, u) \in [\mathcal{D}(\mathcal{O})]' \times \mathcal{D}(\mathcal{O})$, $T(u) \in \mathbb{R}$ y se denota $T(u) = \langle T, u \rangle$.

Teorema 2.8. *Sea T un funcional lineal en $\mathcal{D}(\mathcal{O})$; las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

(ii) *Para todo compacto K de $\mathcal{O}$ existen $m \in \mathbb{N}$ y $C_{K,m} > 0$ tal que para $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ tal que supp $(\psi) \subset K$,*

$$|\langle T, \psi \rangle| \leqslant C_{K,m} \max_{|\alpha| \leqslant m} \max_{x \in K} |D^\alpha \psi(x)|.$$

Proposición 2.11. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathcal{O})$. Podemos asociarlo con una distribución en $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, denotado por T_f, definida por*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{O}} f(x)\varphi(x)\, dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Proposición 2.12. ***(Lema de Dubois-Reymond)*** *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathcal{O})$. Suponga que para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, $\int_{\mathcal{O}} f(x)\varphi(x)\, dx = 0$. Entonces $f = 0$ casi siempre.*

***Observación* 2.2.** Vale la siguiente inmsersión continua,

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathcal{O}) \hookrightarrow [\mathcal{D}(\mathcal{O})]',$$

para $p \in [1, \infty)$.

Derivación de distribuciones

Definición 2.11. *Para $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ y $\gamma \in \mathbb{N}^N$. Denominamos de derivada de orden γ de T y es denotado por $D^\gamma T$ a la aplicación:*

$$D^\gamma T : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R},\ \psi \mapsto \langle D^\gamma T, \psi \rangle = (-1)^{|\gamma|} \langle T, D^\gamma \psi \rangle,\ \textit{para cualquier } \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Proposición 2.13. *Para todo $T \in [\mathcal{D}(\mathcal{O})]'$ y para todo $\gamma \in \mathbb{N}^N$, $D^\gamma T$ es una distribución.*

***Corolário* 2.1.** Toda distribución es infinitamente derivable y sus derivadas son distribuciones.

2.4 Espacios de Sobolev

Definición 2.12. *Sea $1 \leqslant p \leqslant \infty$. El **espacio de Sobolev** $W^{1,p}(\mathcal{O})$ es definido por*

$$W^{1,p}(\mathcal{O}) = \left\{ u \in L^p(\mathcal{O}) : \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^p(\mathcal{O}) \text{ para todo } k = 1, \ldots, N \right\}.$$

El espacio $W^{1,p}(\mathcal{O})$ es equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})} = \left[\|u\|_p^p + \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} \text{ para } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{O})} = \max \left\{ \|u\|_\infty, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_\infty, \ldots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_\infty \right\} \text{ para } p = \infty.$$

Otra norma equivalente sobre $W^{1,p}(\mathcal{O})$ esta dado por

$$|u|_{W^{1,p}(\mathcal{O})} = \|u\|_p + \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_p \text{ para todo } u \in W^{1,p}(\mathcal{O}).$$

Note que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$, el espacio de las funciones test, también denotado por $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, es un subespacio de $W^{1,p}(\mathcal{O})$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Asi, podemos considerar su clausura en $W^{1,p}(\mathcal{O})$.

Definición 2.13. $W_0^{1,p}(\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})}}$.

Proposición 2.14. *Las siguientes afirmaciones son validas:*

(a) $W^{1,p}(\mathcal{O})$ *es un espacio de Banach para todo* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(b) $W^{1,p}(\mathcal{O})$ *es un espacio reflexivo para* $1 < p < \infty$.

(c) $W^{1,p}(\mathcal{O})$ *es un espacio separable para* $1 \leqslant p < \infty$.

Definición 2.14. *Decimos que* $\partial\mathcal{O}$ *es Lipschitz si puede representarse localmente como el gráfico de una función Lipschitz definida en alguna bola de* $\mathbb{R}^{N-1}$.

Ahora presentamos un resultado importante también conocido como teorema de Stampacchia.

Proposición 2.15. *([29, Teorema A.1]) Si* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ *abierto acotado con frontera Lipschitz,* $X = W^{1,p}(\mathcal{O})$ *o* $X = W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ *con* $1 \leqslant p < \infty$. *Si* $u, v \in W^{1,p}(\mathcal{O})$, *entonces*

(a) $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{-u, 0\}$, $|u| \in W^{1,p}(\mathcal{O})$ *y*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} 0\ , & \textit{c.s. } \{u \leqslant 0\}, \\ \nabla u\ , & \textit{c.s. } \{u > 0\}, \end{cases} \quad , \quad \nabla u^- = \begin{cases} 0\ , & \textit{c.s. } \{u \geqslant 0\}, \\ -\nabla u\ , & \textit{c.s. } \{u < 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} -\nabla u\ , & \textit{c.s. } \{u < 0\}, \\ 0\ , & \textit{c.s. } \{u = 0\} \\ \nabla u\ , & \textit{c.s. } \{u > 0\}. \end{cases}$$

Entonces, $\nabla u = 0$ *casi siempre sobre el conjunto* $\{u = 0\}$.

Teorema 2.9. *Sea* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ *un conjunto abierto de clase* $\mathcal{C}^1$. *Sean* $u \in W^{1,p}(\mathcal{O})$ *y* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. *Entonces*

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla u(x)\varphi(x)\, dx + \int_{\mathcal{O}} u(x) \textit{div}\varphi(x)\, dx = \int_{\partial\mathcal{O}} \gamma_0 u(s)\varphi(s)\vec{\eta}(s)\, d\sigma(s),$$

donde $d\sigma$ es la densidad superficial en $\partial\mathcal{O}$ y $\vec{\eta}$ el vector normal unitario a $\partial\mathcal{O}$, los términos $\nabla u(x)\varphi(x)$ y $\varphi(s)\vec{\eta}(s)$ son productos escalares de vectores en $\mathbb{R}^N$ y la divergencia de φ es definida por div$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} \partial_i(\varphi)(x)$.

Teorema 2.10. *Si $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto con frontera Lipschitz y sea $1 \leqslant p < \infty$, entonces:*

(a) Cuando $1 \leqslant p < N$, se tiene $W^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^r(\mathcal{O})$ para todo $r \in [1, p^\star = Np/(N-p)]$ y la inmersión es compacta si $1 \leqslant r < p^\star$.

(b) Cuando $p = N$, entonces $W^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^r(\mathcal{O})$ para todo $r \in [1, \infty]$ y la inmsersión es compacta.

(c) Cuando $p > N$, entonces $W^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}})$ es compacto.

Este resultado es conocido como el Teorema de Rellich-Kondrachov.

***Observación* 2.3.** La inmserión $W^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{p^\star}(\mathcal{O})$ nunca es compacta. También $\mathcal{O}$ no es acotado, entonces la inmersión $W^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{p^\star}(\mathcal{O})$ no es compacta.

Teorema 2.11. *(Desigualdad de Poincaré) Si $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, entonces $\|u\| = \|u\|_r + \|\nabla u\|_p$ es una norma equivalente en $W^{1,p}(\mathcal{O})$ en los siguientes casos:*

(i) $1 \leqslant r \leqslant p^\star$ si $1 \leqslant p < N$.

(ii) $1 \leqslant r < \infty$ si $p = N$.

(iii) $1 \leqslant r \leqslant \infty$ si $p > N$.

Para el espacio $W^{1,p}(\mathcal{O})$ tenemos el siguiente resultado conocido como la Desigualdad de Poincaré.

Proposición 2.16. *Si $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado y $1 \leqslant p < \infty$, entonces existe una constante $c = c(p, N, \mathcal{O}) > 0$ tal que $\|u\|_p \leqslant c\|\nabla u\|_p$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.*

***Corolário* 2.2.** Si $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado y $1 \leqslant p < \infty$, entonces $|\cdot| = \|\nabla(\cdot)\|_p$ es una norma equivalente en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.

2.5 El operador $p-$Laplaciano

El operador $p-$Laplaciano es definido por

$$\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad 1 < p < \infty.$$

Teorema 2.12. *Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto acotado.*

(1) $\Delta_p : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \longrightarrow (W_0^{1,p}(\mathcal{O}))'$ *es uniformemente continuo en conjuntos acotados.*

(2) $(-\Delta_p)^{-1} : (W_0^{1,p}(\mathcal{O}))' \longrightarrow W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ *es continuo.*

(3) El operador compuesto

$$(-\Delta_p)^{-1} : (W_0^{1,p}(\mathcal{O}))' \longrightarrow W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{O})$$

es compacto si $1 \leqslant q < p^\star$.

Teorema 2.13. *El operador $-\Delta_p$ verifica la condición (S_+), si $u_n \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ y $\limsup_{n\to\infty}\langle -\Delta_p u_n, u_n - u\rangle \leqslant 0$, entonces $u_n \to u$ en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.*

2.6 Diferenciabilidad

Definición 2.15. *Seja $\mathcal{O}$ um aberto de un espacio de Banach X e $\Psi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. El funcional Ψ es Gâteaux diferenciable en $x \in \mathcal{O}$ si existe $\Xi \in X'$ tal que para todo $h \in X$,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Psi(x+th) - \Psi(x) - \langle \Xi, th\rangle}{t} = 0.$$

Si existe el limite, este es único y la derivada de Gâteaux en x es denotado por $\Psi'(x)$,

$$\langle \Psi'(x), h\rangle := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\Psi(x+th) - \Psi(x)).$$

El funcional φ tiene derivada de Fréchet $\Xi \in X'$ en x si

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}(\Psi(x+th) - \Psi(x) - \langle \Xi, h\rangle) = 0.$$

El funcional $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ si φ tiene derivada de Fréchet y esta es continua en $\mathcal{O}$.

***Observación* 2.4.** Note que toda funcional Fréchet diferenciable es Gâteaux diferenciable

***Ejemplo* 2.5.** El funcional $J : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$,

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p \, dx = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p},$$

es Gâteaux diferenciable con

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx.$$

2.7 Operador de Nemytskii

Las principales referencias en esta sección son [15, 16, 19].

Definición 2.16. *Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un aberto acotado con frontera Lipschitz. Se dice que una función $\varphi : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es de Carathéodory, si verifica:*

(i) *Para $\xi \in \mathbb{R}$, la función $x \longmapsto \varphi(x, \xi)$ es Lebesgue medible en $\mathcal{O}$.*

(ii) *Para casi todo $x \in \mathcal{O}$, la función $\xi \longmapsto \varphi(x, \xi)$ es continua en $\mathbb{R}$.*

***Observación* 2.5.** Haremos la convención que en el caso de una función de Carathéodory, la afirmación “$x \in \mathcal{O}$” será entendida en el sentido “casi siempre $x \in \mathcal{O}$”.

Denotamos $\mathcal{M} = \{u : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible}\}$.

Proposición 2.17. *Si φ es una función de Carathéodory, entonces, para cada $u \in \mathcal{M}$, la función $\mathcal{N}_\varphi(u) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\mathcal{N}_\varphi(u))(x) = \varphi(x, u(x))$, $x \in \mathcal{O}$ es medible en $\mathcal{O}$.*

En virtud de la proposición anterior, la función de Carathéodory φ unduce a definir la aplicación $\mathcal{N}_\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, $(\mathcal{N}_\varphi u)(x) = \varphi(x, u(x))$, denominado **operador de Nemytskii.**

El operador de Nemytskii es un operador potencial, esto es:

Proposición 2.18. *Suponga que f sea una función de Carathéodory verificando:*

$$|\varphi(x, \xi)| \leqslant \mathfrak{C}|\xi|^{q-1} + \beta(x) \;\; \textit{para} \;\; x \in \mathcal{O}, \; \xi \in \mathbb{R},$$

donde $\mathfrak{C} \geqslant 0$, $q > 1$, $\beta \in L^{q'}(\mathcal{O})$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.
Sea $\Phi : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, \xi) = \displaystyle\int_0^\xi \varphi(x, \sigma)\, d\sigma$. Entonces:

(i) La función Φ es de Carathéodory y existe una constante $C_1 \geqslant 0$ y $c \in L^1(\mathcal{O})$ tal que

$$|\Phi(x, \xi)| \leqslant C_1|\xi|^q + c(x) \;\; \textit{para} \;\; x \in \mathcal{O}, \; \xi \in \mathbb{R}.$$

(ii) El funcional $\Lambda : L^q(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ definido por $\Lambda(u) := \int_{\mathcal{O}} \mathcal{N}_\Phi(u)\, dx = \displaystyle\int_{\mathcal{O}} \Phi(x, u)\, dx$ es continuamente Fréchet diferenciáble y $\Lambda'(u) = \mathcal{N}_\varphi(u)$, para todo $u \in L^q(\mathcal{O})$.

Para el problema ($\mathfrak{P}$), supondremos que la función f es de Carathéodory y que verifica

$$|f(x, \xi)| \leqslant K|\xi|^{q-1} + \beta(x), \; x \in \mathcal{O}, \; \xi \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

con $K \geqslant 0$, $q \in (1, p^*)$, $\beta \in L^{q'}(\mathcal{O})$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Desde que $q \in (1, p^*)$, entonces la inmersión $W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{O})$ es compacta, entonces se tiene la siguiente cadena de diagramas

$$W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow^{I_d} L^q(\mathcal{O}) \hookrightarrow^{\mathcal{N}_f} L^{q'}(\mathcal{O}) \hookrightarrow^{I_d^*} W^{-1,p'}(\mathcal{O})$$

muestra que el operador $\mathcal{N}_f$ es compacto (continuo y que mapea conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos) de $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ en $W^{-1,p'}(\mathcal{O})$.

***Lema* 2.3.** Sea φ una función de Carathéodory que verifica (2.1). Entonces el funcional $\Psi : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\Psi(u) = \int_{\mathcal{O}} \Phi(x, u)\, dx$$

donde $\Phi(x, \xi) = \int_0^{\xi} \varphi(x, \tau)\, d\tau$ es continua, Fréchet diferenciable en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ y

$$\langle \Psi'(u), \psi \rangle = \int_{\mathcal{O}} \varphi(x, u)\psi,\ dx \text{ para todo } \psi \in W_0^{1,p}(\mathcal{O}).$$

En el siguiente capítulo abordaremos el estudio del problema usando métodos variacionales para encontrar las soluciones del problema $(\mathcal{P})$. En realidad estas soluciones son puntos críticos de un funcional de clase $\mathcal{C}^1$ en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.

Por la condicion (2.1) y teniendo en cuenta que la inmersión $W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{O})$ es compacta (por tanto contínua), el funcional $\Phi : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(u) = \int_{\mathcal{O}} \mathcal{F}(x, u)\, dx$ con $\mathcal{F}(x, \xi) = \int_0^{\xi} f(x, \varrho)\, d\varrho$, es continua, Fréchet diferenciable en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$(Lema 2.3) y $\Phi'(u) = \mathcal{N}_f(u)$. Por tanto, el funcional $\mathfrak{F} : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(u) &= \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \Phi(u) \\ &= \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_{\mathcal{O}} \mathcal{F}(x, u)\ dx,\end{aligned}$$

es de clase $\mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\mathcal{O}),\mathbb{R})$ y

$$\mathfrak{F}'(u) = -\Delta_p u - \mathcal{N}_f(u).$$

Entonces, encontrar soluciones del problema $(\mathcal{P})$, equivale a buscar los puntos críticos del funcional $\mathfrak{F}$, esto es, funciones $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ tal que $\mathfrak{F}'(u) = 0$.

2.8 Funciones de variación acotada

En esta sección se presentan los principales resultados sobre el espacio de funciones de variación acotada, para más referencias [3, 5, 30] .

