



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Físicas

Escuela Profesional de Física

Solución de la ecuación de transferencia radiativa por el método de ordenadas discretas, diferencias finitas y la simulación del transporte de partículas por el método de Monte Carlo

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

AUTOR

Jonathan ACUÑA HUAMANÍ

ASESOR

Dr. Raúl Félix CARITA MONTERO

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Acuña, J. (2021). *Solución de la ecuación de transferencia radiativa por el método de ordenadas discretas, diferencias finitas y la simulación del transporte de partículas por el método de Monte Carlo*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Escuela Profesional de Física]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Hoja de metadatos complementarios

Código ORCID del autor	https://orcid.org/0000-0002-2282-3070
DNI o pasaporte del autor	44120417
Código ORCID del asesor	https://orcid.org/0000-0001-6275-5554
DNI o pasaporte del asesor	08385676
Grupo de investigación	Física aplicada y computacional en nuclear
Agencia financiadora	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vicerrectorado de Investigación y Posgrado. Programa de Promoción de Tesis de Pregrado. B17130524b-PTPGRADO.
Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.0453 Longitud: -77.0311
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Enero 2018 - Marzo 2021
Disciplinas OCDE	https://purl.org/perepo/ocde/ford#1.03.04



Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN FÍSICA

Siendo las 16:00 horas del martes 20 de julio del 2021, en la Sala de Sesión Virtual de la Facultad de Ciencias Físicas, bajo la Presidencia del Dr. Walter Flores Vega, el Dr. Fulgencio Villegas Silva (Miembro), el Dr. Raúl Félix Carita Montero (Asesor), y la Mg. Fanny Esmeralda Mori Escobar (Suplente), se dio inicio a la Sesión Pública de Sustentación de Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Física, del Bachiller:

Jonathan Acuña Huamaní

El Presidente del Jurado en primer lugar dio lectura al documento formal que designa al Jurado y aprueba el acto de sustentación de la Tesis, así como el Resumen del Expediente e invitó al citado Bachiller a realizar la presentación y exposición de su Tesis:

“Solución de la ecuación de transferencia radiativa por el método de ordenadas discretas, diferencias finitas y la simulación del transporte de partículas por el método de Monte Carlo”

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado, el Presidente del Jurado con el apoyo de la Unidad de Informática, invitó al Bachiller y al público a abandonar momentáneamente la Sala de Sesión Virtual, para dar paso a la deliberación y calificación por parte del Jurado.

Al término de la deliberación del Jurado el Dr. Walter Flores Vega invitó al candidato y al público en general a pasar a la Sala de Sesión Virtual, para dar lectura al Acta de Calificación, en cuyo contenido se ha registrado la nota obtenida por el bachiller, la misma que ha sido de:

18
(NÚMERO)

Dieciocho
(LETRAS)

Aprobado con Mención Honrosa
(MENCIÓN)

Habiendo concluido la Sustentación de la Tesis, el Presidente del Jurado, remitirá el Acta al Vicedecano Académico de la Facultad de Ciencias Físicas, quien la suscribirá dando fe de la realización del acto virtual de manera remota.

El Acta de Calificación será remitida al Director de la Escuela Profesional de Física quien a su vez solicitará la aprobación del Consejo de Facultad para el otorgamiento del Título Profesional de Licenciado en Física al Bachiller Jonathan Acuña Huamaní.



Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

Siendo las 5:36 p.m. se dio por concluido el acto académico, expidiéndose tres (03) Actas originales de la Sustentación de la Tesis.

Ciudad Universitaria, martes 20 de julio de 2021.

