



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq de ondas en espacios de Sobolev periódico

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Victor Johnny PAPUICO BERNARDO

ASESOR

Dra. Yolanda Silvia SANTIAGO AYALA

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Papuico, V. (2021). *Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq de ondas en espacios de Sobolev periódico*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Victor Johnny Papuico Bernardo
DNI	41656669
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-8835-7922
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Yolanda Silvia Santiago Ayala
DNI	06445705
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-2516-0871
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Análisis Funcional
Grupo de investigación	Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Análisis y Aplicaciones - GEDAAp
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Villa el Salvador Latitud: -12.1985200 Longitud: -76.9448300
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2018 - 2020
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras. https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA PURA

Siendo las ,16:10 horas del día martes tres de agosto del dos mil veintiuno, en la sala virtual <https://meet.google.com/bwn-cbjj-yzy>, el Jurado de Tesis conformado por los siguientes docentes:

PRESIDENTE	:	Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
MIEMBRO	:	Dr. José Raúl Luyo Sanchez
MIEMBRO EXTERNO	:	Dr. George José Bautista Sanchez
MIEMBRO ASESORA	:	Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: **«EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ DE ONDAS EN ESPACIOS DE SOBOLEV PERIÓDICO»** presentada por el Br. Victor Johnny Papuico Bernardo, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Bachiller Victor Johnny Papuico Bernardo, el calificativo de 18.

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura al Bachiller Victor Johnny Papuico Bernardo**.

Siendo las 17:17 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta



Firmado digitalmente por:
SANTARIA LEUYACC Yony
Raul FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del
documento
Fecha: 17/08/2021 14:14:09-0500

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
Presidente

Dr. José Raúl Luyo Sanchez
Miembro

Dr. George José Bautista Sanchez
Miembro externo

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro Asesor

FICHA CATALOGRÁFICA

PAPUICO BERNARDO, VICTOR JOHNNY

Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq de ondas en espacios de Sobolev periódico, (Lima) 2021.

viii, 168 p., 29,7 cm. (UNMSM, Magíster, Matemática, 2021)

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,

Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática

I. UNMSM-Facultad de Ciencias Matemáticas

II. Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq de ondas en espacios de Sobolev periódico (Ecuaciones en derivadas parciales).



Agradecimientos

Este presente trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo y estímulo de mi profesora y asesora, Dra. Yolanda Santiago, bajo cuya orientación, supervisión y sugerencia escogí este hermoso tema.

Deseo agradecer a los miembros del jurado de tesis, quienes me apoyaron con la revisión y sugerencias. A través de sus dudas y comentarios me motivaron a seguir profundizando en el estudio de la Ecuación de Boussinesq.

Además, quiero agradecer a mi familia. A mis padres, cuyo estímulo constante y amor he confiado a lo largo de mis años en la universidad. En especial a mi padre quien ya no está conmigo físicamente. Sin embargo, siempre me acompaña espiritualmente y cuida de los pasos que damos todos en mi familia. A mi esposa por todo su amor y comprensión. A mis hijos, Briseida y Gael, quienes son la luz de mi vida y el motivo para ser mejor cada día.

Es a ellos a quienes dedico este trabajo.



Resumen

Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq de ondas en espacios de Sobolev periódico

PAPUICO BERNARDO VICTOR JOHNNY

AGOSTO-2021

Orientadora: Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Grado obtenido: Magíster en Matemática Pura

En este trabajo probamos que el problema Cauchy asociado a la ecuación de Boussinesq, homogénea y no homogénea, en espacios de Sobolev periódico está bien puesto en el sentido de Hadamard. Hacemos esto en un modo intuitivo usando la teoría de Fourier y en una versión elegante usando la teoría de operadores fuertemente continuos, inspirados en Iorio [3].

PALABRAS CLAVES: Teoría de Fourier, Espacios de Sobolev Periódico y Ecuación de Boussinesq.



Abstract

Existence of solution of the Boussinesq wave equation in periodic Sobolev spaces

PAPUICO BERNARDO VICTOR JOHNNY

AUGUST-2021

Advisor: Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Degree: Magister in Pure Mathematic

In this work we prove that the Cauchy problem associated to the Boussinesq's equation, homogeneous and non-homogeneous, in periodic Sobolev spaces is well posed in the sense Hadamard. We do this an intuitive way using Fourier theory and in a elegant versión using strongly continuous operator theory, inspired by Iorio [3].

KEY WORDS: Fourier theory, Periodic Sobolev Spaces and Boussinesq equation's



Índice de figuras

1.	Profundidad constante. Elaboración propia.	2
2.	Movimiento bidimensional de las ondas. Elaboración propia.	2
2.1.	f y f' seccionalmente continuas. Fuente: Elaboración propia.	28
2.2.	Identidad aproximada $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$. Fuente: Elaboración propia.	36
2.3.	Núcleos de Féjer. Fuente: Elaboración propia.	42
2.4.	Núcleos de Dirichlet. Fuente: Elaboración propia.	48
2.5.	Núcleos de Poisson. Fuente: Elaboración propia.	52
4.1.	ψ_n . Fuente: Elaboración propia.	76
5.1.	\mathcal{P} y \mathcal{P}^* . Fuente: Elaboración propia.	92
7.1.	Ondas en aguas poco profundas. Fuente: https://www.shutterstock.com	127

Índice de notaciones y símbolos

$C_{per}^k([-l, l])$	Espacio de las funciones periódicas complejas de clase C^k en $[-l, l]$
$\ \cdot\ _{\infty, k}$	La norma de $C_{per}^k([-l, l])$
$\hat{f}(k)$	Coefficiente de Fourier de la función f
$\ell^\infty(\mathbb{Z})$	Espacio de las sucesiones complejas acotadas
L^2	Espacio de las funciones cuadrado integrables
$K_N(x)$	Núcleo de Féjer
$D_N(x)$	Núcleo de Dirichlet
$P_r(x)$	Núcleo de Poisson
\mathcal{P}	Espacio de las funciones periódicas, de periodo 2π , complejas de clase C^∞
$\mathcal{S}(\mathbb{Z})$	Espacio de las sucesiones rápidamente decrecientes
\mathcal{P}'	Espacio de las distribuciones periódicas
$\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$	Espacio de las sucesiones complejas de crecientes lento
$H_{per}^s([- \pi, \pi])$	Espacio de Sobolev periódico de orden s
$\ \cdot\ _s$	Norma en $H_{per}^s([- \pi, \pi])$



Índice general

Resumen	iv
Abstract	v
Índice de figuras	vi
Índice de notaciones y símbolos	vii
Índice general	viii
Introducción	1
1. Motivación	1
1.1. Ecuación del calor	1
2. Funciones periódicas de clase C^k	10
2.1. Series de Fourier	10

2.2.	Diferenciabilidad y coeficientes de Fourier	19
2.3.	Teorema de la convergencia de Fourier	22
2.4.	Núcleos de Féjer, Dirichlet y Poisson	30
3.	Funciones Periódicas de clase C^∞	53
3.1.	Completitud de \mathcal{P}	53
3.2.	Caracterización de la Transformada de Fourier en \mathcal{P}	58
3.3.	Convolución en \mathcal{P}	64
4.	Distribuciones Periódicas	71
4.1.	Generalizando las funciones	71
4.2.	Convergencia de sucesiones en \mathcal{P}'	77
4.3.	Operaciones en \mathcal{P}'	79
5.	Series de Fourier en \mathcal{P}'	88
5.1.	Dualidad entre \mathcal{P} y \mathcal{P}'	88
5.2.	Caracterización de \mathcal{P}' mediante la Transformada de Fourier	92
5.3.	Convolución en \mathcal{P}'	100
6.	Espacios de Sobolev periódicos	114
6.1.	\mathcal{P} y espacios de Sobolev	114
6.2.	Algunas propiedades de los espacios de Sobolev	120
7.	Ecuación lineal de Boussinesq	127
7.1.	Introducción	127
7.2.	Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq	129
7.3.	Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq no homogénea	148
8.	Conclusiones	165
	Bibliografía	166

Introducción

El objetivo de la presente investigación es modelar el caso bidimensional del movimiento de las ondas sobre aguas poco profundas con amplitud pequeña que se propagan a una velocidad uniforme en un canal de profundidad constante. Es decir, modelar los fenómenos como la formación de olas. Tratamos de tomar en consideración también la respuesta del movimiento de las olas a la interacción con el medio. El modelo que proponemos consiste de una ecuación diferencial denominada problema de Cauchy asociado a la ecuación de la onda lineal no homogénea de cuarto orden de Boussinesq

$$(Q_2) \left\{ \begin{array}{l} u(t, x) \in C\left([0, +\infty[, H_{per}^s\right), \\ \partial_t^2 u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) - \partial_x^4 u(t, x) + F(t, x) \in H_{per}^{s-4}, \\ u(0, x) = \varphi(x) \in H_{per}^s, \\ \partial_t u(0, x) = \psi(x) \in H_{per}^{s-1}, \end{array} \right. \quad (1)$$

donde $F \in ([0; T], H_{per}^{s-1})$. En este problema estamos denotando por H_{per}^s al espacio de Sobolev periódico de orden s .

Las cantidades físicas principales que consideramos en nuestro problema son la forma inicial de la onda, la velocidad con la que se desplaza y la dispersión. A fin de cumplir con el objetivo planteado, estudiaremos la buena colocación, en el sentido de Hadamard, de la ecuación (1).

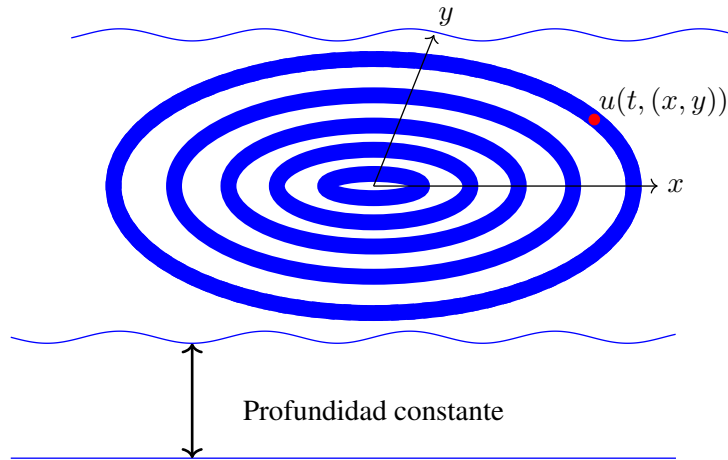


Figura 1: Profundidad constante. Elaboración propia.

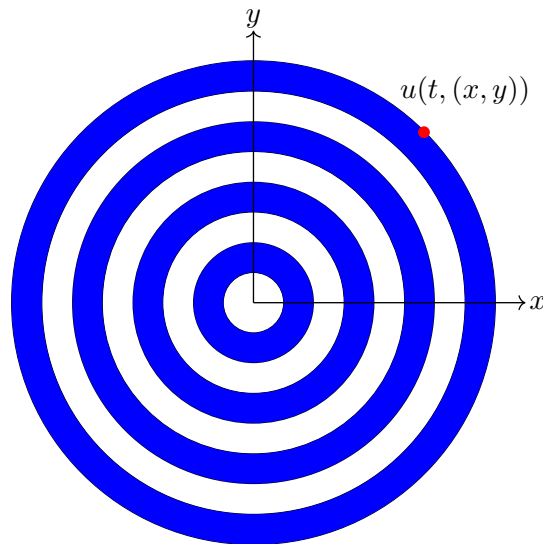


Figura 2: Movimiento bidimensional de las ondas. Elaboración propia.

Para una referencia del estudio acerca del movimiento de ondas en aguas poco profundas citamos [2]. Además, en Iorio [3] podemos encontrar un estudio de la ecuación de la onda en espacios de Sobolev periódicos. Trabajos relacionados al modelo (1), los encontramos en

Santiago y Rojas [14], y [15] de donde nos motivamos de las ideas ahí plasmadas.

El trabajo conlleva al estudio de ondas en aguas profundas. Esto es importante para el conocimiento del comportamiento de fenómenos físicos como el movimiento de las olas y tsunamis en mares y océanos. Además, el trabajo propone una alternativa de solución a ecuaciones de Boussinesq de orden mayor.

Para el estudio de (1), partiremos usando el análisis de Fourier en la ecuación homogénea. Analizaremos la dependencia continua, local y global de la solución respecto a los datos iniciales en espacios de Sobolev periódico.

El presente estudio está organizado como sigue: en el Capítulo 1, motivamos el tema resolviendo dos casos de la ecuación del calor. Además, daremos un primer vistazo de las series de Fourier. En el Capítulo 2, hablamos de las funciones de clase C^k y estudiamos la teoría de Fourier en estos espacios. En el Capítulo 3, trabajamos sobre el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y periódicas \mathcal{P} , y la caracterizaremos vía la transformada de Fourier. En el Capítulo 4 y 5, estudiaremos la teoría de Fourier en el espacio de las distribuciones periódicas o funciones generalizadas. Dos resultados importantes en el Capítulo 5 caracterizarán el espacio de las distribuciones vía la transformada de Fourier. Con ello, el espacio de las distribuciones periódicas resultará siendo el dual del espacio \mathcal{P} del Capítulo 3. En el Capítulo 6, estudiamos los espacios de Sobolev periódicos y mencionamos algunas propiedades. En el Capítulo 7, centramos nuestra atención en la ecuación de Boussinesq homogénea y no homogénea. Finalmente, en el Capítulo 8, damos algunas conclusiones de nuestro estudio.

Motivación

En este capítulo iniciaremos el estudio de las ecuaciones diferenciales. Para motivar el tema, estudiaremos dos ecuaciones que describen la conducción del calor en una barra. Usaremos el método de separación de variables como método de resolución de las ecuaciones. Cabe mencionar que, solo hallaremos un cantidad a solución. El objetivo es mostrar que la solución de la ecuación diferencial puede ser expresada como una serie en términos de senos y cosenos. Esto motivará el estudio de las funciones periódicas, en el siguiente capítulo.

SECCIÓN 1.1

Ecuación del calor

Proposición 1.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, f puede ser escrita de manera única como $f = g + h$, donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función par y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función impar.

Notación 1.1. Denotemos por $C([0, \ell]) = \{f / f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{C} \text{ y } f \text{ es continua}\}$, donde $\ell \in \mathbb{R}^+$ es un valor fijo y arbitrario.

Definición 1.1 (Producto interno). *Se denomina producto interno en $C([0, \ell])$ a la aplicación*

$$\begin{aligned} (\cdot / \cdot) : C([0, \ell]) \times C([0, \ell]) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (f/g) &\rightarrow (f/g) = \int_0^\ell f(x)\overline{g(x)}dx. \end{aligned}$$

Proposición 1.2. *Sean f y $g \in C^2(]0, \ell[) \cap C([0, \ell])$, tales que $f(0) = f(\ell) = g(0) = g(\ell)$.*

Si f'' y g'' son acotadas entonces

$$(-f''/g) = (f'/g') = (f/g - g'').$$

Proposición 1.3. *Dado el problema de conducción de calor en una barra*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^2(]0, \ell[\times]0, \infty[) \cap C([0, \ell] \times [0, \infty[) \\ \partial_t u = \partial_x^2 u, (x, t) \in (0, \ell] \times [0, +\infty) \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \in C([0, \ell]) \\ f(0) = f(\ell) = 0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

La solución del problema de valor inicial (PVI) está dada por

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} (f/\varphi_k) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \exp\left(\frac{-k^2\pi}{\ell^2}t\right),$$

para $k \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Supongamos que existe una solución $u(x, t)$ del problema (1.1) que satisface las tres primeras condiciones. El problema (1.1) es lineal y homogéneo. Por tanto, es aplicable el principio de superposición. Es decir, si $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de soluciones de (1.1) entonces $u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x, t)$ es solución de (1.1). Nuestra motivación será obtener los

α_i de forma que la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ sea satisfecha. Es decir,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x, 0) = f(x).$$

Para ello, usamos el método de separación de variables. Podemos considerar $u(x, t) = \varphi(x)T(t)$, donde $\varphi \in C^2(]0, \ell[) \cap C([0, \ell])$ y $T \in C^2(]0, +\infty[) \cap C([0, +\infty[)$. Luego, $u(x, t) = \varphi(x)T(t)$ satisface la condición $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$. Por ende, $\varphi(0)T(t) = \varphi(\ell)T(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Asimismo, si $\varphi(0) = 0$ entonces $T(t) = 0$. En consecuencia, $u(x, t) = 0$ y esto implica que $u \equiv 0$. Por tanto, $\varphi(0) = 0 = \varphi(\ell)$. Además, de la condición $\partial_t u = \partial_x^2 u$ se tiene $\varphi(x)T'(t) = \varphi''(x)T(t)$. Ahora, dividiendo esta igualdad entre $\varphi(x)T(t)$ obtenemos $-\lambda = T^{-1}(t)T'(t) = \varphi^{-1}(x)\varphi''(x)$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$ es una constante. Así, obtenemos

$$\begin{cases} T \in C^2(]0, +\infty[) \cap C([0, +\infty[) \\ T'(t) = -\lambda T(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Cuya solución es $T(t) = Ce^{-\lambda t}$, donde $C \in \mathbb{R}$ y φ satisface

$$\begin{cases} \varphi \in C^2(]0, \ell[) \cap C([0, \ell]) \\ \varphi''(x) = -\lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Si φ es solución de (1.3),

$$\lambda(\varphi/\varphi) = (\lambda\varphi/\varphi)(-\varphi''/\varphi) = (\varphi/\varphi - \varphi'') = \bar{\lambda}(\varphi/\varphi). \quad (1.4)$$

Además,

$$\lambda(\varphi/\varphi) = (\lambda\varphi/\varphi) = (-\varphi''/\varphi) = (\varphi'/\varphi'). \quad (1.5)$$

Como $(\varphi/\varphi) > 0$ y $(\varphi'/\varphi') \geq 0$, de (1.4), se tiene que $\lambda \in \mathbb{R}$ y de (1.5) $\lambda \geq 0$. Ahora,

$\lambda \neq 0$, pues si $\lambda = 0$, de (1.5), se tendría que

$$(\varphi'/\varphi') = \int_0^\ell |\varphi'(x)|^2 dx = 0.$$

Así, $\varphi'(x) = 0$ y $\varphi(x) = k$ (constante real) para todo $x \in \mathbb{R}$ y de los datos iniciales $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$ se tendría que $k = 0$. Por tanto, $\varphi \equiv 0$ lo cual es una contradicción. En conclusión, $\lambda > 0$. Luego, (1.3) se convierte en la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0, \lambda > 0.$$

Cuya solución es $\varphi(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$. Ahora, usando las condiciones de frontera se tiene

$$\varphi(0) = 0 = A \quad \text{y} \quad \varphi(\ell) = 0 = B = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\ell).$$

Como $B \neq 0$ entonces $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$. De donde, $\sqrt{\lambda}\ell = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}^+$. Así, obtenemos la familia $\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$ tales que

$$\varphi_k(x) = B \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Como $\lambda = \frac{k^2\pi}{\ell^2}$ obtenemos la familia $\{T_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$, tal que $T_k(t) = C \exp\left(\frac{-k^2\pi}{\ell^2}t\right)$. En adelante, consideraremos $B = C = 1$. De manera que

$$u_k(x, t) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \exp\left(\frac{-k^2\pi}{\ell^2}t\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto, $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \exp\left(\frac{-k^2\pi}{\ell^2}t\right)$. Si $t = 0$, $u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$.

Así,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x), \quad (1.6)$$

donde $\varphi_k(x)$ satisface las relaciones $(\varphi_k/\varphi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \frac{\ell}{2}, & k = m \end{cases}$. En efecto, para el caso

$k \neq m$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $k > m$. Así,

$$\begin{aligned} (\varphi_k/\varphi_m) &= \left(\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) / \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \right) \\ &= \int_0^{\ell} \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\cos\left(\frac{(k-m)\pi x}{\ell}\right) - \cos\left(\frac{(k+m)\pi x}{\ell}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{(k-m)\pi} \text{sen}\left(\frac{(k-m)\pi x}{\ell}\right) - \frac{\ell}{(k+m)\pi} \text{sen}\left(\frac{(k+m)\pi x}{\ell}\right) \right) \Bigg|_0^{\ell} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{(k-m)\pi} \text{sen}((k-m)\pi) - \frac{\ell}{(k+m)\pi} \text{sen}((k+m)\pi) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Si $k = m$, de (1.7),

$$\begin{aligned} (\varphi_k/\varphi_k) &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi x}{\ell}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\ell}{2k\pi} \text{sen}\left(\frac{2k\pi x}{\ell}\right) \right) \Bigg|_0^{\ell} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ell - \frac{\ell}{2k\pi} \text{sen}(2k\pi) \right) \\ &= \frac{\ell}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Esta última igualdad nos ayudará a determinar los coeficientes b_k , de la siguiente manera:

$$(f/\varphi_m) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k / \varphi_m \right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\varphi_k / \varphi_m) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\varphi_k / \varphi_m) = b_m \frac{\ell}{2}.$$

Así, $\frac{2}{\ell}(f/\varphi_m) = b_m$. Con ello, podemos obtener la solución de la ecuación

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} (f/\varphi_k) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{\ell} \right) \exp \left(\frac{-k^2 \pi^2 t}{\ell^2} \right).$$

□

Proposición 1.4. *Dado el problema de conducción de calor en una barra*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^2(]0, \ell[\times]0, \infty[\cap C([0, \ell] \times [0, \infty[)) \\ \partial_t u = \partial_x^2 u, (x, t) \in]0, \ell[\times [0, +\infty[\\ \partial_t u(0, t) = \partial_x u(\ell, t) = 0, t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \in C^1([0, \ell]) \\ f'(0) = f'(\ell) = 0. \end{array} \right. \quad (1.8)$$

La solución del PVI está dada por

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} (f/\psi_k) \cos \left(\frac{k\pi x}{\ell} \right) \exp \left(\frac{-k^2 \pi^2 t}{\ell^2} \right)$$

para $k \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Si aplicamos el método de separación de variables, obtenemos que

$$u(x, t) = \psi(x)T(t) \quad (1.9)$$

es solución del PVI

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^2(]0, \ell[\times]0, +\infty[) \cap C^1([0, \ell] \times [0, +\infty[) \\ \partial_t u = \partial_x^2 u, (x, t) \in (0, \ell] \times [0, +\infty) \\ \partial_t u(0, t) = \partial_x u(\ell, t) = 0, t \geq 0, \end{array} \right.$$

donde $\psi \in C^2(]0, \ell[) \cap C^1([0, \ell])$ y $T \in C^2(]0, +\infty[) \cap C^1([0, +\infty[)$. Continuando, $u(x, t)$ satisface la igualdad $\partial_t u(0, t) = \partial_x u(\ell, t) = 0$. De la cual se obtiene

$$\psi'(0)T(t) = \psi'(\ell)T(t) = 0, \forall t \geq 0.$$

Ahora, si $\psi'(0) \neq 0$, $T(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por tanto, $u(x, t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Así, $u \equiv 0$. Como necesitamos soluciones no triviales, se debe cumplir $\psi'(0) = \psi'(\ell) = 0$. Además, de $\partial_t u = \partial_x^2 u$ se obtiene $\psi(x)T'(t) = \psi''(x)T(t)$. Dividiendo esta igualdad entre $\psi(x)T(t)$ obtenemos

$$T'(t)T^{-1}(t) = \psi''(x)\psi^{-1}(x) = -\lambda \in \mathbb{R}^-.$$

Por consiguiente, se obtiene la siguiente EDO

$$\left\{ \begin{array}{l} T \in C^2(]0, +\infty[) \cap C^1([0, +\infty[) \\ T'(t) = -\lambda T(t). \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Cuya solución es $T(t) = Ce^{-\lambda t}$, donde $C \in \mathbb{R}$. Además, se tiene el PVI

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \in C^2(]0, \ell[) \cap C^1([0, \ell]) \\ \psi''(x) = -\lambda\psi(x) \\ \psi'(0) = \psi'(\ell) = 0. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Luego, de (1.11) tenemos $\psi''(x) + \lambda\psi(x) = 0$. Así, $\psi(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$.

Por tanto,

$$\psi'(x) = -\sqrt{\lambda}A \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Usando las condiciones de frontera tenemos $\psi'(0) = \sqrt{\lambda}B \cos(0) = 0$. Así, $B = 0$ y $A \neq 0$. Además, de $\psi'(\ell) = -\sqrt{\lambda}A \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$ obtenemos $\sqrt{\lambda}\ell = k\pi$, para $k = 1, 2, 3, \dots$. En consecuencia, obtenemos la familia de funciones $\psi_k(x) = A \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$, para $k = 1, 2, 3, \dots$. Asimismo, podemos añadir el caso $k = 0$ para el cual $\psi_0(x) = A$. Por tanto, se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2} \\ \psi_k(x) = A \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ T_k(t) = C \exp\left(\frac{-k^2\pi^2}{\ell^2}t\right). \end{array} \right.$$

Ahora, sin pérdida de generalidad, podemos considerar $C = A = 1$. Reemplazando estos valores en (1.9), tenemos

$$u_k(x, t) = \frac{a_0}{2} + \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \exp\left(\frac{-k^2\pi^2}{\ell^2}t\right).$$

Luego, superponiendo se obtiene

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \exp\left(\frac{-k^2\pi^2}{\ell^2}t\right).$$

Ahora, considerando $t = 0$ tenemos

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right). \quad (1.12)$$

Podemos considerar la función $u(x, 0)$ como la función $f(x)$. Es decir, $f(x) := u(x, 0)$.

Además, los ψ_k satisfacen las relaciones de ortogonalidad $(\psi_k/\psi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \frac{\ell}{2}, & k = m \neq 0 \\ \ell, & k = m = 0 \end{cases}$.

Así,

$$(f/\psi_m) = a_m \frac{\ell}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto, los coeficientes a_m pueden ser expresados como $a_m = \frac{2}{\ell}(f/\psi_m)$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Por tanto, nuestra solución es

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} (f/\psi_k) \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \exp\left(\frac{-k^2\pi^2}{\ell^2} t\right).$$

□

Al resolver los PVI hemos logrado representar f , en (1.6) y (1.12), como series que convergen a una función impar y par, respectivamente. Además, de la Proposición 1.1, f puede ser expresada de manera única como la suma de una función impar y par. Esto nos motiva a representar una **función periódica**, f de periodo 2ℓ , mediante una serie trigonométrica de la siguiente manera

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \right), \quad (1.13)$$

donde los coeficientes a_k y b_k están determinados de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\ell}(f/\psi_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_k &= \frac{2}{\ell}(f/\varphi_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Funciones periódicas de clase C^k

En este capítulo trabajaremos sobre el espacio de las funciones periódicas con derivada de orden k continua. En ella desarrollaremos la Teoría de Fourier. Además, analizaremos el comportamiento de las serie de Fourier en funciones seccionalmente continuas con derivadas seccionalmente continuas y buscaremos alternativas de estudiar las series de Fourier en funciones cuyas series mencionadas divergen.

SECCIÓN 2.1

Series de Fourier

Notación 2.1. *El conjunto de las funciones periódicas de clase C^k será denotado por*

$$C_{per}^k([-l; \ell]) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / f \in C^k([-l; \ell]), f(x + 2\ell) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \right\},$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ y $\ell \in \mathbb{R}^+$. Si $k = 0$, $C_{per}^0([-l, \ell]) = C_{per}([-l, \ell])$.

Proposición 2.1. *El espacio $C_{per}^k([-l; l])$, para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, es un \mathbb{C} -espacio vectorial (EV).*

Proposición 2.2. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\infty, k} : C_{per}^k([-l; l]) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\rightarrow \|f\|_{\infty, k} = \sum_{j=0}^k \left\| f^{(j)} \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

es una norma, donde $\left\| f^{(j)} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in [-l, l]} |f^{(j)}(x)|$ para $j = 0, 1, 2, 3, \dots, k$.

Proposición 2.3. *El espacio $(C_{per}^k([-l; l]), \|\cdot\|_{\infty, k})$ es un espacio de Banach.*

Observación 2.1. *Si $f \in C([0, \ell])$ y $f(-\ell) = f(0) = f(\ell) = 0$,*

- *en (1.1) f se extiende a una función impar y $f \in C_{per}([-l, \ell])$ y,*
- *en (1.8) f se extiende a una función par y $f \in C_{per}^1([-l, \ell])$.*

De ahora en adelante trabajaremos el caso en el que $\ell = \pi$. Es decir, trabajaremos con funciones periódicas de periodo 2π .

Observación 2.2. *Para trabajar con funciones periódicas de periodo 2π hacemos $y = \frac{\pi x}{\ell}$ en (1.13)*

$$f(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(ky) + b_k \operatorname{sen}(ky)). \quad (2.1)$$

Además, a_{k_1} y b_{k_2} quedan determinados por

$$a_{k_1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(k_1 x) dx \quad \text{y} \quad b_{k_2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(k_2 x) dx,$$

para $k_1 = 0, 1, 2, \dots$ y $k_2 = 1, 2, 3, \dots$, respectivamente.

Definición 2.1 (Producto interno). *La aplicación*

$$\begin{aligned} (\cdot / \cdot) : C_{per}([-\pi, \pi]) \times C_{per}([-\pi, \pi]) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\rightarrow (f/g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \end{aligned}$$

es un producto interno.

Proposición 2.4 (Relaciones de ortogonalidad). *Si denotamos por $\Phi_k(x) = e^{ikx}$, para $x \in [-\pi, \pi]$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\Phi_k(x)$ satisface las relaciones de ortogonalidad*

$$(\Phi_k/\Phi_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 2\pi, & j = k. \end{cases} \quad (2.2)$$

Demostración. Sean $k, j \in \mathbb{Z}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} (\Phi_k/\Phi_j) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \cdot e^{-ijx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x} dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si $j = k$, de (2.3), se tiene que $(\Phi_k/\Phi_j) = 2\pi$ y si $j \neq k$,

$$\begin{aligned} (\Phi_k/\Phi_j) &= \frac{e^{(k-j)x}}{(k-j)i} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{(k-j)i} \left(\cos((k-j)x) + i \operatorname{sen}((k-j)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{(k-j)i} 2i \operatorname{sen}((k-j)\pi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Ahora, usando $\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-kix}}{2}$, $\operatorname{sen}(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-kix}}{2i}$ y las relaciones de ortogo-

nalidad, la serie (2.1) puede ser expresada en forma compacta mediante el siguiente proceso.

En primer lugar,

$$a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) = \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

En segundo lugar, tomamos la suma infinita

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) &= \frac{a_0}{2} + \frac{a_1 - ib_1}{2} e^{i(1)x} + \frac{a_1 + ib_1}{2} e^{i(-1)x} \\ &+ \frac{a_2 - ib_2}{2} e^{i(2)x} + \frac{a_2 + ib_2}{2} e^{i(-2)x} \\ &+ \frac{a_3 - ib_3}{2} e^{i(3)x} + \frac{a_3 + ib_3}{2} e^{i(-3)x} \\ &+ \frac{a_4 - ib_4}{2} e^{i(4)x} + \frac{a_4 + ib_4}{2} e^{i(-4)x} + \dots \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Finalmente, suponiendo que la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ converge uniformemente a una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Es decir,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \Phi_k(x),$$

donde $\Phi_k(x) = e^{ikx}$ para $k \in \mathbb{Z}$. Así, podemos determinar los valores c_k mediante el producto interno

$$(f/\Phi_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (\Phi_j/\Phi_k) = 2\pi c_k.$$

Por tanto,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} (f/\Phi_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Estos c_k serán denotados por $\widehat{f}(k) = c_k$ y jugarán un papel muy importante.

Definición 2.2 (Transformada de Fourier). *La secuencia $\{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$, donde*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx,$$

se denomina la transformada de Fourier de f y los números complejos $\widehat{f}(k)$ se denominan coeficientes de Fourier de f .

Definición 2.3 (Serie de Fourier). *Sea $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$. Se denomina serie de Fourier generada por f a la serie*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\Phi_k(x). \quad (2.5)$$

Proposición 2.5. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot}: (C_{per}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_{\infty}) &\rightarrow (\ell^{\infty}(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\infty}) \\ f &\rightarrow \widehat{f} = \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

es una transformación lineal y continua.

Demostración. Es evidente que la aplicación es lineal. Ahora, si consideramos $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \leq \|f\|_{\infty}. \quad (2.6)$$

En consecuencia, la transformada $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es acotada. Luego, tomando el supremo se tiene

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| \leq \|f\|_\infty.$$

Por tanto, $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. □

Notación 2.2. Sea $N \in \mathbb{Z}^+$. Denotaremos por V_N al \mathbb{C} -E.V. generado por las funciones $\{\Phi_k\}_{-N \leq k \leq N}$.

La N -ésima suma parcial de la serie de Fourier de una función $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, dada por $S_N(x) = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k(x)$, pertenece a V_N .

Proposición 2.6. Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ y $T_N \in V_N$ entonces

$$\|f - S_N\|_2 \leq \|f - T_N\|_2, \quad (2.7)$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma de L^2 . La igualdad en (2.7) se cumple si y solo si $T_N = S_N$.

