Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Conjuntos en R^n hechos de una sola pieza y el seno del topólogo

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Katherina Marilu CORNELIO ZARATE

ASESOR

Mg. Pedro Ángel BECERRA PÉREZ

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Cornelio, K. (2021). *Conjuntos en R^n hechos de una sola pieza y el seno del topólogo*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Katherina Marilu Cornelio Zárate
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	47276387
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-3697-2245
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Pedro Ángel Becerra Pérez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	05748466
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-3124-752X
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Gavino Aymituma Puma
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08025924
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Félix Gregorio Pariona Vilca
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	07366081
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Pedro Ángel Becerra Pérez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	05748466
Datos de investigación	

Línea de investigación	No aplica.
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.060287 Longitud: -77.082086
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Julio 2021 - octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 18:35 horas del sábado 23 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Mg. Gavino Aymituma Puma (PRESIDENTE), Mg. Felix Gregorio Pariona Vilca (MIEMBRO) y el Lic. Pedro Ángel Becerra Pérez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**CONJUNTOS EN Rn HECHOS DE UNA SOLA PIEZA Y EL SENO DEL TOPÓLOGO**", presentado por la señorita **Bachiller Katherina Marilu Cornelio Zárate**, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de diecisiete **(17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que la participante **Bachiller Katherina Marilu Cornelio Zárate** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 19:05 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Gavino Aymituma Puma
PRESIDENTE

Mg. Felix Gregorio Pariona Vilca
MIEMBRO

Lic. Pedro Ángel Becerra Pérez
MIEMBRO ASESOR

FICHA CATALOGRÁFICA

Katherina Marilu, Cornelio Zárate

Conjuntos en $\mathbb{R}^n$ Hechos de una Sola Pieza y el Seno del Topólogo, (Lima) 2021
VIII.,47p.,29.7cm (UNMSM, Titulo, Matemática, 2021) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática, UNMSM/FCM II. Título
(Series).

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mis padres Sinecio Cornelio y Silveria Zárate, hermanos y novio que no dudaron en apoyarme e incentivar a no rendirme y seguir adelante con mis metas y proyectos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios por bendecirme a mi familia y a mi en estos tiempos tan difíciles.
A mis padres Sinecio Cornelio Espinoza y Silveria Zárate Guadalupe que siempre estuvieron apoyándome en todo momento de mi vida para cumplir mis objetivos, también darme la fuerza para seguir en pie ante cualquier adversidad y por brindarme su dedicación, comprensión y cariño.
A mis hermanos, Evelin que me enseño a seguir adelante a pesar de todo, Mónica que me ayudo a traves de su paciencia y dedicación , Tito que me enseño que cada cosa va de la mano con Dios y Jesús por su comprensión y alegría.
A todas la personas que confiaron en mi y me apoyaron en todo momento , entre ellos amigos, estudiantes y en particular a mi novio el cual me ayudo a seguir mejorando profesionalmente y al cual admiro por su fortaleza y dedicación.
A mis maestros por su paciencia y sus enseñanzas a la hora de impartir sus clases y darnos los conocimientos necesarios para poder seguir investigando.

RESUMEN

Conjuntos en $\mathbb{R}^n$ Hechos de una Sola Pieza y el Seno del Topólogo

Katherina Marilu, Cornelio Zárate

Octubre - 2021

Asesor : Mg. Pedro Ángel Becerra Pérez.

Título obtenido : Licenciada en Matemática.

En este trabajo de tesis, consideramos una curva que esta incluida en $\mathbb{R}^2$ la cual es conocida como el Seno del Topólogo: "

$$\lambda : \langle 0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to \lambda(t) = (t, sen\tfrac{1}{t})$$

donde $X = \lambda[\langle 0,1]]$ es la imagen de la curva."

El objetivo de este trabajo, es ver de manera didáctica que la noción de conexidad para conjuntos no necesariamente significa que este esta hecho de una sola pieza para ello se probará que $X \cup \{(0,0)\}$ es un conjunto conexo.
Además se incluirá como la noción de caminos es fundamental para decir que un conjunto está hecho de una sola pieza o no.

Palabras claves: Conjuntos conexos,Caminos,Seno del Topólogo,Conexo por Caminos,Topología en $\mathbb{R}^n$.

ABSTRACT

Sets in $\mathbb{R}^n$ Made of a Single Piece and the Sine of the Topologist
Cornelio, Katherina

October - 2021

Adviser : Mg. Pedro Ángel Becerra Pérez.
Obtained : Graduate in Mathematics.

In this thesis work, we consider a curve that is included in $\mathbb{R}^2$ which is known as the Sine of the Topologist:

“

$$\lambda : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to \lambda(t) = (t, sen\frac{1}{t})$$

where $X = \lambda[\langle 0, 1]]$ is the image of the curve.”

The objective of this work is to see in a didactic way that the notion of connection for sets does not necessarily mean that it is made in a single piece, for this it will be shown that $X \cup \{(0, 0)\}$ is a connected set.

In addition, it will be included how the notion of paths is fundamental to say that a set is made of a single piece or not.

Keywords: Connected sets, Paths, Sine of the Topologue, Connected by Paths, Topology in $\mathbb{R}^n$.

INDICE GENERAL

Introducción

En nuestra vida diaria nos encontramos muy a menudo con lo que es un conjunto, ya que este está determinado cuando se da una regla que nos permita decidir si un objeto pertenece o no a él. Está definición matemática que tenemos nos permite describir infinidad de conjuntos que nos serán útiles en distintas ramas de la matemática.

Entre estos conjuntos, existen los cuales aceptan escisiones, intuitivamente podríamos decir que pueden ser divididos y por otro lado existen conjuntos que solo aceptan la escisión trivial, a este tipo de conjuntos se les llama conexos y es allí donde profundizaremos.

El estudio de la conexidad de un conjunto ha sido de mucha importancia a lo largo del tiempo, ya que esta propiedad permanece inalterable por funciones continuas lo que la hace más interesante a la topología.
De estos conjuntos conexos se puede decir que sus elementos están conectados dentro del mismo conjunto, en la recta real intuitivamente se dice que son conjuntos los cuales no pueden ser divididos es decir son "hechos de una sola pieza" por ejemplo el intervalo $[0, 1]$ es un conjunto conexo y el conjunto $A = \mathbb{R} - \{0\}$ es disconexo. Intuitivamente es lógico pensar que la idea de $\mathbb{R}$ se mantiene en $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ al hablar que un conjunto conexo está "hecho de una sola pieza".

En nuestro caso, demostraremos de manera didáctica como la idea intuitiva de la recta real que un conjunto conexo está "hecho de una sola pieza" no es suficiente para el espacio $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ simplemente con la definición de conexidad ya que veremos una

curva que esta incluida en $\mathbb{R}^2$ la cual es conocida como el Seno del Topólogo el cual nos muestra que un conjunto conexo no está hecho de una sola pieza. Para ello hemos dividido el presente trabajo en 4 capítulos:
En el capítulo 1 mostraremos las nociones básicas del espacio Euclidiano para también ver la topología de este espacio y las propiedades básicas de conexidad, en el capítulo 2 presentaremos lo que son los caminos en $\mathbb{R}^n$ definiciones importantes y propiedades básicas que nos ayudarán a demostrar el problema principal, en el capítulo 3 mostraremos conjuntos hechos de una sola pieza o no y resolveremos nuestro problema principal dando a conocer el Seno del Topólogo y se adicionará que se necesita para decir que un conjunto está hecho de una sola pieza y la relación importante que tiene con las nociones de caminos y por último en el capitulo 4 daremos nuestras conclusiones finales.

