



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

**Controlabilidad bajo restricciones positivas para EDPs
parabólicas cuasilineales**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Miguel Roberto NUÑEZ CHÁVEZ

ASESOR

Dra. Yolanda Silvia SANTIAGO AYALA

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Núñez, M. (2021). *Controlabilidad bajo restricciones positivas para EDPs parabólicas cuasilineales*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Matemática, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Miguel Roberto Nuñez Chávez
DNI	46191725
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-6517-654X
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Yolanda Silvia Santiago Ayala
DNI	06445705
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-2516-0871
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Análisis y Aplicaciones - GEDAAp
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: -12.063897 Altitud: -77.064461
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2020-2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Escuela Profesional de Matemática

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA
OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 14:00 horas del martes 14 de septiembre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (PRESIDENTE), Mg. Andrés Guardia Cayo (MIEMBRO) y la Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: “**CONTROLABILIDAD BAJO RESTRICCIONES POSITIVAS PARA EDPS PARABÓLICAS CUASILINEALES**”, presentado por el señor Bachiller Miguel Roberto Nuñez Chávez, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **Sobresaliente con mención**, con un calificativo promedio de **diecinueve 19**.

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar, manifestó que el señor Bachiller Miguel Roberto Nuñez Chávez, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 15:20 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta, en archivo PDF.

DR. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE

Mg. Andrés Guardia Cayo
MIEMBRO

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
MIEMBRO ASESOR

La Vicedecana (e) de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Mg. Zoraida Judith Huamán Gutiérrez, certifica virtualmente la participación del Jurado Evaluador, el titulado, el acto de instalación y el inicio, desarrollo y término del acto académico de sustentación, dejando constancia en el acta respectiva.

*A mis padres Luis y Paula,
a mis hermanos.*

AGRADECIMIENTOS

- A Dios, porque con sus bendiciones pude lograr mis objetivos. A mi familia por su gran apoyo en cada ámbito posible de mi etapa de universitario.
- A mi ex-asesor, el Dr. Raúl Moisés Izaguirre (que ahora descansa en paz), por su gran apoyo, por haberme dado los consejos que necesitaba para poder superarme académicamente.
- A mi asesora, la Dr. Yolanda Silvia Santiago Ayala, por su apoyo, dedicación y tiempo hacia mi persona en poder elaborar la tesis, por sus consejos cuando fui su alumno que me sirvieron mucho en la vida tanto personal como académica.
- A mis amigos y compañeros de la carrera de Matemática con quienes compartí muchas experiencias y vivencias como también diversos conocimientos.
- Un agradecimiento muy especial a la Facultad de Ciencias Matemáticas y a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, por recibirme en sus aulas y por hacerme un buen profesional.

RESUMEN

CONTROLABILIDAD BAJO RESTRICCIONES POSITIVAS PARA EDPS PARABÓLICAS CUASILINEALES

MIGUEL ROBERTO NUÑEZ CHÁVEZ

Asesora : Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala.

Título Obtenido : Licenciado en Matemática.

En esta tesis se abordará el análisis del control interno con restricción de tipo positivo de una EDP parabólica con difusión no lineal cuando el horizonte temporal es suficientemente grande. El tiempo de controlabilidad mínimo será estrictamente positivo.

Primero, mostramos un resultado de controlabilidad global en estado estacionario con restricción para un sistema parabólico cuasilineal con no linealidad en el término de difusión.

Luego, para el sistema con evolución temporal, bajo una adecuada suposición disipativa y con resultados de controlabilidad local y principios de comparación, concluimos el mismo resultado que en el caso estacionario para cualquier dato inicial y para algunas trayectorias objetivo.

Palabras Claves: EDP parabólica cuasilineal, controlabilidad global, restricciones positivas, tiempo mínimo positivo.

ABSTRACT

CONTROLLABILITY UNDER POSITIVE CONSTRAINTS FOR QUASILINEAR PARABOLIC PDES

MIGUEL ROBERTO NUÑEZ CHÁVEZ

Advisor : Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala.

Obtained Title : Degree in Mathematics.

This thesis will address the analysis of the internal control with positive type restriction of a parabolic PDE with non-linear diffusion when the time horizon is sufficiently large. The minimum controllability time will be strictly positive.

First, we show a result of global controllability in steady state with restriction for a quasilinear parabolic system with non-linearity in the diffusion term.

Then, for the system with time evolution, under an adequate dissipative assumption and with results of local controllability and principles of comparison, we conclude the same result as in the stationary case for any initial data and for some target trajectories.

Keywords: Quasilinear parabolic PDE, global controllability, positive constraints, positive minimal time.

Índice general

1. Notaciones y Resultados Básicos	4
1.1. Notaciones	4
1.2. Resultados Básicos	7
1.2.1. Regularidad para un sistema parabólico lineal	10
1.2.2. Resultado de existencia y unicidad para un sistema cuasilineal elíptico	12
1.2.3. Resultado de existencia y unicidad para un sistema cuasilineal parabólico	13
2. Planteamiento del Problema	14
2.1. Controlabilidad de estados estacionarios	14
2.2. Controlabilidad para trayectorias objetivo	16
3. Demostración del Teorema 2.1	19
4. Demostración del Teorema 2.2	23
5. Positividad del Tiempo Mínimo de Controlabilidad	28
6. Conclusiones	34
A. Resultado de Controlabilidad Local	36
B. Propiedad de Estabilización en normas L^2-L^∞	41
Bibliografía	47

Introducción

El estudio de la Teoría de Control en las EDPs ha sido el objetivo de muchos trabajos en las últimas décadas, tanto para el caso parabólico cuanto para el hiperbólico. Podemos entender dicha Teoría como la perturbación de un sistema de Ecuaciones Diferenciales para alcanzar de manera exacta o aproximada algún resultado deseado, siempre respetando los parámetros establecidos.

Sobre la controlabilidad en ausencia de restricciones tanto en el estado cuanto en el control, tenemos una variedad de resultados para EDPs parabólicas de clases lineales, semilineales y cuasilineales, donde obtenemos la controlabilidad para cualquier tiempo positivo (ver [5, 10, 13, 16, 23]).

Sin embargo, aún trabajando inicialmente en ausencia de restricciones, algunas veces los controles que logran el objetivo en el momento final son restricciones de soluciones de otros sistemas relacionados al sistema original como es el caso del sistema adjunto. Estos controles experimentan grandes oscilaciones en la proximidad del tiempo final. En particular, cuando el horizonte temporal es demasiado corto, estas oscilaciones impiden que el control cumpla con la restricción de positividad.

Ahora, sobre la controlabilidad bajo restricción en un sistema parabólico, tenemos el primer trabajo en [17] (2017), los autores trataron una ecuación de calor lineal en dimensión N , considerando varios tipos de problemas de contorno, también realizaron varias simulaciones numéricas con resultados interesantes, luego en [19] (2018) los autores trabajaron con una ecuación semilineal con no linealidad de clase C^1 sin la condición en dicha función sobre el signo y sin la condición de globalmente Lipschitz. En [21] (2019) los autores trabajaron con ecuaciones de reacción-difusión sobre la misma pregunta.

Inspirado por [17] y [19], consigo probar un resultado más general (ver [18]), esto es, demuestro los resultados obtenidos en el caso lineal y semilineal para un problema con no linealidad en el término de difusión (caso cuasilineal). En realidad se obtienen dos resultados, el primero para

el caso estacionario (ausencia de la evolución temporal) y el segundo para el caso de evolución temporal. Dichos resultados serán expuestos en esta tesis.

La tesis se divide en los siguientes capítulos:

En el **Capítulo 1**, se presentan las notaciones y los resultados más básicos empleados en todo el trabajo.

En el **Capítulo 2**, se plantea el problema de controlabilidad bajo restricciones positivas en una EDP parabólica cuasilineal y se enuncian los dos teoremas importantes de esta tesis.

En el **Capítulo 3**, se resuelve el problema en el caso estacionario, el método de la demostración utiliza un "argumento de escalera", que consiste en pasar de un estado estable a otro vecino, utilizando pequeños controles de amplitud, de forma recursiva, para llegar al objetivo final después de varias iteraciones y preservar las limitaciones que impone el control a priori. Sin embargo, este método de escalera conduce a resultados de control restringido solo cuando el tiempo de control es lo suficientemente grande, y este horizonte de tiempo aumenta cuando lo hace la distancia entre los estados estacionarios inicial y final.

En el **Capítulo 4**, se resuelve el problema en el caso general (de evolución temporal), aquí se usa un argumento de estabilización en normas L^2 - L^∞ aplicado a un tiempo conveniente que sirve para garantizar un resultado de controlabilidad local y así finalmente concluir la controlabilidad bajo restricciones.

En el **Capítulo 5**, se estudia la positividad del tiempo mínimo de controlabilidad, para esto vemos lo que sucede a continuación, una vez que la propiedad del control haya sido demostrada, esto es, que obtengamos controles con signo no negativo, los clásicos principios de comparación o del máximo para ecuaciones parabólicas permiten probar que el signo del estado adjunto de un determinado sistema también es no negativo, este último resultado es importante para concluir el resultado deseado.

