Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Comportamiento asintótico para la ecuación de onda semilineal con amortiguamiento local en dominios no acotados

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Carlos Alberto PEÑA MIRANDA

ASESOR

Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2012

Referencia bibliográfica

Peña, C. (2012). *Comportamiento asintótico para la ecuación de onda semilineal con amortiguamiento local en dominios no acotados*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las 18:00 horas del día viernes 09 de noviembre del 2012, en la Sala de Profesores de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de la Tesis, presidida por el Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña e integrado por los siguientes miembros, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa (Miembro Informante), Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (Miembro Evaluador), Dr. José Raúl Luyo Sánchez (Miembro Evaluador) y Dr. Alfonso Pérez Salvatierra como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: "COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO PARA LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON AMORTIGUAMIENTO LOCAL EN DOMINIOS NO ACOTADOS" presentada por el Bachiller CARLOS ALBERTO PEÑA MIRANDA, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller CARLOS ALBERTO PEÑA MIRANDA respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller CARLOS ALBERTO PEÑA MIRANDA aprobado con el calificativo de SOBRESALIENTE (17)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del grado académico de Magíster en Matemática Pura al Bachiller Carlos Alberto Peña Miranda.

Siendo las 19:00 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro

Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña
Presidente

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro

Dr. José Raúl Luyo Sánchez
Miembro

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro Asesor

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO PARA LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON AMORTIGUAMIENTO LOCAL EN DOMINIOS NO ACOTADOS

Carlos Alberto Peña Miranda

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Grado de Magister en Matemática.

Aprobada por:

....
Dr. Izaguirre Maguiña, Raúl Moisés
Presidente

....
Dr. Cabanillas Lapa, Eugenio
Miembro

....
Dr. Luyo Sánchez, José Raúl
Miembro

....
Dra. Santiago Ayala, Yolanda Silvia
Miembro

....
Dr. Pérez Salvatierra, Alfonso
Miembro Asesor

Lima - Perú

2012

FICHA CATALOGRÁFICA

Peña Miranda Carlos Alberto

Comportamiento asintótico para la ecuación de onda semilineal con amortiguamiento local en dominios no acotados, (Lima) 2012.
viii, 55 p., 29.7 cm, (UNMSM, Maestria en Matemática Pura, 2012)
Tesis - Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas. Matemáticas.1. UNMSM/FCM. Título (Serie).

Dedicatoria

Este trabajo lo dedico con mucho amor:

A Dios, ser supremo sobre toda existencia, ya que sin él nada es posible.

A mis hijos que son la bendición más grande que me ha dado Dios y son la razón de mi vida

A mi esposa, persona muy importante en mi vida con el cual comparto momentos alegres, de tristeza y de felicidad.

A mis padres, que han sabido con sabiduría y amor orientarme con buenos principios hacia el camino correcto y en especial a mi madre que siempre ha estado ahí para motivarme en cada una de mis metas

A mi hermana, compañera de toda la vida, con los cuales he experimentado vivencias difíciles como también de felicidad.

Agradecimientos

Gracias a Dios todopoderoso por haberme dado la fortaleza espiritual y con ésta la sabiduría emocional e intelectual en el transcurso del desarrollo de este trabajo, ya que fue esta fuerza divina la que me mantuvo firme y sin desmayo hacia el logro de una meta más en mi vida.

Gracias a mi razón de inspiración y estimulo, mis hijos. Además le agradezco a mi amada esposa por su compresión y por su apoyo moral. Como también a mis padres y hermana por su apoyo incondicional en los momentos que los necesité.

Un agradecimiento muy especial al Dr. Pérez Salvatierra Alfonso por su apoyo desinteresado y por que en todo momento estuvo dispuesto a orientarme en la dirección correcta hacia la culminación exitosa de este trabajo.

Gracias a los profesores Dr. Cabanillas Lapa Eugenio y Dr. Cabanillas Zannini Victor Rafael por su apoyo, por su paciencia y todas sus enseñanzas.

Gracias los profesores revisores por leer detalladamente la tesis, realizar las correcciones y aportar tan valiosas sugerencias.

Agradezco también al Dr. Luyo Sánchez José Raúl, por sus apreciables sugerencias y correcciones que ayudaron a mejorar la versión final del trabajo.

Finalmente, les agradezco a todos ellos que de una u otra manera forma contribuyeron en la realización de este trabajo.

RESUMEN

Comportamiento asintótico para la ecuación de onda semilineal con amortiguamiento local en dominios no acotados

CARLOS ALBERTO PEÑA MIRANDA

Noviembre 2012

Asesor:	Dr. Pérez Salvatierra Alfonso
Grado Obtenido:	Magister en Matemática Pura

El objetivo de este trabajo, es estudiar la existencia y unicidad de la solución regular como también el decaimiento exponencial para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada sobre un dominio no acotado dado por,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)u_t = 0 \;\text{ en }\; \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(0) = u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n);\; u_t(0) = u_1 \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Para alcanzar el objetivo planteado, se emplea la teoria de semigrupos, la técnica de los multiplicadores y el método de la continuacion única, estudiado por Ruiz. [24]

Palabras claves: Ecuación de onda, disipación localizada, solución regular, continuación única, decaimiento exponencial.

ABSTRACT

Asymptotic behavior for the semilinear wave equation with local damping in unbounded domains

CARLOS ALBERTO PEÑA MIRANDA

November 2012

Advisor:	Dr. Pérez Salvatierra Alfonso
Obtained Grade:	Master in Mathematics pure

The aim of this work is to study the existence and unique of the smooth solutions as well as uniform exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains given for,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)u_t = 0 \ \text{ in } \ \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n); \ u_t(0) = u_1 \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

To achieve the objective set, used the theory of semigroups, multipliers technique and unique continuation method studied by Ruiz.[24]

Key words: wave equation, localized dissipation, smooth solution, unique continuation, exponential decay

Índice general

Introducción

Desde el año 1980, se viene estudiando la ecuación de onda no homogénea con el término disipativo u_t, dado por

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = f \text{ en } \Omega \times (0, +\infty),$$

con condiciones de frontera del tipo Dirichlet o Neumann y sus respectivas condiciones iniciales; esta ecuación como el propio nombre lo dice, esta asociada a la propagación de ondas.

Los términos disipativos en una ecuación, sirven para garantizar un comportamiento asintótico de la energía asociada al sistema planteado.

Los trabajos de sistemas con disipación localmente distribuidos son estudiados con bastante interés desde la década de los 90, estos sobre dominios Ω acotados de $\mathbb{R}^n$, aplicados a diferentes sistemas como podemos citar: visco elástico, termoelásticos, problemas de contacto, ecuación de Kirchoff, entre otros. Ver [5], [16], [18], [19], [20] y [21].

En el año 1990, E. Zuazua [25], estudia la ecuación de onda semilineal con disipación localizada en Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, agregando el término disipativo $a(x)u_t$,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0, \;\; u_t(0) = u_1 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma, \end{cases}$$

con $\Gamma = \partial\Omega$. Bajo las hipótesis:
La función $f \in C^1(\mathbb{R})$ es tal que $f(s)s \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$ y satisface la condición del crecimiento

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y|; \;\; \forall x, y \in \mathbb{R},$$

para algún $C > 0$ y $p > 1$ con $(n-2)p \leq n$.
La función $a = a(x) \in L^\infty(\Omega)$ es acotada y no negativa tal que,

$$a \geq a_0 > 0 \text{ c.s. en } \omega,$$

donde ω es una vecindad de la frontera de Ω.
Con esas condiciones mencionda prueba que el problema planteado es bien puesto en el espacio $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, es decir, para cualquier dato inicial $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe una única solución débil en la clase

$$u \in C([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\Omega)).$$

Mediante técnicas multiplicativas y el método de la continuación única, prueba el decaimiento exponencial uniforme de la energía E(t) asociado al sistema.

Como una proyección, el mismo autor al final de su articulo, plantea algunas posibles extensiones con el método trabajado a varias ecuaciones, como por ejemplo: La ecuación con potencial dado por,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + w(x)u + f(u) + a(x)u_t = 0 \ \text{ en } \ \Omega \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \ u_t(0) = u_1 \in L^2(\Omega) \ \text{ en } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0, +\infty), \end{cases}$$

donde $w(x) \in L^p(\Omega)$, $w \geq 0$ c.s. en Ω con $p = 2$, si $n = 1$; $p > n$ si $n \geq 2$.

Posteriormente el mismo autor E. Zuazua en el año de 1991 en su artículo dado en [26], profundiza el trabajo realizado en [25] al estudiar la ecuación semilineal de onda con disipación localizada en $\mathbb{R}^n$ dado por,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \ \text{ en } \ \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n); \ u_t(0) = u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{0.1}$$

con las hipótesis

$$\text{(H1)} \quad a \in L_+^\infty(\mathbb{R}^n); a(x) \geq a_0 > 0 \text{ c.s. en } \Omega_R = \mathbb{R}^n \backslash B_R = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \geq R\}$$
$$\text{para } R > 0, \text{ con } B_R = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| < R\}. \tag{0.2}$$

$$\text{(H2)} \quad f(s)s \geq 0, \ \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{0.3}$$

(H3) $f \in C^1(\mathbb{R})$, satisface la siguiente condición de crecimiento: existe $C > 0$, (0.4)
$p > 1$, con $(n-2)p \leq n$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Considerando α una constante real, prueba que el problema (0.1) es bien puesto en el espacio $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir, para cualquier dato inicial $\{u_0, u_1\} \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una única solución débil de (0.1) en la clase

$$u \in C([0, +\infty); H^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Nosotros estudiamos en el presente trabajo, el problema (0.1) considerando α una función real de variable vectorial x, esto es $\alpha(x)$, y con la hipótesis

$$\text{(H4)} \quad \alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n); \alpha(x) \geq \alpha_0 \text{ c.s. en } \mathbb{R}^n \tag{0.5}$$

y con dato inicial $\{u_0, u_1\} \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$, se prueba que existe una única solución fuerte de (0.1) en la clase

$$u \in C([0, +\infty); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, +\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0, +\infty); L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Este trabajo está estructurado en tres capítulos, estudiamos de la siguiente manera:

En el capítulo 1, denominado Preliminares, se exponen definiciones y resultados importantes que serán de utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos; particularmente se muestran resultados sobre la teoría de semigrupos y sobre existencia y unicidad de soluciones para el problema semilineal abstracto.

En el capítulo 2, denominado Existencia y unicidad de la solución regular, se demuestra con las hipótesis dadas por (0.2)-(0.5) que el problema (0.1) tiene una única solución en

$$u \in C([0,+\infty); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,+\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0,+\infty[; L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Además se deduce la energía asociada al sistema (0.1) está dada por:

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Big[|\nabla u(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|u(x,t)|^2 \Big] dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x,t))dx,$$

donde

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

También se demuestra que la energía asociada al sistema (0.1) es una función no creciente en la variable del tiempo, esto es, obtendremos que:

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}} a(x)|u_t|^2 dxdt, \quad \text{para todo } t_2 \geq t_1 \geq 0.$$

Por último en el capítulo 3, llamado decaimiento exponencial de la solución regular, basado el trabajo de E. Zuazua [26], estudiamos el decaimiento exponencial de la energía asociada al sistema (0.1), es decir, suponiendo que f cumple una de las siguientes condiciones:

a) ***(El caso globalmente lipschiptziana)*** $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ y una de las siguientes dos condiciones son verdaderas:

$$\begin{array}{lll} i) & \exists \displaystyle\lim_{s\to+\infty} f'(s) = f'_+ \quad y \quad \exists \lim_{s\to-\infty} f'(s) = f'_- \text{ ó} \\ ii) & \exists \displaystyle\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = l. \end{array}$$

b) ***(El caso súper lineal)*** Existe $\delta > 0$ tal que

$$f(s)s \geq (2+\delta)F(s), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Se demuestra que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \text{ para todo } t \geq 0. \tag{0.6}$$

El procedimiento de la prueba está basado en la técnica de los multiplicadores y el método de la continuación única, dado por Ruiz A. [24].

Uno de los pioneros en usar la técnica de la continuación única fue E. Zuazua en sus trabajos realizados en [25] y [26]; antes de que Ruiz A. publicara su resultado dado en [24] y cuando la disipación ejercida por la función $a(x)u_t$ es determinada en un subconjunto abierto ω de la frontera Ω.

Para el caso lineal ($f = 0$) es posible mostrar el decaimiento dado por (0.6), adaptando el método de C. Bardos, G. Lebeau y J. Rauch, ver [2] y [3], siendo $a(x) \geq a_0 > 0$ en algún subconjunto abierto de Ω .

El caso particular cuando ω es una vecindad de la frontera de Ω acotado, se puede usar la técnica de los multiplicadores para obtener el decaimiento exponencial de (0.1), ver [5], [16],[18], [20] y [26].

Existen resultados positivos para el decaimiento exponencial de (0.1), más simples cuando

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ para todo } x \in \Omega,$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, esto es, la disipación es efectiva en todo Ω. En este caso el decaimiento puede ser obtenido, construyendo la siguiente perturbación de energía

$$E_\epsilon(t) = E(t) + \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)u_t(x,t)dx,$$

para la cual, las desigualdades diferenciales nos llevan a obtener el decaimiento exponencial deseado, que son probados cuando ϵ es positivo y suficientemente pequeño. Ver A. Haraux [9].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teoría de distribuciones y los Espacios $L^P(\Omega)$

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua dada. El soporte de u es el conjunto

$$Sop(u) = \overline{\{\in \Omega / u(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Definición 1.1.1. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene soporte compacto si $Sop(u)$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

En el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ se introduce la siguiente equivalencia de convergencia:

Proposición 1.1.2. *Sea la sucesión $(\varphi_m)_{m\geq 1} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$. La sucesión $(\varphi_m)_{m\geq 1}$ converge a φ, si y solamente si,*

a) Existe un subconjunto K compacto de Ω, tal que $Sop(\varphi_m - \varphi) \subseteq K$, para todo $m \geq 1$.

b) $D^\alpha \varphi_m \to D^\alpha \varphi$ uniformente en K, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Demostración: Ver Rivera [23].

Observación 1.1.3. El espacio $C_0^\infty(\Omega)$, dotado de las convergencias dada en la proposición 1.1.2, se llama ***Espacio de Funciones de Prueba*** y es denotado por $D(\Omega)$

Ejemplo 1. Sea

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Se tiene que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $sop(\psi) = \overline{]-1,1[} = [-1,1]$, entonces $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Ver Rivera [23].

Definición 1.1.4. Una función $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineal y continua es denominada ***Distribución***. El conjunto de las distribuciones es denotada por $D'(\Omega)$.

El conjunto de las distribuciones es un espacio vectorial el cual lo denotaremos por,

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ T \text{ lineal y continua}\}.$$

Definición 1.1.5. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$. Definimos

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ u \text{ medible y } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\right\}$$

la norma en $L^p(\Omega)$ esta dado por:

$$|u|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Cuando $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ medible y existe } M > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq M \text{ c.s. en } \Omega\Big\}$$

y

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = |u|_\infty = \inf\big\{M > 0;\ |u(x)| \leq M \text{ c.s. en } \Omega\big\}.$$

Observación 1.1.6. Cuando $p = 2$ tenemos que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert dotado con el producto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

el cual induce una norma

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Proposición 1.1.7. *El espacio $L^p(\Omega)$ es Banach, para todo $1 \leq p \leq \infty$.*
Demostracion: Ver Brézis [4].

Notacion. Sea $1 \leq p \leq \infty$, se denota por p' ***el exponente conjugado*** de p, es decir, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Teorema 1.1.8 (Desigualdad de Hölder). *Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y se tiene la siguiente desigualdad*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq |u|_{L^p(\Omega)}|v|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demostración: Ver Brézis [4]

Proposición 1.1.9 (Desigualdad de Hölder generalizada). *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funciones tal que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ donde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} \leq 1$. Entonces el producto $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ y se tiene la siguiente desigualdad*

$$|f|_{L^p(\Omega)} \leq |f_1|_{L^{p_1}(\Omega)}|f_2|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots |f_k|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demostración: Ver Brézis [4].

Proposición 1.1.10 (Desigualdad de interpolación). *Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$ entonces $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ y se tiene la siguiente desigualdad*

$$|u|_{L^r(\Omega)} \leq |u|^\theta_{L^p(\Omega)}|u|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

donde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$, $0 \leq \theta \leq 1$.
Demostración: Ver Adams [1].

Proposición 1.1.11 (Teorema de representación de Riesz). *Si $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ con $1 < p < \infty$ entonces existe una única $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que:*

$$\langle \varphi, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx;\ \forall v \in L^{p'}(\Omega) \text{ y } |u|_{L^{p'}(\Omega)} = |\varphi|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demostración: Ver Brézis [4].

Proposición 1.1.12. *Sea $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ entonces existe una única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx;\ \forall v \in L^1(\Omega)\ y\ |u|_{L^\infty(\Omega)} = |\varphi|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demostración: Ver Brézis [4].