1 Preliminares

En los siguientes capítulos mostraremos algunas definiciones y teoremas previos que nos ayudarán a entender las futuras demostraciones.

1.1. El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1.1.

"El conjunto $\mathbb{R}^n$ es definido como:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

"

Definición 1.1.2.

"Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, decimos que: $x = y$ si y solo si, se tiene que $x_i = y_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$."

Definición 1.1.3.

"Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos la suma de vectores x e y, denotada por $x + y$ y el producto del escalar α por el vector x, denotado por αx, como:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

"

Definición 1.1.4.

Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el producto interno de x, y se define como:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Teorema 1.1.1.

En $\mathbb{R}^n$ se cumple:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
4. $\langle x + x^{'}, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x^{'}, y\rangle$, $\forall x, x^{'}, y \in \mathbb{R}^n$
5. $\langle \alpha x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

Definición 1.1.5.

La norma de $x \in \mathbb{R}^n$, se define como:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Observación 1.1.1.

La norma de x ($\|x\|$) es interpretada geométricamente como la longitud de la flecha que representa el vector x

Teorema 1.1.2 (Cauchy-Schwarz)**.**

Tenemos lo siguiente:

1. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow \exists n\ a, b \in \mathbb{R}$, no ambos nulos, tal que $ax + by = 0$

Demostración. Ver [3] pag. 9.

Teorema 1.1.3.

Se cumple para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad triangular)
4. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

Demostración. Probando la desigualdad triangular:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\|x+y\| \leq (\|x\| + \|y\|)$$

□

Las demás demostraciones ver [1]pag.59.

Definición 1.1.6.

La **distancia** entre x, e $y \in \mathbb{R}^n$, se define como:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\|$$

Observación 1.1.2.

Se cumple que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = d(x,0)$$

1.2. Bolas abiertas y cerradas en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.2.1.

"Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$:

1. La bola abierta de centro a y radio r, es el conjunto definido por:

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \|x-a\| < r\}$$

2. La bola cerrada de centro a y radio r, es el conjunto definido por:

$$B_r[a] = \{x \in \mathbb{R}^n \|x-a\| \leq r\}$$

3. La esfera de centro a y radio r, es el conjunto definido por:

$$S_r[a] = \{x \in \mathbb{R}^n \|x - a\| = r\}$$

"

1.3. Conjunto convexo

Definición 1.3.1.
"Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento de recta que los une es, denotado por $[x, y]$ y definido como:

$$[x, y] = \big\{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\big\}$$

"

Definición 1.3.2.
"Decimos que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo si y solo si, para todo par de puntos x, $y \in X$, se tiene que $[x, y] \subseteq X$"

Proposición 1.3.1.
"Si $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ entonces $B_r(a)$ y $B_r[a]$ son conjuntos convexos."
Demostración. Ver [3]pag. 13.

1.4. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.4.1.
"Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una función $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que a cada $m \in \mathbb{N}$ se le asocia un $x(m) = x_m$ el cual es llamado m-ésimo término de la sucesión.

Notación: Las sucesiones serán denotadas como:

$$(x_1, x_2, x_3, ..., x_m, ...) = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} = (x_m) \subseteq \mathbb{R}^n$$

"

Definición 1.4.2.
"Si $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces:

1. $\lim_{k \longrightarrow \infty} x_k = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$ entonces

$$\|x_k - L\| < \epsilon$$

2. Decimos que (x_k) es convergente si y solo si $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x_k = L$$

3. Decimos que (x_k) es divergente si y solo si (x_k) no es convergente.

"

Observación 1.4.1.

Si tenemos

1. En términos de bolas; $\lim_{k \longrightarrow \infty} x_k = a$ si y solo si

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \{x_{k_0}, x_{k_0+1}, ...\} \subseteq B_\epsilon(a)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \{x_k\}_{k \geq k_0} \subseteq B_\epsilon(a)$$

2. $\lim_{k \longrightarrow \infty} x_k \neq a$ si y solo si

$$\exists \epsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N} : \{x_k, x_{k+1}, ...\} \nsubseteq B_\epsilon(a)$$

Si y solo si

$$\exists \epsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists m_k \geq k : \|x_k - a\| \geq \epsilon$$

Corolario 1.4.1 (Unicidad del límite)**.**

"Si existe el límite de una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$ este es único."

Demostración. Ver [10]pag. 118.

Corolario 1.4.2 (Álgebra de límites)**.**

" Si $(x_k), (y_k) \subseteq \mathbb{R}^n, (\alpha_k) \subseteq \mathbb{R}$ son sucesiones, entonces::

$$(x_k \pm y_k), (\alpha_k x_k) \subseteq \mathbb{R}^n, (\langle x_k, y_k \rangle), (\|x_k\|), (d(x_k, y_k)) \subseteq \mathbb{R}$$

son convergentes y se cumple:

1. $\lim_{k \longrightarrow \infty} (x_k \pm y_k) = \lim_{k \longrightarrow \infty} x_k \pm \lim_{k \longrightarrow \infty} y_k$

2. $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}(\alpha_k x_k) = (\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\alpha_k)(\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}x_k)$

3. $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\langle x_k, y_k\rangle = \langle \lim\limits_{k\longrightarrow\infty}x_k, \lim\limits_{k\longrightarrow\infty}y_k\rangle$

4. $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\|x_k\| = \|\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}x_k\|$

5. $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}d(x_k, y_k) = d(\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}x_k, \lim\limits_{k\longrightarrow\infty}y_k)$

” Demostración. Ver [9]pag. 16.

Definición 1.4.3 (Sucesión acotada)**.**

Decimos que una sucesión (x_k) $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotada, si $\exists r > 0$ tal que $\|x_k\| < r, \forall k \in \mathbb{N}$

Proposición 1.4.1.

Toda sucesión $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ convergente, es acotada.

Demostración. Ver [10]pag. 118.

Definición 1.4.4.

“Sea $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ y $M : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente. La composición de

$$x \circ m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada $k \in \mathbb{N}$ le asocia $(x \circ m)_k = x(m(k)) = x_{m_k} \in \mathbb{R}^n$ es llamada subsucesión de (x_k).”

Teorema 1.4.1 (“Bolzano-Weierstrass”)**.**

De toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ se puede obtener una subsucesión convergente.

Demostración. Ver [9]pag. 17.

Definición 1.4.5.

“Decimos que $(x_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión de Cauchy si y solo si

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : k, k^{'} \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - x_{k'}\| < \epsilon$$

”

Teorema 1.4.2.

$(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ es de Cauchy si solo si $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ es convergente.

Demostración. Ver [9]pag. 18

1.5. Conjuntos Abiertos y cerrados

Definición 1.5.1.

"Sea $X \subseteqq \mathbb{R}^n$.

1. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ es punto interior de X si y solo si existe $\epsilon > 0$ ta que $B_\epsilon(a) \subseteq X$

2. El conjunto de todos los puntos interiores de X se llama interior de X y es denotado por $int(X) = \mathring{X}$

3. X es abierto si y solo si $X = int(x)$

"

Observación 1.5.1.

Sea $X \subseteqq \mathbb{R}^n$.

1. $int(X) \subseteq X$

2. es suficiente probar que $X \subseteq int(X)$, para decir que X es un conjunto abierto.

Ejemplo 1.5.1.

Toda bola abierta y el complemento de una bola cerrada, son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.5.1.