Dr. Walter Flores Vega
PRESIDENTE

Dr. Fulgencio Villegas Silva
MIEMBRO

Dr. Raúl Félix Carita Montero
ASESOR

Lic. Fanny Esmeralda Mori Escobar
SUPLENTE



Firmado digitalmente por ROJAS
ACUNA Joel FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 05.08.2021 10:47:23 -05:00

Dr. Joel Rojas Acuña
VICEDECANO ACADÉMICO - FCF

Datos de la plataforma virtual institucional del acto de sustentación:

Enlace zoom:

<https://us06web.zoom.us/j/82014919911?pwd=b1dYSWR1ekh6bTBRRFE1bU9mZTgwQT09>

ID de reunión: 820 1491 9911
Código de acceso: 947205

Grabación archivada en: <https://fb.watch/7bLCh4BMRb/>

*A mis padres e hijos que son el
motor y motivo para seguir
adelante.*

AGRADECIMIENTOS

Manifiesto a través de estas líneas un enorme agradecimiento a todas las personas tan generosas e instituciones que me apoyaron durante la realización del presente trabajo.

A la primera universidad que me acogió en sus aulas, mi alma mater, la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, que me brindó el espacio y las herramientas para lograr ser un profesional competitivo.

Al Dr. Raúl Félix Carita Montero, por el tiempo brindado, por la orientación y revisión del presente trabajo.

A mi esposa, por su comprensión, paciencia y apoyo moral en todos mis proyectos que tengo junto a ella.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	ii
Índice General	iii
Resumen	x
Abstract	xi
Capítulo 1	1
Introducción	1
1.1 Justificación del presente trabajo	2
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo general	2
1.2.2 Objetivos específicos	2
1.3 Revisión bibliográfica	3
1.4 Resumen de cada capítulo	5
Capítulo 2	7
Ecuación De Transferencia Radiativa	7
2.1 La Ecuación De Transferencia Radiativa (ETR)	7
2.1.1 Atenuación por absorción	8
2.1.2 Atenuación por dispersión	9
2.1.3 Incremento por emisión	11
2.1.4 Incremento por dispersión	12
2.2 Formulación de la ecuación de transferencia radiativa	14
Capítulo 3	18
Solución De La Ecuación De Transferencia Radiativa	18
3.1 El método de ordenadas discretas (MOD)	18
3.2 Formulación de la ecuación de transferencia radiativa en una dimensión	22
3.3 El método de diferencias finitas (MDF) en una dimensión	24
3.4 Algoritmo de la solución de la ecuación de transferencia radiativa	29
3.5 Solución analítica de la ecuación de transferencia radiativa para un medio absorbedor puro	31

Capítulo 4	32
El Método Monte Carlo (MC)	32
4.1 Historia del método Monte Carlo	32
4.2 Importancia del método Monte Carlo	33
4.3 Desventajas del método Monte Carlo	36
4.4 Paso de la radiación por una placa con el método Monte Carlo	37
Capítulo 5	46
Resultados	46
5.1 Problema 1: Absorción de la radiación sin dispersión en una placa infinita	46
5.1.1 Solución analítica del problema 1	47
5.1.2 Solución numérica del problema 1	50
5.1.3 Solución con el método Monte Carlo para el problema 1	57
5.2 Problema 2: Absorción y dispersión de la radiación en una placa infinita.	64
5.3 Problema 3: Absorción y dispersión de la radiación en en una barra heterogénea	66
5.3.1 Solución con el método Monte Carlo para el problema 3	67
5.3.2 Solución numérica del problema 3.	69
Capítulo 6	75
Conclusiones y Recomendaciones	75
Anexo 1	77
Apéndice	88
Referencias	90

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1:	Representación de la atenuación de la intensidad radiativa por el proceso de absorción.	9
Figura 2.2:	Representacion de la atenuacion de la intensidad radiativa por el proceso de dispersion.	10
Figura 2.3:	Representación del incremento de la intensidad radiativa por el proceso de emisión.	12
Figura 2.4:	Representacion de la atenuacion de la intensidad radiativa por el proceso de dispersión.	13
Figura 2.5:	Dirección de incidencia Ω^i y vector dispersado Ω^r	15
Figura 3.1:	Dirección definida en la esfera unitaria.....	19
Figura 3.2:	Orden de cuadratura 6, simetría S6.	22
Figura 3.3:	Modelo de una placa infinita.....	24
Figura 3.4:	Discretización del espacio.....	25
Figura 3.5:	El volumen e.	25
Figura 3.6:	Hemisferios I y II, y sus cosenos directores μ_l	26
Figura 3.7:	Representación en la frontera.	28
Figura 3.8:	Algoritmo del método numérico.....	30
Figura 4.1:	Modelo de aleación en forma de cuasi partículas.....	36
Figura 4.2:	Modelamiento en circuitos primarios.	36
Figura 4.3:	Fenómenos que pueden experimentar las partículas.	40
Figura 4.4:	Representación de un recorrido medio.....	42

