Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Existencia de un punto fijo para una aplicación sobre un cono espacio de Banach

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jhonathan William GUERRERO CHIRINOS

ASESOR

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Guerrero, J. (2021). *Existencia de un punto fijo para una aplicación sobre un cono espacio de Banach.* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Jhonathan William Guerrero Chirinos
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	73244338
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-6639-4191
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-1254-7471
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Andrés Guardia Cayo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09406969
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10078450
Datos de investigación	

Línea de investigación	No aplica.
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.060287 Longitud: -77.082086
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Julio 2021 - octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 18:35 horas del sábado 23 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Mg. Andrés Guardia Cayo (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**EXISTENCIA DE UN PUNTO FIJO PARA UNA APLICACIÓN SOBRE UN CONO ESPACIO DE BANACH**", presentado por el señor **Bachiller Jhonathan William Guerrero Chirinos**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de **diecisiete (17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Jhonathan William Guerrero Chirinos** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 19:05 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE

Mg. Andrés Guardia Cayo
MIEMBRO

Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO ASESOR

EXISTENCIA DE UN PUNTO FIJO PARA UNA APLICACIÓN SOBRE UN CONO ESPACIO DE BANACH

Por

Jhonathan William, Guerrero Chirinos

Tesis sometida al Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos - UNMSM, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

....

Dr. Carlos Alberto, Peña Miranda

Presidente del Jurado Evaluador de Tesis

....

Lic. Andrés, Guardia Cayo

Miembro del Jurado Evaluador de Tesis

....

Mg. Willy David, Barahona Martínez

Miembro Asesor de Tesis

LIMA - PERÚ

2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Jhonathan William, Guerrero Chirinos

Existencia de un punto fijo para una aplicación sobre un cono espacio de Banach, (Lima) 2021
VIII.,26p.,29.7cm (UNMSM, Titulo, Matemática, 2021) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática, UNMSM/FCM II. Título
(Series).

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mis padres Lourdes Chirinos y Jorge Guerrero, hermanos y amistades que me apoyaron e incentivaron para seguir adelante con mis objetivos y metas a pesar de las adversidades.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por guiar mis pasos día a día, ser el apoyo y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y de debilidad.

A mis padres Lourdes Chirinos y Jorge Guerrero quienes son mi mayor fortaleza y brindarme su apoyo incondicional.

A mi asesor el Mg. Willy David Barahona Martínez por haber dedicado tiempo orientándome con sus conocimientos sobre el tema en la elaboración de mi tesis.

A mis maestros por sus enseñanzas y haberme brindado todos sus conocimientos.

A mis amistades de la universidad como Alexandra, Jenny, Yosy, Ingrid, Marilu, Geanjairo, Angel, Hans, Wilmer; de la infancia, Juan, Bryan, Johan y a todas mis amistades restantes que me han apoyado en este largo camino.

RESUMEN

Existencia de un punto fijo para una aplicación sobre un cono espacio de Banach

Jhonathan William, Guerrero Chirinos

Setiembre - 2021

Asesor : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

En este trabajo de tesis, consideramos un subconjunto C cerrado y convexo de un cono espacio de Banach E con la norma $\|x\|_P = d(x, 0)$ y $T : C \to C$ una aplicación que satisface la condición para todo $x, y \in C$

$$0 \leq s + |a| - 2b < 2(a + b)$$

$$ad(Tx, Ty) + b(d(x, Tx) + d(y, Ty)) \leq sd(x, y)$$

El objetivo de este trabajo, es demostrar la existencia de al menos un punto fijo para la aplicación T.

Palabras claves: cono normal, cono espacio métrico, cono espacio normado, cono espacio de Banach, punto fijo.

ABSTRACT

Existence of a fixed point for an application on a Cone Banach space

Guerrero, Jhonathan

September - 2021

Adviser : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Obtained : Graduate in Mathematics.

In this thesis work, we consider C be a closed an convex subset of a cone Banach space X with the norm $\|x\|_P = d(x, 0)$ and $T : C \to C$ a mapping satisfies the condition for all $x, y \in C$

$$0 \leq s + |a| - 2b < 2(a + b)$$

$$ad(Tx, Ty) + b(d(x, Tx) + d(y, Ty)) \leq sd(x, y)$$

The objective of this work is to prove the existence of at least one fixed point for the application T.

