Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Estabilidad de un modelo de Cobweb modificado con ecuaciones en diferencias

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Angel Estuard ANTEZANA ELORRIETA

ASESOR

Mg. Jesús Virgilio LUQUE RIVERA

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Antezana, A. (2021). *Estabilidad de un modelo de Cobweb modificado con ecuaciones en diferencias*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor 1	
Nombres y apellidos	Antezana Elorrieta Angel Estuard.
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	74311376
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-1394-2844
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Jesús Virgilio Luque Rivera
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09840187
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-4438-6868
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Gavino Aymituma Puma
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08025924
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Félix Gregorio Pariona Vilca
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	07366081
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Jesús Virgilio Luque Rivera
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09840187
Datos de investigación	

Línea de investigación	No aplica
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.060287 Longitud: -77.082086
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Julio 2021-Octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 20:55 horas del sábado 23 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Mg. Gavino Aymituma Puma (PRESIDENTE), Mg. Felix Gregorio Pariona Vilca (MIEMBRO) y el Mg. Jesús Virgilio Luque Rivera (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**ESTABILIDAD DE UN MODELO DE COBWEB MODIFICADO CON ECUACIONES EN DIFERENCIAS**", presentado por el señor **Bachiller Angel Estuard Antezana Elorrieta**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de dieciocho **(18).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Angel Estuard Antezana Elorrieta** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 21:25 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Gavino Aymituma Puma
PRESIDENTE

Mg. Félix Gregorio Pariona Vilca
MIEMBRO

Mg. Jesús Virgilio Luque Rivera
MIEMBRO ASESOR

2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Angel Estuard, Antezana Elorrieta

Estabilidad de un modelo de Cobweb modificado con ecuaciones en diferencias (Lima) 2021
VIII.,26p.,29.7cm (UNMSM, Titulo, Matemática, 2021) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática, UNMSM/FCM II. Titulo
(Series).

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mis padres Oswaldo Antezana e Justina Elorrieta y hermanos que siempre me apoyaron e inculcaron a seguir adelante con mis objetivos a pesar de las dificultades.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por guiar mi camino, ser el apoyo espiritual y fortaleza en aquellos momentos difíciles.

A mis padres Oswaldo Antezana e Justina Elorrieta quienes son mi mayor orgullo y brindarme su apoyo incondicional.

A mis hermanos que siempre estuvieron presentes.

A mi hermana Diana Carolina quien es el motivo de superación día a día.

A los docentes Mg. Willy David Barahona Martínez y Mg. Jesús Virgilio, Luque Rivera, por haber tenido paciencia y dedicado tiempo orientándome con sus conocimientos sobre el tema en la elaboración de mi tesis.

A todos mis maestros por sus enseñanzas y haberme brindado todos sus conocimientos.

A mis amigos y personas que siempre me apoyaron.

RESUMEN

Estabilidad de un modelo de Cobweb modificado con ecuaciones en diferencias

Angel Estuard, Antezana Elorrieta

Setiembre - 2021

Asesor : Mg. Jesús Virgilio, Luque Rivera.

Titulo obtenido : Licenciado en Matemática.

Estidiaremos un problema de ecuaciones en diferencias de primer orden, que se expresa como:

$$
(P) \qquad \begin{cases} q_t^d &= \alpha - \beta p_t \\ q_t^s &= -\gamma + \delta p_t^* \\ q_t^d &= q_t^s \\ p_t^* - p_{t-1}^* &= k(p_{t-1} - p_{t-1}^*) \end{cases}
$$

Donde q_t^d y q_t^s representan la cantidad demandada y la cantidad ofertada respectivamente en un determinado tiempo t, y P_t es el precio en el instante t, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes positivas, P_t^* denota el precio esperado para el periodo t, p_n es el precio normal y k es el coeficiente de las expectativas.

ABSTRACT

Stability of a modified Cobweb model with difference equations
Antezana, Angel

May - 2021

Adviser : Mg. Jesús Virgilio, Luque Rivera.
Obtained : Graduate in Mathematics.

In this paper, we consider the first order difference equation problem, which is expressed as:

$$(P) \qquad \begin{cases} q_t^d & = & \alpha - \beta p_t \\ q_t^s & = & -\gamma + \delta p_t^* \\ q_t^d & = & q_t^s \\ p_t^* - p_{t-1}^* & = & k(p_{t-1} - p_{t-1}^*) \end{cases}$$

Where q_t^d and q_t^s represent the quantity demanded and quantity supplied respectively at a given time t, and P_t is the price at time t, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positive constants, P_t^* denotes the expected price for period t, p_n is the normal price and k is the expectation coefficient.

Keywords: Difference equation, Cobweb model, Difference operators, Cobweb model stability.

INDICE GENERAL

Introducción

Mediante las ecuaciones en diferencias obtenemos la descripción de la evolución temporal de un fenómeno, de forma que los diferentes estados discretos por los que pasan sucesivamente son funciones directas de los estados inmediatamente anteriores; estos son los llamados sistemas dinámicos discretos, los cuales tienen cambios con saltos en intervalos de tiempo y no de forma continua, lo que vendría expresado por una ecuación en diferencias.

Nuestro interés de estudiar las ecuaciones en diferencias, es por el rol fundamental e importante en la vida cotidiana, existen diversas aplicaciones en diferentes campos tales como: en las ciencias de la computación y sobre todo en lo referente a sistemas de control digital, señales en el tiempo discreto, y en otras muchas áreas del saber. La aplicación de esta herramienta matemática nos permite la síntesis de programas que realicen una determinada tarea que sabemos con certeza como sería (o habría de ser), de forma empírica, mediante una secuencia de n elementos.

En este trabajo se haría un ejercicio de abstracción, para estudiar un poco más a fondo las ecuaciones de este tipo, de manera específica el modelo de la telaraña y su variante, que explica la forma de lograr el equilibrio en determinados tipos de mercados, cuando las decisiones de producción y de consumo están dispersas en el tiempo.