Definición 2.17. *La función $u : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de variación acotada si $u \in L^1(\mathcal{O})$ y su gradiente Du en el sentido distribucional pertenece a $\in \mathcal{M}(\mathcal{O},\mathbb{R}^N)$, donde $Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ y $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ son las derivadas distribucionales de u. Denotaremos por $BV(\mathcal{O})$, el espacio vectorial de todas las funciones de variación acotada en $\mathcal{O}$ esto es,*

$$BV(\mathcal{O}) = \left\{u \in L^1(\mathcal{O}) : Du \in \mathcal{M}(\mathcal{O},\mathbb{R}^N)\right\}.$$

Ahora un resultado que permite cacarterizar si una función pertenece a $BV(\mathcal{O})$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.14. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $u \in BV(\mathcal{O})$;

(ii) $u \in L^1(\mathcal{O})$ *y para* $i = 1,\ldots,N$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$;

(iii) $u \in L^1(\mathcal{O})$ *y* $\|Du\| := \sup\left\{\langle Du,\phi\rangle : \psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{O},\mathbb{R}^N), \|\phi\|_\infty \leqslant 1\right\} < \infty$;

(iv) $u \in L^1(\mathcal{O})$ *y*

$$\|Du\| = \sup\left\{\int_{\mathcal{O}} u \text{ div } \phi dx : \psi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O},\mathbb{R}^N), \|\phi\|_\infty \leqslant 1\right\} < \infty,$$

donde $\langle Du, \phi \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{O}} \phi_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ *y también* $\|Du\| = \int_{\mathcal{O}} |Du|$.

El espacio $BV(\mathcal{O})$, será equipado con la siguiente norma, el cual extiende la clásica norma en $W^{1,1}(\mathcal{O})$

$$|u|_{BV(\mathcal{O})} := \|u\|_{L^1(\mathcal{O})} + \|Du\|$$

que es equivalente a la norma que será utilizada en el capítulo 3.

La norma $|\cdot|_{BV(\mathcal{O})}$ es una extensión de la norma en $W^{1,1}(\mathcal{O})$, es decir, dado $u \in W^{1,1}(\mathcal{O})$, tenemos que

$$|u|_{BV(\mathcal{O})} = \|u\|_{L^1(\mathcal{O})} + \|Du\| = \int_{\mathcal{O}} |\nabla u| dx + \int_{\mathcal{O}} |u| dx = |u|_{W^{1,1}(\mathcal{O})}.$$

Entonces $W^{1,1}(\mathcal{O}) \subset BV(\mathcal{O})$. Sin embargo, el espacio $W^{1,1}(\mathcal{O})$ es subespacio própio del espacio $BV(\mathcal{O})$ como muestra el siguiente ejemplo que proporciona una función u que pertenece al espacio $BV(\mathcal{O})$ y que, sin embargo, no pertenece al espacio $W^{1,1}(\mathcal{O})$.

***Ejemplo* 2.6.** Sea $E \subset \mathcal{O}$ abierto con frontera suave tal que $|E| < \infty$ y $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < \infty$, donde $|E|$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ del conjunto E y $\mathcal{H}^{N-1}$ denota la medida de Hausdorff de dimensión $N-1$. Note que la función $\mathbb{1}_E \in BV(\mathcal{O})$ mas $\mathbb{1}_E \notin W^{1,1}(\mathcal{O})$.

***Ejemplo* 2.7.** Considere la función característica $\mathbb{1}_{B_R(0)}$ del espacio $\mathbb{R}^N$. Note que $\mathbb{1}_{B_R(0)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y el gradiente $\nabla(\mathbb{1}_{B_R(0)}) = -(x/|x|)\delta_{|x|=R}$. En efecto, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, entonces por la fórmula clásica de Green

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(\mathbb{1}_{B_R(0)})\varphi &= \int_{B_R(0)} \text{div}\varphi(x)\, dx \\ &= \int_{|x|=R} \varphi(x).n\, dx = \int_{|x|=R} \frac{x}{|x|}\varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

En virtud de estos ejemplos, tenemos que $W^{1,1}(\mathcal{O})$ esta incluido estrictamente en $BV(\mathcal{O})$.

Ahora se definira la noción de convergencia débil y convergencia intermediaria.

Definición 2.18. *Decimos que una sucesión $(u_n) \subset BV(\mathcal{O})$ converge debilmente a una función $u \in BV(\mathcal{O})$, que denotaremos por $u_n \rightharpoonup u$, si*

- *$u_n \to u$ fuerte en $L^1(\mathcal{O})$.*
- *$Du_n \rightharpoonup Du$ debilmente en $\mathcal{M}(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$.*

Teorema 2.15. *Sea $(u_n) \subset BV(\mathcal{O})$ sucesión acotada en $BV(\mathcal{O})$ que converge fuerte para u en $L^1(\mathcal{O})$ y $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{O}} |Du_n| < +\infty$. Entonces,*

(i) *$u \in BV(\mathcal{O})$ y $\displaystyle\int_{\mathcal{O}} |Du| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}} |Du_n|$,*

(ii) *$u_n \rightharpoonup u$ debilmente en $BV(\mathcal{O})$.*

Demostración. (i) Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$ tal que $|\varphi|_\infty \leqslant 1$. Entonces, considere un conjunto compacto K tal que supp$(\varphi) \subset K$. Note que supp div$\varphi \subset K$, sea $\mathcal{Q} = \sup\limits_{x\in K} |\operatorname{div}\varphi(x)|$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u_n(x) \operatorname{div}\varphi(x) &= u(x) \operatorname{div}\varphi(x) \quad \text{c.s. en } K,\\
|u_n(x) \operatorname{div}\varphi(x)| &\leqslant \mathcal{Q}|u_n(x)| \quad \text{c.s. en } K,\\
\lim_{n\to\infty} \int_K |u_n| dx &= \int_K |u| dx,
\end{aligned}$$

luego, debido al Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} u \operatorname{div} \varphi dx &= \int_K u \operatorname{div} \varphi dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_K u_n \operatorname{div} \varphi dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div} \varphi dx.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} u \operatorname{div} \varphi dx &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}} u_n \operatorname{div} \varphi dx \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}} |Du_n|.\end{aligned}$$

Una vez que esta desigualdad es válida para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$, con $|\varphi|_\infty \leqslant 1$, tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}} |Du| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}} |Du_n|.$$

(ii) Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle Du_n, \varphi \rangle &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{O}} \varphi_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \\ &= -\sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{O}} u_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx \\ &= -\int_{\mathcal{O}} u_n \operatorname{div} \varphi dx.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $u_n \to u$ en $L^1(\mathcal{O})$, es como en (i), debido al Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos que

$$-\int_{\mathcal{O}} u_n \operatorname{div} \varphi dx \longrightarrow -\int_{\mathcal{O}} u \operatorname{div} \varphi dx = \langle Du, \varphi \rangle$$

cuando $n \to \infty$.

Por tanto, $\langle Du_n, \varphi \rangle$ converge para $\langle Du, \varphi \rangle$, para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$.

Por la densidad de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$ en $\mathcal{C}_0(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$, y como la sucesión (Du_n) es acotada, tenemos que $Du_n \rightharpoonup Du$. $\square$

Como una consecuencia de la propiedad de semicontinuidad (i), $BV(\mathcal{O})$ es un espacio normado completo.

Teorema 2.16. *El espacio $(BV(\mathcal{O}), |\cdot|_{BV(\mathcal{O})})$ es un espacio de Banach.*

***Corolário* 2.3.** Si $u \in W^{1,1}(\mathcal{O})$ entonces $\|u\|_{W^{1,1}} = \|u\|_{BV}$.

Teorema 2.17. *El espacio $BV(\mathcal{O})$ no es reflexivo.*

Recordando que $|\cdot|_{BV(\mathcal{O})}$ extiende $|\cdot|_{W^{1,1}(\mathcal{O})}$ y que $\overline{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})}^{|\cdot|_{W^{1,1}}} = W^{1,1}(\mathcal{O}) \subsetneq BV(\mathcal{O})$ tenemos que

$$\overline{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \cap BV(\mathcal{O})}^{|\cdot|_{BV(\mathcal{O})}} \subset W^{1,1}(\mathcal{O}).$$

Por tanto, $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \cap BV(\mathcal{O})$ no es denso en $BV(\mathcal{O})$ con la convergencia fuerte. Entonces, será definido el concepto de convergencia intermediaria.

Definición 2.19. *Sea la sucesión $(u_n) \subset BV(\mathcal{O})$ y $u \in BV(\mathcal{O})$. Decimos que u_n converge para u en el sentido de la **convergencia intermediária** si*

- *$u_n \to u$ fuerte en $L^1(\mathcal{O})$ cuando $n \to \infty$.*
- *$\displaystyle\int_{\mathcal{O}} |Du_n| \to \int_{\mathcal{O}} |Du|$ cuando $n \to \infty$.*

La convergencia intermediaria es debido a Teman [31] y es también conocida como convergencia estricta.

Teorema 2.18. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$u_n \to u$ en el sentido de la convergencia intermediaria,*

$$(ii) \begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad \text{débil en } BV(\mathcal{O}) \\ \displaystyle\int_{\mathcal{O}} |Du_n| \to \int_{\mathcal{O}} |Du|. \end{cases}$$

***Ejemplo* 2.8.** La convergencia intermediaria es más fina que la convergencia débil en $BV(\mathcal{O})$, es decir, la topología generada por la convergencia débil es un subconjunto própio de la topología generada por la convergencia intermediaria. Sea la sucesión $BV(0,1)$ definida por

$$u_n(x) = \begin{cases} nx \text{ si } 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1 \text{ si } \frac{1}{n} < x < 1. \end{cases}$$

La sucesión (u_n) converge debilmente para 1 en $BV(0,1)$ sin embargo no converge en el sentido intermediário.

Ahora, serán presentados algunos resultados necesarios para la demonstración de un resultado fundamental de densidad en el espacio $BV(\mathcal{O})$.

Definición 2.20. *Una función regularizante $\varrho_\epsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ es definida como*

$$\varrho_\epsilon(x) = \epsilon^{-N} \varrho\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

donde ϱ es una función no negativa que satisface $\int_{\mathbb{R}^N} \varrho(x)dx = 1$, con supp$(\varrho_\epsilon) \subset \overline{B_1}(0)$.

Observe también que para todo $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ se define

$$\varrho_\epsilon * \mu(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_\epsilon(x-y)\mu(y).$$

Teorema 2.19. *Sean $\varrho_\epsilon, \varrho_\epsilon * \mu$ como en la Definición 2.20 y $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,\infty)$. Entonces $\varrho_\epsilon * \mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$, y además son válidas las siguientes propriedades:*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\varrho_\epsilon * \mu| \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\mu|$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\varrho_\epsilon * \mu| \to \int_{\mathbb{R}^N} |\mu|$ *cuando* $\epsilon \to 0$;

(iii) $f * \varrho_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^N)$;

(iv) $|f * \varrho_\epsilon|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant |f|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$;

(v) $f * \varrho_\epsilon \to f$ *en* $L^p(\mathcal{O})$ *cuando* $\epsilon \to 0$;

(vi) $D^\alpha(\rho_\epsilon * \mu) = D^\alpha \rho_\epsilon * \mu$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Teorema 2.20. ***(Aproximación por funciones suaves)*** *El espacio* $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \cap BV(\mathcal{O})$ *es denso en* $BV(\mathcal{O})$ *equipado con la convergencia intermediaria. Por tanto,* $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}})$ *es también denso en* $BV(\mathcal{O})$ *con la convergencia intermediaria.*

***Observación* 2.6.** Ahora presentamos resultados sobre las inmersiones continuas de $BV(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{O})$, con $q \in [1, 1^*]$ y cuando $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ es acotado.

Teorema 2.21. ***(Inmersión continua)*** *Sea* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ *abierto con frontera lipschitziana. Entonces, la inmersión*

$$BV(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^r(\mathcal{O}), \quad r \in [1, 1^* = \frac{N}{N-1}]$$

es continua. Mas precisamente, existe una constante $c = c(\mathcal{O}, r, N)$ *tal que para todo* $v \in BV(\mathcal{O})$ *tenemos que*

$$|v|_{L^r(\mathcal{O})} \leqslant r|v|_{BV(\mathcal{O})}.$$

***Observación* 2.7.** Desde que la inmersión $BV(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^r(\mathcal{O})$, $r \in [1, 1^*]$, es continua, es posíble tomar en la demonstración del Teorema 2.20 funciones regularizantes en la norma $L^q(\mathcal{O})$ y así, obtenemos como resultado que para todo $u \in BV(\mathcal{O})$ existe uma sucesión $(u_n) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \cap BV(\mathcal{O})$ que cumple

- $u_n \longrightarrow u$ en $L^q(\mathcal{O})$,
- $\int_{\mathcal{O}} |Du_n| \longrightarrow \int_{\mathcal{O}} |Du|$,

cuando $n \to \infty$.

Teorema 2.22. ***(Inmersión compacta)*** *Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado con frontera lipschitziana. Entonces, para $p \in [1, 1^*)$ la inmersión*

$$BV(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^p(\mathcal{O})$$

es compacta. Mas precisamente, dada una sucesión (u_n) acotada en $BV(\mathcal{O})$, existe una subsucesión que converge fuerte en $L^p(\mathcal{O})$.

2.9 Fórmula de Green para funciones de variación limitada

Una vez que nuestro concepto de solución se basa en la Teoría de Anzellotti, ahora presentamos algunos conceptos y propriedades que serán usado en el Capítulo 3, para maiores referencias [3, 4]. En esta sección vamos a definir una función $[z, \nu] \in L^\infty(\partial\mathcal{O})$ asociado a cada campo vectorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ tal que div$(\mathbf{z})$ es una medida limitada em $\mathcal{O}$.

Seja $\mathcal{O}$ um aberto de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$ e $1 \leqslant p \leqslant N$, $\frac{N}{N-1} \leqslant r \leqslant \infty$.

Consideremos los siguientes espacios:

$$BV(\mathcal{O})_r := BV(\mathcal{O}) \cap L^r(\mathcal{O}), \quad BV(\mathcal{O})_c = BV(\mathcal{O}) \cap L^\infty(\mathcal{O}) \cap C(\mathcal{O}),$$

$$X_p(\mathcal{O}) = \{\mathbf{z} \in L^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^N) : \text{div}(\mathbf{z}) \in L^p(\mathcal{O})\},$$

e

$$X_N(\mathcal{O}) = \{\mathbf{z} \in L^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^N) : \text{div}(\mathbf{z}) \text{ es una medida limitada em } \mathcal{O}\}.$$

Teorema 2.23. *Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto acotado con frontera $\partial\mathcal{O}$ Lipschitz continua. Denotamos por ν la normal exterior unitaria a $\partial\mathcal{O}$. Entonces existe una aplicacion bilineal $\langle \mathbf{z}, u\rangle_{\partial\mathcal{O}} : X_N(\mathcal{O}) \times BV(\mathcal{O})_c \to \mathbb{R}$ tal* *que*

$$\langle \mathbf{z}, u\rangle_{\partial\mathcal{O}} = \int_{\partial\mathcal{O}} u(x)\mathbf{z}(x)\cdot\nu(x)\, d\mathcal{H}^{N-1} \text{ si } \mathbf{z}\in\mathcal{C}^1(\mathcal{O}.\mathbb{R}^N) \tag{2.3}$$

$$|\langle \mathbf{z}, u\rangle_{\partial\mathcal{O}}| \leqslant \|\mathbf{z}\|_\infty \int_{\partial\mathcal{O}} |u|\, d\mathcal{H}^{N-1} \text{ para todo } \mathbf{z}, u. \tag{2.4}$$

Teorema 2.24. *Sea $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera $\partial\mathcal{O}$ Lipschitz continua. Entonces existe un operador lineal $\gamma : X_N(\mathcal{O})\to L^\infty(\partial\mathcal{O})$ tal que*

$$\|\gamma(\mathbf{z})\|_\infty \leqslant \|\mathbf{z}\|_\infty \tag{2.5}$$

$$\langle \mathbf{z}, u\rangle_{\partial\mathcal{O}} = \int_{\mathcal{O}} \gamma(\mathbf{z})(x)u(x)d\mathcal{H}^{N-1} \text{ para todo } u\in BV(\mathcal{O})_c \tag{2.6}$$

$$\gamma(\mathbf{z})(x) = \mathbf{z}(x)\cdot\nu(x) \text{ para todo } x\in\partial\mathcal{O} \text{ si } \mathbf{z}\in\mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{O}},\mathbb{R}^N). \tag{2.7}$$

La función $\gamma(\mathbf{z})$ es una traza débil sobre $\partial\mathcal{O}$ de la componente normal $\mathbf{z}$. Denotaremos a $\gamma(\mathbf{z})$ por $[\mathbf{z},\nu]$.