Definición 1.1.13. Se dice que una función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable en Ω si

$$\int_K |u(x)|dx < \infty,\ \text{para todo conjunto compacto } K \subseteq \Omega.$$

El espacio de las funciones localmente integrable será denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$, es decir,

$$L^1_{loc}(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R}\ /\ u\ \text{ es localmente integrable}\Big\}.$$

Lema 1.1.14 (Lema Du Bois – Raymond)**.** *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0,\ \textit{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Entonces, $u = 0$ c.s en Ω.
Demostración: Ver Medeiros [15].

Definición 1.1.15. Sean V y H dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, con $V \subseteq H$. Se dice que V está continuamente inmerso en H cuando existe una aplicación continua e inyectora $j : V \to H$; siendo este el caso escribiremos $V \hookrightarrow H$.

Proposición 1.1.16. *Dado un subconjunto Ω abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega).$$

Demostración: Ver Kesavan [10].

1.2. Espacio de Sobolev

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}^+$ y $1 \leq p \leq \infty$. El ***Espacio de Sobolev*** $W^{m,p}(\Omega)$ se define por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega)\ /\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq m\Big\}$$

donde $D^\alpha u$ es la derivada en el sentido distribucional, dotado con la norma

$$|u|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx,\ \text{si } 1 \leq p < \infty$$

y

$$|u|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|_\infty,\ \text{si } p = \infty,$$

hace de $W^{m,p}(\Omega)$ un espacio de Banach. Ver Adams [1].
Notación. Cuando $p = 2$ el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ es denotado por $H^m(\Omega)$.

Proposición 1.2.1. *El espacio $H^m(\Omega)$ con el producto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x)dx$$

y con norma inducida

$$|u|^p_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx$$

es un espacio de Hilbert, reflexivo y separable.
Demostración: Ver Brézis [3].

Observación 1.2.2. En particular para $\Omega = \mathbb{R}^n$, tenemos

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ / \ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \ \forall |\alpha| \leq m \Big\}$$

con el producto interno

$$(u,v)_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

y con norma inducida

$$|u|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^2 dx \tag{1.1}$$

es un espacio de Hilbert, reflexivo y separable.

Proposición 1.2.3 (**Fórmula de Green**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado bien regular. Sean $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces pada cada $1 \leq i \leq n$ tenemos que*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i$$

donde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ denota el vector normal unitario exterior de Γ.
Si $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$ tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx = \int_\Omega (-\Delta u) v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma$$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ es la derivada direccional en la dirección del vector ν.
Demostración: Ver Kesavan [10].

Proposición 1.2.4. *Sean $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, entonces para cada $1 \leq i \leq n$ tenemos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx.$$

Demostración. Sea $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $u, v, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una sucesión $(u_m)_{m\geq 1} \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|u_m - u|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

De la desigualdad de Hölder se tiene:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (u_m - u) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \leq |u_m - u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} |\nabla v|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \ \text{si } m \to \infty,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx \right| \leq |\nabla u_m - \nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} |v|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \ \text{si } m \to \infty.$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_m \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx.$$

$\square$

Observación 1.2.5. De la proposición 1.2.4 tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u) v dx, \text{ para todo } u \in H^2(\mathbb{R}^n) \text{ y } v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Proposición 1.2.6 (**Derivación del producto**). *Sean u, $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y para todo $1 \leq i \leq n$ se cumple:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Demostración: Ver Brézis [3].

Proposición 1.2.7 (**Derivación de una composición**). *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \leq M$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Demostración: Ver Kesavan [10].

1.3. La Transformada de Fourier

Sea $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier de u denotada por $\widehat{u}$, es una función definida en $\mathbb{R}^n$ por,

$$\widehat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x,\xi)} u(\xi) d\xi,$$

donde $(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ es el producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Observación 1.3.1. La transformada de Fourier está bien definida pues la integral que aparece en la definición existe.

En efecto, como $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tenemos:

$$|\widehat{u}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i (x,\xi)}||u(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)| d\xi = |u|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Teorema 1.3.2. *La función $\widehat{u}$ es uniformemente continua.*
Demostración: Ver Kesavan [10].

Por $S(\mathbb{R}^n)$, representamos el espacio de Schwartz o espacio de funciones rápidamente decrecientes, definido por:

$$S(\mathbb{R}^n) = \Big\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \ / \lim_{|x| \to \infty} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| = 0; \ \forall \beta \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n \Big\}.$$

Proposición 1.3.3. *Se cumple*

$$S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \ 1 \leq p \leq \infty.$$

Demostración: Ver Medeiros [14].

Por $S'(\mathbb{R}^n)$, representaremos el espacio de las distribuciones temperadas, definidas por :

$$S'(\mathbb{R}^n) = \Big\{ T : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \ / \ T \text{ es lineal y continua} \Big\}.$$

Observación 1.3.4. Para $p = 2$, de la proposición 1.3.3 tenemos

$$L^2(\mathbb{R}^n) \cong [L^2(\mathbb{R}^n)]' \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n),$$

luego $L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.3.5. *Se cumple*

$$S(\mathbb{R}^n) \text{ es denso en } L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty.$$

Demostración: Ver Kesavan [10].

Teorema 1.3.6 (Plancherel). *Existe una única isometría $P : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ la cual es sobreyectiva y es tal que $P(u) = \widehat{u}$; $\forall u \in S(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración: Ver Kesavan [10].

Teorema 1.3.7. *Si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ y consideremos $\alpha \in \mathbb{N}^n$ entonces*

a) $D^\alpha \widehat{u} = (-2\pi i)^{|\alpha|}(\widehat{x^\alpha u})$,

b) $\widehat{D^\alpha u} = (2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{u}$.

Demostración: Ver Cavalcanti y Domingos [6].

Consideremos el siguiente espacio, definido para todo $m \in \mathbb{N}$

$$H = \Big\{ u \in S'(\mathbb{R}) \ / \ (1 + |x|^2)^{m/2}\ \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\}$$

dotado del producto interno

$$\big((u, v)\big)_H = \int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |x|^2\big)^m \widehat{u}(x)\widehat{v}(x)dx$$

y con norma

$$||u||_H^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |x|^2\big)^m |\widehat{u}(x)|^2 dx. \tag{1.2}$$

Lema 1.3.8. *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existen constantes C_1 y C_2 (dependiendo de m y n) tales que:*

$$C_1 \left(1 + |x|^2\right)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |x^\alpha|^2 \leq C_2 \left(1 + |x|^2\right)^m.$$

Demostración: Ver Kesavan [10].

Proposición 1.3.9. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, se cumple:*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) \ / \ (1 + |x|^2)^{m/2}\ \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\}.$$

Además las normas dadas en (1.1) *y* (1.2) *son respectivamente equivalentes.*

Demostración: Ver Cavalcanti y Domingos [6].

Definición 1.3.10. Sea $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ definimos:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) \ / \ (1 + |x|^2)^{s/2}\ \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\}$$

dotado del producto interno

$$\big(u, v\big)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |x|^2\big)^s \widehat{u}(x)\widehat{v}(x)dx$$

y con norma

$$|u|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + |x|^2\big)^s |\widehat{u}(x)|^2 dx$$

el cual hace de $H^s(\mathbb{R}^n)$ un espacio de Hilbert. Ver Cavalcanti y Domingos [6].

Proposición 1.3.11. *Sea* $\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *y* $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$-\Delta u + (\alpha(\cdot)+1)u = f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Entonces $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$|\widehat{u}|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|x|^2\big)|\widehat{u}(x)|^2 dx = |u|_{H^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

luego

$$\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.4}$$

Además

$$\begin{aligned} |\widehat{(\alpha(\cdot)+1)u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq |\widehat{(\alpha(\cdot)u)}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\widehat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= |\alpha(\cdot)u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

y como $\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\begin{aligned} |\widehat{(\alpha(\cdot)+1)u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq |\alpha|_\infty |u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= (|\alpha|_\infty + 1)|u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty, \end{aligned}$$

luego $\widehat{(\alpha(\cdot)+1)u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

De la ecuación (1.3) tenemos

$$\widehat{\Delta u} = \widehat{(\alpha(\cdot)+1)u} - \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.5}$$

Por el teorema 1.3.7b) se tiene $\widehat{\Delta u} = 4\pi^2|x|^2\widehat{u}$ y por la ecuación (1.5) se tiene

$$|x|^2\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

Por lo tanto, de (1.4) y (1.6) se tiene $(1+|x|^2)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. □

Definición 1.3.12. Sean V y H dos espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, con $V \subseteq H$. El operador inmersión

$$j : V \to H \text{ es definido por } j(u) = u, \text{ para todo } u \in V$$

a) La inmersión $j : V \to H$, denotado $V \hookrightarrow H$, es continua si existe $C > 0$ tal que

$$|u|_H \leq C|u|_V, \text{ para todo } u \in V. \tag{1.7}$$

b) La inmersión $V \hookrightarrow H$ es llamada compacta si, y solamente si j es compacta, es decir, vale (1.7) y cada sucesión acotada (u_m) en V posee una subsucesión (u_{m_k}) la cual es convergente en H.

Teorema 1.3.13. *Sea* $m \in \mathbb{N}$ *y* $1 \leq p < \infty$

a) Si $mp < n$ *y* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$, *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$,

b) Si $mp = n$, *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q \in [p, +\infty)$,

c) Si $mp > n$, *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: Ver Kesavan [10].

Observación 1.3.14. Del teorema (1.3.13) se tiene:

a) $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{R}^n)$, para $n > 2$, $1 \leq p \leq \dfrac{n}{n-2}$,

b) $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, para todo $q \geq 2$,

c) $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$.

1.4. Espacio de Funciones Vectoriales

Sea V un espacio de Banach y $T > 0$ un número real.

Definición 1.4.1. La función $u :]0,T[\to V$ es llamada ***medible***, cuando para cada $f \in V'$ (V' es el dual de V) la función numérica

$$\langle f, u(t)\rangle_{V'\times V} \text{ es medible – Lebesgue en }]0,T[$$

con $\langle f, u(t)\rangle_{V'\times V}$ se denota la dualidad entre V y V'.

Definición 1.4.2. Una función $u :]0,T[\to V$ es integrable en el sentido de Bochner en $]0,T[$, si u es medible y la función $t \mapsto |u(t)|_V$ es integrable – Lebesgue en $]0,T[$.

Observación 1.4.3. Cuando u es Bochner – integrable, la integral de Bochner de u se denota por $\int_0^T u(t)dt$ el cual es un vector de V caracterizado por:

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle_{V\times V'} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{V\times V'}\, dt,\ \forall f \in V'.$$

Definición 1.4.4. Sea $1 \leq p < \infty$, se denota con $L^p(0,T;V)$ el espacio vectorial de (clases de) funciones $u :]0,T[\to V$ "medibles" tales que $t \mapsto |u(t)|_V^p$ es integrable – Lebesgue en $]0,T[$.
En $L^p(0,T;V)$ definimos la norma

$$|u|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T |u(t)|_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

dotado de ésta norma, $L^p(0,T;V)$ resulta ser un espacio de Banach.

Observación 1.4.5. Si $p = 2$ y V es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T;V)$ resulta ser un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T \big(u(t), v(t)\big)_V dt$$

donde $\big(u(t), v(t)\big)_V$ denota el producto interno en V.

Definición 1.4.6. Si $p = \infty$, se define:

$$L^\infty(0,T;V) = \Big\{T :]0,T[\to V \ /\ u \text{ es medible y } \sup_{t\in]0,T[} \text{ess}|u(t)|_V < \infty\Big\}.$$

En $L^\infty(0,T;V)$ definimos la norma

$$|u|_{L^\infty(0,T;V)} = \sup_{t\in]0,T[} \text{ess}|u(t)|_V$$

con esta norma $L^\infty(0,T;V)$ resulta ser un espacio de Banach.

Definición 1.4.7. Sea $m \in \mathbb{N}$, el espacio $C^m([0,T];V)$ consiste de todas las funciones continuas $u : [0,T] \to V$ tal que tiene derivadas continuas hasta el orden m sobre $[0,T]$ y cuya norma es dada por

$$|u|_{C^m([0,T];V)} = \sum_{j=0}^{m} \max_{0\leq t\leq T} |u^{(j)}(t)|.$$

Aquí las derivadas a derecha e izquierda en los puntos de frontera $t = 0$ y $t = T$ existen.

Proposición 1.4.8. *Sean X e Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ entonces*

a) $C^m([0,T];X)$ con su respectiva norma es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$,

b) $C^m([0,T];X)$ es denso en $L^p(0,T;X)$ y la inmersión

$$C^m([0,T];X) \hookrightarrow L^p(0,T;X) \text{ es continua,}$$

c) $L^p(0,T;X)$ separable siempre que X es separable con $1 \leq p < \infty$.

d) Si la inmersión $X \hookrightarrow Y$ es continua, entonces la inmersión $L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y)$, $1 \leq q \leq p < \infty$ es también continua.

Demostración: Ver Edwards [7].

Definición 1.4.9. Una sucesión $(u_m)_{m\geq 1}$ en un espacio de Banach V es llamada ***débilmente convergente*** para u, denotado por

$$u_m \rightharpoonup u \text{ cuando } m \to \infty$$

si y solamente si

$$\langle f, u_m \rangle \to \langle f, u \rangle \text{ cuando } m \to \infty, \text{ para todo } f \in V'.$$

Teorema 1.4.10. *Toda sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo tiene una subsucesión débilmente convergente.*
Demostración: Ver Brézis [4]

Observación 1.4.11. Recordemos que, $u_m \to u$ cuando $m \to \infty$ en un espacio de Banach V significa que $|u_m - u|_V \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esta convergencia usual en V es comúnmente llamada convergencia fuerte en V.

Definición 1.4.12. Sea V un espacio de Banach. Una sucesión $(f_m)_{m\geq 1}$ en un espacio de Banach V', diremos que ***converge débil**** a f, denotado por

$$f_m \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ cuando } m \to \infty$$

si y solamente si

$$\langle f_m, u \rangle \to \langle f, u \rangle \text{ cuando } m \to \infty, \text{ para todo } u \in V.$$

Teorema 1.4.13. *Sea V un espacio de Banach separable. Entonces para cada sucesión acotada $(f_m)_{m\geq 1}$ en V' posee una subsucesion convergente débil*.*
Demostración: Ver Brézis [4].

Lema 1.4.14 (Lions). *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ acotado; (g_k) y g funciones de $L^p(\Omega)$, con $1 < p < \infty$, tal que:*

a) (g_k) es acotada en $L^p(\Omega)$,

b) $g_k \to g$ casi siempre en Ω.

Entonces $g_k \rightharpoonup g$ débilmente en $L^p(\Omega)$.
Demostración: Ver J. Lions [12].

Lema 1.4.15 (Lions – Aubin). *Sean B_0, B y B_1 espacios de Banach tal que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ donde B_0, B y B_1 son reflexivos, definamos*

$$W = \Big\{u;\ u \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\Big\},$$

donde $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ y $T < \infty$ con la norma definida por

$$|u|_W = |u|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + |u'|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Entonces W es un espacio de Banach y la inmersión $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(0,T;B)$ es compacta.
Demostración: Ver J. Lions [10].

1.5. Algunos resultados importantes

Teorema 1.5.1 (Teorema de Lax – Milgram). *Sea V un espacio de Hilbert. Si $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, V – coerciva y continua, entonces para todo $f \in V'$, existe un único $u \in V$ tal que*

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in V \ \textit{además} \ |u|_V \leq \frac{1}{c}|f|_{V'}.$$

Demostración: Ver Brézis [4].

Observación 1.5.2. El teorema de Lax – Milgram, significa lo siguiente: Si $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal, V – coerciva y continua, entonces existe un isomorfismo lineal $A : V \to V'$ tal que $a(u,v) = \langle Au, v\rangle, \forall u, v \in V$.

Teorema 1.5.3 (Teorema de Representación de Riesz – Fréchet). *Sea H un espacio de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe una única $f \in H$ tal que $\langle \varphi, v\rangle = (f, v)$, $\forall v \in H$. Además, se verifica $|f|_H = |\varphi|_{H'}$.*
Demostración: Ver Brézis [4].

Observación 1.5.4. El teorema de Representación de Riesz – Fréchet, significa que la aplicación $\varphi : H' \to H$ es un isomorfismo isométrico que permite identificar H con H'.

Proposición 1.5.5 (Desigualdad de Young). *Sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \ \textit{para todo} \ a, b \geq 0.$$

Demostración: Ver Medeiros y Mello [14].

Proposición 1.5.6. *Si $1 \leq p < \infty$ y $a, b \geq 0$ entonces*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Demostración: Ver Adams [1].

Teorema 1.5.7 (Propiedad de la continución única). *Supongamos que $u \in L^2(\Omega \times (0,T))$ y u solución débil de $u_{tt} - \Delta u + v(x,t)u = 0$ en $\Omega \times (0,T)$ tal que $T > diam(\Omega)$ y $v \in L^\infty(0,T,L^{n-1}(\Omega))$, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $u = 0$ en algún conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}^n / a(x) > 0\right\} \times (0,T)$ entonces $u \equiv 0$*
Demostración: Ver Ruiz A. [24].