Todas las técnicas y resultados mostrados en los Capítulos 1 y 2 requieren que el tiempo de control sea lo suficientemente grande. Por lo tanto, es natural analizar si se puede lograr la controlabilidad en un tiempo pequeño y arbitrario. En [17] y [19] (esto es, para las ecuaciones de calor lineal y semilineal respectivamente) se demostró que la controlabilidad bajo restricciones no se mantiene cuando el horizonte de tiempo es demasiado

corto. En realidad, para las ecuaciones cuasilineales tenemos el mismo resultado y se demuestra también en este capítulo.

En el **Capítulo 6**, se presentan las conclusiones del trabajo, algunos comentarios y se proponen algunos problemas en abierto para un futuro.

Luego, se tienen dos apéndices donde se muestran resultados importantes que serán de mucha utilidad en este trabajo:

En el **Apéndice A**, se demuestra un resultado de controlabilidad local por trayectorias que es clave para la demostración de los teoremas planteados en el Capítulo 2. Para este fin, se siguen las técnicas de [16] para obtener una Desigualdad de Observabilidad y se emplean argumentos de Punto Fijo para concluir la prueba.

En el **Apéndice B**, se demuestra la propiedad de estabilización en normas L^2 - L^∞ , que permite demostrar el segundo teorema planteado en el Capítulo 2. Aquí se emplean los argumentos de [20] y una condición impuesta a la trayectoria objetivo a la cual se desea alcanzar.

Capítulo 1

Notaciones y Resultados Básicos

1.1. Notaciones

- N : número entero mayor o igual que 1,
- Ω : subconjunto de \mathbb{R}^N abierto, acotado y no vacío,
- $\partial\Omega$: frontera de Ω ,
- $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$,
- $C(\Omega)$ ($C(\bar{\Omega})$): espacio vectorial de las funciones continuas en Ω ($\bar{\Omega}$),
- $\|\varphi\|_{C(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|$ ($\|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\varphi(x)|$),
- Considerando m un número entero tal que $m \geq 1$,
- $C^m(\Omega)$ ($C^m(\bar{\Omega})$) : espacio vectorial de las funciones m veces continuamente diferenciables en un abierto que contiene a Ω ($\bar{\Omega}$), esto es, cuyas derivadas de orden m son continuas,
- $\|\varphi\|_{C^m(\Omega)} := \sum_{k=0}^m \sup_{x \in \Omega} |\varphi^{(k)}(x)|$ ($\|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} := \sum_{k=0}^m \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\varphi^{(k)}(x)|$),
- $C^\infty(\Omega)$ ($C^\infty(\bar{\Omega})$): espacio vectorial de las funciones continuas e infinitamente diferenciables en Ω ($\bar{\Omega}$),

- $\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}$: soporte de una función real φ , donde $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es continua,
- $C_0^\infty(\Omega)$ ($C_0^\infty(\overline{\Omega})$) : espacio vectorial de las funciones continuas e infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω ($\overline{\Omega}$),
- $\mathcal{D}(\Omega)$: espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ dotado de la convergencia usual,
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: espacio vectorial de las distribuciones, esto es, dual topológico del espacio vectorial $\mathcal{D}(\Omega)$ dotado de la convergencia usual,
- Considerando p un número real tal que $1 \leq p < \infty$,
- L-medible: Lebesgue medible,
- $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ L-medible y } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\}$,
- $\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$,
- c.t.p.: casi todo punto,
- $L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ L-medible y } \exists C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$,
- $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$,
- $W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}$,
- $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}$,
- $\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$,
- $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$,
- $(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$,
- $W_0^{m,p} := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$,
- $H_0^m(\Omega) := W_0^{2,p}(\Omega)$,

- $W^{-m,q}(\Omega)$: dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, donde $1/p + 1/q = 1$,
- $H^{-m}(\Omega) := W^{-m,2}(\Omega)$,
- $\langle f, g \rangle$: producto dual entre $f \in H^{-m}(\Omega)$ y $g \in H_0^m(\Omega)$,
- Consideremos θ un número real tal que $0 < \theta < 1$,
- $C^{m+\theta}(\bar{\Omega})$: espacio vectorial Hölder Continuo de orden m e índice θ , esto es, subespacio vectorial de $C^m(\bar{\Omega})$ tal que satisface la condición de Hölder:

$$\|u\|_{m,\theta} := \sup_{|\alpha|=m} \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|\partial_x^\alpha u(x_1) - \partial_x^\alpha u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\theta} < \infty,$$

- $\|u\|_{C^{m+\theta}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \|u\|_{m,\theta}$,
- Consideremos X espacio de Banach y T un número real positivo,
- B-medible: Bochner medible,
- $L^p(0, T; X) := \{u : [0, T] \rightarrow X; u \text{ B-medible y } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty\}$,
- $\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$,
- $L^\infty(0, T; X) := \{u : [0, T] \rightarrow X; u \text{ B-medible y } \sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_X < \infty\}$,
- $\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_X$,
- $L^q(0, T; X')$: dual topológico de $L^p(0, T; X)$, donde X' es el dual topológico de X y $1/p + 1/q = 1$,
- $C([0, T]; X) := \{u : [0, T] \rightarrow X; u \text{ B-medible y } \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty\}$,
- $\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X$,
- $Q := \Omega \times (0, T)$, cilindro de base Ω y altura T ,
- $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$, frontera lateral del cilindro Q ,

- $C^{m,l}(\overline{Q})$: espacio vectorial de las funciones m veces continuamente diferenciables en relación a la variable espacial y l veces continuamente diferenciables en relación a la variable temporal,
- $C^{m+\theta,l+\theta/2}(\overline{Q})$: espacio vectorial Hölder Continuo de orden m para la variable espacial, de orden l para la variable temporal y de índice θ , esto es, subespacio vectorial de $C^{m,l}(\overline{Q})$ tal que satisface la siguiente condición de Hölder:

$$\|u\|_{m,l,\theta} := \sup_{|\alpha|=m} \sup_{(x_1,t_1) \neq (x_2,t_2)} \frac{|\partial_x^\alpha \partial_t^l u(x_1, t_1) - \partial_x^\alpha \partial_t^l u(x_2, t_2)|}{(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2})^\theta} < \infty,$$

- $\|u\|_{C^{m+\theta,l+\theta/2}(\overline{Q})} := \|u\|_{C^{m,l}(\overline{Q})} + \|u\|_{m,l,\theta}$.

1.2. Resultados Básicos

Lema 1.1 (Lema de Fursikov). *Sea $\omega_0 \subset \Omega$ un conjunto abierto no vacío tal que $\overline{\omega_0} \subset \Omega$, existe una función $\alpha_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ con las siguientes propiedades*

$$\alpha_0(x) > 0 \text{ en } \Omega; \alpha_0(x) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega; |\nabla \alpha_0(x)| > 0 \text{ en } \overline{\Omega \setminus \omega_0}.$$

Demostración:

Ver el libro de A. Fursikov y O. Imanuvilov [7], Capítulo 1, Lema 1.1. ■

Teorema 1.1 (Teorema del Punto Fijo de Kakutani). *Supongamos que*

- La aplicación multivaluada $\Lambda : K \rightarrow 2^K$ es semicontinua superiormente (tiene gráfico cerrado);*
- K es un conjunto no vacío, compacto, convexo en un espacio localmente convexo Z ;*
- El conjunto $\Lambda(x)$ es no vacío, cerrado y convexo para todo $x \in K$.*

Entonces Λ tiene (al menos) un punto fijo.

Demostración:

Ver el libro de E. Zeidler [24], Capítulo 9, Sección 3, Teorema 9.B. ■

Teorema 1.2 (Agmon-Douglis-Nirenberg). *Sea p un número real positivo tal que $1 < p < \infty$, entonces para todo $f \in L^p(\Omega)$, existe una única solución $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ de la ecuación*

$$-\Delta u + u = f \text{ en } \Omega.$$

Demostración:

Ver el libro de H. Brezis [2], Capítulo 9, Sección 9, Teorema 9.32. ■

Teorema 1.3 (Propiedades del primer autovalor). *Sea L el operador uniformemente elíptico definido como*

$$L[u] = - \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} + c(x)u$$

con $c \geq 0$. Entonces se satisface lo siguiente:

1. Existe un autovalor real λ_1 para el operador L considerando la condición de frontera de Dirichlet nula. Además, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es cualquier otro autovalor entonces $Re(\lambda) \leq \lambda_1$.
2. Existe una correspondiente autofunción ϕ_1 , la cual es estrictamente positiva en Ω .