Figura 4.5:	Diagrama de flujo para el transporte de la radiación en una placa infinita.	45
Figura 5.1:	Placa infinita muy absorbente.	46
Figura 5.2:	Número de partículas transmitidas (fotones) por cada centímetro de la placa homogénea para diferentes coeficientes de absorción que son obtenidos al resolver el problema 1.	48
Figura 5.3:	Error porcentual absoluto medio (MAPE) y el porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE) de los resultados obtenidos por los métodos numéricos (MDF y MOD).	55
Figura 5.4:	Comparación de los gráficos obtenidos del problema 1, resueltos con los métodos numéricos y el método analítico.	56
Figura 5.5:	Error porcentual absoluto medio (MAPE) y el porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE) de los resultados obtenidos por el método Monte Carlo.	60
Figura 5.6:	Comparación de los gráficos obtenidos del problema 1, resueltos con los métodos analíticos y Monte Carlo.	61
Figura 5.7:	Tiempo computacional para diferentes cantidades de fotones que ingresan a la placa (I_0): 10^4 , 10^5 , 10^6 , y 10^7	63
Figura 5.8:	Comparación de los gráficos obtenidos del problema 2, resueltos con los métodos numéricos y por el método Monte Carlo.	66
Figura 5.9:	Barra heterogénea con tres capas.	67
Figura 5.10:	Número de partículas transmitidas por cada centímetro de la barra heterogénea, resuelto con el método Monte Carlo.	68
Figura 5.11:	Tiempo computacional del código de Monte Carlo que resuelve el problema 3 para diferentes cantidades de fotones ($I(0)$): 10^4 , 10^5 , 10^6 , y 10^7	69
Figura 5.12:	Número de partículas transmitidas por cada centímetro de la barra heterogénea, resuelto con los métodos numéricos.	70

Figura 5.13: Comparación de los gráficos obtenidos del problema 3, resueltos con los métodos numéricos y por el método Monte Carlo....	71
Figura 5.14 : Sección del código que resuelve el problema 3, donde se remarca la iteración máxima a cambiar.	73
Figura 5.15: La convergencia del algoritmo usando los métodos numéricos para resolver el problema 3.	74

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 5.1:	Tabla de la cantidad de fotones (Ix) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σa), obtenidos al resolver el problema 1 con el método analítico.....	49
Tabla 5.2:	Tabla del conjunto de direcciones angulares en una dimensión llamados también cosenos directores μl con sus respectivos pesos de cuadraturas LSH S10, que discretiza el espacio angular. Estos datos fueron tomados de las revistas de investigación ([9], [28]).	51
Tabla 5.3:	Tabla de la cantidad de fotones (Ix) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σa), obtenidos al resolver el problema 1 con los métodos numéricos (MDF y MOD)	53
Tabla 5.4:	Tabla de la cantidad de fotones (Ix) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σa), obtenidos al resolver el problema 1 con el método analítico.y los métodos numéricos	54
Tabla 5.5:	Tabla de la cantidad de fotones (Ix) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σa), obtenidos al resolver el problema 1 con el método Monte Carlo.	58
Tabla 5.6:	Tabla de la cantidad de fotones (Ix) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σa), obtenidos al resolver el problema 1 con el método analítico y el método Monte Carlo.	59

Tabla 5.7:	Tabla de la cantidad de fotones (I_x) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σ_a), obtenidos al resolver el problema 1 con los métodos: analítico, numérico y Monte Carlo.	62
Tabla 5.8:	Tabla de la cantidad de fotones (I_x) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σ_a) y dispersión(σ_s), obtenidos al resolver el problema 2 con el método Monte Carlo y los métodos numéricos.....	65
Tabla 5.9:	Tabla de la cantidad de fotones transmitidos por cada centímetro de la barra heterogénea, resueltos con los métodos numéricos y Monte Carlo para el problema 3.	72
Tabla 5.10:	Tabla de la cantidad de partículas transmitidas por cada centímetro de la barra heterogénea para diferentes iteraciones usadas en el problema 3.	73