Lema 1.5.8 (Gronwall). *Sea $m \in L^1(0,T)$ tal que $m \geq 0$ casi siempre en $]0,T[$ y sea $a \geq 0$. Consideremos $\varphi \in C([0,T],\mathbb{R})$ tal que*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^T m(s)\varphi(s)ds, \ \textit{para todo} \ t \in]0,T[,$$

entonces

$$\varphi(t) \leq a \ exp\left(\int_0^T m(s)ds\right), \ \textit{para todo} \ t \in]0,T[.$$

Demostración: Ver Brézis. [4].

Teorema 1.5.9 (Punto Fijo de Banach). *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $P : X \to X$ una aplicacion tal que*

$$d(P(u), P(v)) \leq kd(u,v), \ \forall \ u, v \in X$$

para algún k fijo tal que $0 < k < 1$. Entonces P tiene un único punto fijo, es decir, existe único $u \in X$ tal que $Pu = u$.
Demostración: Ver Kreyszig A. [8].

1.6. Teoría de Semigrupos

1.6.1. Semigrupos de clase C_0

Sean X e Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$
Por $L(X, Y)$ representaremos al conjunto de los operadores lineales acotados de X en Y con dominio $D(A)$, es decir

$$L(X, Y) = \{A : D(A) \subset X \to Y/\ T \text{ es lineal y acotado}\}$$

dotado con la norma

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\{x \in X:\ |x|_X \leq 1\}} |Ax|_Y$$

es un espacio de Banach.

Definición 1.6.1. Sea X un espacio de Banach. Diremos que una aplicación $S : \mathbb{R}^+ \to L(X)$ es un ***semigrupo de operadores lineales acotado de*** X si:

a) $S(0) = I$, donde I es el operador identidad de $L(X)$

b) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$

Diremos que el semigrupo S es de clase C_0 si

c) $\lim\limits_{t \to 0^+} \big\|(S(t) - I)x\big\| = 0$, $\forall x \in X$.

Teorema 1.6.2. *Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0, entonces existen $w \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt},\ \ \forall t \geq 0.$$

Demostración: Ver Pazy A. [17].

Observación 1.6.3. Tomando $w = 0$, el teorema (1.6.2) afirma que existe una constante $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$. En este caso diremos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo uniformente acotado de clase C_0. Además si $w = 0$ y $M = 1$ diremos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de contracciones de clase C_0, es decir, $\|S(t)\| \leq 1,\ \forall t \geq 0$.

Definición 1.6.4. Sea X un espacio de Banach y sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0. El operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$, definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X :\ \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\} \text{ y } Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x,\ \forall x \in D(A)$$

es el generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ donde $D(A)$ es el dominio de A.

Teorema 1.6.5. *Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Entonces*

a) Para todo $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{dS(t)}{dt} x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

b) Para todo $x \in D(A)$,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau.$$

c) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x.$$

d) Para todo $x \in X$, $\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A)$ y

$$S(t)x - x = A\int_0^t S(\tau)x d\tau.$$

Demostración: Ver Pazy A. [17].

Corolario 1.6.6. *El generador de un semigrupo de clase C_0 es un operador cerrado con dominio denso en X.*
Demostración: Ver Pazy A. [17].

1.6.2. Operadores maximales monótonos

Sea X un espacio de Banach, X' el dual de X y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la dualidad entre X e X'. Para cada $x \in X$, definimos el conjunto

$$J(x) = \left\{x' \in X' / \ \langle x, x'\rangle = |x|^2 = \|x'\|^2\right\}.$$

Por el teorema de Hahn – Banach (Ver Brézis [4]), $J(x) \neq \phi,\ \forall x \in X$.

Definición 1.6.7. Un operador $A : D(A) \subseteq X \to X$ ***es disipativo*** si para todo $x \in D(A)$ existe $x' \in J(x)$ tal que

$$Re\langle Ax, x'\rangle \leq 0.$$

Teorema 1.6.8 (Lumer – Phillips). *Sea X un espacio de Banach y $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal*

a) Si A es disipativo e $R(\lambda_0 I - A) = X$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones en X.

b) Si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones en X, entonces $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ y A es disipativo. Más aún, $\forall x \in D(A)$, se tiene que $Re\langle Ax, x'\rangle \leq 0$, $\forall x' \in J(x)$.

Demostración: Ver Pazy A. [17].

Definición 1.6.9. Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal no acotado. Diremos que A es ***monótono*** si

$$(Av, v) \geq 0,\ \forall v \in D(A).$$

Observación 1.6.10. Debido al teorema de representacion de Risz – Fréchet la definición de A operador monótono es equivalente a la definición de $-A$ disipativo.
Entonces el problema de Cauchy dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = u_0, & u_0 \in D(A) \end{cases}$$

puede ser estudiado a partir de ahora, sustituyendo A por $-A$.
Es decir, se va a considera el siguiente problema de valor inicial para un operador monótono A

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \ t > 0 \\ u(0) = u_0, \ u_0 \in D(A). \end{cases}$$

Definición 1.6.11. Sea H un espacio de Hilbert. Diremos que el operador A es ***maximal mónotono*** si A es monótono y también $R(I + A) = H$, es decir, para todo $f \in H$ existe $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$.

Proposición 1.6.12. *Sea A un operador maximal monótono. Entonces*

a) $D(A)$ es denso en H,

b) A es cerrado.

Demostración: Ver Brézis [4].

Teorema 1.6.13 (Hille – Yosida). *Sea A un operador maximal monónoto en un espacio de Hilbert H. Entonces, para todo $u_0 \in D(A)$ existe una única función*

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad en \ [0, +\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Además se verifica

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad y \quad \left| \frac{du(t)}{dt} \right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \ \forall t \geq 0.$$

Demostración: Ver Brézis [4].

1.6.3. Problema Semilineal Abstracto

Consideremos el problema de valor inicial abstracto dado por,

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(u(t)), \ t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

donde A es el generador de un semigrupo contracción sobre un espacio de Banach H y $F : H \to H$ una función continua.

Definición 1.6.14. Diremos que u es una solución clásica o fuerte del problema de valor inicial (1.8) si $u \in C^1([0, T]; H) \cap C([0, T]; D(A))$.

Observación 1.6.15. Sea $u = u(t)$ con $t \geq 0$ una solución fuerte de (1.8) y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de contracciones generado por el operador A. Entonces usando la teorema (1.6.5), la función $g(s) = S(t-s)u(s)$ es diferenciable para $0 \leq s \leq t$, además

$$\begin{aligned}\frac{dg(s)}{ds} &= AS(t-s)u(s) + S(t-s)\frac{du(s)}{ds} \\ &= AS(t-s)u(s) + S(t-s)(-Au(s) + F(u(s)) \\ &= AS(t-s)u(s) - S(t-s)Au(s) + S(t-s)F(u(s)) \\ &= S(t-s)F(u(s))\end{aligned}$$

como $F : H \to H$ es continua, integrando desde 0 a t se tiene

$$\int_0^t \frac{dg(s)}{ds} = \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds.$$

Por lo tanto

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds. \tag{1.9}$$

Definición 1.6.16. Si $u \in C([0,T]; H)$ verifica el problema de valor inicial (1.9), diremos que u es una solución débil o generalizada de (1.8).

Definición 1.6.17. Diremos que una aplicación $F : H \to H$ es ***localmente Lipschitziana***, si para cada constante positiva M existe una constante L_M tal que

$$|F(u) - F(v)| \leq L_M|u - v|$$

para todo $u, v \in H$ tal que $|u| \leq M$ y $|v| \leq M$.

Lema 1.6.18. *Sean $T > 0$ y $u_0 \in H$. Si u y $v \in C([0,T]; H)$ son dos soluciones de* (1.9)*, entonces $u = v$*

Demostración. Como u y v son dos soluciones de (1.9) entonces

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds,$$

$$v(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds.$$

Luego

$$\begin{aligned}|u(t) - v(t)| &= \left|\int_0^t S(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))ds\right| \\ &\leq \int_0^t |S(t-s)||F(u(s)) - F(v(s))|ds \\ &\leq L_M \int_0^t |u(s) - v(s)|ds\end{aligned}$$

y por la desigualdad de Gronwall obtenemos $u = v$. □

Teorema 1.6.19. *Sea $F : H \to H$ localmente Lipschitziana, entonces para cada $u_0 \in H$, existe una única solución generalizada de* (1.8) *definida en* $[0,T]$. *Mas aún si $u_0 \in D(A)$, la solución es clásica.*

Demostración. Sea $K = \big\{u \in C([0,T];H) \ / \ |u(t)| \leq |u_0| + 1, \ \forall t \in [0,T]\big\}$, definamos

$$\begin{aligned} \phi_u : \quad & K \to K \\ & u \mapsto \phi_u(t) \ = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds \end{aligned}$$

donde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo de contracciones generado por el operador A.
Afirmación 1: ϕ está bien definido
En efecto,

$$\begin{aligned} |\phi_u(t)| &\leq |S(t)||u_0| + \int_0^t |S(t-s)|\big(|F(u(s)) - F(0)| + |F(0)|\big)ds \\ &\leq |u_0| + \int_0^t \big(L_M|u(s)| + |F(0)|\big)ds \\ &\leq |u_0| + \int_0^t \big(L_M(|u_0| + 1) + |F(0)|\big)ds \\ &= |u_0| + T\big(L_M(|u_0| + 1) + |F(0)|\big). \end{aligned}$$

Considerando un T suficientemente pequeño tal que

$$T\big(L_M(|u_0| + 1) + |F(0)|\big) < 1$$

resulta $|\phi_u(t)| \leq |u_0| + 1$. Por lo tanto $\phi_u \in K$.
Afirmación 2: $\phi_u : K \to K$ es una contracción.
En efecto, sea $u, v \in K$ entonces

$$\begin{aligned} |\phi_u(t) - \phi_v(t)| &= \left|\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds - \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds\right| \\ &\leq \int_0^t |F(u(s)) - F(v(s)|ds \\ &\leq L_M \int_0^t |u(s) - v(s)|ds \\ &\leq TL_M|u(s) - v(s)| \\ &\leq k|u(s) - v(s)|, \end{aligned}$$

donde $k = T(L_M(|u_0| + 1) + |F(0)|) < 1$. Por el teorema del Punto Fijo de Banach, ϕ_u tiene un único punto fijo, es decir, existe una solución generalizada de (1.8) definida en $[0,T]$. $\square$

Sean $T_1 < T_2$ y u_1, u_2 dos soluciones de (1.8) sobre $[0,T_1]$ y $[0,T_2]$ respectivamente, por unicidad tenemos que $u_1 = u_2$ sobre $[0,T_1]$. Ahora vamos a considerar la familia $(u_i)_{i\in I}$ de todas las soluciones de (1.8) definidas en una familia de intervalos $([0,T_i])_{i\in I}$
Definamos $T_{max} = \sup\limits_{i\in I} T_i$, vamos a definir la función $u(t)$ sobre $[0, T_{max}[$ por

$$u(t) = u_i(t) \text{ si } t \in [0,T_i], \ i \in I$$

esta función está bien definida por la unicidad en cada intervalo $[0,T_i]$. Esta solución es llamada ***solución maximal de*** (1.8).

Teorema 1.6.20. *Si u es una solución maximal de (1.8), entonces*

$$T_{max} = +\infty \quad \text{ó} \quad T_{max} < +\infty \ y \lim_{t \to t_{max}} |u(t)| = +\infty.$$

En el primer caso, diremos que u es una solución global y en el segundo caso, diremos que la solución explota en tiempo finito.

Demostración. Supongamos que $T_{max} < +\infty$ y $\lim_{t \to t_{max}} |u(t)|$ no es infinito, luego existe una sucesión $t_j \to T_{max}$ tal que $|u(t_j)| \leq C < \infty$. Para el valor inicial $u(t_j)$ tenemos que existe una solución v de (1.8), entonces definamos:

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si} \quad t \in [0, T_j] \\ v(t - t_j) & \text{si} \quad t \in [T_j, T_j + \delta] \end{cases}$$

es una solución de (1.8), donde $\delta > 0$ tal que $\delta(F(0) + L((C + 1)) < 1$. Si consideramos j suficientemente grande, se tendrá $t_j + \delta > T_{max}$ por que $t_j \to T_{max}$. Por lo tanto w es una solución en un intervalo mayor que el intervalo $[0, T_m]$ lo cual es una contradicción ya que u es solucion maximal. $\square$

Capítulo 2

Existencia y unicidad de la solución regular

En este capítulo estudiamos la existencia y unicidad de la solución regular para la ecuación (0.1) con las hipótesis (0.2) - (0.5) y datos iniciales $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$.

2.1. Existencia y unicidad de la solución regular

Teorema 2.1.1. *Sean $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ y verificando las condiciones (0.2) - (0.5). Entonces existe una única solución $u : [0, T_{max}[\to \mathbb{R}$ tal que:*

$$u \in C([0, T_{max}[; H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T_{max}[; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0, T_{max}[; L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Demostración.

Existencia de la solución regular

Consideremos el espacio $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ con el producto interno

$$(U_1, U_2)_H = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + \alpha(x) u_1 u_2 + v_1 v_2) dx$$

donde $U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \in H$.

Con la norma inducida

$$||U||_H = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |v|^2) dx$$

donde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

La ecuación (1) puede ser reescrita en la forma de un sistema

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = \Delta u - \alpha(x) u - f(u) - a(x) v, \end{cases} \tag{2.1}$$

que, a su vez, puede ser enmarcado en un sistema semilineal abstracto

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U) \\ U(0) = U_0 \in D(A) \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(u) - a(x)v \end{pmatrix}$ y el operador A definido por

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ (-\Delta + \alpha(\cdot))I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -v \\ -\Delta u + \alpha(x)u & 0 \end{pmatrix}$$

con dominio $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$.

Afirmación 2.1.1. El operador $A : D(A) \subset H \to H$ es un operador maximal monótono en $D(A)$.

En Efecto,

i) A **monótono:** Sea $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$, se tiene:

$$\begin{aligned} (AU, U)_H &= \left(A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha(x)u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [-\nabla v \cdot \nabla u - \alpha(x)vu + ((-\Delta u) + \alpha(x)u)v] dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla v \cdot \nabla u + (\Delta u)v) dx \end{aligned}$$

y por la observación 1.2.5, se tiene $(AU, U)_H = 0 \geq 0$.

ii) A **maximal:** Sea $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ debemos demostrar que existe una única $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ tal que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

En efecto, de la igualdad (2.3), se obtiene

$$\begin{cases} u - v = f \\ v - \Delta u + \alpha(x)u = g \end{cases}$$

sumando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$-\Delta u + (\alpha(x) + 1)u = f + g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Definamos la forma bilineal $a : H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ((\alpha(\cdot) + 1), v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

y cumple lo siguiente:

a) a **es una forma bilineal**; debido a que el producto interno es bilineal en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

b) a **es continua**

En efecto,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= |(\nabla u, \nabla v) + ((\alpha(\cdot) + 1)u, v))| \\ &= |(\nabla u, \nabla v) + (\alpha(\cdot)u, v) + (u, v)| \\ &= |(u, v)_{H^1(\mathbb{R}^n)} + (\alpha(\cdot)u, v)| \\ &\leq |(u, v)_{H^1(\mathbb{R}^n)}| + |(\alpha(\cdot)u, v)| \\ &\leq |u|_{H^1(\mathbb{R}^n)} |v|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + |\alpha|_\infty |u|_{H^1(\mathbb{R}^n)} |v|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq (1 + |\alpha|_\infty) |u|_{H^1(\mathbb{R}^n)} |v|_{H^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

c) a es coerciva
En efecto,

$$\begin{aligned} |a(u,u)| &= |(\nabla u, \nabla u) + ((\alpha(\cdot)+1)u, u))| \\ &= |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |(\alpha(\cdot)u, u)| \\ &\geq |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha_0 |u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\geq |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (1+\alpha_0)|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\geq C|u|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

donde $C=$min$\{1, \alpha_0+1\}$.

Dado $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$\begin{array}{rccl} L: & H^1(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \langle L, v\rangle :\ = (\psi, v) \end{array}$$

entonces L es una forma lineal y continua, esto es, $L \in (H^1(\mathbb{R}^n)'$. Para está L, debido al teorema 1.5.1 (de Lax - Milgram) existe una única $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$a(u,v) = \langle L, v\rangle := (\psi, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}; \ \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Para todo $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, tenemos:

$$\begin{aligned} (\psi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \langle L, \varphi\rangle \\ &= a(u, \varphi) \\ &= (\nabla u, \nabla \varphi) + ((\alpha(\cdot)+1)u, \varphi) \\ &= (-\Delta u, \varphi) + ((\alpha(\cdot)+1)u, \varphi) \\ &= (-\Delta u + (\alpha(\cdot)+1)u, \varphi) \end{aligned}$$

luego $-\Delta u + (\alpha(\cdot)+1)u = \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y por la proposición 1.3.11 resulta que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto dado $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ existe una única $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ tal que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ y esto prueba que A es maximal.