Demostración. La función $g = f - S_N \in V_N^\perp$ (el espacio ortogonal de V_N). En efecto, como $T_N \in V_N$ existen $\alpha_k \in \mathbb{C}$, tal que $T_N = \sum_{k=-N}^N \alpha_k \Phi_k$. Además,

$$\begin{aligned} (g/T_N) &= \left(f - S_N / \sum_{k=-N}^N \alpha_k \Phi_k \right) \\ &= \left(f / \sum_{k=-N}^N \alpha_k \Phi_k \right) - \left(S_N / \sum_{k=-N}^N \alpha_k \Phi_k \right) \\ &= \sum_{k=-N}^N (f/\alpha_k \Phi_k) - \sum_{k=-N}^N (S_N/\alpha_k \Phi_k) \\ &= \sum_{k=-N}^N \overline{\alpha_k} (f/\Phi_k) - \sum_{k=-N}^N \overline{\alpha_k} (S_N/\Phi_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=-N}^N \overline{\alpha_k} 2\pi \widehat{f}(k) - \sum_{k=-N}^N \overline{\alpha_k} \left(\sum_{j=-N}^N \widehat{f}(j) \Phi_j(x) / \Phi_k \right) \\
 &= \sum_{k=-N}^N \overline{\alpha_k} 2\pi \widehat{f}(k) - \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N \overline{\alpha_k} \widehat{f}(j) (\Phi_j(x) / \Phi_k) \\
 &= \sum_{k=-N}^N \overline{\alpha_k} 2\pi \widehat{f}(k) - \sum_{k=-N}^N \overline{\alpha_k} \widehat{f}(k) 2\pi \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Para cualquier $T_N \in V_N$. Ahora,

$$\begin{aligned}
 \|f - T_N\|_2^2 &= \left\| f - \sum_{k=-N}^N \alpha_k \Phi_k \right\|_2^2 \\
 &= \left\| g + S_N - \sum_{k=-N}^N \alpha_k \Phi_k \right\|_2^2 \\
 &= \left\| g + \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k(x) - \sum_{k=-N}^N \alpha_k \Phi_k \right\|_2^2 \\
 &= \left\| g + \sum_{k=-N}^N (\widehat{f}(k) - \alpha_k) \Phi_k(x) \right\|_2^2. \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=-N}^N (\widehat{f}(k) - \alpha_k) \Phi_k(x) \in V_N$, entonces $\left(g / \sum_{k=-N}^N (\widehat{f}(k) - \alpha_k) \Phi_k(x) \right) = 0$. Reemplazando en (2.8) se tiene

$$\begin{aligned}
 \|f - T_N\|_2^2 &= \|g\|_2^2 + \left\| \sum_{k=-N}^N (\widehat{f}(k) - \alpha_k) \Phi_k(x) \right\|_2^2 \\
 &= \|f - S_N\|_2^2 + \left\| \sum_{k=-N}^N (\widehat{f}(k) - \alpha_k) \Phi_k(x) \right\|_2^2. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Si $\widehat{f}(k) \neq \alpha_k$ entonces $\left\| \sum_{k=-N}^N (\widehat{f}(k) - \alpha_k) \Phi_k(x) \right\|_2^2 \geq 0$ y reemplazando en (2.9) obtenemos la desigualdad (2.7). Por el contrario, según (2.9), la igualdad en (2.7) se cumple si y solo si $\widehat{f}(k) - \alpha_k = 0$. \square

La Proposición 2.6 nos provee de una buena aproximación de f , en $(L^2, \|\cdot\|_2)$, mediante la N -ésima suma parcial de la serie de Fourier de una función f .

Proposición 2.7 (Desigualdad de Bessel). *Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$ converge y satisface la desigualdad de Bessel*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2, \quad (2.10)$$

donde $\|f\|_2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$. Además, satisface el Lema de Riemann–Lebesgue

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0. \quad (2.11)$$

Demostración. Para demostrar que la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$ es convergente, probaremos que la sucesión $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ de las N -ésimas sumas parciales de la serie es creciente y acotada. En primer lugar, es evidente que la sucesión es creciente, ya que es una suma de términos positivos. En segundo lugar, probaremos que la sucesión es acotada superiormente. Veamos, si $N \in \mathbb{N}$, es un valor fijo, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k \right\|_2^2 \\ &= \left(f - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k / f - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \|f\|_2^2 - \left(f / \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k \right) - \left(\sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k / f \right) + \left(\sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k / \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k \right) \\
 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^N \overline{\widehat{f}(k)} (f / \Phi_k) - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) (f / \Phi_k) + \sum_{k=-N}^N \left\{ \sum_{j=-N}^N \widehat{f}(k) \overline{\widehat{f}(j)} (\Phi_k / \Phi_j) \right\} \\
 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^N \overline{\widehat{f}(k)} (2\pi \widehat{f}(k)) - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) (2\pi \widehat{f}(k)) + \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) (\overline{\widehat{f}(k)} 2\pi) \\
 &= \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{k=-N}^N |\widehat{f}(k)|^2. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Ahora, de (2.12) se tiene que $2\pi \sum_{k=-N}^N |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2$. Así, obtenemos la cota superior de la sucesión

$$\sum_{k=-N}^N |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2. \tag{2.13}$$

Por tanto, la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$ converge. Ahora, tomando el límite al infinito en ambos lados de (2.13), obtenemos la desigualdad (2.10). Como la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$ es convergente, la cola de la derecha y de la izquierda de la serie tiende a cero. Es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} |\widehat{f}(k)|^2 = 0$ y $\lim_{k \rightarrow -\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = 0$. Por lo tanto, $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(k)| = 0$. \square

Corolario 2.1. Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ entonces

$$\widehat{f} = \left\{ \widehat{f}(k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Corolario 2.2. Sea $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$. La desigualdad de Bessel (2.10) es equivalente a

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^2}. \tag{2.14}$$

SECCIÓN 2.2

Diferenciabilidad y coeficientes de Fourier

A fin de analizar la convergencia de la serie de Fourier de una función $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ estudiaremos el comportamiento de sus coeficientes de Fourier $\widehat{f}(k)$. A continuación, veremos que la diferenciabilidad de f influye en el comportamiento de dichos coeficientes.

Proposición 2.8. Si $f \in C_{per}^1([-\pi, \pi])$ entonces $f' \in C_{per}([-\pi, \pi])$. Además,

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k), \quad (2.15)$$

para $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Iniciemos considerando $f \in C_{per}^1([-\pi, \pi])$,

$$f'(x + 2\pi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 2\pi + h) - f(x + 2\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Así, $f' \in C_{per}([-\pi, \pi])$. Ahora, sea $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + ik \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(\pi) e^{-i\pi k} - f(-\pi) e^{i\pi k} \right] + ik \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right] \\ &= 0 + ik\widehat{f}(k). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.3. Si $f \in C_{per}^1([-\pi, \pi])$, entonces $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0$.

Demostración. Consideremos $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Ahora,

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{\widehat{f'}(k)}{ik} \right| = \left| \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx}{2\pi ik} \right| \leq \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)| dx}{2\pi |k|} = \frac{\|f'\|_1}{2\pi |k|}.$$

Por consiguiente, haciendo tender $|k|$ al infinito, en ambos lados obtenemos

$$0 \leq \lim_{|k| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(k)| \leq \lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{\|f'\|_1}{2\pi |k|} = 0.$$

Esto prueba que $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0$. □

La Proposición 2.7 hace referencia al decaimiento de los coeficientes de Fourier de una función $f \in C_{per}([- \pi, \pi])$. Mientras que el Corolario 2.3 nos dice que una condición más fuerte para el decaimiento de los coeficientes de Fourier de una función f , es que $f \in C_{per}^1([- \pi, \pi])$.

Teorema 2.1. Si $f \in C_{per}^1([- \pi, \pi])$, su serie de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$ converge absoluta y uniformemente.

Demostración. Según el M-test de Weierstrass, es suficiente probar que la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k) e^{ikx}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$$

es acotada por una serie convergente. Para ello, consideremos la N -ésima suma parcial

$$\sum_{k=-N}^N |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |k| \leq N} |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{|\widehat{f'}(k)|}{|ik|}. \quad (2.16)$$

Ahora, consideremos los vectores

$$u = \left(|\widehat{f}(0)|, |\widehat{f}(1)|, |\widehat{f}(2)|, \dots, |\widehat{f}(N)| \right) \in \mathbb{C}^N \quad y \quad v = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k} \right) \in \mathbb{C}^N$$

Luego, usemos la desigualdad de Cauchy-Schwartz para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |k| \leq N} |\widehat{f}'(k)| \frac{1}{|k|} &\leq \left[\sum_{1 \leq |k| \leq N} |\widehat{f}'(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{1}{|k|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{1 \leq |k| \leq N} |\widehat{f}'(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[2 \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Reemplacemos esta desigualdad en (2.16), para obtener

$$\sum_{k=-N}^N |\widehat{f}(k)| \leq |\widehat{f}(0)| + \left[\sum_{1 \leq |k| \leq N} |\widehat{f}'(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[2 \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

A continuación, hacemos tender N al infinito

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| \leq |\widehat{f}(0)| + \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}'(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, usemos la Desigualdad de Bessel para obtener la acotación deseada

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| &\leq |\widehat{f}(0)| + \left[\frac{1}{2\pi} \|f'\|_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\widehat{f}(0)| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\|_2 \left(\sqrt{2} \times \frac{\pi}{\sqrt{6}} \right) \\ &= |\widehat{f}(0)| + \sqrt{\frac{\pi}{6}} \|f'\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Luego, la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ converge absoluta y uniformemente. \square

Proposición 2.9. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in C_{per}^n([-\pi, \pi])$,

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Usemos el método de inducción matemática. Sea $k \in \mathbb{Z}$ fijo y arbitrario. Para $n = 1$, la proposición es cierta. Ahora, supongamos cierta la proposición para $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$\widehat{f^{(n+1)}}(k) = \widehat{(f^{(n)})'}(k) = [(ik)\widehat{f^{(n)}}(k)] = (ik)^n (ik)\widehat{f}(k) = (ik)^{n+1}\widehat{f}(k).$$

Así, hemos probado que la proposición es cierta para $n + 1$. \square

SECCIÓN 2.3

Teorema de la convergencia de Fourier

Anteriormente hemos demostrado que la serie de Fourier de una función periódica de clase C^1 converge uniformemente. En esta sección mostraremos que la serie de Fourier de una función $f \in C_{per}^1([-\pi, \pi])$ converge uniformemente a $f(x)$.

Definición 2.4. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina *seccionalmente continua* si existe una partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$, tal que f es continua en cada subintervalo $]x_i, x_{i+1}[$. Además, existe el límite de f cuando x tiende a x_i o a x_{i+1} en $]x_i, x_{i+1}[$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Notación 2.3. Denotaremos por $f(x_i^+) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$ y $f(x_i^-) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Lema 2.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función periódica, de periodo 2π , tal que f y f' son seccionalmente continuas. Si f es continua en $x = 0$ y $f(0) = 0$, la serie de Fourier de f converge en $x = 0$ a $f(0)$. Es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ik(0)} = f(0).$$

Demostración. Observemos que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ik(0)} = f(0)$ equivale a $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) = 0$. En efecto, definamos la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente manera

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{ix} - 1}, & \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \in [-\pi, \pi[\\ -if'(0^+), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función satisface:

- g es periódica y de periodo 2π . En efecto,

$$g(x + 2\pi) = \frac{f(x + 2\pi)}{e^{i(x+2\pi)} - 1} = \frac{f(x)}{e^{ix}e^{i2\pi} - 1} = \frac{f(x)}{e^{ix} - 1} = g(x).$$

- Los límites laterales, cuando x tiende a cero, existen

$$\begin{aligned} g(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x)}{e^{ix} - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x)}{x} \frac{x}{e^{ix} - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{e^{ix} - 1} \right] \quad (\text{Regla de L'Hopital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{ie^{ix}} \right] \\ &= \frac{1}{i} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] \\ &= -if'(0^+) \\ &= -if'(0^-) \\ &= g(0^-). \end{aligned}$$

Así, g es seccionalmente continua y por el lema de Riemann–Lebesgue $\lim_{|k| \rightarrow 0} \widehat{g}(k) = 0$.

Ahora, determinemos los coeficientes de Fourier de f . Para ello, consideremos $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(x) (e^{ix} - 1) \right] e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-i(k-1)x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \widehat{g}(k-1) - \widehat{g}(k). \end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \widehat{g}(-n-1) - \widehat{g}(n)$. Finalmente, aplicando el límite al infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}(-n-1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}(n) = 0.$$

□

Teorema 2.2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es periódica, de periodo 2π , tal que f y f' son seccionalmente continuas entonces la serie de Fourier de f converge en x_0 de la siguiente manera:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx_0} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-)), \quad (2.17)$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Partiremos definiendo las funciones $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x + x_0) - \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-)), \\ h(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} (g(x) + g(-x)), & \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \in [-\pi, \pi[\\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Así, g es periódica, pues lo hereda de f . Por tanto, h es periódica y de periodo 2π . Además,

f' , g' y h' son seccionalmente continuas. Ahora,

$$\begin{aligned} g(x_0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x + x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)) \right) \\ &= f(x_0^+) - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)) \\ &= \frac{1}{2}f(x_0^+) - \frac{1}{2}f(x_0^-). \end{aligned}$$

Análogamente, podemos demostrar que $g(x_0^-) = \frac{1}{2}f(x_0^-) - \frac{1}{2}f(x_0^+)$. Así, $g(0^+) + g(0^-) = 0$.

Ahora, si consideramos este resultado tenemos $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$. Así, h es continua en $x = 0$. Por tanto, h satisface las condiciones del Lema 2.1. En consecuencia, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(k) = 0$.

De otro lado,

$$\begin{aligned} \widehat{h}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 \left[\frac{1}{2}(g(x) + g(-x)) \right] e^{-ikx} dx + \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2}(g(x) + g(-x)) \right] e^{-ikx} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(-x) e^{-ikx} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\widehat{g}(k) - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} g(y) e^{iky} dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\widehat{g}(k) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{iky} dy \right] \\ &= \frac{1}{2} [\widehat{g}(k) + \widehat{g}(-k)]. \end{aligned}$$

Usando esta igualdad, para $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k) &= \sum_{k=-n}^{-1} \widehat{h}(k) + \widehat{h}(0) + \sum_{k=1}^n \widehat{h}(k) \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{g}(-n) + \widehat{g}(n) + \widehat{g}(-n+1) + \widehat{g}(n-1) + \widehat{g}(-n+2) + \widehat{g}(n-2) + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \widehat{g}(-3) + \widehat{g}(3) + \widehat{g}(-2) + \widehat{g}(2) + \widehat{g}(-1) + \widehat{g}(1) + \widehat{g}(0) + \widehat{g}(1) + \\
 & \widehat{g}(-1) + \widehat{g}(2) + \widehat{g}(-2) + \widehat{g}(3) + \widehat{g}(-3) + \dots + \widehat{g}(n-2) + \widehat{g}(-n+2) + \\
 & \widehat{g}(n-1) + \widehat{g}(-n+1) + \widehat{g}(n) + \widehat{g}(-n) \\
 = & \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k).
 \end{aligned}$$

Aplicando el límite, cuando n tiende al infinito, tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k) = 0.$$

Ahora, determinemos los coeficientes de Fourier de g en términos de f . Para ello, consideremos $k \in \mathbb{Z}$. En primer lugar, si $k \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+x_0) e^{-ikx} dx - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0^+) + f(x_0^-)) e^{-ikx} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-ik(y-x_0)} dy - \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} dx \right] \\
 &= e^{ikx_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy - 0 \\
 &= e^{ikx_0} \widehat{f}(k).
 \end{aligned}$$

En segundo lugar, si $k = 0$,

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+x_0) e^{-i(0)x} dx - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0^+) + f(x_0^-)) e^{-i(0)x} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(y) e^{-i(0)(y-x_0)} dy - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0^+) + f(x_0^-)) 1 dx \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-i(0)y} dy - \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \right] \\
 &= \widehat{f}(0) - \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-)).
 \end{aligned}$$

En tercer lugar, para $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) &= \sum_{k=-n}^{-1} \widehat{g}(k) + \widehat{g}(0) + \sum_{k=1}^n \widehat{g}(k) \\
 &= \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikx_0} \widehat{f}(k) + \left(\widehat{f}(0) - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)) \right) + \sum_{k=1}^n e^{ikx_0} \widehat{f}(k) \\
 &= \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikx_0} \widehat{f}(k) + \left(\widehat{f}(0)e^{i(0)x_0} - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)) \right) + \sum_{k=1}^n e^{ikx_0} \widehat{f}(k) \\
 &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx_0} \widehat{f}(k) - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)).
 \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo tender n al infinito

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx_0} \widehat{f}(k) - \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx_0} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)).$$

□

El teorema de Fourier afirma que, la serie de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, seccionalmente continua y con derivada seccionalmente continua en un valor $x_0 \in \mathbb{R}$, converge a la semisuma de los límites laterales de f en x_0 . Podemos ver un ejemplo gráfico en la Figura 2.1.

Corolario 2.4. Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ y tiene derivada seccionalmente continua, entonces la serie de Fourier generada por f converge uniformemente a f .

Demostración. Iniciemos considerando la igualdad (2.15). Esta sigue siendo válida si f es continua, periódica y con derivada seccionalmente continua. Ahora, usando el Teorema 2.1,

se puede concluir que la serie de Fourier de f converge uniformemente. Veamos a que valor converge la serie de Fourier. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Como f es continua en x_0 entonces $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$. Luego, de (2.17) tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx_0} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)) = f(x_0),$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. □

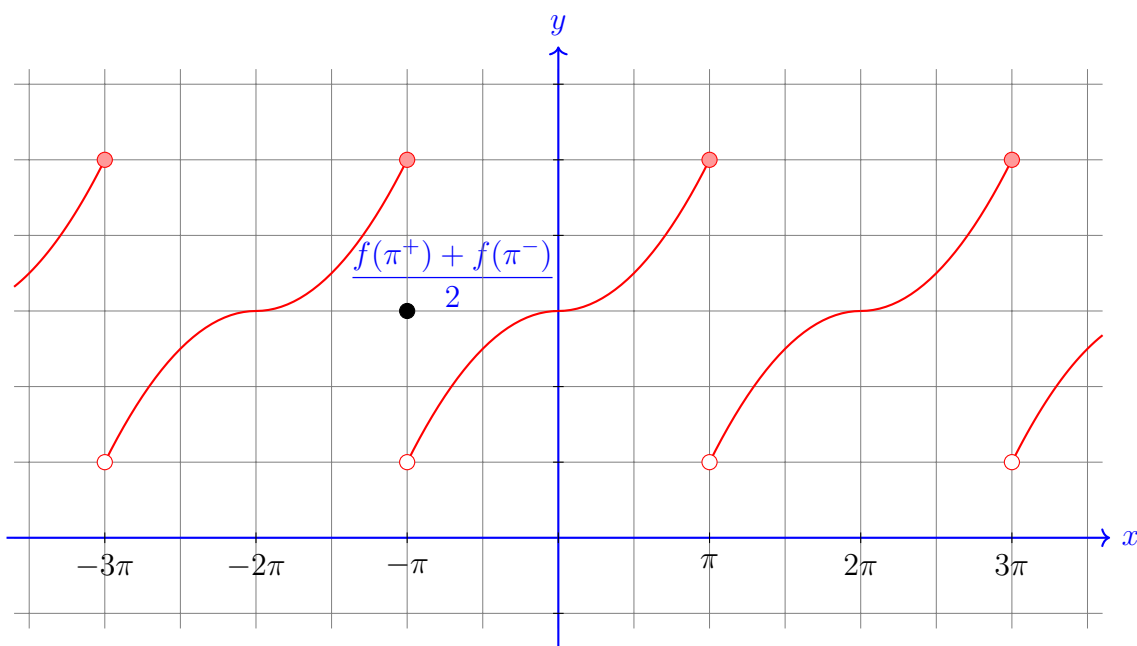


Figura 2.1: f y f' seccionalmente continuas. Fuente: Elaboración propia.

Lema 2.2 (Identidad de Polarización). Sea $(V, (\cdot/\cdot))$ un \mathbb{C} -espacio vectorial dotado de un producto interno. $\|u\| = \sqrt{(u/u)}$ define una norma en V si y solo si

$$(u/v) = \frac{1}{4} \left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2 \right). \quad (2.18)$$

Esta última igualdad se denomina la Identidad de polarización.

Corolario 2.5 (Identidad de Parseval). Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ y posee derivada seccionalmente continua, se cumple

$$\|\widehat{f}\|_{\ell_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L_2}^2. \quad (2.19)$$

Esta igualdad se denomina Identidad de Parseval.

Demostración. Recordemos las igualdades

$$\|\widehat{f}\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \text{ y } \|f\|_{L_2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Ahora, como la serie de Fourier de f converge uniformemente a f , tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \Phi_k \right\|_{L_2}^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\|f\|_{L_2}^2 - 2\pi \sum_{k=-N}^N |\widehat{f}(k)|^2 \right) \\ &= \|f\|_{L_2}^2 - 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Así, } \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2. \quad \square$$

La Identidad de Parseval es reescrita, considerando el producto interno, de la siguiente manera

$$(\widehat{f}/\widehat{g}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} (f/g). \quad (2.20)$$

Para ello, solo bastará hacer uso de la Identidad de Polarización

$$(\widehat{f}/\widehat{g}) = \frac{1}{4} \left(\|\widehat{f} + \widehat{g}\|_{\ell_2}^2 - \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_{\ell_2}^2 + i \|\widehat{f} + i\widehat{g}\|_{\ell_2}^2 - i \|\widehat{f} - i\widehat{g}\|_{\ell_2}^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \left(\|\widehat{f+g}\|_{\ell_2}^2 - \|\widehat{f-g}\|_{\ell_2}^2 + i\|\widehat{f+ig}\|_{\ell_2}^2 - i\|\widehat{f-ig}\|_{\ell_2}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4} \left(\|f+g\|_{L_2}^2 - \|f-g\|_{L_2}^2 + i\|f+ig\|_{L_2}^2 - i\|f-ig\|_{L_2}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} (f/g).
 \end{aligned}$$

SECCIÓN 2.4

Núcleos de Féjer, Dirichlet y Poisson

Existen funciones continuas cuyas series de Fourier divergen. En estos casos podemos considerar métodos alternativos, los cuales asignan una suma a una serie infinita.

Notación 2.4. Sean $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ y $N \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $S_N(f; x) = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) e^{ikx}$ a la N -ésima suma parcial de la serie de Fourier de f . Además, $\sigma_N(f; x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f; x)$ denotará el promedio de las $N+1$ sumas parciales de la serie de Fourier de f .

Definición 2.5. Sea $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$. Se dice que la serie de Fourier de f es sumable en el punto x_0 , en el sentido de Cesàro si existe el límite $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f; x_0)$.

Observemos que ocurre si desarrollamos $\sigma_N(f; x)$

$$\begin{aligned}
 \sigma_N(f; x_0) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \left(\sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \right) \\
 &= \frac{1}{N+1} \left(\widehat{f}(0) e^{i(0)x} + \sum_{k=-1}^1 \widehat{f}(k) e^{ikx} + \sum_{k=-2}^2 \widehat{f}(k) e^{ikx} + \sum_{k=-3}^3 \widehat{f}(k) e^{ikx} + \dots + \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) e^{ikx} \right) \\
 &= \frac{1}{N+1} \widehat{f}(-N) e^{i(-N)x} + \frac{2}{N+1} \widehat{f}(-N+1) e^{i(-N+1)x} + \dots + \frac{N-2}{N+1} \widehat{f}(-3) e^{i(-3)x} \\
 &\quad + \frac{N-1}{N+1} \widehat{f}(-2) e^{i(-2)x} + \frac{N}{N+1} \widehat{f}(-1) e^{i(-1)x} + \frac{N+1}{N+1} \widehat{f}(0) e^{i(0)x} + \frac{N}{N+1} \widehat{f}(1) e^{i(1)x} \\
 &\quad + \frac{N-1}{N+1} \widehat{f}(2) e^{i(2)x} + \frac{N-2}{N+1} \widehat{f}(3) e^{i(3)x} \dots + \frac{2}{N+1} \widehat{f}(N-1) e^{i(N-1)x} + \frac{1}{N+1} \widehat{f}(N) e^{i(N)x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - \frac{|-N|}{N+1}\right) \widehat{f}(-N)e^{i(-N)x} + \left(1 - \frac{|-N+1|}{N+1}\right) \widehat{f}(-N+1)e^{i(-N+1)x} + \dots \\
 &+ \left(1 - \frac{|-3|}{N+1}\right) \widehat{f}(-3)e^{i(-3)x} + \left(1 - \frac{|-2|}{N+1}\right) \widehat{f}(-2)e^{i(-2)x} \\
 &+ \left(1 - \frac{|-1|}{N+1}\right) \widehat{f}(-1)e^{i(-1)x} + \left(1 - \frac{0}{N+1}\right) \widehat{f}(0)e^{i(0)x} + \left(1 - \frac{|1|}{N+1}\right) \widehat{f}(1)e^{i(1)x} \\
 &+ \left(1 - \frac{|2|}{N+1}\right) \widehat{f}(2)e^{i(2)x} + \left(1 - \frac{|3|}{N+1}\right) \widehat{f}(3)e^{i(3)x} \\
 &\dots + \left(1 - \frac{|N-1|}{N+1}\right) \widehat{f}(N-1)e^{i(N-1)x} + \left(1 - \frac{|N|}{N+1}\right) \widehat{f}(N)e^{i(N)x} \\
 &= \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \widehat{f}(k)e^{ikx}.
 \end{aligned}$$

Ahora, reemplacemos el valor de $\widehat{f}(k)$

$$\begin{aligned}
 \sigma_N(f; x) &= \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky} dy\right) e^{ikx} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ik(x-y)}\right) dy.
 \end{aligned}$$

Definición 2.6 (Núcleo de Féjer). Sean $N \in \mathbb{N}$ fijo y $x \in \mathbb{R}$. La función $K_N(x) = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx} \in C_{per}([-\pi, \pi])$ y se denomina **Núcleo de Féjer** de orden N .

Así, podemos reescribir el promedio de las $N+1$ sumas parciales de la siguiente manera:

$$\sigma_N(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) K_N(x-y) dy.$$

Definición 2.7. Sean f y $g \in C_{per}([-\pi, \pi])$. La **convolución** de f y g , denotada por $f * g$, se define por $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.10. Sean $f, g, h \in C_{per}([-\pi, \pi])$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Se tienen las siguientes propiedades:

1. $f * g \in C_{per}([-\pi, \pi])$.
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$.
3. $f * g = g * f$.
4. $(f + g) * h = f * h + g * h$.
5. $(\alpha f) * g = \alpha(f * g) = f * (\alpha g)$.
6. $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.
7. $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
8. Si $f_t(x) = f(x - t)$, $\widehat{f}_t(k) = e^{-ikt} \widehat{f}(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. En primer lugar, $f * g$ es continua y periódica, de periodo 2π . En segundo lugar, como $f * g \in C_{per}([-\pi, \pi])$, tiene sentido $(f * g) * h$. Así,

$$\begin{aligned}
 (f * g) * h &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(y) h(x - y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) g(y - z) dz \right] h(x - y) dy \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(z) g(y - z) h(x - y) dz \right] dy \\
 &\quad u = y - z \Rightarrow u + z = y \quad , \quad du = dy \\
 (f * g) * h &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(z) g(u) h(x - u - z) dz \right] du \quad (2.21) \\
 f * (g * h) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) (g * h)(x - y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) h(x - y - z) dz \right] dy \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(z) h(x - y - z) dz \right] dy \\
 &\quad y = z \quad , \quad z = u
 \end{aligned}$$

$$f * (g * h) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(u)h(x-z-u)du \right] dz. \quad (2.22)$$

En tercer lugar, las funciones f, g y $h \in C_{per}([-\pi, \pi])$ son uniformemente continuas. Además, la función

$$(u, z) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \rightarrow f(z)g(u)h(x-z-u)$$

es uniformemente continua. Así, por el Teorema de Fubini, podemos intercambiar el orden de las integrales. Por tanto, (2.21) y (2.22) son iguales. En cuarto lugar, veamos la commutatividad. Sea $x \in [-\pi, \pi]$ un valor fijo, al cual le aplicaremos $f * g$. Así,

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \\ &\quad -y + x = u \Rightarrow x - u = y \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi+x}^{-\pi+x} f(x-u)g(u)(-du) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(x-u)g(u)du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)f(x-u)du \\ &= (g * f)(x). \end{aligned}$$

En quinto lugar, la distributividad respecto a la suma y el comportamiento de los escalares con la convolución se siguen de las propiedades de la integral. En sexto lugar,

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{\infty} &= \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |(f * g)(x)| \\ &= \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x-y)| dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| \|g\|_{\infty} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \|f\|_\infty \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} 1 dy \\
 &= \|f\|_\infty \|g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

En séptimo lugar, veamos el comportamiento de la transformada de Fourier respecto a la convolución. Para ello, tengamos en cuenta que $f(y)g(x-y)$ es uniformemente continua en $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Esto permite intercambiar el orden de integración de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \widehat{f * g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) e^{-ikx} dy \right) dx \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) e^{-ikx} dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-ik(x-y)} dx \right) dy \\
 &\quad x - y = z \Rightarrow dx = dz \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z) e^{-ikz} dz \right) dy \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z) e^{-ikz} dz \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) e^{-ikz} dz \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) \\
 &= \widehat{f}(k) \widehat{g}(k).
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\widehat{f}_t(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) e^{-ikx} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(y) e^{-ik(y+t)} dy \\
 &= e^{-ikt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(y) e^{-iky} dy \\
 &\quad x - t = y \Rightarrow dx = dy \\
 &= e^{-ikt} \widehat{f}(k).
 \end{aligned}$$

□

La proposición anterior afirma que el espacio vectorial $(C_{per}([-\pi, \pi]), *)$, dotado de la convolución como producto, es un álgebra de Banach sin identidad. Esto se puede comprobar ya que no existe una función $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, tal que $f * g = g$ para todo $g \in C_{per}([-\pi, \pi])$. A continuación, trataremos de definir una secuencia de funciones que juegue el papel de la identidad requerida.

Definición 2.8 (Identidad aproximada). *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Una secuencia de funciones $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subseteq C_{per}([-\pi, \pi])$ se denomina identidad aproximada si satisface las siguientes condiciones:*

1. $\varphi_n(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) dx = 1$.
3. Para todo $\delta \in (0, \pi)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(x) dx \right] = 0. \quad (2.23)$$

Una identidad aproximada puede ser descrita como una secuencia de funciones positivas, cuyo valor promedio es 1. Además, si $x \in C_{per}([-\pi, \pi]) - \{0\}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = +\infty$. Intuitivamente, esta secuencia no converge, ni en forma puntual, a una función continua. Un ejemplo gráfico de identidad aproximada, se muestra a continuación.

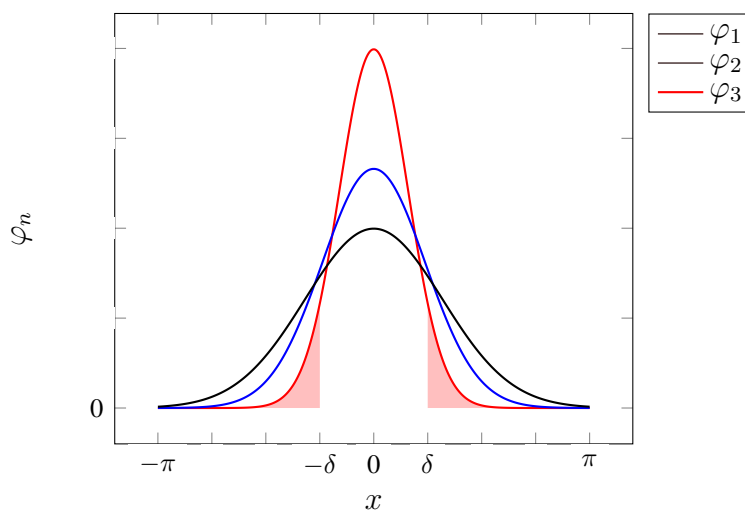


Figura 2.2: Identidad aproximada $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$. Fuente: Elaboración propia.

Proposición 2.11. Si $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ es una identidad aproximada entonces $f * \varphi_n \rightarrow f$ uniformemente, en la norma $\|\cdot\|_\infty$, para todo $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$.

Demostración. Para comenzar, si consideramos que f es la función nula, no hay nada que probar. Por tanto, consideremos que $f \not\equiv 0$. Así, nuestro objetivo será demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$ entonces $\|(f * \varphi_n)(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon$. Es decir, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |(f * \varphi_n)(x) - f(x)| < \varepsilon$. Para tal fin, consideremos $\varepsilon > 0$. Como f es periódica y continua sobre el conjunto compacto $[-\pi, \pi]$, f es uniformemente continua. Así, existe $\delta > 0$ el cual podemos considerar en $]0, \pi[$, tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, sea $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
 |(f * \varphi_n)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \varphi_n(x - y) dy - f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) dx \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x - t) - f(x)] \varphi_n(t) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x - t) - f(x)| \varphi_n(t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x - t) - f(x)| \varphi_n(t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Acotemos cada sumando. Iniciemos con el primer sumando

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x-t) - f(x)| \varphi_n(t) dt &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} (|f(x-t)| + |f(x)|) \varphi_n(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} (\|f\|_\infty + \|f\|_\infty) \varphi_n(t) dt \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t) dt. \end{aligned}$$

Para el segundo sumando, debemos considerar que $|(x-t) - x| = |t| < \delta$ entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| \varphi_n(t) dt < \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} \varphi_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos $N \in \mathbb{N}$, un valor fijo, tal que $n \geq N$. Así, se tiene

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t) dt = \int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(t) dt < \frac{\pi \varepsilon}{2\|f\|_\infty}.$$

Por tanto, para todo $n \geq N$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, de (2.24), se tiene

$$|(f * \varphi_n)(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Recordemos que, dados $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ y $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\sigma_N(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) K_N(x-y) dy.$$

Por lo hecho anteriormente, sabemos que $\sigma_N(f; x) = (f * K_N)(x)$. Así, si deseamos probar que $\sigma_N(f) = f * K_N \rightarrow f$ uniformemente, es suficiente probar que los núcleos de Féjer $\{K_N\}$ forman una identidad aproximada. Esto se podrá obtener mediante el siguiente lema.