Demostración:

Ver el libro de L. Evans, Capítulo 6, Sección 5, Teorema 3. ■

Teorema 1.4 (Principio del Máximo). *Sea L el operador uniformemente parabólico definido como*

$$L[u] := u_t - \nabla \cdot (a(x, t)\nabla u) + \nabla b(x, t) \cdot \nabla u + c(x, t)u$$

con $c \geq 0$. Supongamos que u sea solución de $L[u] = f$ en Q con $f \in L^\infty(Q)$ y que satisface las condiciones inicial y de frontera:

$$u(x, 0) = g(x) \text{ en } \Omega; \quad u(x, t) = h(x, t) \text{ sobre } \Sigma,$$

donde $h \in L^\infty(\Sigma)$ y $g \in L^\infty(\Omega)$. Entonces $u \in L^\infty(Q)$, además existe una constante $C := C(\Omega, a, b, c)$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq e^{CT} \left(\|g\|_{L^\infty(\Omega)} + \|h\|_{L^\infty(\Sigma)} + \|f\|_{L^\infty(Q)} \right).$$

Demostración:

Ver el libro de D. Gilbarg [8], Teorema 3.7, Capítulo 3, Sección 3 o también ver el libro de M. H. Protter [22], Capítulo 3, Sección 4, Teorema 5, Teorema 6 y Teorema 7. ■

Teorema 1.5 (Principio de Comparación). *Sea L el operador uniformemente parabólico definido como*

$$L[u] := u_t - \nabla \cdot (a(u(x, t))\nabla u) + \nabla b(x, t) \cdot \nabla u + c(x, t)u$$

con $c \geq 0$. Supongamos que u sea solución de $L[u] = f$ en Q y que satisface las condiciones inicial y de frontera:

$$u(x, 0) = g(x) \text{ en } \Omega; \quad u(x, t) = h(x, t) \text{ en } \Sigma.$$

Si u_1 y u_2 satisfacen las siguientes condiciones:

- $L[u_1] \leq f(x, t) \leq L[u_2]$ en Q ;
- $u_1(x, 0) \leq g(x) \leq u_2(x, 0)$ en Ω ;
- $u_1(x, t) \leq h(x, t) \leq u_2(x, t)$ sobre Σ .

Entonces

$$u_1(x, t) \leq u(x, t) \leq u_2(x, t) \text{ en } Q.$$

Demostración:

Ver el libro de M. H. Protter [22], Capítulo 3, Sección 7, Teorema 12. ■

1.2.1. Regularidad para un sistema parabólico lineal

Consideremos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} y_t - \nabla \cdot (a(x, t)\nabla y) + b\nabla y + cy = f & \text{en } Q, \\ y(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

Teorema 1.6. *Supongamos que $a \in L^\infty(Q)$, $b \in L^\infty(Q)$ y $c \in L^\infty(Q)$. Para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, entonces existe una única solución $y(\cdot, \cdot)$ de (1.1) tal que $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.*

Demostración:

Ver el libro de J. L. Lions y E. Magenes, Capítulo 3, Sección 4.7, Ejemplo 4.7.1. ■

Teorema 1.7. *Supongamos que $a \in W^{1,\infty}(Q)$, $b \in L^\infty(Q)$, $c \in L^\infty(Q)$ y sea p un número real tal que $1 < p < \infty$. Para cada $y_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ y $f \in L^p(Q)$, entonces:*

1. existe una única solución $y(\cdot, \cdot)$ de (1.1) tal que $y \in L^p(0, T; W^{2,p}(\Omega))$ con derivada $y_t \in L^p(Q)$ satisfaciendo:

$$\|y\|_{L^p(0,T;W^{2,p}(\Omega))} + \|y_t\|_{L^p(Q)} \leq C(\|y_0\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|f\|_{L^p(Q)}),$$

2. si $p > n + 2$, $y \in C([0, T]; C^{1,\theta}(\bar{\Omega}))$ para algún $\theta \in (0, 1)$ y además se satisface:

$$\|y\|_{C([0,T];C^{1,\theta}(\bar{\Omega}))} \leq C(\|y_0\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|f\|_{L^p(Q)}).$$

Demostración:

1. Ver el libro de G. Lieberman [14], Capítulo 7, Sección 7, Teorema 7.32,
2. Ver el libro de O. A. Ladyzhenskaya [12], Capítulo 2, Sección 9, Teorema 9.1.

■

Teorema 1.8. *Supongamos que $a \in L^\infty(Q)$, $b \in L^\infty(Q)$, $c \in L^\infty(Q)$, $f \equiv 0$ y sea p un número real tal que $1 < p < \infty$. Para cada $y_0 \in L^p(\Omega)$, entonces existe una única solución $y(\cdot, \cdot)$ de (1.1). Además existe una constante $C = C(\|a\|_{L^\infty(\Omega)}, \|b\|_{L^\infty(\Omega)}, \|c\|_{L^\infty(\Omega)}, N, |\Omega|)$ tal que para cada $t \in [0, T]$ tenemos:*

$$\|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C e^{Ct} t^{-\frac{N}{2p}} \|y_0\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostración:

Ver el paper de A. Porreta [20], Teorema 1.7 o también ver el paper de D. Pighin y E. Zuazua [19], Sección 3, Lema 3.1. ■

1.2.2. Resultado de existencia y unicidad para un sistema cuasilineal elíptico

Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(y)\nabla y) = f & \text{en } \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

con $a \in C^2(\Omega)$ satisfaciendo propiedades adecuadas (ver Capítulo 2, hipótesis (2.2)).

Teorema 1.9. *Si $f \in C^{1/2}(\overline{\Omega})$, entonces (1.2) posee exactamente una única solución $y \in C^{2+1/2}(\overline{\Omega})$, satisfaciendo la siguiente estimativa:*

$$\|y\|_{C^{2+1/2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{C^{1/2}(\Omega)},$$

donde C es una constante positiva que depende solamente de Ω y $\|a\|_{C(\Omega)}$.

Demostración:

Ver el libro de O. A. Ladyzhenskaya [11], Capítulo 4, Sección 6, Teorema 6.4. ■

1.2.3. Resultado de existencia y unicidad para un sistema cuasilineal parabólico

Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} y_t - \nabla \cdot (a(y)\nabla y) = f & \text{en } Q, \\ y(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

con $a \in C^2(\Omega)$ satisfaciendo propiedades adecuadas (ver Capítulo 2, hipótesis (2.2)).

Teorema 1.10. Si $y_0 \in C^{2+1/2}(\overline{\Omega})$, $f \in C^{1/2,1/4}(\overline{Q})$, entonces (1.3) posee exactamente una única solución $y \in C^{2+1/2,1+1/4}(\overline{Q})$, satisfaciendo la siguiente estimativa:

$$\|y\|_{C^{2+1/2,1+1/4}(\Omega)} \leq C(\|y_0\|_{C^{2+1/2}} + \|f\|_{C^{1/2,1/4}(\Omega)}),$$

donde C es una constante positiva que depende solamente de Ω, T y $\|a\|_{C(\Omega)}$.

Demostración:

Ver el libro de O. A. Ladyzhenskaya [12], Capítulo 5, Sección 6, Teorema 6.1 y Teorema 6.2. ■

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

Sean $\omega, \omega_1 \subset \Omega$ conjuntos abiertos no vacíos, tal que $\omega_1 \subset \omega$ y $\bar{\omega}_1 \subset \omega$. Se abordará la controlabilidad exacta por trayectorias para el sistema cuasilineal

$$\begin{cases} y_t - \nabla \cdot (a(y)\nabla y) = v\varrho_\omega & \text{en } Q, \\ y(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde y es el estado asociado, v es el control y $\varrho_\omega \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ es la función característica regular, esto es, $\varrho_\omega = 0$ en $\Omega \setminus \omega$ y $\varrho_\omega = 1$ en ω_1 .

Aquí se asumirá que la función con valores reales $a = a(r)$ satisface

$$a \in C^2(\mathbb{R}), \quad 0 < a_0 \leq a(r) \quad \text{y} \quad |a'(r)| + |a''(r)| \leq M, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Se distinguen los siguientes resultados: controlabilidad para estados estacionarios y controlabilidad para trayectorias objetivo.

2.1. Controlabilidad de estados estacionarios

Comenzaremos con el caso estacionario, donde no hay evolución en el tiempo, para eso necesitamos introducir algunos conceptos:

Definición 2.1. Dada la función $\bar{v} \in C^{1/2}(\bar{\Omega})$, la función $\bar{y} \in C^{2+1/2}(\bar{\Omega})$ es

llamada de "estado estacionario" para el sistema (2.1) si es solución de

$$-\nabla \cdot (a(\bar{y})\nabla\bar{y}) = \bar{v}\rho_\omega \text{ en } \Omega, \quad \bar{y} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (2.3)$$

La función $\bar{v} \in C^{1/2}(\bar{\Omega})$ es llamada de "control estacionario".

Observación 2.1. La aplicación $\Lambda : \bar{v} \mapsto \bar{y}$ mostrada en (2.3) es continua, desde que $a(\cdot)$ satisface (2.2).

Se denotará por $\mathcal{S} := \Lambda(C^{1/2}(\bar{\Omega}))$ el conjunto de todos los estados estacionarios con controls estacionarios en $C^{1/2}(\bar{\Omega})$.

Observación 2.2. Dados $y_0, y_1 \in \mathcal{S}$, existen dos controles estacionarios $\bar{v}^0, \bar{v}^1 \in C^{1/2}(\bar{\Omega})$ tal que $\Lambda(\bar{v}^0) = y_0$ y $\Lambda(\bar{v}^1) = y_1$. Entonces, existe (por lo menos) un camino continuo de controles estacionarios que dirigen \bar{v}^0 hacia \bar{v}^1 denotado por λ (por ejemplo $\lambda(s) := (1-s)\bar{v}^0 + s\bar{v}^1$).

Definición 2.2. Fijados $y_0, y_1 \in \mathcal{S}$, se define el camino conexo continuo de estados estacionarios que dirige y_0 hacia y_1 como el siguiente camino continuo

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\xrightarrow{\lambda} C^{1/2}(\bar{\Omega}) \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{S} \\ s &\longmapsto \lambda(s) \longmapsto \gamma(s) = \Lambda(\lambda(s)), \end{aligned}$$

tal que $\gamma(0) = y_0 = \Lambda(\bar{v}^0)$, $\gamma(1) = y_1 = \Lambda(\bar{v}^1)$.