En $\mathbb{R}^n$ se cumplen:

1. $X \subseteq Y \longrightarrow int(X) \subseteq int(Y)$

2. $int(int(x)) = int(X)$

Demostración. Ver [3]pag. 30.

Teorema 1.5.1.

"Se cumplen las siguientes propiedades:

1. Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos.

2. Si E_1 y E_2 son conjuntos abiertos, entonces $E_1 \cap E_2$ es un conjunto abierto.

3. Si $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una colección arbitraria de conjuntos abiertos, entonces $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ es un conjunto abierto.

” Demostración. Ver [9]pag. 36.

Definición 1.5.2 (Abiertos relativos).

“Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$. Decimos que un subconjunto de $A \subseteq X$ es abierto relativo a X o simplemente abierto en X si y solo si existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que $A = U \cap X$.”

Proposición 1.5.2.

“Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ y $A \subseteq X$. Son equivalentes:

1. A es abierto en X.
2. $\forall a \in A$, $\exists \delta = \delta(a) > 0$ tal que $B_\delta(a) \cap X \subseteq A$

” Demostración. Ver [3]pag. 32.

Definición 1.5.3.

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, la frontera de X se define como:

$$\partial X = \Big\{ a \in ; B_\epsilon(a) \cap X \neq \emptyset, B_\epsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n - X) \neq \emptyset, \forall \epsilon > 0 \Big\}$$

Observación 1.5.2.

También se puede denotar como: $Fr(x) = \partial X$

Definición 1.5.4.

“Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$

1. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ es punto adherente de X si y solo si $\exists (x_m) \subseteq X$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$
2. $\overline{X} = \{a \in \mathbb{R}^n; \text{a es adherente a } X\} = cl(X)$.
   $\overline{X}$ es llamado cerradura ó clausura de X.
3. X es cerrado si y solo si $\overline{X} = X$

”

Teorema 1.5.2.

“Sea $X \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ son equivalentes :

1. $a \in \overline{X}$

2. $B_\epsilon(a) \cap X \neq \emptyset; \forall \epsilon > 0$

" Demostración. Ver [3]pag. 36.

Teorema 1.5.3.

Un conjunto es cerrado si y solo si su complemento es abierto.

Demostración. Ver [1]pag. 63.

Ejemplo 1.5.2.

La bola cerrada y el complemento de la bola abierta, son conjuntos cerrados.

Teorema 1.5.4.

" Se cumplen las siguientes propiedades:

1. El $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son conjuntos cerrados.

2. Si E_1 y E_2 son conjuntos cerrados, entonces $E_1 \cup E_2$ es un conjunto cerrado.

3. Si $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una colección arbitraria de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ es un conjunto cerrado.

" Demostración. Ver [9]pag. 40.

Definición 1.5.5 (Cerrados relativos).

" Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$. Decimos que un subconjunto de $F \subseteq X$ es cerrado relativo a X o simplemente cerrado en X si y solo si exsite $G \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado tal que $A = G \cap X$."

Teorema 1.5.5.

"Sea $F \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$. F es cerrado en X si y solo si $X - F$ es abierto en X."

Demostración. Ver [3]pag. 38.

1.6. Función entre espacios Euclidianos

Definición 1.6.1.

"Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $a \in X'$.

Decimos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X \wedge 0 < \|x - a\| < \delta$$

entonces

$$\|f(x) - L\| < \epsilon$$

”

Observación 1.6.1.

Se tiene las siguientes equivalencias:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in B_\delta(a) \cap (X - \{a\}) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(L)$$

si y solo si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : f[B_\delta(a) \cap (X - \{a\})] \subseteq B_\epsilon(L)$$

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$ si y solo si

$$\exists \epsilon, \forall \delta > 0 : f[B_\delta(a) \cap (X - \{a\})] \nsubseteq B_\epsilon(L)$$

si y solo si

$$\exists \epsilon, \forall \delta > 0, \exists x \in B_\delta(a) \cap (X - \{a\}) : f(x) \notin B_\epsilon(L)$$

si y solo si

$$\exists \epsilon, \forall \delta > 0, \exists x \in X : 0 < \|x - a\| < \delta \wedge \|f(x) - L\| \geq \epsilon$$

Definición 1.6.2 (Función continua)**.**

“Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$

1. f es continua en $a \in X$ si y solo si $\forall > 0, \exists \delta > 0 \,/\, x \in X, \|x - a\| < \delta$ entonces

$$\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

2. f es discontinua en $a \in X$ si y solo si f no es continua en a.

3. f es continua en todo X si y solo si f es continua en a, $\forall a \in X$.

”

Teorema 1.6.1.

"Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in X$ son equivalentes:

1. f es continua en a

2. $(x_k) \subseteq X$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ entonces

$$\lim_{k\longleftrightarrow\infty} f(x_k) = f(a)$$

Demostración." Ver [9]pag. 26.

Teorema 1.6.2.

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, f_3, ..., f_n) : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $a \in X$, son equivalentes:

1. f es continua en a

2. $f_1, f_2, f_3..., f_n$ son continuas en a.

Demostración. Ver [9]pag. 25.

Teorema 1.6.3.

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, entonces

1. $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2. $\alpha.f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\quad (\alpha.f)(x) = \alpha(x).f(x)$

3. $\langle f\ ;\ g\rangle : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \langle f\ ;\ g\rangle(x) = \langle f(x); g(x)\rangle$

4. $\frac{1}{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad (\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$, definida si $f(x) \neq 0$

también son funciones continuas.

Demostración. Ver [9]pag. 26.

1.7. Conjuntos conexos en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.7.1.

"Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ decimos que $A, B \subseteq X$ forman una escisión de X si y solo si:

1. $X = A \cup B$

2. $\overline{A} \cap B = \emptyset$

3. $A \cap \overline{B} = \emptyset$

”

Observación 1.7.1.
Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, tomemos $A = \emptyset$, $B = X$ (ó $B = \emptyset$, $A = X$) entonces A, B es una escisión de X.
Donde llamaremos A, B la escisión trivial de X.
También podemos inferir que todo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ admite por lo menos una escisión: la trivial.
Aquellos conjuntos que solo admiten la esición trivial son llamados conjuntos conexos.

Definición 1.7.2.
$X \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo si y solo si X solo admite la escisión trivial.

Observación 1.7.2.
A los conjuntos que no son conexos los llamaremos disconexo.

Teorema 1.7.1.
“Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y A, B forman una escisión de X si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $X = A \cup B$

2. $A \cap B = \emptyset$

3. A y B son abiertos en X.”

Demostración. Ver [3]pag. 48.

Teorema 1.7.2.
“Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y A, B forman una escisión de X si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $X = A \cup B$

2. $A \cap B = \emptyset$

3. A y B son cerrados en X

” Demostración. Ver [9]pag. 56.

Proposición 1.7.1.

El $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo es un conjunto conexo.

Demostración. Ver [7]pag. 56.

Teorema 1.7.3.

Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ es conexo si y solamente si, es un intervalo.

Demostración. Ver [9]pag. 56.

Teorema 1.7.4.

Sean $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$ en $\mathbb{R}^n$. Si X es conexo, entonces Y es conexo.

Demostración. Ver [3]pag. 49.

Teorema 1.7.5.

La imagen de un conjunto conexo por una función continua es un conjunto conexo.

Demostración. Ver [9]pag. 56.

Teorema 1.7.6.

“Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección arbitraria de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ tales que si $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$

$$\text{Entonces } \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{ es un conjunto conexo.}$$

”

Demostración. Ver [3]pag. 49.