Lema 2.3. Para todo $N \in \mathbb{Z}$, tal que $N \geq 1$, los núcleos de Féjer de orden N satisfacen

$$K_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \right]^2, & \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ N+1, & \text{si } x = 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Demostración. Si $x = 2m\pi$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} K_N(x) &= \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ik(2m\pi)} \\ &= \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \\ &= \sum_{k=-N}^N 1 - \sum_{k=-N}^N \frac{|k|}{N+1} \\ &= 2N+1 - \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^N |k| \\ &= 2N+1 - \frac{2}{N+1} \frac{N(N+1)}{2} \\ &= N+1. \end{aligned}$$

Si $x \neq 2m\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. Además, usando

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{ix}}{4} - \frac{e^{-ix}}{4}, \quad (2.25)$$

tenemos

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) K_N(x) = \sum_{k=-N}^N \left(\frac{N+1-|k|}{N+1}\right) e^{ikx} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{ix}}{4} - \frac{e^{-ix}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^N \left((N+1-|k|) \frac{e^{ikx}}{2} - (N+1-|k|) \frac{e^{i(k+1)x}}{4} - (N+1-|k|) \frac{e^{i(k-1)x}}{4} \right).$$

En el segundo sumando podemos hacer el cambio de índice $n = k + 1$ y en el tercer sumando $n = k - 1$. Así,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) K_N(x) &= \frac{1}{N+1} \left(\sum_{k=-N}^N (N+1-|k|) \frac{e^{ikx}}{2} - \sum_{n=-N+1}^{N+1} (N+1-|n-1|) \frac{e^{inx}}{4} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=-N-1}^{N-1} (N+1-|n+1|) \frac{e^{inx}}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si cambiamos la variable n por k en la sumatoria, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N (N+1-|k|) \frac{e^{ikx}}{2} &= \sum_{k=-N+1}^{N-1} 2(N+1-|k|) \frac{e^{ikx}}{4} + \frac{e^{iNx}}{2} + \frac{e^{-iNx}}{2}, \\ - \sum_{k=-N+1}^{N+1} (N+1-|k-1|) \frac{e^{ikx}}{4} &= - \sum_{k=-N+1}^{N-1} (N+1-|k-1|) \frac{e^{ikx}}{4} - \frac{e^{i(N+1)x}}{4} - \frac{2e^{iNx}}{4}, \\ - \sum_{k=-N-1}^{N-1} (N+1-|k+1|) \frac{e^{ikx}}{4} &= - \sum_{k=-N+1}^{N-1} (N+1-|k+1|) \frac{e^{ikx}}{4} - \frac{e^{-i(N+1)x}}{4} - \frac{2e^{-iNx}}{4}. \end{aligned}$$

Luego, reemplazamos esto en (2.26) y obtenemos

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\sum_{k=-N+1}^{N-1} (|k+1| + |k-1| - 2|k|) \frac{e^{ikx}}{4} - \frac{1}{4} e^{i(N+1)x} - \frac{1}{4} e^{-i(N+1)x} \right).$$

Ahora, la sumatoria

$$\sum_{k=-N+1}^{N-1} (|k+1| + |k-1| - 2|k|) \frac{e^{ikx}}{4} = \frac{1}{2}.$$

En efecto, analicemos los siguientes casos: si $k = 0$,

$$(|0+1| + |0-1| - 2|0|) \frac{e^{i(0)x}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Si $k \geq 1$, $k + 1 \geq 2$ y $k - 1 \geq 0$,

$$|k + 1| + |k - 1| - 2|k| = k + 1 + k - 1 - 2k = 0.$$

Si $k \leq -1$, $k + 1 \leq 0$ y $k - 1 \leq -2$

$$|k + 1| + |k - 1| - 2|k| = -k - 1 - k + 1 + 2k = 0.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{i(N+1)x} - \frac{1}{4} e^{-i(N+1)x} \right) = \frac{1}{N+1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{(N+1)x}{2}\right).$$

Luego, despejando $K_n(x)$ obtenemos $K_N(x) = \frac{1}{N+1} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$. □

Proposición 2.12. Si $N \in \mathbb{Z}$, tal que $N \geq 1$, los núcleos de Féjer $\{K_N\}$ forman una identidad aproximada.

Demostración. Efectivamente, los núcleos de Féjer $\{K_N\}$ satisfacen las siguientes condiciones:

■ $K_N(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $N \in \mathbb{Z}^+$. Esto es cierto por el lema anterior.

■ $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x) dx = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx} dx \\ &= \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ahora, todo depende del valor de la integral $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx$. Veamos, si $k = 0$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Si $k \neq 0$ entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \frac{2 \operatorname{sen}(k\pi)}{k} = 0,$$

para $k = -N, -N + 1, \dots, 0, \dots, N - 1, N$. Reemplazando en (2.27) se obtiene el resultado.

- Para todo $\delta \in (0, \pi)$ se debe cumplir $\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_{-\pi}^{-\delta} K_N(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} K_N(x) dx \right] = 0$. En efecto, como $K_N > 0$ y periódica, de periodo 2π , por el lema anterior

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\pi}^{-\delta} K_N(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} K_N(x) dx \\ &= \int_{\pi}^{2\pi-\delta} K_N(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} K_N(x) dx \\ &= \int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_N(x) dx \\ &= \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1}{N+1} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx \\ &\leq \frac{1}{N+1} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx \\ &\leq \frac{1}{N+1} \left(-2 \cot\left(\frac{x}{2}\right) \right) \Big|_{\delta}^{2\pi-\delta} \\ &= \frac{4}{N+1} \cot\left(\frac{\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Haciendo tender $N \rightarrow \infty$ obtenemos el resultado.

□

Teorema 2.3 (Teorema de Féjer). *Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, la serie de Fourier de f es uniformemente sumable en el sentido de Cèsaro. Es decir, $\sigma_N(f) = f * K_N \rightarrow f$ uniformemente cuando $N \rightarrow +\infty$.*

Demostración. Sabemos que, por la Proposición 2.12 los núcleos de Féjer (K_N) forman una identidad aproximada. Luego, por la Proposición 2.11, se tiene que $f * K_N \rightarrow f$ uniformemente si $N \rightarrow \infty$.

□

A continuación, se muestra un ejemplo gráfico de algunos núcleos de Féjer.

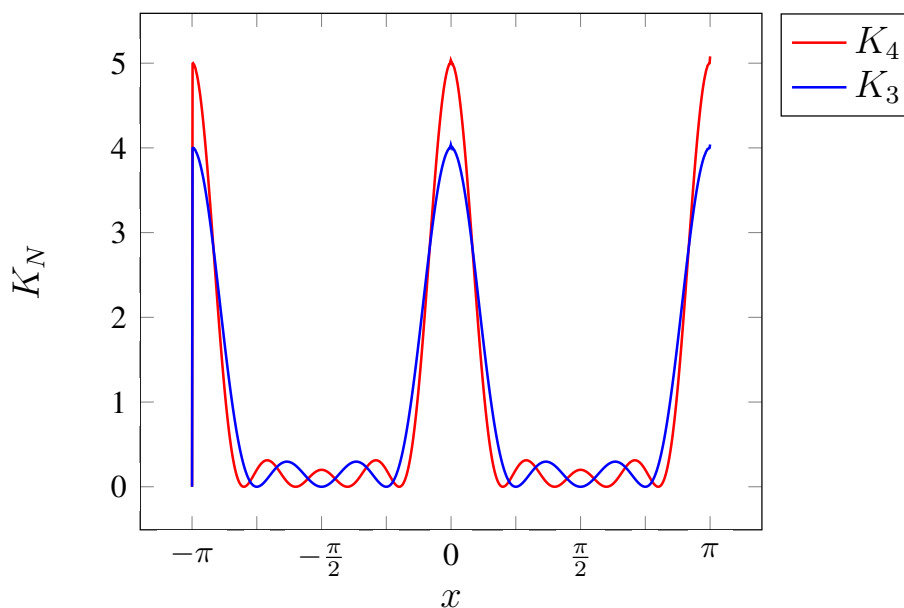


Figura 2.3: Núcleos de Féjer. Fuente: Elaboración propia.

Como consecuencia del teorema de Féjer, tenemos los siguientes teoremas:

Teorema 2.4 (Aproximación de Weierstrass). *Si $f \in C([a, b])$, existe una secuencia de polinomios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $p_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$.*

Demostración. Se sabe que, por el teorema de Féjer, cualquier función $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ puede ser uniformemente aproximada por $\sigma_N(f)$, para $N \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Este es el promedio de las $N + 1$ sumas parciales de la serie de Fourier. Es decir,

$$\begin{aligned}\sigma_N(f; x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \left(\sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \frac{\widehat{f}(k)}{N+1} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-N}^N \frac{N+1-|k|}{N+1} \widehat{f}(k) e^{ikx}.\end{aligned}$$

Así, $\sigma_N(f; x)$ puede ser escrita de la siguiente manera

$$\sigma_N(f; x) = \sum_{k=-N}^N (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

donde a_k y $b_k \in \mathbb{C}$. Por tanto, $\sigma_N(f)$ es un polinomio trigonométrico. Es decir, una combinación lineal finita con coeficientes complejos de las funciones e^{ikx} , para $k \in \mathbb{Z}$. Esta aproxima uniformemente a f si $N \rightarrow \infty$. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar el caso $[a, b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ya que podemos crear un isomorfismo que lleve un intervalo cerrado en otro. Ahora, podemos extender f a una función $F \in C_{per}([-\pi, \pi])$ tal que $F(x) = f(x)$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, y $F(-\pi) = F(\pi) = 0$. Como consecuencia del teorema de Fejer, $\sigma_N(F)$ aproxima uniformemente a F . Ahora, se sabe que la serie de Taylor de las funciones seno y coseno converge uniformemente en todo intervalo compacto. Así, si consideramos un $\varepsilon > 0$, tal que $\|F(x) - \sigma_N(F, x)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$, podemos hallar un polinomio P_N que satisface

$$\begin{aligned}\|\sigma_N(F) - P_N\|_\infty &= \sup_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} |\sigma_N(F, x) - P_N(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Luego, como $f = F$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \|f - P_N\|_\infty &= \sup_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} |f(x) - P_N(x)| \\
 &= \sup_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} |F(x) - P_N(x)| \\
 &= \|F - P_N\|_\infty \\
 &\leq \|F - \sigma_N(F)\|_\infty + \|\sigma_N(F) - P_N\|_\infty \\
 &< \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Luego, la sucesión de polinomios $\{P_N\}_{N \geq 1}$ converge uniformemente a f en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. \square

Teorema 2.5. Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, la serie de Fourier de f converge a f en norma L^2 . Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(k) \Phi_k \right\|_2 = 0. \quad (2.28)$$

Además, se cumple la identidad de Parseval

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2}^2. \quad (2.29)$$

Demostración. Usemos la Proposición 2.6. Sabemos que, para todo $T_n \in V_n$ se cumple

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - T_n\|_2,$$

donde $S_n = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}$. Luego, por el teorema de aproximación de Weierstrass, se tiene que $\sigma_n(f) \in V_n$. Ahora, usando la desigualdad (2.6) tenemos

$$0 \leq \|f - S_n\|_2^2$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \|f - \sigma_N(f)\|_2^2 \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(f; x)|^2 dx \\
 &\leq 2\pi \|f - \sigma_n(f)\|_{\infty}^2 \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

si $n \rightarrow \infty$ y como consecuencia del teorema de Féjer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_2 = 0$.

Ahora, usemos las relaciones de ortogonalidad para demostrar la identidad de Parseval.

$$\begin{aligned}
 \|S_n\|_2^2 &= (S_n/S_n) \\
 &= \left(\sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) \Phi_k / \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) \Phi_k \right) \\
 &= \sum_{|k| \leq n} \sum_{|j| \leq n} \hat{f}(k) \hat{f}(j) (\Phi_k / \Phi_j) \\
 &= \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) \overline{\hat{f}(k)} 2\pi \\
 &= 2\pi \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}(k)|^2.
 \end{aligned}$$

Recordando que $S_n \xrightarrow{L^2} f$ y haciendo tender $n \rightarrow \infty$, tenemos que $\|f\|_2^2 = 2\pi \left\| \widehat{f}(k) \right\|_2^2$. \square

Corolario 2.6. Si f y $g \in C_{per}([-\pi, \pi])$, tales que $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Iniciemos considerando $h = f - g \in C_{per}([-\pi, \pi])$. Luego,

$$\widehat{h}(k) = \widehat{(f - g)}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Ahora, según la Identidad de Parseval (2.6)

$$\|h\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{h}(k)|^2.$$

Así, $\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx = 0$. Considerando la continuidad de h , se tiene que $h \equiv 0$ en $C_{per}([-\pi, \pi])$, con la norma en L^2 . Por tanto, $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, $f = g$. \square

Continuando con el análisis de la N -ésima suma parcial ($S_N(f)$) de la serie de Fourier generada por f . Esta puede ser escrita en términos de convolución de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 S_N(f; x) &= \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) e^{ikx} \\
 &= \sum_{k=-N}^N e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\sum_{k=-N}^N e^{ik(x-y)} \right] dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \\
 &= (f * D_N)(x),
 \end{aligned}$$

donde $D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ikx}$.

Definición 2.9 (Núcleo de Dirichlet). *Sea $N \in \mathbb{N}$ un valor fijo. La función $D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ikx} \in C_{per}([-\pi, \pi])$, para $x \in \mathbb{R}$, se denomina núcleo de Dirichlet de orden N .*

Lema 2.4. *Si $N \in \mathbb{Z}$ y $N \geq 1$, los núcleos de Dirichlet satisfacen*

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}, & \text{si } x \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \\ 2N + 1, & \text{si } x = 2m\pi \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Además, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$.

Demostración. Iniciemos con el caso $x = 2m\pi$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{k=-N}^N e^{ik(2m\pi)} \\ &= \sum_{k=-N}^N 1 = 2N + 1. \end{aligned}$$

Si $x \neq 2m\pi$, para $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{k=-N}^N e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-N}^N e^{i(k+N-N)x} \\ &= e^{-iNx} \sum_{k=-N}^N e^{i(k+N)x} \\ &= e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} e^{ikx} \\ &= e^{-iNx} \left[\frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \right] \\ &= \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \\ &= e^{i\frac{1}{2}x} \left[\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix} - 1} \right] \\ &= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}} \\ &= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{2} \\ &= \frac{2}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}} \\ &= \frac{\text{sen}\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Para finalizar,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \sum_{k=-N, k \neq 0}^N e^{ikx} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(2\pi + \sum_{k=-N, k \neq 0}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(2\pi + \sum_{k=-N, k \neq 0}^N \frac{2 \operatorname{sen}(k\pi)}{k} \right) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

A continuación, mostramos un ejemplo gráfico de los núcleos de Dirichlet, para el caso $N = 4$.

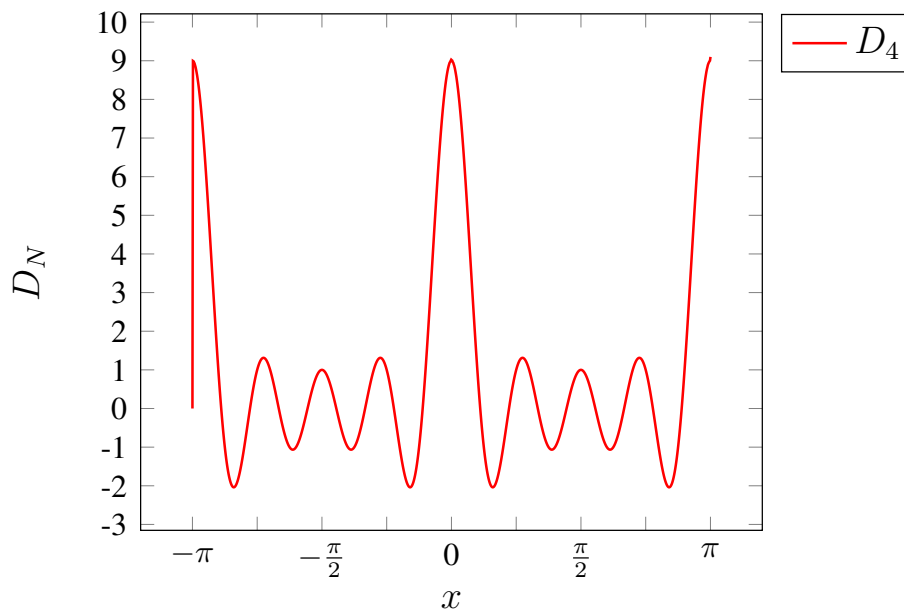


Figura 2.4: Núcleos de Dirichlet. Fuente: Elaboración propia.

Definición 2.10. Sea $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$. La serie de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ es sumable en el sentido de Abel si, para $r \in [0, 1[$, la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)r^{|k|}e^{ikx} \quad (2.31)$$

converge cuando $r \rightarrow 1^-$.

La serie (2.31) converge absoluta y uniformemente, si $r < 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(k)r^{|k|}e^{ikx} \right| &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(k) \right| r^{|k|} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx \right| r^{|k|} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right) r^{|k|} \\ &= \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

La serie (2.31) puede ser reescrita en términos de convolución de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)r^{|k|}e^{ikx} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky} dy \right) r^{|k|}e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(x-y)} \right) dy \\ &= (f * P_r)(x), \end{aligned}$$

donde

$$P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikx}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikx} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx) \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \right], \quad z = r(\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)) \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} z^k \right] \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-z} \right] \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{2(1-z)(1-\bar{z})} \right] \\
 &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \\
 &= \frac{1-|z|^2}{1-2\operatorname{Re}(z)+|z|^2} \\
 &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}.
 \end{aligned}$$

Definición 2.11. Sea $r \in [0, 1[$. La aplicación $P_r \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$, definida por

$$P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2},$$

se denomina núcleo de Poisson.

Proposición 2.13. Los núcleos de Poisson $\{P_r\}_{r \in [0, 1[}$ forman una identidad aproximada.

Demostración. Veamos que P_r satisface las tres condiciones.

- Como ya vimos, $P_r \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ y $P_r(x) \geq 0$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

- Veamos su valor promedio

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx \\ &= 1 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} r^{|k|} \frac{1}{2\pi} \frac{2 \operatorname{sen}(k\pi)}{k} \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Si $\delta \in]0, \pi[$, $0 < \cos(\delta) < 1$ y si $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \cos(x) \leq \cos(\delta) \\ 0 &< 1 - 2r \cos(\delta) + r^2 \leq 1 - 2r \cos(x) + r^2 \\ 0 &< \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta) + r^2} \\ 0 &< P_r(x) \leq P_r(\delta). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} P_r(x) dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\delta) dx + \int_{\delta}^{\pi} P_r(\delta) dx \\ &= P_r(\delta) \left(\int_{-\pi}^{-\delta} 1 dx + \int_{\delta}^{\pi} 1 dx \right) \\ &= 2P_r(\delta)(\pi - \delta) \\ &= 2(\pi - \delta) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta) + r^2}. \end{aligned}$$

Luego, para $\delta \in]0, \pi[$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta) + r^2} &= \frac{0}{2(1 - \cos(\delta))} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(x)dx + \int_{\delta}^{\pi} P_r(x)dx = 0.$$

□

A continuación, se muestra un ejemplo gráfico de los núcleos de Poisson.

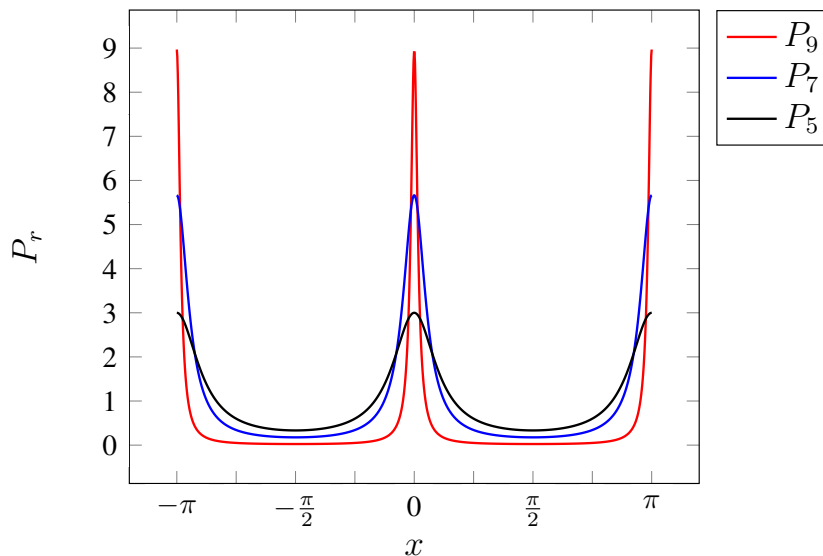


Figura 2.5: Núcleos de Poisson. Fuente: Elaboración propia.

Corolario 2.7. Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, la serie de Fourier generada por f es uniformemente sumable en el sentido de Abel.

Demostración.
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)r^{|k|}e^{ikx} = (f * P_r)(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x).$$

□

Funciones Periódicas de clase C^∞

En este capítulo, estudiaremos el espacio

$$\mathcal{P} = C_{per}^\infty([- \pi; \pi]) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / f \in C^\infty([- \pi; \pi]), f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \right\}$$

de las funciones periódicas continuas de clase C^∞ y estudiaremos su completitud. Luego, caracterizaremos la transformada de Fourier en ella. Un resultado importante en este capítulo es la relación que hay entre \mathcal{P} y el espacio de las sucesiones rápidamente decrecientes. Debemos tener en cuenta que \mathcal{P} nos servirá de ambiente a nuestras funciones test, para el estudio de las distribuciones periódicas en el siguiente capítulo.

SECCIÓN 3.1

Completitud de \mathcal{P}

En esta sección definiremos una norma adecuada en \mathcal{P} , para garantizar su completitud.

Proposición 3.1. *El espacio \mathcal{P} es un \mathbb{C} -E.V.*

Proposición 3.2. *Si $f \in \mathcal{P}$, para todo $j = 1, 2, 3, \dots$, se verifica que*

$$\|f^{(j)}\|_\infty = \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |f^{(j)}(x)|$$

es seminorma en \mathcal{P} . Además, $\|f\|_{\infty, k} = \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\infty$ y $\|f\|_\infty$ son normas en \mathcal{P} .

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{P}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Probaremos que $\|\cdot\|_\infty$ que satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} \|(f + g)^{(j)}\|_\infty &= \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |(f + g)^{(j)}(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [-\pi; \pi]} \left(|f^{(j)}(x)| + |g^{(j)}(x)| \right) \\ &\leq \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |f^{(j)}(x)| + \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |g^{(j)}(x)| \\ &= \|f^{(j)}\|_\infty + \|g^{(j)}\|_\infty \\ \|(\alpha f)^{(j)}\|_\infty &= \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |(\alpha f)^{(j)}(x)| \\ &= \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |\alpha f^{(j)}(x)| \\ &= |\alpha| \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |f^{(j)}(x)| \\ &= |\alpha| \|f^{(j)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Ahora, probemos que $\|\cdot\|_{\infty, k}$ satisface las condiciones de norma.

- Desigualdad de Cauchy–Schwarz.

$$\begin{aligned} \|(f + g)\|_{\infty, k} &= \sum_{j=0}^k \|(f + g)^{(j)}\|_\infty \\ &\leq \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\infty + \sum_{j=0}^k \|g^{(j)}\|_\infty \\ &= \|f\|_{\infty, k} + \|g\|_{\infty, k} \end{aligned}$$

- Producto por un escalar.

$$\|\alpha f\|_{\infty,k} = \sum_{j=0}^k \|(\alpha f)^{(j)}\|_{\infty} = |\alpha| \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_{\infty} = |\alpha| \|f\|_{\infty,k}.$$

- Si $f \equiv 0$, es evidente que $\|f\|_{\infty,k} = 0$. Ahora, si suponemos que $\|f\|_{\infty,k} = 0$ entonces $\|f^{(j)}\|_{\infty} = 0$, pues $\|(f^{(j)})\|_{\infty} \geq 0$. Luego, $\|f^{(j)}\|_{\infty} = \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |f^{(j)}(x)| = 0$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots, k$. En particular $\sup_{x \in [-\pi; \pi]} |f(x)| = 0$. Así, $f(x) = 0$ para todo $x \in [-\pi; \pi]$ y por tanto $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, $f \equiv 0$.

□

Proposición 3.3. *El espacio $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty,k})$ no es completo.*

Considerando que $\mathcal{P} \subseteq C_{per}^k([-\pi; \pi])$, podemos definir una métrica de la siguiente manera:

Proposición 3.4. *Sean f y $g \in \mathcal{P}$. La aplicación $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow [0; \infty)$, definida por*

$$d(f; g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_{\infty}}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_{\infty}}$$

es una métrica en \mathcal{P} .

Observación 3.1. *La métrica d no proviene de ninguna norma en \mathcal{P} . Efectivamente, si suponemos que $d(f; g) = \|f - g\|$ para alguna norma en \mathcal{P} , se tendría que*

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f^{(k)}\|_{\infty}}{1 + \|f^{(k)}\|_{\infty}}.$$

Sin embargo, $\|\alpha f\| \neq |\alpha| \|f\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Proposición 3.5. *Sean f_n y $f \in \mathcal{P}$. $f_n \xrightarrow{d} f$ si y solo si $\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; donde $f_n \xrightarrow{d} f$ si $d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

Proposición 3.6. *El espacio $(C_{per}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_{\infty})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Consideremos una sucesión de Cauchy f_n en $C_{per}([-\pi; \pi])$ tal que

$$\sup_{x \in [-\pi; \pi]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

para $n, m \in \mathbb{N}$. Si fijamos n, m entonces

$$\sup_{x \in [-\pi; \pi]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in [-\pi; \pi]$. Usando el criterio de convergencia de Cauchy, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[-\pi; \pi]$ a una función f y como f_n es continua para cada n entonces f es continuo. Además,

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x + 2\pi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por tanto, $f \in C_{per}([-\pi; \pi])$. Esto prueba la proposición. □

Teorema 3.1. *El espacio (\mathcal{P}, d) es completo.*

Demostración. Si $\{f_n\} \subseteq \mathcal{P}$ es una sucesión de Cauchy entonces, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene $d(f_n, f_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$. Así, para cada $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\|f_n^{(k)} - f_m^{(k)}\|_\infty \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Como $(C_{per}([-\pi; \pi]), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, existe $g_k \in C_{per}([-\pi; \pi])$ tal que $f_n^{(k)} \rightarrow g_k$ uniformemente, para cada $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ahora, si denotemos por $f = g_0$ entonces $f_n \rightarrow g_0$. Además, f es de clase C^∞ y $f^{(k)} = g_k$ para $k = 1, 2, \dots$. En efecto, para

ello usaremos un proceso de inducción. Si $k = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_0(x+h) - g_0(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} f'_n(x) \\
 &= g_1(x).
 \end{aligned}$$

Usando el hecho que $f_n^{(k)} \rightarrow g_k$ uniformemente, para cada $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, podemos demostrar el caso $k + 1$:

$$f^{(k+1)}(x) = [f^{(k)}(x)]' = [g_k(x)]' = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(x) \right]' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k+1)}(x) = g_{k+1}(x).$$

Además,

$$f(x + 2\pi) = g_0(x + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g_0(x) = f(x).$$

Por tanto, $f \in \mathcal{P}$. Ahora,

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \leq \|f_n^{(k)} - f_m^{(k)}\|_\infty + \|f_m^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty = \|f_n^{(k)} - f_m^{(k)}\|_\infty + \|f_m^{(k)} - g_k\|_\infty.$$

Haciendo tender $n, m \rightarrow \infty$, $\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Por la Proposición 3.5,

$$f_n \xrightarrow{d} f.$$

□

SECCIÓN 3.2

Caracterización de la Transformada de Fourier en \mathcal{P}

El objetivo en esta sección es estudiar las series de Fourier en \mathcal{P} . Para ello, recordemos el Teorema 2.1. Este teorema afirma que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$ y que la serie de Fourier de $f^{(n)}$ también converge absolutamente y uniformemente. Es decir, para $n = 1, 2, 3, \dots$ se tiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f^{(n)}}(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| |k|^n < \infty.$$

Además,

$$\frac{|\widehat{f^{(n)}}(k)|}{|k|^n} = \left| \frac{(ik)^n \widehat{f}(k)}{(ik)^n} \right| = |\widehat{f}(k)|.$$

Esto significa que, mientras una función periódica f sea derivable más veces— n se hace cada vez más grande—sus coeficientes de Fourier tienden a cero mucho más rápido, a medida que $|k| \rightarrow \infty$. En términos de sucesiones y series, la serie formada por los coeficientes de Fourier de una función f y la serie de sus derivadas $f^{(n)}$ convergen; ya que la sucesión formada por los coeficientes de f y sus derivadas tienden a cero a medida que n recorre valores enteros muy grandes. Esto nos motiva a definir lo siguiente:

Definición 3.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. El espacio

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) = \left\{ \alpha = \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C} / \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k| < \infty \text{ y } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k| |k|^n < \infty \right\}$$

se denomina espacio de las sucesiones rápidamente decrecientes.

Proposición 3.7. La sucesión $\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ si y solo si $\|\alpha\|_{\infty, n} < \infty$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$;

donde

$$\|\alpha\|_{\infty,0} = \|\alpha\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|$$

y

$$\|\alpha\|_{\infty,n} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| |k|^n, \text{ para } n \geq 1.$$

Demostración. Para comenzar supongamos que $\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Ahora, para $n = 0$ tenemos que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$, por tanto $|\alpha_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{Z}$; tal que $|\alpha_k| < \varepsilon$ para $k > k_0$. Así, $\|\alpha\|_{\infty,0} = \|\alpha\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| < M$, donde

$$M = \sup\{\varepsilon, |\alpha_{-k_0+1}|, |\alpha_{-k_0+2}|, |\alpha_{-k_0+3}|, \dots, |\alpha_{k_0-3}|, |\alpha_{k_0-2}|, |\alpha_{k_0-1}|\}.$$

Análogamente, en el caso $\|\alpha\|_{\infty,n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Recíprocamente, si $\|\alpha\|_{\infty,n} < \infty$, para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} |\alpha_k| |k|^n &= \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{|\alpha_k| |k|^{n+2}}{|k|^2} \\ &\leq \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| |k|^{n+2}}{|k|^2} \\ &= \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{\|\alpha\|_{\infty, n+2}}{|k|^2} \\ &= \|\alpha\|_{\infty, n+2} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{1}{|k|^2} \leq \infty, \end{aligned}$$

donde $\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{1}{|k|^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$. □

Proposición 3.8. Sean $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. La aplicación $d' : \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \times$

$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \rightarrow [0; \infty)$, definida por

$$d'(\alpha; \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|\alpha - \beta\|_{\infty, n}}{1 + \|\alpha - \beta\|_{\infty, n}},$$

es una métrica en $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

Proposición 3.9. Sean α_n y $\alpha \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. $\alpha_n \xrightarrow{d'} \alpha$ si y solo si $\|\alpha_n - \alpha\|_{\infty, n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, donde $\alpha_n \xrightarrow{d'} \alpha$ si $d'(\alpha_n, \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Definición 3.2. Para todo $f \in (\mathcal{P}, d)$ se tiene que $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\Phi_k$. La aplicación

$$\begin{aligned} \hat{\cdot}: (\mathcal{P}, d) &\rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{Z}), d') \\ f &\rightarrow \alpha, \end{aligned}$$

donde $\alpha = \left(\hat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}}$, se denomina transformada de Fourier de f .

Teorema 3.2. La transformada de Fourier es un isomorfismo y un homeomorfismo.

Demostración. Para comenzar, la linealidad es evidente desde que la integral es lineal. La inyectividad es consecuencia de la unicidad de la serie de Fourier, obtenida del Corolario 2.6. Para comprobar que la aplicación es sobreyectiva, consideremos $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y definamos de forma natural $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \Phi_k(x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Nuestro objetivo será mostrar que $f \in \mathcal{P}$ y que

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik)^n \Phi_k(x). \quad (3.1)$$

Para tal fin, usemos el M-test de Weierstrass y la inducción matemática. Para el caso $n = 1$, la sucesión $\{\alpha_k \Phi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ satisface $|\alpha_k \Phi_k(x)| = |\alpha_k|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$.