1 Preliminares

En este capitulo empezaremos introduciendo definiciones básicas de ecuaciones en diferencias (EED)

1.1. Ecuación Ordinaria en diferencias

Definición 1. *"Una ecuación ordinaria en diferencias es una ecuación que contiene una o más diferencias de una función desconocida que depende del tiempo."*

$$f(x_t, \Delta x_t, \Delta^2 x_t, \Delta^3 x_t, ..., \Delta^n x_t) = 0$$

donde Δ *representa el operador diferencia ,asi pues si un sistema se encuentra en un estado* x_{t+1} , $t \in \mathbb{Z}^+$ *es decir* $t \in \{0, 1, 2, 3, ..., a, a+1, a+2, ..\}$ *y de forma general podemos escribir de la siguiente manera:*

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

o tambien podemos partir de un estado inicial t_0 *es decir:*

$$t_0\ ,\ f(x_0)\ ,\ f(f(x_0))\ ,\ f(f(f(x_0)))\ , ...$$

esto es :

$$\begin{aligned}
x_0 &= f^0(x_0) \\
x_1 &= f^1(x_0) = f(x_0) \\
x_2 &= f^2(x_0) = f(f(x_0)) \\
x_3 &= f^3(x_0) = f(f(f(x_0))) \\
&\vdots \\
x_{n+1} &= f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0))
\end{aligned}$$

Para entender mejor como movilizar la notación en estos casos diremos que:
$f(x_0)$ se llama primera iteración de x_0 en la función f.

$f^2(x_0)$ se llama segunda iteración de x_0 en la función f.

$\vdots$

$f^n(x_0)$ se llama $n-$ésima iteración de x_0 en la función f.

Al conjunto de todas la iteraciones que denotamos por $f^n(x_0)$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo 1. *Sea $f(x_t) = (x_t)^{1/2}$ y $x_0 = 256$. Entonces la sucesión es*

$$\begin{aligned} x_0 &= 256 \\ f(x_0) &= 16; \\ f(f(x_0)) &= 4; \\ f(f(f(x_0))) &= 2; \\ f(f(f(f(x_0)))) &= 1.41; ... \end{aligned}$$

$$\textit{que es } \ 256, 16, 4, 2, 1.42, 1.19, ...$$

1.2. Operadores

Generalmente en (EED) se usarán operadores,ahora definimos una función discreta

$$\begin{array}{ccc} f : S \subset \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t) = x_t \end{array}$$

Definición 2. *Llamaremos Operador de Identidad (I) aquella operación que no genera cambios en su estado es decir*

$$Ix_t = x_t \ , \forall \ t \ \in \mathbb{Z}$$

y su aplicación sucesiva será:

$$I^k x_t = I x_t = x_t$$

Definición 3. *El Operador de Desplazamiento (E) es definido como*

$$Ex_t = x_{t+1}$$

y su aplicación sucesiva

$$E^k x_t = x_{t+k} \ , \ \ \forall k \geq 1$$

Definición 4. *"El Operador de Diferencia (Δ) es el proceso que lleva obtener la diferencia entre dos estados consecutivos, así"*

$$\begin{aligned}\Delta x_t &= x_{t+1} - x_t\\ &= Ex_t - Ix_t\\ &= (E-I)x_t\end{aligned}$$

Este operador se puede aplicar sucesivamente y tenemos lo siguiente

$$\Delta^k x_t = (E-I)^k x_t$$

recordando el binomio de newton

$$(x-y)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^i$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta^k x_t &= (E-I)^k x_t\\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} E^{k-i} I^i x_t\\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} E^{k-i} x_t\\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} x_{t+k-i}\end{aligned}$$

asi mismo se tiene que

$$\begin{aligned}E^k x_t &= (\Delta + I)^k x_t\\ &= \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} I^{k-j} \Delta^j\right) x_t\\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j x_t\end{aligned}$$

Resulta interesante la analogia entre operador de diferencias Δ y la derivada .

Definición 5. *"El Operador Antidiferencia (Δ^{-1}) es el proceso que consiste en deshacer la operación correspondiente al operador diferencia, es decir:*

$$\Delta(\Delta^{-1} x_t) = x_t$$

”

Debemos tener en claro, la relación que existe entre la definición del operador en diferencias y de la ecuación en diferencias:

$$x_{t+1} = f(x_t) \wedge \Delta x_t = x_{t+1} - x_t$$

$$\Delta x_{t+1} = x_{t+2} - x_{t+1}$$
$$\Delta f(x_t) = f(x_{t+1}) - f(x_t)$$

1.3. Propiedades de los Operadores Definidos

Si y_t , z_t son dos funciones discretas, se cumple que los operadores son lineales, es decir :

1. $I(y_t + z_t) = Iy_t + Iz_t$ y $I(\lambda y_t) = \lambda I y_t$
2. $E(y_t + z_t) = Ex_t + Ez_t$ y $E(\lambda y_t) = \lambda E y_t$
3. $\Delta(y_t + z_t) = \Delta y_t + \Delta z_t$ y $\Delta(\lambda y_t) = \lambda \Delta y_t$

1.4. Punto de Equilibrio de una Ecuación en diferencias

Dado el sistema descrito por $x_{t+1} = f(x_t)$, diremos que x^* es un punto o estado de equilibrio si cumple

$$x^* = f(x^*)$$

1.5. Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

Definición 6. *El orden de una Ecuación en diferencias (E.D.D) esta determinada por el orden del operador de diferencias más alto que aparece en tal ecuación.*

Ejemplo 2. $\Delta x_t = t^2 + 1$ *tiene orden 1*

Ejemplo 3. $\Delta x_t - qx_{t-1} = b$ *tiene orden 1*

Ejemplo 4. $\Delta^2 x_t - a_1 \Delta x_t - a_0 x_t = b_t$ *tiene orden 2*

Definición 7. *Se llama Ecuaciones de recurrencia a una relación de recurrencia expresada en terminos de los terminos anteriores (y/o posteriores) de una sucesión.*