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia el transporte de la radiación cuando pasa por un medio donde experimenta los procesos de absorción y dispersión, la cual puede ser modelada por la Ecuación de Transferencia Radiativa (ETR). Para medios muy absorbentes y con dispersión nula, la ETR se convierte en una ecuación diferencial ordinaria con solución exacta. En medios donde ocurre los procesos de absorción y dispersión, la ETR es una ecuación integro diferencial sin solución exacta; por ende, para resolver esta ecuación se utilizó métodos numéricos (método de diferencias finitas y el método de ordenadas discretas). Además, se utiliza el método Monte Carlo (MC) que no resuelve explícitamente la ETR, sino modela el fenómeno de transporte que experimenta la radiación al pasar por cierto material, donde pueden ocurrir fenómenos de absorción y dispersión. Los resultados obtenidos cuando se aplicó el método Monte Carlo (MC) para resolver el problema de la placa infinita, muestra un error porcentual absoluto medio (MAPE) igual a 6.51%; mientras que, usando los métodos numéricos el MAPE es igual a 10.54%. A partir de estos resultados se concluye, que el código generado al usar el método Monte Carlo es más eficiente para resolver el problema de la placa infinita. Además, como conclusión general, se ha resuelto el problema del transporte de la radiación en una placa infinita y en una barra heterogénea. Los códigos generados en el presente trabajo son aceptables para su uso, ya que han sido validados teóricamente.

Palabras claves: Transferencia Radiativa, Monte Carlo, Métodos Numéricos.

ABSTRACT

In the present work The transport of radiation is studied when it passes through a medium experimenting the absorption and dispersion processes. This is modeled on the radiative transfer equation (RTE). For very absorbing mediums with null dispersion, the RTE becomes an ordinary differential equation with an exact solution. For mediums where absorption and dispersion processes occur, the RTE is an integro-differential equation without an exact solution, therefore, in order to solve this equation, numerical methods (finite difference method and discrete element method) will be used. Furthermore, the Monte Carlo method (CM) is used, although it does not explicitly solves the RTE, it models the transportation phenomenon experienced by radiation passing through a certain medium where both absorption and dispersion processes can occur. The results obtained when was applied the Monte Carlo method for the infinite plate problem show a mean absolute percentage error (MAPE) of 6.51%, meanwhile, the result using the numerical methods show a MAPE of 10.54%. From these results it is that the code generated by the Monte Carlo method is more efficient in order to solve the infinite plate problem. In conclusion, the problem of radiation transport in an infinite plate and in a heterogeneous bar has been solved. The codes generated in this study are acceptable for use since they have been theoretically validated.

Keywords: Radiative Transfer, Monte Carlo, Numerical Methods.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La radiación al interactuar con la materia experimenta muchos fenómenos que han sido estudiados por los físicos desde el siglo XIX, como por ejemplo el fenómeno de transporte que experimenta la radiación al pasar por materiales isotrópicos, donde las leyes físicas que describen su comportamiento ya son conocidas y son modeladas por la ecuación de transferencia radiativa (ETR).

La ETR se deduce de la ecuación de transporte de partículas, esta se basa en un principio fundamental de la naturaleza como la conservación de la energía. Además, la formulación matemática del transporte de partículas como los electrones, neutrones, fotones y demás partículas microscópicas se denomina generalmente teoría de transporte. Estos procesos son de suma importancia para la comprensión de diversos fenómenos físicos; por ello, es necesario entender de forma detallada el transporte de partículas en ciencias e ingeniería.