Así, por el M-test de Weierstrass $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \Phi_k(x)$ converge uniformemente. Por tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (\Phi_k(x))' \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik) \Phi_k(x). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos cierto que $f^{(n)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik)^n \Phi_k(x)$ y $|\alpha_k (ik)^n \Phi_k(x)| = |\alpha_k| |k|^n$,

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k| |k|^n < \infty$. Por el M-test de Weierstrass $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik)^n \Phi_k(x)$ converge uniformemente. Así,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x) \right)' \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik)^n (\Phi_k(x)) \right)' \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik)^{(n+1)} \Phi_k(x). \end{aligned}$$

Esto prueba que $f \in C_{per}^\infty([-\pi, \pi])$ y satisface (3.1). Además, es evidente que $f(x + 2\pi) = f(x)$. Por tanto, $f \in \mathcal{P}$. A fin de mostrar que la transformada de Fourier es continua en la métrica d , consideremos la suseción $\{f_l\} \subseteq \mathcal{P}$, para $l = 1, 2, 3, \dots$, tal que $f_l \xrightarrow{d} f$. Usemos el hecho que $\left| \widehat{f^{(n)}}(k) \right| = |k|^n |\widehat{f}(k)|$ y

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \\ &\leq \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Así, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$|k|^n \left| \widehat{f}_l(k) - \widehat{f}(k) \right| = \left| \widehat{\left(f_l^{(n)} - f^{(n)} \right)}(k) \right| \leq \|f_l^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty.$$

Aplicando el supremo tenemos

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}_l(k) - \widehat{f}(k) \right| |k|^n = \|\widehat{f}_l - \widehat{f}\|_{\infty, n} \leq \|f_l^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty. \quad (3.2)$$

Aplicando la Proposición 3.5,

$$f_l \xrightarrow{d} f \Leftrightarrow \|f_l^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.$$

Ahora, hacemos tender l al infinito en ambos lados de (3.2) y obtenemos $\|\widehat{f}_l - \widehat{f}\|_{\infty, n} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$. Así, $\widehat{f}_l \xrightarrow{d'} \widehat{f}$ si $l \rightarrow \infty$. Esto prueba la continuidad de la transformada de Fourier.

Definimos la aplicación inversa de Transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \vee : (\mathcal{S}(\mathbb{Z}), d') &\rightarrow (\mathcal{P}, d) \\ \alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\rightarrow \check{\alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \Phi_k(x) := f(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

la cual está bien definida por la prueba hecha para la sobreyectividad de la transformada. Usaremos la convergencia uniforme de la serie de Fourier podemos integrar en ambos lados y obtener

$$\begin{aligned} \widehat{f}(j) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Phi_{-j}(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{-j}(x) \Phi_k(x) dx, \end{aligned} \quad (3.4)$$

para todo $j, k \in \mathbb{Z}$. Ahora, aplicando las relaciones de ortogonalidad en (3.4) obtenemos que $\widehat{f}(j) = \alpha_j$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Así,

$$\check{\alpha} = f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \Phi_k(x).$$

Es decir, $\widehat{\check{\alpha}} = \widehat{f} = \alpha$ y por tanto $\widehat{\check{f}} = f$, para todo $f \in \mathcal{P}$.

A continuación, probaremos que la transformada de Fourier es continua. Para ello, consideremos $\alpha^l = (\alpha_k^l)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ tal que $\alpha^l \xrightarrow{d'} \alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Es decir,

$$\|\alpha^l - \alpha\|_{\infty, n} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

Nuestro objetivo será demostrar que $\alpha^l \xrightarrow{d} \check{\alpha}$. Para tal fin, de (3.3) tenemos que

$$\left(\check{\alpha}^l - \check{\alpha} \right)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k^l - \alpha_k) \Phi_k(x).$$

Ahora, como α^l y $\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ entonces $\alpha^l - \alpha$ converge uniformemente y además

$$\begin{aligned} \left(\check{\alpha}^l - \check{\alpha} \right)^{(n)}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k^l - \alpha_k) (ik)^n \Phi_k(x) \\ &= \delta_{n,0} (\alpha_0^l - \alpha_0) + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} i^n \frac{k^{n+2} (\alpha_k^l - \alpha_k) \Phi_k(x)}{k^2}, \end{aligned}$$

donde $\delta_{n,0} = 0$ si $n \neq 0$ y $\delta_{0,0} = 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \left| \left(\check{\alpha}^l - \check{\alpha} \right)^{(n)}(x) \right| &\leq |\alpha_0^l - \alpha_0| + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{|k|^{n+2} |\alpha_k^l - \alpha_k|}{k^2} \\ \sup_{x \in [-\pi; \pi]} \left| \left(\check{\alpha}^l - \check{\alpha} \right)^{(n)}(x) \right| &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k^l - \alpha_k| + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{\sup_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{n+2} |\alpha_k^l - \alpha_k|}{k^2} \\ \left\| \left(\check{\alpha}^l - \check{\alpha} \right)^{(n)} \right\|_{\infty} &\leq \|\alpha^l - \alpha\|_{\infty, 0} + \|\alpha^l - \alpha\|_{\infty, n+2} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Usando (3.5), $\left\| \left(\alpha^l - \check{\alpha} \right)^{(n)} \right\|_\infty \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$. Esto implica que $d \left(\alpha^l, \check{\alpha} \right) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$. \square

SECCIÓN 3.3

Convolución en \mathcal{P}

En esta sección abordaremos el tema de la operación de convolución en \mathcal{P} y sus propiedades.

Definición 3.3. Sea $t \in \mathbb{R}$ un valor fijo. El operador

$$\begin{aligned} T_t : C_{per}([-\pi, \pi]) &\rightarrow C_{per}([-\pi, \pi]) \\ f &\rightarrow T_t(f), \end{aligned}$$

tal que $T_t(f)(x) = f(x - t)$, se denomina operador traslación.

Propiedades 3.1. Si $f, g \in C_{per}([-\pi; \pi])$ y $t \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. T_t es un operador lineal e invertible, tal que $(T_t)^{-1} = T_{-t}$.
2. $T_t(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.
3. $\|T_t f - f\|_\infty \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$.
4. $\widehat{T_t f}(k) = e^{-ikt} \widehat{f}(k)$.
5. Si $f \in \mathcal{P}$, $[T_{-t} f]^{(n)} = T_{-t} (f^{(n)})$, para todo $y n \in \mathbb{N}$.
6. $(T_t f * g) = T_t(f * g) = f * (T_t g)$.
7. $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Demostración. Las primeras tres propiedades son evidentes. Así que veamos las siguientes.

3. Como f es continua sobre un compacto, f es uniformemente continua en $[-\pi; \pi]$ y por la periodicidad de f esta es uniformemente continua en \mathbb{R} . Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ahora, como $t \rightarrow 0$ existe $\delta > 0$ –tan pequeño– que satisface $|t| = |x - t - x| < \delta$. Esto implica que $|f(x - t) - f(x)| < \varepsilon$ y por tanto

$$\|T_t f - f\|_\infty = \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |f(x - t) - f(x)| < \varepsilon.$$

4. Esta propiedad relaciona los coeficientes de Fourier y el operador traslación.

$$\begin{aligned} \widehat{T_t f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_t f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) e^{-ikx} dx \\ &\quad x - t = y \Rightarrow dx = dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-ik(y+t)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} e^{-ikt} dy \\ &= e^{-ikt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \\ &= e^{-ikt} \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

5. Para esta propiedad usaremos la inducción matemática. Para el caso $n = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} [T_{-t} f]'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{-t} f(x + h) - T_{-t} f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + t + h) - f(x + t)}{h} \\ &= f'(x + t) \\ &= T_{-t} f'(x). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos cierto para n y probaremos el caso $n + 1$.

$$[T_{-t}f]^{(n+1)}(x) = \left[[T_{-t}f]^{(n)} \right]'(x) = \left[T_{-t} \left(f^{(n)} \right) \right]'(x) = T_{-t} \left(f^{(n+1)} \right)(x).$$

6. Esta propiedad relaciona el operador traslación y la convolución.

$$\begin{aligned} T_t(f * g)(x) &= (f * g)(x - t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - t - y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(T_t g)(x - y)dy \\ &= (f * (T_t g))(x) \\ ((T_t f) * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_t f(y)g(x - y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y - t)g(x - y)dy \\ &\quad y - t = u \Rightarrow dy = du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x - t - u)dy \\ &= (f * g)(x - t) \\ &= T_t(f * g)(x). \end{aligned}$$

7. Finalmente, veamos la relación que tiene la convolución con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

$$\begin{aligned} \|f * g\|_\infty &= \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |(f * g)(x)| \\ &= \sup_{x \in [-\pi; \pi]} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| \sup_{x \in [-\pi; \pi]} |g(x - y)| dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_\infty \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} 1 dy \\ &= \|f\|_\infty \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.10. Si $t \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{P}$ y $g \in C_{per}([-\pi; \pi])$ entonces

1. si $t \rightarrow 0$ entonces $\frac{T_{-t}f - f}{t} \xrightarrow{d} f'$;
2. $f * g \in \mathcal{P}$ y $(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
3. si $g_n \in C_{per}([-\pi; \pi])$ y $\|g - g_n\|_\infty \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$f * g_n \xrightarrow{d} f * g.$$

Demostración. Veamos,

1. Para iniciar, recordemos que $(T_{-t}f)^{(k)} = T_{-t}(f^{(k)})$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$. Así,

$$\left\| \left(\frac{T_{-t}f - f}{t} - f' \right)^{(k)} \right\|_\infty = \left\| \frac{T_{-t}f^{(k)} - f^{(k)}}{t} - (f')^{(k)} \right\|_\infty.$$

A fin de demostrar que $\frac{T_{-t}f - f}{t} \xrightarrow{d} f'$ si $t \rightarrow 0$, es suficiente demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T_{-t}h - h}{t} - h' \right\|_\infty = 0,$$

para todo $h \in C_{per}^1([-\pi, \pi])$, pues $C_{per}^1([-\pi, \pi]) \subseteq C_{per}^k([-\pi, \pi])$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Usando el Teorema del valor medio con h , tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_{-t}h - h}{t} \right)(x) - h'(x) &= \frac{h(x+t) - h(x)}{x+t-x} - h'(x) \\ &= h'(y) - h'(x), \end{aligned}$$

donde $y = y(x, t) \in (x - |t|, x + |t|)$. Ahora, como $h' \in C_{per}([-\pi, \pi])$, esta es una función continua sobre un compacto. Por tanto, f es uniformemente continua. Luego,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{T_{-t}h - h}{t}(x) - h'(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(y) - h'(x)|,$$

para $y \in (x - |t|, x + |t|)$. Si hacemos tender $t \rightarrow 0$, $y \rightarrow x$. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T_{-t}h - h}{t} - h' \right\|_\infty &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{T_{-t}h - h}{t}(x) - h'(x) \right| \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(y) - h'(x)| \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

uniformemente.

2. En segundo lugar, usemos las propiedades de convolución y la inducción matemática.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \frac{T_{-t}(f * g) - f * g}{t} - f' * g \right\|_\infty \\ &= \left\| \left(\frac{T_{-t}f - f}{t} - f' \right) * g \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \frac{T_{-t}f - f}{t} - f' \right\|_\infty \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Ahora, hacemos tender $t \rightarrow 0$, por lo probado anteriormente y como $\|g\|_\infty < \infty$, obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{T_{-t}(f * g)(x) - (f * g)(x)}{t} \right) = (f' * g)(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$(f * g)' = (f' * g).$$

Así, hemos demostrado el caso $k = 1$. Supongamos cierto el caso k ,

$$(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g.$$

Ahora, probaremos el caso $k + 1$.

$$\begin{aligned} (f * g)^{(k+1)}(x) &= \left[(f * g)^{(k)} \right]'(x) \\ &= \left[f^{(k)} * g \right]'(x) \\ &= \left(f^{(k+1)} * g \right)(x). \end{aligned}$$

Esto prueba que $f * g \in \mathcal{P}$ y $(f * g)^{(k+1)} = f^{(k+1)} * g$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

3. Finalmente,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| (f * g_n - f * g)^{(k)} \right\|_\infty \\ &= \left\| f^{(k)} * (g_n - g) \right\|_\infty \\ &\leq \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \|g_n - g\|_\infty, \end{aligned}$$

para todo $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ahora, si hacemos tender $n \rightarrow \infty$, como $\left\| f^{(k)} \right\|_\infty < \infty$, obtenemos $f * g_n \xrightarrow{d} f * g$.

□

Corolario 3.1. Si $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subseteq C_{per}([-\pi, \pi])$ es una identidad aproximada y $f \in \mathcal{P}$ entonces

$$f * \varphi_n \xrightarrow{d} f,$$

siempre que $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Si $f^{(k)} \in C_{per}([-\pi, \pi])$ entonces

$$(f * \varphi_n)^{(k)} = f^{(k)} * \varphi_n \rightarrow f^{(k)}$$

uniformemente, para todo $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Luego,

$$\begin{aligned}\left\| (f * \varphi_n - f)^{(k)} \right\|_\infty &= \left\| (f * \varphi_n)^{(k)} - f^{(k)} \right\|_\infty \\ &= \left\| f^{(k)} * \varphi_n - f^{(k)} \right\|_\infty.\end{aligned}$$

Así, si $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (f * \varphi_n - f)^{(k)} \right\|_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f^{(k)} * \varphi_n - f^{(k)} \right\|_\infty \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $f * \varphi_n \xrightarrow{d} f$.

□

Distribuciones Periódicas

En este capítulo introduciremos el concepto de distribución periódica. Una distribución periódica es, como veremos, un funcional lineal que definiremos en \mathcal{P} . El cual es denominado el espacio de las funciones test y con el cual podremos extender el concepto de transformada de Fourier a las distribuciones.

SECCIÓN 4.1

Generalizando las funciones

Definición 4.1. Una funcional lineal $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina *distribución periódica* si existe una secuencia $\{\Psi_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{P}$, que satisface

$$T(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x) \varphi(x) dx, \quad (4.1)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Las funciones $\varphi \in \mathcal{P}$ se denominan *Funciones test*.

Notación 4.1. Denotaremos por \mathcal{P}' al conjunto de todas las distribuciones periódicas.

Notación 4.2. Denotaremos $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$, $T \in \mathcal{P}'$ y $\varphi \in \mathcal{P}$. $T(\varphi)$ se lee T actuando sobre φ .

Proposición 4.1. El espacio \mathcal{P}' es un espacio vectorial real.

Proposición 4.2. Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ entonces f define una distribución periódica T_f , mediante la expresión

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$.

Demostración. Para la demostración usemos los núcleos de Féjer y la función $\Psi_n = K_n * f$. Ahora, por el teorema de Féjer $\Psi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente. Además, los Ψ_n son lineales. A continuación,

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik(x-y)} f(y)dy \\ &\quad x-y = u \Rightarrow x-u = y, \quad du = -dy \\ &= \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{ik(x-y)} dy \\ &= \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky} dy \\ &= \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx} \widehat{f}(k) \\ &= \sigma(f)(x). \end{aligned}$$

Así, $\Psi_n = \sigma_n(f) \in \mathcal{P}$. Luego, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ se tiene

$$\langle \Psi_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x)\varphi(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x)\varphi(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx.$$

Esto prueba que Ψ_n , que ahora denotaremos por T_f , pertenece a \mathcal{P}' . □

Proposición 4.3. *La aplicación*

$$\begin{aligned} T : C_{per}([-\pi, \pi]) &\rightarrow \mathcal{P}' \\ f &\rightarrow T_f \end{aligned}$$

es lineal, inyectiva y continua en el siguiente sentido: si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_{per}([-\pi, \pi])$ y converge uniformemente a $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ entonces $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$.

Demostración. Para comenzar, es evidentemente que T es lineal. Ahora, veamos la inyectividad. Sean f y $g \in C_{per}([-\pi, \pi])$, y supongamos que $T_f = T_g$ en \mathcal{P}' . Así,

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Si en particular lo aplicamos a $\varphi = \sigma_n(\overline{f-g}) \in \mathcal{P}$, entonces

$$\left\langle T_f, \sigma_n(\overline{f-g}) \right\rangle = \left\langle T_g, \sigma_n(\overline{f-g}) \right\rangle.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle T_f - T_g, \sigma_n(\overline{f-g}) \right\rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)(x) \sigma_n(\overline{f-g}, x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)(x) (\overline{f-g} * K_n)(x) dx. \end{aligned}$$

Si hacemos tender $n \rightarrow \infty$ en ambos lados, se obtiene una convergencia uniforme. Además,

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)(x) \overline{f-g}(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx = \|f - g\|_2,$$

de donde obtenemos que $f = g$. Para el caso de la continuidad, si consideramos $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_{per}([-\pi, \pi])$, tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente entonces, por la convergencia uniforme de f_n , para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ se tiene

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\varphi(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx = \langle T_f, \varphi \rangle.$$

Esto finaliza la prueba. □

Definición 4.2. Se dice que una distribución $T \in \mathcal{P}'$ proviene de una función en $C_{per}([-\pi, \pi])$ si existe una función $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, tal que $T = T_f$.

Proposición 4.4. No toda distribución periódica proviene de una función.

Demostración. Para comenzar, consideremos la función δ_x delta de Dirac concentrada en $x \in \mathbb{R}$, tal que $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. En primer lugar, probaremos que δ_x es una distribución. Para ello, probemos que δ_x es lineal. En efecto, si $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda\varphi + \psi) \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \langle \delta_x, \lambda\varphi + \psi \rangle &= (\lambda\varphi + \psi)(x) \\ &= \lambda(\varphi)(x) + \psi(x) \\ &= \lambda\langle \delta_x, \varphi \rangle + \langle \delta_x, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, probaremos que $\delta_x \in \mathcal{P}'$. Sea $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{P}$ una identidad aproximada, por ejemplo los núcleos de Féjer, y consideremos las funciones $\Psi_n(y) = \frac{1}{2\pi}\varphi_n(x - y)$. Así, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(y)\varphi(y)dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\varphi_n(x - y)\varphi(y)dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n * \varphi)(x) \\ &= \varphi(x) \\ &= \langle \delta_x, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Así, $\delta_x \in \mathcal{P}'$. En segundo lugar, probaremos que δ_x no proviene de una función en $C_{per}([-\pi, \pi])$.

Para ello, consideremos la sucesión $\psi_n(y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(x - y)\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, que satisface las siguientes propiedades:

- Por la periodicidad de la función coseno, se tiene que $\psi_n \in \mathcal{P}$.
- $\langle \delta_x, \psi_n \rangle = \psi_n(x) = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta_x, \psi_n \rangle = 1$.
- $0 \leq \psi_n \leq 1$.
- La sucesión $\psi_n \rightarrow 0$ uniformemente en $[x - \pi, x - \varepsilon] \cup [x + \varepsilon, x + \pi]$, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \varepsilon < \pi$. En efecto, como ψ_n es continua y creciente sobre $[x - \pi, x - \varepsilon]$,

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_\infty &= \sup_{y \in [x - \pi, x - \varepsilon]} \left\{ |\psi_n(y)| \right\} \\ &= |\psi_n(x - \varepsilon)| \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\varepsilon) \right)^n \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

- Además,

$$\int_{|y-x| < \varepsilon} |f(y)| \psi_n(y) dy \leq \int_{|y-x| < \varepsilon} |f(y)| dy \leq \|f\|_\infty \int_{|y-x| < \varepsilon} 1 dy = 2\varepsilon \|f\|_\infty. \quad (4.2)$$

Ahora, como $\psi_n \rightarrow 0$ uniformemente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que si $n \geq N$, $\psi_n(y) = |\psi_n(y)| < \varepsilon$ para $y \in [x - \pi, x - \varepsilon] \cup [x + \varepsilon, x + \pi]$. Por tanto, si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon \leq |y-x| \leq \pi} |f(y)| \psi_n(y) dy &\leq \|f\|_\infty \int_{\varepsilon \leq |y-x| \leq \pi} \psi_n(y) dy \\ &< \|f\|_\infty \int_{\varepsilon \leq |y-x| \leq \pi} \varepsilon dy \\ &= 2\varepsilon(\pi - \varepsilon) \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, usando la periodicidad de f y ψ , tenemos

$$\begin{aligned}
 |\langle T_f, \psi_n \rangle| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} T_f(y) \psi_n(y) dy \right| \\
 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| |\psi_n(y)| dy \\
 &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} |f(y)| |\psi_n(y)| dy \\
 &= \int_{|y-x| < \varepsilon} |f(y)| |\psi_n(y)| dy + \int_{\varepsilon \leq |y-x| \leq \pi} |f(y)| |\psi_n(y)| dy \\
 &\leq 2\varepsilon \|f\|_{\infty} + 2\varepsilon(\pi - \varepsilon) \|f\|_{\infty} \\
 &= 2\varepsilon \|f\|_{\infty} (1 + \pi - \varepsilon) = \xi,
 \end{aligned}$$

donde $\varepsilon = \frac{\xi}{2\|f\|_{\infty}(1 + \pi - \varepsilon)}$. Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_f, \psi_n \rangle = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta_x, \psi_n \rangle.$$

Esto prueba que $\delta_x \neq T_f$, para cualquier función $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$. □

A continuación, se muestra los gráficos de ψ_n para $n = 1000$ y $n = 2000$.

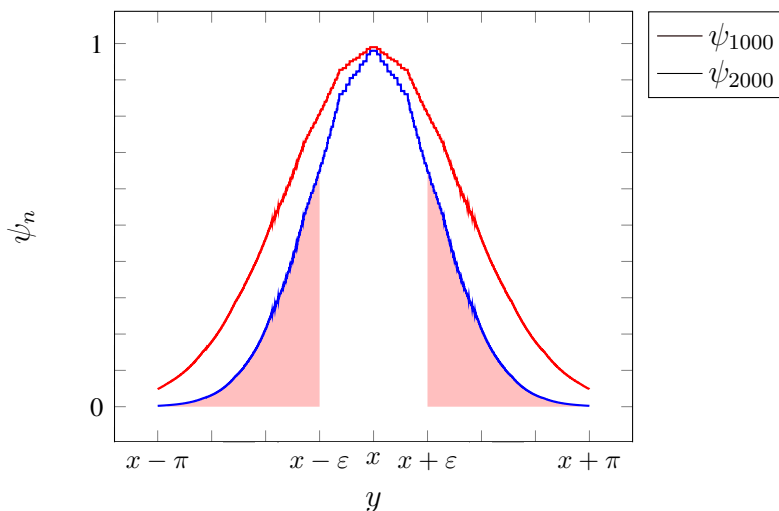


Figura 4.1: ψ_n . Fuente: Elaboración propia.

SECCIÓN 4.2

Convergencia de sucesiones en \mathcal{P}'

En esta sección extenderemos el concepto de convergencia de sucesiones en el espacio de las distribuciones.

Definición 4.3. Una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}'$ converge a $T \in \mathcal{P}'$, en el sentido de \mathcal{P}' , si para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ se cumple que

$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle.$$

Esto se denotará por $T_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} T$.

Proposición 4.5. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una identidad aproximada. Si denotamos por $\psi_n(y) = \varphi_n(x - y)$ y $T_n = T_{\psi_n}$ entonces

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} 2\pi\delta_x.$$

Demostración. Veamos,

$$\begin{aligned} \langle T_{\psi_n}, \xi \rangle &= T_{\psi_n}(\xi) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(y)\xi(y)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x - y)\xi(y)dy \\ &= 2\pi(\xi * \varphi_n)(x) \\ &\xrightarrow{\text{unif}} 2\pi\xi(x) \\ &= 2\pi\langle \delta_x, \xi \rangle \\ &= \langle 2\pi\delta_x, \xi \rangle \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathcal{P}$. Por tanto, $T_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} 2\pi\delta_x$. □

Proposición 4.6. Si $T \in \mathcal{P}'$ entonces existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{P}$, tal que $\alpha_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} T$.

Demostración. Si $T \in \mathcal{P}'$, existe una sucesión $\{\Psi\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{P}$, tal que para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ se tiene

$$T(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x) \varphi(x) dx.$$

En consecuencia $\langle T_{\Psi_n}, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. □

La proposición anterior se desprende la misma definición de una distribución.

Observación 4.1. *La convergencia de las sucesiones en \mathcal{P}' es débil.*

Recordemos que toda distribución periódica es una funcional lineal. Ahora, consideremos una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_{per}([-\pi, \pi])$ que converge a f en L_p . Es decir, $f_n \xrightarrow{L_p} f$, para $1 \leq p \leq \infty$. Así, $\mathcal{P}' \ni T_{f_n} \rightarrow T_f \in \mathcal{P}'$. Para probar nuestra observación mostraremos que

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Esto es equivalente a probar que $\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle \rightarrow 0$. Para ello, sea $\varphi \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \left| \langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \|f_n - f\|_p \|\varphi\|_q, \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Así, $\left| \langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle \right| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, $T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{P}'} T_f$. Como consecuencia, la aplicación

$$C_{per}([-\pi, \pi]) \ni f \xrightarrow{L} T_f \in \mathcal{P}'$$

es continua. Además, identificaremos a los elementos de $C_{per}([-\pi, \pi])$ con sus imágenes en \mathcal{P}' vía la identificación $L(f) = T_f$ y de la continuidad

$$f_n \xrightarrow{L_p} f \Rightarrow L(f_n) \xrightarrow{\mathcal{P}'} L(f).$$

SECCIÓN 4.3

Operaciones en \mathcal{P}'

A continuación, usaremos el lenguaje de distribuciones para poder extender algunas operaciones de $C_{per}([-\pi, \pi])$ a \mathcal{P}' .

Iniciemos con la conjugación, para ello analicemos que pasa con funciones en \mathcal{P} . Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ y $\varphi \in \mathcal{P}$,

$$\langle \bar{f}, \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} \varphi(x) dx = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\varphi(x)} dx} = \overline{\langle f, \bar{\varphi} \rangle}$$

Definición 4.4 (Distribución conjugada). *Sea $f \in \mathcal{P}'$. Se define la distribución conjugada $\bar{f} \in \mathcal{P}'$ como aquella distribución que satisface*

$$\langle \bar{f}, \varphi \rangle = \overline{\langle f, \bar{\varphi} \rangle}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}'. \tag{4.3}$$

Antes de continuar, es necesario probar que, así definida, $\bar{f} \in \mathcal{P}'$. Veamos, es claro que $\bar{f} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal. Ahora, si $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}$, tal que $\Psi_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$, entonces

$$\langle \overline{\Psi_n}, \varphi \rangle = \overline{\langle \Psi_n, \bar{\varphi} \rangle} \rightarrow \overline{\langle f, \bar{\varphi} \rangle} = \langle \bar{f}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Definición 4.5. *Sea $f \in \mathcal{P}'$. La parte real e imaginaria de f se definen mediante las expresiones*

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2} \quad e \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i},$$

respectivamente.

Veamos ahora el caso de la operación de reflexión. Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, la reflexión de

f , denotada por $\tilde{f}(x) = f(-x)$, es continua y periódica de periodo 2π . Además, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \varphi \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\varphi(x)dx \\ & \quad y = -x \Rightarrow dy = dx \\ &= \int_{\pi}^{-\pi} f(x)\varphi(-x) - 1dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(-x)dx \\ &= \langle f, \tilde{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

Definición 4.6. Sea $f \in \mathcal{P}'$. Denotaremos por \tilde{f} a la distribución reflexión. Esta satisface

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Ahora debemos probar que, con la definición anterior, $\tilde{f} \in \mathcal{P}'$. Veamos, $\tilde{f} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal. Si $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}$, tal que $\Psi_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$, entonces

$$\langle \tilde{\Psi}_n, \varphi \rangle = \langle \Psi_n, \tilde{\varphi} \rangle \rightarrow \langle f, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{f}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Veamos ahora el caso del operador traslación. Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ entonces $T_t f(x) = f(x - t) \in C_{per}([-\pi, \pi])$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Además,

$$\begin{aligned} \langle T_t f, \varphi \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\varphi(x)dx \\ &= \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(y)\varphi(y + t)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\varphi(y + t)dy \\ &= \langle f, T_{-t}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Definición 4.7. Sean $t \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{P}'$. El operador traslación $T_t f : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$ se define mediante la siguiente expresión

$$\langle T_t f, \varphi \rangle = \langle f, T_{-t} \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Es claro que, dado $f \in \mathcal{P}'$ la aplicación $T_t f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, así definida, es un funcional lineal.

Además, si $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}$, tal que $\Psi_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$, entonces $\{T_t \Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}$ y

$$\langle T_t \Psi_n; \varphi \rangle = \langle \Psi_n, T_{-t} \varphi \rangle \rightarrow \langle f, T_{-t} \varphi \rangle = \langle T_t f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Proposición 4.7. Si $f \in \mathcal{P}'$, f es periódica y de periodo 2π ; en el sentido $T_{2\pi} f = f$.

Demostración. Si $\varphi \in \mathcal{P}$, φ periódica y de periodo 2π . Ahora, para todo $f \in \mathcal{P}'$ se tiene

$$\langle T_{2\pi} f, \varphi \rangle = \langle f, T_{-2\pi} \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

□

Antes de definir la operación de derivación en distribuciones, veamos que acontece en funciones. Para ello, consideremos $f \in C_{per}^1([-\pi, \pi])$ y para todo $\varphi \in \mathcal{P}$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \varphi(x) dx \\ &= f(x) \varphi(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\langle f, \varphi' \rangle. \end{aligned}$$

Definición 4.8. Sea $f \in \mathcal{P}'$. La derivada distribucional de f se define a través de la igualdad

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Proposición 4.8. Si $f \in \mathcal{P}'$ entonces $f' \in \mathcal{P}'$.

Demostración. La linealidad de la derivada distribucional se obtiene de su propia definición.

Como $f \in \mathcal{P}'$ existe $\{\Psi_n\} \subseteq \mathcal{P}$, tal que $\Psi_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$. Ahora, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ se tiene

$$\langle \Psi_n', \varphi \rangle = -\langle \Psi_n, \varphi' \rangle \rightarrow -\langle f, \varphi' \rangle = \langle f', \varphi \rangle.$$

Por tanto $f' \in \mathcal{P}'$. □

Proposición 4.9. Sea $f \in \mathcal{P}'$. Para todo $\varphi \in \mathcal{P}$, la k -ésima derivada de f está dada por

$$\langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle.$$

Teorema 4.1 (Teorema de Baire). Sea (χ, d) un espacio métrico completo. Si $\chi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \chi_n$, donde $\overline{\chi_n}^{\chi} = \chi_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que $\overset{\circ}{\chi}_{n_0} \neq \emptyset$.

Proposición 4.10 (Continuidad de las distribuciones). Si $f \in \mathcal{P}'$, $\varphi \in \mathcal{P}$ y $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{P}$, tales que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi$, entonces $\langle f, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$.

Demostración. Para probar la proposición usaremos el Teorema 4.1. Si consideramos $f \in \mathcal{P}'$, existe $\varepsilon > 0$ y $\{\Psi_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}$, tal que $\Psi_m \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$. Así, para todo $\psi \in \mathcal{P}$ se tiene $\langle \Psi_m, \psi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle f, \psi \rangle$. Por tanto, el conjunto $\{\langle \Psi_m, \psi \rangle : m \in \mathbb{Z}^+\}$ es acotado, pues la sucesión es convergente. Luego, existe $N > 0$ tal que $|\langle \Psi_m, \psi \rangle| \leq N$, para $m \in \mathbb{Z}^+$. Usando la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N \leq n \frac{\varepsilon}{6}$. Por tanto, $|\langle \Psi_m, \psi \rangle| \leq n \frac{\varepsilon}{6}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos definir

$$\chi_n = \left\{ \psi \in \mathcal{P} : |\langle \Psi_m, \psi \rangle| \leq n \frac{\varepsilon}{6}, \forall m \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

Estos espacios satisfacen lo siguiente:

- $\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \chi_n$. En efecto, es evidente que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \chi_n \subseteq \mathcal{P}$. Ahora veamos la otra inclusión. Si $\psi \in \mathcal{P}$ entonces $\langle \Psi_m, \psi \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle$. Así, existe $\hat{n} \in \mathbb{Z}^+$, tal que $|\langle \Psi_m, \psi \rangle| \leq n \frac{\varepsilon}{6}$, para todo $m \in \mathbb{Z}^+$. Por tanto, $\psi \in \chi_{\hat{n}} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \chi_n$.
- χ_n es cerrado en \mathcal{P} . En efecto, sea $\{\psi_k\} \subseteq \chi_n$, tal que $\psi_k \xrightarrow{\mathcal{P}} \psi$. Demostraremos que $\psi \in \chi_n$. Veamos, dado que $\|\psi_k - \psi\|_{\infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, para cualquier $m \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$\begin{aligned}
 |\langle \Psi_m, \psi_k \rangle - \langle \Psi_m, \psi \rangle| &= |\langle \Psi_m, \psi_k - \psi \rangle| \\
 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_m(x)| |\psi_k - \psi| dx \\
 &\leq 2\pi \|\Psi_m\|_{\infty} \|\psi_k - \psi\|_{\infty} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Luego,

$$|\langle \Psi_m, \psi \rangle| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle \Psi_m, \psi_k \rangle| \leq n \frac{\varepsilon}{6}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Así $\psi \in \chi_n$.