Ejemplo 5. $x_t = x_{t-1} + x_{t-2}$ *es una ecuación en recurrencia*

Observación 1. *Toda ecuación en diferencias puede expresarse como una ecuación de recurrencia.*

Ejemplo 6. $x_t - x_{t-1} = t^2 - 4$ *es una ecuación de recurrencia.*

Ejemplo 7. $(1 - a_1 - a_0)x_t + (a_1 - 2)x_{t-1} + x_{t-2} = b_t$ *es una ecuación de recurrencia.*

Observación 2. *El orden de una ecuación de recurrencia (E.D.D) es la diferencia entre el mayor α y menor β tal que x_α, x_β aparecen en la ecuación, en el ejemplo anterior el orden de la ecuación en recurrencia es 2.*

1.6. Solución de las ecuaciones lineales en diferencias

"Si tenemos una ecuación lineal de cualquier grado, sea homogénea o no, con coeficientes constantes o variables es decir

$$x_{t+1} = \sum_{k=0}^{n} g_k(t) x_t \ , \forall t \in \mathbb{Z}$$

admite mas de una solución, la combinación lineal de la soluciones también es solución de la ecuación.

Sean p_t y q_t dos soluciones cualesquiera, la combinación

$$y_t = ap_t + bq_t \tag{1.1}$$

" con a y $b \in \mathbb{R}$ también es solución.

De (1.1) tenemos que

$$x_{t+1} - \sum_{k=0}^{n} g_k(t) x_t = 0 \tag{1.2}$$

como p_t y q_t son soluciones, ambas verifican (1.2) entonces

$$p_{t+1} - \sum_{k=0}^{n} g_k(t)p_t = 0$$
$$q_{t+1} - \sum_{k=0}^{n} g_k(t)q_t = 0$$

reemplazamos en una iteración más de (1.1)

$$a\left(p_{t+1} - \sum_{k=0}^{n} g_k(t)p_t\right) + b\left(q_{t+1} - \sum_{k=0}^{n} g_k(t)q_t\right) = 0$$

"esto resulta muy útil para obtener las soluciones generales de estas ecuaciones, pues estas nos permitiran definir la evolución del sistema correspondiente para cualquier condición inicial.
Un conjunto de soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal, es decir, una combinación lineal arbitraria de ellas en la forma

$$P_1x_{1t} + P_2x_{2t} + P_3x_{3t} + ... + P_mx_{mt}$$

que solo se puede anular cada uno de los coeficientes P_m, la combinación anterior es también solución no trivial de la ecuación. Si este conjunto de soluciones es completo, es decir hemos encontrado todas las soluciones linealmente independientes, esta solución nos genera la solución general, la cual nos permitira determinar el valor de x_t para un valor x_0 cualquiera."

1.7. Ecuaciones lineales en diferencias

Definición 8. *Una ecuación en diferencia es lineal, si se puede expresar de la siguiente forma:*

$$a_0(t)x_{t+n} + a_1(t)x_{t+n-1} + ... + a_{n-1}(t)x_{t+1} + a_n(t)x_t = g(t)$$

en donde $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ y g son funciones de t (pero de x_t) definidas para $t \in \mathbb{Z}^+$

"Una ecuación en diferencias de orden n puede escribirse como función implícita de los valores de la variable x en n diferentes valores de t (es decir, los n valores espaciados de x)".

$$F(x_{t+n}, x_{x+n-1}, ..., x_t, t) = 0$$

El conocimiento de $t+1$ valores de x permite calcular el valor de x y sus primeras n diferencias

$$F(\Delta^n x_t, \Delta^{n-1} x_t, ..., \Delta x_t, x_t) = 0$$

Ejemplo 8.

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_t - 3\Delta x_t - 3x_t = t, \quad & \textit{también puede escribirse como} \\ & \Delta(x_{t+1} - x_t) - 3\Delta x_t - 3x_t = t \\ & (x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t) - 3(x_{t+1} - x_t) - x_t = t \\ & x_{t+2} - 5x_{t+1} + x_t - t = 0 \end{aligned}$$

"Ahora estudiaremos el método de solución para las ecuaciones en diferencias de primer orden con coeficientes constantes, además estudiaremos el comportamiento de la sucesión que representa una solución, y se definen asi mismo los conceptos de equilibrio y estabilidad.

Toda ecuación lineal en diferencias lineal y de primer orden, puede escribirse de la forma"

$$a_0(t)x_{t+1} + a_1(t)x_t = g(t), t \in \mathbb{N},\ a_0(t) \neq 0 \text{ y } a_1(t) \neq 0$$

que tambien podemos expresarlo :

$$x_{t+1} = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} x_t + \frac{g(t)}{a_0(t)}$$

Tomaremos el caso en donde $a_1(t),\ a_2(t)\ y\ g(t)$ son constantes es decir no dependen de t entonces

$$x_{t+1} = ax_t + b \tag{1.3}$$

donde a, b son constantes y $a \neq 0$ así (1.3) **es la ecuación general lineal de primer orden con coeficientes constantes.**

La solución de (1.3) se obtiene por inducción de la forma:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 + b \\
x_2 &= ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b + b = a^2x_0 + ab + b \\
x_3 &= ax_2 + b = a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b \\
x_4 &= ax_3 + b = a(a^3x_0 + a^2b + ab + b) + b = a^4x_0 + a^3b + a^2b + ab + b \\
&\vdots \\
x_n &= a^nx_0 + b(1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1})
\end{aligned}
$$

observamos que $1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} = \dfrac{1 - a^n}{a - a}$, entonces la solución de (1.3) es

$$
\begin{aligned}
x_t &= a^tx_0 + b\left(\frac{1 - a^t}{1 - a}\right), \text{cuando } a \neq 1,\ t = 0, 1, 2, ... \\
x_t &= x_0 + bt, \text{cuando } a = 1,\ t = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}
$$

Mencionaremos tres casos de (1.3) que son recurrentes en el análisis de datos económicos.