Afirmación 2.1.2. El operador $F: H \to H$ dado por:

$$F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) + a(x)v \end{pmatrix} \text{ para todo } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H$$

está bien definido.

En efecto,

Sea $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H$ sólo nos faltaría comprobar que $f(u) + a(x)v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por las hipótesis (0.3), (0.4) y de la desigualdad $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[(1+|u|^{p-1})|u|\right]^2 dx \\ &\leq 2C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2p} dx\right) \\ &= 2C(|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |u|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

De la inmersión de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{R}^n)$, existe una constante $\tilde{C}$ tal que

$$|u|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C}|u|_{H^1(\mathbb{R}^n)}, \text{ para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^n). \tag{2.5}$$

De las desigualdades (2.4) y (2.5) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2 dx \leq 2C(|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \tilde{C}|u|^{2p}_{H^1(\mathbb{R}^n)}) < \infty. \tag{2.6}$$

Además de la hipótesis (0.2) se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |a(x)v|^2 dx \leq |a|^2_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 dx < \infty. \tag{2.7}$$

Por lo tanto de (2.6) y (2.7) se prueba la buena definición de F.

Afirmación 2.1.3. El operador $F : H \to H$ es localmente lipschitziano.

En efecto,

Sean $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in H$ y $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H$ tal que

$$||U_1||_H \leq M \text{ y } ||U_2||_H \leq M \text{ para algún } M > 0 \tag{2.8}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\|F(U_1) - F(U_2)\|_H &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ f(u_1) + a(x)v_1 - f(u_2) - a(x)v_2 \end{pmatrix} \right\|_H \\
&\leq |f(u_1) - f(u_2)|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |a(x)(v_1 - v_2)|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \left(1 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1}\right) |u_1 - u_2| \right\}^2 dx + |a|^2_\infty |v_1 - v_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq 3C^2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_1 - u_2|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_1|^{2(p-1)} |u_1 - u_2|^2 dx \right. \\
&\qquad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} |u_2|^{2(p-1)} |u_1 - u_2|^2 dx \right) + |a|^2_\infty |v_1 - v_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Desde que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1$, usando la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|F(U_1) - F(U_2)\|_H &\leq 3C^2 \left(|u_1 - u_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |u_1|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} |u_1 - u_2|^2_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \right. \\
&\qquad \left. + |u_2|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} |u_1 - u_2|^2_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \right) + |a|^2_\infty |v_1 - v_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

De (2.5) y (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|F(U_1) - F(U_2)\|_H &\leq 3C^2 \left(|u_1 - u_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \tilde{C}^{2p} M^{2(p-1)} |u_1 - u_2|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \right. \\
&\qquad \left. + \tilde{C}^{2p} M^{2(p-1)} |u_1 - u_2|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \right) + |a|^2_\infty |v_1 - v_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq L_M \left(|u_1 - u_2|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + |v_1 - v_2|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \\
&\leq L_M \|U_1 - U_2\|_H,
\end{aligned}$$

donde $L_M = \max\left\{ 3C^2(1 + \tilde{C}^{2p} M^{2(p-1)}), |a|^2_\infty \right\}$.

Como F es localmente lipschitziana y $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A)$ por el teorema 1.6.19 existe

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C([0, T_{max}[; H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T_{max}[; H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n))$$

solución clásica de (0.1), de donde resulta

$$u \in C([0, T_{max}[; H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T_{max}[; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0, T_{max}[; L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Unicidad de la solución regular

Consideremos u y v dos soluciones de la ecuación (0.1) y sea $w = u - v$ se tiene:

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + \alpha(x)w + f(u) - f(v) + a(x)w_t = 0, \\ w(0) = w_t(0) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Multiplicando la ecuación (2.9) por w_t e integrando sobre $\mathbb{R}^n$ obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\nabla w|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\alpha^{1/2}(\cdot)w|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(u) - f(v)||w_t| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |a(x)||w_t|^2 dx.$$

Por hipótesis $a \in L^\infty_+(\mathbb{R}^n)$ se obtiene:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\nabla w|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\alpha^{1/2}(\cdot)w|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(u) - f(v)||w_t| dx + |a|_\infty |w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.10}$$

De la primera integral del segundo miembro de (2.10) y de la hipótesis (0.4), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(u) - f(v)||w_t| dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right) |u - v||w_t| dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right) |w||w_t| dx \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |w||w_t| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p-1}|w||w_t| dx \right. \\ &\qquad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p-1}|w||w_t| dx \right). \end{aligned}$$

Como $\frac{p-1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} = 1$, por la desigualdad de Hölder generalizado se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(u) - f(v)||w_t| dx \leq C \left(|w|_{L^2(\mathbb{R}^n)}|w_t|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + m(t)|w|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}|w_t|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right),$$

donde $m(t) = |u|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + |v|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}$.

De la desigualdad (2.5) se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(u) - f(v)||w_t| dx \leq C \left(|w|_{H^1(\mathbb{R}^n)}|w_t|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \tilde{C}^2 m(t)|w|_{H^1(\mathbb{R}^n)}|w_t|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Usando la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(u) - f(v)||w_t|dx \leq C\tilde{C}^2 m(t) \left(|w|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + |w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right). \tag{2.11}$$

De las desigualdades (2.10) y (2.11) se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\nabla w|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\alpha^{1/2}(\cdot)w|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \leq \widehat{C} m(t) \left(|w|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + |w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right).$$

Integrando desde 0 hasta t se tiene

$$|w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\nabla w|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\alpha^{1/2}(\cdot)w|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \widehat{C} \int_0^t m(t) \left(|w|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + |w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) dt.$$

Como $\alpha(x) \geq \alpha_0$, mayorando por la izquierda en la desigualdad precedente:

$$|w|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + |w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\widehat{C}}{K} \int_0^t m(t) \left(|w|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + |w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) dt,$$

donde $K = \min\{1, \alpha_0\}$.
Por la desigualdad de Gronwall, resulta:

$$|w|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + |w_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

De donde obtenemos $w = 0$, es decir, $u = v$.

2.2. Prolongamiento de la solución regular

En esta sección obtendremos la solución global del problema (0.1); para ello extenderemos nuestra solución regular obtenida anteriormente, aplicando el teorema 1.6.20.

Si multiplicamos la ecuación (0.1) por u_t e integrando sobre $\mathbb{R}^n$, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)u^2 \right] dx \right) + \int_{\mathbb{R}^n} f(u)u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)u_t^2 dx = 0.$$

Por la hipótesis (0.3) la función $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$, $\forall s \in \mathbb{R}$, está bien definida. Luego

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)u^2 \right] dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx \right) = -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)u_t^2 dx. \tag{2.12}$$

Definimos la energía asociada al sistema (0.1) como:

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla u(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|u(x,t)|^2 \right] dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x,t))dx.$$

De la ecuación (2.12) se tiene

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dx \leq 0, \tag{2.13}$$

Integrando (2.13) desde t_1 hasta t_2 se obtiene

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt, \text{ para todo } t_2 > t_1 \geq 0.$$

Por lo tanto

$$E(t_2) \leq E(t_1), \text{ para todo } t_2 > t_1 \geq 0,$$

lo que demuestra que la energía asociada al sistema (0.1) es no creciente, para todo $t \in [0, +\infty[$.

Afirmación 2.2.1. $T_{max} = +\infty$

En efecto, si suponemos que $T_{max} < +\infty$ entonces por el teorema 1.6.20 se tiene

$$\lim_{t \to t_{max}} \|U(t)\|_H = +\infty.$$

Pero

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_H = \int_{\mathbb{R}^n} \Big[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)|u|^2 \Big] dx &\leq E(t) \\ &\leq E(0) < \infty, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto $T_{max} = +\infty$. Luego, la solución regular existen en todo el intervalo $[0, +\infty)$.

Capítulo 3

Decaimiento exponencial de la solución regular

En este capítulo estudiaremos el decaimiento exponencial de la energía asociada a la ecuación (0.1) con las hipótesis (0.2) - (0.5) y datos iniciales $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$.

Del capítulo anterior deducimos

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Big[|\nabla u(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|u(x,t)|^2\Big]dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x,t))dx,$$

la energía asociada al sistema (0.1) y por (2.13) se tiene:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)u_t^2(x,t)dxdt,$$

integrando desde 0 hasta T se obtiene:

$$E(T) = E(0) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt. \tag{3.1}$$

Teorema 3.1. *Consideremos las hipótesis* (0.2) – (0.5)*. Supongamos que f cumple una de las siguientes condiciones:*

a) **(El caso globalmente lipschiptziana)** $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *y una de las siguientes dos condiciones son verdaderas:*

$$\exists \quad \lim_{s\to+\infty} f'(s) = f'_+ \,; \quad \exists \quad \lim_{s\to-\infty} f'(s) = f'_- \tag{3.2}$$

$$\exists \quad \lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = l \tag{3.3}$$

b) **(El caso súper lineal)** *Existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(s)s \geq (2+\delta)F(s), \quad \textit{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Entonces existe alguna constante $C > 1$ y $\gamma > 0$ tal que para toda solución regular $u = u(x,t)$ de (0.1) *con datos iniciales en $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ se verifica*

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Notación. En lo que sigue, para simplificar la notación, omitiremos las variables x y t de las funciones dentro de los signos de integración y adoptaremos el convenio que dos índices repetidos indicarán sumatoria, así como indicamos:

$$\int = \int_{\mathbb{R}}; \qquad \iint = \int_0^T\int_{\mathbb{R}} dxdt.$$

$\displaystyle\int_\Omega = \int_\Omega dx; \qquad \iint_\Omega = \int_0^T\int_\Omega dxdt$ para todo subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$.

$\displaystyle\Big(\cdot\Big)\Big|_0^T = \cdot(T) - \cdot(0), \qquad \frac{\partial\cdot}{\partial\nu} =$ derivada normal; $\quad divq$=divergencia de $\displaystyle q = \frac{\partial q_k}{\partial x_k}$.

$\displaystyle\iint_{S_R} = \int_0^T\int_{S_R} d\Gamma dt$ donde $S_R = \big\{x\in\mathbb{R}^n/|x| = R\big\}$ y $d\Gamma$ denota la medida de superficie sobre Γ.

Antes de dar la demostración del teorema 3.1 veremos previamente algunos lemas y proposiciones.

Lema 3.1. *Existe una constante $C>0$ tal que la siguiente desigualdad es verdadera para todo $T>0$ y toda solución regular de* (0.1)

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega_{2R}}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2\Big]+\iint_{\Omega_{2R}}F(u)\le C\left\{\iint a(x)|u_t|^2+|u|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))}+E(T)\right\}.$$

Demostración. Sea $\varphi\in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, multiplicando la ecuación (0.1) por $\varphi(x)u$ e integrando sobre $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ obtenemos:

$$\iint u_{tt}\varphi u+\iint(-\Delta u)\varphi u+\iint\alpha(x)\varphi u^2+\iint f(u)\varphi u+\iint a(x)u_t\varphi u=0. \tag{3.5}$$

Usando Fubini e integral por parte en la primera integral y en la última integral de la ecuación (3.5) se tiene:

$$\iint u_{tt}\varphi u=\Big(\int u_t\varphi u\Big)\Big|_0^T-\iint u_t\frac{\partial(\varphi u)}{\partial t}=\Big(\int u_t\varphi u\Big)\Big|_0^T-\iint|u_t|^2\varphi,$$

$$\iint a(x)u_t\varphi u=\Big(\int\frac{1}{2}|u|^2\varphi\Big)\Big|_0^T-\iint u_t\frac{\partial(a(x)u)}{\partial t}=\Big(\frac{1}{2}\int|u|^2\varphi u\Big)\Big|_0^T.$$

Luego

$$\iint u_{tt}\varphi u+\iint a(x)u_t\varphi u=\Big(\int\Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\Big)\Big|_0^T-\iint|u_t|^2\varphi. \tag{3.6}$$

También usando la observación (1.2.5), se tiene que

$$\begin{aligned}\iint(-\Delta u)\varphi u &= \iint\nabla u\cdot\nabla(\varphi u)\\ &= \iint\nabla u\cdot\big(u\nabla\varphi+\varphi\nabla u\big)\\ &= \iint\varphi|\nabla u|^2+\iint u\nabla u\cdot\nabla\varphi\\ &= \iint\varphi|\nabla u|^2+\frac{1}{2}\iint\nabla(u^2)\cdot\nabla\varphi\\ &= \iint\varphi|\nabla u|^2-\iint\frac{\Delta\varphi}{2}|u|^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Reemplazando (3.6) y (3.7) en (3.5) obtenemos:

$$\left(\int\Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\right)\Bigg|_0^T-\iint|u_t|^2\varphi+\iint\ \varphi|\nabla u|^2-\iint\frac{\Delta\varphi}{2}|u|^2$$
$$+\iint\Big(f(u)+\alpha(x)u\Big)\varphi u=0.$$

Ordenando los términos se obtiene

$$\iint\ \Big(|\nabla u|^2+\big(f(u)+\alpha(x)u\big)u\Big)\varphi=\iint\ \Big(\frac{\Delta\varphi}{2}|u|^2+|u_t|^2\varphi\Big)-L \tag{3.8}$$

donde $L=\left(\int\Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\right)\Bigg|_0^T$.

Observe que

$$\int\ \Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u=\int\ uu_t\varphi+\frac{1}{2}\int\ a(x)|u|^2\varphi,$$

como $a\in L^\infty_+(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi\in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\left|\int\ \Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\right|\le|\varphi|_\infty\int\ |u||u_t|+\frac{1}{2}|a|_\infty|\varphi|_\infty\int\ |u|^2. \tag{3.9}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder a la primera integral del lado derecho de la desigualdad (3.9), se tiene

$$\begin{aligned}\left|\int\ \Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\right|&\le|\varphi|_\infty|u|_{L^2(\mathbb{R}^n)}|u_t|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\frac{1}{2}|a|_\infty|\varphi|_\infty|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\&\le\frac{1}{2}|\varphi|_\infty\left(|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+|u_t|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)+\frac{1}{2}|a|_\infty|\varphi|_\infty|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\&\le C\left(1+|a|_\infty\right)|\varphi|_\infty E(t),\ \text{ para todo } t\ge0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left|\left(\int\Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\right)\Bigg|_0^T\right|\le C\left(1+|a|_\infty\right)|\varphi|_\infty(E(T)+E(0)),$$

usando la identidad (3.1) se obtiene

$$\left|\left(\int\Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\right)\Bigg|_0^T\right|\le C_1\left(\iint\ a(x)|u_t|^2+2E(T)\right) \tag{3.10}$$

donde $C_1=C\left(1+|a|_\infty\right)|\varphi|_\infty$.

Si aplicamos en (3.8) un $\varphi\in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ con las siguientes condiciones

$$0\le\varphi\le1 \text{ en } \mathbb{R}^n;\ \varphi=0 \text{ en } B_R;\ \varphi=1 \text{ en } \Omega_{2R}=\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\iint\ \Big(|\nabla u|^2+\big(f(u)+\alpha(x)u\big)u\Big)\varphi&=\iint_{\Omega_R}|u_t|^2\varphi+\iint_{B_{2R}}\frac{\Delta\varphi}{2}|u|^2-L\\&\le\iint_{\Omega_R}|u_t|^2|\varphi|+\frac{1}{2}|\Delta\varphi|_\infty\iint_{B_{2R}}|u|^2+|L|,\end{aligned}$$

luego

$$\iint_{\Omega_{2R}} \Big(|\nabla u|^2 + \big(f(u)+\alpha(x)u\big)u\Big) \le \iint_{\Omega_R} |u_t|^2|\varphi| + \frac{1}{2}|\Delta\varphi|_\infty \iint_{B_{2R}} |u|^2 + |L|. \quad (3.11)$$

Sumando a ambos lados de la desigualdad (3.11) el término $\displaystyle\iint_{\Omega_{2R}} |u_t|^2$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_{2R}} \Big(|\nabla u|^2 + \big(f(u)+\alpha(x)u\big)u + |u_t|^2\Big)\\
&\qquad \le \iint_{\Omega_R} |u_t|^2|\varphi| + \iint_{\Omega_{2R}} |u_t|^2 + \frac{1}{2}|\Delta\varphi|_\infty |u|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + |L|\\
&\qquad \le (|\varphi|_\infty + 1)\iint_{\Omega_R} |u_t|^2 + \frac{1}{2}|\Delta\varphi|_\infty |u|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + |L|. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Usando la hipótesis (0.2), la desigualdad (3.12) queda expresada por:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_{2R}} \Big(|\nabla u|^2 + \big(f(u)+\alpha(x)u\big)u + |u_t|^2\Big)\\
&\qquad \le a_0^{-1}(|\varphi|_\infty + 1)\iint_{\Omega_R} a(x)|u_t|^2 + \frac{1}{2}|\Delta\varphi|_\infty |u|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + |L|. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Se observa que para cada $x \in \Omega_{2R}$, $t \in [0,T]$ se tiene

$$\big(f(u)+\alpha(x)u\big)u = f(u)u + \alpha(x)u^2,$$

luego por la condición (3.4) tenemos

$$\big(f(u)+\alpha(x)u\big)u \ge (2+\delta)F(u) + \alpha(x)u^2. \quad (3.14)$$

De (3.10), (3.13) y (3.14) y ordenando los términos se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_{2R}} \Big[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\Big] + (2+\delta)\iint_{\Omega_{2R}} F(u)\\
&\qquad \le C_2\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + E(T)\right\},
\end{aligned}$$

donde $C_2 = \max\left\{2a_0^{-1}(|\varphi|_\infty + 1), 2C_1, \frac{1}{2}|\Delta\varphi|_\infty\right\}$.