Ahora, como (\mathcal{P}, d) es un espacio métrico completo podemos aplicar el Teorema de Baire. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que $\mathring{\chi}_{n_0} \neq \emptyset$. Es decir, existe $\psi_{n_0} \in \mathring{\chi}_{n_0} \subset \chi_{n_0}$ y $\eta > 0$, tal que $B(\psi_{n_0}, \eta) \subset \mathring{\chi}_{n_0} \subset \chi_{n_0}$. Así, si $\xi \in B(\psi_{n_0}, \eta)$ entonces $d(\xi, \psi_{n_0}) < \eta$ y por tanto $\xi \in \chi_{n_0}$. Además, si $\psi \in \mathcal{P}$ entonces

$$\begin{aligned}
 d(n_0 \psi, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|n_0 \psi^{(k)}\|_{\infty}}{1 + \|n_0 \psi^{(k)}\|_{\infty}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{n_0 \|\psi^{(k)}\|_{\infty}}{1 + n_0 \|\psi^{(k)}\|_{\infty}} \\
 &= n_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|\psi^{(k)}\|_{\infty}}{1 + n_0 \|\psi^{(k)}\|_{\infty}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq n_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|\psi^{(k)}\|_{\infty}}{1 + \|\psi^{(k)}\|_{\infty}} \\
 &= n_0 d(\psi, 0), \\
 d(\psi + \psi_{n_0}; \psi_{n_0}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|\psi^{(k)} + \psi_{n_0}^{(k)} - \psi_{n_0}^{(k)}\|_{\infty}}{1 + \|\psi^{(k)} + \psi_{n_0}^{(k)} - \psi_{n_0}^{(k)}\|_{\infty}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|\psi^{(k)}\|_{\infty}}{1 + \|\psi^{(k)}\|_{\infty}} \\
 &= d(\psi, 0), \\
 d(\psi_{n_0} - \psi, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|\psi_{n_0}^{(k)} - \psi^{(k)}\|_{\infty}}{1 + \|\psi_{n_0}^{(k)} - \psi^{(k)}\|_{\infty}} \\
 &= d(\psi_{n_0}, \psi).
 \end{aligned}$$

Ahora, si $d(\psi, 0) < \frac{1}{n_0}\eta$,

$$d(n_0\psi, 0) \leq n_0 d(\psi, 0) < \eta.$$

Así,

$$d(\psi_{n_0} + n_0\psi, \psi_{n_0}) = d(n_0\psi, 0) < \eta.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 n_0 |\langle \Psi_m, \psi \rangle| &= |\langle \Psi_m, n_0\psi + \psi_{n_0} - \psi_{n_0} \rangle| \\
 &\leq |\langle \Psi_m, n_0\psi + \psi_{n_0} \rangle| + |\langle \Psi_m, \psi_{n_0} \rangle| \\
 &\leq n_0 \frac{\varepsilon}{6} + n_0 \frac{\varepsilon}{6} \\
 &= n_0 \frac{\varepsilon}{3}.
 \end{aligned}$$

Así, $|\langle \Psi_m, \psi \rangle| < \varepsilon$, para todo $\psi \in \mathcal{P}$. Consideremos $N, M \in \mathbb{Z}^+$ y $\varphi \in \mathcal{P}$. tales que

- Si $n \geq N$, $d(\varphi_n, \varphi) = d(\varphi_n - \varphi, 0) < \frac{1}{n_0}\eta$.

- Si $m \geq M$ y $\Psi_m \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$, $|\langle f, \varphi \rangle - \langle \Psi_m, \varphi \rangle| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Luego, si $n \geq N$ entonces $d(\varphi_n - \varphi, 0) < \frac{1}{n_0}\eta$. Por tanto, $|\langle \Psi_m, \varphi_n - \varphi \rangle| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^+$. Así, para cualquiera que sea $n \geq N$ podemos escoger $m \geq M$, tal que

$$|\langle \Psi_m - \varphi_n \rangle - \langle f, \varphi_n \rangle| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalmente,

$$|\langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi_n \rangle| \leq |\langle f, \varphi \rangle - \langle \Psi_m, \varphi \rangle| + |\langle \Psi_m, \varphi \rangle - \langle \Psi_m, \varphi_n \rangle| + |\langle \Psi_m, \varphi_n \rangle - \langle f, \varphi_n \rangle|$$

Así, $|\langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi_n \rangle| < \varepsilon$. □

Proposición 4.11. Si $f \in \mathcal{P}'$, existen $C > 0$ y $K \in \mathbb{N}$, tales que

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{n=0}^K \|\varphi^{(n)}\|_{\infty},$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$.

Demostración. Iniciemos considerando una funcional lineal continua $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$. El conjunto

$$f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$$

es abierto en \mathcal{P} y $0 \in f^{-1}(B(0, 1))$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(B(0, 1))$. Por tanto, si consideramos $\varphi \in \mathcal{P}$, tal que $\varphi \in B(0, \varepsilon)$, entonces

$$d(\varphi, 0) < \varepsilon \Rightarrow f(\varphi) \in B(0, 1) \Rightarrow |f(\varphi)| < 1 \Rightarrow |\langle f, \varphi \rangle| < 1.$$

Ahora, recordemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Así, existe $K \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \sum_{n=0}^K \frac{1}{2^n} + \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1}}{1 - \frac{1}{2}} + \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{2^{K+2} - 2}{2^{K+1}} + \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{n=K+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^K} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^K \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^K} < 2.$$

Así, existe $\gamma \in \mathbb{R}$, tal que

$$\left(2 - \frac{1}{2^K}\right)\gamma < 2\gamma < \frac{\varepsilon}{2}.$$

y con ello

$$\gamma \left(\sum_{n=0}^K \frac{1}{2^n} \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, sea $\varphi \in \mathcal{P}$ y comencemos la demostración. Si $\varphi \equiv 0$ no hay nada que probar. Por tanto, supongamos que $\varphi \neq 0$. Luego, podemos definir $\psi \in \mathcal{P}$ mediante la expresión

$$\psi = \frac{\gamma\varphi}{\sum_{n=0}^K \|\varphi^{(n)}\|_{\infty}}.$$

Así, para cualquier $j = 0, 1, 2, \dots, K$ se tiene que

$$\|\psi^{(j)}\| = \frac{\gamma \|\varphi^{(j)}\|}{\sum_{n=0}^K \|\varphi^{(n)}\|_{\infty}}$$

y como $\|\varphi^{(j)}\| \leq \sum_{n=0}^K \|\varphi^{(n)}\|_{\infty}$, se tiene $\|\psi^{(j)}\| \leq \gamma$.

Luego,

$$\begin{aligned}
 d(\psi, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|\psi^{(n)}\|}{1 + \|\psi^{(n)}\|} \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|\psi^{(n)}\| \\
 &= \sum_{n=0}^K \frac{1}{2^n} \|\psi^{(n)}\| + \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|\psi^{(n)}\| \\
 &< \gamma \sum_{n=0}^K \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &< \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Así, $\psi \in B(0, \varepsilon)$ y por tanto $|\langle f, \psi \rangle| < 1$. Además,

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^K \|\varphi^{(n)}\|_{\infty} \frac{1}{\gamma} \langle f, \psi \rangle.$$

Ahora, podemos denotar por $C = \frac{1}{\gamma}$ y así obtenemos $\langle f, \varphi \rangle = C \sum_{n=0}^K \|\varphi^{(n)}\|_{\infty} \langle f, \psi \rangle$. Luego,

$$\begin{aligned}
 |\langle f, \varphi \rangle| &\leq C \sum_{n=0}^K \|\varphi^{(n)}\|_{\infty} |\langle f, \psi \rangle| \\
 &\leq C \sum_{n=0}^K \|\varphi^{(n)}\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

□

Series de Fourier en \mathcal{P}'

En este capítulo estudiaremos la Teoría de Fourier en nuestro espacio de distribuciones periódicas. Descubriremos la relación de dualidad entre \mathcal{P} y \mathcal{P}' . Esto esclarecerá la forma en la que actúan las distribuciones y el porque generalizan a las funciones.

SECCIÓN 5.1

Dualidad entre \mathcal{P} y \mathcal{P}'

Para comenzar, en esta sección, definiremos la transformada de Fourier en \mathcal{P}' . Para ello, recordaremos la definición inicial que dimos de la transformada y luego abstraeremos la definición.

Si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_{-k} \rangle, \quad \Phi_k(x) = e^{ikx} \in \mathcal{P}.$$

Definición 5.1 (Transformada de Fourier en \mathcal{P}'). Si $f \in \mathcal{P}'$, la transformada de Fourier \widehat{f} es una aplicación $\widehat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_{-k} \rangle.$$

Estos coeficientes definen la serie de Fourier de f .

Notación 5.1. Denotaremos a la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier de $f \in \mathcal{P}'$ por

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \Phi_k(x). \quad (5.1)$$

Teorema 5.1. Si $\varphi \in \mathcal{P}$ y $f \in \mathcal{P}'$ entonces $S_n(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi$ y $S_n(f) \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$.

Demostración. Si $\varphi \in \mathcal{P}$ entonces $(\widehat{\varphi}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in S(\mathbb{Z})$. Por tanto, para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(k)| < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^n |\widehat{\varphi}(k)| < \infty.$$

Además,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k) \Phi_k \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi \quad \text{y} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}^{(m)}(k) \Phi_k \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi^{(m)}.$$

Así, $\left\| (S_n(\varphi))^{(m)} - \varphi^{(m)} \right\|_{\infty} \rightarrow 0$, para $n \rightarrow \infty$ y $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Por tanto, $S_n(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{P}}$

φ . Ahora, denotemos $f_n = S_n(f) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \Phi_k(x) \in \mathcal{P}$, para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Luego,

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n(m) &= \widehat{S_n(f)}(m) \\ &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \widehat{\Phi_k(x)}(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx \\
 &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \delta_{k,m}.
 \end{aligned}$$

Así, $\widehat{f}_n(k) = \widehat{f}(k)$, para $|k| \leq n$, y $\widehat{f}_n(k) = 0$, para $|k| > n$. A continuación, recordemos una consecuencia de la identidad de Parseval

$$2\pi \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = (f, g).$$

Además, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$, se cumple $\widehat{\overline{\varphi}}(k) = \overline{\widehat{\varphi}(-k)}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \langle f_n; \varphi \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \varphi(x) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \overline{\overline{\varphi}(x)} dx \\
 &= (f_n / \overline{\varphi}) \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n(k) \widehat{\overline{\varphi}}(-k) \\
 &= 2\pi \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_n(k) \widehat{\overline{\varphi}}(-k) \\
 &= \sum_{k=-n}^n 2\pi \widehat{f}_n(k) \widehat{\overline{\varphi}}(-k) \\
 &= \sum_{k=-n}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right) \widehat{\overline{\varphi}}(-k) \\
 &= \sum_{k=-n}^n \langle f, \Phi_{-k} \rangle \widehat{\overline{\varphi}}(-k) \\
 &= \left\langle f, \sum_{k=-n}^n \widehat{\overline{\varphi}}(-k) \Phi_{-k} \right\rangle \\
 &= \langle f, S_n \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

Ahora, como $S_n(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi$ entonces $\langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, S_n(\varphi) \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Así,

$$f_n = S_n(f) \xrightarrow{\mathcal{P}'} f.$$

□

Corolario 5.1 (Generalización de la Identidad de Parseval). Si $f \in \mathcal{P}'$ entonces $\langle f, \varphi \rangle = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\widehat{\varphi}(-k)$, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$.

Demostración. Usando la demostración anterior

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\widehat{\varphi}(-k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{k=-n}^n f(k)\widehat{\varphi}(k) \\ &= \langle f, S_n(\varphi) \rangle \\ &= \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

Corolario 5.2. $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}'$. Es decir, \mathcal{P}' es el dual topológico de \mathcal{P} .

Demostración. Bastará demostrar

$$\mathcal{P}^* = \{f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es un funcional lineal continuo}\} = \mathcal{P}'.$$

Ahora, si $f \in \mathcal{P}^*$ entonces $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ es continuo y lineal. Así, podemos definir su serie de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\Phi_k$. Luego, como $S_n(f) \in \mathcal{P}$, por el Teorema 5.1, se tiene que $S_n(f) \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$. Así,

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n(f), \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Por tanto, $f \in \mathcal{P}'$. Para finalizar, si $f \in \mathcal{P}$ es un funcional lineal continuo y por ello $f \in \mathcal{P}^*$. □

A continuación, una representación gráfica de la dualidad mostrada.

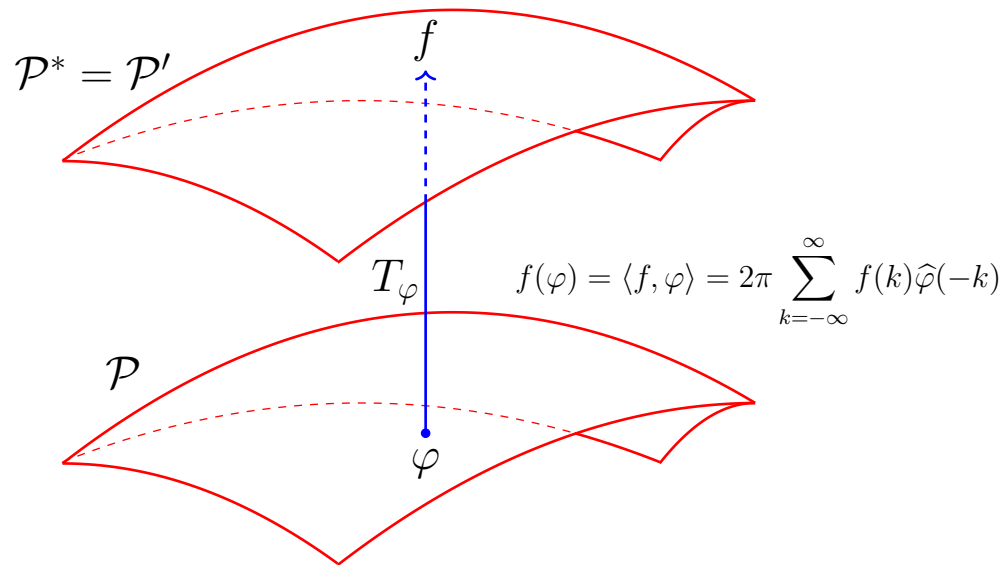


Figura 5.1: \mathcal{P} y \mathcal{P}^* . Fuente: Elaboración propia.

SECCIÓN 5.2

Caracterización de \mathcal{P}' mediante la Transformada de Fourier

En esta sección caracterizaremos a las distribuciones periódicas a través de la transformada de Fourier. En este proceso nos encontraremos con las sucesiones de crecimiento lento. Luego, usando la transformada de Fourier y su inversa relacionaremos al espacio de las sucesiones de crecimiento rápido y de crecimiento lento con \mathcal{P} y \mathcal{P}' .

Definición 5.2 (Sucesión de crecimiento lento). *Una sucesión $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ se denomina sucesión de crecimiento lento si existen constantes $C \in \mathbb{R}^+$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que*

$$|\alpha_k| \leq C|k|^N,$$

para todo $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Notación 5.2. $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ denotará el conjunto de todas las sucesiones complejas de crecimiento lento.

Proposición 5.1. El espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Teorema 5.2. Si $\alpha := (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ entonces existe una única $f \in \mathcal{P}'$, tal que $\widehat{f} = \alpha$. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{P}'$ entonces $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$.

Demostración. \Rightarrow) Para comenzar, si $\alpha = (\alpha_k) \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ entonces, para cualquier $\varphi \in \mathcal{P}$, la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \widehat{\varphi}(-k)$ converge absolutamente. En efecto, como $\varphi \in \mathcal{P}$ entonces $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(k)| < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(k)| |k|^n < \infty,$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ Así,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| |\widehat{\varphi}(-k)| &= |\alpha_0| |\widehat{\varphi}(0)| + \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| |\widehat{\varphi}(-k)| \\ &\leq |\alpha_0| |\widehat{\varphi}(0)| + C \sum_{k \neq 0} |k|^N |\widehat{\varphi}(-k)| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Podemos definir nuestro candidato $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la expresión

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle = \widehat{\varphi}(-k),$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. La linealidad de f es heredada de la transformada de Fourier. Ahora, $f \in \mathcal{P}'$. En efecto, si consideramos la sucesión

$$\Psi_n(x) = \sum_{|k| \leq n} \alpha_k e^{ikx} \in \mathcal{P},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle f, \varphi \rangle &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \widehat{\varphi}(-k) \\
 &= 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \alpha_k \widehat{\varphi}(-k) \\
 &= 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \alpha_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{ikx} dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \left(\sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikx} \right) dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \Psi_n(x) dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \Psi_n, \varphi \rangle,
 \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Ahora probaremos que $\widehat{f} = \alpha$. Para ello, si $m \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\widehat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_{-m} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \widehat{\Phi}_{-m}(k) = \alpha_m.$$

Por tanto, $\widehat{f} = \alpha$. Veamos la unicidad de f . Si suponemos que existe $g \in \mathcal{P}$, tal que $\widehat{g} = \alpha = \widehat{f}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle g, \varphi \rangle &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k) \widehat{\varphi}(-k) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n 2\pi \widehat{g}(k) \widehat{\varphi}(-k) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) 2\pi \widehat{\varphi}(-k) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) \langle \Phi_k, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \langle \Phi_k, \varphi \rangle \\
 &= \langle f, \varphi \rangle,
 \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Luego, $g = f$.

\Leftrightarrow) Ahora, si $f \in \mathcal{P}'$, por la Proposición 4.11 existen constantes $C > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ se tiene

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{n=0}^N \|\varphi^{(n)}\|_{\infty}.$$

En particular, podemos considerar $\varphi = \Phi_{-k} \in \mathcal{P}$. Así,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} |\widehat{f}(k)| &= |\langle f, \Phi_{-k} \rangle| \\
 &\leq C \left[\|\Phi_{-k}^{(0)}\|_{\infty} + \|\Phi_{-k}^{(1)}\|_{\infty} + \|\Phi_{-k}^{(2)}\|_{\infty} + \dots + \|\Phi_{-k}^{(N)}\|_{\infty} \right] \\
 &\leq C \left[1 + \|-ike^{-ikx}\|_{\infty} + \|(-i)^2 k^2 e^{-ikx}\|_{\infty} + \dots + \|(-i)^N k^N e^{-ikx}\|_{\infty} \right] \\
 &= C \left[1 + |k| + |k|^2 + |k|^3 + \dots + |k|^N \right] \\
 &\leq CN |k|^N
 \end{aligned}$$

Por tanto, $|\widehat{f}(k)| \leq (2\pi CN) |k|^N$, para todo $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Ahora, si denotamos por $\tilde{C} = 2\pi CN$, se obtiene

$$|\widehat{f}(k)| \leq \tilde{C} |k|^N.$$

Luego, $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. □

Observemos que por lo demostrado en el Teorema 5.2

- si $f \in \mathcal{P}'$ entonces $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ y
- si $\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$, existe $f \in \mathcal{P}'$, tal que $\widehat{f} = \alpha$.

En consecuencia, la aplicación $\widehat{} : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es una biyección lineal, cuya aplicación

inversa $\vee : \mathcal{S}'(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}$ está dada por la expresión

$$\check{\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k \Phi_k,$$

para $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. Ahora, todo $\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ define un funcional de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ en \mathbb{C} , dado por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \beta_k,$$

para todo $\beta = (\beta_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Esta funcional está bien definida, pues la serie que la define converge absolutamente para cualquier $\beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. En efecto,

$$\begin{aligned} |\langle \alpha, \beta \rangle| &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k| |\beta_k| \\ &= |\alpha_0| |\beta_0| + \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| |\beta_k| \\ &\leq |\alpha_0| |\beta_0| + C \sum_{k \neq 0} |k|^N |\beta_k| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Además, si $\tilde{\beta}_k = \beta_{-k}$ entonces, para todo $\beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \check{\alpha}, \check{\tilde{\beta}} \right\rangle &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\check{\alpha}} \widehat{\check{\tilde{\beta}}} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \beta_{-k} \\ &= 2 \langle \alpha, \beta \rangle. \end{aligned}$$

Proposición 5.2. $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}) = \{f : \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es una funcional lineal continua}\}$.

Demostración. Bastará probar que $\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es una funcional lineal continua. Para comenzar, la linealidad de α es evidente. Ahora, probaremos que es continua. En efecto, sean

$\beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y $\beta^j = \left(\beta_k^j \right)_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, tal que $\beta^j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{Z})} \beta$. Así, $\tilde{\beta}^j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{Z})} \tilde{\beta}$. Por tanto, $\check{\beta}^j \xrightarrow{\mathcal{P}'} \check{\beta}$.

Finalmente, apliquemos α sobre β^j

$$\left\langle \underbrace{\alpha}_{\mathcal{S}'(\mathbb{Z})}, \underbrace{\beta^j}_{\mathcal{S}(\mathbb{Z})} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle \underbrace{\check{\alpha}}_{\mathcal{P}'}, \underbrace{\check{\beta}^j}_{\mathcal{P}} \right\rangle \rightarrow \frac{1}{2\pi} \left\langle \check{\alpha}, \check{\beta} \right\rangle = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

□

Definición 5.3. Una sucesión $\{\alpha^j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es convergente en $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ si para todo $\beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ se tiene

$$\langle \alpha^j, \beta \rangle \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle,$$

cuando $j \rightarrow +\infty$.

Proposición 5.3. La transformada de Fourier $\hat{\cdot} : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ y su inversa $\check{\cdot} : \mathcal{S}'(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}'$ llevan sucesiones convergentes en sucesiones convergentes.

Demostración. Consideremos $f \in \mathcal{P}'$ y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}'$, tales que $f_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$. Debemos demostrar que $\hat{f}_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{Z})} \hat{f}$. Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} 2\pi \langle \hat{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle &= \langle \check{\alpha}, \check{\tilde{\beta}} \rangle \\ &= \langle \alpha, \beta \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$

$$\langle \hat{f}_n, \beta \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f_n, \tilde{\beta} \rangle \xrightarrow{\mathcal{P}'} \frac{1}{2\pi} \langle f, \underbrace{\tilde{\beta}}_{\in \mathcal{P}} \rangle = \langle \hat{f}, \beta \rangle,$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. Ahora consideremos $\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ y $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$, tales que $\alpha_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{Z})} \alpha$. Se debe demostrar que $\check{\alpha}_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} \check{\alpha}$.

Así,

$$\langle \check{\alpha}_n, \varphi \rangle = 2\pi \langle \alpha_n, \underbrace{\check{\varphi}}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{Z})} \rangle \rightarrow 2\pi \langle \alpha, \check{\varphi} \rangle = \langle \check{\alpha}, \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. □

Proposición 5.4. $\mathcal{S}(\mathbb{Z})^* = \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. Es decir, $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es el dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

Resumamos lo visto en los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{S}'(\mathbb{Z}) \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{T_\varphi} & \mathcal{P}' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{S}'(\mathbb{Z}) \\ \downarrow \vee & & \downarrow \vee \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{T_\varphi} & \mathcal{P}' \end{array}$$

Proposición 5.5. Si $f \in \mathcal{P}'$ entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple

1. $\widehat{(T_t f)}(k) = e^{-ikt} \widehat{f}(k)$.
2. $\widehat{(f^{(n)})}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k)$.
3. $\widehat{\overline{f}}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}$.

Demostración. Antes recordemos que $\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_{-k} \rangle$ y $\Phi_{-k}(x) = e^{-ikx}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} T_{-t}(\Phi_{-k}(x)) &= \Phi_{-k}(x+t) \\ &= e^{-ik(x+t)} \\ &= e^{-ikx} e^{-ikt} \\ &= e^{-ikt} \Phi_{-k}(x). \end{aligned}$$

y

$$\Phi_{-k}^{(n)}(x) = (-ik)^n e^{-ikx} = (-ik)^n \Phi_{-k}(x).$$

Así,

1. Veamos como actúa la transformada de Fourier sobre las traslaciones.

$$\begin{aligned}
 \widehat{(T_t f)}(k) &= \frac{1}{2\pi} \langle T_t f, \Phi_{-k} \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \langle f, T_{-t} \Phi_{-k} \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \langle f, e^{-ikt} \Phi_{-k} \rangle \\
 &= e^{-ikt} \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_{-k} \rangle \\
 &= e^{-ikt} \widehat{f}(k).
 \end{aligned}$$

2. Ahora, como actúa la transformada de Fourier sobre las derivadas de las distribuciones.

$$\begin{aligned}
 \widehat{f^{(n)}}(k) &= \frac{1}{2\pi} (-1)^n \langle f, \Phi_{-k}^{(n)} \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} (-1)^n (-ik)^n \langle f, \Phi_{-k} \rangle \\
 &= (ik)^n \widehat{f}(k).
 \end{aligned}$$

3. Finalmente, la transformada de Fourier y el conjugado.

$$\begin{aligned}
 \widehat{\bar{f}}(k) &= \frac{1}{2\pi} \langle \bar{f}, \Phi_{-k} \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \overline{\langle f, \Phi_{-k} \rangle} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \overline{\langle f, \Phi_k \rangle} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_k \rangle \\
 &= \widehat{f}(-k).
 \end{aligned}$$

□

SECCIÓN 5.3

Convolución en \mathcal{P}'

En esta sección extenderemos la operación de convolución a las distribuciones periódicas, a fin de darle la estructura de álgebra. Para ello, recordemos que si $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ se cumple

$$T_y \varphi(x) = \varphi(x - y) = \varphi(-(y - x)) = \overline{\varphi}(y - x) = T_x \overline{\varphi}(y).$$

Así, $f * \varphi$ puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (f * \varphi)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \varphi(x - y) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) (T_x \overline{\varphi}(y)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle f, T_x \overline{\varphi} \rangle. \end{aligned}$$

Definición 5.4. Si $f \in \mathcal{P}'$ entonces la convolución $f * \varphi$ se define de la siguiente manera

$$(f * \varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \langle f, T_x \overline{\varphi} \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$.

Proposición 5.6. Si $f, g \in \mathcal{P}'$; $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$; $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene

1. $(\lambda f) * \varphi = \lambda(f * \varphi) = f * (\lambda \varphi)$.
2. $(f + g) * \varphi = f * \varphi + g * \varphi$.
3. $f * (\varphi + \psi) = f * \varphi + f * \psi$.
4. $(T_t f) * \varphi = T_t(f * \varphi) = f * (T_t \varphi)$.

Demostración. En primer lugar,

$$(T_t f) * \varphi = \frac{1}{2\pi} \langle T_t f, T_x \bar{\varphi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, T_{-t}(T_x \bar{\varphi}) \rangle.$$

Además,

$$f * T_t \varphi = \frac{1}{2\pi} \langle f, T_x(\overline{T_t \varphi}) \rangle.$$

Ahora, probaremos la equivalencia de estas dos igualdades. Para ello, consideremos $y \in \mathbb{R}$.

Se sabe que

$$[T_{-t}(T_x \bar{\varphi})](y) = (T_x \bar{\varphi})(y + t).$$

Así,

$$\begin{aligned} [T_{-t}(T_x \bar{\varphi})](y) &= \bar{\varphi}(y + t - x) \\ &= \varphi(x - y - t) \\ &= T_t \varphi(x - y) \\ &= \overline{T_t \varphi}(y - x) \\ &= \left[T_x(\overline{T_t \varphi}) \right](y). \end{aligned}$$

Para finalizar,

$$T_t(f * \varphi) = (f * \varphi)(x - t) = \frac{1}{2\pi} \langle f, T_{x-t} \bar{\varphi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, T_{-t}(T_x \bar{\varphi}) \rangle.$$

□

Proposición 5.7. Si $f \in \mathcal{P}'$ y $\varphi \in \mathcal{P}$ entonces $f * \varphi \in \mathcal{P}$ y

$$(f * \varphi)^{(n)} = f^{(n)} * \varphi = f * \varphi^{(n)},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. A continuación, usaremos la inducción matemática. Para ello, probaremos el caso $n = 1$. recordemos que $f * \varphi$ es periódica y de periodo 2π . Debemos demostrar que

$$(f * \varphi)' = f' * \varphi = f * \varphi'.$$

Veamos,

$$\begin{aligned} (f * \varphi)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f * \varphi)(x + h) - (f * \varphi)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\pi} \langle f, T_{x+h} \bar{\varphi} \rangle - \frac{1}{2\pi} \langle f, T_x \bar{\varphi} \rangle}{h} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\langle f, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{x+h} \bar{\varphi} - T_x \bar{\varphi}}{h} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ahora, solo bastará probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{x+h} \bar{\varphi} - T_x \bar{\varphi}}{h} = T_x \bar{\varphi}',$$

para obtener $(f * \varphi)' = f * \varphi'$. Para tal fin,

$$\begin{aligned} (T_x \bar{\varphi}') (y) &= \bar{\varphi}'(y - x) \\ &= \varphi'(x - y) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x - y + h) - \varphi(x - y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi((x + h) - y) - \varphi(x - y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(-(y - (x + h))) - \varphi(-(y - x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{\varphi}(y - (x + h)) - \bar{\varphi}(y - x)}{h} \\ &= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{x+h} \bar{\varphi} - T_x \bar{\varphi}}{h} \right] (y). \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Veamos el caso

$$(f' * \varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \langle f', T_x \overline{\varphi} \rangle = \frac{1}{2\pi} (-1) \langle f, (T_x \overline{\varphi})' \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, -(T_x \overline{\varphi})' \rangle$$

y $(f * \varphi')(x) = \frac{1}{2\pi} \langle f, T_x \overline{\varphi}' \rangle$. Así, bastará probar que $T_x \overline{\varphi}' = -(T_x \overline{\varphi})'$. En efecto,

$$\begin{aligned} -(T_x \overline{\varphi})'(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_x \overline{\varphi}(y+h) - T_x \overline{\varphi}(y)}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x-y-h) - \varphi(x-y)}{-h} \\ &= \varphi'(x-y) \\ &= \overline{\varphi}'(y-x) \\ &= T_x \overline{\varphi}'(y), \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Finalmente, usando la inducción matemática podemos generalizar las igualdades para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En efecto, ya se probó para $n = 1$ y supongamos cierto para n . Ahora probaremos el caso $n + 1$. Sea $\varphi \in \mathcal{P}$,

$$(f * \varphi)^{(n+1)} = \left[(f * \varphi)^{(n)} \right]' = \left[f^{(n)} * \varphi \right]' = f^{(n+1)} * \varphi$$

y

$$f^{(n+1)} * \varphi = \left(f^{(n)} \right)' * \varphi = f^{(n)} * \varphi' = f * (\varphi')^{(n)} = f * \varphi^{(n+1)}$$

□

Proposición 5.8. Si $f \in \mathcal{P}'$ y $\varphi \in \mathcal{P}$ entonces se tiene

$$\widehat{(f * \varphi)}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{\varphi}(k)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Antes, probemos la siguiente igualdad $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$. En efecto,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \langle \widetilde{f}, \Phi_{-k} \rangle = \langle f, \widetilde{\Phi_{-k}} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_k \rangle = \widehat{f}(-k)$$

pues $\widetilde{\Phi_{-k}}(y) = \Phi_{-k}(-y) = \Phi_k(y)$. Ahora, si consideremos $x \in \mathbb{R}$, un valor fijo, $T_x \widetilde{\varphi} \in \mathcal{P}$.

Por tanto, su serie de Fourier converge en el sentido de \mathcal{P} . Así

$$T_x \widetilde{\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{T_x \widetilde{\varphi}}(k) \Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \widehat{\varphi}(k) \Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \widehat{\varphi}(-k) \Phi_k. \quad (5.3)$$

Finalmente, si aplicamos la convolución, tenemos

$$\begin{aligned} (f * \varphi)(x) &= \frac{1}{2\pi} \langle f, T_x \widetilde{\varphi} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\langle f, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \widehat{\varphi}(-k) \Phi_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \widehat{\varphi}(-k) \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_k \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \widehat{\varphi}(-k) \widehat{f}(-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k) \widehat{f}(k) \Phi_k. \end{aligned}$$

Por la unicidad de la representación en serie de Fourier

$$\widehat{f * \varphi}(k) = \widehat{f}(k) * \widehat{\varphi}(k).$$

□

Ahora, podemos definir la convolución $f * \varphi$, para $f \in \mathcal{P}'$ y $\varphi \in \mathcal{P}$, de forma alternativa.

Para ello, primero consideremos el caso en el que $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ y $\varphi \in \mathcal{P}$. Sabemos que

$f * \varphi \in \mathcal{P}$. Por tanto, para todo $\psi \in \mathcal{P}$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle f * \varphi, \psi \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} (f * \varphi)(x) \psi(x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \varphi(x-y) dy \right) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \varphi(x-y) dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \tilde{\varphi}(y-x) dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) (\psi * \tilde{\varphi})(y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \langle f, \psi * \tilde{\varphi} \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \langle f, \tilde{\varphi} * \psi \rangle.
 \end{aligned}$$

Definición 5.5. Si $f \in \mathcal{P}'$ y $\varphi \in \mathcal{P}$, definimos la convolución $*_1$ mediante la igualdad $\langle f *_1 \varphi, \psi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} * \psi \rangle$, para todo $\psi \in \mathcal{P}$.

Proposición 5.9. Si $f \in \mathcal{P}'$ y $\varphi \in \mathcal{P}$ entonces $f *_1 \varphi \in \mathcal{P}'$.

Demostración. Si $f \in \mathcal{P}'$ existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}$ tal que, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$, se tiene $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, cuando $n \rightarrow \infty$. Luego,

$$\langle f_n *_1 \varphi, \psi \rangle = \langle f_n, \underbrace{\tilde{\varphi} * \psi}_{\mathcal{P}} \rangle \rightarrow \langle f, \tilde{\varphi} * \psi \rangle = \langle f *_1 \varphi, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{P}.$$

Por lo tanto $f *_1 \varphi \in \mathcal{P}'$. □

Proposición 5.10. Si $f \in \mathcal{P}'$ y $\varphi \in \mathcal{P}$ entonces $\langle f * \varphi, \psi \rangle = \langle f *_1 \varphi, \psi \rangle$, para todo $\psi \in \mathcal{P}$.

Demostración. La igualdad nos dice que $f * \varphi$ es igual a $f *_1 \varphi$ en el sentido de \mathcal{P}' . Para ello,

bastará probar que $\widehat{f *_{1} \varphi}(k) = \widehat{f * \varphi}(k)$. Consideremos $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \widehat{f *_{1} \varphi}(k) &= \frac{1}{2\pi} \langle f *_{1} \varphi, \Phi_{-k} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle f, \tilde{\varphi} * \Phi_{-k} \rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ahora, vamos a demostrar que $\tilde{\varphi} * \Phi_{-k} = \Phi_k \widehat{\varphi}(k)$. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} * \Phi_{-k}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}(y) \Phi_{-k}(x - y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-y) e^{-ikx} e^{iky} dy \\ &= e^{-ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-y) e^{iky} dy \\ &\quad u = -y \Rightarrow -du = dy \\ &= e^{-ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} \varphi(u) e^{-iku} (-du) \\ &= e^{-ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) e^{-iku} du \\ &= e^{-ikx} \widehat{\varphi}(k) \\ &= \Phi_{-k}(x) \widehat{\varphi}(k), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, reemplazando en (5.4) tenemos

$$\widehat{f *_{1} \varphi}(k) = \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_{-k} \widehat{\varphi}(k) \rangle = \widehat{\varphi}(k) \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_{-k} \rangle = \widehat{\varphi}(k) \widehat{f}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{\varphi}(k) = \widehat{f * \varphi}(k),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. □

Definición 5.6. Si f y $g \in \mathcal{P}'$, podemos definir la convolución en \mathcal{P}' mediante la igualdad

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle, \quad (5.5)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$.