Note que $X_p(\mathcal{O})\subset X_N(\mathcal{O})$ para todo $p\geqslant 1$ e entonces, la traza $[\mathbf{z},\nu]$ está definida para todo $\mathbf{z}\in X(\mathcal{O})_p$.

2.9.1 La medida (z, Du)

Haciendo aproximación por funciones suaves y aplicando la fórmula de Green se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.19. *Seja $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera $\partial\mathcal{O}$ Lipschitz contiuna y $1\leqslant p\leqslant\infty$. Entonces, para cada $\mathbf{z}\in X_p(\mathcal{O})$ y $u\in L^{p'}(\mathcal{O})\cap W^{1,1}(\mathcal{O})$, se cumple*

$$\int_{\mathcal{O}} u\, div(\mathbf{z})\, dx + \int_{\mathcal{O}} \mathbf{z}\cdot\nabla u\, dx = \int_{\partial\mathcal{O}} [\mathbf{z},\nu](x)u(x)d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{2.8}$$

En lo que sigue consideraremos los pares $(\mathbf{z}, u)$ tales que cumplen alguna de las condiciones siguientes:

(a) $u \in BV(\mathcal{O})_{p'}$, $\mathbf{z} \in X(\mathcal{O})_p$ y $1 < p \leqslant N$;

(b) $u \in BV(\mathcal{O})_\infty$, $\mathbf{z} \in X(\mathcal{O})_1$;

(c) $u \in BV(\mathcal{O})_c$, $\mathbf{z} \in X_N(\mathcal{O})$

Definición 2.21. *Sean* $\mathbf{z}, u$ *verificando uno de las condiciones* $(a), (b), (c)$. *Entonces definimos el funcional* $(\mathbf{z}, Du) : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ *como*

$$\langle(\mathbf{z}, Du), \varphi\rangle := -\int_{\mathcal{O}} u\varphi div(\mathbf{z})\, dx - \int_{\mathcal{O}} u\mathbf{z} \cdot \nabla\varphi\, dx.$$

Teorema 2.25. *Para todo abierto* $U \subset \mathcal{O}$ *y para toda función* $\phi \in \mathcal{D}(U)$, *se tiene*

$$|\langle(\mathbf{z}, Du), \phi\rangle| \leqslant \|\phi\|_\infty \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du|, \tag{2.9}$$

entonces $(\mathbf{z}, Du)$ *es una medida de Radon en* $\mathcal{O}$.

Demostración. Seja $(u_n) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ convergiendo para u en el sentido de la convergencia intermediaria . Dada $\phi \in \mathcal{D}(U)$ consideremos un abierto $\mathcal{V}$ tal que supp$(\phi) \subset \mathcal{V} \Subset U$. Entonces,

$$|\langle(\mathbf{z}, Du), \phi\rangle| \leqslant \|\phi\|_\infty \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(U)} \int_V |Du_n| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando $n \to \infty$, concluimos la prueba. □

Denotemos por $|(\mathbf{z}, Du)|$ la variación total de la medida $(\mathbf{z}, Du)$ y por $\int_B |(\mathbf{z}, Du)|$, $\int_B (\mathbf{z}, Du)$ el valor de estas medidas en cada conjunto de Borel $B \subset \mathcal{O}$.

Por Teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

***Corolário* 2.4.** Las medidas $|(\mathbf{z}, Du)|$ e $(\mathbf{z}, Du)$, son absolutamente continuas con respecto a la medida $|Du|$ y también

$$\left| \int_B (\mathbf{z}, Du) \right| \leqslant \int_B |(\mathbf{z}, Du)| \leqslant \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(U)} \int_B |Du| \tag{2.10}$$

para cada conjunto de Borel B y para cada conjunto abierto U tal que $B \subset U \subset \mathcal{O}$.

Además, la Definición 2.21 coincide com el sentido clásico, esto es

$$[\mathbf{z}, \nu] = \mathbf{z} \cdot \nu \text{ para } \mathbf{z} \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{O}}_\delta, \mathbb{R}), \tag{2.11}$$

donde $\mathcal{O}_\delta = \{x \in \mathcal{O} : \text{dist}(x, \partial\mathcal{O}) < \delta\}$, para algun δ suficientemente pequeño.

2.9.2 La fórmula de Green

***Lema* 2.4.** Supongamos que $u, \mathbf{z}$ verifican uno de los incisos (a), (b) o (c). Sea $(u_n) \subset BV(\mathcal{O}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ convergiendo para u en el sentido de la convergencia intermediaria. Entonces

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{z} \cdot \nabla u_n \, dx \to \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{z}, Du).$$

Veamos ahora la fórmula de Green que relaciona la función $[\mathbf{z}, \nu]$ y la medida $(\mathbf{z}, Du)$.

Teorema 2.26. ***(Fórmula de Green para funciones de variación acotada)*** *Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera $\partial\mathcal{O}$ Lipschitz continua y sean $\mathbf{z}, u$ cumpliendo una de las condiciones (a), (b) y (c). Entonces*

$$\int_{\mathcal{O}} u \, div(\mathbf{z}) + \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{z}, Du) = \int_{\partial\mathcal{O}} [\mathbf{z}, \nu] u \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{2.12}$$

***Observación* 2.8.** Usando el teorema anterior, para el caso $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$, se obtiene la fórmula: sean $\mathbf{z}$ y ϑ verificando una de los incisos (a), (b), o (c), se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \mathrm{div}(\mathbf{z}) + \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{z}, Du) = 0.$$

Ahora se enuncia un resultado escencial.

Teorema 2.27. ***(Desigualdad en** BV**)*** *Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ con frontera Lipschitz. Entonces existe una constante $C = C(\mathcal{O}, N) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathcal{O}} |u| dx \leqslant C \left(\int_{\mathcal{O}} |Du| + \int_{\partial \mathcal{O}} |u| \partial \mathcal{H}^{N-1} \right).$$

2.10 Gradientes generalizados

En esta sección se presenta algunas definiciones y resultados envolviendo la teoría de subdiferenciales (consulte por ejemplo [6, 9, 10, 33]).

Sea X un espacio de Banach y $\Phi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ una función convexa y localmente Lipschitz. El conjunto $\mathbb{D}(\Phi) := \{u \in X : \Phi(u) < \infty\}$ es llamado dominio efectivo de Φ. De esta forma, dado $u \in \mathbb{D}(\Phi)$, el conjunto:

$$\partial \Phi(u) = \big\{ u^* \in X' : \Phi(v) - \Phi(u) \geqslant \langle u^*, v - u \rangle, \forall\, v \in X \big\}$$

es llamado subdiferencial de Φ en u, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad X' en X.

Definición 2.22. *Sea $\Psi = \Phi - \mathfrak{G}$ definido en X, en que Φ es semicontinuo inferiormente y convexa, $\mathfrak{G} \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Un punto $u \in \mathbb{D}(\Phi)$ es denomidano punto crítico de Ψ si $\mathfrak{G}'(u) \in \partial \Phi(u)$, es decir, si u verifica:*

$$\Phi(v) - \Phi(u) \geqslant \langle \mathfrak{G}'(u), v - u \rangle \textit{ para todo } v \in X.$$

Proposición 2.20. *Seja $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma función convexa finita y continua en el punto $u \in X$, entonces $\partial \varphi(u) \neq \emptyset$.*

***Observación* 2.9.** Usando esta definición, se verifica que u_0 es un mínimo global de Φ si y solamente si $0 \in \partial \Phi(u_0)$.

Las funciones Gâteaux diferenciables son un caso especial de funciones subdiferenciables.

***Ejemplo* 2.9.** Sea φ una función convexa y Gâteaux diferenciable en x. Entonces, $\partial\varphi(x) = \{\varphi'(x)\}$ y

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi(x+\xi h)-\varphi(x)}{\xi} =< \varphi'(x), h > \text{ para } h \in X$$

***Ejemplo* 2.10.** Sea $\Psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por $\wp(x) := \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^N$, entonces

$$\partial\wp(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} & si \quad x \neq 0 \\ \\ \overline{B_1(0)} & si \quad x = 0. \end{cases}$$

***Ejemplo* 2.11.** Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto acotado con frontera suave. Consideremos el funcional $\sigma : L^2(\mathcal{O}) \to [-\infty, \infty]$ definido por

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}}|\nabla u|^2 & si \qquad u \in W_0^{1,2}(\mathcal{O}) \\ \\ +\infty & si \quad u \in L^2(\mathcal{O}) \setminus W_0^{1,2}(\mathcal{O}). \end{cases}$$

Entonces $D(\partial\sigma) = W_0^{1,2}(\mathcal{O}) \cap W^{2,2}(\mathcal{O})$ y $\vartheta \in \partial\sigma(u)$ si y solamente si $\vartheta = -\Delta u$. Por tanto son equivalentes:

1. u es solución del problema variacional $\sigma(u) = \min\limits_{\mathcal{O}\in L^2(\mathcal{O})} \sigma(\mathcal{O})$.

2. u es solución debil del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & en \quad \mathcal{O}, \\ \\ u = 0 & sobre \quad \mathcal{O}. \end{cases}$$

Capítulo 3

Existencia de soluciones

El principal objetivo de este capítulo es estudiar la existencia de soluciones para el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) \text{ en } \mathcal{O}, \\ u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \end{cases} \tag{$\mathfrak{P}$}$$

aqui $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < p < \infty$, es el $p-$Laplaciano y $f : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory verificando adecuadas condiciones de crecimiento.

Las principales referencias en este capítulos son los trabajos de Dinca [15, 16, 19].

3.1 Existencia de solución

En esta sección supondremos que la función de Carathéodory $f : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica la condición de crecimiento (2.1).

La existencia de puntos críticos no triviales para el funcional de clase $\mathcal{C}^1$ definido por $\mathfrak{F} : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ es equivalente a que el problema $(\mathcal{P})$ tiene soluciones debiles no triviales.

El resultado fundamental que será usado con esta finalidad es el Teorema del Paso de la Montaña (ver [28]).

Definición 3.1. *Sea X un espacio de Banach y $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Se dice que $c \in \mathbb{R}$ es un valor crítico de I si existe $u \in X$ con $I'(u) = 0$ y $I(u) = c$.*

Definición 3.2. *Una sucesión $(u_n) \subset X$ es una sucesión de* ***Palais-Smale*** *o* ***secesión (PS)*** *del funcional I do funcional I, si $(I(u_n))$ es acotada y $I'(u_n) \longrightarrow 0$ en X'. Se dice además que I verifica la* ***condición de Palais-Smale*** *o* ***condición (PS)****, si toda sucesión* ***(PS)*** *posee una subsucesión convergente en X.*

***Observación* 3.1.** (i) La condición de Palais-Smale no prejuzga la existencia de un valor crítico o la existencia de una sucesión de este tipo, llamada sucesión de Palais-Smale. Esta sólo dice que si tenemos una tal sucesión, entonces esta sucesión es necesariamente relativamente compacta.

(ii) Las dos hipótesis son independientes. En efecto, si $c = \inf\limits_X I$, podemos perfectamente tener una sucesión minimizante (u_n) tal que $I'(u_n) \nrightarrow 0$. Basta tomar $X = \mathbb{R}$, $I(u_n) = \operatorname{sen}(u^2)$, $c = -1$ y $u_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Entonces $I(u_n) \to -1$ y $I'(u_n) \to 2$.

(iii) Tenga en cuenta que la topología aquí considerada es la topología fuerte.

Coloquemos otro ejemplo. En primer lugar, está claro que la función $I(u) = \exp^u$ definido en $\mathbb{R}$ no satisface la condición Palais-Smale para $c = 0$. Sin embargo, lo verifica para todos los demás valores reales (simplemente porque no existe suceciones de Palais-Smale en estos niveles).

Teorema 3.1. *([28], Teorema 2.2) Sea X un espacio de Banach y $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ verificando la condición de* ***Palais-Smale (PS)****. Supongamos $I(0) = 0$ y que sean validas las siguientes condiciones:*

(a) *Existen constantes $\rho, \alpha > 0$ tal que en la esfera $\|u\| = \rho$ vale la desigualdad*

$$I(u) \geqslant \alpha;$$

(b) Existe un elemento $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ y $I(e) \leqslant 0$.

Entonces, I tiene un valor crítico $\mathfrak{c} \geqslant \alpha$. También, $\mathfrak{c}$ es caracterizado por

$$\mathfrak{c} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(t), \tag{3.1}$$

en que

$$\Gamma = \big\{\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\big\}.$$

Note que cada punto crítico u en el nivel $\mathfrak{c}$ definido por (3.1) ($I'(u) = 0, I(u) = \mathfrak{c}$) es no trivial. Por tanto, si las hipótesis del Teorema 3.1 se cumplen con $X = W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ y $I = \mathfrak{F}$, entonces se garantiza la existencia de soluciones no triviales para el problema ($\mathfrak{P}$).

A continuación se presenta interpretación del teorema anterior, siguiendo [25].

***Observación* 3.2.** La expresión "paso de la montaña" se entiende mejor si interpretamos las condiciones (a) a (b) geométricamente, o más bien geográficamente, en el caso cuando $X = \mathbb{R}^2$ y $I(u)$ representa la altitud de un punto en la superficie de la tierra plana que se proyecta verticalmente sobre u. Las condiciones (a) y (b) significa que el origen se encuentra en un cuenco rodeado de montañas que son al menos tan alto como α. La condición (b) significa que más allá de estas montañas, existe un punto más bajo e, digamos en un valle.

Entonces parece intuitivamente claro que si queremos ir continuamente de 0 a e, la mejor manera de hacerlo es ir através de un paso de montaña, que está destinado a existir. De hecho, la construcción min-máx nos dice que hacer: mirar la altitud máxima alcanzada en cada camino y encontrar un camino que minimice esta altitud máxima entre todos los caminos.

Si tomamos un camino que culmina a una altitud que es un valor regular, entonces el Lema de la Deformación construye otro camino mejor para nosotros, que culmina estrictamente más bajo. Si un camino culmina en la infinidad de las altitudes de los puntos culminantes de todos los caminos, entonces su altitud es un valor crítico y estamos en un paso de montaña.

(ii) Sin embargo, la intuición del alpinismo debe tomarse con cuidado. Así, el Teorema 3.1 es cierto incluso sin la condición de Palais-Smale cuando $X = \mathbb{R}$, por el Teorema del Valor Intermedio y el Teorema de Rolle. Falla sin la condición de Palais-Smale en dimensiones superiores a 2. Puede no existir ningún paso de montaña porque no se alcanza la altura máxima del sendero.