En el presente trabajo se usa la ETR para modelar el transporte de la radiación al pasar por una placa infinita; de tal manera, que cuando ocurre el proceso de absorción sin dispersión, la ETR tiene solución analítica (solución exacta) [9]. Sin embargo, cuando ocurre el proceso de absorción y dispersión en la placa, el fenómeno es complejo y la ETR no tiene solución exacta. En

consecuencia, se usa una aproximación por métodos numéricos (método de diferencias finitas y el método de ordenadas discretas). Además, se aplica el método Monte Carlo (MC) para simular el transporte de las radiaciones al pasar por una placa infinita y una barra heterogénea.

1.1 JUSTIFICACIÓN DEL PRESENTE TRABAJO

Es importante encontrar diferentes alternativas para resolver la Ecuación de Transferencia Radiativa (ETR) debido a que es muy utilizada en diferentes áreas de la ciencias. Por ello, en el presente trabajo se aplica el método Monte Carlo (MC), cuyos resultados explican con gran exactitud el paso de la radiación por una placa infinita que posee coeficientes de absorción y dispersión.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

Resolver el problema del transporte de la radiación cuando esta pasa por una placa infinita y una barra heterogénea con la ecuación de transferencia radiativa (ETR) y con el método Monte Carlo (MC).

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Generar códigos donde se aplique el método Monte Carlo (MC) que resuelva el problema del transporte de la radiación en una placa infinita y una barra heterogénea que tienen un medio absorbente y dispersor de la radiación.

2. Comparar los resultados obtenidos al aplicar el método Monte Carlo con los métodos numéricos para determinar cuál es el método más eficiente para resolver el problema del transporte de la radiación en una placa infinita.
3. Determinar la cantidad de iteraciones necesarias para la convergencia del algoritmo, aplicando los métodos numéricos para una barra heterogénea que tiene un medio absorbente y dispersor de la radiación.

1.3 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En la presente sección se describe un conjunto de referencias sobre publicaciones de carácter científico, relacionado con los temas más importantes usados en el presente trabajo.

- La Ecuación de transferencia radiativa (ETR) tiene diferentes aplicaciones como por ejemplo en ingeniería mecánica, transferencia de calor [2], astrofísica, teledetección [3], física atmosférica [4], análisis de un reactor nuclear [5]. Además, sus soluciones numéricas se encuentran en [1].
- La solución de la parte angular de la ETR usando el método de ordenadas discretas (MOD) fue realizado por FIVELAND W.A [6], donde utiliza una función de fase dependiente de polinomios de Legendre que es reducida a los productos de los cosenos directores. Además, el uso de flujos que

entran y salen de las fronteras en una porción de longitud (método de diferencias finitas (MDF)) también fue realizado por FIVELAND W.A [7].

- Una fuente de avances matemáticos y computacionales donde se modela la ETR para la obtención de imágenes en tomografía óptica se encuentra en [8].
- Un problema de reconstrucción de imágenes de un medio heterogéneo en dos dimensiones es resuelta por la ETR, donde se aplica los métodos numéricos (MDF, MOD) y el método de *Levenberg-Marquardt* para la formación de las imágenes [9].
- El fenómeno de la propagación del calor a través de la radiación cuando esta se transmite por medios participantes [10] y el paso de la radiación por las atmósferas estelares [11], son modelados por la ETR.
- Un problema de propagación de la luz en un medio biológico multicapa se soluciona con la ETR y el método Monte Carlo (MC). Se calcula los flujos transmitidos en medios realísticos [12].
- El MC tiene diferentes aplicaciones en diversas áreas como las finanzas [13], el cálculo de la integral definida [31], el transporte de partículas [24] entre otros.

- Un problema para simular la dispersión de la luz en el tiempo cuando atraviesa medios biológicos en una región plana es modelado por el MC [14].
- El cálculo de dosis en radioterapia usando el transporte de partículas con el MC fue patentado en Estados Unidos para el transporte de neutrones, protones, deuterones, tritones, helio-3, partículas alfa, fotones, electrones y positrones [15].
- En el laboratorio de instrumentación y física experimental de partículas , se usa un software llamado GEANT4 basado en el MC para el cálculo de dosis en fantomas antropomórficos [16].

1.4 RESUMEN DE CADA CAPÍTULO

En el capítulo 1 se desarrolla la introducción, justificación, objetivo general y objetivos específicos del presente trabajo.