Caso 1:La diferencia del primer orden es igual a una constante

Es decir $x_{t+1} - x_t = b$ (caso $a = 1$) entonces la solución es $x_t = x_0 + bt$.

Caso 2:“La diferencia del primer orden es proporcional a la variable”

Es decir $x_{t+1} - x_t = \alpha x_{t+1}$ (caso especial: $a = \dfrac{1}{1 - \alpha}, b = 0$) entonces $x_t = \left(\dfrac{1}{a - \alpha}\right)^t x_0$

Caso 3:“La diferencia del primer orden es función lineal de la variable”

Es decir $x_{t+1} - x_t = \alpha x_{t+1} + \beta$ (caso especial: $a = \dfrac{1}{1 - \alpha}, b = \dfrac{1}{1 - \alpha}$) entonces la solución es $x_t = \left(\dfrac{1}{1 - \alpha}\right)^t x_0 + \dfrac{\beta}{\alpha}\left[\left(\dfrac{1}{1 - \alpha}\right)^t - 1\right]$

Teorema 1. *La ecuación en diferencias lineal y de primer orden* $x_{t+1} = ax_t + b$ *donde* $t = 0, 1, 2, ...$ *tiene la solución*

$$
\begin{aligned}
x_t &= a^t(x_0 - x^*) + x^* && \text{si } a \neq 1,\ t = 0, 1, 2, .. \\
x_t &= x_0 + bt && \text{si } a = 1,\ t = 0, 1, 2, ..
\end{aligned}
$$

donde $x^* = \dfrac{b}{1 - a}$, *converge en* x^* *si* $-1 < a < 1$ *y diverge si* $a \geq 1 \vee a \leq 1$ *a no se que* $x_t = x_0$.

2 Problema Principal

2.1. Marco Teórico

2.1.1. Solución del modelo de Cobweb Modificado

El modelo de Cobweb Modificado es también conocido como el modelo de la **telaraña modificada** y se expresa como:

$$\begin{cases} i) & q_t^d & = & \alpha - \beta p_t \\ ii) & q_t^s & = & -\gamma + \delta p_t^* \\ iii) & q_t^d & = & q_t^s \\ iv) & p_t^* - p_{t-1}^* & = & k(p_{t-1} - p_{t-1}^*) \end{cases} \tag{2.1}$$

Para estudiar la estabilidad del siguiente modelo debemos resolver (2.1), reemplazamos i) y ii) en iii) esto nos resulta:

$$\alpha - \beta p_t = -\gamma + \delta p_t^* \tag{2.2}$$

despejando p_t^* se tiene :

$$p_t^* = \left(\frac{\alpha+\gamma}{\delta}\right) - \left(\frac{\beta}{\delta}\right) p_t \tag{2.3}$$

y reemplazamos (2.3) en (2.1) iv):

$$\left(\frac{\alpha+\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta}\, p_t\right) - \left(\frac{\alpha+\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta}\, p_{t-1}\right) = k\left(p_{t-1} - \frac{\alpha+\gamma}{\delta} + \frac{\beta}{\delta}\, p_{t-1}\right) \tag{2.4}$$

$$\frac{\beta}{\delta}\left(p_{t-1} - p_t\right) = k\left(\left(1 + \frac{\beta}{\delta}\right)\, p_{t-1} - \left(\frac{\alpha+\gamma}{\delta}\right)\right) \tag{2.5}$$

$$k\left(\frac{\alpha+\gamma}{\delta}\right) = \left(k + k\frac{\beta}{\delta} - \frac{\beta}{\delta}\right)\, p_{t-1} + \frac{\beta}{\delta}\, p_t \tag{2.6}$$

$$k\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta}\right) + \left(1 - k - \frac{\delta}{\beta}k\right)\, p_{t-1} = p_t \tag{2.7}$$

de forma abreviada es:

$$b + a\, p_{t-1} = p_t \tag{2.8}$$

donde :

$$a = \left(1 - k - \frac{\delta}{\beta}k\right) \ , \ b = k\left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta}\right) \tag{2.9}$$

las ecuaciones (7) y (8) son ecuaciones en diferencias de primer orden.

"Como $\delta > 0, \beta > 0$ y $0 < k < 1$ de (9) resulta que $a < 1$."

Supongamos que el precio en el instante $t = 0$ es p_0 (precio inicial)y los precios en los periodos de tiempo $t = 1, t = 2, t = 3$ son:

$$p_1 = ap_0 + b \tag{2.10}$$

$$p_2 = ap_1 + b = a(ap_0 + b) + b = a^2p_0 + ab + b = a^2p_0 + b(1 + a) \tag{2.11}$$

$$p_3 = ap_2 + b = a(a^2p_0 + b(1 + a)) + b = a^3p_0 + ab(1 + a) + b = a^3p_0 + b(1 + a + a^2) \tag{2.12}$$

y asi podemos deducir que :

$$p_t = a^tp_0 + b(1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{t-1}) \tag{2.13}$$

De nociones previas sabemos que :

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{t-1} = \frac{1 - a^t}{1 - a} \tag{2.14}$$

ahora pasamos a sustituir (2.14) en (2.13) y tenemos que :

$$p_t = a^tp_0 + b\left(\frac{1 - a^t}{1 - a}\right) \tag{2.15}$$

$$p_t = a^tp_0 + \frac{b - ba^t}{1 - a} = a^t\left(p_0 - \frac{b}{1 - a}\right) + \frac{b}{1 - a} \tag{2.16}$$