Aquí un ejemplo de esta situación intuitiva. Consideremos la función en dos variables

$$I(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^4,$$

entonces

$$I'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x(1 + y)^3 \\ 3x^2(1 + y)^2 + 4y^3 \end{bmatrix}$$

note que sólo hay un punto crítico en $\mathbb{R}^2$, a saber, el origen, donde $I(0, 0) = 0$. Este punto crítico es un mínimo local estricto, porque $I(x, y) \sim x^2 + y^4$ en un entorno de $(0, 0)$. Por tanto, el origen se sitúa realmente en un cuenco rodeado de montañas. Es posible bajar aún más afuera del cuenco, ya que $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} I = -\infty$. Este es un ejemplo de una función con un solo punto crítico que es un mínimo local, pero no global. Dado que no existe otro punto crítico que el mínimo local, esto significa que no existe un paso de montaña para salir del cuenco y bajar al valle más allá. Esto sólo puede suceder si los caminos de minimización van al infinito. Esta pérdida de compacidad está naturalmente relacionada con el hecho de que I no cumple la condición (PS) a nivel del min-max.

Si nos fijamos en lo que está sucediendo en las curvas $x = \pm\frac{2|y|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3(1+y)}}$, parametrizada por $-1 < y \leqslant 0$, vemos que $x \to \pm\infty$, $I' \to 0$ y $I \to 1$ cuando $y \to -1$. Moviéndonos a lo largo de estas curvas, podemos así construir sucesiones (PS) en el nivel $c = 1$ que no son relativamente compactos, por ejemplo $(y)_n = -1 + \frac{1}{n}$. Además, se puede comprobar que el nivel $c = 1$ es precisamente el min-max de I de los caminos que salen del cuenco.

Para ver esto, podemos, por ejemplo, unir $(0, 0)$ con $(5, -2)$ (sólo para elegir un punto donde $I < 0$) siguiendo la curva anterior hasta $y = -1 + \frac{1}{n}$ yendo para $y = -2$ manteniendo x_1 constante, luego uniendo $x = 5$ con $y = -2$ constante. En la propia curva $I < 1$, en el segmento x constante, su máximo tiende a 1 cuando $n \to \infty$ y en el segmento $y = -2$, $I < 0$.

***Lema* 3.1.** Si $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ es una sucesión acotada y $\mathfrak{F}'(u_n) \to 0$, $n \to \infty$, entonces (u_n) tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Desde que $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ es reflexivo, podemos extraer una subsucesión $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{n_j} \rightharpoonup u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$. Como $\mathfrak{F}'(u_{n_j}) \to 0$, tenemos que

$$\langle \mathfrak{F}'(u_{n_j}), u_{n_j} - u \rangle = \langle -\Delta_p u_{n_j} - \mathcal{N}_f(u_{n_j}), u_{n_j} - u \rangle \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

cuando $j \to \infty$.

Aserción.

$$\langle \mathcal{N}_f(u_{n_j}), u_{n_j} - u \rangle \longrightarrow 0 \ \text{ cuando } \ j \longrightarrow \infty. \tag{3.3}$$

En efecto, una vez que $u_{n_j} \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, por la inmersión de Rellich-Kondrachov, $W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\mathcal{O})$, tenemos que $u_{n_j} \to u$ en $L^{q'}(\mathcal{O})$ y note que $(\mathcal{N}(u_{n_j}))$ es acotada en $L^{q'}(\mathcal{O})$, entonces por la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$|\langle \mathcal{N}_f(u_{n_j}), u_{n_j} - u \rangle| \leqslant \|\mathcal{N}_f(u_{n_j})\|_{q'} \|u_{n_j} - u\|_q$$

tomando limite cuando $j \to \infty$, se tiene que

$$\langle \mathcal{N}_f(u_{n_j}), u_{n_j} - u \rangle \longrightarrow 0 \ \text{ cuando } \ j \longrightarrow \infty,$$

lo cual prueba la aserción.

Por tanto de (3.2) y (3.3), tenemos que

$$\langle -\Delta_p u_{n_j}, u_{n_j} - u \rangle \to 0 \ \text{ cuando } \ j \to \infty.$$

Asi, desde que el operador p-Laplaciano es del tipo (S_+) (vea Teorema 2.13), obtenemos que $u_{n_j} \to u$ en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$. □

Teorema 3.2. *Si existe $\sigma > p$ y $\xi_0 > 0$ tal que*

$$\sigma \mathcal{F}(x,\xi) \leqslant \xi f(x,\xi) \ \text{ para } \ x \in \mathcal{O}, \ |\xi| \geqslant \xi_0, \tag{3.4}$$

entonces $\mathcal{F}$ satisface la condición (PS).

Demostración. En virtud del Lema 3.1, es suficiente probar que toda sucesión $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ es acotada, para la qual la sucesión $(\mathfrak{F}(u_n))$ es acotada y $\mathfrak{F}'(u_n) \to 0$.
Como $(\mathfrak{F}(u_n))$, existe $\mathfrak{c} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{F}(u_n) \leqslant \mathfrak{c}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por

$$\mathcal{O}_n = \{x \in \mathcal{O} : |u_n(x)| \geqslant \xi_0\}, \ \ \mathcal{O}'_n = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces,

$$\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \left(\int_{\mathcal{O}_n} \mathcal{F}(x,u_n)\, dx + \int_{\mathcal{O}'_n} \mathcal{F}(x,u_n)\, dx \right) \leqslant \mathfrak{c}. \tag{3.5}$$

En lo que sigue obtendremos estimativas uniformes independientes de n para las integrales en (3.5).
Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente escogido. Si $x \in \mathcal{O}'_n$, entonces $|u_n(x)| < \xi_0$ y por la Proposición 2.18(i), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x,u_n) &\leqslant K_1|u_n(x)|^q + \gamma(x) \\ &\leqslant K_1\xi_0^q + \gamma(x), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\int_{\mathcal{O}'_n} \mathcal{F}(x, u_n)\, dx \leqslant K_1 \xi_o^q |\mathcal{O}| + \int_{\mathcal{O}} \gamma(x)\, dx = \mathfrak{C}_1. \tag{3.6}$$

Si $x \in \mathcal{O}_n$, entonces $|u_n(x)| \geqslant \xi_0$ y así por (3.4), tenemos que

$$\mathcal{F}(x, u_n) \leqslant \frac{1}{\sigma} f(x, u_n(x)) u_n(x),$$

de donde inferimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_n} \mathcal{F}(x, u_n)\, dx &\leqslant \int_{\mathcal{O}_n} \frac{1}{\sigma} f(x, u_n) u_n\, dx \\ &= \frac{1}{\sigma}\left(\int_{\mathcal{O}} f(x, u_n) u_n\, dx - \int_{\mathcal{O}'_n} f(x, u_n) u_n\, dx \right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Por (2.1), obtenemos que

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathcal{O}'_n} f(x, u_n) u_n\, dx \right| &\leqslant \int_{\mathcal{O}'_n} (K|u_n|^q + \beta(x)|u_n|)\, dx \\ &\leqslant K \xi_o^q |\mathcal{O}| + \xi_0 \int_{\mathcal{O}} \beta(x)\, dx = \mathfrak{C}_2.\end{aligned}$$

Entonces,

$$-\frac{1}{\sigma} \int_{\mathcal{O}'_n} f(x, u_n) u_n\, dx \leqslant \frac{\mathfrak{C}_2}{\sigma}. \tag{3.8}$$

Finalmente, por (3.2), (3.6), (3.7) y (3.8), sumando y sustrayendo $\int_{\mathcal{O}'_n} \mathcal{F}(x, u_n)\, dx$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\sigma}\int_{\mathcal{O}} f(x, u_n) u_n\, dx \leqslant & \frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \int_{\mathcal{O}_n} \mathcal{F}(x, u_n)\, dx \\ & - \frac{1}{\sigma}\int_{\mathcal{O}'_n} f(x, u_n) u_n\, dx \\ \leqslant & \mathfrak{c} + \mathfrak{C}_1 + \frac{\mathfrak{C}_2}{\sigma} = \mathfrak{C},\end{aligned}$$

es decir,
$$\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\sigma}\langle \mathcal{N}_f(u_n), u_n\rangle \leqslant \mathfrak{C}. \tag{3.9}$$
Por otro lado, una vez que $\mathfrak{F}'(u_n) \to 0$ cuando $n \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\langle \mathfrak{F}'(u_n), u_n\rangle| \leqslant \|u_n\|_{1,p}$ para todo $n \geqslant n_0$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$, tenemos que
$$|\langle -\Delta_p u_n, u_n\rangle - \langle \mathcal{N}_f(u_n), u_n\rangle| \leqslant \|u_n\|_{1,p},$$
es decir
$$\left| \|u_n\|_{1,p}^p - \langle \mathcal{N}_f(u_n), u_n\rangle \right| \leqslant \|u_n\|_{1,p},$$
lo que implica que
$$\|u_n\|_{1,p}^p - \langle \mathcal{N}_f(u_n), u_n\rangle \geqslant -\|u_n\|_{1,p}.$$
Entonces,
$$-\frac{1}{\sigma}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\sigma}\|u_n\|_{1,p} \leqslant -\frac{1}{\sigma}\langle \mathcal{N}_f(u_n), u_n\rangle. \tag{3.10}$$
Por (3.9) y (3.10) tenemos que
$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\sigma}\right)\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\sigma}\|u_n\|_{1,p} \leqslant \mathfrak{C}$$
y desde que $\sigma > p$, tenemos que (u_n) es acotada en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$. □

***Observación* 3.3.** Cabe resaltar que por la desigualdad (3.4): existen $\sigma > 2$ y $\sigma_0 > 0$ tal que
$$0 < \sigma\mathcal{F}(x,\xi) \leqslant \xi f(x,\xi), \quad x \in \mathcal{O},\ |\xi| \geqslant \xi_0,$$
introducido por primera vez por Ambrosetti y Rabinowitz como una condición suficiente para garantizar que $\mathfrak{F}$ satisface la condición (PS) para el caso $p = 2$.

Ahora, en virtud del Teorema 3.1 inciso (b), el próximo paso es obtener condiciones suficientes para $\mathfrak{F}$ sea acotada inferiormente en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.

***Lema* 3.2.** El funcional $\mathfrak{F}$ verifica:

(i) $\mathfrak{F}(0) = 0$.

(ii) $\mathfrak{F}$ mapea conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Demostración. *(i)* Esto se sigue de la definición de $\mathfrak{F}$.
(ii) Desde que $\mathfrak{F}'(u) = -\Delta_p u - \mathcal{N}_f(u)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}'(u)\|_* &\leqslant \|-\Delta_p u\|_* + \|\mathcal{N}_f(u)\|_* \\ &\leqslant \|u\|_{1,p}^{p-1} + \mathfrak{C}\|\mathcal{N}_f(u)\|_q\end{aligned}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.

Además, debido a la inmersión compacta $W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{O})$ y desde que $\mathcal{N}_f$ mapea conjuntos acotados de $L^q(\mathcal{O})$ en conjuntos de $L^{q'}(\mathcal{O})$, por tanto $\mathfrak{F}'$ envia conjuntos acotados de $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ en conjuntos acotados de $W^{-1,p'}(\mathcal{O})$.
Considere $v \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ arbitrário. Por el Teorema del Valor Medio, tenemos que

$$\begin{aligned}|\mathfrak{F}(v)| = |\mathfrak{F}(v) - \mathfrak{F}(0)| &= |\langle \mathfrak{F}'(tv), v\rangle| \\ &\leqslant \|\mathfrak{F}'(tv)\|_* \|v\|_{1,p}\end{aligned}$$

con $t \in (0,1)$. Por tanto, el inciso *(ii)* se obtiene usando la estimativa sobre $\mathfrak{F}'$. □

***Observación* 3.4.** Note que el inciso (ii) del Lema 3.2 es una consecuencia de la condición (2.1) y del hecho que $\|-\Delta_p u\|_* = \|u\|_{1,p}^{p-1}$.

***Observación* 3.5.** Suponga $\mathfrak{F}$ no sea acotado inferiormente. Entonces, para todo $r > 0$, existe $e \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ con $\|e\|_{1,p} \geqslant r$ tal que $\mathfrak{F}(e) \leqslant 0$. En efecto, supongamos, por contradicción, que existe algun $r > 0$ tal que $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ con $\|u\|_{1,p} \geqslant r$, se verifica $\mathfrak{F}(u) \geqslant 0$. Entonces por el Lema 3.2 *(ii)*, el conjunto $\{\mathfrak{F}(u) \ : \ \|u\|_{1,p} < r\}$ es acotado. Por tanto $\mathfrak{F}$ es acotado inferiormente, lo cual es una contradicción.

El siguiente resultado proporciona condiciones para que el funcional $\mathfrak{F}$ sea acotado inferiormente.

Teorema 3.3. *Suponga que existen números $\sigma > p$ y $\xi_1 > 0$ tal que*

$$0 < \sigma\mathcal{F}(x,\xi) \leqslant \xi f(x,\xi) \ \ para \ \ x \in \mathcal{O}, \ \xi \geqslant \xi_1, \tag{3.11}$$

entonces $\mathcal{F}$ es acotado inferiormente.

Demostración. Mostremos que si $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, $u > 0$ es tal que $|\mathfrak{M}_1(u)| > 0$, con

$$\mathfrak{M}_1(u) = \{x \in \mathcal{O} : u(x) \geqslant \xi_1\},$$

entonces $\mathfrak{F}(tu) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$.
Para $t \geqslant 1$, donotemos por

$$\mathfrak{M}_t(u) = \{x \in \mathcal{O} : tu(x) \geqslant \xi_1\}$$

y note que $\mathfrak{M}_1(u) \subset \mathfrak{M}_t(u)$, por tanto $|\mathfrak{M}_t(u)| > 0$.
Por otro lado, existe una función $\phi \in L^1(\mathcal{O})$, $\phi > 0$ tal que

$$\mathcal{F}(x,\xi) \geqslant \phi(x)\xi^\sigma \ \ \text{para} \ \ x \in \mathcal{O}, \ \xi \geqslant \xi_1. \tag{3.12}$$

En efecto, para $x \in \mathcal{O}$ y $\tau \geqslant \xi_1$, por (3.11) tenemos que

$$\frac{\sigma}{\tau} \leqslant \frac{f(x,\tau)}{\mathcal{F}(x,\tau)} = \frac{\mathcal{F}'_\tau(x,\tau)}{\mathcal{F}(x,\tau)},$$

ahora integrando de ξ_1 a ξ tenemos que

$$\ln\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^\sigma \leqslant \ln\mathcal{F}(x,\xi) - \ln\mathcal{F}(x,\xi_1),$$

lo cual implica la desigualdad (3.12) con $\phi(x) = \frac{F(x,\xi_1)}{\xi_1^\sigma} > 0$.
Ahora, sea $t \geqslant 1$. Entonces,

$$\mathfrak{F}(tu) = \frac{t^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - \left(\int_{\mathfrak{M}_t(u)} \mathcal{F}(x,tu)\, dx + \int_{\mathcal{O}\setminus\mathfrak{M}_t(u)} \mathcal{F}(x,tu)\, dx\right). \tag{3.13}$$

Si $x \in \mathfrak{M}_t(u)$ entonces $tu(x) \geqslant \xi_1$ y por (3.12)

$$\mathcal{F}(x, tu(x)) \geqslant \phi(x) t^\sigma u^\sigma.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{M}_t(u)} \mathcal{F}(x, tu)\, dx &\geqslant t^\sigma \int_{\mathfrak{M}_t(u)} \phi(x) u^\sigma\, dx \\ &\geqslant t^\sigma \int_{\mathfrak{M}_t(u)} \phi(x) u^\sigma\, dx \\ &= t^\sigma C_1(u)\end{aligned} \tag{3.14}$$

para algún $C_1(u) > 0$.
Si $x \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{M}_t(u)$, entonces $tu(x) < \xi_1$ y por la Proposición 2.18(i), tenemos que

$$|\mathcal{F}(x, tu(x))| \leqslant K_1 \xi_1^q + \gamma(x).$$

Entonces,

$$\left| \int_{\mathcal{O} \setminus \mathfrak{M}_t(u)} \mathcal{F}(x, tu)\, dx \right| \leqslant K_1 \xi_1^q |\mathcal{O}| + \int_{\mathcal{O}} \gamma(x)\, dx = C_2. \tag{3.15}$$

Por (3.13), (3.14) y (3.15), tenemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(tu) &= \frac{t^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_{\mathfrak{M}_t(u)} \mathcal{F}(x, tu)\, dx - \int_{\mathcal{O} \setminus \mathfrak{M}_t(u)} \mathcal{F}(x, tu)\, dx \\ &\leqslant \frac{t^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - t^\sigma C_1(u) - \int_{\mathcal{O} \setminus \mathfrak{M}_t(u)} \mathcal{F}(x, tu)\, dx \\ &\leqslant \frac{t^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - t^\sigma C_1(u) + C_2 \longrightarrow -\infty \ \text{ cuando } \ t \to +\infty,\end{aligned} \tag{3.16}$$

una vez que $\sigma > p$. $\square$

El siguiente resultado será necesario para obtener una caracterización de la solución no trivial del problema $(\mathcal{P})$.