2 Caminos en $\mathbb{R}^n$

En nuestra vida cotidiana nos encontramos muy a menudo con sucesos geométricos, tales por ejemplo la trayectoria que describe un auto para ir de una ciudad a otra, el lanzamiento de bala de un cañon, la caida libre de un objeto desde un edificio, la órbita que realiza un planeta o un satélite, entre otros fenómenos.

Todos estos sucesos pueden ser descritos matemáticamente por la definición de caminos, en este capítulo definiremos y daremos sus propiedades más importantes:

2.1. Nociones básicas y ejemplos

Definición 2.1.1.
Una función $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$, es llamada camino en $\mathbb{R}^n$.

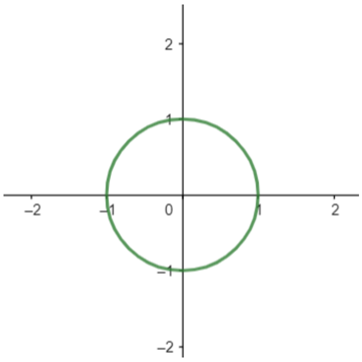
Observación 2.1.1.
De la definición anterior:

- El I es cualquier intervalo, como por ejemplo:
  $]a, b[$, $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]\infty, \infty[= \mathbb{R}$
- $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino, entonces $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$; para todo $t \in I$, llamaremos parámetro a t y por esto el camino también es conocido como curva parametrizada.
  Generalmente en las aplicaciones, representa tiempo.
- El conjunto $\lambda[I] = \{\lambda(t) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado traza de λ.
- Debemos diferenciar entre la definición de camino (función) con la noción de traza.

Ejemplo 2.1.1.

$$\lambda : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \lambda(t) = (cos(t), sen(t))$$

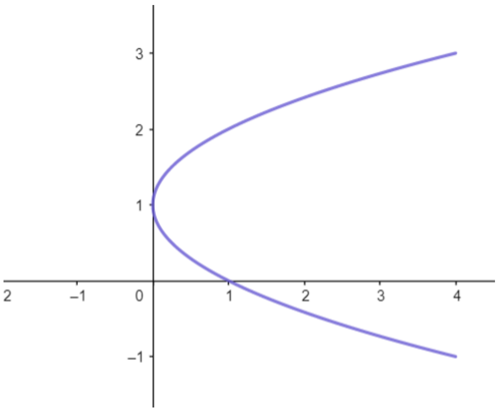


Ejemplo 2.1.2.

“

$$\lambda : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \lambda(t) = (t^2, t+1)”$$

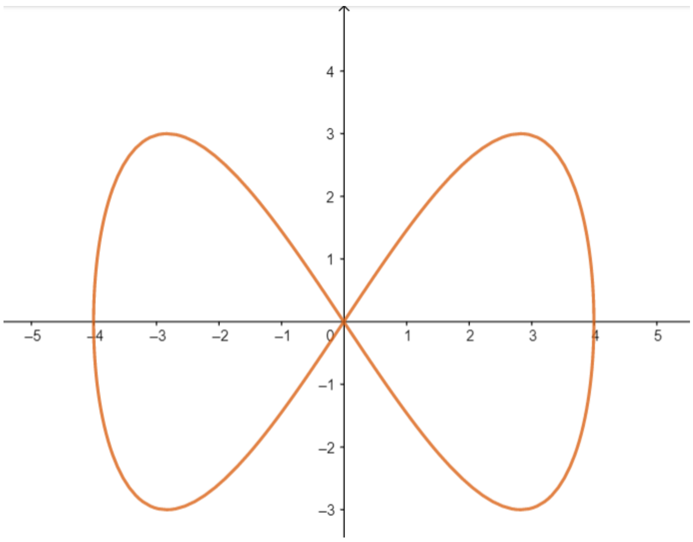


Ejemplo 2.1.3.

“

$$\lambda : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \lambda(t) = (4cos(t), sen(2t))”$$

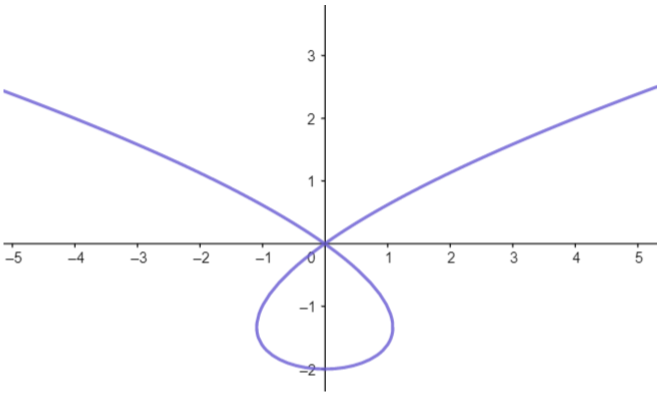


Ejemplo 2.1.4.

"

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \lambda(t) = (t^3 - 2t, t^2 - 2)\text{"}$$

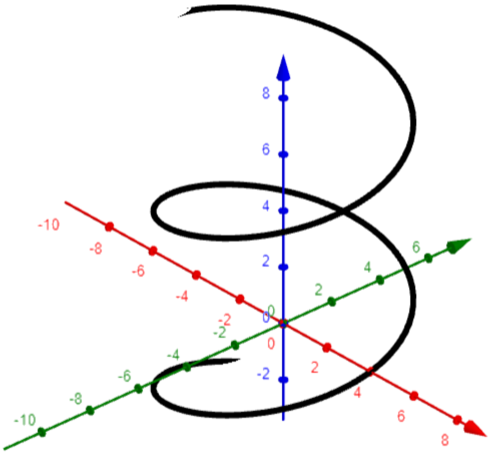


Ejemplo 2.1.5.

"

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \lambda(t) = (4cos(t), 4sen(t), t)\text{"}$$

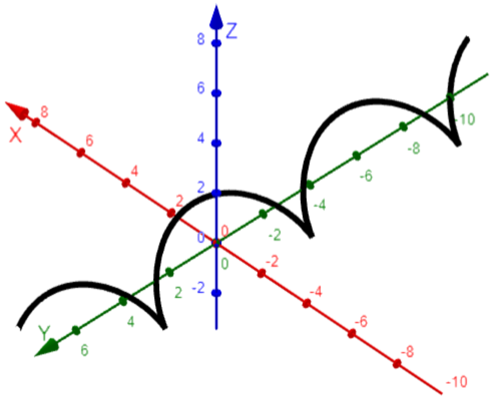


Ejemplo 2.1.6.

"

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \lambda(t) = (cos(t), t + sen(t), cos(t))"$$



2.2. Límite de Caminos

Definición 2.2.1.

"Sea $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$ un camino y $a \in I'$. Diremos $L \in \mathbb{R}^n$ es el límite de $\lambda(t)$ cuando t tiende a a, lo que denotamos por:

$$\lim_{t \longrightarrow a} \lambda(t) = L$$

si y solo si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $t \in I$, $0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \|\lambda(t) - L\| < \epsilon$"

Teorema 2.2.1.

Sean $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$ un camino y $a \in I'$. Son equivalentes:

1. $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \lambda(t) = L$

2. $(t_k) \subseteq I - \{a\}$ tal que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} t_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \lambda(t_k) = L$

Demostración. Ver [2]pag. 33.

Corolario 2.2.1 (Unicidad del límite)**.**

Sean $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$ un camino y $a \in I'$. $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \lambda(t) = L$ y $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \lambda(t) = L'$ entonces $L = L'$

Demostración. Ver [2]pag. 34.