Finalmente considerando $C_3 = \min\{1, 2+\delta\}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\iint_{\Omega_{2R}} \Big[|\nabla u| + \alpha(x)|u| + |u_t|\Big] + \iint_{\Omega_{2R}} F(u)\\
&\qquad \le C\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T)} + E(T)\right\}
\end{aligned}$$

donde $C = C_2C_3^{-1}$. □

Lema 3.2. *Sea $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))^n$. Para todo T,$r > 0$ y toda solución regular de (0.1) la siguiente igualdad es verdadera en $B_r \times (0,T)$*

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r} div(q)\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big] - \iint_{B_r} div(q)F(u)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\iint_{B_r}a(x)u_t\ (q\cdot\nabla u)-\frac{1}{2}\iint_{B_r}u^2\ (q\cdot\nabla\alpha)$$

$$=-\left(\int_{B_r}u_t\ (q\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T+\frac{1}{2r}\iint_{S_r}(q\cdot x)\Big[|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha(x)|u|^2\Big]$$

$$-\frac{1}{r}\iint_{S_r}(q\cdot x)F(u)+\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\ (q\cdot\nabla u).$$

Demostración. Multiplicando la ecuación (0.1) por $q\cdot\nabla u$ e integrando sobre $(0,T)\times B_r$ obtenemos

$$\iint_{B_r}u_{tt}\ (q\cdot\nabla u)+\iint_{B_r}(-\Delta u)\ (q\cdot\nabla u)+\iint_{B_r}\alpha(x)u\ (q\cdot\nabla u).$$

$$+\iint_{B_r}f(u)\ (q\cdot\nabla u)+\iint_{B_r}a(x)\ (q\cdot\nabla u)=0 \tag{3.15}$$

Usando integración por partes en la primera integral de la ecuación (3.15)se tiene

$$\begin{aligned}\iint_{B_r}u_{tt}\ (q\cdot\nabla u)&=\left(\int_{B_r}u_t\ (q\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T-\iint_{B_r}u_t(q\cdot\nabla u_t)\\&=\left(\int_{B_r}u_t\ (q\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T-\sum_{i=1}^{n}\iint_{B_r}u_tq_i\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\\&=\left(\int_{B_r}u_t\ (q\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iint_{B_r}q_i\frac{\partial(u_t)^2}{\partial x_i}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

De la segunda suma del lado derecho de la igualdad (3.16), se tiene por la fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iint_{B_r}q_i\frac{\partial(u_t)^2}{\partial x_i}&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\iint_{B_r}u_t^2\frac{\partial q_i}{\partial x_i}-\iint_{S_r}u_t^2\ q_i\ \nu_i\right)\\&=\frac{1}{2}\iint_{B_r}div(q)u_t^2-\frac{1}{2}\iint_{S_r}u_t^2\ (q\cdot\nu).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Reemplazando (3.17) en (3.16) obtenemos

$$\iint_{B_r}u_{tt}\ (q\cdot\nabla u)=\left(\int_{B_r}u_t\ (q\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T+\frac{1}{2}\iint_{B_r}div(q)u_t^2-\frac{1}{2}\iint_{S_r}u_t^2\ (q\cdot\nu). \tag{3.18}$$

Usando la fórmula de Green en la segunda integral de la ecuación (3.15)se tiene

$$\begin{aligned}\iint_{B_r}(-\Delta u)\ (q\cdot\nabla u)&=\iint_{B_r}\nabla u\cdot\nabla(q\cdot\nabla u)-\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}(q\cdot\nabla u)\\&=\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}(q\cdot\nabla u):\end{aligned} \tag{3.19}$$

De la primera suma del lado derecho de la igualdad (3.19), se tiene

$$\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial u}{\partial x_j}\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+q_k\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}\right)$$

$$=\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2q_k. \tag{3.20}$$

De la segunda suma del lado derecho de la igualdad (3.20), se tiene por la fórmula de Gauss:

$$\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 q_k = -\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{S_r}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 q_k\ \nu_k$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_{B_r} div(q)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\iint_{S_r}|\nabla u|^2(q\cdot\nu). \tag{3.21}$$

Reemplazando (3.21) en (3.20) obtenemos

$$\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_k\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\iint_{B_r} div(q)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\iint_{S_r}|\nabla u|^2(q\cdot\nu). \tag{3.22}$$

Reemplazando (3.21) en (3.19) se obtiene

$$\iint_{B_r}(-\Delta u)\ (q\cdot\nabla u) = \sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\iint_{B_r} div(q)|\nabla u|^2$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{S_r}|\nabla u|^2\ (q\cdot\nu) - \iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\ (q\cdot\nabla u). \tag{3.23}$$

Usando la fórmula de Gauss en la tercera integral de la ecuación (3.15)se tiene

$$\begin{aligned}\iint_{B_r}\alpha(x)u\ (q\cdot\nabla u) &= \sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r}\alpha(x)u\ q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r}\alpha(x)q_k\frac{\partial(u^2)}{\partial x_k}\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r}u^2\frac{\partial(\alpha(x)q_k)}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{S_r}\alpha(x)u^2 q_k\ \nu_k.\end{aligned} \tag{3.24}$$

De la primera suma del lado derecho de la igualdad (3.24), se tiene

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r}u^2\frac{\partial(\alpha(x)q_k)}{\partial x_k} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r}u^2\left(q_k\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_k} + \alpha(x)\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\iint_{B_r} div(q)\alpha(x)u^2 - \frac{1}{2}\iint_{B_r}u^2(q\cdot\nabla\alpha).\end{aligned} \tag{3.25}$$

Reemplazando (3.25) en (3.24) se obtiene

$$\iint_{B_r}\alpha(x)u\ (q\cdot\nabla u) = -\frac{1}{2}\iint_{B_r} div(q)\alpha(x)|u|^2$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{B_r}|u|^2 q\cdot\nabla\alpha + \frac{1}{2}\iint_{S_r}\alpha(x)|u|^2\ (q\cdot\nu). \tag{3.26}$$

Finalmente en la cuarta integral de la igualdad (3.15) se tiene

$$\iint_{B_r} f(u)(q\cdot\nabla u) = \iint_{B_r} q\cdot\nabla F(u) = \sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r} q_k\frac{\partial F(u)}{\partial x_k},$$

usando la fórmula de Gauss se tiene

$$\iint_{B_r} f(u)(q\cdot\nabla u) = \sum_{k=1}^{n}\Big(-\iint_{B_r}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}F(u) + \iint_{S_r} q_kF(u)\nu_k\Big)$$
$$= -\iint_{B_r} div(q)F(u) + \iint_{S_r} F(u)(q\cdot\nu). \qquad (3.27)$$

Reemplazando (3.18), (3.23), (3.26) y (3.27) en (3.15) obtenemos

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r} div(q)\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big] - \iint_{B_r} div(q)F(u)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \iint_{B_r} a(x)u_t\ (q\cdot\nabla u) - \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2\ (q\cdot\nabla\alpha)$$
$$= -\Big(\int_{B_r} u_t\ (q\cdot\nabla u)\Big)\Big|_0^T + \frac{1}{2}\iint_{S_r}(q\cdot\nu)\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big]$$
$$-\iint_{S_r}(q\cdot\nu)F(u) + \iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\ (q\cdot\nabla u).$$

Como $\nu(x) = \dfrac{x}{r}$ en S_r (Ver Kesavan [10]) entonces

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r} div(q)\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big] - \iint_{B_r} div(q)F(u)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \iint_{B_r} a(x)u_t\ (q\cdot\nabla u) - \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2\ (q\cdot\nabla\alpha)$$
$$= -\Big(\int_{B_r} u_t\ (q\cdot\nabla u)\Big)\Big|_0^T + \frac{1}{2r}\iint_{S_r}(q\cdot x)\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big]$$
$$-\frac{1}{r}\iint_{S_r}(q\cdot x)F(u) + \iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\ (q\cdot\nabla u).$$

$\square$

Lema 3.3. *Sea T,$r > 0$ y $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, la siguiente identidad es verdadera para toda solución regular de* (0.1)

$$\iint_{B_r}\varphi\big[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\big] = \iint_{B_r}\big[\varphi|u_t|^2 - u\nabla\varphi\cdot\nabla u\big]$$
$$+\iint_{S_r}\varphi\frac{\partial u}{\partial\nu}u - \Bigg(\int_{B_r}\Big(u_t + a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\Bigg)\Bigg|_0^T.$$

Demostración. Sea $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, multiplicando la ecuación (0.1) por $\varphi(x)u$ e integrando sobre $(0,T)\times B_r$ obtenemos:

$$\iint_{B_r} u_{tt}\varphi u + \iint_{B_r}(-\Delta u)\ \varphi u + \iint_{B_r}(f(u)+\alpha(x)u)u + \iint_{B_r} a(x)u_t\varphi u = 0. \qquad (3.28)$$

Usando integración por partes en la primera integral de la ecuación (3.28) se tiene

$$\begin{aligned}\iint_{B_r} u_{tt}\varphi u &= \left(\int_{B_r} u_t\varphi u\right)\Big|_0^T - \iint_{B_r} u_t\frac{\partial(\varphi u)}{\partial t}\\ &= \left(\int_{B_r} u_t\varphi u\right)\Big|_0^T - \iint_{B_r} \varphi|u_t|^2. \end{aligned}\tag{3.29}$$

Usando la fórmula de Green en la segunda integral de la ecuación (3.28) se tiene

$$\begin{aligned}\iint_{B_r}(-\Delta u)\ \varphi u &= \iint_{B_r}\nabla u\cdot\nabla(\varphi u) - \iint_{S_r}\varphi u\frac{\partial u}{\partial\nu}\\ &= \iint_{B_r}\left[\varphi|\nabla u|^2 + u\nabla u\cdot\nabla\varphi\right] - \iint_{S_r}\varphi u\frac{\partial u}{\partial \nu}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Finalmente usando integración por partes en la cuarta integral de la ecuación (3.28) se tiene

$$\begin{aligned}\iint_{B_r} a(x)u_t\varphi u &= \frac{1}{2}\iint_{B_r} a(x)\varphi\frac{\partial u^2}{\partial t}\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{B_r} a(x)\varphi u^2\right)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\iint_{B_r} u\frac{\partial(a(x)\varphi)}{\partial t}\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{B_r} a(x)\varphi u^2\right)\Big|_0^T.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Reemplazando (3.29), (3.30), (3.31) en (3.28) y ordenando los términos obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_{B_r}\varphi\left[|\nabla u|^2 + (f(u)+\alpha(x)u)u\right] &= \iint_{B_r}\left[\varphi|u_t|^2 - u\nabla\varphi\cdot\nabla u\right]\\ &\quad + \iint_{S_r}\varphi\frac{\partial u}{\partial\nu}u - \left(\int_{B_r}\left(u_t + a(x)\frac{u}{2}\right)\varphi u\right)\Big|_0^T.\end{aligned}$$

□

Lema 3.4. *Para todo $r > R$, existe $C_r > 0$ tal que la siguiente desigualdad es verdadera para todo $T > 0$ y para toda solución regular de* (0.1)

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2\Big]+\iint_{B_r}F(u)\leq C\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + E(T)\right\}$$

Demostración. Aplicando el lema 3.2 con $q = x$ obtenemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\iint_{B_r} div(x)\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big] - \iint_{B_r} div(x)F(u)\\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\iint_{B_r}\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \iint_{B_r} a(x)u_t\ (x\cdot\nabla u) - \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2\ (x\cdot\nabla\alpha)\\ &\quad = -\left(\int_{B_r} u_t\ (x\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T + \frac{1}{2r}\iint_{S_r}(x\cdot x)\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big]\\ &\qquad - \frac{1}{r}\iint_{S_r}(x\cdot x)F(u) + \iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\ (x\cdot\nabla u).\end{aligned}\tag{3.32}$$

Observamos que

$$div(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n. \tag{3.33}$$

Además

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \iint_{B_r} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \iint_{B_r} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} = \iint_{B_r} |\nabla u|^2. \tag{3.34}$$

También

$$\iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\ (x \cdot \nabla u) = \iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \nu}\ (x \cdot \nu) = r \iint_{S_r} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2. \tag{3.35}$$

Reemplazando (3.35),(3.34), (3.33) en (3.32) y ordenando los términos obtenemos

$$\frac{n}{2}\iint_{B_r}\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big] - n\iint_{B_r} F(u) + \iint_{B_r} |\nabla u|^2$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2\ (x\cdot\nabla\alpha) - \iint_{B_r} a(x)u_t\ (x\cdot\nabla u) + A + B, \tag{3.36}$$

donde

$$A = -\left(\int_{B_r} u_t\ (x\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T, \tag{3.37}$$

$$B = r\iint_{S_r}\left[\frac{1}{2}|u_t|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - \frac{1}{2}\alpha(x)|u|^2 - F(u)\right]. \tag{3.38}$$

Aplicando el lema 3.3 con $\varphi = 1$ y ordenando los términos obtenemos

$$\iint_{B_r}\Big[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u - |u_t|^2\Big] = \iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial \nu}u - \left(\int_{B_r}\Big(u_t + a(x)\frac{u}{2}\Big)\,u\right)\Big|_0^T. \tag{3.39}$$

Multiplicando la ecuación (3.39) por $\beta \in \mathbb{R}$ y sumando la ecuación (3.36) obtenemos:

$$\Big(\frac{n}{2} - \beta\Big)\iint_{B_r}|u_t|^2 + \Big(1 + \beta - \frac{n}{2}\Big)\iint_{B_r}|\nabla u|^2 + \Big(\beta - \frac{n}{2}\Big)\iint_{B_r}\alpha(x)|u|^2$$

$$+\iint_{B_r}(\beta f(u)u - nF(u)) = \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2\ (x\cdot\nabla\alpha) - \iint_{B_r} a(x)u_t\ (x\cdot\nabla u)$$

$$+\,\beta\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial \nu}u + B + D, \tag{3.40}$$

donde $D = A - \beta\left(\int_{B_r}\Big(u_t + a(x)\frac{u}{2}\Big)\,u\right)\Big|_0^T$.

Observación 3.1. En la identidad (3.40) para que $\Big(\frac{n}{2} - \beta\Big)$ y $\Big(1 + \beta - \frac{n}{2}\Big)$ sean positivos, se considera $\beta > 0$ tal que $\beta \in \left(\frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

Afirmación 3.1. Existe una constante $c = c(x) > 0$ tal que

$$\Big(\beta - \frac{n}{2}\Big)\alpha(x)s^2 + \beta f(s)s - nF(s) \geq \eta F(s) - cs^2,\ \forall s \in \mathbb{R}$$

donde $\eta = \beta(2+\delta) - n > 0$.

En efecto, considerando la condición b) del teorema 3.1 se tiene:

$$\beta f(s)s \geq \beta(2+\delta)F(s) = (\eta+n)F(s).$$

Sumando $\left(\beta - \frac{n}{2}\right)\alpha(x)s^2 - nF(s)$ a ambos lados de la desigualdad precedente se obtiene

$$\left(\beta - \frac{n}{2}\right)\alpha(x)s^2 + \beta f(s)s - nF(s) \geq (\beta - \frac{n}{2})\alpha(x)s^2 + \eta F(s).$$

Por lo tanto

$$\left(\beta - \frac{n}{2}\right)\alpha(x)s^2 + \beta f(s)s - nF(s) \geq \eta F(s) - c(x)s^2,$$

donde $c(x) = \left(\frac{n}{2} - \beta\right)\alpha(x) > 0$.

Ahora considerando la condición a) del teorema 3.1 y de la hipótesis $f \in C^1(\mathbb{R})$, se tiene

$$F(s) \leq \int_0^s |f(t)|dt = \int_0^s f'(\xi)t\ dt \leq |f'|_\infty \int_0^s |t|dt = |f'|_\infty \frac{s^2}{2},$$

entonces

$$F(s) \leq |f'|_\infty \frac{s^2}{2}.$$

Multiplicando por $-(n+\eta)$ a la desigualdad precedente y ordenando los términos obtenemos

$$0 \geq (n+\eta)F(s) - \frac{n+\eta}{2}|f'|_\infty s^2$$

y siendo $\beta f(s)s \geq 0$ entonces

$$\beta f(s)s \geq (n+\eta)F(s) - \frac{n+\eta}{2}|f'|_\infty s^2.$$

Sumando $\left(\beta - \frac{n}{2}\right)\alpha(x)s^2 - nF(s)$ a ambos lados de la desigualdad precedente

$$\left(\beta - \frac{n}{2}\right)\alpha(x)s^2 + \beta f(s)s - nF(s) \geq \eta F(s) - c(x)s^2,$$

donde $c(x) = \left(\frac{n}{2} - \beta\right)\alpha(x) + \frac{n+\eta}{2}|f'|_\infty > 0$.