En el capítulo 2 se presentan los antecedentes, definición, propiedades y sus aplicaciones de la Ecuación de Transferencia Radiativa (ETR).

En el capítulo 3 se muestra la solución de la ETR por el método de diferencias finitas (MDF) y el método de ordenadas discretas (MOD) con su respectivo

algoritmo. Además, se presenta la solución analítica de la ETR para un medio absorbedor puro.

En el capítulo 4 se muestra el origen, la importancia y aplicaciones del método Monte Carlo (MC) para modelar el fenómeno físico. Además, se presenta un análisis del paso de las partículas a través de una placa infinita.

En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos de tres problemas que son resueltos con los métodos: numéricos (MDF, MOD), analítico y Monte Carlo.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones a partir de los resultados obtenidos por los métodos: numéricos (MDF, MOD), analítico y Monte Carlo.

CAPÍTULO 2

ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

2.1 LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA (ETR)

La ecuación de transferencia radiativa (ETR) es una ecuación que se deduce de la ecuación de transporte de Boltzmann y cuya expresión matemática es dada por la ec. (2.6). La ETR modela el transporte de los fotones dentro de un medio de tal manera que una de las posibles alternativas para resolver esta ecuación es usando los métodos numéricos (MDF y MOD). Estos métodos describen el comportamiento de la intensidad radiativa por cada elemento de volumen y en todas las direcciones del espacio, siendo esta afectada por los procesos de absorción, emisión y dispersión. Por otro lado, cuando la radiación es transmitida por el material, esta puede aumentar o disminuir su intensidad. La atenuación de la intensidad es debido al proceso de absorción y dispersión, generando que aumente la energía interna. Además, una forma de incrementar la intensidad radiativa es por medio de la emisión de energía de los volúmenes que se encuentran en el entorno y de la contribución de los rayos procedentes de otras direcciones ([26], [35]).

A continuación se describe de forma individual las diferentes formas de la atenuación e incremento de la intensidad radiativa dado por los procesos de absorción, dispersión y emisión.

2.1.1 ATENUACIÓN POR ABSORCIÓN

La radiación monocromática al interactuar con un medio homogéneo puede ser atenuada por el fenómeno de absorción. Se ha verificado empíricamente que la intensidad de radiación absorbida es directamente proporcional a la intensidad de radiación incidente y a la vez es directamente proporcional a la distancia que viaja los fotones a través del medio [26]. Una forma de expresarla cuantitativamente es:

$$dI = -\sigma_a I dx. \quad (2.1)$$

Donde:

σ_a : Coeficiente de absorción lineal.

dI : Diferencial de la intensidad de radiación absorbida.

I : Intensidad radiativa incidente.

dx : Diferencial de longitud.

El signo negativo de la ec (2.1) representa una disminución de la intensidad radiativa, de tal manera que al integrar sobre todo el espesor x (Figura 2.1) la ecuación queda expresada por:

$$I = I_0 e^{-\sigma_a x}. \quad (2.2)$$

Donde:

I : Intensidad de la radiación transmitida.

I_0 : Intensidad de la radiación incidente.

σ_a : Coeficiente de absorción lineal.