Para cada $s \in [0, 1]$, se denotarán $\bar{y}^s := \gamma(s)$ al estado estacionario y $\bar{v}^s := \lambda(s)$ al control estacionario asociados al camino continuo γ .

Observación 2.3. Para cada par $y_0, y_1 \in \mathcal{S}$ fijados, existen infinitos caminos conexos continuos de estados estacionarios que dirigen y_0 hacia y_1 , esto es debido

a que existen infinitos caminos continuos de controles estacionarios que dirigen \bar{v}^0 hacia \bar{v}^1 .

Introducimos el primer resultado importante de esta tesis para el caso de estados estacionarios:

Teorema 2.1. Sean $y_0, y_1 \in \mathcal{S}$ fijados y sea $\gamma(s) := \bar{y}^s$ un camino conexo continuo de estados estacionarios que dirige y_0 hacia y_1 con control estacionario \bar{v}^s . Asumamos que existe una constante $\eta > 0$ tal que

$$\bar{v}^s \geq \eta, \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

Entonces existe $T_0 > 0$ tal que, para cada $T \geq T_0$ existe un control $v \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ tal que el sistema (2,1) admite una única solución $y(\cdot, \cdot)$ que satisface $y(\cdot, T) = y_1(\cdot)$ en Ω y se tiene que $v \geq 0$ en $\Omega \times (0, T)$.

2.2. Controlabilidad para trayectorias objetivo

Ahora trataremos con el caso de evolución en el tiempo, para ello vamos a introducir la siguiente definición:

Definición 2.3. Definamos una "trayectoria objetivo" denotado por $\bar{y} = \bar{y}(x, t)$ como solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} \bar{y}_t - \nabla \cdot (a(\bar{y})\nabla\bar{y}) = \bar{v}_{Q_\omega} & \text{en } Q, \\ \bar{y}(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \bar{y}(x, 0) = \bar{y}_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

con $\bar{y}_0 \in C^{2+1/2}(\bar{\Omega})$ y $\bar{v} \in C^{1/2,1/4}(\bar{Q})$ tal que

$$M_a \|\nabla \bar{y}\|_{L^\infty(\Omega \times (0,T))} \leq \frac{a_0}{2 C(\Omega)}, \quad (2.6)$$

donde la constante $C(\Omega) > 0$ satisface $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ y la constante M_a es definida por $M_a := \sup_{r \in \mathbb{R}} |a'(r)|$.

Observación 2.4. Es claro que se define de manera implícita la trayectoria objetivo \bar{y} que satisface (2.5) y (2.6) en relación a las condiciones iniciales \bar{y}_0, \bar{v} y a la función $a(\cdot)$. Mencionemos algunos detalles:

- i) La condición (2.6) debe ser válida para todo $T > 0$, en otras palabras, la cota relacionada al gradiente de la trayectoria objetivo debe ser independiente a la variable temporal.
- ii) Si los sistemas (2.1) y (2.5) fuesen lineales, esto es, si la función $a(\cdot) = \text{constante}$, entonces la condición (2.6) se satisfaría pues en este caso tenemos que $M_a = 0$.
- iii) Si la trayectoria objetivo fuese estacionaria (no hubiese evolución en el tiempo), la condition (2.6) se satisfaría, pero entonces estaríamos en un caso particular del Teorema 2.1.
- iv) La prueba de la existencia de dicha trayectoria objetivo no es evidente. En efecto, si consideramos el caso más simple ($\nabla \bar{y} = 0$) llegaríamos a una contradicción. Si consideramos la solución \bar{y} como una función de variables separables, haciendo las respectivas cuentas vemos aún que es difícil probar la existencia de tal solución.

Debido a la Observación 2.4, ítem *iv*), se formulará el segundo resultado importante de esta tesis para el caso de estados de evolución:

Teorema 2.2. *Supongamos que existe una trayectoria objetivo \bar{y} que satisface la condición (2.6) con dato inicial \bar{y}_0 y control \bar{v} . Asumamos que existe una constante $\eta > 0$ tal que*

$$\bar{v} \geq \eta \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}^+. \quad (2.7)$$

Para cada $y_0 \in C^{2+1/2}(\bar{\Omega})$ dato inicial, existe $T_0 > 0$ tal que para cada $T \geq T_0$, podemos encontrar un control $v \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ tal que la única solución $y(\cdot, \cdot)$ para (2.1) satisface $y(\cdot, T) = \bar{y}(\cdot, T)$ en Ω y se tiene que $v \geq 0$ en $\Omega \times (0, T)$. Además, si $y_0 \neq \bar{y}_0$ entonces el tiempo mínimo de controlabilidad T_{min} es estrictamente positivo, donde

$$T_{min} := \inf \{T > 0; \exists v \in L^\infty(\Omega \times (0, T))^+, \text{ tal que } y(\cdot, T) = \bar{y}(\cdot, T) \text{ en } \Omega\}. \quad (2.8)$$

Observación 2.5. *Nótese que considerando un estado estacionario como una trayectoria objetivo, uno puede pensar que el Teorema 2.2 implica el Teorema 2.1, pero este no es el caso, desde que no se necesita la condición (2.6) para el caso estacionario (ver Observación 2.4, ítem *iii*)).*

Capítulo 3

Demostración del Teorema 2.1

En este capítulo, trabajaremos con el caso estacionario (estados estacionarios), para este propósito usaremos dos resultados importantes:

- Controlabilidad local exacta por trayectorias con controles $C^{1/2,1/4}$ (ver Apéndice).
- El método de "la escalera" para obtener el control global deseado (ver Figura 3.1).

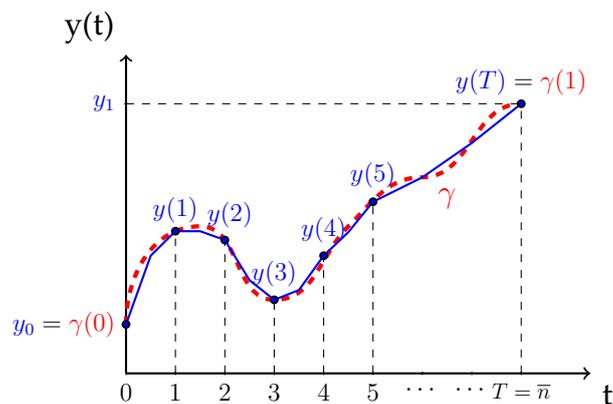


Figura 3.1: Solución estado-control en azul. Camino de estado estacionario en rojo.

Sean $y_0, y_1 \in \mathcal{S}$ fijados y sea $\gamma(s)$ un camino conexo continuo de estados estacionarios que dirige y_0 hacia y_1 .

Paso 1: Consecuencias de la Controlabilidad Local

Tomando $T = 1$, $R > 0$ fijo y para cada $\epsilon > 0$, aplicando el Lema A.1 (ver Apéndice) existen dos constantes positivas $C(R)$ y $\delta_\epsilon(R)$ tal que si

$$\|y_0\|_{C^{1/2}(\bar{\Omega})} \leq R, \quad \|y_1\|_{C^{1/2}(\bar{\Omega})} \leq R, \quad \|y_1 - y_0\|_{C^{2+1/2}(\bar{\Omega})} \leq \delta_\epsilon, \quad (3.1)$$

entonces existe una solución estado-control (y, v) tal que

$$v \in C^{1/2, 1/4}(\bar{\Omega} \times [0, 1]), \quad (3.2)$$

con $y(x, 1) = y_1(x)$ en Ω y tenemos la siguiente estimativa para el control

$$\|v - \bar{v}\|_{C^{1/2, 1/4}(\bar{\Omega} \times [0, 1])} \leq C(R) \|y_1 - y_0\|_{C^{2+1/2}(\bar{\Omega})}. \quad (3.3)$$

Tomando $\delta_\epsilon > 0$ suficientemente pequeño (por ejemplo $\delta_\epsilon \leq \frac{\epsilon}{C(R)}$), se tiene

$$\|v - \bar{v}\|_{C^{1/2, 1/4}(\bar{\Omega} \times [0, 1])} \leq \epsilon. \quad (3.4)$$

Paso 2: Método de la escalera

Para $\bar{n} \in \mathbb{N}$ fijado, dividamos el intervalo $[0, 1]$ en \bar{n} partes iguales y denotemos

$$\bar{y}_k := \gamma\left(\frac{k}{\bar{n}}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} - 1, \bar{n},$$

donde $\bar{y}_0 = \gamma(0) = y_0$ y $\bar{y}_{\bar{n}} = \gamma(1) = y_1$.

Es claro que $(\bar{y}_k)_{1 \leq k \leq \bar{n}}$ es una secuencia finita de estados estacionarios y denotemos como \bar{v}_k el control estacionario de \bar{y}_k , luego por hipotesis (2.4) tenemos que $\bar{v}_k \geq \eta > 0$.