Es evidente que $\tilde{g} * \varphi \in \mathcal{P}$. Así, solo debemos demostrar que $f * g \in \mathcal{P}'$. Para ello, usaremos el siguiente lema.

Lema 5.1. Si $f \in \mathcal{P}'$, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}$ y $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi$, para $\varphi \in \mathcal{P}$, se tiene

$$f * \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} f * \varphi.$$

Demostración. Según nuestra hipótesis, si $\widehat{\varphi}_n \rightarrow \widehat{\varphi}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ entonces $\|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi}\|_{\infty, m} \rightarrow 0$, para todo $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ahora, vamos a demostrar que

$$\left\| \widehat{f} \widehat{\varphi}_n - \widehat{f} \widehat{\varphi} \right\|_{\infty, m} \rightarrow 0,$$

para todo $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Se sabe que $\widehat{\varphi} \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{Z})} \widehat{\varphi}$. Además, $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. Así, existen $C > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left| \widehat{f}(k) \right| \leq C |k|^N,$$

para todo $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Veamos,

- Si $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{f} \widehat{\varphi}_n - \widehat{f} \widehat{\varphi} \right\|_{\infty, m} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left| \widehat{f}(k) \right| \left| \widehat{\varphi}_n(k) - \widehat{\varphi}(k) \right| |k|^m \right) \\ &\leq C \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left| \widehat{\varphi}_n(k) - \widehat{\varphi}(k) \right| |k|^{m+N} \right) \\ &= C \left\| \widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi} \right\|_{\infty, m+N} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $m \rightarrow \infty$.

- Si $m = 0$,

$$\left\| \widehat{f} \widehat{\varphi}_n - \widehat{f} \widehat{\varphi} \right\|_{\infty, 0} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left| \widehat{f}(k) \right| \left| \widehat{\varphi}_n(k) - \widehat{\varphi}(k) \right| \right).$$

Ahora, analicemos $\left\| \widehat{f} \widehat{\varphi}_n - \widehat{f} \widehat{\varphi} \right\|_{\infty, 0}$ para ciertos valores de k .

- Si $k = 0$,

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(0) \right| \left| \widehat{\varphi}_n(0) - \widehat{\varphi}(0) \right| &\leq \left| \widehat{f}(0) \right| \|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi}\| \\ &= \left| \widehat{f}(0) \right| \sup_{k \in \mathbb{Z}} |(\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi})(k)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

- Si $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} \left| \widehat{f}(k) \right| \left| \widehat{\varphi}_n(k) - \widehat{\varphi}(k) \right| &\leq C \sup_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} |\widehat{\varphi}_n(k) - \widehat{\varphi}(k)| k^N \\ &= C \|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi}\|_{\infty, N} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left\| \widehat{f} \widehat{\varphi}_n - \widehat{f} \widehat{\varphi} \right\|_{\infty, m} = \max \left\{ \left| \widehat{f}(0) \right| \left| \widehat{\varphi}_n(0) - \widehat{\varphi}(0) \right|, C \|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi}\|_{\infty, N} \right\}.$$

Así,

$$\widehat{f} \widehat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{Z})} \widehat{f} \widehat{\varphi} \Rightarrow \widehat{f * \varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{Z})} \widehat{f * \varphi} \Rightarrow \widehat{f * \varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \widehat{f * \varphi} \Rightarrow f * \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} f * \varphi.$$

□

Proposición 5.11. Si f y $g \in \mathcal{P}'$ entonces $f * g \in \mathcal{P}'$.

Demostración. La linealidad de $f * g$ es evidente. Ahora, veamos la continuidad. Si $\varphi \in \mathcal{P}$ y $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}$, tales que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi$, entonces $\widetilde{g} * \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \widetilde{g} * \varphi$. Luego,

$$\langle f * g, \varphi_n \rangle = \langle f, \widetilde{g} * \varphi_n \rangle \rightarrow \langle f, \widetilde{g} * \varphi \rangle = \langle f * g, \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$.

□

Proposición 5.12. Si f y $g \in \mathcal{P}'$, se tiene $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Si $\varphi \in \mathcal{P}$, tenemos la siguiente representación en serie de Fourier

$$\langle f * g, \varphi \rangle = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f * g}(k) \widehat{\varphi}(-k).$$

Por otro lado, como $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{g} * \varphi \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \widehat{\widetilde{g} * \varphi}(-k) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \widehat{g}(-k) \widehat{\varphi}(-k) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k) \widehat{\varphi}(-k). \end{aligned}$$

Ahora, si consideramos $\varphi(k) = \Phi_{-k}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, por la unicidad de la representación en serie de Fourier, $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$. \square

Proposición 5.13. El espacio $(\mathcal{P}', *)$ es un álgebra conmutativa.

Demostración. Usaremos la inyectividad de la transformada de Fourier. Para ello, consideremos $f, g, h \in \mathcal{P}'$; $k \in \mathbb{Z}$; $\lambda \in \mathbb{C}$ y el delta de Dirac δ centrada en $x = 0$. Ahora, probaremos las condiciones que debe satisfacer el espacio $(\mathcal{P}', *)$.

1. $(f * g) * h = f * (g * h)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g) * h}(k) &= \left(\widehat{(f * g) * h} \right)(k) \\ &= \left(\widehat{f}(k) \widehat{g}(k) \right) \widehat{h}(k) \\ &= \widehat{f}(k) \left(\widehat{g}(k) \widehat{h}(k) \right) \\ &= \widehat{f}(k) \widehat{(g * h)}(k) \end{aligned}$$

$$= f * \widehat{(g * h)}(k).$$

2. $\widehat{f * g}(k) = \widehat{g * f}(k)$. Veamos

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(k) &= \widehat{f}(k) \widehat{g}(k) \\ &= \widehat{g}(k) \widehat{f}(k) \\ &= \widehat{g * f}(k). \end{aligned}$$

3. $(f + g) * h = f * h + g * h$. En efecto,

$$\begin{aligned} \widehat{(f + g) * h}(k) &= \widehat{f + h}(k) * \widehat{h}(k) \\ &= (\widehat{f} + \widehat{g})(k) * \widehat{h}(k) \\ &= (\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)) * \widehat{h}(k) \\ &= (\widehat{f}(k) * \widehat{h}(k)) + (\widehat{g}(k) * \widehat{h}(k)) \\ &= \widehat{f * h}(k) + \widehat{g * h}(k) \\ &= \widehat{(f * h) + (g * h)}(k). \end{aligned}$$

4. $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \widehat{(\lambda f) * g}(k) &= \widehat{\lambda f}(k) \widehat{g}(k) \\ &= \lambda (\widehat{f}(k) \widehat{g}(k)) \\ &= \lambda (\widehat{f * g})(k) \\ &= \widehat{f}(k) * (\lambda \widehat{g}(k)) \\ &= \widehat{f}(k) * \widehat{\lambda g}(k) \\ &= \widehat{(f * \lambda g)}(k). \end{aligned}$$

5. $2\pi\delta$ es la identidad del álgebra. En efecto, sea $\varphi \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
 \langle 2\pi\delta * f, \varphi \rangle &= 2\pi(\tilde{f} * \varphi)(0) \\
 &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{f}, T_0 \tilde{\varphi} \rangle \\
 &= \langle \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle \\
 &= \langle f, \tilde{\tilde{\varphi}} \rangle \\
 &= \langle f, \varphi \rangle,
 \end{aligned}$$

Por tanto, $2\pi\delta * f = f$.

□

Proposición 5.14. Si f y $g \in \mathcal{P}'$,

$$(T_t f) * g = T_t(f * g) = f * (T_t g),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 5.15. Si $f, g \in \mathcal{P}'$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$(T_t f) * g = T_t(f * g) = f * (T_t g) \tag{5.6}$$

$$(f * g)^{(n)} = f^{(n)} * g = f * g^{(n)}, \tag{5.7}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Así,

$$\begin{aligned}
 ((T_t f) * g)(k) &= \widehat{T_t f}(k) \widehat{g}(k) \\
 &= \left(e^{-ikt} \widehat{f}(k) \right) \widehat{g}(k) \\
 &= e^{-ikt} \widehat{(f * g)}(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \widehat{T_t(f * g)}(k) \\
 &= \widehat{f}(k) * \left(e^{-ikt} \widehat{g}(k) \right) \\
 &= \widehat{f}(k) * \widehat{(T_t g)}(k) \\
 &= \widehat{(f * T_t g)}(k).
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 \widehat{(f * g)^{(n)}} &= (ik)^n \widehat{(f * g)}(k) \\
 &= \left((ik)^n \widehat{f}(k) \right) \widehat{g}(k) \\
 &= \widehat{f^{(n)}}(k) \widehat{g}(k) \\
 &= \widehat{f^{(n)} * g}(k) \\
 &= \widehat{f}(k) \left((ik)^n \widehat{g}(k) \right) \\
 &= \widehat{f * g^{(n)}}(k).
 \end{aligned}$$

□

Proposición 5.16. Si $f \in \mathcal{P}'$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}'$, tales que $f_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$, se tiene $f_n * g \xrightarrow{\mathcal{P}'} f * g$, para todo $g \in \mathcal{P}'$.

Demostración. Sabemos que $\tilde{g} * \varphi \in \mathcal{P}$, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Así,

$$\langle f_n * g, \varphi \rangle = \langle f_n, \tilde{g} * \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle = \langle f * g, \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Por lo tanto, $f_n * g \xrightarrow{\mathcal{P}'} f * g$.

□

Proposición 5.17. Si $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ es una identidad aproximada, no necesariamente en \mathcal{P} ,

$$\varphi_n * f \xrightarrow{\mathcal{P}'} f, \tag{5.8}$$

para todo $f \in \mathcal{P}'$.

Demostración. Recordemos que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} 2\pi\delta$, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ pues $\{\varphi_n\}_{n=1}$ es una identidad aproximada. Ahora, si $\varphi \in \mathcal{P}$, $\tilde{f} * \varphi \in \mathcal{P}$,

$$\langle \varphi_n * f, \varphi \rangle = \langle \varphi_n, \tilde{f} * \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{P}'} \langle 2\pi\delta, \tilde{f} * \varphi \rangle = \langle 2\pi\delta * f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Por lo tanto, $\varphi_n * f \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$. □

Espacios de Sobolev periódicos

En este capítulo estudiaremos los espacios de Sobolev periódicos. Ambiente en el cual más adelante trabajaremos la solución de la ecuación de Boussinesq. La definición del espacio de Sobolev que usamos es equivalente a la definición de espacio de Sobolev que se conoce. Un atisbo de esta equivalencia la podemos observar en la demostración de la Proposición 6.5.

SECCIÓN 6.1

\mathcal{P} y espacios de Sobolev

Definición 6.1. Si $s \in \mathbb{R}$ es un valor fijo, el conjunto

$$H_{per}^s([-\pi, \pi]) = \left\{ f \in \mathcal{P}' \text{ tal que } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty \right\}, \quad (6.1)$$

se denomina espacio de Sobolev periódico de orden s .

Proposición 6.1. Si $s \in \mathbb{R}$, el espacio $H_{per}^s := H_{per}^s([- \pi, \pi])$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial.

Proposición 6.2. La aplicación $\|\cdot\|_s : H_{per}^s \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por

$$\|f\|_s = \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

es una norma en H_{per}^s .

Proposición 6.3. El espacio $(H_{per}^s, \|\cdot\|_s)$ es un espacio normado.

Observación 6.1. Se verifican las siguientes equivalencias:

$$f \in H_{per}^s \Leftrightarrow \left((1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left(\widehat{f}(k) \right)_{k=-\infty}^{+\infty} = \widehat{f} \in \ell_s^2,$$

donde

$$\ell_s^2 = \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \text{ tal que } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2 < \infty \right\}. \quad (6.2)$$

Además, $(\ell_s^2, \|\cdot\|_{\ell_s^2})$ es un espacio normado con la norma

$$\|\alpha\|_{\ell_s^2} = \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es decir,

$$\|f\|_s = \|\widehat{f}\|_{\ell_s^2}.$$

Definición 6.2. La aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_s : H_{per}^s \times H_{per}^s \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$\langle f, g \rangle_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)},$$

es un producto interno en H_{per}^s .

Proposición 6.4. *El espacio $(H_{per}^s, \langle \cdot, \cdot \rangle_s)$ es un espacio de Hilbert.*

Observación 6.2. *Si $k = 0$ entonces $H_{per}^0 = L_{per}^2([-\pi, \pi])$. En efecto,*

$$f \in H_{per}^0 \Leftrightarrow \widehat{f} \in \ell^2 \Leftrightarrow f \in L_{per}^2([-\pi, \pi]).$$

Es decir,

$$\|f\|_0 = \|\widehat{f}\|_{\ell^2} = \|f\|_{L_{per}^2([-\pi, \pi])}.$$

Lema 6.1. H_{per}^s es un conjunto cerrado, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Iniciemos considerando la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \subseteq H_{per}^s$, tal que $f_n \xrightarrow{H_{per}^s} f_0$ si $n \rightarrow \infty$. Es decir,

$$\|f_n - f_0\|_{H_{per}^s} \rightarrow 0,$$

si $n \rightarrow \infty$. Luego,

$$\|\widehat{f}_n(k) - \widehat{f}_0(k)\| \xrightarrow{\ell_s^2} 0.$$

Como ℓ_s^2 es cerrado, $(\widehat{f}_0(k))_{k \in \mathbb{Z}^+} \in \ell_s^2$. Así, $f_0 \in H_{per}^s$. Por tanto, H_{per}^s es cerrado. \square

Proposición 6.5. *Si $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \subset H_{per}^s$. Además, la inclusión es densa. Es decir,*

$$\overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_{H_{per}^s}} = H_{per}^s,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demostración. A continuación, si probamos que $\mathcal{P} \subseteq H_{per}^s$, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_{H_{per}^s}} \subseteq \overline{H_{per}^s} = H_{per}^s.$$

En efecto, si $f \in \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$, podemos identificar $T_f \equiv f$, donde

$$T_f \varphi = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) f(x) dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Ahora, usando la representación en serie de Fourier $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \Phi_k(x)$,

donde $\Phi_k(x) = e^{ikx}$. Luego, si $f \in \mathcal{P}$ entonces

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}'(k) \Phi_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik \widehat{f}(k) \Phi_k(x).$$

Mediante un proceso de inducción podemos generalizar y obtener

$$\begin{aligned} f^{(j)}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}^{(j)}(k) \Phi_k(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^j \widehat{f}(k) \Phi_k(x) \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, 3, \dots$. Ahora apliquemos la identidad de Parseval a $f^{(j)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(j)}(x)|^2 dx &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}^{(j)}(k)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ((ik)^j)^2 |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2j} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, 2, 3, \dots$. Así, si consideramos $j = 0, 1$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Sumando estas desigualdades tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2) dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2) |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Así, $f \in H^1([-\pi, \pi])$ y $f \in H_{per}^s$, para $s = 0, 1$. Analicemos para distintos valores de s .

- Si $s \in \mathbb{Z}^+$, usando el Binomio de Newton se tiene $(1 + |k|^2)^s = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} |k|^{2j}$. Así,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} |k|^{2j} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 |k|^{2j} \right] \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Luego, $f \in H_{per}^s$.

- Si $s \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $s \leq m$. Por tanto, $(1 + |k|^2)^s \leq (1 + |k|^2)^m$.

Luego,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^m |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Así, $f \in H_{per}^s$

- Si $s \in \mathbb{R}^-$, podemos considerar $s = -r$ con $r \in \mathbb{R}^+$. Así,

$$\begin{aligned} (1 + |k|^2)^s &= \frac{1}{(1 + |k|^2)^r} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Por tanto, $f \in H_{per}^s$.

Por tanto, hemos demostrado que $\mathcal{P} \subset H_{per}^s$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Ahora, demostraremos que $H_{per}^s \subseteq \overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_{H_{per}^s}}$. En efecto, si $f \in H_{per}^s$ entonces f puede ser aproximada por su serie de Fourier. Es decir,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \Phi_k(x).$$

Debemos demostrar que existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \subseteq \mathcal{P}$, de forma que $\|f_n - f\|_s \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Ahora, vamos a definir la sucesión α_n , tal que

$$\alpha_n(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k), & \text{si } |k| \leq n \\ 0, & \text{si } |k| > n. \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{array}{cccccccccccc} \alpha_0(k) : & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{f}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_1(k) : & \cdots & 0 & 0 & 0 & \widehat{f}(-1) & \widehat{f}(0) & \widehat{f}(1) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_2(k) : & \cdots & 0 & 0 & \widehat{f}(-2) & \widehat{f}(-1) & \widehat{f}(0) & \widehat{f}(1) & \widehat{f}(2) & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_3(k) : & \cdots & 0 & \widehat{f}(-3) & \widehat{f}(-2) & \widehat{f}(-1) & \widehat{f}(0) & \widehat{f}(1) & \widehat{f}(2) & \widehat{f}(-3) & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

Ahora, $\alpha_n \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. En efecto, al fijar n tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n(k)| |k|^j &= \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}_n(k)| |k|^j \\ &< \infty, \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Luego, por la sobreyectividad de la transformada inversa de Fourier

$$f_n = \alpha_n^\vee = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_n(k) \Phi_k(x) \in \mathcal{P}.$$

Así, hemos obtenido una susección $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \subseteq \mathcal{P}$, tal que $\widehat{f}_n = \alpha_n$. Además,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s \left| \widehat{f}_n(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s \left| \alpha_n(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s \left| \alpha_n(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{|k| \leq n} (1 + |k|^2)^s \left| \alpha_n(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 + 2\pi \sum_{|k| > n} (1 + |k|^2)^s \left| \alpha_n(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{|k| \leq n} (1 + |k|^2)^s \left| \widehat{f}_n(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 + 2\pi \sum_{|k| > n} (1 + |k|^2)^s \left| 0 - \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{|k| > n} (1 + |k|^2)^s \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pues la cola de la serie de Fourier, que aproxima a f , tiende a cero. Por tanto, $f_n \xrightarrow{H_{per}^s} f$ y así $f \in \overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_{H_{per}^s}}$. □

SECCIÓN 6.2

Algunas propiedades de los espacios de Sobolev

En esta sección brindamos algunas propiedades de los espacio de Sobolev periódicos. Nos enfocaremos en la Proposición 6.6. Pues, en el siguiente capítulo, al determinar la solución a la ecuación de Boussinesq veremos que la solución no es para un valor determinado del

orden del espacio de Sobolev, sino para un intervalo de valores del orden.

Proposición 6.6. *Si $s, r \in \mathbb{R}$ y $s \geq r$ entonces $H_{per}^s \subseteq H_{per}^r$. El espacio H_{per}^s está inmersa en forma continua y densa en H_{per}^r . Además,*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s,$$

para todo $f \in H_{per}^s$ y si $s \geq 0$ entonces $H_{per}^s \subset L^2([-\pi, \pi])$.

Demostración. Veamos, si $r \leq s$ entonces

$$0 \leq \frac{(1 + |k|^2)^r}{(1 + |k|^2)^s} \leq 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|f\|_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^r |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + |k|^2)^r}{(1 + |k|^2)^s} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \|f\|_s^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s. \tag{6.3}$$

Ahora, si $f \in H_{per}^s$ entonces $\|f\|_s < \infty$. Por tanto, $\|f\|_r < \infty$. Así, $f \in H_{per}^r$. Además, de (6.3) se obtiene una inclusión continua. Ahora, probaremos que la inclusión es densa. Para

ello, debemos demostrar que $\overline{H_{per}^s}^{\|\cdot\|_r} = H_{per}^r$. Veamos, se sabe que

$$\overline{H_{per}^s}^{\|\cdot\|_r} \subseteq \overline{H_{per}^s}^{\|\cdot\|_r} = H_{per}^r.$$

Finalmente, solo nos falta demostrar que $H_{per}^r \subseteq \overline{H_{per}^s}^{\|\cdot\|_r}$. Veamos, si $g \in H_{per}^r$, como \mathcal{P} es denso en H_{per}^r , existe $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \subseteq \mathcal{P} \subseteq H_{per}^r$, tal que $g_n \xrightarrow{H_{per}^r} g$. Luego, $g \in \overline{H_{per}^s}^{\|\cdot\|_r}$ y por tanto $H_{per}^r \subseteq \overline{H_{per}^s}^{\|\cdot\|_r}$. \square

Proposición 6.7 (Identificación isométrica isomorfa). *Para todo $s \in \mathbb{R}$ se cumple $(H_{per}^s)^* = H_{per}^{-s}$. La dualidad es implementada por*

$$\langle f, g \rangle_* = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k), \quad (6.4)$$

para todo $f \in H_{per}^{-s}$ y para todo $g \in H_{per}^s$.

Demostración. Si consideramos $f \in H_{per}^{-s}$, una función fija, La igualdad (6.4) nos permite definir la aplicación

$$\begin{aligned} L_f : H_{per}^s &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\rightarrow L_f(g) = \langle f, g \rangle_*. \end{aligned}$$

L_f es una funcional lineal continua en H_{per}^s . Es decir, L_f es lineal y $\|L_f\| \leq \|f\|_{-s}$. Así, $L_f \in (H_{per}^s)^*$. Ahora, si $\psi \in (H_{per}^s)^*$, por medio del Teorema de representación de Riez, existe un único $\phi \in H_{per}^s$, tal que $\|\phi\|_s = \|\psi\|_*$. Además, para todo $g \in H_{per}^s$

$$\begin{aligned} \langle \psi, g \rangle &= \langle g, \phi \rangle_s \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s \widehat{g}(k) \overline{\widehat{\phi}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k) \overline{(1 + |k|^2)^s \widehat{\phi}(k)}. \end{aligned}$$

Ahora, como $\phi \in H_{per}^s$ entonces $\left((1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$. Así, podemos definir un único $f_\psi \in H_{per}^{-s}$, tal que

$$\widehat{f_\psi}(k) = \overline{(1 + |k|^2)^s \widehat{\phi}(k)},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. El funcional $f_\psi \in H_{per}^{-s}$, pues de la definición de $\widehat{f_\psi}(k)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|f_\psi\|_{-s}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^{-s} |\widehat{f_\psi}(k)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^{-s} \left| \overline{(1 + |k|^2)^s \widehat{\phi}(k)} \right|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^{-s} (1 + |k|^2)^{2s} |\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &= \|\phi\|_s^2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|f_\psi\|_{-s} = \|\phi\|_s < \infty$. Luego, $\|f_\psi\|_{-s} = \|\psi\|_*$. Así, hemos hallado una funcional $f_\psi \in H_{per}^{-s}$, tal que para todo $g \in H_{per}^s$

$$\begin{aligned} \langle \psi, g \rangle &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k) \widehat{f_\psi}(k) \\ &= \langle f_\psi, g \rangle_*. \end{aligned}$$

Es decir, la aplicación $\zeta: (H_{per}^s)^* \rightarrow H_{per}^{-s}$, tal que $\zeta(\psi) = f_\psi$ es un isomorfismo y $\|f_\psi\|_{-s} = \|\psi\|_*$. □

Proposición 6.8. Si $s \in \mathbb{N}$,

$$f \in H_{per}^s \Leftrightarrow \partial^j f = f^j \in L_{per}^2,$$

para $j \in \{0, 1, 2, \dots, s\}$. La derivada está dada en el sentido distribucional y $f^0 = f$.

Demostración. Si $f \in H_{per}^s$,

$$\left(\left(1 + |k|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2.$$

Ahora, demostrar que $\widehat{f}^j \in \ell^2$ es equivalente a demostrar que $f^j \in L_{per}^2([-\pi, \pi])$. Como $\widehat{f}^j(k) = (ik)^j \widehat{f}(k)$, para $j = 0, 1, 2, \dots, s$, se cumple la desigualdad

$$|k|^j \leq \left(\left(1 + |k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right)^j \leq \left(\left(1 + |k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right)^s, \quad j = 0, 1, 2, \dots, s.$$

Luego, para $j = 0, 1, 2, \dots, s$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}^j(k) \right| &= \left| (ik)^j \widehat{f}(k) \right| \\ &= |k|^j \left| \widehat{f}(k) \right| \\ &\leq \left(1 + |k|^2\right)^{\frac{s}{2}} \left| \widehat{f}(k) \right| \end{aligned} \tag{6.5}$$

Así, $f^j \in L_{per}^2([-\pi, \pi])$. □

Proposición 6.9. Sea $f \in H_{per}^s$. La aplicación $|||\cdot|||_s : H_{per}^s \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$|||f|||_s = \left(\sum_{j=0}^s \left\| \partial^j f \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en H_{per}^s .

Proposición 6.10. Las normas $\|\cdot\|_s$ y $|||\cdot|||_s$ son equivalentes.

Demostración. Usando la identidad de Parseval (2.19) y (6.5) se tiene

$$|||f|||_s^2 = \sum_{j=0}^s \left\| f^j \right\|_{L^2}^2$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \sum_{j=0}^s \left\| \widehat{f}^j \right\|_{\ell^2}^2 \\
 &= 2\pi \sum_{j=0}^s \left\| (ik)^j \widehat{f} \right\|_{\ell^2}^2 \\
 &= 2\pi \sum_{j=0}^s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| (ik)^j \widehat{f}(k) \right|^2 \\
 &\leq 2\pi \sum_{j=0}^s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 + |k|^2 \right)^s \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \\
 &= \sum_{j=0}^s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \left(1 + |k|^2 \right)^s \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \\
 &= \sum_{j=0}^s \|f\|_s^2 \\
 &= (s+1) \|f\|_s^2.
 \end{aligned}$$

Así, $\|f\|_s \leq \sqrt{s+1} \|f\|_0$.

Ahora, si $f^j \in L^2([-\pi, \pi])$, para $j = 0, 1, 2, \dots, s$, $\widehat{f}^j(k) \in \ell^2$. Es decir,

$$\left((ik)^j \widehat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2.$$

Si usamos el Binomio de Newton,

$$\left(1 + |ik|^2 \right)^s = \sum_{j=0}^s c_j |ik|^{2j},$$

donde $c_j = \binom{s}{j}$. Luego, por la Identidad de Parseval se tiene

$$\|f\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 + |k|^2 \right)^s \left| \widehat{f}(k) \right|^2$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^s c_j |ik|^{2j} \right) |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{j=0}^s c_j \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |ik|^j |\widehat{f}(k)|^2 \right) \\
&= 2\pi \sum_{j=0}^s c_j \left\| \widehat{f}^j \right\|_{\ell^2}^2 \\
&= \sum_{j=0}^s c_j \left\| f^j \right\|_{L^2}^2 \\
&\leq C \|f\|_s^2 \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

donde $C = \max\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_s\}$. Así,

$$\frac{1}{C} \|f\|_s \leq \|f\|.$$

Esta desigualdad y la obtenida anteriormente prueban la equivalencia de las normas. \square

Ecuación lineal de Boussinesq

El objetivo de este capítulo es estudiar la buena colocación de la ecuación de Boussinesq.

SECCIÓN 7.1

Introducción

Con respecto a la evolución en el estudio de la Ecuación de Boussinesq, podemos marcar dos momentos importantes. En lo que concierne al modelo que planteó Boussinesq, partiremos comentando acerca del origen del estudio de los efectos de las ondas en aguas poco profundas. El interés en este tema surgió con las observaciones y estudios que realizó John Scott R. acerca del movimiento de lo que él llamó “ondas solitarias” sobre el canal de



Figura 7.1: Ondas en aguas poco profundas. Fuente: <https://www.shutterstock.com>

Edimburgo en Glasgow (Escocia).

Asimismo, la descripción que usó Scott, de estas ondas fue la siguiente: «Una gran ola de traslación que viaja a lo largo del canal de agua durante un periodo de tiempo mientras conserva su forma». Acerca de la solución de la ecuación, Boussinesq planteó, en 1872, el siguiente modelo:

$$U_{tt}(t, x) - aU_{xx}(t, x) = -bU_{xxxx}(t, x), \quad (7.1)$$

donde a y b son constantes reales positivas, $U_{tt}(t, x)$ representa la aceleración de la onda, $U_{xx}(t, x)$ toma en cuenta la lentitud de la onda, $U_{xxxx}(t, x)$ equilibra la tendencia de la ola a romperse, $U(0, x)$ representa la forma inicial de la onda y $U_t(0, x)$ representa la velocidad de la onda. Para dar solución a su ecuación, Boussinesq planteó lo que ahora se conoce como la Aproximación de Boussinesq y de esta dedujo las ecuaciones conocidas actualmente como Ecuaciones de Boussinesq.

Para el estudio de la ecuación de Boussinesq en espacios de Sobolev periódicos estudiamos la teoría de Fourier en el espacio de las distribuciones. Para ello, extendimos el concepto de función mediante la definición de distribución periódica. Luego, demostramos que toda distribución periódica puede ser aproximada por su serie de Fourier. En este capítulo, usaremos la propiedad que posee la transformada de Fourier para convertir ecuaciones en derivadas parciales (EDP) en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Ahora, describiremos el proceso de solución que se propone en este trabajo. Para tal fin, trabajaremos en los subespacios de las distribuciones periódicas denominados espacios de Sobolev periódicos. Después, nos enfocaremos en el modelo homogéneo y no homogéneo de (7.1) con datos en Espacios de Sobolev Periódico propuesto por Rafael Iorio en [3]. Para concluir, demostraremos la buena colocación del problema en el sentido de Hadamard. Es decir, demostraremos la existencia de la solución, la unicidad de esta y la dependencia continua con respecto a los datos iniciales.

SECCIÓN 7.2

Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq

En esta sección estudiaremos la buena colocación de la ecuación homogénea de Boussinesq. Se debe tener en cuenta que el orden del espacio de Sobolev periódico para el cual se está determinando la solución es solo uno de un intervalo de valores. Como veremos en las proposiciones y lemas, realizaremos las estimativas para un valor real r que acotaremos por un valor adecuado que luego fijaremos. A continuación, planteamos la ecuación diferencial que describe el modelo del desplazamiento de ondas en aguas poco profundas.

Teorema 7.1. *Si $s \in \mathbb{R}$, es un valor fijo, entonces el problema*

$$(Q_1) \left\{ \begin{array}{l} u(t, x) \in C\left([0, +\infty[, H_{per}^s\right), \\ \partial_t^2 u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) - \partial_x^4 u(t, x) \in H_{per}^{s-4}, \\ u(0, x) = \varphi(x) \in H_{per}^s, \\ \partial_t u(0, x) = \psi(x) \in H_{per}^{s-1}, \end{array} \right. \quad (7.2)$$

posee una única solución $u \in C\left([0; +\infty[, H_{per}^s\right)$, la cual depende continuamente de los datos iniciales.

La demostración de la buena colocación usará las siguientes proposiciones. Para comenzar, probemos la existencia de una solución.

Proposición 7.1. *Si denotamos por $\sigma(k) = |k|(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}$ para $k \in \mathbb{Z}$,*

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right) \Phi_k(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right) \Phi_k(x), \quad (7.3)$$

donde $\Phi_k(x) = e^{ikx}$, es solución de (Q_1) .

Demostración. Para comenzar, apliquemos la Transformada de Fourier a la ecuación del problema (Q₁). Con ello, iniciamos el proceso para obtener nuestro candidato a solución.