Keywords: Normal cone, Cone metric space, Cone normed space, Cone Banach space, fixed point.

INDICE GENERAL

Introducción

Huang y Zhang en [1] introdujeron por primera vez a los conos espacios métricos sustituyendo a los números reales por un orden parcial de un espacio de Banach real, en el cual ellos muestran algunas propiedades de convergencia de sucesiones y pruebas de teoremas de punto fijo para aplicaciones contractivas en un cono espacio métrico. La propiedad de normalidad del cono es fundamental en sus resultados, y creen que sus resultados generalizan algunos teoremas de punto fijo en espacios métricos.

El capítulo 1 está dividido en 3 secciones: en la primera sección veremos la definición de cono y algunas de sus propiedades, en la segunda sección se dará la definición de cono espacio métrico y algunas propiedades sobre sucesiones y finalmente en la tercera sección se verá la definición de cono espacio normado, en el capítulo 2 primeramente se mostrará dos teoremas de punto fijo de los cuales se tomaran algunas relaciones para probar el problema planteado sobre la existencia de un punto fijo en un cono espacio de Banach finalmente en el capítulo 3 daremos nuestras conclusiones y recomendaciones.

1 Preliminares

1.1. Conos

Definición 1. *Un espacio normado real es un espacio vectorial real X junto con la aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ llamada norma, tal que:*

1. $\|x\| \leq 0$, $\forall x \in X$.
2. $\|x\| = 0$, $\forall x \in X$ *si y solo si* $x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\forall x \in X$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Definición 2. *Un espacio normado completo es llamado un espacio de Banach.*

Definición 3. *Sea E un espacio de Banach real y P un subconjunto no vacío de E. Entonces P es llamado cono si las siguientes afirmaciones son válidas*

1. P *es cerrado, no vacío y* $P \neq 0$.
2. $ax + by \in P$ *para todo* $x, y \in P$ *y* a, b *números reales no negativos*
3. $P \cap -P = 0$.

Ejemplo 1. *Sea $E = \mathbb{R}^n$, entonces $P = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in E; x_i \geq 0; \forall = 1, 2, \ldots, n\}$ es un cono.*

Ejemplo 2. *En en el espacio l^p incluido (l^∞), el conjunto $P = \{x_n \in l^p \, : \, x_n \geq 0\}$ es un cono.*

Ejemplo 3. *Si $E = C[0,1]$ con la norma del supremo, $(\|f\| = \sup_{x \in E} \{|f(x)|\})$ el conjunto $P = \{f \in E \, : \, f \geq 0\}$ es un cono.*

Definición 4. *Sea $P \subset E$ un cono, definimos una relación orden parcial (denotado por $\leq$ o $\leq_P$) con respecto a P por:*

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P. \tag{1.1}$$

Adicionalmente podemos escribir que $x < y$ para indicar que $x \leq y$ con $x \neq y$, mientras que $x \ll y$ nos indica que $y - x \in Int(P)$, ($Int(P) \cong$ interior de P).

Definición 5. *El cono P es llamado:*

(N) *Normal: Si existe un número $K \geq 1$ tal que para todo $x, y \in E$*

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq K \|y\| \tag{1.2}$$

(R) *Regular: Si toda sucesión creciente acotada superiormente es convergente.*

Es decir, si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión tal que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq y$ para algún $y \in E$, entonces existe $x \in E$ talque

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

(M) *Minihedral: Si sup $\{x, y\}$ existe para todo $x, y \in E$.*

(S) *Fuertemente Minihedral: Si todo subconjunto de E acotado superiormente tiene supremo.*

Lema 1. *El cono P es regular si toda sucesión decreciente acotada inferiormente es convergente.*

Demostración. Ver en [2]

Lema 2. *Todo cono normal es regular.*

Demostración. Ver en [2]

Lema 3. *No existe un cono normal con constante normal $M < 1$.*

Demostración. Ver en [2]

Proposición 1. *Para cada $k \geq 1$, existe un cono normal con constante normal $M > k$.*

Demostración. Ver en [2]

Lema 4. *Todo cono normal fuertemente minihedral es regular.*

Demostración. Ver en [8]

1.2. Cono Espacio Métrico

Consideremos E un espacio de Banach real, sea P un cono en E y el orden parcial con respecto a P dado.