Debido al Paso 1, es suficiente verificar la condición (3.1) para \bar{y}_k , para esto, tomemos $R = \sup_{s \in [0, 1]} \|\gamma(s)\|_{C^{1/2}(\bar{\Omega})}$, de aquí es obvio que

$$\|\bar{y}_k\|_{C^{1/2}(\bar{\Omega})} \leq R, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} - 1, \bar{n}.$$

Tomando $\epsilon = \eta$, eligiendo \bar{n} suficientemente grande y usando la continui-

dad del camino conexo continuo $\gamma(\cdot)$, obtenemos

$$\|\bar{y}_k - \bar{y}_{k-1}\|_{C^{2+1/2}(\bar{\Omega})} \leq \delta_\eta,$$

donde $\delta_\eta > 0$ es suficientemente pequeño.

Entonces, para cada $1 \leq k \leq \bar{n}$, podemos encontrar controles $v_k \in C^{1/2,1/4}(\bar{\Omega} \times [0, 1])$ uniendo los estados estacionarios \bar{y}_{k-1} y \bar{y}_k , tal que

$$\|v_k - \bar{v}_k\|_{C^{1/2,1/4}(\bar{\Omega} \times [0,1])} \leq \eta.$$

Como tenemos que $v_k = v_k - \bar{v}_k + \bar{v}_k$, entonces

$$v_k \geq -|v_k - \bar{v}_k| + \bar{v}_k \geq -\|v_k - \bar{v}_k\|_{C^{1/2,1/4}(\bar{\Omega} \times [0,1])} + \bar{v}_k \geq -\eta + \eta = 0, \text{ en } \Omega \times (0, 1), \quad (3.5)$$

mostrando así que cada control local v_k satisface la condición (2.4).

Paso 3: Construcción del control global

Para $T = \bar{n}$, hemos definido una secuencia de caminos conexos continuos que recorre a través de los siguiente puntos:

$$y_0 = y(0) \longrightarrow y(1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow y(\bar{n} - 1) \longrightarrow y(\bar{n}) = y_1.$$

Por este motivo, se define $v : (0, T) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ como

$$v(t) := v_k(t - (k - 1)), \quad t \in (k - 1, k) \text{ para } k = 1, 2, \dots, \bar{n} - 1, \bar{n}.$$

En resumen, obtenemos que $v \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ es el control deseado.

Observación 3.1. *Note que por construcción, el tiempo empleado para controlar el estado estacionario es el número de "escalones" que empleamos en el método de la escalera. Además, debido a la particularidad de la construcción, no podemos afirmar o negar nada con respecto a lo que ocurre en tiempo pequeño (este asunto será respondido en la Sección 5).*

Capítulo 4

Demostración del Teorema 2.2

En este capítulo, trabajaremos con el caso de evolución (trayectorias objetivo), para este propósito usaremos dos resultados importantes (ver Figura 4.1):

- Propiedad de estabilización (ver Apéndice).
- Controlabilidad exacta local por trayectorias con control $C^{1/2,1/4}$ (ver Apéndice).

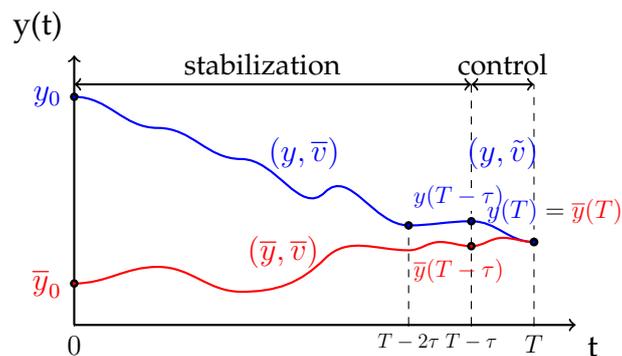


Figura 4.1: Solución estado-control en azul. Trayectoria objetivo en rojo.

Sea $\bar{y}(\cdot, \cdot)$ una trayectoria objetivo que satisfice la condición (2.6) con control $\bar{v} \in C^{1/2,1/4}(\bar{Q})$ y dato inicial $\bar{y}_0 \in C^{2+1/2}(\bar{\Omega})$.

Paso 1: Estabilización del sistema $(y - \bar{y})(\mathbf{x}, t)$

Sea $\tau > 0$ fijo y $T > 2\tau$ suficientemente grande. En el intervalo de tiempo $[0, T - \tau]$ controlamos $y(\cdot, \cdot)$ con control $v = \bar{v}$.

Se tiene la siguiente propiedad de estabilización de L^2 en el intervalo de tiempo $[0, T - 2\tau]$:

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda t} \|y_0 - \bar{y}_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0, T - 2\tau]. \quad (4.1)$$

En efecto, restando el sistema (2.5) al sistema (2.1) y luego multiplicando al resultado obtenido $(y - \bar{y})$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (y - \bar{y})_t (y - \bar{y}) \, dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (a(y) \nabla (y - \bar{y})) (y - \bar{y}) \, dx + \\ - \int_{\Omega} \nabla \cdot ((a(y) - a(\bar{y})) \nabla \bar{y}) (y - \bar{y}) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|y - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \int_{\Omega} a(y) |\nabla (y - \bar{y})|^2 \, dx + \\ + \int_{\Omega} (a(y) - a(\bar{y})) \nabla \bar{y} \cdot \nabla (y - \bar{y}) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Por un lado, tenemos que usando la hipótesis sobre $a(\cdot)$ en (2.2), conseguimos la siguiente estimativa

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (a(y) - a(\bar{y})) \nabla \bar{y} \cdot \nabla (y - \bar{y}) \, dx \right| \\ \leq M_a \|\nabla \bar{y}\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T - 2\tau))} \int_{\Omega} |y - \bar{y}| |\nabla (y - \bar{y})| \, dx \\ \leq M_a \|\nabla \bar{y}\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T - 2\tau))} \|y - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla (y - \bar{y})\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq M_a C(\Omega) \|\nabla \bar{y}\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T - 2\tau))} \|\nabla (y - \bar{y})\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, juntando los resultados obtenidos anteriormente y gracias a

la condición (2.6), se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|y - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + a_0 \|\nabla(y - \bar{y})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{a_0}{2} \|\nabla(y - \bar{y})\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

luego aplicando el resultado de inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, se consigue

$$\frac{d}{dt} \left(\|y - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \lambda \|y - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0,$$

para algún $\lambda > 0$.

Finalmente, integrando en tiempo de 0 hasta t , donde $t \in [0, T - 2\tau]$, se prueba (4.1).

Si realizamos el cambio de variable $z := y - \bar{y}$, notamos que z satisface

$$\begin{cases} z_t - \nabla \cdot (\alpha_z(x, t) \nabla z) + \nabla \cdot (\beta_z(x, t) \nabla \bar{y} z) = 0 & \text{en } \Omega \times (T - 2\tau, T - \tau), \\ z(x, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (T - 2\tau, T - \tau), \\ z(x, T - 2\tau) = y(x, T - 2\tau) - \bar{y}(x, T - 2\tau) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde

$$\alpha_z(x, t) := a(z(x, t) + \bar{y}(x, t))$$

y

$$\beta_z(x, t) := \begin{cases} -\frac{a(z(x, t) + \bar{y}(x, t)) - a(\bar{y}(x, t))}{z(x, t)} & , \text{ si } z(x, t) \neq 0, \\ -a'(\bar{y}(x, t)) & , \text{ si } z(x, t) = 0. \end{cases}$$

Ahora, aplicando el Lema B.1 (ver Apéndice) para el tiempo $[T - 2\tau, T - \tau]$, esto es, con extremos de tiempo $t_1 = T - 2\tau$, $t_2 = T - \tau$ y con control $(v - \bar{v})(\cdot, t) = 0$, se obtiene

$$\|y(T - \tau) - \bar{y}(T - \tau)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\tau) e^{C(\tau)\tau} \tau^{-\frac{N}{4}} \|y(T - 2\tau) - \bar{y}(T - 2\tau)\|_{L^2(\Omega)},$$

y utilizando la propiedad de estabilización de L^2 obtenida en (4.1) con $t = T - 2\tau$, finalmente se concluye que

$$\|y(T - \tau) - \bar{y}(T - \tau)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\tau) e^{-C(T-2\tau)} \|y_0 - \bar{y}_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.3)$$

Paso 2: Controlabilidad local para el sistema $y(\mathbf{x}, t) - \bar{y}(\mathbf{x}, t)$

En este paso, vamos a construir el control local con tiempo final $t = T$.

Desde que $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y usando la estimativa (4.3) del Paso 1, se tiene que

$$\begin{aligned} \|y(T - \tau) - \bar{y}(T - \tau)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\|y(T - \tau) - \bar{y}(T - \tau)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C(\tau)e^{-C(T-2\tau)}\|y_0 - \bar{y}_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Podemos considerar $y(\cdot, T - \tau)$ como el nuevo dato inicial y $\bar{y}|_{\Omega \times (T-\tau, T)}$ como la nueva trayectoria.

Note que, para $\eta > 0$ (ver condición (2.4)) y fijado un $T > 0$ suficientemente grande, se tiene que

$$\|y(T - \tau) - \bar{y}(T - \tau)\|_{L^2(\Omega)} < \delta_\eta,$$

donde $\delta_\eta > 0$ es suficientemente pequeño.