Observación 3.2. Como $\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ entonces para la constante $c(x) = \left(\frac{n}{2} - \beta\right)\alpha(x)$ ó $c(x) = \left(\frac{n}{2} - \beta\right)\alpha(x) + \frac{n+\eta}{2}|f'|_\infty$ de la afirmación 3.1 existe $C_1 > 0$ tal que

$$|c(x)| \leq C_1.$$

Utilizando la afirmación 3.1 en (3.40) se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{2} - \beta\right)\iint_{B_r}|u_t|^2 + \left(1+\beta-\frac{n}{2}\right)\iint_{B_r}|\nabla u|^2 + \eta\iint_{B_r}F(u) - \iint_{B_r}c(x)|u|^2 \\ = \frac{1}{2}\iint_{B_r}u^2\ (x\cdot\nabla\alpha) - \iint_{B_r}a(x)u_t\ (x\cdot\nabla u) + \beta\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u + B + D.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Sumando $\iint_{B_r}\alpha(x)|u|^2 + \iint_{B_r}c(x)|u|^2$ a ambos lados de la igualdad (3.41) se obtiene

$$\left(\frac{n}{2} - \beta\right)\iint_{B_r}|u_t|^2 + \left(1+\beta-\frac{n}{2}\right)\iint_{B_r}|\nabla u|^2 + \iint_{B_r}\alpha(x)|u|^2 + \eta\iint_{B_r}F(u)$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2\ (x\cdot\nabla\alpha) + \iint_{B_r} \alpha(x)|u|^2 + \iint_{B_r} c(x)|u|^2 - \iint_{B_r} a(x)u_t\ (x\cdot\nabla u)$$
$$+\beta\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u + B + D.$$

Considerando $C_2 = \min\left\{\frac{n}{2}-\beta, 1+\beta-\frac{n}{2}, \eta, 1\right\}$ se obtiene

$$C_2\left(\iint_{B_r}\left[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\right] + \iint_{B_r} F(u)\right) = \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2\ (x\cdot\nabla\alpha)$$
$$+\iint_{B_r}\alpha(x)|u|^2 + \iint_{B_r} c(x)|u|^2 - \iint_{B_r} a(x)u_t\ (x\cdot\nabla u)$$
$$+\beta\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u + B + D. \tag{3.42}$$

Se observa que

$$\left|\iint_{B_r} a(x)u_t\ (x\cdot\nabla u)\right| \leq \iint_{B_r} a(x)|u_t||x||\nabla u|,$$

y para todo $\varepsilon > 0$ por la desigualdad de Young se obtiene:

$$\left|\iint_{B_r} a(x)u_t\ (x\cdot\nabla u)\right| \leq \varepsilon\iint_{B_r}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\iint_{B_r} a^2(x)|u_t|^2|x|^2.$$

Usando la hipótesis $a\in L^\infty_+(\mathbb{R}^n)$ se obtiene

$$\left|\iint_{B_r} a(x)u_t\ (x\cdot\nabla u)\right| \leq \varepsilon\iint_{B_r}|\nabla u|^2 + \frac{r^2|a|_{L^\infty(B_r)}}{4\varepsilon}\iint_{B_r} a(x)|u_t|^2. \tag{3.43}$$

Además

$$\left|\frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2\ (x\cdot\nabla\alpha)\right| \leq \frac{1}{2}\iint_{B_r}|u|^2|x||\nabla\alpha|$$
$$\leq \frac{r|\nabla\alpha|_\infty}{2}\iint_{B_r}|u|^2 = \frac{r|\nabla\alpha|_\infty}{2}|u|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}. \tag{3.44}$$

Remplazando (3.44) y (3.43) en (3.42) se obtiene:

$$C_2\left(\iint_{B_r}\left[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\right] + \iint_{B_r} F(u)\right) \leq \frac{r|\nabla\alpha|_\infty}{2}|u|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}$$
$$+C_1\iint_{B_r}|u|^2 + |\alpha|_\infty\iint_{B_r}|u|^2 + \varepsilon\iint_{B_r}|\nabla u|^2 + \frac{r^2|a|_{L^\infty(B_r)}}{4\varepsilon}\iint_{B_r} a(x)|u_t|^2$$
$$+\left|\beta\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right| + |B| + |D|.$$

Sumando $-\varepsilon\iint_{B_r}|\nabla u|^2$ a ambos lados de la desigualdad precedente

$$(C_2-\varepsilon)\iint_{B_r}|\nabla u|^2 + C_2\left(\iint_{B_r}\left[\alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\right] + \iint_{B_r} F(u)\right)$$
$$= \frac{r|\nabla\alpha|_\infty}{2}|u|^2_{L^2(B_r\times(0,T))} + C_1|u|^2_{L^2(B_r\times(0,T))} + |\alpha|_\infty|u|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}$$
$$+\frac{r^2|a|_{L^\infty(B_r)}}{4\varepsilon}\iint_{B_r} a(x)|u_t|^2 + \left|\beta\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right| + |B| + |D|.$$

Considerando $\varepsilon < C_2$ y $C_3 = \min\{C_2, C_2-\varepsilon\}$ obtenemos

$$C_3\Big(\iint_{B_r}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2\Big]+\iint_{B_r}F(u)\Big)=\frac{r^2|a|_{L^\infty(B_r)}}{4\varepsilon}\iint_{B_r}a(x)|u_t|^2$$
$$+\left(\frac{r|\nabla\alpha|_\infty}{2}+C_1+|\alpha|_\infty\right)|u|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}+\left|\beta\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right|+|B|+|D|.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2\Big]+\iint_{B_r}F(u)$$
$$\leq C_{1r}\left(\iint a(x)|u_t|^2+|u|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}+\left|\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right|+|B|+|D|\right), \tag{3.45}$$

donde $C_{1r}=2C_4C_3^{-1}$ y $C_4=\max\left\{\frac{r|\nabla\alpha|_\infty}{2}+C_1+|\alpha|_\infty,\frac{r^2|a|_{L^\infty(B_r)}}{4\varepsilon},\beta,1\right\}$.

Sea $\varphi\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$0\leq\varphi\leq 1 \text{ en } B_r;\ \varphi=0 \text{ en } B_{r'} \text{ con } R<r'<r \text{ y } \varphi=1 \text{ en } S_r. \tag{3.46}$$

Aplicando el lema 3.2 con $q=\varphi x$ donde φ cumple la condición (3.46) se obtiene

$$\frac{r}{2}\iint_{S_r}\Big[|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha(x)|u|^2\Big]-r\iint_{S_r}F(u)+\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\ (x\cdot\nabla u)$$
$$=-\frac{1}{2}\iint_{B_r}u^2\ (\varphi x\cdot\nabla\alpha)+\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\varphi\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\iint_{B_r}a(x)u_t\ (\varphi\ x\cdot\nabla u)$$
$$-\iint_{B_r}div(\varphi x)F(u)+\frac{1}{2}\iint_{B_r}div(\varphi x)\Big[|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha(x)|u|^2\Big]$$
$$+\left(\int_{B_r}u_t\ (\varphi x\cdot\nabla u)\right)\Bigg|_0^T.$$

Usando las identidades (3.34) y (3.35) obtenemos

$$B=\iint_{B_r}a(x)u_t\ (\varphi\ x\cdot\nabla u)-\iint_{B_r}div(\varphi x)F(u)+\left(\int_{B_r}u_t\ (\varphi x\cdot\nabla u)\right)\Bigg|_0^T$$
$$-\frac{1}{2}\iint_{B_r}u^2\ (\varphi x\cdot\nabla\alpha)+\iint_{B_r}\varphi|\nabla u|^2+\frac{1}{2}\iint_{B_r}div(\varphi x)\Big[|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha(x)|u|^2\Big]$$

Usando la condición (3.46) y ordenando los términos se obtiene

$$B=-\frac{1}{2}\iint_{B_r\setminus B_{r'}}u^2\ (\varphi x\cdot\nabla\alpha)+\iint_{B_r\setminus B_{r'}}\varphi|\nabla u|^2+\iint_{B_r\setminus B_{r'}}a(x)u_t\ (\varphi\ x\cdot\nabla u)$$
$$+\frac{1}{2}\iint_{B_r\setminus B_{r'}}div(\varphi x)\Big[|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha(x)|u|^2\Big]-\iint_{B_r\setminus B_{r'}}div(\varphi x)F(u)$$
$$+\left(\int_{B_r}u_t\ (\varphi x\cdot\nabla u)\right)\Bigg|_0^T.$$

Por lo tanto

$$|B|\leq\frac{1}{2}\iint_{B_r\setminus B_{r'}}|u^2\ (\varphi x\cdot\nabla\alpha)|+\iint_{B_r\setminus B_{r'}}\varphi|\nabla u|^2+\iint_{B_r\setminus B_{r'}}|a(x)u_t\ (\varphi\ x\cdot\nabla u)|$$

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r\setminus B_{r'}} |div(\varphi x)|\Big[|u_t|^2+|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2\Big] + \iint_{B_r} |div(\varphi x)F(u)|$$

$$+\, |\varphi|_\infty \left| \left(\int_{B_r} u_t\ (x\cdot\nabla u)\right)\Bigg|_0^T \right|. \tag{3.47}$$

Como $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$div(\varphi x) = \nabla\varphi\cdot x + n\varphi \leq C_5. \tag{3.48}$$

Además

$$\iint_{B_r\setminus B_{r'}} |a(x)u_t\ (\varphi x\cdot\nabla u)| \leq C_{2r}\iint_{B_r\setminus B_{r'}} \left(|u_t|^2+|\nabla u|^2\right), \tag{3.49}$$

donde $C_{2r} = \dfrac{r|a|_\infty|\varphi|_\infty}{2}$.

Usando la hipótesis (0.4) se obtiene

$$\iint_{B_r\setminus B_{r'}} |div(\varphi x)F(u)| \leq C_6 \iint_{B_r\setminus B_{r'}} f(u)u, \tag{3.50}$$

donde $C_6 = \dfrac{C_5}{2+\delta}$.

También de la hipótesis (0.5) se obtiene

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r\setminus B_{r'}} |u^2\ (\varphi x\cdot\nabla\alpha)| \leq C_{3r}\iint_{B_r\setminus B_{r'}} \alpha(x)|u|^2, \tag{3.51}$$

donde $C_{3r} = \dfrac{r|\nabla\alpha|_\infty|\varphi|_\infty}{2\alpha_0}$.

Reemplazando (3.51), (3.50), (3.49) y (3.48) en (3.47) se obtiene:

$$|B| \leq C_{3r}\iint_{B_r\setminus B_{r'}} \alpha(x)|u|^2 + |\varphi|_\infty \iint_{B_r\setminus B_{r'}} |\nabla u|^2 + C_6\iint_{B_r\setminus B_{r'}} f(u)u$$

$$+\frac{C_5}{2}\iint_{B_r\setminus B_{r'}} \Big[|u_t|^2+|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2\Big] + C_{2r}\iint_{B_r\setminus B_{r'}} \left(|u_t|^2+|\nabla u|^2\right)$$

$$+|\varphi|_\infty \left| \left(\int_{B_r} u_t\ (x\cdot\nabla u)\right)\Bigg|_0^T \right|.$$

Considerando $C_{4r} = \max\left\{C_{3r}, \dfrac{C_5}{2}, C_6, C_{2r}, |\varphi|_\infty\right\}$ se obtiene

$$|B| \leq C_{4r}\left\{ \iint_{B_r\setminus B_{r'}} \Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2+f(u)u\Big] \right.$$

$$\left. + \left| \left(\int_{B_r\setminus B_{r'}} u_t\ (x\cdot\nabla u)\right)\Bigg|_0^T \right| \right\}. \tag{3.52}$$

Aplicando el lema 3.3 donde φ cumple la condición (3.46) se obtiene

$$\iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial\nu}u = \iint_{B_r\setminus B_{r'}} \varphi\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+f(u)u\Big] - \iint_{B_r\setminus B_{r'}} \varphi|u_t|^2$$

$$+\iint_{B_r\setminus B_{r'}} u\ \nabla\varphi\cdot\nabla u+\left(\int_{B_r}\left(u_t+a(x)\frac{u}{2}\right)\varphi u\right)\Big|_0^T.$$

Por lo tanto

$$\left|\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right|\leq|\varphi|_\infty\iint_{B_r\setminus B_{r'}}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+f(u)u\Big]+|\varphi|_\infty\iint_{B_r\setminus B_{r'}}|u_t|^2$$

$$+|\nabla\varphi|_\infty\iint_{B_r\setminus B_{r'}}|u||\nabla u|+|\varphi|_\infty\left|\left(\int_{B_r}\left(u_t+a(x)\frac{u}{2}\right)u\right)\Big|_0^T\right|. \tag{3.53}$$

En la tercera integral del lado derecho de la desigualdad (3.53), por la desigualdad de Young y la hipótesis (0.5), se tiene:

$$\begin{aligned}|\nabla\varphi|_\infty\iint_{B_r\setminus B_{r'}}|u||\nabla u|&\leq\frac{|\nabla\varphi|_\infty}{2}\iint_{B_r\setminus B_{r'}}\left(|u|^2+|\nabla u|^2\right)\\&\leq\frac{|\nabla\varphi|_\infty}{2}\left(\frac{1}{\alpha_0}\iint_{B_r\setminus B_{r'}}\alpha(x)|u|^2+\iint_{B_r\setminus B_{r'}}|\nabla u|^2\right).\end{aligned} \tag{3.54}$$

Remplazando (3.54) en (3.53) y ordenando los términos se obtiene

$$\left|\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right|\leq|\varphi|_\infty\iint_{B_r\setminus B_{r'}}\Big[|u_t|^2+f(u)u\Big]+\left(|\varphi|_\infty+\frac{|\nabla\varphi|_\infty}{2}\right)\iint_{B_r\setminus B_{r'}}|\nabla u|^2$$

$$+\left(|\varphi|_\infty+\frac{|\nabla\varphi|_\infty}{2\alpha_0}\right)\iint_{B_r\setminus B_{r'}}\alpha(x)|u|^2+|\varphi|_\infty\left|\left(\int_{B_r}\left(u_t+a(x)\frac{u}{2}\right)u\right)\Big|_0^T\right|.$$

Considerando $C_7=\max\left\{|\varphi|_\infty,|\varphi|_\infty+\dfrac{|\nabla\varphi|_\infty}{2},|\varphi|_\infty+\dfrac{|\nabla\varphi|_\infty}{2\alpha_0}\right\}$ se tiene

$$\left|\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right|\leq C_7\left\{\iint_{B_r\setminus B_{r'}}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2+f(u)u\Big]\right.$$

$$\left.+\left|\left(\int_{B_r}\left(u_t+a(x)\frac{u}{2}\right)u\right)\Big|_0^T\right|\right\}. \tag{3.55}$$

Sumando las desigualdades (3.52) y (3.55) obtenemos

$$\left|\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right|+|B|\leq C_{5r}\left(\iint_{B_r\setminus B_{r'}}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2+f(u)u\Big]+|G|\right), \tag{3.56}$$

donde $|G|=\left|\left(\int_{B_r\setminus B_{r'}}u_t\ (x\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T\right|+\left|\left(\int_{B_r}\left(u_t+a(x)\frac{u}{2}\right)u\right)\Big|_0^T\right|$ y $C_{5r}=C_{4r}+C_7$.

Finalmente aplicando el lema 3.3 en $B_{2r}\times(0,T)$ con $\varphi\in W^{1,\infty}(B_{2r})$ tal que:

$$\begin{cases}0\leq\varphi\leq1\text{ en }B_r;\ \varphi=0\text{ en }B_R;\ \varphi=1\text{ en }B_r\setminus B_{r'}\text{ con }R<r'<r;\ \varphi=0\text{ en }S_{2r}\text{ y}\\ \qquad\dfrac{|\nabla\varphi|_\infty^2}{\varphi}\in L^\infty(B_{2r}).\end{cases} \tag{3.57}$$

Se obtiene al ordenar los términos

$$\iint_{B_{2r}} \varphi\big[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\big] = \iint_{B_{2r}} \big[\varphi|u_t|^2 - u\nabla\varphi\cdot\nabla u\big] + H$$

$$\leq |\varphi|_\infty \iint_{B_{2r}} |u_t|^2 + \iint_{B_{2r}} |u\nabla\varphi\cdot\nabla u| + |H|, \qquad (3.58)$$

donde $H = -\left(\displaystyle\int_{B_{2r}} \Big(u_t + a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\right)\Bigg|_0^T$.