Definición 6. *Sea X un conjunto no vacío.*
Supongamos que la aplicación $d : X \times X \to E$ satisface:

1. $0 \leq d(x, y)$ *para todo* $x, y \in X$.

2. $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$.

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ *para todo* $x, y, z \in X$.

Entonces d es llamada cono métrica en X, y el par (X, d) es llamado un cono espacio métrico (CEM).

Ejemplo 4. *Sea $E = \mathbb{R}^n$ con $P = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \geq, \forall i = 1, \ldots, n\}$, $X = \mathbb{R}$, y $d : X \times X \to E$ tal que:*

$$d(x, y) = (\alpha_1 |x - y|, \alpha_2 |x - y|, \ldots, \alpha_n |x - y|)$$

donde $\alpha_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.
Entonces (X, d) es un cono espacio métrico.

Ejemplo 5. *Sea $E = l^q$ para $q > 0$, $P = \left\{\{x_n\}_{n \geq 1} \in E : x_n \geq 0 \, \forall n\right\}$. Sea (X, ρ) un espacio métrico y $d : X \times X \to E$ definida por:*

$$d(x, y) = \left\{ \left(\frac{\rho(x, y)}{2^n} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

Entonces (X, d) es un cono espacio métrico.

Ejemplo 6. *Sea $E = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ con la norma del supremo, $P = \{f \in E : f(t) \geq 0\}$, $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ tal que $\varphi(t) = e^t$ y $d : X \times X \to E$ definida por:*

$$d(x, y) = |x - y| \varphi$$

Entonces (X, d) es un cono espacio métrico.

Definición 7. ***(Sucesión)*** *Sea (X, d) un CEM, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x , si para cada $c \in E$ con $0 \ll c$, existe un número natural n_0, tal que $d(x_n, x) \ll c$ para todo $n \geq n_0$.*
Lo denotamos por:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ó } x_n \to x.$$

Lema 5. *Sea (X, d) un CEM, P un cono normal con constante normal K, y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x si y solo si*

$$d(x_n, x) \to 0, \text{ cuando } n \to \infty$$

Demostración. Ver en [1]

Lema 6. *Sea (X, d) un CEM, P un cono normal con constante normal K y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Si $\{x_n\}$ converge para x y $\{x_n\}$ converge para y, entonces $x = y$. Es decir el limite de $\{x_n\}$ es único.*

Demostración. Ver en [1]

Definición 8. ***(Sucesión de Cauchy)*** *Sea (X, d) un CEM y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, si para cada $c \in E$ con $0 \ll c$ existe un número natural n_0, tal que $d(x_n, x_m) \ll c$ para todo $n, m \geq n_0$.*

Definición 9. *Sea (X, d) un CEM, si toda sucesión de Cauchy es convergente en X, entonces X es llamado cono espacio métrico completo.*

Lema 7. *Sea (X, d) un CEM, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Si $\{x_n\}$ converge para x entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Ver en [1]

Lema 8. *Sea (X, d) un CEM, P un cono normal con constante normal K, y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy si y solo si*

$$d(x_n, x_m) \to 0, \quad \text{cuando } n, m \to \infty.$$

Demostración. Ver en [1]

Lema 9. *Sea* (X, d) *un CEM,* P *un cono normal con constante normal* K,$x, y \in X$ *y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X. *Si la sucesión* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *converge para* x *y la sucesión* $\{y_n\}_{n\geq 1}$ *converge para* y *entonces*

$$d\left(x_n, y_n\right) \to d\left(x, y\right) \text{ cuando } n \to \infty$$

Demostración. Ver en [1]

Lema 10. *Sea* (X, d) *un CEM,* P *un cono normal con constante normal* K *y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X. *Si:*

$$d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right) \leq kd\left(x_{n+1}, x_n\right) \text{ con } 0 \leq k < 1$$

entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de Cauchy.*

Demostración:

Afirmación 1. *Para todo* $n \geq 1$ *se cumple que*

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) \leq k^{n-1} d\left(x_2, x_1\right) \tag{1.3}$$

- *Para* $n = 1$ *se tiene que*

$$d\left(x_2, x_1\right) \leq kd\left(x_2, x_1\right) = k^0 d\left(x_2, x_1\right) = k^{1-1} d\left(x_2, x_1\right) \text{ (por hipótesis)} \tag{1.4}$$

- *Supongamos que se cumple para* n *(H.I.). Luego tenemos que*

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right) &\leq kd\left(x_{n+1}, x_n\right) \\ &\leq k^n d\left(x_2, x_1\right) && \text{(por H.I)} \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple que

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) \leq k^{n-1} d\left(x_2, x_1\right)$$

para todo $n \geq 1$ *y* $0 \leq k < 1$.