***Lema* 3.3.** (i) Si $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ es una solución del problema ($\mathfrak{P}$) tal que

$$f(x,\xi) \geqslant 0, \;\; x \in \mathcal{O}$$

y además $\xi \leqslant 0$, entonces $u \geqslant 0$.

(ii) Si $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ es una solución del problema ($\mathfrak{P}$) tal que

$$f(x,\xi) \leqslant 0,$$

$x \in \mathcal{O}$ y además $\xi \geqslant 0$, entonces $u \leqslant 0$.

Demostración. (i) Sea $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ una solución del problema ($\mathfrak{P}$) y denotemos $\mathcal{O}^- = \{x \in \mathcal{O} : u(x) < 0\}$. Definamos $u^- = \max\{-u, 0\}$. Por la Proposición 2.15, $u^- \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, y

$$\nabla u^- = \begin{cases} -\nabla u \;,\; x \in \mathcal{O}, \\ 0 \;,\; x \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^-. \end{cases}$$

Desde que

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- \, dx = \int_{\mathcal{O}} f(x,u) u^- \, dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- \, dx + \int_{\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}^-} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- \, dx = \int_{\mathcal{O}} f(x,u) u^- \, dx \\ + \int_{\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}^-} f(x,u) u^- \, dx, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$-\int_{\mathcal{O}^-} |\nabla u|^p \, dx = -\int_{\mathcal{O}^-} f(x,u) u \, dx \geqslant 0.$$

Por tanto, $\nabla u = 0$ c.s. en $\mathcal{O}^-$; de donde obtenemos que $\nabla u^- = 0$ c.s. en $\mathcal{O}$.

Entonces, $\|u^-\|_{1,p} = 0$, entonces $u^- = 0$ c.s. en $\mathcal{O}$. Por tanto $|\mathcal{O}^-| = 0$, esto es, $u \geqslant 0$ c.s. en $\mathcal{O}$.
(ii) Seguir el mismo razonamiento que (i).

$\square$

Ahora probaremos el principal resultado de este capítulo.

Teorema 3.4. *Sea $f : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Carathéodory que verifica:*

(i) *Existe $q \in (1, p^\star)$ tal que*

$$|f(x,\xi)| \leqslant c(|\xi|^{q-1} + 1) \;\; \textit{para} \;\; x \in \mathcal{O}, \;\xi \in \mathbb{R},$$

en que $c > 0$.

(ii) *Se cumple que*

$$\limsup_{\xi \to 0} \frac{f(x,s)}{|\xi|^{p-2}s} < \lambda_1 \textit{ uniformemente con } x \in \mathcal{O},$$

donde λ_1 es el primer autovalor de $-\Delta_p$ en $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.

(iii) *Existen constantes $\sigma > p$ y $\xi_0 > 0$ tal que*

$$0 < \sigma \mathcal{F}(x,\xi) \leqslant \xi f(x,s) \;\; \textit{para} \;\; x \in \mathcal{O}, \;|\xi| \geqslant \xi_0.$$

Entonces el problema ($\mathfrak{P}$) tiene soluciones no triviales $u^- \leqslant 0 \leqslant u^+$.

Demostración. Probemos que el problema ($\mathfrak{P}$) tiene una solución no trivial $u^+ \geqslant 0$ (argumentando similarmente se prueba la existencia de la solución u^-). Definimos la función $f^+ : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f^+(x,s) = f\left(x, \frac{\xi + |\xi|}{2}\right)$, es decir,

$$f^+(x,\xi) = \begin{cases} 0, & \text{si } \xi \leqslant 0, \\ f(x,\xi), & \text{si } \xi > 0, \end{cases}$$

y sea $\mathcal{F}^+ : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{F}^+(x, \xi) = \int_0^{\xi} f_+(x, \sigma)\, d\sigma.$$

Las siguientes afirmaciones son válidas:

(I) La función f^+ es de Carathéodory y satisface

$$|f^+(x, \xi)| \leqslant C(|\xi|^{q-1} + 1) \quad x \in \mathcal{O},\ \xi \in \mathbb{R};$$

(II) $\limsup\limits_{\xi \longrightarrow 0} \frac{f^+(x,\xi)}{|\xi|^{p-2}\xi} < \lambda_1$ uniformemente con $x \in \mathcal{O}$;

(III) $\sigma \mathcal{F}^+(x, \xi) \leqslant f^+(x, \xi)$, $x \in \mathcal{O}$, $|\xi| \geqslant \xi_0$;

(IV) $0 < \sigma \mathcal{F}^+(x, s) \leqslant \xi f^+(x, \xi)$, $x \in \mathcal{O}$, $\xi \geqslant \xi_0$.

En efecto,

Prueba de (I). Como $f^+(x, \xi) = f\left(x, \frac{\xi + |\xi|}{2}\right)$, tenemos que f^+ es una función de Carathéodory, desde que f es de Carathéodory. Note que

$$|f^+(x, \xi)| = \begin{cases} 0 \leqslant C(|\xi|^{q-1} + 1) \ \text{ si } \ \xi \leqslant 0 \\ |f(x, \xi)| \leqslant C(|\xi|^{q-1} + 1) \ \text{ si } \ \xi > 0 \text{ por } (I). \end{cases}$$

Entonces, $\sigma \mathcal{F}^+(x, \xi) \leqslant \xi f^+(x, \xi)$, $x \in \mathcal{O}$, $|\xi| \geqslant \xi_0$.

Prueba de (II). Note que

$$\begin{aligned} \limsup_{\xi \to 0} \frac{f_+(x, \xi)}{|\xi|^{p-2}\xi} &= \max\left\{ \limsup_{\xi \uparrow 0} \frac{f^+(x, \xi)}{|\xi|^{p-2}\xi},\ \limsup_{\xi \downarrow 0} \frac{f^+(x, \xi)}{|\xi|^{p-2}\xi} \right\} \\ &= \max\left\{ 0, \limsup_{\xi \downarrow 0} \frac{f^+(x, \xi)}{|\xi|^{p-2}\xi} \right\} < \lambda_1 \end{aligned}$$

uniformemente con $x \in \mathcal{O}$.

Prueba de (III).

$$\mathcal{F}^+(x,\xi) = \int_0^{\xi} f^+(x,\sigma)\,d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{si } \xi \leqslant 0, \\ \int_0^{\xi} f(x,\sigma)\,d\sigma = \mathcal{F}(x,\xi), & \text{si } \xi > 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$\sigma\mathcal{F}^+(x,\xi) = \begin{cases} 0 \leqslant \xi f^+(x,\xi) = 0, & \text{si } \xi \leqslant 0, \\ \sigma\mathcal{F}(x,\xi) \leqslant \xi f(x,\xi) = \xi f_+(x,\xi), & \text{si } \xi > 0. \end{cases}$$

Prueba de (IV). Debido a *(III)*, tenemos que $\sigma\mathcal{F}^+(x,\xi) \leqslant \xi f^+(x,\xi)$ si $\xi > 0$; en particular, si $|\xi| \geqslant \xi_0 > 0$. Como $F^+(x,\xi) = F(x,\xi)$ si $\xi > 0$, obtenemos que (III) prueba (IV).

Tomando en cuenta $(I)-(IV)$ obtenemos que el funcional $\mathfrak{F}^+ : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ definida por

$$\mathfrak{F}^+(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_{\mathcal{O}} \mathcal{F}^+(x,u)\,dx,$$

posse un punto crítico no trivial $u^+ \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.

Esto se deduce al aplicar el Teorema 3.1 con $I = \mathfrak{F}^+$, esto es posible pues los resultados para $\mathfrak{F}$ son válidos para $\mathfrak{F}^+$, con f sustituido por f^+. Note que $\mathfrak{F}^+(0) = 0$.

Por *(I)-(II)* y el Teorema 3.1, existen $\alpha, \rho > 0$ tal que $\mathfrak{F}^+_{|_{\|u\|_{1,p}=\rho}} \geqslant \alpha$. Además por (IV), Teorema 3.3 (I) y el Lema 3.2 (vea también la Observación 3.5), existe $\mathfrak{e} \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ con $\|\mathfrak{e}\|_{1,p} \geqslant \rho$ tal que $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{e}) \leqslant 0$.

Note que, por (III) y debido al Teorema 3.2, el funcional $\mathfrak{F}^+$ satisface la condición (PS).

El punto critico no trivial $u^+ \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ (cuya existencia es garantizado por el Teorema 3.1) verifica

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla u^+|^{p-2}\nabla u^+ \nabla v\,dx = \int_{\mathcal{O}} f^+(x,u^+)v\,dx \tag{3.17}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.

Desde que $f^+(x,s) = 0$ para $x \in \mathcal{O}$, $s \leqslant 0$ y debido al Lema 3.3, tenemos que $u^+ \geqslant 0$.

Ahora, por la definición de f^+ y (3.17), tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla u^+|^{p-2} \nabla u^+ \nabla v \, dx = \int_{\mathcal{O}} f(x,u^+) v \, dx$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$. Lo que prueba el resultado. $\square$

Observación **3.6.** El Teorema anterior fue originalmente establecido por Ambrosetti y Rabinowitz (ver Corolário 3.11 en [28], en el caso cuando $p = 2$). Este resultado es una referencia bastante citada como un clásico resultado de existencia para problemas de Dirichlet con la no linealidad en la parte derecha de la ecuación con un crecimiento superlineal (vea por ejemplo las referencias [28, Corolário 2.23], [19, Teorema 6.9], [32, Teorema 6.2]).

En este sentido, el teorema prueba la existencia de soluciones para problemas involucrando el p-Laplaciano con una no linealidad en el lado derecho con crecimiento más rápido que la potencia "$p - 1$", la condición (iii) implica

$$\lim_{|\xi| \longrightarrow \infty} \frac{f(x,\xi)}{|\xi|^{p-2}\xi} = +\infty. \tag{3.18}$$

Note también que por (3.18) se muestra que la generalidad del Teorema anterior no es perdida si en (i) $q \in (p, p^*)$ en lugar de $(1, p^*)$.
Por otro lado, de forma análoga a la prueba del Teorema 3.3 se muestra que las condiciones (iii) y (i) del Teorema 3.4 implican la existencia de alguna $\phi \in L^\infty(\mathcal{O})$, $\phi > 0$, tal que $\mathcal{F}(x,\xi) \geqslant \phi(x)|\xi|^\sigma$ para $x \in \mathcal{O}$ y $|\xi| \geqslant \xi_0$. Esto muestra que el potencial $\mathcal{F}$ crece más rápido que $|\xi|^p$ o más lento que $|\xi|^p$ para más referencias el consulte Costa-Magalhaes [8].

Capítulo

4

Existencia de soluciones para el problema de Dirichlet envolviendo el operador $1-$Laplaciano

Este capítulo esta dedicado al estudio del problema de Dirichlet envolviendo el operador $1-$Laplaciano con una no linealidad de crecimiento tipo subcrítico, más precisamente

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = f(x,u), \text{ en } \mathcal{O}, \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{4.1}$$

en que $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$ es un abierto acotado con frontera Lipschitz y $0 < q < \frac{1}{N-1}$, la función $f : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory verificando las hipótesis:

(i) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\limsup_{\xi \to 0} \frac{|f(x,\xi)|}{|\xi|^\alpha} < \infty \text{ uniformemente en } x \in \mathcal{O}.$$

(ii) Existe $q \in \left(0, \frac{1}{N-1}\right)$ y $C > 0$ tal que

$$|f(x,\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|^q), \; x \in \mathcal{O} \;\; \xi \in \mathbb{R}.$$

(iii) Existe $\kappa > 1$ y $\xi_0 > 0$ tal que

$$0 < \kappa F(x,\xi) \leqslant \xi f(x,\xi), \; x \in \mathcal{O}, \; |\xi| \geqslant \xi_0,$$

donde $F(x,\xi) = \int_0^\xi f(x,t)\,dt$.

El objetivo es obtener soluciones no triviales (en el sentido de la Definición 4.1), para este capítulo seguiremos los trabajos [2, 5, 26, 12, 10]. Ahora presentamos el principal resultado del capítulo.

Teorema 4.1. *Bajo las hipótesis anteriores, existen por lo menos dos soluciones no triviales $v, w \in BV(\mathcal{O})$ del problema (4.1). Adicionalmente, $v \leqslant 0 \leqslant w$ c.s. $x \in \mathcal{O}$.*
La estrategia para probar la existencia será considerar aproximaciones de problemas del $p-$Laplaciano y luego el límite cuando $p \to 1^+$ de sus soluciones no triviales, tomaremos la solución w_p por ejemplo. Para esto, es fundamental lograr la existencia de una constante positiva $\widetilde{C}$ independiente de p tal que

$$\|w_p\|_{W_0^{1,1}(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C},$$

para que estén uniformemente acotados en $W_0^{1,1}(\mathcal{O})$. Sin embargo, tenemos que comprobar cuidadosamente que su límite no sea la solución trivial.

Definición 4.1. *Decimos que $u \in BV(\mathcal{O})$ es una solución de (4.1) si existe un campo vectorial $\mathbf{z} \in X_N(\mathcal{O})$ con $||\mathbf{z}||_\infty \leqslant 1$ tal que*

(1) $-div\, \mathbf{z} = f(x,u)$ *en* $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$,

(2) $(\mathbf{z}, Du) = |Du|$ *como medida sobre* $\mathcal{O}$,

(3) $[\mathbf{z}, \varphi] \in sign(-u)$ *sobre* $\partial\mathcal{O}$.

***Observación* 4.1.** Note que nuestra solución pertenece al espacio $BV(\mathcal{O}) \subset L^{\frac{N}{N-1}}(\mathcal{O})$. Asi la condición (ii) satisfecha por la función f implica que

$$|f(x,u(x))| \leq C(1+|u(x)|^q) \in L^{\frac{N}{q(N-1)}}(\mathcal{O})$$

para $1 < q < \frac{1}{N-1}$, con lo cual $f(\cdot,u) \in L^N(\mathcal{O})$. Del inciso (1) de la definición anterior tenemos que div $\mathbf{z} \in L^N(\mathcal{O})$, asi la teoría de Anzellotti es aplicable.

***Observación* 4.2.** Primeramente, la condición (1) de la Definición 4.1 solo nos permite tomar funciones de test en el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$. Observamos que, como consecuencia de la teoría de Anzellotti, podemos elegir cualquier función $w \in BV(\mathcal{O})$ como una función test. Entonces, por la formula de Green, tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}}(\mathbf{z},Dw) - \int_{\mathcal{O}} f(x,u)w = \int_{\partial\mathcal{O}} w[\mathbf{z},\varphi]d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Observe que el campo vectorial $\mathbf{z}$ no necesariamente es único. Por ejemplo, podemos escoger $\mathbf{z} = (1,0,\ldots,0)$ ó $\mathbf{z} = (0,1,\ldots,0)$ para verificar que $u \equiv 0$ es solución de (1).