Basta tomar $R = \|\bar{y}\|_{C^{2+1/2, 1+1/4}(\bar{\Omega} \times [T-\tau, T])} + 1$, para garantizar las hipótesis (o requisitos) del Lema A.1 (ver Apéndice), entonces existe un control $\tilde{v} \in C^{1/2, 1/4}(\bar{\Omega} \times [t - \tau, T])$, tal que el estado $y(\cdot, \cdot)$ satisface $y(\cdot, T) = \bar{y}(\cdot, T)$ en Ω .

Además, se tiene la siguiente estimativa para el control

$$\|\tilde{v} - \bar{v}\|_{C^{1/2, 1/4}} \leq C(\tau)\|y(T - \tau) - \bar{y}(T - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\tau)e^{-C(T-2\tau)}\|y_0 - \bar{y}_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Vemos que como $T > 0$ es suficientemente grande, podemos conseguir que $\|\tilde{v} - \bar{v}\|_{C^{1/2, 1/4}} \leq \eta$.

Como tenemos que $\tilde{v} = (\tilde{v} - \bar{v}) + \bar{v}$, podemos concluir que

$$\tilde{v} \geq -|\tilde{v} - \bar{v}| + \bar{v} \geq -\|\tilde{v} - \bar{v}\|_{C^{1/2, 1/4}} + \bar{v} \geq -\eta + \eta = 0, \quad \text{en } \Omega \times (T - \tau, T).$$

Paso 3: Construcción del control global

Finalmente, por lo visto en el Paso 2, es bastante natural definir el control deseado como

$$v := \begin{cases} \bar{v} & \text{en } (0, T - \tau), \\ \tilde{v} & \text{en } (T - \tau, T), \end{cases}$$

y esto concluye la prueba.

Observación 4.1. *Note que en el Paso 1, aplicamos el Lema B.1 en el intervalo de tiempo $(T - 2\tau, T - \tau)$ desde que la longitud de dicho intervalo es τ , un valor fijado que no depende de T . Si desconsideramos esta parte en la prueba, tendríamos que en la estimativa (4.4) las constantes dependerían de T , y esto no serviría para probar que la distancia entre el estado $y(\cdot, \cdot)$ y la trayectoria objetivo $\bar{y}(\cdot, \cdot)$ sea pequeña para algún tiempo. Y justamente esta última condición es importante para aplicar el resultado de controlabilidad local y concluir la prueba.*

Capítulo 5

Positividad del Tiempo Mínimo de Controlabilidad

Consideremos el par estado-control (y, v) solución de (2.1) con dato inicial $y_0 \in C^{2+1/2}(\bar{\Omega})$; y consideremos la trayectoria objetivo \bar{y} solución de (2.5) con control $\bar{v} \in C^{2+1/2, 1/4}(\bar{Q})$, tal que $\bar{v} \geq \eta > 0$ (como en (2.7)) y dato inicial $\bar{y}_0 \in C^{2+1/2}(\bar{\Omega})$.

Recordemos la definición en (2.8):

$$T_{\min} := \inf \{T > 0; \exists v \in L^\infty(\Omega \times (0, T))^+, \text{ tal que } y(T) = \bar{y}(T) \text{ en } \Omega\}.$$

Se plantea el siguiente resultado

Teorema 5.1. *Supongamos que $y_0 \neq \bar{y}_0$. Entonces $T_{\min} > 0$.*

Demostración:

Vamos a dividir la prueba en dos casos:

Caso 1: Si $y_0 \not\leq \bar{y}_0$.

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $y_0 > \bar{y}_0$ en un conjunto de medida positiva. Entonces, existe una función no negativa $\varphi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, tal que

$$\int_{\Omega} (y_0 - \bar{y}_0) \varphi \, dx > 0.$$

Denotemos por $z(\cdot, \cdot)$ a la solución de (2.1) con dato inicial y_0 y control nulo. Desde que $z - \bar{y} \in C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ y $\langle z(\cdot, 0) - \bar{y}(\cdot, 0), \varphi(\cdot) \rangle > 0$, se concluye que

$$\langle z(T, \cdot) - \bar{y}(T, \cdot), \varphi(\cdot) \rangle > 0, \quad \forall T \in [0, T_0], \quad (5.1)$$

con $T_0 > 0$ suficientemente pequeño.

Mostraremos que $T_{\min} \geq T_0$. En efecto, si $T \in (0, T_0)$ y $v \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ es un control no negativo tal que (2.1) admite una solución $y(\cdot, \cdot)$ con dato inicial y_0 y control v . Entonces, por el Principio de Comparación (ver Capítulo 1, Teorema 1.5), tenemos que $y \geq z$. Juntando este último resultado con (5.1), se obtiene que

$$\langle y(\cdot, T), \varphi(\cdot) \rangle \geq \langle z(\cdot, T), \varphi(\cdot) \rangle > \langle \bar{y}(\cdot, T), \varphi(\cdot) \rangle.$$

Es fácil verificar que $y(\cdot, T) \neq \bar{y}(\cdot, T)$, en otras palabras no tenemos controlabilidad exacta en T , lo que concluye la prueba para el primer caso.

Caso 2: Si $y_0 < \bar{y}_0$.

Denotemos por $z(\cdot, \cdot)$ a la única solución de (2.1) con dato inicial y_0 y control nulo. Entonces $\xi := y - z$ es solución del sistema

$$\begin{cases} \xi_t - \Delta(\Phi(\xi + z) - \Phi(z)) = v \varrho_\omega & \text{en } Q, \\ \xi(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \xi(x, 0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $\Phi(r) := \int_0^r a(s) ds$.

Además, $\bar{\xi} := \bar{y} - z$ es solución del sistema (5.2) pero con dato inicial $\bar{y}_0 - y_0$ y control \bar{v} . Así, el problema se reduce a probar la existencia de un $T_0 > 0$ tal que, para cada $T \in (0, T_0)$ y para cada control no negativo $v \in L^\infty(\omega_1 \times (0, T))$, se obtiene $\xi(\cdot, T) \neq \bar{\xi}(\cdot, T)$. Claramente, esto implica que $y(\cdot, T) \neq \bar{y}(\cdot, T)$.

Supongamos por contradicción, para cada $T_0 > 0$ existe un $T \in (0, T_0)$ tal que $\xi(\cdot, T) = \bar{\xi}(\cdot, T)$.

$\xi(\cdot, \cdot)$ es caracterizado por la identidad dualidad

$$\langle \xi(\cdot, T), \varphi^T(\cdot) \rangle = \iint_{\omega \times (0, T)} v_{\partial\omega} \varphi dx dt, \quad (5.3)$$

donde φ es solución para el sistema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Psi_\xi(z) \Delta \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(x, T) = \varphi^T(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.4)$$

con Ψ_ξ satisfaciendo

$$\Psi_\xi(s) = \begin{cases} \frac{\Phi(\xi + s) - \Phi(\xi)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ \Phi'(\xi) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Si ϕ_1 es la primera autofunción del operador Dirichlet Laplaciano en Ω , sabemos que este es estrictamente positivo en Ω (ver Capítulo 1, Teorema 1.3). Para cada $r > 0$, se define el conjunto

$$E_r := \{x \in \Omega \setminus \omega \mid \text{dist}(x, \partial\omega) < r\},$$

donde $\text{dist}(x, \partial\omega)$ es la distancia del punto x a la frontera de ω .

Consideremos una constante $\theta > 0$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus (\omega \cup E_d)} (-\phi_1)(\bar{y}_0 - y_0) dx \leq -\theta < 0,$$

donde $d := \text{dist}(\partial\omega, \partial\Omega)/2$, entonces definimos

$$C_\theta := \frac{\theta}{3\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|\bar{y}_0 - y_0\|_{L^1(\Omega)}} > 0.$$

Consideremos también la función corte $\zeta \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que

$$\zeta(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \Omega \setminus (\omega \cup E_\delta), \\ -1 \leq \zeta(x) \leq C_\theta & \text{si } x \in E_\delta, \\ C_\theta & \text{si } x \in \omega, \end{cases}$$

para algún $\delta > 0$.

Definamos el dato inicial para el sistema adjunto $\varphi^T(x) := \zeta(x)\phi_1(x)$ (ver Figura 5.1), entonces por construcción existe una constante $\tilde{\theta} > 0$ tal que

$$\varphi^T(x) \geq \tilde{\theta}, \quad \forall x \in \omega.$$

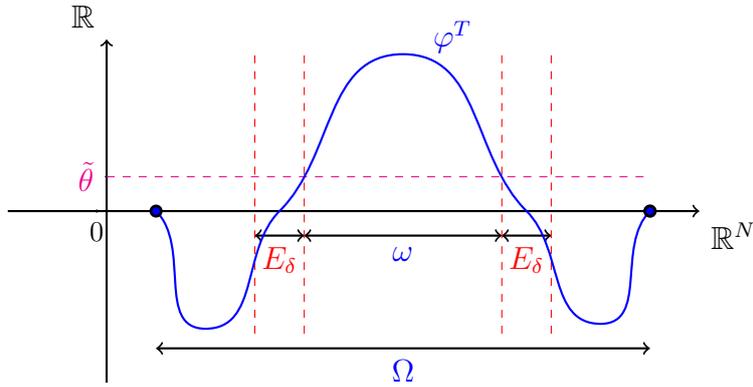


Figura 5.1: Dato inicial φ^T para el sistema adjunto.