Sea $n > m$ entonces

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \\
&\leq k^{n-2} d(x_2, x_1) + k^{n-3} d(x_2, x_1) + \ldots k^{m-1} d(x_2, x_1) \\
&= (k^{n-2} + k^{n-3} + \ldots + k^{m-1}) d(x_2, x_1) \\
&= k^{m-1}(k^{n-m-1} + k^{n-m-2} + \ldots + k + 1) d(x_2, x_1) \\
&= k^{m-1} \left(\frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} \right) d(x_2, x_1) \\
&\leq \frac{k^{m-1}}{1 - k} d(x_2, x_1) \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Luego, como P es cono normal con constante normal K tenemos que

$$
\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{k^{m-1}}{1 - k} K \|d(x_2, x_1)\| \qquad (1.6)
$$

Entonces

$$
d(x_n, x_m) \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty.
$$

Por lo tanto $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

1.3. Cono Espacio Normado

Definición 10. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Supongamos que la aplicación $\| \ \|_P : X \to E$ satisface:*

1. $\|x\|_P > 0$ *para todo* $x \in X$.

2. $\|x\|_P = 0$ *si y solo si* $x = 0$.

3. $\|x + y\|_P \leq \|x\|_P + \|y\|_P$ *para todo* $x, y \in X$.

4. $\|kx\|_P = |k| \|x\|_P$ *para todo* $k \in \mathbb{R}$.

Entonces $\|.\|_P$ es llamada cono norma en X, y el par $(X, \|.\|_P)$ es llamado un cono espacio normado (CEN).

Observación 1. *Sea $(X, \|.\|_P)$ un cono espacio normado, la aplicación $d : X \times X \to E$ definida por*

$$
d(x, y) = \|x - y\|_P
$$

es un cono métrica sobre X y el par (X, d) es un CEM, d es llamada cono métrica inducida por la cono norma $\|.\|_P$.

Definición 11. ***(Sucesión)*** *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x , si para cada $c \in E$ con $0 \ll c$, existe un número natural n_0, tal que $\|x_n - x\|_P \ll c$ para todo $n \geq n_0$.*
Lo denotamos por

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ó } x_n \to x$$

Lema 11. *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN, P un cono normal con constante normal K, y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x si y solo si*

$$\|x_n - x\|_P \to 0, \text{ cuando } n \to \infty$$

Demostración. Ver en [1]

Lema 12. *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN, P un cono normal con constante normal K, $x, y \in X$ y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Si $\{x_n\}$ converge para x y $\{x_n\}$ converge para y, entonces $x = y$. Es decir el límite de $\{x_n\}$ es único.*

Demostración. Ver en [1]

Definición 12. ***(Sucesión de Cauchy)*** *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, si para cada $c \in E$ con $0 \ll c$ existe un número natural n_0, tal que $\|x_n - x_m\|_P \ll c$ para todo $n, m \geq n_0$.*

Definición 13. *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN, si toda sucesión de Cauchy es convergente en X, entonces X es llamado cono espacio normado completo (i.e. cono espacio de Banach).*

Lema 13. *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Si $\{x_n\}$ converge para x entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Ver en [1]

Lema 14. *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN, P un cono normal con constante normal K, y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy si y solo si $\|x_n - x_m\|_P \to 0$, cuando $n, m \to \infty$.*

Demostración. Ver en [1]

Lema 15. *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN, P un cono normal con constante normal K,$x, y \in X$ y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Si la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x y a sucesión $\{y_n\}_{n\geq 1}$ converge para y entonces $\|x_n - y_n\|_P \to \|x - y\|_P$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Ver en [1]

2 Problema Principal

En este capítulo presentamos el resultado principal del trabajo de tesis, partimos de la definición de la iteración de Krasnoselskij.

Definición 14. *Sea X un conjunto no vacío, C un subconjunto cerrado y convexo de X; $T : C \to C$ una aplicación. Para algún $x_0 \in C$, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset C$ dada por*

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0, 1, 2... \quad \wedge \quad \lambda \in [0; 1] \tag{2.1}$$

es llamada la iteración de Krasnoselskij.