Teorema 2.2.2.

"Sean $a \in I'$,$L, M \in \mathbb{R}^n$, $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$, $\mu : I \to \mathbb{R}^n$ caminos y $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \lambda(t) = L$, $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \mu(t) = M$ y $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \alpha(t) = \alpha_0$. entonces:

1. $\lim\limits_{t \longrightarrow a} (\lambda + \mu)(t) = L + M$

2. $\lim\limits_{t \longrightarrow a} (\lambda - \mu)(t) = L - M$

3. $\lim\limits_{t \longrightarrow a} (\alpha\mu)(t) = \alpha_0 M$

4. $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \langle \lambda(t), \mu(t) \rangle = \langle L, M \rangle$

5. $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \|\mu(t)\| = \|M\|$

6. $\lim\limits_{t \longrightarrow a} d(\lambda(t), \mu(t)) = d(L, M)$

" Demostración. Ver [2]pag. 35.

2.3. Continuidad de caminos

Definición 2.3.1.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$ un camino.

- λ es un camino continuo en $a \in I$, si y solo si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si: $t \in I$, $0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \|\lambda(t) - \lambda(a)\| < \epsilon$

- El camino λ es discontinuo en $a \in I$ si y solo si λ no es continuo en a.

Teorema 2.3.1.

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo , $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$ y $a \in I$. Son equivalentes:

1. λ es continua en a

2. $(x_k) \subseteq I$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ entonces $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda(x_k) = \lambda(a)$

Demostración. Ver [2]pag. 37.

Teorema 2.3.2.

“Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo , $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$. Denotamos $Y = \lambda[I] \subseteq \mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

- λ es continua en a

- Si V es un conjunto abierto en Y, entonces $\lambda^{-1}[V]$ es un conjunto abierto en I.

” Demostración. Ver [2]pag. 38.

Teorema 2.3.3.

Sean $\lambda : I \to \mathbb{R}^n$ camino continuo e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, entonces $\lambda[I]$ es un conjunto conexo.

Demostración. Ver [2]pag. 40.

3 Problema Principal

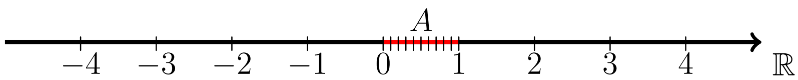
En este capítulo presentamos el resultado principal del trabajo de tesis, partiremos en dar a conocer conjuntos hechos de una sola pieza.

3.1. Conjuntos en $\mathbb{R}^n$ hechos de una sola pieza

Los conjuntos hechos de una sola pieza son aquellos conjuntos que no se pueden dividir. Bajo esta idea es lógico pensar en la definición de conexidad ya que hemos visto que un conjunto conexo no puede ser descrito como una unión disjunta de conjuntos abiertos (ó cerrados).

Para ello veamos algunos ejemplos:

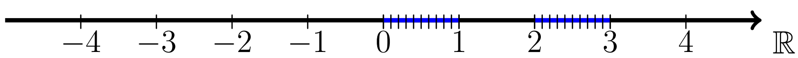
1. Sea $A = [0; 1]$ como sabemos es un intervalo el cual hemos visto que es conexo. Gráficamente tendríamos:

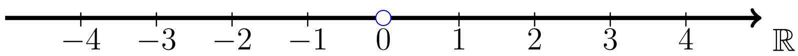
   Este conjunto está hecho de una sola pieza ya que vemos que no está dividido.

2. Sea $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ vemos que no es conexo y también nos damos cuenta que no está hecho de una sola pieza al igual que por ejemplo $C = \mathbb{R} - \{0\}$

   - $A = [0, 1] \cup [2, 3]$

   - $C = \mathbb{R} - \{0\}$

3. Sea $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$.

Veremos ahora que este conjunto es un conjunto conexo:

Si sabemos que: "

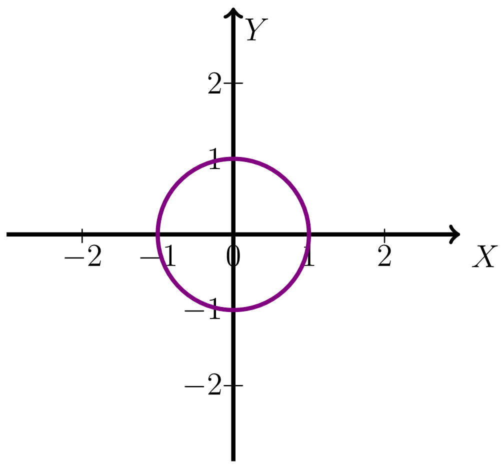
$$f : [0, 2\pi] \to S^1$$

$$t \mapsto f(t) = (cos(t), sen(t))\text{"}$$

Como sabemos que tanto el $cos(t)$ y el $sen(t)$ son funciones continuas entonces $f(t) = (cos(t), sen(t))$ es una función continua.

Por otro lado el intervalo $[0, 2\pi]$ es conexo y f una función continua entonces $f([0, 2\pi]) = S^1$ es conexo.

Gráficamente tendríamos:



Vemos que el conjunto está hecho de una sola pieza.

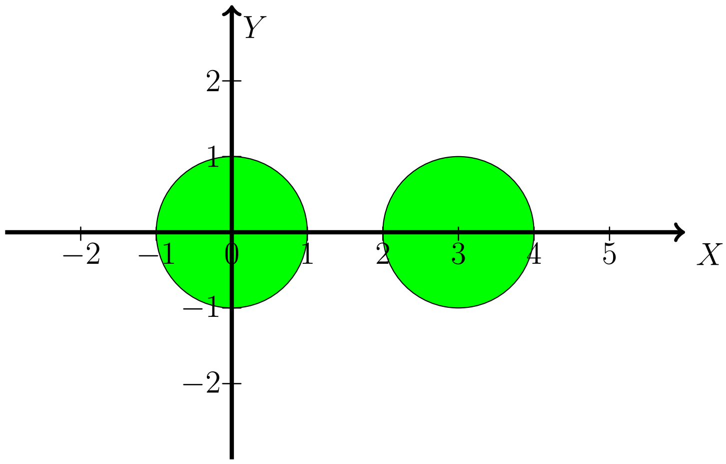
4. Sean:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$

Donde $C = A \cup B$, nos damos cuenta que C es la unión disjunta de dos conjuntos cerrados y por lo tanto no es un conjunto conexo.

Gráficamente tenemos:

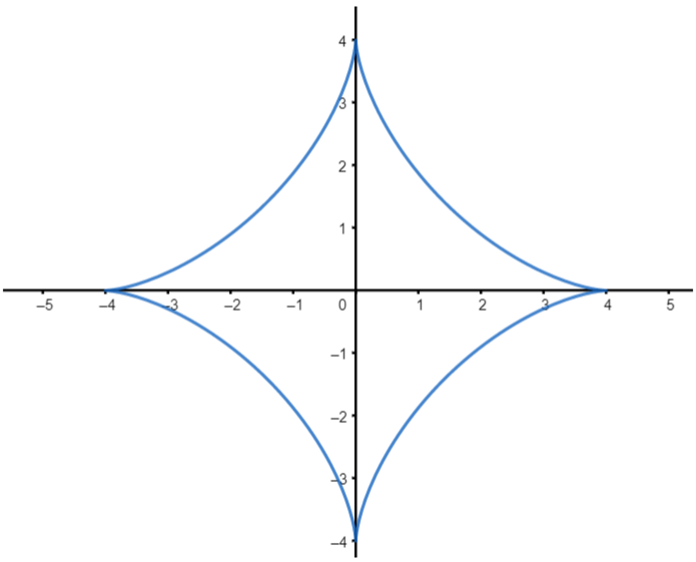


Nos damos cuenta también que C no es un conjunto hecho de una sola pieza.