Demostraremos que hay una contradicción con la dualidad (5.3) para el dato inicial φ^T que acabamos de construir, para eso, primero probemos que $\langle \bar{\xi}(\cdot, T), \varphi^T(\cdot) \rangle < 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\bar{y}_0 - y_0) \varphi^T dx &= \int_{\Omega \setminus (\omega \cup E_\delta)} (\bar{y}_0 - y_0) \varphi^T dx + \int_{E_\delta} (\bar{y}_0 - y_0) \varphi^T dx + \\ &\quad + \int_{\omega} (\bar{y}_0 - y_0) \varphi^T dx. \end{aligned}$$

Vamos a acotar cada sumando del lado derecho de la última igualdad. Considerando $\delta > 0$ suficientemente pequeño, por un lado, obtenemos

que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus (\omega \cup E_\delta)} (\bar{y}_0 - y_0) \varphi^T dx &= \int_{\Omega \setminus (\omega \cup E_\delta)} (\bar{y}_0 - y_0) (-\phi_1) dx \\ &\leq \int_{\Omega \setminus (\omega \cup E_d)} (\bar{y}_0 - y_0) (-\phi_1) dx \leq -\theta. \end{aligned}$$

Por otro lado, conseguimos

$$\left| \int_{E_\delta} (\bar{y}_0 - y_0) \varphi^T dx \right| \leq C \|\bar{y}_0 - y_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)} |E_\delta| \leq \frac{\theta}{3}.$$

Por último, se tiene que

$$\left| \int_{\omega} (\bar{y}_0 - y_0) \varphi^T dx \right| = \left| \int_{\omega} (\bar{y}_0 - y_0) C_\theta \phi_1 dx \right| \leq C_\theta \|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\bar{y}_0 - y_0\|_{L^1(\Omega)} = \frac{\theta}{3}.$$

Luego, juntando las tres últimas desigualdades concluimos que

$$\int_{\Omega} (\bar{y}_0 - y_0) \varphi^T dx \leq -\frac{\theta}{3} < 0. \quad (5.5)$$

Por los resultados clásicos de trasposición (ver Capítulo 1, Teorema 1.6) tenemos que $\bar{\xi} \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$. Por lo tanto, escogiendo $T_0 > 0$ suficientemente pequeño, de la estimativa (5.5) podemos inferir que

$$\left\langle \bar{\xi}(\cdot, T), \varphi^T(\cdot) \right\rangle < 0, \quad \forall T \in (0, T_0]. \quad (5.6)$$

Ahora, probemos que $\varphi_- = 0$ en $\omega \times (0, T_0)$. En efecto, notemos que $\varphi^T \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ para cada $1 < p < \infty$, esto es debido a la regularidad bien conocida de la primera autofunción del operador Dirichlet Laplaciano (ver Capítulo 1, Teorema 1.2), luego podemos concluir que $\varphi \in C(\bar{Q})$ (ver Capítulo 1, Teorema 1.7). Así, desde que $\varphi^T \geq \tilde{\theta} > 0$ en ω , por la continuidad de φ , para un tiempo T_0 suficientemente pequeño, obtenemos que

$\varphi(x, t) \geq \tilde{\theta} > 0$ en $(x, t) \in \omega \times (0, T_0)$, esto es

$$\varphi_- = 0, \text{ en } \omega \times (0, T_0). \quad (5.7)$$

Sustituyendo (5.6) y (5.7) en la dualidad (5.3), para cada $T \in (0, T_0)$, se concluye que

$$0 > \langle \xi(\cdot, T), \varphi^T \rangle = \iint_{(0, T) \times \omega} v \varrho_\omega \varphi \, dx dt \geq 0.$$

Esto es una contradicción, por lo tanto $\xi(\cdot, T) \neq \bar{\xi}(\cdot, T)$ y con esto se finaliza la prueba. ■

Observación 5.1. *El resultado de esta Sección es independiente de la manera como se obtiene la controlabilidad bajo restricciones para trayectorias objetivo, esto es, si existe T_{min} y los datos iniciales de los sistemas (2.1) y (2.5) son diferentes, entonces $T_{min} > 0$.*

Capítulo 6

Conclusiones

- Esta tesis forma parte de [18], y en dicho trabajo se han probado dos resultados sobre controlabilidad exacta por trayectorias con restricciones sobre el signo del control para el sistema parabólico cuasilineal (2.1), nos referimos a los Teoremas 2.1 y 2.2. En primer lugar se ha estudiado el caso estacionario donde se han empleado para su demostración las siguientes técnicas: método de la escalera y controlabilidad local sin restricciones, y luego se ha estudiado el caso de evolución (no estacionario) con la condición (2.6) a la trayectoria objetivo donde se han empleado para su demostración las siguientes técnicas: estabilización y controlabilidad local sin restricciones. También se ha estudiado la positividad del tiempo mínimo de controlabilidad donde se han empleado los Principios del Máximo y Comparación para demostrar dicho resultado.
- Los resultados de los Teoremas 2.1 y 2.2 son válidos si adicionamos un término semilineal en el sistema (2.1), esto es, si consideramos el siguiente sistema

$$\begin{cases} y_t - \nabla \cdot (a(y)\nabla y) + F(y) = v \varrho_\omega & \text{en } Q, \\ y(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde en este caso $F(\cdot)$ satisface las mismas condiciones como en [19].

- La condición (2.6) es fundamental en este trabajo, necesitamos esta desigualdad para probar la controlabilidad por trayectorias y la propiedad de estabilización, en otras palabras, el resultado del Teorema 2.2 depende de la existencia de esta condición. Sería muy importante e interesante probar los mismos resultados sin esta condición, esta cuestión no parece sencilla debido a que necesitamos nuevas estimativas para controlar este problema.
- Es interesante estudiar la controlabilidad con restricciones para otros tipos de EDPs parabólicas cuasilineales, por ejemplo cuando la no linealidad $a(y)$ es reemplazada por la no linealidad $a(\nabla y)$ en el sistema (2.1), parece que las técnicas aplicadas en este trabajo no son suficientes. Necesitamos más regularidad para el coeficiente de la parte principal para probar los resultados de controlabilidad local y para probar el Principio de Comparación.

Apéndice A

Resultado de Controlabilidad

Local

En este apartado probaremos el siguiente resultado de controlabilidad local, que sirvió para probar el Teorema 2.1 y el Teorema 2.2.

Lema A.1. *Dados $T > 0$ y $R > 0$ fijos. Entonces, existen constantes positivas C y δ dependiendo de R y T tal que, para todas las trayectorias objetivo $\bar{y} \in C^{2+1/2, 1+1/4}(\bar{Q})$ que satisfacen la condición (2.6) con dato inicial \bar{y}_0 y control \bar{v} ; y para cada dato inicial $y_0 \in C^{2+1/2}(\bar{\Omega})$, tal que si*

$$\|y_0\|_{C^{2+1/2}(\bar{\Omega})} \leq R, \quad \|\bar{y}\|_{C^{2+1/2, 1+1/4}(\bar{Q})} \leq R \quad \text{y} \quad \|y_0 - \bar{y}_0\|_{C^{2+1/2}(\bar{\Omega})} \leq \delta, \quad (\text{A.1})$$

podemos encontrar un control $v \in C^{1/2, 1/4}(\bar{Q})$, tal que

- $y(T) = \bar{y}(T)$,
- $\|v - \bar{v}\|_{C^{1/2, 1/4}(\bar{Q})} \leq C \|y_0 - \bar{y}_0\|_{C^{2+1/2}(\bar{\Omega})}$.

Demostración:

Usaremos los mismos argumentos de [1] y [16] debido a que los problemas linealizados son muy similares, en otras palabras aplicaremos un argumento de punto fijo sobre un sistema más adecuado, para lograr eso transformaremos el problema original a un problema de control nulo.

Denotando $z = y - \bar{y}$ y $u = v - \bar{v}$, el problema se reduce a probar la controlabilidad local nula del siguiente sistema

$$\begin{cases} z_t - \nabla \cdot (\alpha_z(x, t) \nabla z) + \nabla \cdot (\beta_z(x, t) \nabla \bar{y} z) = u \varrho_\omega & \text{en } Q, \\ z(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(x, 0) = y_0(x) - \bar{y}_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\alpha_z(x, t) := a(z(x, t) + \bar{y}(x, t))$$

y

$$\beta_z(x, t) := \begin{cases} -\frac{a(z(x, t) + \bar{y}(x, t)) - a(\bar{y}(x, t))}{z(x, t)} & , \text{ si } z(x, t) \neq 0, \\ -a'(\bar{y}(x, t)) & , \text{ si } z(x, t) = 0. \end{cases}$$

Ahora, fijemos una función $w \in Z := \{w \in C^{1+1/2, 1+1/4}(\bar{Q}); w(\cdot, 0) = z_0(\cdot)\}$ y consideremos el sistema linealizado

$$\begin{cases} z_t - \nabla \cdot (\alpha_w(x, t) \nabla z) + \nabla \cdot (\beta_w(x, t) \nabla \bar{y} z) = u \varrho_\omega & \text{en } Q, \\ z(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(x, 0) = z_0(x) := y_0(x) - \bar{y}_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\alpha_w(x, t) \in C^{1,1}(\bar{Q}) \quad (\text{A.4})$$

y

$$\beta_w(x, t) \nabla \bar{y} \in C(\bar{Q}). \quad (\text{A.5})$$

Consideremos el sistema adjunto asociado al sistema linealizado (A.3)

$$\begin{cases} -p_t - \nabla \cdot (\alpha_w(x, t) \nabla p) + \nabla \cdot (\beta_w(x, t) \nabla \bar{y} p) = 0 & \text{en } Q, \\ p(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ p(x, 0) = p_T(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Denotemos por

$$B := \left(1 + \|w\|_{C^{1,1}(\bar{Q})}^2 + \|\bar{y}\|_{C^{2+1/2,1+1/4}(\bar{Q})}^2\right). \quad (\text{A.7})$$