***Lema* 4.1.** Dado $u \in BV(\mathcal{O})$ y $\mathbf{z} \in L^\infty(\mathcal{O};\mathbb{R}^N)$ con $||\mathbf{z}||_\infty \leqslant 1$, div $\mathbf{z} \in L^N(\mathcal{O})$, $(\mathbf{z},Du) = |Du|$ y $[\mathbf{z},\nu] \in$ sign$(-u)$ sobre $\partial\mathcal{O}$. Sea $\omega_u : BV(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal definido por

$$\omega_u(v) := -\int_{\mathcal{O}} v \,\text{div}\, \mathbf{z}.$$

Entonces, $\omega_u \in \partial||u||$.

Demostración. Note que $\omega_u \in BV(\mathcal{O})^{'}$ como consecuencia de la teoría de Anzellotti. En efecto, por la fórmula de Green y $||\mathbf{z}||_\infty \leqslant 1$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
|\omega_u(v)| &\leqslant \left|\int_{\mathcal{O}} (\mathbf{z}, Dv)\right| + \left|\int_{\partial\mathcal{O}} v[\mathbf{z},\nu] d\mathcal{H}^{N-1}\right| \\
&\leqslant \int_{\mathcal{O}} |Dv| + \int_{\partial\mathcal{O}} |v| d\mathcal{H}^{N-1},
\end{aligned}
$$

para cualquier $v \in BV(\mathcal{O})$. Entonces $\omega_u \in BV(\mathcal{O})'$ y $\|\omega_u\| \leqslant 1$.
Por otro lado, para todo $v \in BV(\mathcal{O})$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\omega_u(v-u) &= \int_{\mathcal{O}} -\text{div}\, \mathbf{z}(v-u) \\
&= \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{z}, D(v-u)) - \int_{\partial\mathcal{O}} (v-u)[\mathbf{z},\nu] d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{z}, Dv) - \int_{\mathcal{O}} |Du| - \int_{\partial\mathcal{O}} (v[\mathbf{z},\nu] + |u|) d\mathcal{H}^{N-1} \\
&\leqslant ||\mathbf{z}||_\infty \int_{\mathcal{O}} |Dv| - \int_{\mathcal{O}} |Du| + ||\mathbf{z}||_\infty \int_{\partial\mathcal{O}} |v| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\partial\mathcal{O}} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \\
&\leqslant ||v|| - ||u||.
\end{aligned}
$$

□

Sea $\mathcal{J} : BV(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$
\mathcal{J}(u) = \int_{\mathcal{O}} |Du| + \int_{\partial\mathcal{O}} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\mathcal{O}} F(x,u).
$$

Definición 4.2. *Diremos que $u_0 \in BV(\mathcal{O})$ es un punto crítico del funcional $\mathcal{J}$ si existe $\mathbf{z} \in L^\infty(\mathcal{O};\mathbb{R}^N)$ con $||\mathbf{z}||_\infty \leqslant 1$ tal que*

($\circledast$) $-\int_{\mathcal{O}} w$ *div* $\mathbf{z} = \int_{\mathcal{O}} f(x,u_0)w$ *para todo* $w \in BV(\mathcal{O})$,

($\circledast$) $(\mathbf{z}, Du_0) = |Du_0|$ *en* $\mathcal{O}$

($\circledast$) $[\mathbf{z},\nu] \in$ *sign*$(-u_0)$ *sobre* $\partial\mathcal{O}$.

En virtud del Lema 4.1, el funcional dado por $\omega(w) = -\int_{\mathcal{O}} w$ div $\mathbf{z}$ pertenece a $\partial\|u_0\|$. Note que los puntos críticos de $\mathcal{J}$ coincide con las soluciones del problema (4.1).

4.1 Prueba del Teorema 4.1

4.1.1 Existencia de soluciones no triviales (Problema Aproximado)

Probaremos que el problema (4.1) posee una solución no trivial $w \geqslant 0$. Un argumento similar muestra que existe una solución no trivial $v \leqslant 0$.
Sea $\tilde{p} = \min\{1+\alpha, \kappa, q+1\}$. Para cada $1 < p < \tilde{p}$, considere el **problema aproximado**

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = g(x,u), \text{ en } \mathcal{O}, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $g(x,\xi) = f(x,\xi)|\xi|^{p-2}s$. Por nuestras hipótesis y la elección de p̃, las siguientes afirmaciones son válidas para todo $p \in (1,\tilde{p})$:

(a) $|g(x,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|^q)$ con $0 < q < p^* - 1$,

(b) $\limsup\limits_{\xi\to 0} \frac{g(x,\xi)}{|\xi|^{p-2}\xi} = 0$ uniformemente con $x \in \mathcal{O}$,

(c) $0 < \kappa g(x,\xi) \leqslant \xi f(x,\xi)$ para $x \in \mathcal{O}$, $|\xi| \geqslant \xi_0$ y $\kappa > p$.

Note que como consecuencia de $(f_1), (f_2)$ y (f_3) las afirmaciones $(a), (b)$ y (c) son verdaderas. En efecto, para mostrar (a), debido a (f_2) se tiene que $q \in (0, \frac{1}{N-1})$ y para $p \in (1, \widetilde{p})$,

$$|g(x,\varsigma)| < C(1+|\varsigma|^q), \ q \in (0, p^\star - 1)$$

una vez que $0 < q < p^\star - 1 < \frac{1}{N-1}$.

Para (b), por (f_1) existe $\alpha > 0$ tal que

$$\limsup_{\xi\to 0} \frac{|f(x,\xi)|}{|\xi|^\alpha} < \infty.$$

Dado $p \in (0, \widetilde{p})$, se tiene que $p < \alpha$, por tanto

$$\begin{aligned} \limsup_{\xi \to 0} \frac{|g(x,\xi)|}{|\xi|^{p-1}} &= \limsup_{\xi \to 0} \frac{|f(x,\xi)||\xi|^{p-1}}{|\xi|^{p-1}} \frac{|\varsigma|^{\alpha}}{|\xi|^{\alpha}} \\ &< \limsup_{\xi \to 0} \frac{f(x,\xi)}{|\xi|^{\alpha}} |\xi|^{\alpha} \to 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para probar (c), observamos usando integración por partes tenemos, para cada $x \in \mathcal{O}$

$$G(x,\xi) = F(x,\xi)|\xi|^{p-1} - (p-1) \int_0^{\xi} F(\tau)|\tau|^{p-2}\, d\tau$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{g(x,\xi)\xi}{G(x,\xi)} &= \frac{f(x,\xi)|\xi|^{p-1}\xi}{F(x,\xi)|\xi|^{p-1} - (p-1)\int_0^{\xi} F(\tau)|\tau|^{p-2}\, d\tau} \\ &= \frac{g(x,\xi)\xi}{F(x,\xi) - (p-1)\frac{1}{|\xi|^{p-1}} \int_0^{\xi} F(x,\tau)|\tau|^{p-2}\, d\tau} \end{aligned} \tag{4.4}$$

cuando $\xi > 0$. Una vez $\lim_{\xi \to \infty} F(x,\xi) = +\infty$ y por la regla de L'Hôpital, se sigue que

$$\lim_{\xi \to +\infty} (p-1) \frac{1}{|\xi|^{p-1}} \int_0^{\xi} F(x,\tau)|\tau|^{p-2}\, d\tau = +\infty.$$

Entonces

$$\frac{g(x,\xi)\xi}{G(x,\xi)} \geqslant \frac{f(x,\xi)\xi}{F(x,\xi)} \geqslant \kappa$$

para ξ suficientemente grande.

Entonces, es conocido que el problema (4.2) tiene soluciones no triviales $v_p \leqslant 0 \leqslant w_p$ (ver capítulo 2). Estas soluciones son obtenidas usando el Teorema 3.1 de Ambrosetti-Rabinowitz [28] para los funcionales $\mathcal{J}_p^{\pm} : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$

dados por

$$\mathcal{J}_p^{\pm}(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p - \int_{\mathcal{O}} G_{\pm}(x,u),$$

donde $F_{\pm}(x,\xi) = \int_0^{\xi} g_{\pm}(x,t)\, dt$, siendo $g_{\pm} : \mathcal{O}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definido por

$$g_{+}(x,\xi) = \begin{cases} 0 \text{ si } \xi \leqslant 0, \\ g(x,\xi) \text{ si } \xi > 0, \end{cases} \qquad g_{-}(x,\xi) = \begin{cases} g(x,\xi) \text{ si } \xi \leqslant 0, \\ 0 \text{ si } \xi > 0. \end{cases}$$

Esto es, para soluciones no negativas w_p usaremos el funcional $\mathcal{J}_p^{+}$ (mientras que el funcional $\mathcal{J}_p^{-}$ será usado para la solución no negativa v_p). Ahora considerando el funcional

$$I_p(u) = \mathcal{J}_p^{+}(u) + \frac{p-1}{p}|\mathcal{O}|.$$

Por la desigualdad de Young, tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^{p_1} \leqslant \frac{p_1}{p_2}\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^{p_2} + \frac{p_2-p_1}{p_2}|\mathcal{O}|,\ 1\leqslant p_1\leqslant p_2,$$

entonces,

$$I_{p_1}(u) \leqslant I_{p_1}(u),\ \text{para } p_1 \leqslant p_2,$$

es decir el funcional I_p es no decreciente con respecto a p. Por otro lado, fijando $0<\phi\in\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathcal{O})$ y desde que $I_p(t\phi)\to-\infty$ cuando $t\to\infty$, entonces podemos tomar $e = T\phi$ (para algún $T>0$) tal que $I_{\tilde{p}}(e)<0$. Entonces, debido a la monoticidad del funcional energia, obtenemos que

$$I_p(e) < 0 \quad \text{para todo } p\in(1,\tilde{p}).$$

Asi mismo, debido al hecho que los puntos críticos de J_p^{+} son determinados únicamente por puntos críticos de I_p, entonces $u\equiv 0$ es un mínimo local de I_p

y $w_p \geqslant 0$ es punto crítico no trivial de I_p el cual se obtiene usando el Teorema 3.1. Es decir, satisface

$$I_p(w_p) = \inf_{\gamma \in \Gamma_p} \max_{t \in [0,1]} I_p(\gamma(t)),$$

donde

$$\Gamma_p = \left\{ \gamma \in \mathcal{C}\left([0,1], W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \right) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e \right\}.$$

A continuación afirmamos que la sucesión $(I_p(w_p))_{1<p<\tilde{p}}$ es creciente. En efecto, sea $1 < p_1 < p_2 < \tilde{p}$ y gracias a la monoticidad de I_p y el hecho que $\Gamma_{p_2} \subset \Gamma_{p_1}$ (desde que $W_0^{1,p_2}(\mathcal{O}) \subset W_0^{1,p_1}(\mathcal{O})$), tenemos que

$$\begin{aligned} I_{p_1}(w_{p_1}) &= \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_1}} \max_{t \in [0,1]} I_{p_1}(\gamma(t)) \\ &\leqslant \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_2}} \max_{t \in [0,1]} I_{p_1}(\gamma(t)) \\ &\leqslant \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_2}} \max_{t \in [0,1]} I_{p_2}(\gamma(t)) \\ &= I_{p_2}(w_{p_2}) \end{aligned}$$

y la afirmación esta probada. Asi, para $p_0 \in (1, \tilde{p})$ fijado, tenemos que $I_p(w_p) \leqslant I_{p_0}(w_{p_0})$ para todo $p \in (1, p_0)$ y entonces

$$\frac{1}{p} \int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p - \int_{\mathcal{O}} G(x, w_p) \leqslant C \quad \text{para todo } p \in (1, p_0), \tag{4.5}$$

con $C = C(p_0) > 0$ independiente de p. Observe que se esta escribiendo $G(x, w_p)$ en lugar de $G_+(x, w_p)$ una vez que $w_p \geqslant 0$ (una observación analoga vale para $g_+(x, w_p)$).

Denotemos por $\mathcal{O}_p = \{x \in \mathcal{O} : w_p(x) \leqslant \xi_0\}$, para cualquier $p \in (1, p_0)$ (observe que este conjunto es medible). Entonces, por la condición (a) y la definición de $G(x, \xi)$, tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_p} G(x, w_p) \leq C\xi_0(1+\xi_0^q)|\mathcal{O}| = C_1, \tag{4.6}$$

donde C_1 es independiente de p. También, debido a la condición (c) y desde que w_p es una solución, entonces

$$\int_{\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_p} G(x, w_p) \leqslant \frac{1}{\kappa}\int_{\mathcal{O}} w_p g(x, w_p) = \frac{1}{\kappa}\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p. \tag{4.7}$$

Sustituyendo (4.6) y (4.7) en (4.5), tenemos que

$$\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p \leqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p \leqslant C + C_1.$$

Entonces, desde que $\kappa > p_0$, concluimos que

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p \leqslant \tilde{C} \quad \text{para todo } p \in (1, p_0), \tag{4.8}$$

para alguna constante positiva $\tilde{C} = \tilde{C}(p_0)$, independiente de p.

Esta última desigualdad (4.8) permite establecer la siguiente afirmación:

Aserción. Existe un campo vectorial acotado $\mathbf{z} \in L^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^N)$ con $||\mathbf{z}||_\infty \leqslant 1$ tal que

$$|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p \rightharpoonup \mathbf{z}, \;\; \text{débil en } L^r(\mathcal{O}; \mathbb{R}^N) \;\; \text{para todo } 1 \leqslant r < \infty, \tag{4.9}$$

cuando $p \to 1^+$. En particular,

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p \cdot \nabla\varphi \to \int_{\mathcal{O}} \mathbf{z}\cdot\nabla\varphi \;\text{ para todo } \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathcal{O}). \tag{4.10}$$

En efecto, para todo $q \in [1, p')$ por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^{(p-1)q} &\leqslant \left(\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p \right)^{\frac{(p-1)q}{p}} |\mathcal{O}|^{1-\frac{(p-1)q}{p}} \\ &\leqslant \widetilde{C}^{\frac{(p-1)q}{p}} |\mathcal{O}|^{1-\frac{(p-1)q}{p}}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Note que

$$\||\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p\|_q^q = \int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^{q(p-1)}\, dx. \tag{4.12}$$

Por (4.11)-(4.12), la sucesión $(|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p)$ es limitada en $L^q(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, por tanto por la Proposición 2.10, existe un campo $z_q \in L^q(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ tal que a menos de subsucesión

$$|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \rightharpoonup z_q \in L^q(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N) \text{ para todo } 1 < q \leqslant \infty.$$

Ahora usando un argumento de diagonal se prueba que el limite z no depende de z, esto es

$$|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \rightharpoonup z \in L^q(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N) \text{ para todo } 1 < q \leqslant \infty.$$

Ahora note que una vez que la norma en L^q es semicontinua inferiormente y gracias a la desigualdad (4.11), tenemos la estimativa

$$\begin{aligned}\|z\|_q &\leqslant \liminf_{p \to 1^+} \||\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p\|_q \\ &\leqslant \widetilde{C}^{\frac{(p-1)q}{p}} |\mathcal{O}|^{1-\frac{(p-1)q}{p}} \\ &\leqslant |\mathcal{O}|^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{4.13}$$

para todo $q \in (1, \infty)$, por tanto tomando limite $q \to \infty$, obtenemos que $z \in L^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ y $\|z\|_\infty \leqslant 1$.

Por otro lado, por (4.8) y la desigualdad de Young, tenemos que

$$\|w_p\| \leqslant \int_{\partial\mathcal{O}} |w_p| d\mathcal{H}^{N-1} + \frac{1}{p}\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p + \frac{p-1}{p}|\mathcal{O}| \leqslant \tilde{C} + |\mathcal{O}|,$$

asi la sucesión $(w_p)_{p>1}$ es acotada en $BV(\mathcal{O})$. Entonces, existe $w \in BV(\mathcal{O})$ tal que, a menos de una subsecesión,

(A) $w_p \to w$, en $L^m(\mathcal{O})$, para $1 \leqslant m < \frac{N}{N-1}$.