A continuación se van a presentar algunos teoremas de punto fijo donde $X = (X, \|.\|_P)$ será un cono espacio de Banach, P un cono normal con constante normal K y T una aplicación definida en si misma en un subconjunto C de X. Además utilizamos la iteración de Krasnoselskij para el caso particular de $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Teorema 1. *Sea C un subconjunto cerrado y convexo de un cono espacio de Banach E con la norma $\|x\|_P = d(x, 0)$ y $T : C \to C$ una aplicación que satisface la condición*

$$d(x, Tx) + d(y, Ty) \leq q d(x, y) \tag{2.2}$$

Para todo $x, y \in C$, donde $2 \leq q < 4$. Entonces, T tiene al menos un punto fijo.

Demostración:

Sea $x_0 \in C$ arbitrario. Tal que

$$x_1 = \frac{x_0 + Tx_0}{2},\ x_2 = \frac{x_1 + Tx_1}{2},\ x_3 = \frac{x_2 + Tx_2}{2}, \ldots,\ x_n = \frac{x_n + Tx_n}{2}, \ldots$$

Entonces la sucesión $\{x_n\}$ esta definida como

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2.3}$$

Notemos que

$$x_n - Tx_n = 2\left(\frac{2x_n - x_n - Tx_n}{2}\right) = 2\left(x_n - \left(\frac{x_n + Tx_n}{2}\right)\right) = 2(x_n - x_{n+1}) \tag{2.4}$$

de (2.4) obtenemos lo siguiente

$$d(x_n, Tx_n) = \|x_n - Tx_n\|_P = 2\|x_n - x_{n+1}\|_P = 2d(x_n, x_{n+1}) \quad , n = 0, 1, 2, 3 \tag{2.5}$$

Tomamos $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$, reemplazando en (2.2) y de (2.5), obtenemos lo siguiente

$$2d(x_{n-1}, x_n) + 2d(x_n, x_{n+1}) = d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n) \leq qd(x_{n-1}, x_n)$$

$$\Rightarrow 2d(x_{n-1}, x_n) + 2d(x_n, x_{n+1}) \leq qd(x_{n-1}, x_n) \tag{2.6}$$

Luego tenemos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$$

donde $k = \dfrac{q-2}{2} < 1$ (pues $2 \leq q < 4$). Por el lema (10) se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en C y esta converge para algún $z \in C$.

De la desigualdad triangular y de (2.5)

$$\begin{aligned} d(z, Tx_n) &\leq d(z, x_n) + d(x_n, Tx_n) \\ &= d(z, x_n) + 2d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si $n \to \infty$ tenemos que $d(z, Tx_n) \to 0$.

Luego por el lema 9 obtenemos que

$$Tx_n \to z \tag{2.8}$$

Sustituyendo $x = z$ y $y = x_n$ en (2.2)

$$d(z, Tz) + d(x_n, Tx_n) \leq qd(z, x_n) \tag{2.9}$$

y de (2.5) tenemos que

$$d(z, Tz) + 2d(x_n, x_{n+1}) \leq qd(z, x_n) \tag{2.10}$$

Por lo tanto, cuando $n \to \infty$ y por el lema 9, obtenemos $d(z, Tz) \leq 0$

entonces

$$Tz = z.$$

Teorema 2. *Sea C un subconjunto cerrado y convexo de un cono espacio de Banach E con la norma $\|x\|_P = d(x, 0)$ y $T : C \to C$ una aplicación que satisface la condición*

$$d(Tx, Ty) + d(x, Tx) + d(y, Ty) \leq rd(x, y) \tag{2.11}$$

Para todo $x, y \in C$, donde $2 \leq r < 5$. Entonces, T tiene al menos un punto dijo.