Aplicando la desigualdad de Young en la segunda integral del lado derecho de la desigualdad (3.58), se obtiene

$$\iint_{B_{2r}} |u\nabla\varphi\cdot\nabla u| \leq \varepsilon\iint_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\iint_{B_{2r}} \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}|u|^2$$

y como $\dfrac{|\nabla\varphi|^2_\infty}{\varphi} \in L^\infty(B_{2r})$ entonces

$$\iint_{B_{2r}} |u\nabla\varphi\cdot\nabla u| \leq \varepsilon\iint_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2 + C_8\iint_{B_{2r}} |u|^2,$$

donde $C_8 = \dfrac{1}{4\varepsilon}\left|\dfrac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right|_\infty$.

Remplazando en (3.58), obtenemos

$$\iint_{B_{2r}} \varphi\Big[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\Big] \leq |\varphi|_\infty\iint_{B_{2r}} |u_t|^2 + \varepsilon\iint_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2 + C_8\iint_{B_{2r}} |u|^2 + |H|.$$

Sumando $-\varepsilon\displaystyle\iint_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2$ a ambos lados de la desigualdad precedente

$$\iint_{B_{2r}} \varphi\Big[(1-\varepsilon)|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\Big] \leq |\varphi|_\infty\iint_{B_{2r}} |u_t|^2 + C_8|u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H|.$$

Usando la hipótesis (0.2) se obtiene:

$$\iint_{B_{2r}} \varphi\Big[(1-\varepsilon)|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\Big] \leq \frac{|\varphi|_\infty}{a_0}\iint_{B_{2r}} a(x)|u_t|^2 + C_8|u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H|.$$

Para un ε suficientemente pequeño tal que $0 \leq \varepsilon \leq 1$ se tiene

$$\iint_{B_{2r}} \varphi\Big[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\Big] \leq \frac{|\varphi|_\infty}{a_0}\iint_{B_{2r}} a(x)|u_t|^2 + C_8|u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H|.$$

Teniendo en cuenta (3.57) obtenemos

$$\iint_{B_r\setminus B_{r'}} \Big[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\Big] \leq \frac{|\varphi|_\infty}{a_0}\iint_{B_r\setminus B_{r'}} a(x)|u_t|^2 + C_8|u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H|.$$

Considerando $C_9 = \left\{\dfrac{|\varphi|_\infty}{a_0}, C_8, 1\right\}$ se tiene

$$\iint_{B_r\setminus B_{r'}} \Big[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\Big] \leq C_9\left(\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H|\right). \quad (3.59)$$

Reemplazando (3.59) en (3.56) obtenemos

$$\left|\iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} u\right| + |B| \leq C_{6r} \left(\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H| + |G|\right), \tag{3.60}$$

donde $C_{6r} = C_{5r}C_9$.
Reemplazando (3.60) en (3.45) se tiene

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r}\left[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\right] + \iint_{B_r} F(u) \leq C_{1r}(1 + C_{6r})\iint a(x)|u_t|^2$$
$$+(C_{1r} + C_{1r}C_{6r})|u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + C_{1r}C_{6r}(|H| + |G|) + C_{1r}|D|.$$

Considerando $C_{7r} = \max\{C_{1r}(1 + C_{6r}), C_{1r}C_{6r}\}$ se obtiene

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r}\left[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\right] + \iint_{B_r} F(u)$$
$$\leq C_{7r}\left(\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H| + |G| + |D|\right). \tag{3.61}$$

Trabajando similarmente como se obtuvo (3.10) se obtiene

$$|H| + |G| + |D| \leq C_{8r}\left(\iint a(x)|u_t|^2 + E(T)\right). \tag{3.62}$$

Remplazando (3.62) en (3.61) obtenemos

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r}\left[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\right] + \iint_{B_r} F(u) \leq C_{7r}(1 + C_{8r})\iint a(x)|u_t|^2$$
$$+C_{7r}|u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + C_{7r}C_{8r}E(T).$$

Finalmente considerando $C_r = \max\{C_{7r}(1 + C_{8r}), C_{7r}C_{8r}\}$ se obtiene

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r}\left[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2\right]+\iint_{B_r} F(u) \leq C_r\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + E(T)\right\}.$$

□

Proposición 3.1. *Existe $T_1 > 0$ tal que para todo $T > T_1$ existe la constante $C(T) > 0$ tal que:*

$$E(T) \leq C\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}\right\}.$$

Demostración. Por el Lema 3.1

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega_{2R}}\left[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\right] + \iint_{\Omega_{2R}} F(u)$$
$$\leq C\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + E(T)\right\}. \tag{3.63}$$

Por el Lema 3.4 para $r = 2R$

$$\frac{1}{2}\iint_{B_{2R}}\left[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\right] + \iint_{B_{2R}} F(u)$$

$$\leq C_{2R}\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + E(T)\right\}. \tag{3.64}$$

Sumando las desigualdades (3.63) y (3.64) obtenemos

$$\int_0^T E(t)dt \leq C_{10}\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + E(T)\right\}, \tag{3.65}$$

donde $C_{10} = \max\{C, C_{2R}\}$.
Como la energía es no creciente se tiene

$$\int_0^T E(t)dt \geq TE(T).$$

Majorando por la izquierda en (3.65) obtenemos

$$TE(T) \leq C_{10}\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + E(T)\right\}.$$

Por lo tanto

$$E(T) \leq C_T\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}\right\},$$

donde $C_T = \dfrac{C_{10}}{T - C_{10}}$. □

Proposición 3.2. *Si $T_0 = max\{T_1, 2R\}$ entonces, para $T > T_0$ existe una constante $C(T) > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \leq C(T)\iint a(x)|u_t|^2 \tag{3.66}$$

Demostración. Sea $T > T_0$ y supongamos que (3.66) no es verdadera entonces existe una sucesión de soluciones u_m de (0.1) con datos iniciales $\{u_{0,m}, u_{1,m}\} \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que satisface la expresión

$$\frac{|u_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}}{\iint a(x)|(u_m)_t|^2} \to +\infty. \tag{3.67}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos

$$v_m = \frac{u_m}{\lambda_m}, \tag{3.68}$$

donde

$$\lambda_m = |u_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}.$$

Multiplicando la ecuación (0.1) por $\dfrac{1}{\lambda_m}$ se tiene que la función v_m cumple

$$(v_m)_{tt} - \Delta v_m + \alpha(x)v_m + f_m(v_m) + a(x)(v_m)_t = 0 \ \text{ en } \ \mathbb{R}^n \times (0,T), \tag{3.69}$$

donde $f_m(s) = \dfrac{1}{\lambda_m}f(\lambda_m s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Por otro lado de (3.68) obtenemos

$$|v_m|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 1, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{3.70}$$

De (3.67) se obtiene

$$\frac{|v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}}{\displaystyle\iint a(x)|(v_m)_t|^2} \to +\infty. \tag{3.71}$$

Luego, de (3.70) y (3.71) obtenemos

$$\iint a(x)|(v_m)_t|^2 \to 0. \tag{3.72}$$

Trabajando similarmente como en el capítulo anterior deducimos:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\Big[|\nabla v_m(x,t)|^2 + |(v_m)_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|v_m(x,t)|^2\Big]dx + \int_{\mathbb{R}^n} F_m(v_m(x,t))dx,$$

la energía asociada al sistema (3.69) donde $F_m(s) = \displaystyle\int_0^s f_m(\xi)d\xi$, para todo $s \in \mathbb{R}$.
Además

$$\frac{d}{dt}E_m(t) = -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(v_m(x,t))_t|^2 dx,$$

integrando desde 0 hasta T se obtiene

$$E_m(0) = E_m(T) + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(v_m(x,t))_t|^2 dxdt. \tag{3.73}$$

Trabajando similarmente como la proposición 3.1, obtenemos

$$E_m(T) \leq C\left\{\iint a(x)|(v_m)_t|^2 + |v_m|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}\right\}.$$

Usando las ecuaciones (3.73) y (3.70) se obtiene

$$E_m(0) \leq C_1\left\{1 + \iint a(x)|(v_m)_t|^2\right\}, \tag{3.74}$$

donde $C_1 = \max\{C, C+1\}$.
Por (3.72) se obtiene

$$E_m(0) \leq C_1.$$

Sea $t \geq 0$, como la energía es no creciente se tiene:

$$E_m(t) \leq E_m(0),$$

luego

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\Big[|\nabla v_m(x,t)|^2 + |(v_m)_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|v_m(x,t)|^2\Big]dx + \int_{\mathbb{R}^n} F_m(v_m(x,t))dx \leq C_1.$$

Integrando desde 0 hasta T se obtiene

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\Big[|\nabla v_m(x,t)|^2 + |(v_m)_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|v_m(x,t)|^2\Big]dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} F_m(v_m(x,t))dxdt \le C_1T \tag{3.75}$$

De la desigualdad (3.75) obtenemos

$$\Big(v_m\Big) \text{ está acotada en } L^2(B_{4R}\times(0,T)), \tag{3.76}$$

$$\Big((v_m)_t\Big) \text{ está acotada en } L^2(B_{4R}\times(0,T)), \tag{3.77}$$

$$\Big(v_m\Big) \text{ está acotada en } H^1(\mathbb{R}^n\times(0,T)). \tag{3.78}$$

De (3.76), (3.77) y como $H^1(B_{4R})$ tiene inmersión compacta en $L^2(B_{4R})$, usando el lema 1.4.15 (de Lions – Aubin) se obtiene

$$v_m \to v \text{ fuertemente en } L^2(B_{4R}\times(0,T)), \tag{3.79}$$

$$v_m \to v \text{ casi siempre en } B_{4R}\times(0,T). \tag{3.80}$$

También de (3.78) existe una subsucesión (denotada de la misma forma) tal que

$$v_m \rightharpoonup v \text{ débilmente en } H^1(\mathbb{R}^n\times(0,T)). \tag{3.81}$$

Afirmación 3.2.

$$|v|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 1.$$

En efecto, por (3.79) se tiene

$$|v_m|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \to |v|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}$$

y por (3.70) se obtiene

$$|v|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 1$$

Afirmación 3.3.

$$v_t = 0 \text{ casi siempre en } \{a>0\}\times(0,T).$$

En efecto, por (3.72) se tiene

$$\iint \left|a^{\frac{1}{2}}(x)(v_m)_t\right|^2 \to 0,$$

luego

$$a^{\frac{1}{2}}(x)(v_m)_t \to 0 \text{ fuerte en } L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T)). \tag{3.82}$$

Por otro lado de (3.75), se obtiene

$$(v_m)_t \rightharpoonup v_t \text{ débil en } L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T)),$$

entonces

$$a^{\frac{1}{2}}(x)(v_m)_t \rightharpoonup a^{\frac{1}{2}}(x)v_t \text{ débil en } L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T)). \tag{3.83}$$

De (3.82) y (3.83) se obtiene por unicidad de límite débil, que

$$a^{\frac{1}{2}}(x)v_t = 0.$$

Multiplicando por $a^{\frac{1}{2}}(x)$, se obtiene

$$a(x)v_t = 0 \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T)),$$

entonces

$$v_t = 0 \text{ casi siempre en } \mathbb{R}^n\times(0,T).$$

Por lo tanto

$$v_t = 0 \text{ casi siempre en } \{a>0\}\times(0,T).$$

Distinguiremos tres casos, para la sucesión $\{\lambda_m\}$.

Primer caso: Existe una subsucesión de $\{\lambda_m\}$ (denotada de la misma manera) tal que:

$$\lambda_m \to \lambda \text{ en } \mathbb{R}_+,\ \lambda \in (0, +\infty). \tag{3.84}$$

Afirmación 3.4.

$$f(\lambda_m v_m) \text{ es acotada en } L^2(B_{4R} \times (0,T)).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
|f(\lambda_m v_m)|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} &= \iint_{B_{4r}} |f(\lambda_m v_m)|^2 \\
&\leq \iint_{B_{4r}} \Big[C\left(1 + |\lambda_m v_m|^{p-1}\right)|\lambda_m v_m|\Big]^2 \\
&\leq C^2 \iint_{B_{4r}} \Big(|\lambda_m v_m| + |\lambda_m v_m|^p\Big)^2 \\
&\leq 2C^2 \iint_{B_{4r}} \Big(|\lambda_m v_m|^2 + |\lambda_m v_m|^{2p}\Big) \\
&= 2C^2\Big(|\lambda_m|^2 |v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + |\lambda_m|^{2p}|v_m|^{2p}_{L^{2p}(B_{4R}\times(0,T))}\Big).
\end{aligned}$$

Como $H^1(B_{4R}\times(0,T))) \hookrightarrow L^{2p}(B_{4R}\times(0,T)))$, entonces

$$|f(\lambda_m v_m)|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \leq 2C^2\Big(|\lambda_m|^2 |v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + |\lambda_m|^{2p}|v_m|^{2p}_{H^1(B_{4R}\times(0,T))}\Big). \tag{3.85}$$

Como la sucesión $\{\lambda_m\}$ es acotada, existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$|\lambda_m| \leq C_2, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{3.86}$$

Reemplazando (3.86) en (3.85) se obtiene

$$|f(\lambda_m v_m)|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \leq 2C^2\Big(C_2^2 |v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + C_2^{2p}|v_m|^{2p}_{H^1(B_{4R}\times(0,T))}\Big).$$

De (3.76) y (3.78) se obtiene

$$|f(\lambda_m v_m)|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} < \infty,$$

es decir,

$$\{f(\lambda_m v_m)\} \text{ es acotada en } L^2(B_{4R}\times(0,T)).$$

Usando la hipótesis (0.3), (3.80) y (3.84) se obtiene

$$f(\lambda_m v_m) \to f(\lambda v) \text{ casi siempre en } B_{4R}\times(0,T). \tag{3.87}$$

De (3.87), de la afirmación 3.4 y por el lema 1.4.14 (de Lions), se obtiene

$$f(v_m) \rightharpoonup f(v) \text{ débil en } L^2(B_{4R}\times(0,T)). \tag{3.88}$$

De (3.88) y (3.84) obtenemos

$$f(v_m) = \frac{f(\lambda_m v_m)}{\lambda_m} \rightharpoonup \frac{f(\lambda v)}{\lambda} \text{ débil en } L^2(B_{4R}\times(0,T)). \tag{3.89}$$

Pasando al límite (3.69) y teniendo en cuenta (3.72) y (3.89), se obtiene

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha(x)v + \frac{f(\lambda v)}{\lambda} = 0 \ \text{ en } \ B_{4R} \times (0,T),$$

derivando la ecuación precedente se obtiene

$$w_{tt} - \Delta w + \alpha(x)w + f'(\lambda v)w = 0 \ \text{ en } \ B_{4R} \times (0,T), \tag{3.90}$$

donde $w = v_t$.

Segundo caso: Existe una subsucesión de $\{\lambda_m\}$ (denotada de la misma manera) tal que:

$$\lambda_m \to 0 \tag{3.91}$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$, definamos

$$g_m(s) = \begin{cases} \dfrac{f_m(s)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ 0 & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Afirmación 3.5.

$$\{g_m(v_m)v_m\} \ \text{ es acotada en } L^2(B_{4R} \times (0,T)).$$

En efecto, Como

$$|g_m(v_m)v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = \frac{1}{\lambda_m^2} \iint_{B_{4r}} |f(\lambda_m v_m)|^2,$$

entonces por la afirmación 3.4 y (3.91) se tiene

$$|g_m(v_m)v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} < \infty$$

es decir,

$$\{g_m(v_m)v_m\} \ \text{ es acotada en } L^2(B_{4R} \times (0,T)).$$

De (3.80), de la afirmación 3.5 y por el teorema 1.4.10, existe una subsucesión (denotada de la misma forma) tal que

$$g_m(v_m)v_m \rightharpoonup p(x,t) \text{ débil en } L^2(B_{4R} \times (0,T)), \tag{3.92}$$

para algún $p(x,t) \in L^2_+(B_{4R} \times (0,T))$.
Además

$$g_m(v_m) = \frac{f(\lambda_m v_m)}{\lambda_m v_m} = \frac{f(\lambda_m v_m) - f(0)}{\lambda_m v_m - 0},$$

entonces

$$g_m(v_m) \to f'(0) \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T).$$

Usando (3.80) obtenemos

$$g_m(v_m)v_m \to f'(0)v \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T).$$

De la afirmación 3.5 y el lema 1.4.14 (de Lions) se obtiene

$$f_m(v_m) = g_m(v_m)v_m \rightharpoonup f'(0)v \text{ débil en } L^2(B_{4R} \times (0,T)). \tag{3.93}$$

De (3.92), (3.93) y por unicidad de límite, se obtiene

$$p(x,t)v = f'(0)v \text{ en } L^2(B_{4R} \times (0,T)).$$

Por lo tanto

$$p(x,t)v = f'(0)v \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T). \tag{3.94}$$

Pasando al límite (3.69) y teniendo en cuenta (3.72) y (3.93), se obtiene

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha(x)v + f'(0)v = 0 \;\text{ en }\; B_{4R} \times (0,T)$$

derivando la ecuación precedente se obtiene

$$w_{tt} - \Delta w + \alpha(x)w + f'(0)w = 0 \;\text{ en }\; B_{4R} \times (0,T) \tag{3.95}$$

donde $w = v_t$.