De (2.9) tenemos los valores de a y b entonces :

$$a = \left(1 - k - \frac{\delta}{\beta}k\right) \Rightarrow \left(k + k\frac{\delta}{\beta}\right) = 1 - a \Rightarrow k\left(1 + \frac{\delta}{\beta}\right) = 1 - a \tag{2.17}$$

$$b = k\left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta}\right) \quad \text{y} \quad \frac{b}{1 - a} = \frac{k\left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta}\right)}{k\left(1 + \frac{\delta}{\beta}\right)} \Rightarrow \frac{b}{1 - a} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \tag{2.18}$$

Ahora reemplazamos en (2.16) y asi tenemos

$$p_t = \left(p_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right)a^t + \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right) \tag{2.19}$$

Para ahorrarnos notación diremos que:

$$\zeta = \left(p_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \right) \text{ y } \omega = \left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \right) \tag{2.20}$$

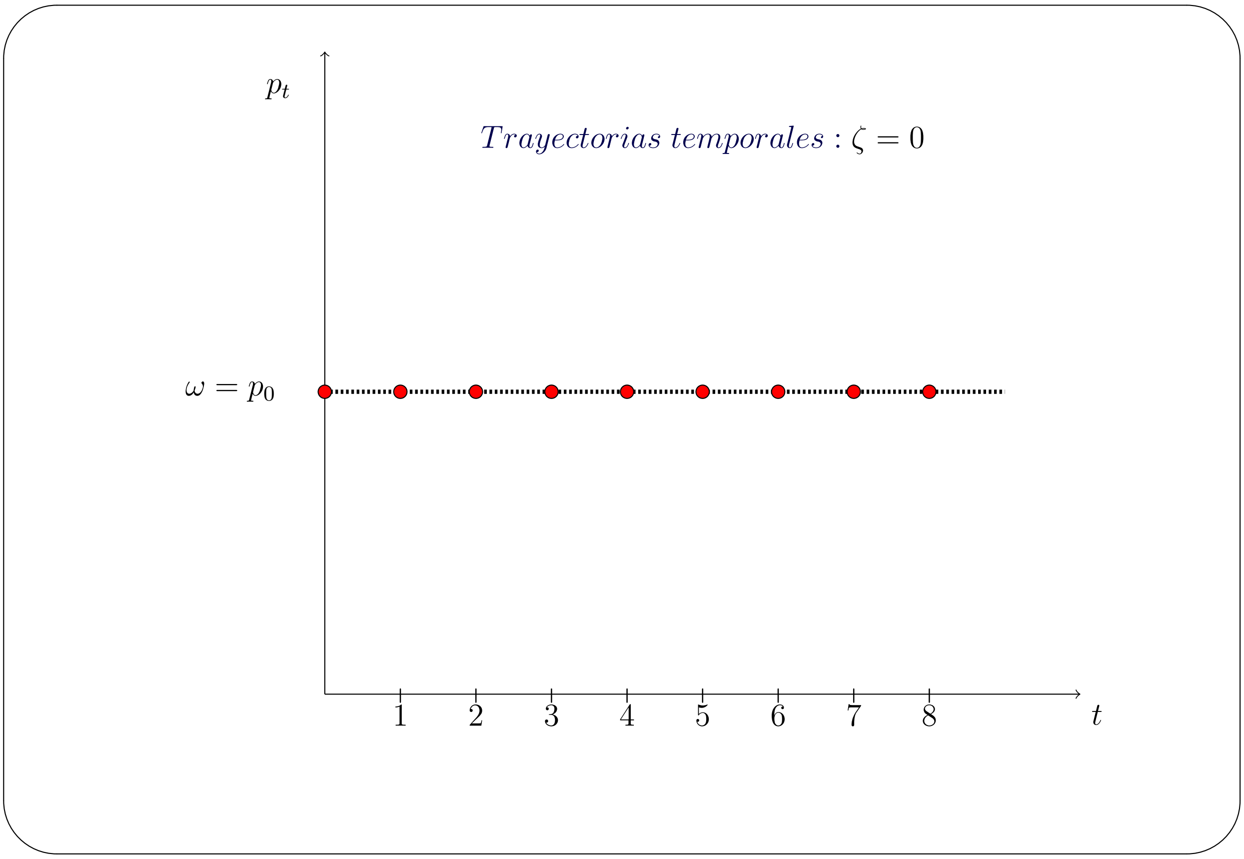
entonces nuestra ecuación (2.16) queda expresada de la forma

$$p_t = \zeta a^t + \omega \tag{2.21}$$

y esta representa la solución del modelo de Cobweb modificado con la condición inicial (precio inicial p_0) la cual genera una sucesión de precios que es denotado por $\{p_t\}$.

2.1.2. Análisis de la solución del modelo

"Para estudiar la estabilidad de la ecuación en diferencias (2.7) y por tanto el modelo de Cobweb, analizaremos la sucesión $\{p_t\}$ dado en (2.19).
Si $\zeta = 0$ en la ecuación en diferencias dada en (2.7), tiene por solución a la constante $p_t = \omega$ para todo $t = 0, 1, 2, 3, ...$ como se muestra en la siguiente imagen. Entonces en este caso la sucesión $\{p_t\}$ converge al valor ω llamado precio en *equilibrio o precio estacionario* de dicha sucesión."



Ahora supongamos que $\zeta \neq 0$. En efecto, el precio inicial es diferente al precio de equilibrio.

Si $a \neq 0$ tenemos que $p_t = \omega,\ \forall\, t = 1, 2, 3, ...$ por lo que tenemos el mismo caso anterior en el que $\zeta = 0$.(ver imagen anterior).

Por lo tanto la sucesión $\{p_t\}$ converge al valor ω, independiente de las condiciones iniciales.