5. Si tenemos el camino:

   "$\lambda : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

   $$t \mapsto \lambda(t) = (4cos^3(t), 4sen^3(t))"$$



Esta traza de este camino está hecho de una sola pieza y también como sabemos que tanto el $4cos^3(t)$ y el $4sen^3(t)$ son funciones continuas entonces $\lambda(t) =$

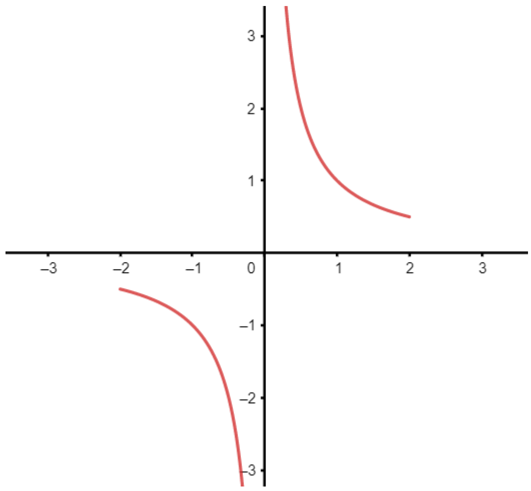
$(4cos^3(t), 4sen^3(t))$ es una función continua.

Por otro lado el intervalo $[0, 2\pi]$ es conexo y λ una función continua entonces $\lambda([0, 2\pi])$ es un conexo.

6. Sea el camino:

$\lambda : \langle -2, 2\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \lambda(t) = (t, \tfrac{1}{t})$$



Como nos damos cuenta la traza de este camino no está hecho de una sola pieza, ya que el camino no es continuo en $t = 0$. Por otra parte la traza del camino no es conexo ya que $\lambda[\langle -2, 0\rangle]$, $\lambda[\langle 0, 2\rangle]$ es una escisión de $\lambda[\langle -2, 2\rangle]$.

A partir de estos ejemplos podemos intuir que al hablar de conjuntos conexos es lo mismo que decir conjuntos hechos de una sola pieza, sin embargo esto no es del todo cierto.

Recordemos que en la recta real $(\mathbb{R})$ los conjuntos conexos son los puntos y los intervalos por ende allí si podemos decir que los conjuntos conexos son hechos de una sola pieza.

Por otra parte veremos que no podemos generalizar esta misma idea para $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ y nos atreveremos a decir que existen conjuntos conexos que no están hechos de una sola pieza.

Para ello vamos a abordar el siguiente problema conocido como el seno del topólogo.

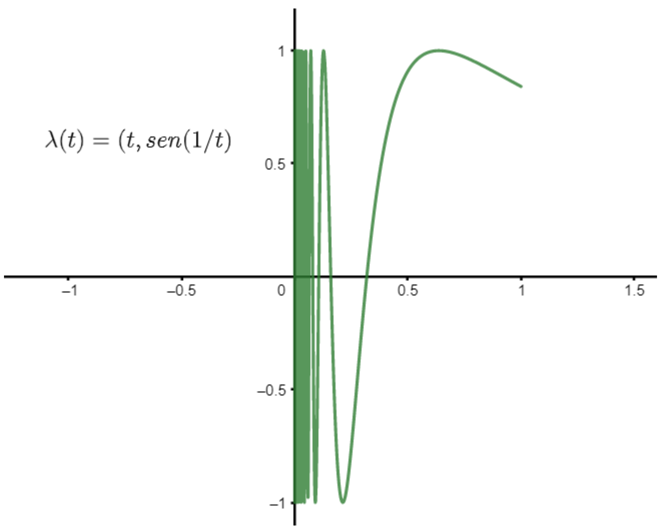
3.2. Seno del tópologo

Probaremos que existe un conjunto conexo que no es de una sola pieza

<u>Prueba</u>. Si tenemos:

" $\lambda : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$t \to \lambda(t) = (t, sen\frac{1}{t})$ "



Como vemos "λ" es una función continua ya que:

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t)) = \left(t, sen\frac{1}{t}\right)$$

donde $\lambda_1(t) = t$ y $\lambda_2(t) = sen(\frac{1}{t})$ y además $t \in \langle 0, 1]$ con lo cual cada una de estas funciones son continuas y por lo tanto λ es una función continua.

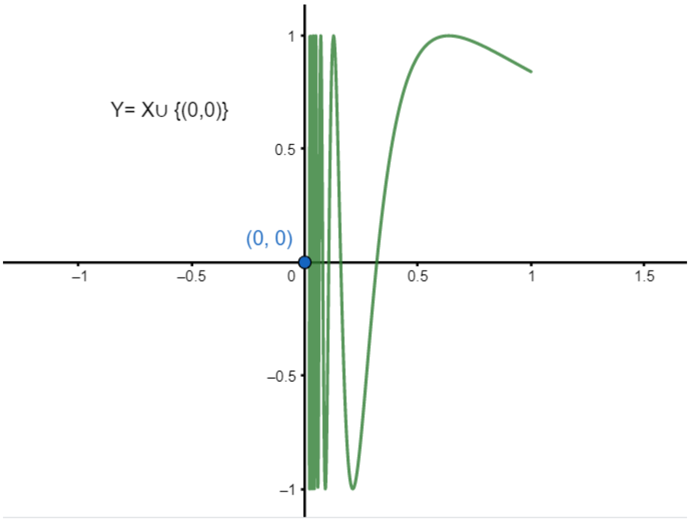
Por otra parte tenemos al intervalo $\langle 0, 1]$ el cual por lo visto anteriormente es un conjunto conexo y como λ es una función continua, entonces:

$$\lambda[\langle 0, 1]] \text{ es un conjunto conexo de } \mathbb{R}^2$$

Llamaremos $X = \lambda[\langle 0, 1]]$.

Consideramos:

$$Y = X \cup \{(0, 0)\}$$



Ahora demostraremos que Y es un conjunto conexo, para ello veremos lo siguiente:

Afirmación:

$$\overline{X} = X \cup \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$$

Prueba. Probaremos por doble inclusión:

$(\supseteq)$

Por demostrar que: $X \cup \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\} \subseteq \overline{X}$

Sea $x \in X \cup \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$ entonces tenemos dos casos:

- Si $x \in X \longrightarrow x \in \overline{X}$

- Si $x \in \{(0,t) : -1 \leq t \leq 1\}$

  Entonces x sería de la forma: $x = (0,T)$ para algún $T \in [-1,1]$

  Como: $-1 \leq T \leq 1$

  Entonces:

$$\begin{aligned} ArcSen(-1) &\leq ArcSen(T) &&\leq ArcSen(1) \cdots (+2n\pi) &(3.1)\\ ArcSen(-1) + 2n\pi &\leq ArcSen(T) + 2n\pi &&\leq ArcSen(1) + 2n\pi &(3.2)\\ -\frac{\pi}{2} + 2n\pi &\leq ArcSen(T) + 2n\pi &&\leq \frac{\pi}{2} + 2n\pi &(3.3)\\ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} &\leq \frac{1}{ArcSen(T) + 2n\pi} &&\leq \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} &(3.4) \end{aligned}$$

  Llamaremos $x_n = \dfrac{1}{ArcSen(T) + 2n\pi}$, como $n \longrightarrow +\infty$ está sucesión $x_n \in \langle 0,1]$

  Entonces: $x_n = \dfrac{1}{ArcSen(T) + 2n\pi}$, donde $x_n \longrightarrow 0$

  También:

  $$Sen\left(\frac{1}{x_n}\right) = Sen\left(\frac{1}{\frac{1}{ArcSen(T) + 2n\pi}}\right) = Sen(ArcSen(T) + 2n\pi)$$

  $$\Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} Sen\left(\frac{1}{x_n}\right) = T$$

  $$\Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(x_n, Sen\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) = (0,T)$$

  Hemos encontrado una sucesión $\left(x_n, Sen\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) \in X$ de tal forma que su límite de convergencia es $(0,T)$.