(B) $w_p(x) \to w(x)$, casi siempre $x \in \mathcal{O}$.

(C) Existe $g \in L^m(\mathcal{O})(1 \leqslant m < \frac{N}{N-1})$ tal que $|w_p(x)| \leqslant g(x)$.

Observe que $w \geqslant 0$ (una vez que $w_p \geqslant 0$ para todo $p > 1$). Entonces, debido a (B) y del hecho que $f(x,s)$ es una función de Carathéodory, tenemos que

$$g(x, w_p(x)) \to g(x, w(x)), \quad \text{c.s. } x \in \mathcal{O}.$$

Además, de (C) deducimos que

$$|g(x, w_p(x))| \leqslant C(1 + |w_p(x)|^q) \leqslant C(1 + h(x)^q) \in L^N(\mathcal{O}).$$

Consecuentemente, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathcal{O}} g(x, w_p)\varphi \to \int_{\mathcal{O}} g(x, w)\varphi \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathcal{O}). \tag{4.14}$$

Usando (4.10) y (4.14) tenemos que

$$-\operatorname{div} \mathbf{z} = g(x, w) \text{ en } \mathcal{D}'(\mathcal{O}). \tag{4.15}$$

Con la finalidad de probar que $(\mathbf{z}, Dw) = |Dw|$, notamos que es suficiente mostrar $\langle |Dw|, \varphi = \langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle\rangle$ para todo $0 \leqslant \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathcal{O})$. Desde que $||\mathbf{z}||_\infty \leqslant 1$ y por (2.10), no es difícil probar la desigualdad $\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle \geqslant \langle |Dw|, \varphi \rangle$. Debido a la definición de $(\mathbf{z}, Dw)$, es suficiente probar que:

$$-\int_{\mathcal{O}} w \text{ div } \mathbf{z}\, \varphi - \int_{\mathcal{O}} w\, \mathbf{z}\cdot\nabla\varphi \geqslant \int_{\mathcal{O}} |Dw|\varphi\ \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathcal{O}) \quad \varphi \geqslant 0. \tag{4.16}$$

Con esta finalidad, tome $0 \leqslant w_p\varphi \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ como una función test en el problema (4.2), entonces tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p\varphi + \int_{\mathcal{O}} w_p|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\cdot\nabla\varphi = \int_{\mathcal{O}} g(x,w_p)w_p\varphi. \tag{4.17}$$

Ahora se va estimar la primera integral en (4.17), por la desigualdad de Young:

$$\int_{\mathcal{O}} \varphi|\nabla w_p| \leqslant \frac{1}{p}\int_{\mathcal{O}}\varphi|\nabla w_p|^p + \frac{p-1}{p}\int_{\mathcal{O}}\varphi.$$

Usando la semicontinuidad inferior del funcional involucrado, tenemos que

$$\begin{aligned}\liminf_{p\to1^+}\int_{\mathcal{O}}\varphi|\nabla w_p|^p &\geqslant \liminf_{p\to1^+}\int_{\mathcal{O}}\varphi|\nabla w_p|\\ &\geqslant \int_{\mathcal{O}}\varphi|Dw|.\end{aligned}$$

Por otro lado, por (A) y (4.9)

$$\int_{\mathcal{O}} w_p|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\cdot\nabla\varphi \to \int_{\mathcal{O}} w\,\mathbf{z}\cdot\nabla\varphi \quad \text{cuando } p\to1^+.$$

El lado derecho de (4.17) será analizado a continuación. Note que de

$$|g(x,w_p)w_p\varphi| \leqslant MC|w_p|(1+|w_p|^q) \leqslant C_1h(x)(1+h(x)^q) \in L^1(\mathcal{O})$$

y de la convergencia puntual, en virtud Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, se obtiene que

$$\int_{\mathcal{O}} g(x,w_p)w_p\varphi \to \int_{\mathcal{O}} g(x,w)w\varphi = -\int_{\mathcal{O}} \operatorname{div} \mathbf{z}\, w\varphi.$$

Entonces, tomando el límite cuando $p \to 1^+$ en (4.17), obtenemos la desigualdad que queriamos (4.16) para concluir que

$$(\mathbf{z}, Dw) = |Dw|. \tag{4.18}$$

Ahora, mostraremos que $[\mathbf{z},\nu] \in \operatorname{sign}(-w)$ sobre $\partial\mathcal{O}$. No es difícil probar que este hecho es equivalente a mostrar que

$$\int_{\partial\mathcal{O}} (|w| + w[\mathbf{z},\nu])d\mathcal{H}^{N-1} = 0, \tag{4.19}$$

pues $|[\mathbf{z},\nu]| \leqslant ||\mathbf{z}||_\infty \leqslant 1$. Desde que $-w[\mathbf{z},\nu] \leqslant ||\mathbf{z}||_\infty |w| \leqslant |w|$ y así

$$\int_{\partial\mathcal{O}} (|w| + w[\mathbf{z},\nu])d\mathcal{H}^{N-1} \geqslant 0,$$

queda por probar la desigualdad inversa. Para esto, tomemos $w_p - \varphi$, con $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathcal{O})$, como una función test en (4.2), obtenemos

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p = \int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p \cdot \nabla\varphi + \int_{\mathcal{O}} g(x,w_p)(w_p - \varphi). \tag{4.20}$$

Entonces, por la desigualdad de Young, tenemos que

$$\begin{aligned} p\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p| &\leqslant \int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p + (p-1)|\mathcal{O}| \\ &= \int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p \cdot \nabla\varphi + \int_{\mathcal{O}} g(x,w_p)(w_p-\varphi) + (p-1)|\mathcal{O}|. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta (4.9), la semicontinuidad inferior débil de la variación total y por los argumentos anteriores, podemos pasar el limite cuando $p \to 1^+$, obteniéndose así

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}}|Dw|+\int_{\partial\mathcal{O}}|w|d\mathcal{H}^{N-1}&\leqslant\int_{\mathcal{O}}\mathbf{z}\cdot\nabla\varphi-\int_{\mathcal{O}}g(x,w)\varphi+\int_{\mathcal{O}}g(x,w)w\\&=\int_{\mathcal{O}}f(x,w)w,\end{aligned}\tag{4.21}$$

debido a (4.15). Además, por (4.15), Teorema 2.26 y (4.18), tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}}g(x,w)w&=-\int_{\mathcal{O}}w\ \text{div}\ \mathbf{z}\\&=-\int_{\partial\mathcal{O}}w[\mathbf{z},\nu]d\mathcal{H}^{N-1}+\int_{\mathcal{O}}(\mathbf{z},Dw)\\&=-\int_{\partial\mathcal{O}}w[\mathbf{z},\nu]d\mathcal{H}^{N-1}+\int_{\mathcal{O}}|Dw|.\end{aligned}$$

Reemplazando esta igualdad en (4.21) obtenemos la igualdad deseada en (4.19) y concluimos que

$$[\mathbf{z},\nu]\in\text{sign}(-w)\ \text{sobre}\ \partial\mathcal{O}.\tag{4.22}$$

Entonces, por (4.15), (4.18) y (4.22) obtenemos que w es una solución no negativa para el problema (4.1) en el sentido de la Definición 4.1.

Con la finalidad de verificar que w es no trivial, por hipotesis (i), $g(x,0)=0$ y existe $\delta>0$, suficientemente pequeño, tal que $|g(x,\xi)|\leqslant K_1|\xi|^{\alpha}$ para todo $|\xi|\in(0,\delta)$ y para algun $K_1>0$. Además, por definición de $G_+(x,\xi)$ tenemos que

$$G_+(x,\xi)=\int_0^{\xi}g_+(x,t)\,dt\leqslant\int_0^{\xi}|g(x,\xi)|\leqslant\frac{K_1}{1+\alpha}|\xi|^{1+\alpha},$$

para $|\xi|\in(0,\delta)$. Entonces, para $u\in BV(\mathcal{O})$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \|u\| - \int_{\mathcal{O}} G_+(x,u) \\
&\geqslant \|u\| - \frac{K_1}{1+\alpha}\int_{\mathcal{O}} |u|^{1+\alpha} \\
&\geqslant \|u\| - K_2||u||^{1+\alpha}.
\end{aligned}
$$

Escogiendo $\rho < \min\left\{\delta, \left(\frac{1}{2K_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$, tenemos que

$$
J(u) \geqslant \frac{\|u\|}{2} \quad \text{para } ||u|| \leqslant \rho.
$$

Recordando que $J(e) < 0$, deducimos que $\|e\| > \rho$. Ahora, fijando $p \in (1, p_0)$. Gracias a la desigualdad de Young, tenemos que $I_p(u) \geqslant J(u)$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$. Ahora, considere un camino $\gamma \in \Gamma_p$. Por la continuidad de la función $t \mapsto I_p(\gamma(t))$, existe $t_0 > 0$ tal que $\|\gamma(t_0)\| = \rho$. Entonces

$$
I_p(w_p) = \inf_{\gamma\in\Gamma_p} \max_{t\in[0,1]} I_p(\gamma(t)) \geqslant \frac{\rho}{2}. \tag{4.23}
$$

Por otro lado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p}\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p &= \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p}\int_{\mathcal{O}} g(x,w_p)w_p \\
&= \int_{\mathcal{O}} g(x,w)w \\
&= \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{z}, Dw) - \int_{\partial\mathcal{O}} w[\mathbf{z},\nu]d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{\mathcal{O}} |Dw| + \int_{\partial\mathcal{O}} |w|d\mathcal{H}^{N-1},
\end{aligned}
$$

donde en la última igualdad hemos usado que w es una solución de (4.1). Adicionalmente, (C) también implica que

$$\kappa|G(x,w_p)| \leqslant w_p|g(x,w_p)| \leqslant Ch(x)(1+h(x)^q) \in L^1(\mathcal{O})$$

entonces, gracias al Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{p\to 1^+}\int_{\mathcal{O}} G(x,w_p) = \int_{\mathcal{O}} G(x,w).$$

Al usar estas dos últimas igualdades, podemos afirmar que

$$\lim_{p\to 1^+} I_p(w_p) = J(w). \tag{4.24}$$

Resumiendo, por (4.23) y (4.24) concluimos que $J(w) \geqslant \frac{\varrho}{2}$ y entonces w es no trivial, pues $J(0) = 0$.

Con respecto a la existencia de una solución no trivial $v \leqslant 0$ del problema (4.1), hacemos un razonamiento análogo aplicado al funcional

$$\tilde{I}_p(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p - \int_{\mathcal{O}} G_-(x,u) + \frac{p-1}{p}|\mathcal{O}|,$$

obtenemos que $v_p \to v$ cuando $p \to 1^+$. Aqui, v_p es una solución no positiva del problema del $p-$ Laplaciano (4.2).

4.1.2 Acotación de las soluciones

En esta subsección, se denota $\mathcal{S}_1$ la mejor constante de inmersión de Sobolev $W_0^{1,1}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\mathcal{O})$. Recordemos que en la demostración del Teorema 4.1 hemos denotado por $w_p \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ siendo w_p no negativo, la solución de (4.2) y hemos encontrado $p_0 > 1$ tal que la estimación (4.8) se cumple para todos $p \in (1,p_0)$. A continuación, para cada $\ell \geqslant 0$ y $p \in (1,p_0)$, definimos

$$A_\ell(w_p) = A_{\ell,p} = \{x \in \mathcal{O} : |w_p(x)| > \ell\}.$$

***Lema* 4.2.** Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\ell_0 > 0$ (que no depende de p) tal que

$$\int_{A_{\ell,p}} (1 + w_p^q) < \epsilon$$

para todo $\ell \geqslant \ell_0$ y para todo $p \in (1, p_0)$.

Demostración. Usando dos veces la de Hölder, la desigualdad de Sobolev y teniendo en cuenta que

$$|A_{\ell,p}| \leqslant \frac{1}{\ell^{\frac{N}{N-1}}} \int_{A_{\ell,p}} w_p^{\frac{N}{N-1}}. \tag{4.25}$$

En efecto, note que

$$\int_{A_{\ell,p}} 1\, dx < \int_{A_{\ell,p}} \frac{w_p}{\ell}\, dx \leqslant \left(\int_{A_{\ell,p}} \left(\frac{w_p}{\ell}\right)^{\frac{N}{N-1}} \right) \left(\int_{A_{\ell,p}} 1^N\, dx \right) \frac{1}{N},$$

de donde se obtiene (4.25).
Usando nuevamente la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{A_{\ell,p}} (1 + w_p^q)^N &\leqslant 2^{N-1} \left(|A_{\ell,p}| + \int_{A_{\ell,p}} w_p^{qN} \right) \\
&\leqslant 2^{N-1} \left(|A_{\ell,p}| + \left(\int_{A_{\ell,p}} w_p^{\frac{N}{N-1}} \right)^{q(N-1)} |A_{\ell,p}|^{1-q(N-1)} \right) \\
&\leqslant \frac{2^{N-1}(1 + \ell^{qN})}{\ell^{\frac{N}{N-1}}} \int_{\mathcal{O}} w_p^{\frac{N}{N-1}} \\
&\leqslant \frac{2^{N-1}(1 + \ell^{qN})}{\ell^{\frac{N}{N-1}}} \mathcal{S}_1^{\frac{N}{N-1}} \left(\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p| \right)^{\frac{N}{N-1}} \\
&\leqslant \frac{2^{N-1}(1 + \ell^{qN})}{\ell^{\frac{N}{N-1}}} \mathcal{S}_1^{\frac{N}{N-1}} \left(\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p \right)^{\frac{N}{p(N-1)}} |\mathcal{O}|^{\frac{p-1}{p} \frac{N}{N-1}}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Recordando (4.8), existe una constante $\widetilde{C} > 0$ que no depende de p, verificando

$$\left(\int_{\mathcal{O}} |\nabla w_p|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \widetilde{C}^{\frac{1}{p}} < 1 + \widetilde{C}^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para todo } p \in (1, p_0).$$

Desde que $|\mathcal{O}|^{\frac{p-1}{p}} < 1 + |\mathcal{O}|$, se sigue que existe $C = C(N, q, \mathcal{S}_1, |\mathcal{O}|) > 0$ tal que

$$\int_{A_{\ell,p}} (1 + w_p^q)^N < \frac{C(1 + \ell^{qN})}{\ell^{\frac{N}{N-1}}} \to 0,$$

cuando $\ell \to \infty$, una vez que $q < \frac{1}{N-1}$. $\square$

***Observación* 4.3.** Argumentando de forma similar se muestra que existe $\ell_0 > 0$ que no depende de p tal que

$$\int_{A_{\ell,p}} (1 + |v_p|^q)^N < \varepsilon$$

para todo $\ell \geqslant \ell_0$ y para todo $p \in (1, p_0)$. Aqui $0 \geqslant v_p \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ es la solucion negativa de (4.2) y $A_{\ell,p} = A(v_p)$.

Ahora, estamos preparados para demostrar la acotación de las soluciones v y w del problema (4.1).

Prueba de la acotación. Se probará la limitación de la solucion positiva w. La prueba de la solución negativa es similar.