Dado ω_0 un subconjunto de ω abierto, no vacío tal que $\bar{\omega}_0 \subset \omega$, por el Lema de Fursikov (ver Capítulo 1, Lema 1.1) existe una función $\alpha_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que

$$\alpha_0(x) > 0 \text{ en } \Omega; \quad \alpha_0(x) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega; \quad |\nabla\alpha_0(x)| > 0 \text{ en } \overline{\Omega \setminus \omega_0}.$$

Para cada $\lambda > 0$, definamos

$$\phi(x, t) := \frac{e^{\lambda\alpha_0(x)}}{t(T-t)}, \quad \alpha(x, t) := \frac{e^{\lambda\alpha_0(x)} - e^{2\lambda|\alpha_0|_{C(\bar{\Omega})}}}{t(T-t)}.$$

Procediendo como en [16], podemos probar la siguiente Desigualdad de Observabilidad

$$\|p(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ce^{e^{CB}} \iint_{\omega_1 \times (0, T)} e^{2s\alpha} \phi^3 |p|^2 dx dt, \quad (\text{A.8})$$

donde $C > 0$ es una constante, B es la constante definida en (A.7), $\lambda \geq CB$ y $s \geq Ce^{CB}$.

De manera similar a la Proposición 4.1 en [16], podemos probar la controlabilidad nula para el sistema linealizado (A.3), esto es, existe un control $v \in C^{1/2,1/4}(\bar{Q})$ tal que el estado asociado $z(\cdot, \cdot)$ solución de (A.3) satisface $z(\cdot, T) = 0$ en Ω . La estimativa para el control es

$$\|v - \bar{v}\|_{C^{1/2,1/4}(\bar{Q})} \leq Ce^{e^{CB}} \|z_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, usando los clásicos argumentos de Punto Fijo (específicamente el Teorema del Punto Fijo de Kakutani), podemos concluir la prueba del Lema A.1. En efecto, si definimos el conjunto

$$K := \{z \in C^{2+1/2,1+1/4}(\bar{Q}); \|z\|_{C^{2+1/2,1+1/4}(\bar{Q})} \leq 1, \quad z(\cdot, 0) = z_0(\cdot)\},$$

y una aplicación (posiblemente multivaluada) $\Lambda : Z \rightarrow 2^Z$ tal que para cada $w \in Z$, le corresponde

$$\Lambda(w) := \{z \in Z; \exists v \in C^{1/2,1/4}(\bar{Q}) \text{ y una constante } C > 0 \text{ tal que } (z, v) \text{ satisface (A.3), (A.9) y } z(\cdot, T) = 0 \text{ en } \Omega\}.$$

la aplicación Λ está bien definida. Esto es debido al resultado obtenido de controlabilidad nula para el sistema linealizado (A.3).

Si el dato inicial z_0 es suficientemente pequeño, entonces $\Lambda(K) \subset K$. En efecto, por teoría clásica de sistemas parabólicos lineales tenemos la siguiente estimativa para el estado $z(\cdot, \cdot)$:

$$\|z\|_{C^{2+1/2,1+1/4}(\bar{Q})} \leq C(B)(\|z_0\|_{C^{2+1/2}(\bar{\Omega})} + \|v - \bar{v}\|_{C^{1/2,1/4}(\bar{Q})}).$$

Como ya consideremos que z_0 es suficientemente pequeño, obtenemos $\|z\|_{C^{2+1/2,1+1/4}(\bar{Q})} \leq 1$.

Además, tenemos que K es un subconjunto de Z convexo, compacto y no vacío, este resultado es inmediato pues sabemos que K esta inmerso compactamente en Z .

Otro resultado que se obtiene es que Λ tiene el gráfico cerrado en Z .

Así, si z_0 es suficientemente pequeño, por el Teorema del Punto Fijo de Kakutani (ver Capítulo 1, Teorema 1.1), Λ posee al menos un punto fijo denotado z . Esto significa que para el sistema cuasilineal (A.2), existe un control $v \in C^{1/2,1/4}(\bar{Q})$ tal que la solución $z(\cdot, \cdot)$ satisface que $z(\cdot, T) = 0$ en Ω . El costo (o estimativa) de la función control v verifica (A.9).

Esto completa la prueba del Lema A.1. ■

Apéndice B

Propiedad de Estabilización en normas L^2 - L^∞

En este apartado probaremos el siguiente resultado de estabilidad, que sirvió para probar el Teorema 2.2.

Lema B.1. *Asumiendo las hipótesis del Teorema 2.2 para el dominio $\Omega \times (t_1, t_2)$ (donde t_1, t_2 satisface $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$). Entonces, existe una constante positiva $C := C(\Omega, a_0, a_1, M, \|\nabla \bar{y}\|_{L^\infty(\Omega \times (t_1, t_2))})$, tal que para cada $t \in [t_1, t_2]$: la única solución $y(\cdot, \cdot)$ del sistema (2.1) satisface $y(\cdot, t) \in L^\infty(\Omega)$ y se tiene la estimativa*

$$\begin{aligned} \|y(\cdot, t) - \bar{y}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C e^{C(t-t_1)} (t-t_1)^{-\frac{N}{4}} \times \\ &\quad \times \left(\|(y - \bar{y})(\cdot, t_1)\|_{L^2(\Omega)} + \|v - \bar{v}\|_{L^\infty(\Omega \times (t_1, t_2))} \right). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Demostración:

Realizaremos la prueba en dos pasos.

Paso 1: Reducción al caso lineal

Bibliografía

- [1] M. Beceanu, *Local Exact Controllability of the Diffusion Equation in one dimension*, *Abstract and Applied Analysis*, 2003 (14), (2003), 793-811.
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer New York, (2010).
- [3] R. Du, *Null controllability for a class of degenerate parabolic equations with the gradient terms*, *Journal of Evolution Equations*, 19, (2019), 585-613.
- [4] L. Evans, *Partial Differential Equations, Graduates studies in mathematics, American Mathematical Society*, (2010).
- [5] E. Fernández-Cara, D. Nina-Huaman, M. R. Nuñez-Chávez and F. B. vieira, *On the Theoretical and Numerical Control of a One-Dimensional Nonlinear Parabolic Partial Differential Equation*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 175(3), (2017), 652-682.
- [6] E. Fernández-Cara and E. Zuazua, *The Cost of Approximate Controllability for Heat Equations: The Linear Case*, *Advances in Differential Equations*, 5(4-6), (2000), 465-514.
- [7] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of Evolution Equations*, *Lecture Notes Series*, vol. 34, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, (1996).
- [8] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, (2015).
- [9] O. Yu. Imanuvilov and M. Yamamoto, *Carleman Inequalities for Parabolic Equations in Sobolev Spaces of Negative Order and Exact Controllability for Semilinear Parabolic Equations*, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 39(2), (2003), 227-274.

- [10] O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of Parabolic Equations*, Sbornik: Mathematics, 186(6), (1995), 879-900.
- [11] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Translations by Scripta Technica, Inc, Academy Press, New York and London (1968).
- [12] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 23, AMS, Providence, RI, (1968).
- [13] G. Lebeau and L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Communications in Partial Differential Equations, 20, (1995), 335-356.
- [14] G. M. Lieberman, *Second Order Parabolic Differential Equations*, World Scientific, (1996).
- [15] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod-Paris, vol. 1, (1968).
- [16] X. Liu and X. Zhang, *Local Controllability of Multidimensional Quasi-Linear Parabolic Equations*, SIAM Journal on Control and Optimization, 50(4), (2012), 2046-2064.
- [17] J. Lohéac, E. Trelat and E. Zuazua, *Minimal controllability time for the heat equation under unilateral state or control constraints*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 27(9), (2017), 1587-1644.
- [18] M. R. Nuñez-Chávez, *Controllability under positive constraints for quasilinear parabolic PDEs*, Mathematical Control and Related Fields, (2021). DOI: 10.3934/mcrf.2021024.
- [19] D. Pighin and E. Zuazua, *Controllability under positive constraints of semilinear heat equations*, Mathematical Control and Related Fields, 8(34), (2018), 935-964.
- [20] A. Porreta, *Local Existence and Uniqueness of Weak Solution for Nonlinear Parabolic Equations with Superlinear Growth and Unbounded Initial Data*, Advances in Differential Equations, 6(1), (2001), 73-128.
- [21] C. Pouchol, E. Trélat and E. Zuazua, *Phase Portrait Control for 1D Monostable and Bistable Reaction-Diffusion Equations*, Nonlinearity, London Mathematical Society, 32(3), (2019), 884-909.

- [22] M. Protter and H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer, New York, (2012).
- [23] E. J. P. G. Schmidt, *Boundary control for the heat equation with steady-state targets*, *Journal of Differential Equations*, 78(1), (1989), 89-121.
- [24] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokio, (1986).