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_t^2 u(t)} &= \widehat{\partial_x^2 u(t)} - \widehat{\partial_x^4 u(t)} \\ &= (ik)^2 \widehat{u}(k, t) - (ik)^4 \widehat{u}(k, t) \\ &= -k^2(1 + k^2) \widehat{u}(k, t).\end{aligned}$$

Así, para cada $k \in \mathbb{Z}$, se obtiene la siguiente familia de EDO homogéneas de segundo orden

$$(\Omega_k) \left\{ \begin{array}{l} \widehat{u} \in C([0, +\infty[, \ell_{s-1}^2(\mathbb{Z})) \\ \partial_t^2 \widehat{u}(k, t) + k^2(1 + k^2) \widehat{u}(k, t) = 0 \\ \widehat{u}(k, 0) = \widehat{\varphi}(k) \\ \partial_t \widehat{u}(k, 0) = \widehat{\psi}(k). \end{array} \right. \quad (7.4)$$

Cuyo polinomio característico es $\lambda^2 + k^2(1 + k^2) = 0$. Ahora, analicemos los casos:

- Si $k = 0$,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad \widehat{u}(0, t) = A_1 + A_2 t.$$

Así, para $t = 0$ tenemos $\widehat{u}(0, 0) = A_1 = \widehat{\varphi}(0)$. Luego,

$$\partial_t \widehat{u}(0, 0) = A_2 = \widehat{\psi}(0).$$

De donde obtenemos la solución

$$\widehat{u}(0, t) = \widehat{\varphi}(0) + \widehat{\psi}(0)t.$$

- Si $k \neq 0$,

$$\lambda^2 = -k^2(1 + k^2).$$

Así,

$$\begin{aligned}\lambda &= \pm i \left(|k| (1 + k^2)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \pm i \sigma(k).\end{aligned}$$

Luego,

$$\widehat{u}(k, t) = A_1 \cos(\sigma(k)t) + A_2 \operatorname{sen}(\sigma(k)t).$$

Ahora, de los datos iniciales se tiene

$$\partial_t \widehat{u}(k, t) = -A_1(\sigma(k)) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) + A_2(\sigma(k)) \cos(\sigma(k)t).$$

Si reemplazamos $t = 0$,

$$\partial_t \widehat{u}(k, 0) = A_2(\sigma(k)) = \widehat{\psi}(k).$$

Como $k \neq 0$, podemos despejar y obtener $A_2 = \frac{1}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k)$. Así,

$$\widehat{u}(k, t) = \widehat{\varphi}(k) \cos(\sigma(k)t) + \widehat{\psi}(k) \frac{1}{\sigma(k)} \operatorname{sen}(\sigma(k)t).$$

Por tanto, la solución tiene la forma de la siguiente serie de Fourier

$$\begin{aligned}u(t, x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(k, t) \Phi_k(x) \\ &= \sum_{0 \neq k=-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{\varphi}(k) \cos(\sigma(k)t) + \widehat{\psi}(k) \frac{1}{\sigma(k)} \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \right) \Phi_k(x) + \left(\widehat{\varphi}(0) + \widehat{\psi}(0)t \right) \Phi_0(x).\end{aligned}$$

Ahora, como $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} = t$, podemos considerar $\left. \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \right|_{k=0} = t$. Luego, la solu-

ción tiene la cara

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right) \Phi_k(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right) \Phi_k(x).$$

□

Además, para todo $x \in \mathbb{R}$ la cara de la solución puede ser reescrita en términos de operadores de la siguiente manera

$$u(t, x) = C_1(t)(\varphi(x)) + C_2(t)(\psi(x)), \quad (7.5)$$

donde

$$C_1(t)(\varphi(x)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right) \Phi_k(x)$$

y

$$C_2(t)(\psi(x)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right) \Phi_k(x).$$

La siguiente proposición nos permite afirmar que la solución anteriormenete hallada se encuentra en un espacio de Sobolev, para un conjunto de valores adecuados del orden de dicho espacio. Cabe mencionar la importancia del M-Test de Weierstrass en las demostraciones.

Proposición 7.2. Si $T \in \mathbb{R}^+$, es un valor fijo, y $s \in \mathbb{R}$, entonces

$$u(t, x) = u(t) \in H_{per}^s,$$

para $t \in [0, T]$. Además,

$$\|u(t)\|_s \leq \sqrt{2} \sqrt{\max\{1, T^2\}} \sqrt{\|\varphi\|_s^2 + \|\psi\|_{s-1}^2},$$

donde $u(t, x)$ está dada por (7.3).

Demostración. Sean $t \in [0; T]$ y $r \in \mathbb{R}$, un valor fijo. Ahora, consideremos la norma de $u(t)$ en H_{per}^r y la acotaremos.

$$\begin{aligned}
 \|u(t)\|_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^r |\widehat{u}(k, t)|^2 \\
 &= 2\pi \left[\sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^r \left| \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) + \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right|^2 + |\widehat{\varphi}(0) + t\widehat{\psi}(0)|^2 \right] \\
 &\leq 4\pi \left[\sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^r \left(\left| \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right|^2 + \left| \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right|^2 \right) + |\widehat{\varphi}(0)|^2 + |t\widehat{\psi}(0)|^2 \right] \\
 &\leq 4\pi \left(\sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^r |\widehat{\varphi}(k)|^2 + \sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \frac{(1+k^2)^r}{\sigma(k)^2} |\widehat{\psi}(k)|^2 + |\widehat{\varphi}(0)|^2 + |t\widehat{\psi}(0)|^2 \right) \\
 &= 4\pi \left(\sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^r |\widehat{\varphi}(k)|^2 + \sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \frac{(1+k^2)^{r-1}}{|k|^2} |\widehat{\psi}(k)|^2 + |\widehat{\varphi}(0)|^2 + |t\widehat{\psi}(0)|^2 \right) \\
 &= 2 \left(\|\varphi\|_r^2 + 2\pi \sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \frac{(1+k^2)^{r-1}}{|k|^2} |\widehat{\psi}(k)|^2 + 2\pi |t\widehat{\psi}(0)|^2 \right) \\
 &\leq 2 \left(\|\varphi\|_r^2 + 2\pi \sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{r-1} |\widehat{\psi}(k)|^2 + 2\pi |t\widehat{\psi}(0)|^2 \right), \quad t \leq T \\
 &= 2 \left(\|\varphi\|_r^2 + 2\pi \max\{1, T^2\} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{r-1} |\widehat{\psi}(k)|^2 \right) \\
 &= 2 \left(\|\varphi\|_r^2 + \max\{1, T^2\} \|\psi\|_{r-1}^2 \right) \\
 &= 2 \max\{1, T^2\} \left(\|\varphi\|_r^2 + \|\psi\|_{r-1}^2 \right) \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

siempre que $r \leq s$. Por tanto, $u \in H_{per}^r$ para $r \leq s$ y en particular $u \in H_{per}^s$. \square

Este resultado justifica que consideremos $\varphi \in H_{per}^s$ y $\psi \in H_{per}^{s-1}$. Ahora, probaremos la continuidad de la solución en espacios de Sobolev de orden adecuados.

Proposición 7.3. *Si $T \in \mathbb{R}^+$, es un valor fijo, y $s \in \mathbb{R}$ entonces $u \in C([0, T], H_{per}^s)$, donde u está dada por (7.3).*

Demostración. Iniciemos considerando $t \in [0, T]$ y t' tal que $t > t' > 0$. Ahora, debemos demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow t'} \|u(t) - u(t')\|_r = 0. \quad (7.6)$$

Veamos,

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t')\|_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^r |\widehat{u}(k, t) - \widehat{u}(k, t')|^2 \\ &= 2\pi \left[\left(\sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^r \left| \cos(\sigma(k)t) - \cos(\sigma(k)t') \right| \widehat{\varphi}(k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\text{sen}(\sigma(k)t) - \text{sen}(\sigma(k)t')}{\sigma(k)} \right) \widehat{\psi}(k) \right|^2 \right) + |(t-t')\widehat{\psi}(0)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Denotaremos por

$$N(k, t) = \left(\cos(\sigma(k)t) - \cos(\sigma(k)t') \right) \widehat{\varphi}(k) + \left(\frac{\text{sen}(\sigma(k)t) - \text{sen}(\sigma(k)t')}{\sigma(k)} \right) \widehat{\psi}(k).$$

Así,

- para $k = 0$ $N(k, t)$ no está definido.
- para $k \neq 0$ se tiene que $\lim_{t \rightarrow t'} N(k, t) = 0$.

Como $t - t' < T$ entonces $\lim_{t \rightarrow t'} (t - t')\widehat{\psi}(0) = 0$. Finalmente, solo necesitamos la convergen-

cia uniforme de la serie para el intercambio del límite y obtener (7.6). Para ello, consideremos el n -ésimo término de la serie y lo acotaremos con una serie convergente para aplicar el M-Test de Weierstrass. Para tal fin, denotemos por

$$n_{k,t} = 2\pi(1+k^2)^r \left| \left(\cos(\sigma(k)t) - \cos(\sigma(k)t') \right) \widehat{\varphi}(k) + \left(\frac{\text{sen}(\sigma(k)t) - \text{sen}(\sigma(k)t')}{\sigma(k)} \right) \widehat{\psi}(k) \right|^2.$$

Así,

$$\begin{aligned} n_{k,t} &\leq 2\pi(1+k^2)^r \left(2|\widehat{\varphi}(k)| + \frac{2}{\sigma(k)} |\widehat{\psi}(k)| \right)^2 \\ &\leq 2\pi(1+k^2)^r 2 \left(4|\widehat{\varphi}(k)|^2 + \frac{4}{(\sigma(k))^2} |\widehat{\psi}(k)|^2 \right). \end{aligned}$$

Aplicando la serie en ambos lados de la desigualdad

$$\begin{aligned} \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} n_{k,t} &\leq 8 \left(\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} 2\pi(1+k^2)^r |\widehat{\varphi}(k)|^2 + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} |\widehat{\psi}(k)|^2 \right) \\ &\leq 8 \left(\|\varphi\|_r^2 + \|\psi\|_{r-1}^2 \right) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

siempre que $r \leq s$. Luego, por el M-Test de Weierstrass la serie converge uniformemente. \square

El siguiente lema nos ayudará a acotar la desigualdad 7.23 y 7.17.

Lema 7.1. Sean t, h y $r \in \mathbb{R}$, t un valor fijo, y $k \in \mathbb{Z}$. Si $f(\tau) = \cos(\sigma(k)(t + \tau))$, para $\tau \in [0, h]$,

$$\|\varphi\|_r \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right| \leq 2\|\varphi\|_{r+2}, \quad (7.7)$$

para todo $\varphi \in H_{per}^{r+2}$.

Demostración. Vamos a comenzar teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\|\varphi\|_{\tau}^2 \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^r |\widehat{\varphi}(k)|^2 \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right|^2.$$

Nuestro objetivo es probar que

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right| \leq 2\sigma(k).$$

Podemos usar dos maneras para demostrar esta desigualdad. Veamos,

- Para comenzar f es continua en $[0, h]$ y diferenciable en $]0, h[$. Luego, por el Teorema del Valor Medio existe $c \in]0, h[$, tal que

$$hf'(c) = f(h) - f(0). \tag{7.8}$$

Además, $|f'(\tau)| \leq \sigma(k)$, para todo $\tau \in [0, h]$. Luego,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right| &= |f'(c) - f'(0)| \\ &\leq |f'(c)| + |f'(0)| \\ &\leq 2\sigma(k). \end{aligned}$$

- Usando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo tenemos:

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \left| \int_0^h \frac{1}{h} f'(s) ds \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |f'(s)| ds = \sigma(k).$$

Luego,

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right| \leq \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| + |f'(0)| \leq 2\sigma(k).$$

Ahora, reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|_r^2 \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right|^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r |\widehat{\varphi}(k)|^2 \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r |\widehat{\varphi}(k)|^2 |f'(c) - f'(0)|^2 \\
 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r |\widehat{\varphi}(k)|^2 4(\sigma(k))^2 \\
 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+1} |k|^2 4 |\widehat{\varphi}(k)|^2 \\
 &\leq 4 \times 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+1} (1+k^2) |\widehat{\varphi}(k)|^2 \\
 &= 4 \times 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} |\widehat{\varphi}(k)|^2 \\
 &= 4 \|\varphi\|_{r+2}^2.
 \end{aligned}$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados obtenemos la desigualdad deseada. \square

El siguiente lema nos ayudará a acotar la desigualdad 7.20.

Lema 7.2. Sean t, h y $r \in \mathbb{R}$, t un valor fijo, y $k \in \mathbb{Z}$. Si $g(\tau) = \sigma(k)^{-1} \text{sen}(\sigma(k)(t + \tau))$, para $\tau \in [0, h]$,

$$\left| \frac{g(h) - g(0)}{h} - g'(0) \right| \leq 2. \tag{7.9}$$

Demostración. Podemos usar dos maneras para demostrar esta desigualdad. Veamos,

- g es continua en $[0, h]$ y diferenciable en $]0, h[$. Luego, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in]0, h[$, tal que

$$hg'(c) = g(h) - g(0) \tag{7.10}$$

Además, $|g'(\tau)| \leq 1$, para todo $\tau \in [0, h]$. Luego,

$$\left| \frac{g(h) - g(0)}{h} - g'(0) \right| = |g'(c) - g'(0)| \leq |g'(c)| + |g'(0)| \leq 2.$$

- Usando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo tenemos:

$$\left| \frac{g(h) - g(0)}{h} \right| = \left| \int_0^h \frac{1}{h} g'(s) ds \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |g'(s)| ds = 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(h) - g(0)}{h} - g'(0) \right| &\leq \left| \frac{g(h) - g(0)}{h} \right| + |g'(0)| \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición prueba que la solución satisface la ecuación de Boussinesq en un espacio de Sobolev de orden adecuado.

Proposición 7.4. Si $u \in C([0, +\infty[, H_{per}^s)$ y está definida por (7.3), entonces la ecuación

$$\partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) \tag{7.11}$$

es satisfecha en H_{per}^{s-4} .

Demostración. A fin de probar la afirmación debemos demostrar que

$$\left\| \frac{\partial_t u(t+h) - \partial_t u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) + \partial_x^4 u(t) \right\|_{s-4} \rightarrow 0 \tag{7.12}$$

si $h \rightarrow 0$. Para ello, consideremos la norma en H_{per}^r y determinemos un r adecuado.

Veamos

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{\partial_t u(t+h) - \partial_t u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) + \partial_x^4 u(t) \right\|_r^2 = \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u}(k, t+h) - \partial_t \widehat{u}(k, t)}{h} - \widehat{\partial_x^2 u(t)} + \widehat{\partial_x^4 u(t)} \right|^2 \tag{7.13} \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u}(k, t+h) - \partial_t \widehat{u}(k, t)}{h} - (ik)^2 \widehat{u}(k, t) + (ik)^4 \widehat{u}(k, t) \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u}(t+h) - \partial_t \widehat{u}(t)}{h} + k^2 \widehat{u}(t) + k^4 \widehat{u}(t) \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u}(k, t+h) - \partial_t \widehat{u}(k, t)}{h} + \sigma(k)^2 \widehat{u}(k, t) \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t C_1(k, t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(k, t)(\varphi)}{h} + \frac{\partial_t C_2(k, t+h)(\psi) - \partial_t C_2(k, t)(\psi)}{h} \right. \\
 &\quad \left. + \sigma(k)^2 \left[\cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) + \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right] \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \left(\frac{\partial_t C_1(k, t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(k, t)(\varphi)}{h} + \sigma(k)^2 \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right) + \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{\partial_t C_2(k, t+h)(\psi) - \partial_t C_2(k, t)(\psi)}{h} + \sigma(k) \text{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \right) \right|^2 \\
 &\leq 2 \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t C_1(k, t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(k, t)(\varphi)}{h} + \sigma(k)^2 \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right|^2 + \right. \\
 &\quad \left. 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t C_2(k, t+h)(\psi) - \partial_t C_2(k, t)(\psi)}{h} + \sigma(k) \text{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \right|^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(\left\| \frac{\partial_t C_1(t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(t)(\varphi)}{h} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma(k)^2 \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right\|_r^2 + \right. \\
 &\quad \left. \left\| \frac{\partial_t C_2(t+h)(\psi) - \partial_t C_2(t)(\psi)}{h} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma(k) \text{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \right\|_r^2 \right). \quad (7.14)
 \end{aligned}$$

A continuación, probaremos que el lado derecho de (7.14) tiende a 0 si $h \rightarrow 0$. Para ello, si probamos la finitud de su primer sumando, podríamos determinar un r adecuado para el espacio de Sobolev periódico, análogamente con el segundo sumando. Así, determinaríamos un H_{per}^r donde habitaría $\partial_t^2 u(t)$. Para tal fin, probaremos que las series que representan cada uno de los sumandos de (7.14) son convergentes y por tanto la suma de estas series es convergente. Con ello acotaríamos la serie (7.13) con una serie convergente. Luego, por el M-Test de Weierstrass la serie (7.13) es convergente y el límite puede ingresar dentro de la norma en (7.12) obteniendo el resultado esperado.

En primer lugar, determinemos el espacio donde habita $\partial_t u(x)$. Para ello, recordemos que

$$u(t, \cdot) = C_1(t)(\varphi) + C_2(t)(\psi).$$

Ahora, como $C_1(t)(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \Phi_k$ entonces

$$\partial_t C_1(t)(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k) \text{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \Phi_k.$$

Así, debemos demostrar que

$$\left\| \frac{C_1(t+h)(\varphi) - C_1(t)(\varphi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k) \text{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \Phi_k \right\|_r \rightarrow 0 \quad (7.15)$$

si $h \rightarrow 0$ para un r adecuado. En efecto,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{C_1(t+h)(\varphi) - C_1(t)(\varphi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \Phi_k \right\|_r^2 = \\
 & = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{C_1(k, t+h)(\varphi) - C_1(k, t)(\varphi)}{h} + \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right|^2 \quad (7.16) \\
 & = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\cos(\sigma(k)(t+h)) \widehat{\varphi}(k) - \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k)}{h} \right. \\
 & \quad \left. + \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right|^2 \\
 & = \|\varphi\|_r^2 \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right|^2 \quad (7.17) \\
 & \leq 4\|\varphi\|_{r+2}^2 \\
 & \leq 4\|\varphi\|_s^2.
 \end{aligned}$$

La finitud es satisfecha siempre que $r + 2 \leq s$. Esto implica que el r adecuado satisface la desigualdad $r \leq s - 2$. Así, mediante el M-Test de Weierstrass, hemos demostrado que la serie (7.16) es convergente y por tanto el límite, cuando $h \rightarrow 0$, puede ingresar en la norma.

En segundo lugar, para

$$C_2(t)(\psi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \Phi_k$$

se tiene

$$\partial_t C_2(t)(\psi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \Phi_k.$$

Luego, debemos demostrar que

$$\left\| \frac{C_2(t+h)(\psi) - C_2(t)(\psi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \Phi_k \right\|_r \rightarrow 0 \quad (7.18)$$

si $h \rightarrow 0$, para un r adecuado. En efecto,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{C_2(t+h)(\psi) - C_2(t)(\psi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \Phi_k \right\|_r^2 = \\ & = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{C_2(k, t+h)(\psi) - C_2(k, t)(\psi)}{h} - \cos(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \right|^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} & = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t+h)) \widehat{\psi}(k) - \text{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k)}{\sigma(k)h} - \cos(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \right|^2 \\ & = \|\psi\|_r^2 \left| \frac{g(h) - g(0)}{h} - g'(0) \right|^2 \quad (7.20) \\ & \leq 4\|\psi\|_r^2 \\ & \leq 4\|\psi\|_{s-1}^2. \end{aligned}$$

De donde $\psi \in H_{per}^{s-1} \subseteq H_{per}^r$, siempre que $r \leq s-1$. Así, hemos acotado la serie (7.19) por una serie convergente. Por tanto, el límite, cuando $h \rightarrow 0$, puede ingresar dentro de la norma y obtener el resultado propuesto. Luego, la igualdad

$$\partial_t u(t, x) = C_1'(t)(\varphi) + C_2'(t)(\psi)$$

es satisfecha en H_{per}^r si $r \leq s-1$. En particular, podemos considerar $\partial_t u(t, x) \in H_{per}^{s-1}$.

En tercer lugar, veamos el espacio donde habita $\partial_t^2 u(t)$. Iniciemos con

$$\partial_t C_2(t)(\psi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \Phi_k.$$

Derivando parcialmente ambos lados de la igualdad tenemos

$$\partial_t^2 C_2(t)(\psi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -\sigma(k) \text{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \Phi_k.$$

Así, debemos demostrar que

$$\left\| \frac{\partial_t C_2(t+h)(\psi) - \partial_t C_2(t)(\psi)}{h} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \Phi_k \right\|_r \rightarrow 0 \quad (7.21)$$

si $h \rightarrow 0$. Lo cual fue parte del objetivo planteado al principio. Veamos

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial_t C_2(t+h)(\psi) - \partial_t C_2(t)(\psi)}{h} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \Phi_k \right\|_r^2 = \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t C_2(\widehat{k}, t+h)(\psi) - \partial_t C_2(\widehat{k}, t)(\psi)}{h} + \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \right|^2 \quad (7.22) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\cos(\sigma(k)(t+h)) \widehat{\psi}(k) - \cos(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k)}{h} + \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\psi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \widehat{\psi}(k) \right|^2 \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right|^2 \\ &= \|\psi\|_r^2 \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right|^2 \quad (7.23) \\ &\leq 4 \|\psi\|_{r+2}^2 \\ &\leq 4 \|\psi\|_{s-1}^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

para $r+2 \leq s-1$. Es decir, $r \leq s-3$. Así, podemos considerar $\partial_t^2 C_2(t)(\psi) \in H_{per}^{s-3}$. Luego, hemos acotado la serie (7.22) por una serie convergente. Por tanto, podemos intercambiar el límite y la norma en (7.21).

Finalmente, analicemos $\partial_t C_1(t)(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \Phi_k$. Así, derivando parcialmente tenemos

$$\partial_t^2 C_1(t)(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k)^2 \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \Phi_k.$$

Debemos demostrar que

$$\left\| \frac{\partial_t C_1(t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(t)(\varphi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k)^2 \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \Phi_k \right\|_r \rightarrow 0$$

si $h \rightarrow 0$, para un r adecuado. En efecto,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial_t C_1(t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(t)(\varphi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k)^2 \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \Phi_k \right\|_r^2 = \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t C_1(\widehat{k}, t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(\widehat{k}, t)(\varphi)}{h} + \sigma(k)^2 \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \sigma(k)^2 \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t+h)) \widehat{\varphi}(k) - \text{sen}(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k)}{\sigma(k)h} \right. \\ & \quad \left. + \sigma(k)^2 \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \sigma(k)^4 |\widehat{\varphi}(k)|^2 \left| \frac{g(h) - g(0)}{h} - g'(0) \right|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} k^4 |\widehat{\varphi}(k)|^2 4 \\ &\leq 4 \times 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} (1+k^2)^2 |\widehat{\varphi}(k)|^2 \\ &= 4 \times 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+4} |\widehat{\varphi}(k)|^2 \\ &= 4 \|\varphi\|_{r+4}^2 \\ &\leq 4 \|\varphi\|_s^2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

si $r+4 \leq s$. Así, $r \leq s-4$. En particular, $\partial_t^2 C_1(t)(\varphi) \in H_{per}^{s-4}$. Por tanto, la ecuación (7.11) es satisfecha en H_{per}^r , para $r \leq s-4$. En particular, en H_{per}^{s-4} . \square

La siguiente proposición demuestra la dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales.

Proposición 7.5 (Dependencia continua en compactos). *Sea $T \in \mathbb{R}$. Si $u = C_1(t)(\varphi) + C_2(t)(\psi)$ y $\tilde{u} = C_1(t)(\tilde{\varphi}) + C_2(t)(\tilde{\psi}) \in H_{per}^s$ son soluciones de (Q_1) , tales que $\varphi \xrightarrow{H_{per}^s} \tilde{\varphi}$ y $\psi \xrightarrow{H_{per}^{s-1}} \tilde{\psi}$, $u \xrightarrow{H_{per}^s} \tilde{u}$, para todo $t \in [0, T]$.*

Demostración. Consideremos la norma en H_{per}^r y determinemos el valor de r adecuado

$$\begin{aligned}
 \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_r^2 &= \left\| C_1(t)(\varphi) + C_2(t)(\psi) - \left(C_1(t)(\tilde{\varphi}) + C_2(t)(\tilde{\psi}) \right) \right\|_r^2 \\
 &= \left\| C_1(t)(\varphi - \tilde{\varphi}) + C_2(t)(\psi - \tilde{\psi}) \right\|_r^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| C_1(k, t)(\varphi - \tilde{\varphi}) + C_2(k, t)(\psi - \tilde{\psi}) \right|^2 \\
 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2 \left[\left| C_1(k, t)(\varphi - \tilde{\varphi}) \right|^2 + \left| C_2(k, t)(\psi - \tilde{\psi}) \right|^2 \right] \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2 \left[\left| \cos(\sigma(k)t) (\widehat{\varphi} - \widehat{\tilde{\varphi}})(k) \right|^2 + \left| \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} (\widehat{\psi} - \widehat{\tilde{\psi}})(k) \right|^2 \right] \\
 &\leq 2\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_r^2 + 4\pi \left[\sum_{0 \neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} (\widehat{\psi} - \widehat{\tilde{\psi}})(k) \right|^2 + t^2 \left| (\widehat{\psi} - \widehat{\tilde{\psi}})(0) \right|^2 \right] \\
 &\leq 2\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_r^2 + 4\pi \left[\sum_{0 \neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} \left| (\widehat{\psi} - \widehat{\tilde{\psi}})(k) \right|^2 + t^2 \left| (\widehat{\psi} - \widehat{\tilde{\psi}})(0) \right|^2 \right] \\
 &\leq 2\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_r^2 + 4\pi \left[\sum_{0 \neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} M(t) \left| (\widehat{\psi} - \widehat{\tilde{\psi}})(k) \right|^2 + M(t) \left| (\widehat{\psi} - \widehat{\tilde{\psi}})(0) \right|^2 \right] \\
 &\leq 2\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_r^2 + 2M(t) \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} \left| (\widehat{\psi} - \widehat{\tilde{\psi}})(k) \right|^2 \right] \\
 &= 2\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_r^2 + 2M(t) \|\psi - \tilde{\psi}\|_{r-1}^2,
 \end{aligned}$$

donde $M(t) = \max_{t \in [0, T]} \{1; t^2\}$. Así, si $r \leq s$ entonces

$$\sup_{t \in [0; T]} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_r^2 \leq 2\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_r^2 + 2M(t) \|\psi - \tilde{\psi}\|_{r-1}^2 < \infty. \quad (7.24)$$

En particular $r = s$ y $u \rightarrow \tilde{u}$ en H_{per}^s si $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ en H_{per}^s y $\psi \rightarrow \tilde{\psi}$ en H_{per}^{s-1} . \square

La siguiente proposición demuestra la unicidad de la solución.

Proposición 7.6. Sean $\varphi, \tilde{\varphi} \in H_{per}^s$ y $\psi, \tilde{\psi} \in H_{per}^{s-1}$. Si $u = C_1(t)(\varphi) + C_2(t)(\psi)$ y $\tilde{u} = C_1(t)(\tilde{\varphi}) + C_2(t)(\tilde{\psi})$ son soluciones de (Q_1) entonces $u = \tilde{u}$ en H_{per}^s .

Demostración. Usando la desigualdad (7.24), se tiene

$$0 \leq \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_s^2 \leq \sup_{t \in [0; T]} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_s^2 \leq 2 \left(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_s^2 + M(t) \|\psi - \tilde{\psi}\|_{s-1}^2 \right) \rightarrow 0.$$

\square

Corolario 7.1. La única solución del problema (Q_1) es

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\sigma(k)t) \hat{\varphi}(k) \right) \Phi_k(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \hat{\psi}(k) \right) \Phi_k(x),$$

donde $\varphi \in H_{per}^s$ y $\psi \in H_{per}^{s-1}$.

Corolario 7.2. Los operadores lineales $C_1(t) : H_{per}^s \rightarrow H_{per}^s$ y $C_2(t) : H_{per}^{s-1} \rightarrow H_{per}^{s-1}$ satisfacen

$$\|C_1(t)(\varphi)\|_s \leq \|\varphi\|_s$$

y

$$\|C_2(t)(\psi)\|_{s-1} \leq \|\psi\|_{s-1},$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \|C_1(t)(\varphi)\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| C_1(\widehat{k, t})(\varphi) \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right|^2 \\
 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{\varphi}(k) \right|^2 \\
 &= \|\varphi\|_s^2
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \|C_2(t)(\psi)\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| C_2(\widehat{k, t})(\psi) \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right|^2 \\
 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \frac{1}{k^2(1+k^2)} \left| \widehat{\psi}(k) \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \frac{1}{k^2} \left| \widehat{\psi}(k) \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{0 \neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \frac{1}{k^2} \left| \widehat{\psi}(k) \right|^2 + 2\pi \left| t\widehat{\psi}(0) \right|^2 \\
 &\leq 2\pi \sum_{0 \neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \left| \widehat{\psi}(k) \right|^2 + 2\pi \left| t\widehat{\psi}(0) \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \left| \widehat{\psi}(k) \right|^2 \\
 &= \|\psi\|_{s-1}^2.
 \end{aligned}$$

□

SECCIÓN 7.3

Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq no homogénea

En esta sección estudiaremos la buena colocación de la ecuación no homogénea de Boussinesq. La cual puede ser interpretado como la interacción de la onda con el medio que lo rodea. A continuación, planteamos la ecuación diferencial que describe el modelo del desplazamiento de ondas en aguas poco profundas, la cual muestra una respuesta a no ser desestabilizada.

Teorema 7.2. Sean $s \in \mathbb{R}$ y $T \in \mathbb{R}^+$ fijos, entonces el problema

$$(Q_2) \quad \begin{cases} u(t, x) \in C\left([0, T], H_{per}^s\right), \\ \partial_t^2 u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) - \partial_x^4 u(t, x) + F(t, x) \in H_{per}^{s-4}, \\ u(0, x) = \varphi(x) \in H_{per}^s, \\ \partial_t u(0, x) = \psi(x) \in H_{per}^{s-1}, \end{cases} \quad (7.25)$$

donde $F \in C\left([0, T], H_{per}^{s-1}\right)$, posee una única solución $u \in C\left([0, T], H_{per}^s\right)$ la cual depende continuamente de los datos iniciales.

Seguiremos los mismos pasos del caso homogéneo. Veamos la existencia de la solución.

Proposición 7.7. Si denotamos por $\sigma(k) = |k|(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}$, para $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) \right) \Phi_k(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right) \Phi_k(x) \\ & + \sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t - \tilde{t}))}{\sigma(k)} \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \Phi_k + \int_0^t (t - \tilde{t}) \widehat{F}(0, \tilde{t}) d\tilde{t} \quad (7.26) \end{aligned}$$

es solución de (Q_2) , donde $\Phi_k(x) = e^{ikx}$.

Demostración. Usando la transformada de Fourier obtenemos la familia de EDO

$$(\Omega_{2,k}) \left\{ \begin{array}{l} \widehat{u} \in C([0, T], \ell_{s-1}^2(\mathbb{Z})), \\ \partial_t^2 \widehat{u}(t, k) + (k^2 + 1)k^2 \widehat{u}(k, t) = \widehat{F}(k, t), \\ \widehat{u}(k, 0) = \widehat{\varphi}(k), \\ \partial_t \widehat{u}(k, 0) = \widehat{\psi}(k). \end{array} \right. \quad (7.27)$$

La solución del caso homogéneo es $\widehat{u}_h(k, t) = C_1(t)(\widehat{\varphi}) + C_2(t)(\widehat{\psi})$, donde $C_1(t) = \cos(\sigma(k)t)$ y $C_2(t) = \sigma(k)^{-1} \text{sen}(\sigma(k)t)$. A continuación, obtendremos una solución particular de la ecuación (7.27). Para ello, usaremos el método de variación de parámetros. Iniciemos considerando la siguiente función

$$\widehat{u}_p(k, t) = U(t)C_1(t) + V(t)C_2(t), \quad (7.28)$$

que satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} U'(t)C_1(t) + V'(t)C_2(t) = 0 \\ U'(t)C_1'(t) + V'(t)C_2'(t) = \widehat{F}(k, t). \end{array} \right.$$

Ahora, reemplazando las derivadas de $C_1(t)$ y $C_2(t)$ obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\sigma(k)t)U'(t) + \sigma(k)^{-1} \text{sen}(\sigma(k)t)V'(t) = 0 \\ -\sigma(k) \text{sen}(\sigma(k)t)U'(t) + \cos(\sigma(k)t)V'(t) = \widehat{F}(k, t), \end{array} \right.$$

para $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Ahora, el determinante del sistema es

$$\left| \begin{array}{cc} \cos(\sigma(k)t) & \sigma(k)^{-1} \text{sen}(\sigma(k)t) \\ -\sigma(k) \text{sen}(\sigma(k)t) & \cos(\sigma(k)t) \end{array} \right| = 1.$$

Así, $U'(t) = -\frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k, t)$ y $V'(t) = \cos(\sigma(k)t)\widehat{F}(k, t)$. Luego,

$$U(t) = \int_0^t -\frac{\text{sen}(\sigma(k)\tilde{t})}{\sigma(k)}\widehat{F}(k, \tilde{t})d\tilde{t} \quad \text{y} \quad V(t) = \int_0^t \cos(\sigma(k)\tilde{t})\widehat{F}(k, \tilde{t})d\tilde{t}. \quad (7.29)$$

Ahora, reemplacemos en (7.28)

$$\begin{aligned} \widehat{u}_p(k, t) &= \cos(\sigma(k)t) \int_0^t -\frac{\text{sen}(\sigma(k)\tilde{t})}{\sigma(k)}\widehat{F}(k, \tilde{t})d\tilde{t} + \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \int_0^t \cos(\sigma(k)\tilde{t})\widehat{F}(k, \tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \int_0^t \frac{-\text{sen}(\sigma(k)\tilde{t})\cos(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k, \tilde{t})d\tilde{t} + \int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)\cos(\sigma(k)\tilde{t})}{\sigma(k)}\widehat{F}(k, \tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)\cos(\sigma(k)\tilde{t}) - \text{sen}(\sigma(k)\tilde{t})\cos(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k, \tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t - \tilde{t}))}{\sigma(k)}\widehat{F}(k, \tilde{t})d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Si $k = 0$, $\widehat{u}_h(t, 0) = 1\widehat{\phi}(0) + t\widehat{\psi}(0)$. Así, $\widehat{u}_p(t, 0) = U(t)1 + V(t)t$. Aplicando el método de variación de parámetros obtenemos

$$\begin{cases} U'(t)1 + V'(t)t = 0 \\ U'(t)0 + V'(t)1 = \widehat{F}(0, t) \end{cases}$$

cuyo determinante es 1. Por tanto,

$$U(t) = \int_0^t -\tilde{t}\widehat{F}(0, \tilde{t})d\tilde{t} \quad \text{y} \quad V(t) = \int_0^t \widehat{F}(0, \tilde{t})d\tilde{t}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \widehat{u}_p(0, t) &= -\int_0^t \tilde{t}\widehat{F}(0, \tilde{t})d\tilde{t} + \int_0^t t\widehat{F}(0, \tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \int_0^t (t - \tilde{t})\widehat{F}(0, \tilde{t})d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\widehat{u}_p(t, k) = \begin{cases} \int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t - \tilde{t}))}{\sigma(k)} \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t}, & k \neq 0 \\ \int_0^t (t - \tilde{t}) \widehat{F}(0, \tilde{t}) d\tilde{t}, & k = 0. \end{cases}$$

Así, la solución de la ecuación no homogénea es

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) + \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right)}_{u_H(x,t):=} \Phi_k(x) \\ & + \underbrace{\sum_{0 \neq k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t - \tilde{t}))}{\sigma(k)} \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right)}_{u_P(x,t):=} \Phi_k(x) + \int_0^t (t - \tilde{t}) \widehat{F}(0, \tilde{t}) d\tilde{t}, \end{aligned}$$

donde u_H es la solución de la ecuación homogénea de (Q₂) y u_P es la solución particular de (Q₂). Como $\lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k)^{-1} \text{sen}(\sigma(k)(t - \tilde{t})) = t - \tilde{t}$, podemos definir

$$\sigma(k)^{-1} \text{sen}(\sigma(k)(t - \tilde{t})) \Big|_{k=0} = t - \tilde{t}$$

y reescribir la solución

$$u(t, x) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\sigma(k)t) \widehat{\varphi}(k) + \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right)}_{u_H(x,t)} \Phi_k(x) + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma(k)^{-1} G(k, t)}_{u_P(x,t)} \Phi_k(x),$$

$$\text{donde } G(k, t) = \int_0^t \text{sen}(\sigma(k)(t - \tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t}. \quad \square$$

La siguiente proposición muestra que nuestro candidato a solución pertenece a un espacio de Sobolev periódico de orden adecuado.