Para todo $\ell > 0$, definimos la función auxiliar $\mathcal{G}_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{G}_\ell(s) = \begin{cases} s - \ell & si \quad s > \ell \\ 0 & si \quad |s| \leqslant \ell \\ s + \ell & si \quad s < -\ell \end{cases}$$

Entonces, escogiendo $\mathcal{G}_\ell(w_p)$ como una función de prueba en (4.2), tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla \mathcal{G}_\ell(w_p)|^p = \int_{\mathcal{O}} g(x, w_p) \mathcal{G}_\ell(w_p). \tag{4.27}$$

Por (4.27), inmsersión de Sobolev, desigualdad de Young y Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathcal{O}} \mathcal{G}_\ell(w_p)^{\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} \leqslant & \mathcal{S}_1 \int_{\mathcal{O}} |\mathcal{G}_\ell(w_p)| \\
\leqslant & \frac{\mathcal{S}_1}{p} \int_{\mathcal{O}} |\mathcal{G}_\ell(w_p)|^p + \frac{\mathcal{S}_1(p-1)}{p}|\mathcal{O}| \\
\leqslant & \mathcal{S}_1 \int_{\mathcal{O}} |g(x, w_p)|\mathcal{G}_\ell(w_p) + \frac{\mathcal{S}_1(p-1)}{p}|\mathcal{O}| \\
\leqslant & C\mathcal{S}_1 \int_{A_{\ell,p}} (1 + w_p^q)\mathcal{G}_\ell(w_p) + \frac{\mathcal{S}_1(p-1)}{p}|\mathcal{O}| \\
\leqslant & C\mathcal{S}_1\left(\int_{A_{\ell,p}} (1 + w_p^q)^N\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{\mathcal{O}} \mathcal{G}_\ell(w_p)^{\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N}{N-1}} \\
& + \frac{\mathcal{S}_1(p-1)}{p}|\mathcal{O}|
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Por el Lema 4.2, existe $\widetilde{\ell}_0$ que no depende de p tal que

$$\int_{A_{\ell,p}} (1 + w_p^q)^N < \frac{1}{(2C\mathcal{S}_1)^N} \text{ para todo } \ell \geqslant \widetilde{\ell}_0,$$

y para todo $p \in (1, p_0)$. Por tanto, obtenemos

$$\int_{\mathcal{O}} \mathcal{G}_\ell(w_p)^{\frac{N}{N-1}} \leqslant \left(\frac{2\mathcal{S}_1(p-1)|\mathcal{O}|}{p}\right)^{\frac{N}{N-1}}.$$

Una vez que $w_p(x) \to w(x)$ c.s. $x \in \mathcal{O}$, por el Lema de Fatou, podemos tomar el limite cuando $p \to 1^+$

$$\int_{\mathcal{O}} (w(x) - \ell)^{\frac{N}{N-1}} = 0 \ \forall \ell \geqslant \widetilde{\ell}_0.$$

Por tanto $\|w\|_\infty \leqslant \widetilde{\ell}_0$.

4.2 Una identidad tipo Pohožaev

En esta sección proporcionamos una identidad de tipo de Pohožaev para problemas elípticos que involucran el operador $1-$Laplaciano

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = f(u) \text{ en } \mathcal{O}, \\ u|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{4.29}$$

De hecho, solo necesitaremos que $f(u) \in L^N(\mathcal{O})$. En general se puede asumir que la no linealidad f verifica la siguiente condición:

$$|f(u)| \leqslant C(1 + |\xi|^{\frac{1}{N-1}}), \ \xi \in \mathbb{R}.$$

De ahora en adelante, para cualquier función h evaluada en $\partial\mathcal{O}$, se escribirá $\int_{\partial\mathcal{O}} h$ en lugar de $\int_{\partial\mathcal{O}} h \, d\mathcal{H}^{N-1}$ sin dar lugar a confusión.

Proposición 4.1. *(Identidad tipo Pohožaev) Asumiendo que u es solución del problema (4.29) tal que $u \in W^{1,1}(\mathcal{O})$ y $x \cdot \nabla u \in W^{1,1}(\mathcal{O})$. Entonces, u verifica la identidad*

$$\begin{aligned} &(N-1)\int_{\mathcal{O}} uf(u) - \int_{\mathcal{O}} F(u) + \int_{\partial\mathcal{O}} F(u) x \cdot \nu \\ &= \int_{\partial\mathcal{O}} |\nabla u| x \cdot \nu - \int_{\mathcal{O}} (x \cdot \nabla u)[\mathbf{z}, \nu] + (N-1)\int_{\partial\mathcal{O}} |u|. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Demostración. Por hipótesis $x \cdot \nabla u \in W^{1,1}(\mathcal{O})$, entonces

$$\nabla(x \cdot \nabla u) = \nabla u + D^2 u \cdot x, \text{en } \mathcal{D}'(\mathcal{O}), \tag{4.31}$$

donde $(D^2 u \cdot x)_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} x_i$ $(j = 1, \ldots, N)$. Donde $D^2 u$ denota las segundas derivadas de u en el sentido de las distribuciones y x define una $\mathcal{C}^\infty$ función, asi cada $(D^2 u \cdot x)_j$ es una distribución bien definida.

Por hipótesis deducimos que $(D^2 u \cdot x)_j \in L^1(\mathcal{O})$ $(j = 1, \ldots, N)$. Además por el Teorema de Stampacchia (vea Proposition 2.15), se tiene que $\nabla(x \cdot \nabla u) = 0$ c.s. en el conjunto $\{x \cdot \nabla u\}$ lo cual usando (4.31) implica

$$(D^2 u \cdot x)_j = 0, \text{ c.s en } \{|\nabla u| = 0\}.$$

Entonces integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \mathrm{div}\mathbf{z}(x \cdot \nabla u) &= \int_{\partial\mathcal{O}} (x \cdot \nabla u)[\mathbf{z}, \nu] - \int_{\mathcal{O}} \mathbf{z} \cdot \nabla(x \cdot \nabla u) \\ &= \int_{\partial\mathcal{O}} (x \cdot \nabla u)[\mathbf{z}, \nu] - \int_{\mathcal{O}} |\nabla u| - \int_{\mathcal{O}} (D^2 u \cdot x) \cdot \mathbf{z}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

De otro lado

$$\begin{aligned} N \int_{\mathcal{O}} |\nabla u| &= \int_{\partial\mathcal{O}} |\nabla u| x \cdot \nu - \int_{\mathcal{O}} x \cdot \nabla(\nabla u) \\ &= \int_{\partial\mathcal{O}} |\nabla u| x \cdot \nu - \int_{\mathcal{O}} (D^2 u \cdot x) \cdot \mathbf{z}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

donde en el último término integral reemplazamos $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ por $\mathbf{z}$ una vez que se ha asumido que $|\nabla u| > 0$. Combinando (4.32) y (4.33), se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{O}} \mathrm{div}\mathbf{z}(x \cdot \nabla u) \\ &= \int_{\partial\mathcal{O}} (x \cdot \nabla u)[\mathbf{z}, \nu] + (N-1) \int_{\mathcal{O}} |\nabla u| - \int_{\partial\mathcal{O}} |\nabla u| x \cdot \nu. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Desde que u es solución de (4.29), podemos escoger $x \cdot \nabla u \in W^{1,1}(\mathcal{O})$ como una función de prueba y usando integración por partes

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}} \operatorname{div}\mathbf{z}(x\cdot\nabla u) &= -\int_{\mathcal{O}} f(u)(x\cdot\nabla u)\\
&= -\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathcal{O}} x_i\frac{\partial F(u)}{\partial x_i}\\
&= -\int_{\partial\mathcal{O}} F(u)x\cdot\nu + N\int_{\mathcal{O}} F(u).
\end{aligned}
$$

Ahora, tomando u como función de prueba tenemos

$$
\int_{\mathcal{O}} |\nabla u| = \int_{\mathcal{O}} uf(u) + \int_{\partial\mathcal{O}} u[\mathbf{z},\nu].
$$

Reemplazando las dos desigualdades enteriores en (4.34) y recordando que $u[\mathbf{z},\nu] = -|u|$, se obtiene (4.30). Finalmente, en el caso $|\nabla u| = 0$ en $\mathcal{O}$, se consigue la identidad

$$
(N-1)\int_{\mathcal{O}} uf(u) - N\int_{\mathcal{O}} F(u) + \int_{\partial\mathcal{O}} F(u)x\cdot\nu = (N-1)\int_{\partial\mathcal{O}} |u|.
$$

□

***Observación* 4.4.** Una pregunta natural es si la suposición $x\cdot\nabla u \in W^{1,1}(\mathcal{O})$ es realmente necesario o la Proposición 4.1 permanece válido con menos regularidad sobre u cuando $x\cdot\nabla u \in BV(\mathcal{O})$. Se destaca que el Teorema de Stampacchia requiere nuestra suposición, y esto ya no es válido para una función BV general.

***Corolário* 4.1.** En el caso $\mathcal{O} = B_R$ (la bola de radio $R > 0$). Con las mismas hipótesis de la Proposición 4.1, las soluciones para (4.29) deben satisfacer la desigualdad

$$
(N-1)\int_{B_R} uf(u) - N\int_{B_R} F(u) + R\int_{\partial B_R} F(u) \geqslant (N-1)\int_{\partial B_R} |u|.
$$

Demostración. Una vez que $x \cdot \nu = R$ y como (2.10) vale, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R} |\nabla u| x \cdot \nu - \int_{\partial B_R} (x \cdot \nabla u)[\mathbf{z}, \nu] & \\ \geqslant R \int_{\partial B_R} |\nabla u| - \|\mathbf{z}\|_\infty \int_{\partial B_R} (x \cdot \nabla u) & \qquad (4.35) \\ \geqslant R(1 - \|\mathbf{z}\|_\infty) \int_{\partial B_R} |\nabla u| \geqslant 0. & \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.30), obtenemos el resultado.

□

Cuando la solución satisface la condición de frontera en el sentido de trazas, la Proposición 4.1 se puede simplificar. Esto se muestra en el siguiente resultado que es similar al obtenido por F. Demengel en [11, Sección 4].

***Corolário* 4.2.** Además de las hipótesis de la Proposición 4.1, se asume que u es una solución positiva verificando la condición de frontera $u_{|\partial\mathcal{O}} \equiv 0$ y que asociado al campo vectorial $\mathbf{z} \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{O}}_\delta, \mathbb{R}^N)$ (para algun δ suficientemente pequeño). Entonces

$$(N-1) \int_{\mathcal{O}} u f(u) = N \int_{\mathcal{O}} F(u).$$

Em particular para $f(\xi) = |\xi|^{q-1}\xi$ se sigue que $q = \frac{1}{N=1}$.

Demostración. Recordamos que, por (2.11), se tiene que $[\mathbf{z}, \nu] = \mathbf{z} \cdot \nu$ el producto escalar usual. Por otro lado, desde u es positivo y $u_{|\partial\mathcal{O}} \equiv 0$ deducimos que $\mathbf{z}$ es paralelo a ν en $\partial\mathcal{O}$, de modo que $\mathbf{z} \cdot \nu = 1$, en $\{|\nabla u| > 0\}$. Además, en el mismo conjunto, se cumple la identidad $|\nabla u|\mathbf{z} = \nabla u$, con $\nabla u \cdot \nu = |\nabla u|$. Por lo tanto, podemos realizar las siguientes manipulaciones:

$$\int_{\partial\mathcal{O}} |\nabla u| x \cdot \nu = \int_{\partial\mathcal{O}} x \cdot \nabla u = \int_{\partial\mathcal{O}} (x \cdot \nabla u)(\mathbf{z} \cdot \nu).$$

Dado que los otros términos de la frontera desaparecen, debido a nuestra suposición $u_{|\partial\mathcal{O}} \equiv 0$, la prueba queda completada.

Bibliografía

[1] A. Ambrosetti, D. Arcoya, *An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems, in: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications,* vol. 82, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2011, xii+199 pp.

[2] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles, J.M. Mazón, *The Dirichlet problem for the total variation flow,* J. Funct. Anal. 180 (2001) 347-403.

[3] F. Andreu, V. Caselles, J.M. Mazón, *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals,* in: Progress in Mathematics, vol. 223, Birkhauser, 2004.

[4] G. Anzellotti, *Pairings Between Measures and Bounded Functions and Compensated Compactness,* Ann. Mat. Pura Appl. 135 (1) (1983) 293-318.

[5] H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille, *Variational Analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization.* Mathematical Programming Society and Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

[6] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces,* Editura Academiei, 1976.

[7] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Universitext, Springer, New York (2011).

[8] D. G. Costa, C. A. Magalhaes, *Existence results for perturbations of the p-Laplacian,* J. Nonlinear Analysis TMA, 24(3), 409-418, 1995.

[9] K.C. Chang, *The spectrum of the* $1-$*Laplace operator,* World Scientific Publishing Company, pages 865–894, 2009.

[10] F.H. Clarke, *Generalized gradients and their applications,* Transactions of the American Society, 205, 1975.

[11] F. Demengel, *On some nonlinear partial differential equations involving the 1–Laplacian and critical Sobolev exponent,* ESAIM Control Optim. Calc. Var. 4 (1999) 667-686.

[12] F. Demengel, *On some nonlinear equation involving the 1-Laplacian and trace map inequalities,* Nonlinear Anal. T.M.A. 48 (2002) 1151-1163.

[13] F. Demengel, *Théorèmes d'existence pour des équations avec l'opérateur "*$1-$*Laplacien", premiére valeur propre pour* $-\Delta_1$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1071–1076.

[14] F. Demengel and G. Demengel, *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations,* Universitext, Springer, London, 2012. Translated from the 2007 French original by Reinie Erné.

[15] G. Dinca, P. Jebelean, J. Mawhin, *Variational and topological methods for Dirichlet problems with* $p-$*Laplacian,* Port. Math. 58 (Fasc. 3) (2001) 339-378.

[16] G. Dinca, P. Jebelean, J. Mawhin, *A result of Ambrosetti–Rabinowitz type for* $p-$*Laplacian,* in: Qualitative Problems for Differential Equations and Control Theory, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, pp. 231–242.

[17] Evans. L.C, Gariepy, R.F, *Measure Theory and Fine Properties of Functions,* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton (1992).

[18] P.C. Fife, *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems, in: Lecture Notes in Biomathematics,* vol. 28, Springer- Verlag, Berlin-New York, 1979, iv+185 pp.

[19] D.G. Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours,* Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[20] Fonseca, I, Leoni, G, *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin (2007).

[21] G.B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley and Sons, 2 edition, 1999.

[22] E. Gagliardo, *Caratterizzazione delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili,* Rend. Sem. mat. Padova 27 (1957), 284-305.

[23] E.J. Hurtado, O.H. Miyagaki, R.S. Rodrigues, *Existence and multiplicity of solutions for a class of elliptic equations without Ambrosetti-Rabinowitz type conditions,* Journal of Dynamics and Differential Equations 30 (2018), 405-432.

[24] B. Kawohl, *On a family of torsional creep problems,* J. Reine Angew. Math. 410 (1990) 1-22.

[25] H. Le Dret, *Equations aux dérivées partielles non linéaires,* Springer, Heidelberg (2013).

[26] A. Mercaldo, J.D. Rossi, S. Segura de León, C. Trombetti, *Behaviour of* $p-$*Laplacian problems with Neunamnn boundary conditions when* p *goes to* 1*,* Commun. Pure Appl. Anal. 12 (1) (2013) 253-267.

[27] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian,* Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations (ICTP, Trieste, 1997).

[28] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Aplications to Differential Equations,* CBMS Reg. Conf. Ser. Math. Nr. 65, Amer. Math. Soc., 1986.

[29] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications,* Academic Press, 1980.

[30] L.S. Silva , *Resultados de existência de solução para problemas elípticos no espaço das funções de variação limitada*, dissertação de Mestrado, Presidente Prudente, Unesp (2018).

[31] R. Temam. *Problèmes Mathématiques en Plasticité.* Gauthier-Villars, Paris, 1983.

[32] M. Struwe, Variational Methods and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian systems, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[33] A. Szulkin, *Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems,* Annales de l'I.H.P, 3(2):77-109, 1986.

[34] N. Wei-Ming, *The Mathematics of Diffusion, in: CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics,* vol. 82, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2011, xii+110 pp.