Demostración:

Se construye la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ como en la demostración de teorema 1, de (2.3) tenemos que

$$x_n - Tx_{n-1} = \frac{x_{n-1} + Tx_{n-1}}{2} - Tx_{n-1} = \frac{x_{n-1} - Tx_{n-1}}{2} \tag{2.12}$$

luego se tiene

$$d(x_n, Tx_{n-1}) = \|x_n - Tx_{n-1}\|_P = \frac{1}{2}\|x_{n-1} - Tx_{n-1}\|_P = \frac{1}{2}d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \tag{2.13}$$

Por lo tanto, la desigualdad triangular implica

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) &\leq d(x_n, Tx_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ d(x_n, Tx_n) - d(x_n, Tx_{n-1}) &\leq d(Tx_{n-1}, Tx_n) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Entonces por (2.13) y (2.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} 2d(x_n, x_{n+1}) - \frac{1}{2}d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) &\leq d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ 2d(x_n, x_{n+1}) - d(x_{n-1}, x_n) &\leq d(Tx_{n-1}, Tx_n) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Reemplazamos $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$ en (2.11)

$$d(Tx_{n-1}, Tx_n) + d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n) \leq rd(x_{n-1}, x_n) \tag{2.16}$$

de (2.5)

$$d(Tx_{n-1}, Tx_n) + 2d(x_{n-1}, x_n) + 2d(x_n, x_{n+1}) \leq rd(x_{n-1}, x_n) \tag{2.17}$$

finalmente de (2.15)

$$2d(x_n, x_{n+1}) - d(x_{n-1}, x_n) + 2d(x_{n-1}, x_n) + 2d(x_n, x_{n+1}) \leq rd(x_{n-1}, x_n) \tag{2.18}$$

y por lo tanto tenemos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \tag{2.19}$$

donde $k = \dfrac{r-1}{4} < 1$ (pues $2 \leq r < 5$).

Por el lema (10) se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en C y converge para algún $z \in C$.

De la desigualdad triangular y de (2.5)

$$\begin{aligned} d(z, Tx_n) &\leq d(z, x_n) + d(x_n, Tx_n) \\ &= d(z, x_n) + 2d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si $n \to \infty$ tenemos que $d(z, Tx_n) \to 0$. Luego por el lema 9 obtenemos que

$$Tx_n \to z \tag{2.21}$$

Sustituyendo $x = z$ y $y = x_n$ en (2.11)

$$d(Tz, Tx_n) + d(z, Tz) + d(x_n, Tx_n) \leq rd(z, x_n) \tag{2.22}$$

Por lo tanto, cuando $n \to \infty$ y por el lema 9,obtenemos $d(Tz, z) + d(z, Tz) \leq 0$ entonces

$$Tz = z.$$

A continuación presentamos el resultado de la investigación la cual es la demostración de un teorema de punto fijo para un cono espacio de Banach.

Teorema 3. *Sea C un subconjunto cerrado y convexo de un cono espacio de Banach E con la norma $\|x\|_P = d(x, 0)$ y $T : C \to C$ una aplicación que satisface la condición*

$$0 \leq s + |a| - 2b < 2(a + b) \tag{2.23}$$

$$ad(Tx, Ty) + b(d(x, Tx) + d(y, Ty)) \leq sd(x, y) \tag{2.24}$$

Para todo $x, y \in C$. Entonces, T tiene al menos un punto fijo.

Demostración:

Se construye la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ como en la demostración de teorema 1.

Afirmación:

Para todo a, b, s que satisface (2.23) se cumple que

$$2ad(x_n, x_{n+1}) - |a|d(x_{n-1}, x_n) + 2b(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})) \leq sd(x_{n-1}, x_n) \tag{2.25}$$

De (2.5) tenemos que

$$d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) = 2d(x_{n-1}, x_n), \qquad d(x_n, Tx_n) = 2d(x_n, x_{n+1}) \tag{2.26}$$

- Para el caso $a \geq 0$.

  Reemplazamos $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$ en (2.24) obtenemos

$$ad(Tx_{n-1}, Tx_n) + b(d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)) \leq sd(x_{n-1}, x_n) \tag{2.27}$$

Luego de (2.26) y (2.15) tenemos que

$$2ad\left(x_n, x_{n+1}\right) - ad\left(x_{n-1}, x_n\right) + 2b(d\left(x_{n-1}, x_n\right) + d\left(x_n, x_{n+1}\right)) \leq sd\left(x_{n-1}, x_n\right) \tag{2.28}$$

lo cual es equivalente a (2.25), pues $|a| = a$.