Tercer caso: Existe una subsucesión de $\{\lambda_m\}$ (denotada de la misma manera) tal que:

$$\lambda_m \to +\infty. \tag{3.96}$$

Primero supongamos que la condición (3.2) es verdadera.
Haciendo $w_m = (v_m)_t$ y derivando la ecuación (3.69) se obtiene

$$(w_m)_{tt} - \Delta w_m + \alpha(x)w_m + f'(\lambda_m v_m)w_m + a(x)(w_m)_t = 0 \;\text{ en }\; B_{4R} \times (0,T). \tag{3.97}$$

Afirmación 3.6.

$$\{f'(\lambda_m v_m)w_m\} \text{ es acotada en } L^2(B_{4R} \times (0,T))$$

En efecto,

$$\left|f'(\lambda_m v_m)w_m\right|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = \iint_{B_{4R}} \left|f'(\lambda_m v_m)w_m\right|^2 = \iint_{B_{4R}} \left|f'(\lambda_m v_m)\right|^2 \left|w_m\right|^2.$$

Como $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ entonces

$$\left|f'(\lambda_m v_m)w_m\right|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \le \left|f'\right|_\infty^2 \iint_{B_{4R}} |w_m|^2 = \left|f'\right|_\infty^2 |w_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}$$

y por (3.77) se obtiene:

$$\left|f'(\lambda_m v_m)w_m\right|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} < \infty.$$

Por lo tanto

$$\{f'(\lambda_m v_m)w_m\} \text{ es acotada en } L^2(B_{4R} \times (0,T)).$$

De la afirmación 3.6 y por el teorema 1.4.10, existe una subsucesión (denotada de la misma forma) tal que:

$$f'(\lambda_m w_m)w_m \rightharpoonup p(x,t) \text{ débil en } L^2(B_{4R} \times (0,T)). \tag{3.98}$$

Afirmación 3.7. Para cada $(x,t) \in B_{4R}\times(0,T)$, la sucesión $(\lambda_m v_m(x,t))_{m\in\mathbb{N}}$ es divergente.

En efecto, supongamos que para $(x,t) \in B_{4R} \times (0,T)$, la sucesión $(\lambda_m v_m(x,t))_{m\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_m v_m(x,t) \to L$ y como $\dfrac{1}{\lambda_m} \to 0$ entonces $v_m(x,t) \to 0$ contradicción con (3.70).

Afirmación 3.8.

$$p(x,t) = \left(f'_+\chi\{v>0\} + (f'_-\chi\{v<0\}\right) w \text{ casi siempre en } B_{4R}\times(0,T).$$

En efecto, como $\lambda_m \to +\infty$ tenemos
Si $v_m < 0$ entonces $\lambda_m v_m \to -\infty$, por lo tanto $\lim\limits_{m\to+\infty} f'(\lambda_m v_m) \to f'(-\infty) < \infty$,
Si $v_m > 0$ entonces $\lambda_m v_m \to +\infty$, por lo tanto $\lim\limits_{m\to-\infty} f'(\lambda_m v_m) \to f'(+\infty) < \infty$,
y desde que $f'(+\infty)$ y $f'(-\infty) \in \mathbb{R}$ entonces

$$f'(\lambda_m v_m) \to f'_+\chi\{v>0\} + (f'_-\chi\{v<0\} \text{ casi siempre en } B_{4R}\times(0,T).$$

Usando (3.80) se tiene

$$f'(\lambda_m v_m)w_m \to \left(f'_+\chi\{v>0\} + (f'_-\chi\{v<0\}\right) w \;\text{ casi siempre en } B_{4R}\times(0,T). \tag{3.99}$$

De (3.99), de la afirmación 3.6 y el lema 1.4.14 (de Lions) se tiene

$$f'(\lambda_m v_m)w_m \rightharpoonup \left(f'_+\chi\{v>0\} + (f'_-\chi\{v<0\}\right) w \;\text{ débil en } L^2(B_{4R}\times(0,T)). \tag{3.100}$$

De (3.100); (3.98) y unicidad de límite se tiene

$$p(x,t) = \left(f'_+\chi\{v>0\} + (f'_-\chi\{v<0\}\right) w \; en \; L^2(B_{4R}\times(0,T)).$$

Por lo tanto

$$p(x,t) = \left(f'_+\chi\{v>0\} + (f'_-\chi\{v<0\}\right) w \text{ casi siempre en } B_{4R}\times(0,T).$$

Pasando al límite (3.97), teniendo en cuenta (3.72) y (3.93), se obtiene

$$w_{tt} - \Delta w + \alpha(x)w + q(x,t)w = 0 \;\text{ en }\; B_{4R}\times(0,T), \tag{3.101}$$

donde $q(x,t) = f'_+\chi\{v>0\} + (f'_-\chi\{v<0\}$.

Cuando la condición (3.3) es verdadera, pasando al limite (3.69), derivando y teniendo en cuenta la afirmación 3.3 se obtiene (3.101) donde $q(x,t) = l$.

Afirmación 3.9.

$$\{F_m(v_m)\} \text{ es uniformente acotada en } L^1(B_{4R}\times(0,T)),$$

donde $F_m(s) = \displaystyle\int_0^s f_m(\xi)d\xi = \frac{1}{\lambda_m^2}F_m(\lambda_m s)$.

En efecto, de (3.75) se tiene

$$\iint_{B_{4R}} F_m(v_m) \le C_1 T, \text{ para todo } m \ge 1.$$

Luego

$$|F_m(v_m)|_{L^1(B_{4R}\times(0,T))} \le C_1 T, \text{ para todo } m \ge 1.$$

Por lo tanto $\{F_m(v_m)\}$ es uniformente acotada en $L^1(B_{4R}\times(0,T))$.

Afirmación 3.10.

$$F(s) \ge C_6|s|^{2+\delta}, \quad \forall |s| \ge 1,$$

donde $C_6 = \min\{F(1), F(-1)\}$.

En efecto, cuando $s \geq 1$ tenemos:

a) Si $F(1) = 0$ entonces $C_6 = 0$,

b) Si $F(1) > 0$ entonces $0 < F(1) < F(s), \ \forall s \geq 1$.

Usando la condición (3.4) se tiene

$$sF'(s) \geq (2+\delta)F(s)$$

luego

$$\frac{F'(s)}{F(s)} \geq \frac{2+\delta}{s}.$$

Integrando desde s hasta 1 se obtiene

$$F(s) \geq F(1)|s|^{2+\delta}.$$

Cuando $s \leq -1$ es igual a la demostración anterior.

Observación 3.3. Cuando se trabaja con la condición (3.4) del teorema 3.1, el caso $\lambda_m \to +\infty$ no se cumple.

En Efecto, supongamos que se cumple $\lambda_m \to +\infty$, entonces por la afirmacioón 3.9 se tiene

$$\begin{aligned} C &\geq \iint_{B_{4R}} F_m(v_m) \\ &\geq \iint_{\left\{|v_m| \geq \lambda_m^{-1}\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} F_m(v_m) + \iint_{\left\{|v_m| \leq \lambda_m^{-1}\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} F_m(v_m) \\ &= \frac{1}{\lambda_m^2} \iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \geq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} F(\lambda_m v_m) + \frac{1}{\lambda_m^2} \iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \leq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} F(\lambda_m v_m) \end{aligned}$$

y por la afirmación 3.10 se obtiene

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{1}{\lambda_m^2} \iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \geq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} C_6|\lambda_m v_m|^{2+\delta} + \frac{1}{\lambda_m^2} \iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \leq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} F(\lambda_m v_m) \\ &= C_6|\lambda_m|^\delta \iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \geq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} |v_m|^{2+\delta} + \frac{1}{\lambda_m^2} \iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \leq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} F(\lambda_m v_m). \end{aligned}$$

Considerando $C_7 = min\{C_6, 1\}$ se tiene

$$|\lambda_m|^\delta \iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \geq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} |v_m|^{2+\delta} + \frac{1}{\lambda_m^2} \iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \leq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} F(\lambda_m v_m) \leq C_8,$$

donde $C_8 = C_5 C_7^{-1}$.
Como la segunda integral es positiva se tiene:

$$|\lambda_m|^\delta \iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \geq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} |v_m|^{2+\delta} \leq C_8,$$

dividiendo entre $|\lambda_m|^\delta$ se obtiene:

$$\iint_{\left\{|\lambda_m v_m| \geq 1\right\} \bigcap \left\{B_{4R}\times(0,T)\right\}} |v_m|^{2+\delta} \leq \frac{C_8}{|\lambda_m|^\delta}.$$

Usando la inmersión $L^{2+\delta}(B_{4R}) \hookrightarrow L^2(B_{4R})$ se obtiene

$$\iint_{\{|\lambda_m v_m|\geq 1\} \bigcap \{B_{4R}\times(0,T)\}} |v_m|^2 \leq \frac{C_8}{|\lambda_m|^\delta}.$$

Finalmente teniendo en cuenta (3.79) y tomando límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$\iint_{B_{4R}\times(0,T)} |v|^2 \to 0,$$

es decir,

$$|v|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 0$$

contradición con la afirmación 3.2.
Por lo tanto no se cumple $\lambda_m \to +\infty$ al considerar la condición (3.4) del teorema 3.1.
Resumiendo (3.90); (3.95) y (3.101) se tiene que $w \in L^2(B_{4R} \times (0,T))$ cumple

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + \alpha(x)w + b(x,t)w = 0 \quad \text{en} \quad B_{4R} \times (0,T) \\ w = 0 \text{ c.s. en } \{a > 0\} \times (0,T) \end{cases} \tag{3.102}$$

para algún potencial $b(x,t) \geq 0$ donde $b(x,t) \in L^\infty_+(B_{4R}\times(0,T))$ ó $b(x,t) \in L^\infty_+(0,T; L^n(B_{4R}))$ cuando $(n-2)p \leq n$.
Luego si se considera $T > diam(B_{4R}) > 2R$ por el teorema 1.5.7 (Principio de continuación única) se tiene

$$w = 0 \text{ en } B_{4R} \times (0,T),$$

es decir,

$$v_t = 0 \text{ en } B_{4R} \times (0,T).$$

Por lo tanto

$$v = v(x) \in H^1(\mathbb{R}^n), \tag{3.103}$$

es decir, v es independiente de la variable t.
Finalmente tomando límite en (3.69) y teniendo en cuenta (3.103) obtenemos

$$-\Delta v + \alpha(x)v + p(x,t)v = 0 \text{ en } B_{4R} \times (0,T).$$

Multiplicando la ecuación precedente por v e integrando sobre $B_{4R} \times (0,T)$ se obtiene

$$\iint_{B_{4R}} |\nabla v|^2 + \iint_{B_{4R}} \alpha(x)|v|^2 + \iint_{B_{4R}} p(x,t)|v|^2 = 0,$$

entonces

$$|\alpha^{1/2}v|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 0.$$

Por lo tanto

$$\alpha^{1/2}v = 0 \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T).$$

Luego

$$v = 0 \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T),$$

lo que contradice la afirmación 3.2. Lo cual concluye la demostración de la proposición 3.2. □

Observación 3.4. De la proposición 3.1 y 3.2 se tiene que existe una constante $C(T) = C > 0$ tal que

$$E(T) \leq C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.1. -
De la observación 3.4 y de (3.1), obtenemos

$$E(T) \leq \frac{C}{C+1} E(0). \tag{3.104}$$

Por la teoría de semigrupo la solución de la ecuación (0.1) se puede escribir de la forma

$$u(t) = S(t)u_0,$$

luego si $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$E(nT) = E(S(nT)u_0) = E(S(T)S((n-1)T)u_0),$$

Aplicando la desigualdad (3.104) cuando el dato inicial es $S((n-1)T)u_0$ obtenemos

$$E(nT) = E(S(nT)u_0) = E(S(T)S((n-1)T)u_0) \leq \frac{C}{C+1} E(S((n-1)T)u_0).$$

Repitiendo el mismo proceso $(n-1)$ veces, obtenemos

$$E(nT) \leq \left(\frac{C}{C+1}\right)^n E(S(0)u_0) = \left(\frac{C}{C+1}\right)^n E(0).$$

Para t cualquiera y T fijo, existen $n \in \mathbb{Z}^+$, $r \in \mathbb{Z}$ tal que $t = nT + r$.
Considerando $s = nT$ se tiene

$$\begin{aligned} E(s) &\leq \left(\frac{C}{C+1}\right)^{\frac{s}{T}} E(0) \\ &\leq \left(\frac{C}{C+1}\right)^{\frac{s}{T}} \left(\frac{C+1}{C}\right) E(0) \\ &= \left(\frac{C+1}{C}\right) E(0) e^{-\frac{1}{T} ln\left(\frac{1+C}{C}\right) s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E(s) \leq C_0 E(0) e^{-\gamma s}, \text{ para todo } s \geq 0,$$

donde $\gamma = \dfrac{1}{T} ln\left(\dfrac{1+C}{C}\right) > 0$ y $C_0 = \dfrac{1+C}{C} > 1$. □

Bibliografía

[1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces.* New York; Academic Press, 1975.

[2] Bardos, C., Lebeau, G. and Rauch, J.: *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the bourdary*, submitted to S.I.A.M. J. Con. Optim. 1992.

[3] Bardos, C. Lebeau, G. and Rauch, J.: *Contrôle stabilisation dans les problèmes hyperboliques*, Appendix II in J.-L. Lions, 1988.

[4] Brézis, H. *Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications.* Paris: Mason, 1973.

[5] Cabanillas Lapa, E. Estabilización de la energía para una ecuación de Kirchoff con disipación localizada. Revista *PESQUIMAT*, Vol VII N° 1. FCM−UNMSM, 2004

[6] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N. *Introdução à Teoria das distribuções e aos Espaços de Sobolev.* Maringá, texto do Dep. Matemática UEM, 2009.

[7] Edwards R.E. *Functional Analysis. Theory and applications.* Holt, Rinehart and Winston, New York. 1965

[8] E. Kreyszig, *Introductory Functional analysis with applications.* John Wiley E Sons, 1978.

[9] Haraux A. *Semilinear Hyperbolic problems in bounded domains*, Math. Rep., 3, Part 1, J. Dieudonné Ed. Harwood Academic Publishers, Gordon Breach, 1987.

[10] Kesavan, S. T*opics in Functional Analysis and Applications.* New Delhi: Willey Easten Limited, 1990.

[11] Lions, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problemes aux Limites non linéaires.* Paris: Dunod, 1969.

[12] Lions, J. L: M*agenes, E. Problèmes aux Limites non homogènes*, aplications, Vol 1, Dunod, Paris, 1968.

[13] Lions, J. L. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systemes distribués.* Tome 1. contrôlabilit exacte, RMA8, Masson, 1988.

[14] Medeiros, L. A. Mello, E. A. *A Integral de Lebesgue. Rio de Janeiro.* Textos de Métodos Matemt́icos 18, UFRJ, 1985.

[15] Medeiros, L. A. Rivera, P.H. *Espaços de Sobolev e Aplicações as Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos 9. Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 1977.

[16] Muñoz R., J. Bisognin V.: *Exponential decay to partially thermoelaste materials.* LNCC RJ Brasil, 1996.

[17] Pazy A. *Semigroup of linear Operators and applications to partial differential equations*. Springer Verlag. New York, 1993.

[18] Pérez Salvatierra, A. Decaimento de soluções de equações parcialmente Viscoláelasticos, Tesis doctorado UFRJ Brasil, 1997.

[19] Pérez Salvatierra, A. Comportamiento asintótico para materiales parcialmente termoelástico. Revista *PESQUIMAT* FCM UNMSM, 1999.

[20] Pérez Salvatierra, A: Decaimientos exponencial de la ecuación de onda con potencial y amortiguamiento localmente distribuido. Revista *PESQUIMAT* FCM–UNMSM, Vol. VII N1, 2004.

[21] Portillo Oquendo, H. Muñoz R. J. Sobre um problema de contacto unidimensional de ondas elásticas localmente amortecidas SBA 46 *Seminário Brasileiro de Analise*, 1997.

[22] Rauch J. and Taylor, M.: *Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains*, Indiana Univ. Math. J. 24, pp. 79 - 86, 1974.

[23] Rivera Rodríguez, Pedro H. *Introducción a la teoría de distribuciones*. Textos de Métodos Matemáticos NÂ° 6. Rió de Janeiro, 1974.

[24] Ruiz. A. Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potencial, J. Math. Pures Appl., 71, pp 455 467, 1992.

[25] Zuazua, E. Exponential decay for the semilinear wave equations, with locally distributed damping, *Commu. Partial Diff. Equations*, 15 (2), pp 205 - 235, 1990.

[26] Zuazua, E. Exponential decay for the semilinear wave equations, with localized Damping in Unbounded Domains, J. *Math Pures et Appl.*, 70, pp 513 - 529, 1991.

[27] Zuazua, E. Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems, *Asymptotic Anal.* I, 1988.