Si $a = -1$ y $t = 2k$, $\forall\, k = 1, 2, 3, ...$:

De (2.19) tenemos que $p_t = \left(p_0 - \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)(-1)^{2k} + \left(\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right) \Rightarrow p_t = p_0$

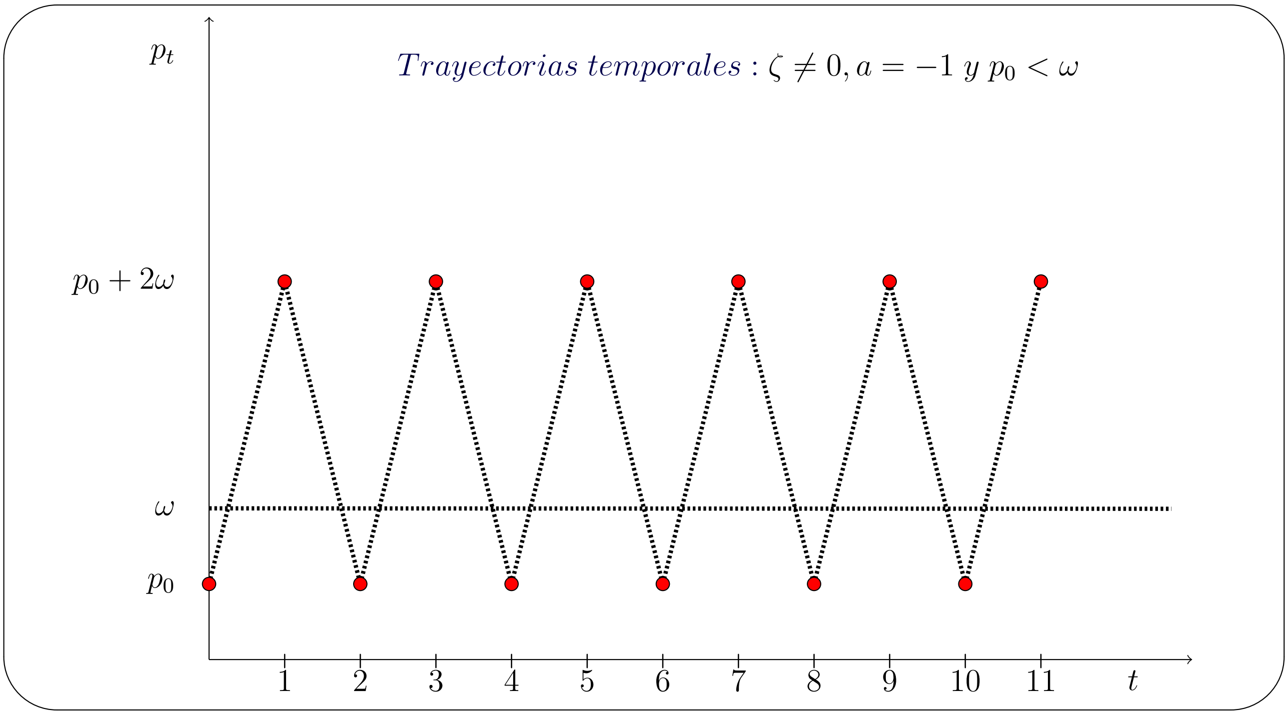
Si $a = -1$ y $t = 2k+1$, $\forall\, k = 1, 2, 3, ...$:

De (2.19) tenemos que $p_t = \left(p_0 - \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)(-1)^{2k} + \left(\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right) \Rightarrow p_t = p_0 + 2\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)$

es decir

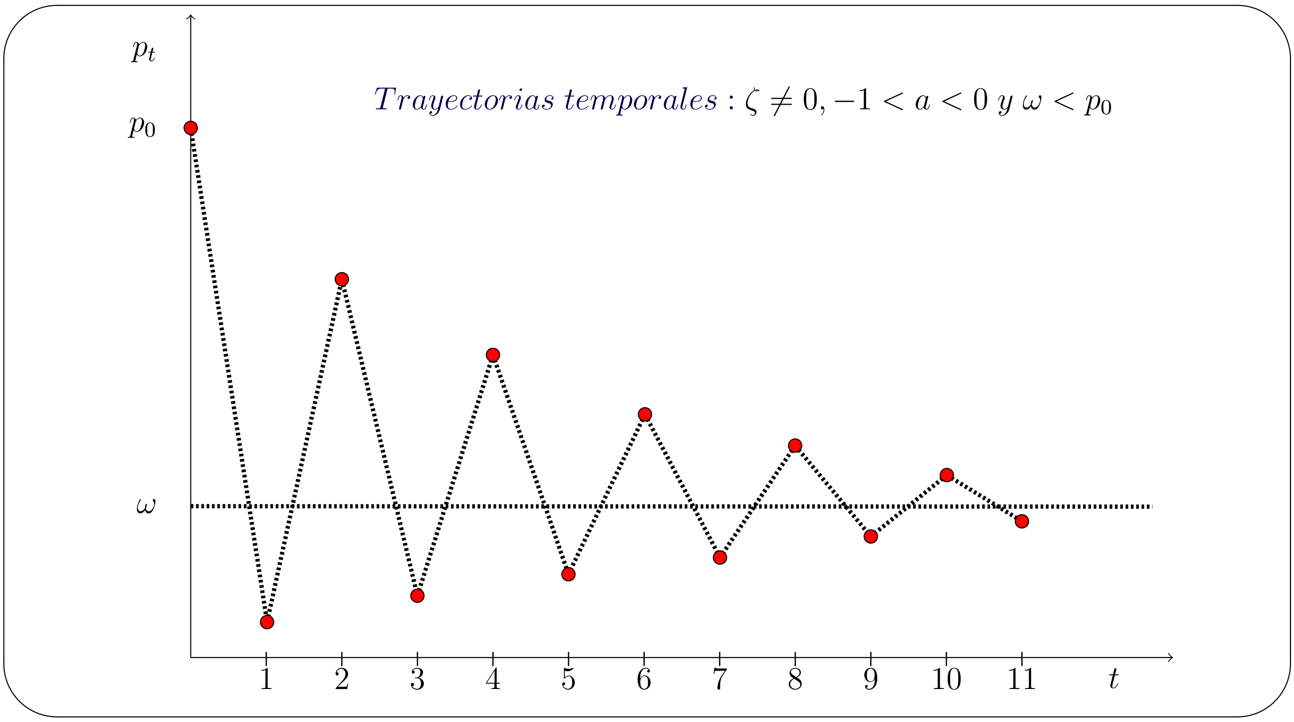
$$p_t = p_0 + 2\omega$$

esto significa que las sucesión oscila en forma acotada y por lo tanto es divergente, a continuación se muestra la gri¡fica de la sucesión.