  Entonces por definición de cerradura $(0,T) \in \overline{X}$

  Por lo tanto $x \in \overline{X}$

De ambos casos obtenemos que $x \in \overline{X}$ por lo tanto:

$$X \cup \{(0,t) : -1 \leq t \leq 1\} \subseteq \overline{X}$$

Ahora pasaremos a demostrar la otra inclusión:

($\subseteq$)

Por demostrar que: $\overline{X} \subseteq X \cup \{(0,t) : -1 \leq t \leq 1\}$

Sea $z \in \overline{X}$

Entonces:

$$z = (x,y) \in \overline{X} = \overline{\lambda(\langle 0,1])} = \overline{\left\{\left(x, Sen\frac{1}{x}\right) : x \in \langle 0,1]\right\}}$$

Entonces por definición de cerradura:

$$\exists \left(x_n, Sen\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) \subseteq X, \text{ con } \left(x_n, Sen\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) \longrightarrow z = (x,y)$$

De donde se obtiene que:

$$x_n \longrightarrow x \text{ y } Sen\left(\frac{1}{x_n}\right) \longrightarrow y$$

También, como $(x_n) \subseteq \langle 0,1] \longrightarrow x \in \overline{\langle 0,1]} = [0,1]$

De donde se pueden tener dos casos:

1. Si $x \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{x_n} \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ y por la continuidad del seno:

   $$Sen\left(\frac{1}{x_n}\right) \longrightarrow Sen\frac{1}{x} = y$$

   Entonces:

   $$z = (x,y) = \left(x, Sen\frac{1}{x}\right) \in X$$

   Por lo tanto concluimos que si $z \in \overline{X} \longrightarrow z \in X$

2. Si $x = 0$ entonces, como $-1 \leq Sen\theta \leq 1 \longrightarrow -1 \leq Sen\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq 1$

   Aplicando límite tendríamos:

   $$\lim_{n \longrightarrow \infty} -1 \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} Sen\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} 1 \longrightarrow -1 \leq y \leq 1$$

   Entonces:

   $$z = (x, y) = (0, y) \in \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$$

   Por lo tanto concluimos que si $z \in \overline{X} \longrightarrow z \in \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$

De ambos casos tenemos que:

$$z \in \overline{X} \longrightarrow z \in X \cup \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$$

Entonces concluimos:

$$\overline{X} \subseteq X \cup \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$$

De ambas inclusiones hemos demostrado finalmente la afirmación:

$$\overline{X} = X \cup \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$$

$\square$

Ahora retomando a la demostración de nuestro problema:

Tenemos lo siguiente:

1. $X = \lambda[\langle 0, 1]]$

2. $Y = X \cup \{(0, 0)\}$

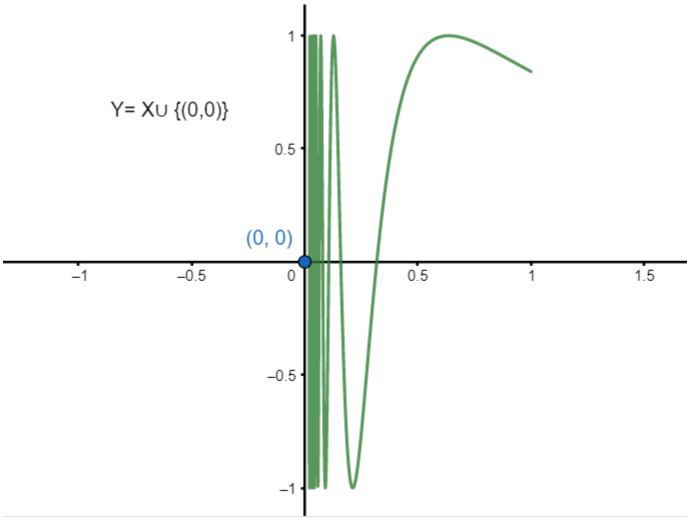
3. $\overline{X} = X \cup \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$

Entonces de todos estos datos tenemos: $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$

Ahora por el teorema 1.7.4, como X es conexo entonces Y es conexo.

Hemos demostrado entonces que el conjunto:

$Y = X \cup \{(0,0)\} = \lambda[\langle 0,1]] \cup \{(0,0)\}$



El cual no está hecho de una sola pieza es conexo. □

Entonces ahora podemos afirmar que la conexidad en $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ no es suficiente para decir que un conjunto está hecho de una sola pieza.

Para ello debemos tener una definición adicional y es aquí donde entra a tallar nuestras nociones de caminos.

Para esto tenemos la siguiente definición que nos garantiza que un conjunto está hecho de una sola pieza.

3.3. Conexo por Caminos

En está parte veremos de manera formal la noción matemática de un conjunto hecho de una sola pieza.

Para ello tenemos la siguiente definición:

Definición 3.3.1.

Un subconjunro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado arco conexo o conexo por caminos si y solo si $\forall x, y \in X$ existe un camino continuo $\lambda = \lambda_{x,y} : [0,1] \longrightarrow X$, tal que $\lambda(0) = x,\ \lambda(1) = y$.

Observación 3.3.1.

Un conjunto hecho de una sola pieza matemáticamente es denotado Conjunto conexo por caminos ya que para cualquier par de puntos siempre va existir un camino continuo entre estos puntos y esto hace que no haya quiebres ni saltos.

Proposición 3.3.1.

Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo entonces X es un conjunto conexo por caminos

Prueba. En efecto:

Sean $x, y \in X$ como X es convexo, entonces $[x, y] \subseteq X$.

Considero:

$$\lambda = \lambda_{x,y} : [0,1] \longrightarrow X$$
$$t \mapsto \lambda(t) = (1-t)x + ty$$

El cual es continua y también satisface $\lambda(0) = x, \lambda(1) = y$.

Como tomamos x, y arbitrarios entonces X es conexo por caminos. □

Entonces con está proposición podemos decir que todo conjunto convexo está hecho de una sola pieza.

Ejemplo 3.3.1.

Como $B_r[a], B_r(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos entonces son conjuntos conexos por caminos, $\forall r > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.1.

Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conexo por caminos entonces X es conexo.

Prueba. En efecto:

- Si $X = \emptyset$ (No hay nada que demostrar)
- Si $X \neq \emptyset$ entonces, sea $a \in X$, sea cualquier $x \in X$
  Por hipótesis tenemos que $\exists \lambda_x : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\lambda_x(0) = a$ y $\lambda_x(1) = x$
  Como $[0,1]$ es conexo y λ_x es continuo entonces $\lambda_x([0,1])$ es conexo.

También como $a \in \lambda_x([0,1])$ entonces $\forall x \in X$ se tiene que:

$$\bigcap_{x \in X} \lambda_x([0,1]) \neq \emptyset$$

Donde $\lambda_x([0,1])$, $\forall x \in X$ son conexos.