- Para el caso $a < 0$. Consideramos la desigualdad triangular para x_n, Tx_n, Tx_{n-1}

$$d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) \leq d\left(x_n, Tx_n\right) + d\left(x_n, Tx_{n-1}\right) \tag{2.29}$$

entonces

$$a(d\left(x_n, Tx_n\right) + d\left(x_n, Tx_{n-1}\right)) \leq ad\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) \tag{2.30}$$

Reemplazamos $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$ en (2.24) obtenemos

$$ad\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) + b\left(d\left(x_{n-1}, Tx_{n-1}\right) + d\left(x_n, Tx_n\right)\right) \leq sd\left(x_{n-1}, x_n\right) \tag{2.31}$$

Luego de (2.26), (2.30) y (2.13) conseguimos que

$$2ad\left(x_n, x_{n+1}\right) + ad\left(x_{n-1}, x_n\right) + 2b(d\left(x_{n-1}, x_n\right) + d\left(x_n, x_{n+1}\right)) \leq sd\left(x_{n-1}, x_n\right) \tag{2.32}$$

lo cual es equivalente a (2.25), pues $|a| = -a$.

La afirmación queda probada por (2.28) y (2.32).

Por (2.25), obtenemos que

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq kd\left(x_n, x_{n-1}\right) \tag{2.33}$$

donde $k = \dfrac{|a| - 2b + s}{2(a+b)} < 1$ (pues $0 \leq s + |a| - 2b < 2(a+b)$). Por el lema (10) se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en C y convergente para algún $z \in C$.

De la desigualdad triangular y de (2.5)

$$\begin{aligned} d\left(z, Tx_n\right) &\leq d\left(z, x_n\right) + d\left(x_n, Tx_n\right) \\ &= d\left(z, x_n\right) + 2d\left(x_n, x_{n+1}\right) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Si $n \to \infty$ tenemos que $d\left(z, Tx_n\right) \to 0$. Luego por el lema 9 obtenemos que

$$Tx_n \to z \tag{2.35}$$

Sustituyendo $x = z$ y $y = x_n$ en (2.24)

$$ad\,(Tz, Tx_n) + b\,(d\,(z, Tz) + d\,(x_n, Tx_n)) \leq sd\,(z, x_n) \tag{2.36}$$

Por lo tanto, cuando $n \to \infty$ y por el lema 9, obtenemos

$$ad\,(Tz, z) + bd\,(z, Tz) \leq 0 \tag{2.37}$$

lo cual es equivalente a

$$Tz = z \text{ con } a + b > 0.$$

3 Conclusiones y/o Sugerencias

1. En los teoremas de punto fijo vistos en el capitulo 2 tomamos el caso particular de iteración de Krasnoselskij para $\lambda = \frac{1}{2}$, si tomamos el caso de $\lambda = 1$ no se podrían obtener las ecuaciones (2.5), (2.13) las cuales son fundamentales para la lograr nuestro objetivo.

2. Al investigar algunos teoremas de un punto fijo para un cono espacio de Banach concluimos que la propiedad de la normalidad del cono es fundamental para lograr la existencia del punto fijo.

3. Para una investigación futura se estudiara el problema planteado considerando la iteración de Krasnoselskij para el caso general cuando $\lambda \in \langle 0; 1 \rangle$.

Bibliografía

[1] Huang, L. G. and Zhang, X. (2007). "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings". Journal of mathematical Analysis and Applications, 332(2), 1468-1476.

[2] Rezapour, S., and Hamlbarani, R. (2008). "Some notes on the paper ?Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 345(2), 719-724.

[3] Sahin, I., and Telci, M. (2009). "Fixed points of contractive mappings on complete cone metric spaces". Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, 38(1), 59-67.

[4] Abdeljawad, T., Turkoglu, D., and Abuloha, M. (2010). "Some theorems and examples of cone Banach spaces". J. Comput. Anal. Appl, 12(4), 739-753.

[5] Rhoades, B. E. (1977). "A comparison of various definitions of contractive mappings". Transactions of the American Mathematical Society, 226, 257-290.

[6] Suzuki, T. (2008). "Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340(2), 1088-1095.

[7] Turkoglu, D., and Abuloha, M. (2010). "Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings". Acta mathematica sinica, English series, 26(3), 489-496.

[8] Abdeljawad, T., and Karapinar, E. (2009). "Quasicone metric spaces and generalizations of Caristi Kirk's theorem". Fixed Point Theory and Applications, 2009, 1-9.

[9] V. Berinde, "Iterative Approximation of Fixed Points", second ed., in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1912, Springer, Berlin, 2007.