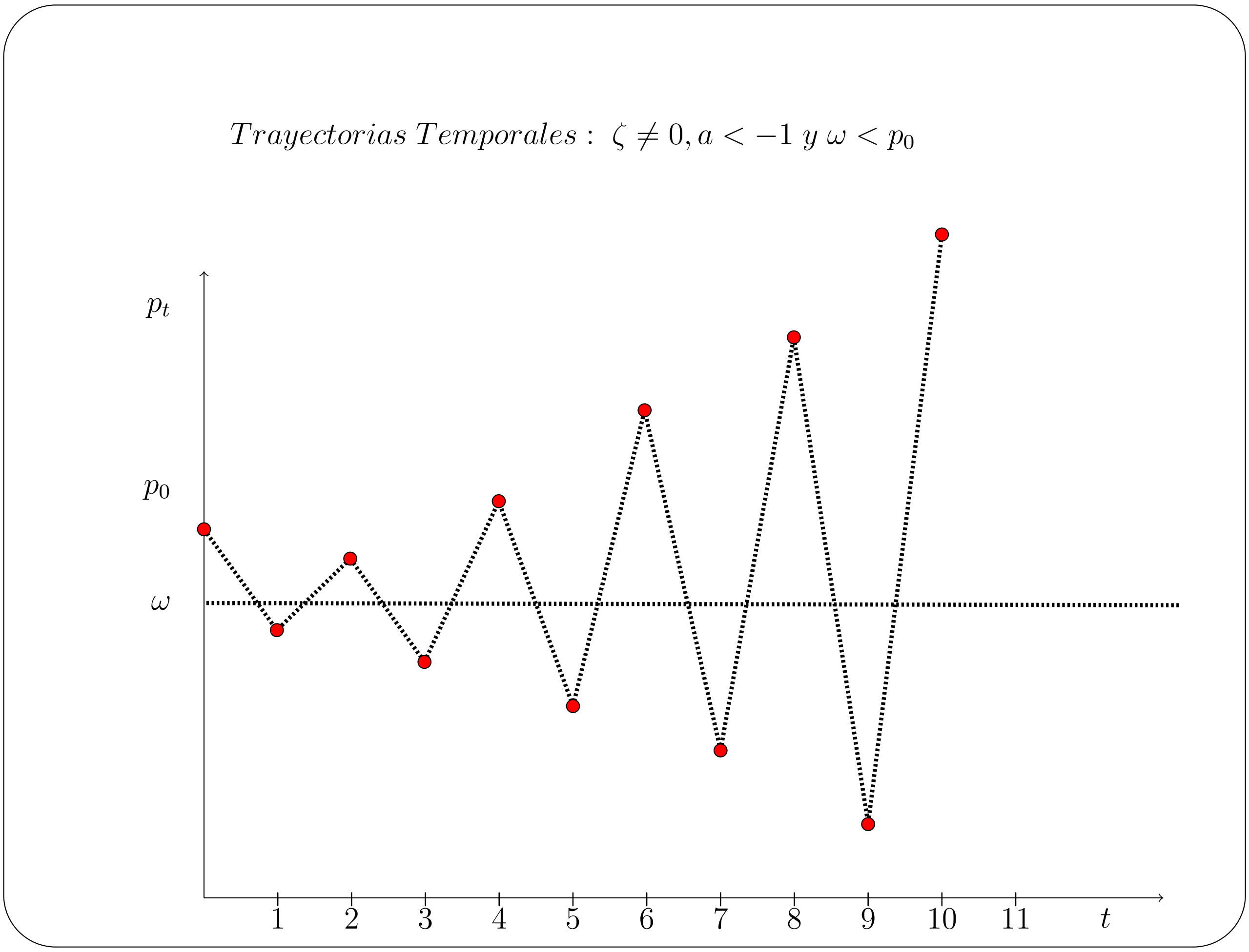


Si $-1 < a < 0$ entonces si $t \to +\infty$ de (2.21) se tiene que $a^t \to 0$ en consecuencia $p_t \to \omega$.