Por el Teorema 1.7.6 tenemos:

$$\bigcup_{x \in X} \lambda_x([0,1])$$

Es conexo.

Afirmación

$$\bigcup_{x \in X} \lambda_x([0,1]) = X$$

Demostraremos por doble inclusión:

$\subseteq$ (Por demostrar que $\bigcup\limits_{x \in X} \lambda_x([0,1]) \subseteq X$)

Como $\lambda_x([0,1]) \subseteq X$, $\forall x \in X$

Entonces $\bigcup\limits_{x \in X} \lambda_x([0,1]) \subseteq X$

$\supseteq$ (Por demostrar que$X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} \lambda_x([0,1])$)

Sea $x \in X$ entonces $x \in \lambda_x([0,1]) \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} \lambda_x([0,1])$

Entonces como tome x arbitrario $\forall x \in X$ se tiene que $x \in \bigcup\limits_{x \in X} \lambda_x([0,1])$

Por lo tanto $X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} \lambda_x([0,1])$

De ambas inclusiones : $\bigcup\limits_{x \in X} \lambda_x([0,1]) = X$

Finalmente como $\bigcup\limits_{x \in X} \lambda_x([0,1])$ es conexo, entonces X es conexo.

$\square$

Observación 3.3.2.

Con el anterior teorema podemos afirmar que:

- Todo conjunto hecho de una sola pieza es conexo
- Un conjunto que no es conexo no está hecho de una sola pieza
- La recíproca de este teorema es falsa ya que como vimos en el seno del topólogo es conexo pero no es un conjunto hecho de una sola pieza.

Ahora veremos de manera formal que el problema del seno del topólogo no es conexo por caminos.

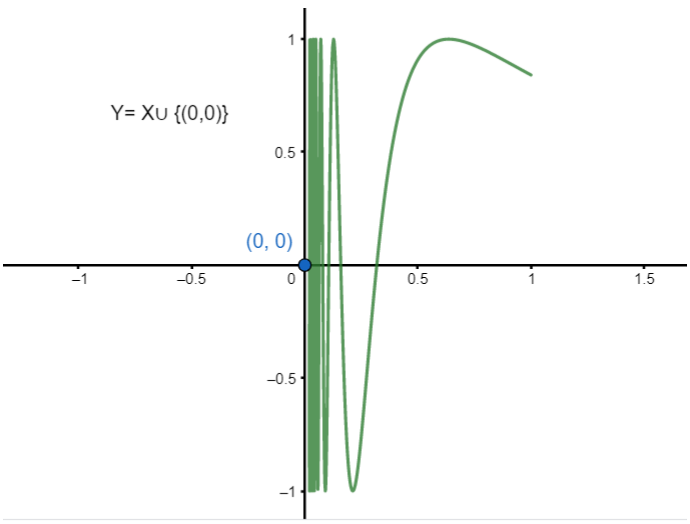
Si tenemos:

"$\lambda : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \lambda(t) = (t, sen\frac{1}{t})\text{ "}$$

Consideramos:

$$Y = X \cup \{(0,0)\}$$



Como sabemos $Y = X \cup \{(0,0)\}$ es conexo (probado anteriormente) ahora demostraremos que Y no es conexo por caminos.

Prueba. En Efecto:

Probaremos por reducción al absurdo:

Supongamos que $Y = X \cup \{(0,0)\}$ es conexo por caminos, entonces por la definición

3.3.1 tenemos que:

Para todo par de puntos $a, b \in Y$, existe un camino continuo "

$$\mu : [0,1] \text{ tal que } \mu(0) = a, \mu(1) = b$$

"

Entonces escogemos:

- $a = (0,0)$
- $b \in X = \lambda[\langle 0,1]]$

Como $b \in \lambda[\langle 0,1]]$, entonces:

$$b = \left(t, Sen\frac{1}{t}\right) \text{ para algún } t \in \langle 0,1]$$

Entonces, existe un camino continuo μ tal que:

$\mu : [0,1] \longrightarrow Y$

$\quad p \mapsto \mu(p) = (x(p), y(p))$

donde:

- $\mu(0) = (0,0)$
- $\mu(1) = b \in X$

Por otra parte, sea $t_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Como $n \geq 1$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{n} > 0$$

$$\Rightarrow 0 < t_n \leq 1$$

$$\Rightarrow t_n \in \langle 0,1] \subset [0,1]$$

También:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} t_n = 0$$

Por continuidad de μ:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(t_n) = \mu(0) = (0,0)$$

Por otra parte:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(t_n)=\lim_{n\longrightarrow\infty}(x(t_n),y(t_n))=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(t_n,Sen\frac{1}{t_n}\right))=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{n},Sen\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(t_n)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{n},Sen(n)\right)=\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n},\lim_{n\longrightarrow\infty}Sen(n)\right)$$

Donde $\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}=0$, pero $\nexists\lim_{n\longrightarrow\infty}Sen(n)$ entonces, $\nexists\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(t_n)$

$(\Rightarrow\Leftarrow)$

Por lo tanto no es conexo por caminos. $\square$

4 Conclusiones y/o Sugerencias

1. Probamos la existencia de un conjunto conexo conocido como el seno del topólogo el cual no está hecho de una sola pieza, esto significa que al hablar de conjuntos conexos no es lo mismo decir conjuntos hechos de una sola pieza, logrando el objetivo.

2. La definición matemática de un conjunto conexo por caminos o también llamado arco conexo es de gran importancia a la hora de definir un conjunto hecho de una sola pieza.

3. Si un conjunto no es conexo entonces dicho conjunto no está hecho de una sola pieza

4. Todo conjunto convexo está hecho de una sola pieza.

5. Si un conjunto está hecho de una sola pieza entonces este conjunto es conexo.

Bibliografía

[1] Apostol, T. M. (1996). *Análisis matemático* (2da ed.). Editorial Reverté,S.A.

[2] Benazic Tomé, R. M. (2002). *Caminos en Espacios Euclidianos.*Sociedad Matemática Peruana, 20 ^{o} Coloquio.

[3] Benazic Tomé, R. M. (2000). *Topología en Espacios Euclidianos.*Sociedad Matemática Peruana, 18 ^{o} Coloquio.

[4] Camille Jordan, M. E. (1893). *Cours d'Analyse* (2da ed.).Tome Prémier , L'École Polytechnique.

[5] Conrad, K. E. (2015). *Spaces that are connected but no path-connected* [Archivo PDF]. https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/topology/connnotpathconn.pdf

[6] Dugundji, J. (1966). *Topology.* Allyn and Bacon,Inc.

[7] Lages Lima, E. (1997). *Análisis Real* (Vol. 1). Textos del IMCA. Instituto de Matemática y Ciencias Afines.

[8] Lages Lima, E. (2014). *Curso de análise* (14va Ed., vol.1). Projecto Euclides, Instituto de Matemática Pura y Aplicada.

[9] Lages Lima, E. (2014). *Curso de análise* (11va Ed., vol.2). Projecto Euclides, Instituto de Matemática Pura y Aplicada.

[10] Lages Lima, E. (1993). *Espaços Métricos* (3ra ed.). Projecto Euclides, Instituto de Matemática Pura y Aplicada.

[11] Poincaré, H. J. (1895). *Analysis situs*. Journal de L'École Polytechnique.

[12] Turgay Kaptanoğlu, H. (2001). *In praise of* $y = x^\alpha \sin(\frac{1}{x})$.The American Mathematical Monthly, *Vol.108(2)*, 144-150.