Proposición 7.8. Si $T \in \mathbb{R}^+$, un valor fijo, y $s \in \mathbb{R}$, entonces para $t \in [0, T]$

$$u_P(t) \in H_{per}^s \quad y \quad \|u_P(t)\|_s \leq T \|F\|_{s-1, \infty}, \quad (7.30)$$

donde $F \in C([0, T], H_{per}^{s-1})$ y $\|F\|_{s-1, \infty} := \sup_{t \in [0, T]} \|F(t)\|_{s-1}$.

Demostración. Para probar que $u_P(t) \in H_{per}^s$, usemos la norma en H_{per}^r .

$$\begin{aligned} \|u_P(t)\|_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r |\sigma(k)^{-1} G(k, t)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} \left| \int_0^t \text{sen}(\sigma(k)(t-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} \left(\int_0^t |\widehat{F}(k, \tilde{t})| d\tilde{t} \right)^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} \left(\int_0^t |\widehat{F}(k, \tilde{t})|^2 d\tilde{t} \right) t \\ &\leq t \times \int_0^t 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} |\widehat{F}(k, \tilde{t})|^2 d\tilde{t} \\ &= t \times \int_0^t \|F(\tilde{t})\|_{r-1}^2 d\tilde{t} \\ &\leq t \times \sup_{t \in [0, T]} \|F(t)\|_{r-1}^2 \int_0^t 1 d\tilde{t} \\ &= \|F\|_{r-1, \infty}^2 t^2 \\ &\leq T^2 \|F\|_{s-1, \infty}^2 \\ &< \infty, \end{aligned} \quad (7.31)$$

para $r \leq s$. Así, podemos considerar $u_P \in H_{per}^s$ y de (7.31) obtenemos (7.30). \square

El siguiente lema nos proporciona una estimativa que será usada para demostrar la continuidad del candidato a solución de la ecuación no homogénea de Boussinesq.

Lema 7.3. Si $T \in \mathbb{R}^+$, es un valor fijo, y $r \in \mathbb{R}$ entonces

$$\|u_P(t_1) - u_P(t_2)\|_r \leq 2\|F\|_{r-1}T,$$

para $t_1, t_2 \in [0, T]$, tales que $t_1 < t_2$.

Demostración. Consideremos la norma

$$\begin{aligned} \|u_p(t_1) - u_p(t_2)\|_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r |\sigma(k)^{-1}G(k, t_1) - \sigma(k)^{-1}G(k, t_2)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{(1+k^2)^r}{\sigma(k)^2} (|G(k, t_1)| + |G(k, t_2)|)^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} 2 \left[\left(\int_0^{t_1} |\widehat{F}(k, t')| dt' \right)^2 + \left(\int_0^{t_2} |\widehat{F}(k, t')| dt' \right)^2 \right] \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} 2 \left[\left(\int_0^{t_1} |\widehat{F}(k, t')|^2 dt' \right) t_1 + \left(\int_0^{t_2} |\widehat{F}(k, t')|^2 dt' \right) t_2 \right] \\ &\leq 2 \left[t_1 \times \int_0^{t_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} |\widehat{F}(k, t')|^2 dt' + t_2 \times \int_0^{t_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} |\widehat{F}(k, t')|^2 dt' \right] \\ &\leq 2 \left(t_1 \times \int_0^{t_1} \|F\|_{r-1}^2 dt' + t_2 \times \int_0^{t_2} \|F\|_{r-1}^2 dt' \right) \\ &= 2\|F\|_{r-1}^2 \left[t_1 \times \left(\int_0^{t_1} 1 dt' \right) + t_2 \times \left(\int_0^{t_2} 1 dt' \right) \right] \\ &= 2\|F\|_{r-1}^2 (t_1^2 + t_2^2) \\ &\leq 2\|F\|_{r-1}^2 (T^2 + T^2) \\ &\leq 4\|F\|_{r-1}^2 T^2 \end{aligned}$$

□

Proposición 7.9. Si $T \in \mathbb{R}^+$, es un valor fijo, y $s \in \mathbb{R}$ entonces $u_p \in C([0, T], H_{per}^s)$.

Demostración. Para $t_1, t_2 \in [0, T]$, tales que $0 < t_1 < t_2 < T$, debemos probar

$$\|u_P(t_1) - u_P(t_2)\|_s \rightarrow 0$$

si $t_1 \rightarrow t_2$. Ahora, recordemos que

$$\|u_p(t_1) - u_p(t_2)\|_r \leq 2\|F\|_{r-1}T \leq 2\|F\|_{s-1}T < \infty$$

siempre que $r \leq s$. En particular podemos considerar $r = s$. Usando el M-Test, hemos probado la convergencia uniforme de la serie que representa la norma. Por tanto, podemos intercambiar la suma infinita con el límite para obtener $\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \|u_P(t_1) - u_P(t_2)\|_s \rightarrow 0$, lo que prueba la continuidad. \square

El siguiente lema será usado para acotar la desigualdad (7.36).

Lema 7.4. Si $T \in \mathbb{R}$, es un valor fijo, $h, r \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\left\| u'_p(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \cos(\sigma(k)(t-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k \right\|_r \leq 2\|F\|_{r,\infty}T,$$

para todo $F \in (C([0, T]), H_{per}^{s-1})$.

Demostración. Veamos

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u_p(t+h) - u_p(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \cos(\sigma(k)(t-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k \right\|_r^2 = \\ & = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\widehat{u}_p(t+h) - \widehat{u}_p(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^t \cos(\sigma(k)(t-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right|_r^2 \\ & = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{G(k, t+h) - G(k, t)}{h\sigma(k)} - \int_0^t C_1(k, t-\tilde{t}) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right|_r^2 \end{aligned} \quad (7.32)$$

En este punto podemos proceder de dos formas para llegar a probar la desigualdad.

- Definamos la función

$$\eta(\tau) := \int_0^{t+\tau} \text{sen}(\sigma(k)(t - \tilde{t} + \tau)) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t}$$

para $\tau \in [0, h]$. G es continua en $[0, h]$ y diferenciable en $]0, h[$. Por el teorema del valor medio existe $c \in]0, h[$, tal que $h\eta'(c) = \eta(h) - \eta(0)$. Ahora, como

$$\begin{aligned} \eta'(\tau) &= \sigma(k) \int_0^{t+\tau} \cos(\sigma(k)(t + \tau - \tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \sigma(k) \int_0^{t+\tau} C_1(k, t + \widehat{c - \tilde{t}})(F(k, \tilde{t})) d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (7.32) tenemos

$$\begin{aligned} &= \left\| \frac{u_p(t+h) - u_p(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \cos(\sigma(k)(t - \tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k \right\|_r^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2 \left[\left| \int_0^{t+c} C_1(k, t + \widehat{c - \tilde{t}})(F(k, \tilde{t})) d\tilde{t} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t C_1(k, t + \widehat{c - \tilde{t}})(F(k, \tilde{t})) d\tilde{t} \right|^2 \right] \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2 \left[(t+c) \int_0^{t+c} \left| C_1(k, t + \widehat{c - \tilde{t}})(F(k, \tilde{t})) \right|^2 d\tilde{t} \right. \\ &\quad \left. + t \int_0^t \left| C_1(k, t + \widehat{c - \tilde{t}})(F(k, \tilde{t})) \right|^2 d\tilde{t} \right] \\ &\leq 2(t+c) \int_0^{t+c} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| C_1(k, t + \widehat{c - \tilde{t}})(F(k, \tilde{t})) \right|^2 d\tilde{t} \\ &\quad + 2t \int_0^t 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| C_1(k, t + \widehat{c - \tilde{t}})(F(k, \tilde{t})) \right|^2 d\tilde{t} \\ &= 2(t+c) \int_0^{t+c} \left\| C_1(t+c-\tilde{t})(F(k, \tilde{t})) \right\|_r^2 d\tilde{t} + 2t \int_0^t \left\| C_1(t+c-\tilde{t})(F(k, \tilde{t})) \right\|_r^2 d\tilde{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2(t+c) \int_0^{t+c} \|F(k, \tilde{t})\|_r^2 d\tilde{t} + 2t \int_0^t \|F(k, \tilde{t})\|_r^2 d\tilde{t} \\
 &\leq 2(t+c) \int_0^{t+c} \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|F(k, \tilde{t})\|_r^2 d\tilde{t} + 2t \int_0^t \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|F(k, \tilde{t})\|_r^2 d\tilde{t} \\
 &\leq 2\|F\|_{r, \infty}^2 ((t+c)^2 + t^2) \\
 &\leq 4\|F\|_{r, \infty}^2 T^2,
 \end{aligned}$$

donde $t+c, t \in [0, T]$.

- Usando el Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\begin{aligned}
 |G(k, t+h) - G(k, t)| &= \frac{1}{h} \left| \int_0^h \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_0^{t+s} \text{sen}(\sigma(k)(t - \tilde{t} + h)) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] ds \right| \\
 &= \frac{1}{h} \left| \int_0^h \left[\int_0^{t+s} \sigma(k) \cos(\sigma(k)(t - \tilde{t} + h)) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{h} \sigma(k) \int_0^h \left[\int_0^{t+s} |\cos(\sigma(k)(t - \tilde{t} + h)) \widehat{F}(k, \tilde{t})| d\tilde{t} \right] ds \\
 &\leq \frac{1}{h} \sigma(k) \int_0^h \left[\int_0^{t+s} |\widehat{F}(k, \tilde{t})| d\tilde{t} \right] ds \\
 &= \frac{1}{h} \sigma(k) h \int_0^{t+h} |\widehat{F}(k, \tilde{t})| d\tilde{t} \\
 &= \sigma(k) \int_0^{t+h} |\widehat{F}(k, \tilde{t})| d\tilde{t}
 \end{aligned}$$

Reemplazando en (7.32)

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{1}{h\sigma(k)} (G(k, t+h) - G(k, t)) - \int_0^t C_1(k, t - \tilde{t}) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left[\frac{1}{\sigma(k)} \left| \frac{G(k, t+h) - G(k, t)}{h} \right| + \left| \int_0^t C_1(k, t - \tilde{t}) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right| \right]^2 \\
 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left[\int_0^{t+h} |\widehat{F}(k, \tilde{t})| d\tilde{t} + \int_0^t |\widehat{F}(k, \tilde{t})| d\tilde{t} \right]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2 \left[\left(\int_0^{t+s} |\widehat{F}(k, \tilde{t})| d\tilde{t} \right)^2 + \left(\int_0^t |\widehat{F}(k, \tilde{t})| d\tilde{t} \right)^2 \right] \\
 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2 \left[(t+s) \int_0^{t+s} |\widehat{F}(k, \tilde{t})|^2 d\tilde{t} + t \int_0^t |\widehat{F}(k, \tilde{t})|^2 d\tilde{t} \right] \\
 &= 2 \left[(t+s) \int_0^{t+s} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r |\widehat{F}(k, \tilde{t})|^2 d\tilde{t} + \int_0^t 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r |\widehat{F}(k, \tilde{t})|^2 d\tilde{t} \right] \\
 &= 2 \left[(t+s) \int_0^{t+s} \|F(k, \tilde{t})\|_r^2 d\tilde{t} + t \int_0^t \|F(k, \tilde{t})\|_r^2 d\tilde{t} \right] \\
 &\leq 2 \left[(t+s) \int_0^{t+s} \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|F(k, \tilde{t})\|_r^2 d\tilde{t} + t \int_0^t \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|F(k, \tilde{t})\|_r^2 d\tilde{t} \right] \\
 &= 2 \|F\|_{r, \infty}^2 ((t+s)^2 + t^2) \\
 &\leq 2 \|F\|_{r, \infty}^2 2T^2 \\
 &= 4 \|F\|_{r, \infty}^2 T^2,
 \end{aligned}$$

donde $t+s, t \in [0, T]$.

En ambos casos basta con tomar la raíz cuadrada en ambos lados para obtener la desigualdad planteada. \square

La siguiente proposición nos muestra que la solución propuesta a la ecuación no homogénea de Boussinesq satisface la ecuación en un espacio de Sobolev de orden adecuado.

Proposición 7.10. Si $u = u_H + u_P \in C\left([0, +\infty[, H_{per}^s\right)$ entonces

$$\partial_t^2 u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) - \partial_x^4 u(t, x) + F(t, x),$$

en H_{per}^{s-4} .

Demostración. Para demostrar que $\partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) + F(t)$ en H_{per}^{s-4} , debemos

demostrar

$$\left\| \frac{\partial_t u(t+h) - \partial_t u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) + \partial_x^4 u(t) + F(t) \right\|_{s-4} \rightarrow 0 \quad (7.33)$$

si $h \rightarrow 0$. Para ello, consideremos la norma en H_{per}^r , a fin de determinar el valor de r adecuado. Veamos,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial_t u(t+h) - \partial_t u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) + \partial_x^4 u(t) + F(t) \right\|_r = \\ &= \left\| \frac{\partial_t u_H(t+h) - \partial_t u_H(t)}{h} - \partial_x^2 u_H(t) + \partial_x^4 u_H(t) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial_t u_P(t+h) - \partial_t u_P(t)}{h} - \partial_x^2 u_P(t) + \partial_x^4 u_P(t) + F(t) \right\|_r \\ &\leq \underbrace{\left\| \frac{\partial_t u_H(t+h) - \partial_t u_H(t)}{h} - \partial_x^2 u_H(t) + \partial_x^4 u_H(t) \right\|_r}_{u_H(t)} \\ & \quad + \underbrace{\left\| \frac{\partial_t u_P(t+h) - \partial_t u_P(t)}{h} - \partial_x^2 u_P(t) + \partial_x^4 u_P(t) + F(t) \right\|_r}_{u_P(t)} \end{aligned}$$

Para el caso de la norma de la solución de la ecuación homogénea, ya se demostró que esta tiende a 0 si h tiende a 0. Solo debemos probar que la norma, de la parte que representa a la solución particular de la ecuación, tiende a 0, cuando h tiende a 0. Para ello, trataremos de acotar la serie que representa esta norma.

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial_t u_P(t+h) - \partial_t u_P(t)}{h} - \partial_x^2 u_P(t) + \partial_x^4 u_P(t) + F(t) \right\|_r = \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u_p}(k, t+h) - \partial_t \widehat{u_p}(k, t)}{h} + \sigma(k)^2 \widehat{u_p}(t) - \widehat{F}(k, \tilde{t}) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u_p}(k, t+h) - \partial_t \widehat{u_p}(k, t)}{h} + \sigma(k)^2 \sigma(k)^{-1} G(k, t) - \widehat{F}(k, \tilde{t}) \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u_p}(k, t+h) - \partial_t \widehat{u_p}(k, t)}{h} - \left(-\sigma(k)G(k, t) + \widehat{F}(k, \tilde{t}) \right) \right|^2 \\
 &= \left\| \frac{\partial_t u_p(t+h) - \partial_t u_p(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\sigma(k)G(k, t) + \widehat{F}(k, t) \right) \Phi_k \right\|_r
 \end{aligned}$$

Analizaremos el caso de las derivadas de primer y segundo orden de la solución particular.

$$\begin{aligned}
 \partial_t \widehat{u_p}(k, t) &= \sigma(k)^{-1} G'(k, t) \\
 &= \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)\tilde{t})}{\sigma(k)} \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} - \cos(\sigma(k)t) \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{F}(k, t) \\
 &\quad + \cos(\sigma(k)t) \int_0^t \cos(\sigma(k)\tilde{t}) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \cos(\sigma(k)t) \widehat{F}(k, t) \\
 &= \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \int_0^t \operatorname{sen}(\sigma(k)\tilde{t}) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} + \cos(\sigma(k)t) \int_0^t \cos(\sigma(k)\tilde{t}) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \\
 &= \int_0^t \left(\operatorname{sen}(\sigma(k)t) \operatorname{sen}(\sigma(k)\tilde{t}) + \cos(\sigma(k)t) \cos(\sigma(k)\tilde{t}) \right) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \\
 &= \int_0^t \cos(\sigma(k)(t-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \tag{7.34}
 \end{aligned}$$

Así, obtenemos la representación en serie de Fourier

$$\partial_t u_p(k, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \cos(\sigma(k)(t-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k.$$

Para el caso de la derivada de segundo orden se tiene

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 \widehat{u_p}(k, t) &= \sigma(k) \cos(\sigma(k)t) \int_0^t \operatorname{sen}(\sigma(k)\tilde{t}) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} + \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{F}(k, \tilde{t}) \\
 &\quad - \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \int_0^t \cos(\sigma(k)\tilde{t}) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} + \cos(\sigma(k)t) \cos(\sigma(k)t) \widehat{F}(k, \tilde{t}) \\
 &= -\sigma(k) \int_0^t \operatorname{sen}(\sigma(k)(t-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} + \widehat{F}(k, t). \tag{7.35}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\partial_t^2 u_p(k, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\sigma(k)G(k, t) + \widehat{F}(k, t) \right) \Phi_k.$$

Ahora, veamos los espacios H_{per}^r para los cuales la derivada de primer y segundo orden son válidas. A continuación, usaremos el M-test de Weiertrass para probar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u_p(t+h) - u_p(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \cos(\sigma(k)(t-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k \right\|_r = 0. \quad (7.36)$$

Por el Lema 7.4 la serie que representa la norma es acotada por una serie convergente si $r \leq s-1$. Esto prueba que aquella serie converge uniformemente. Por tanto, el límite cuando $h \rightarrow 0$, puede ingresar en la norma y así

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u_p(t+h) - u_p(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \cos(\sigma(k)(t-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k \right\|_r = 0.$$

Ahora, analicemos el caso de la segunda derivada. Debemos demostrar

$$\left\| \frac{u_p'(t+h) - u_p'(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k)G(k, t)\Phi_k - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(k, t)\Phi_k \right\|_r \rightarrow 0$$

si h tiende a 0, para un r adecuado. Usaremos el M-Test de Weiertrass para probar la convergencia uniforme de la serie. Veamos,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u_p'(t+h) - u_p'(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-\sigma(k)G(k, t))\Phi_k - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(k, t)\Phi_k \right\|_r = \\ & = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\widehat{u}_p'(t+h) - \widehat{u}_p'(t)}{h} + \sigma(k)G(k, t) - \widehat{F}(k, t) \right|^2 \\ & = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{G'(k, t+h) - G'(k, t)}{h} + \sigma(k) \int_0^t C_2(k, t-\tilde{t}) (\widehat{F}(k, \tilde{t})) d\tilde{t} - \widehat{F}(k, t) \right|^2. \end{aligned}$$

La función

$$\kappa(\tau) = \int_0^{t+\tau} \cos(\sigma(k)(t+\tau-\tilde{t})) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t}$$

para $\kappa \in [0, h]$. κ es continua en $[0, h]$ y diferenciable en $]0, h[$. Así, por el Teorema del valor medio existe $c \in]0, h[$, tal que $h\kappa'(c) = \kappa(h) - \kappa(0)$. Ahora, como

$$\begin{aligned}\kappa'(\tau) &= -\sigma(k) \int_0^{t+\tau} \text{sen}(t + \tau - \tilde{t}) \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} + \widehat{F}(k, t + \tau) \\ &= -\sigma(k) \int_0^{t+\tau} C_2(k, t + \tau - \tilde{t}) \widehat{(F(k, \tilde{t}))} d\tilde{t} + \widehat{F}(k, t + \tau).\end{aligned}$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}& \left\| \frac{u'_p(t+h) - u'_p(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-\sigma(k)G(k, t))\Phi_k - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(k, t)\Phi_k \right\|_r \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| -\sigma(k) \int_0^{t+c} C_2(k, t+c-\tilde{t}) \widehat{(F(k, \tilde{t}))} d\tilde{t} + \widehat{F}(k, t+c) \right. \\ & \quad \left. + \sigma(k) \int_0^t C_2(k, t-\tilde{t}) \widehat{(F(k, \tilde{t}))} d\tilde{t} - \widehat{F}(k, t) \right|^2.\end{aligned}\tag{7.37}$$

Ahora, se sabe que para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se cumple $(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

Aplicándolo en (7.37), se tiene

$$\begin{aligned}& \leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 4 \left(\left| \sigma(k) \int_0^{t+c} C_2(k, t+c-\tilde{t}) \widehat{(F(k, \tilde{t}))} d\tilde{t} \right|^2 + \left| \widehat{F}(k, t+c) \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + \left| \sigma(k) \int_0^t C_2(k, t-\tilde{t}) \widehat{(F(k, \tilde{t}))} d\tilde{t} \right|^2 + \left| \widehat{F}(k, t) \right|^2 \right) \\ & \leq 4 \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \sigma(k)^2 (t+c) \int_0^{t+c} \left| C_2(k, t+c-\tilde{t}) \widehat{(F(k, \tilde{t}))} \right|^2 d\tilde{t} \right. \\ & \quad \left. + \left\| \widehat{F}(k, t+c) \right\|_r^2 + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \sigma(k)^2 t \int_0^t \left| C_2(k, t-\tilde{t}) \widehat{(F(k, \tilde{t}))} \right|^2 d\tilde{t} + \left\| \widehat{F}(k, t) \right\|_r^2 \right) \\ & \leq 4 \left((t+c) \int_0^{t+c} \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} \left| C_2(k, t+c-\tilde{t}) \widehat{(F(k, \tilde{t}))} \right|^2 \right) d\tilde{t} \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \|F(k, t+c)\|_r^2 + t \int_0^t \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} \left| C_2(k, t-\tilde{t}) \widehat{F(k, \tilde{t})} \right|^2 \right) d\tilde{t} + \|F(k, t)\|_r^2 \\
 & \leq 4 \left((t+c) \int_0^{t+c} \|C_2(t+c-\tilde{t})(F(k, \tilde{t}))\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|F(k, t)\|_r^2 \right. \\
 & \quad \left. + t \int_0^t \|C_2(t-\tilde{t})(F(k, \tilde{t}))\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|F(k, t)\|_r^2 \right) \\
 & \leq 4 \left((t+c) \int_0^{t+c} \|F(k, \tilde{t})\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + t \int_0^t \|F(k, \tilde{t})\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + 2 \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|F(k, t)\|_{r+2}^2 \right) \\
 & \leq 4 \left((t+c) \int_0^{t+c} \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|F(k, \tilde{t})\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + t \int_0^t \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|F(k, \tilde{t})\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + 2 \|F(k, t)\|_{r+2, \infty}^2 \right) \\
 & \leq 4 \left((t+c)^2 \|F\|_{r+2, \infty}^2 + 2 \|F\|_{r+2, \infty}^2 + t^2 \|F\|_{r+2, \infty}^2 \right) \\
 & \leq 4 \left(T^2 \|F\|_{r+2, \infty}^2 + 2 \|F\|_{r+2, \infty}^2 + T^2 \|F\|_{r+2, \infty}^2 \right) \\
 & \leq 8 \|F\|_{r+2, \infty}^2 (T^2 + 1) \\
 & < \infty
 \end{aligned}$$

si $r+2 \leq s-1$. Por tanto, por el M-Test de Weierstrass, hemos probado que la serie converge uniformemente. Luego, el límite puede ingresar en la norma. \square

Proposición 7.11 (Dependencia continua en compactos). Sean $u = u_H + u_P \in H_{per}^s$ y $\tilde{u} = \tilde{u}_H(t) + \tilde{u}_P(t) \in H_{per}^s$, tales que satisfacen

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 u(t, x) &= \partial_x^2 u(t, x) - \partial_x^4 u(t, x) + F_1(t, x) & \partial_t^2 \tilde{u}(t, x) &= \partial_x^2 \tilde{u}(t, x) - \partial_x^4 \tilde{u}(t, x) + F_2(t, x) \\
 u(0, x) &= \varphi(x) \in H_{per}^s & \tilde{u}(0, x) &= \tilde{\varphi}(x) \in H_{per}^s \\
 \partial_t u(0, x) &= \psi(x) \in H_{per}^{s-1} & \partial_t \tilde{u}(0, x) &= \tilde{\psi}(x) \in H_{per}^{s-1}.
 \end{aligned}$$

Si $F_1 \xrightarrow{H_{per}^{s-1}} F_2$, $\varphi \xrightarrow{H_{per}^s} \tilde{\varphi}$ y $\psi \xrightarrow{H_{per}^{s-1}} \tilde{\psi}$ entonces $u \xrightarrow{H_{per}^s} \tilde{u}$.

Demostración. Se debe tener en cuenta que la demostración solo depende de la dependencia

continua de la solución particular. Veamos,

$$\begin{aligned}
 \|u_P(t) - \tilde{u}_P(t)\|_r^2 &= \left\| \int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t-t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}_1(k, t') dt' - \int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t-t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}_2(k, t') dt' \right\|_r^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t-t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}_1(k, t') dt' - \int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t-t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}_2(k, t') dt' \right|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(1+k^2)^r}{\sigma(k)^2} \left| \int_0^t \text{sen}(\sigma(k)(t-t')) \widehat{F}_1(k, t') dt' - \int_0^t \text{sen}(\sigma(k)(t-t')) \widehat{F}_2(k, t') dt' \right|^2 \\
 &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left| \int_0^t \text{sen}(\sigma(k)(t-t')) (\widehat{F}_1 - \widehat{F}_2)(k, t') dt' \right|^2 \\
 &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left(\int_0^t \left| \text{sen}(\sigma(k)(t-t')) (\widehat{F}_1 - \widehat{F}_2)(k, t') \right| dt' \right)^2 \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left(\int_0^t \left| (\widehat{F}_1 - \widehat{F}_2)(k, t') \right| dt' \right)^2 \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left(\int_0^t \left| \widehat{(F_1 - F_2)}(k, t') \right| dt' \right)^2 \\
 &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left(\int_0^t \left| \widehat{(F_1 - F_2)}(k, t') \right|^2 dt' \right) t \\
 &= t \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left| \widehat{(F_1 - F_2)}(k, t') \right|^2 dt' \\
 &= t \int_0^t \|F_1(t') - F_2(t')\|_{r-1}^2 dt' \\
 &\int_0^t \sup_{t' \in [0, T]} \|F_1(t') - F_2(t')\|_{r-1}^2 dt' \\
 &\|F\|_{s-1, \infty}^2 \int_0^t 1 dt' \\
 &\leq \|F_1 - F_2\|_{r-1, \infty}^2 T^2 \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

si $r \leq s$. Luego, $\|u_P(t) - \tilde{u}_P(t)\|_r \leq \|F_1 - F_2\|_{s-1, \infty} T$.

Por tanto,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_P(t) - \tilde{u}_P(t)\|_s \leq \|F_1 - F_2\|_{s-1, \infty} T. \quad (7.38)$$

Así, $u \rightarrow \tilde{u}$ en H_{per}^s si $F_1 \rightarrow F_2$ en H_{per}^{s-1} . □

Corolario 7.3 (Unicidad de la solución). Sean $t \in [0, T]$, $u = u_H(t) + u_P(t) \in H_{per}^s$ y $\tilde{u} = \tilde{u}_H(t) + \tilde{u}_P(t) \in H_{per}^s$. Si u y \tilde{u} satisfacen la ecuación del problema (Q₂),

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) &= \partial_x^2 u(t, x) - \partial_x^4 u(t, x) + F_1(t, x) & \partial_t^2 \tilde{u}(t, x) &= \partial_x^2 \tilde{u}(t, x) - \partial_x^4 \tilde{u}(t, x) + F_2(t, x) \\ u(0, x) &= \varphi(x) \in H_{per}^s & \tilde{u}(0, x) &= \tilde{\varphi}(x) \in H_{per}^s \\ \partial_t u(0, x) &= \psi(x) \in H_{per}^{s-1} & \partial_t \tilde{u}(0, x) &= \tilde{\psi}(x) \in H_{per}^{s-1} \end{aligned}$$

entonces $u = \tilde{u}$ en H_{per}^s .

Demostración. Solo nos bastará probar que $u_P = \tilde{u}_P$ en H_{per}^s . En efecto, de (7.38) se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_P(t) - \tilde{u}_P(t)\|_s &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|u_P(t) - \tilde{u}_P(t)\|_s \\ &\leq \|F_1 - F_2\|_{s-1, \infty} T \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $u_P = \tilde{u}_P$. □

Corolario 7.4. La única solución de (Q₂) es

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\sigma(k)t) \hat{\varphi}(k) + \frac{\text{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \hat{\psi}(k) \right) \Phi_k(x) \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{\text{sen}(\sigma(k)(t-\tilde{t}))}{\sigma(k)} \hat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k(x), \end{aligned}$$

donde $\varphi \in H_{per}^s$, $\psi \in H_{per}^{s-1}$ y $F \in C([0, T], H_{per}^{s-1})$.

Conclusiones

En este trabajo, hemos demostrado con éxito la buena colocación de la ecuación de onda de Boussinesq de cuarto orden, en virtud de la elección directa de las distribuciones de los datos iniciales. Las soluciones de ondas comprenden dos tipos de ondas. Además, también se discute el caso no homogéneo de la ecuación de Boussinesq. Los resultados se pueden utilizar para comprender, a una profundidad constante, el comportamiento dinámico de las ondas en campos de ondas lineales. Teóricamente, el método aplicado en este trabajo también se utiliza para construir las soluciones de orden superior. Sin embargo, el aumento en la cantidad de cálculos es el mayor reto. Podemos también concluir que la ventaja de trabajar con las distribuciones periódicas radica en poder encontrar la cara de la solución de la ecuación.



Bibliografía

- [1] Rafael Iório Júnior, Valeria de Magalhães Iório. (2001) *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 19.
- [2] Boussinesq. J *Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquid continu dans 21 ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pures Appl. 17 (1872), N^o. 2, pp. 55–108.
- [3] Rafael Iório Júnior, Valeria de Magalhães Iório. (2002) *Fourier Analysis and partial Differential Equations*. (pp. 252–257) Cambridge, UK. Cambridge University.
- [4] Kato T. (1980) *Perturbation theory for linear operators*. 2nd Edition Springer–Verlag, Berlin.
- [5] Linares F., Ponce G. (2015) *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Springer Verlag–New York.

- [6] Linares F. (2007) *Ecuaciones dispersivas no lineales: caso Periódico*. XX escuela Venezolana de Matemática.
- [7] Liu Z. and Zheng S. (1999) *Semigroups associated with dissipative system*. Chapman Hall/CRC.
- [8] Muñoz Rivera, J.E. (2007) *Semigrupos e equações Diferenciais Parciais*. Petropolis-LNCC.
- [9] Pazy A. (1983) *Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences. 44 Springer Verlag. Berlín.
- [10] Yolanda Santiago (2003) *Sobre la analiticidad del semigrupo Co asociado a un sistema viscoelástico*. Pesquimat Vol (6), N°. 2, pp. 27-36.
- [11] Yolanda Santiago (2012) *Global existence and exponential stability for a coupled wave system*. Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications, Volumen (16), Issue N°. 1-2, pp. 29-46.
- [12] Yolanda Santiago, Santiago Rojas y Teofanes Quispe (2015) *Operadores m -disipativos y existencia de solución de un modelo de transporte de electrones*. Theorema, Segunda Época, Volumen (2), N° 3, pp. 13-34.
- [13] Yolanda Santiago, Santiago Rojas y Teofanes Quispe (2016) *Espacios de Sobolev periódico y un problema de Cauchy asociado a un modelo de ondas en un fluido viscoso*. Theorema, Segunda Época, Volumen (3), N° 4, pp. 7-23.
- [14] Yolanda Santiago y Santiago Rojas (2017) *Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit*. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society, Volumen (32), parte 2, pp. 207-230.
- [15] Yolanda Santiago y Santiago Rojas (2019) *Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev periódico*. Journal Selecciones Matemáticas.

Volumen (06), pp. 49-65.

- [16] Martha Timoteo y Yolanda Santiago (2014) *Sobre la existencia y unicidad de la solución de un modelo de propagación del sonido en un fluido compresible*. Revista Mat-Serie A Volumen (19), pp. 09-16.