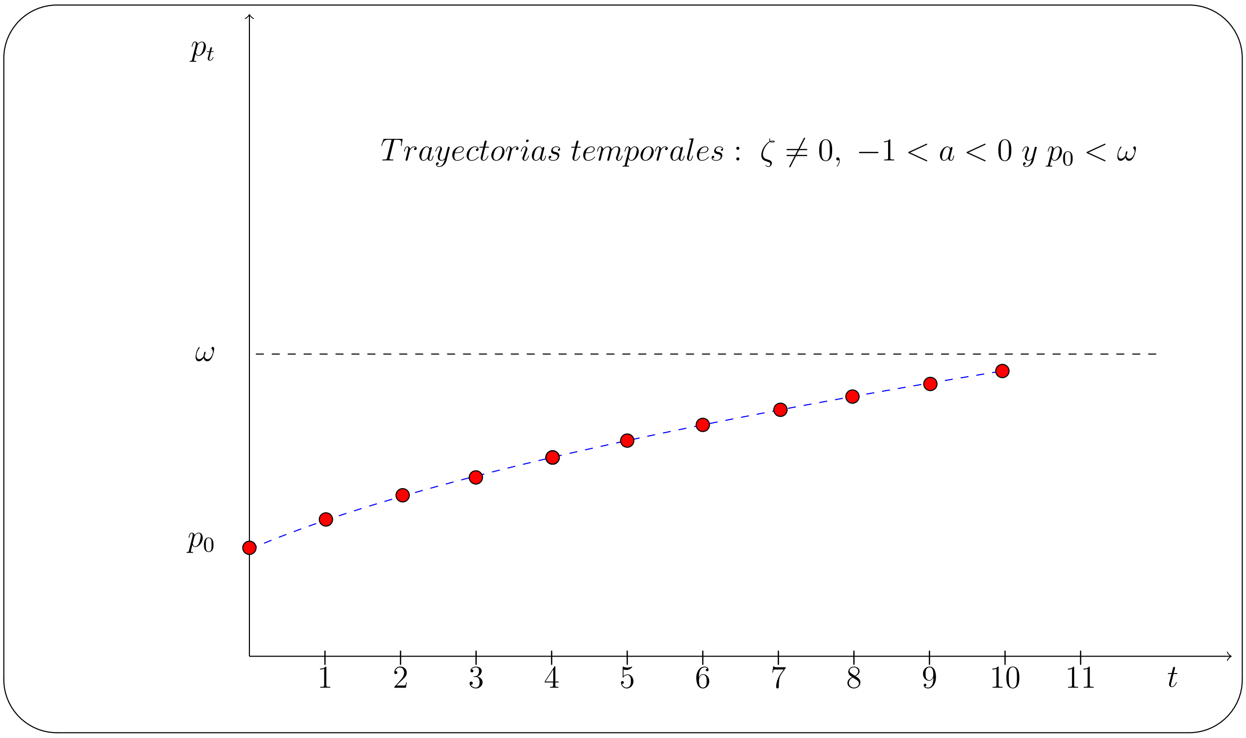
Por lo tanto $\{p_t\}$ converge de forma oscilatoria al precio en equilibrio.En la siguiente gráfica se observa que los precios tienden al precio en equilibrio.



Si $a < -1$ de (2.21) se tiene que $\lim\limits_{t \to +\infty} a^t$ no existe en consecuencia $\lim\limits_{t \to +\infty} p_t$ no existe es decir la sucesión $\{p_t\}$ no es acotada pues es divergente.



Si $0 < a < 1$ entonces si $t \to +\infty$ de (2.21) se tiene que $p_t \to \omega$ esto significa que la sucesión $\{p_t\}$ converge monótonamente al precio en equilibrio. En la gráfica siguiente se observa como los precios van tendiendo al precio de equilibrio.


p_t
$Trayectorias\ temporales:\ \zeta \neq 0,\ -1 < a < 0\ y\ p_0 < \omega$
ω
p_0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
t

3 Conclusiones y/o Sugerencias

En (1.1) estudiamos la solución del modelo de Cobweb modificado es decir se analizó la convergencia de los precios $\{p_t\}$ dada en (2.21) en la siguiente tabla se detallan nuestros resultados encontrados.

Convergente monótona	Convergente oscilatoria	Divergente a	Divergente oscilatoria
• $\zeta = 0$ • $\zeta \neq 0,\ 0 \leq a < 1$	• $\zeta \neq 0,\ -1 < a < 0$	• $\zeta \neq 0,\ a < -1$	• $\zeta \neq 0,\ a = -1$

La estabilidad del modelo de cobweb modificado que se planteó en (2.1) depende de la ecuación en diferencias establecido en (2.7), es decir dependerá de la convergencia al precio de equilibrio ω "de la sucesión de precios dada en" (2.21) Como $a = 1 - k - \frac{\delta}{\beta}k$, llamaremos $\eta = -\frac{\delta}{\beta} \Longrightarrow a = 1 - k + \eta k$ como $0 \leq a < 1$
Entonces $1 - k + \eta k < 1 \Longrightarrow \eta < 1$.
De $-1 < a < 0 \Longrightarrow -1 < 1 - k + \eta k \Longrightarrow -1 < 1 - k + \eta k \Longrightarrow -2 < -k + \eta k \Longrightarrow 1 - \frac{2}{k} < \eta$

$$\therefore \text{ es estable si:} \quad 1 - \frac{2}{k} < \eta < 1$$

además como $a \leq -1 \ \Longrightarrow 1 - k - \frac{\delta}{\beta}k \leq -1 \Longrightarrow \eta \leq 1 - \frac{2}{k}$

$$\therefore \text{ es inestable si:} \quad \eta \leq 1 - \frac{2}{k}$$

Bibliografía

[1] Aguirre, J. y Rocha, Y., "Aplicación de las Ecuaciones en Diferencias a los modelos: Telarai±a y y de Consumo.". Managua (2015)

[2] Bonifaz, J.L. y Winkelried, D.,"Matemi¡ticas para la economia dini¡mica.". Universidad del Pacifico (2003)

[3] Kapadia, A. S. y Moye, L. A., "26 Difference Equations witch Public Health Applications.", Handbook of Statistics (2007).

[4] Mickens, R.E.,"Difference Equations Theory, Applications and Advanced.". CRC Press Taylor y Francis Group. (2015)

[5] Maximon, L.C.,"Differential and Difference Equations.". Springer. (2016)

[6] Yali§Ä±nkaya, I. C. C. y Atalay, M."On the solutions of systems of difference equations". Adv. Difference Equ, (2008).

[7] Di Marco, L. E. (1969) "Expectativas de precios", Económica, 15.

[8] Christev, A. (2005)."The hyperinflation model of money demand (or cagan revisited): Some new empirical evidence from the 1990s. "School of Management and Languages, Heriot Watt University, Edinburgh.

[9] Semitiel, J., Arnulfo, A., y Cianciardo, C.(2014). "Estudio de la estabilidad de una variante del modelo de la telarai±a.