Atenuación por absorción

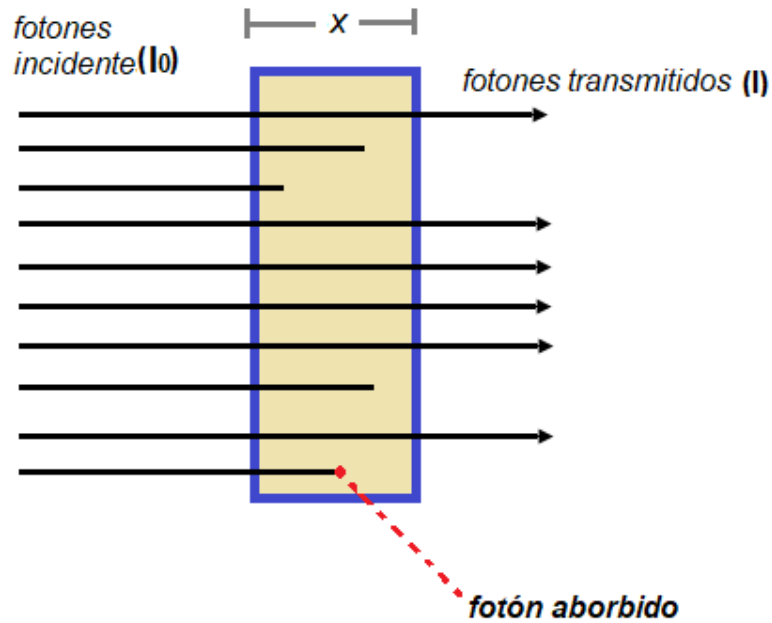


Figura 2.1: Representación de la atenuación de la intensidad radiativa por el proceso de absorción.

2.1.2 ATENUACIÓN POR DISPERSIÓN

La radiación al interactuar con un medio puede ser atenuada por el fenómeno de la dispersión, cuyo proceso es muy parecido al fenómeno de absorción. La atenuación por dispersión consiste en que una fracción de la intensidad incidente es cambiada a otra dirección de propagación; por ende, la intensidad radiativa dispersada genera un incremento de la intensidad, en otro elemento de volumen. Este fenómeno se representa por:

$$dI_{sca} = -\sigma_s I dx. \quad (2.3)$$

Donde:

dI_{sca} : Diferencial de la intensidad de radiación dispersada.

σ_s : Coeficiente de dispersión.

I : Intensidad radiativa incidente.

dx : Diferencial de longitud.

La ec. (2.3) tan solo es válida para una radiación monocromática y para un medio homogéneo. El signo negativo representa una disminución de la intensidad radiativa.

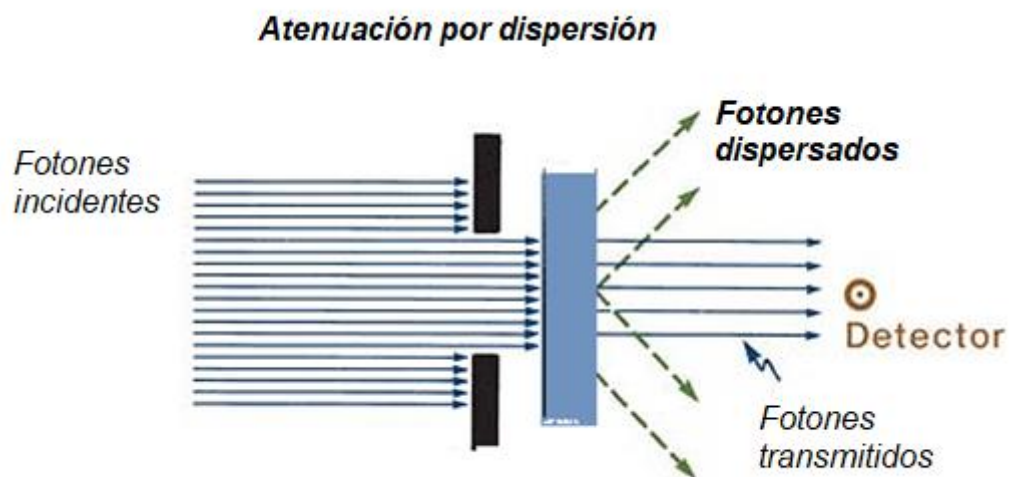


Figura 2.2: Representación de la atenuación de la intensidad radiativa por el proceso de dispersión.

Una de las principales diferencias entre la atenuación por absorción y dispersión es que la intensidad absorbida por un elemento de volumen se transforma en un aumento de su energía interna; mientras que, la intensidad dispersada es redireccionada apareciendo como un incremento de energía en otro volumen.

La atenuación total que esta dada por los procesos de absorción y dispersión es llamada “extinción”, de tal manera que su coeficiente de extinción se define como:

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_s. \quad (2.4)$$

Donde:

σ : Coeficiente de extinción total.

σ_a : Coeficiente de absorción lineal.

σ_s : Coeficiente de dispersión lineal.

2.1.3 INCREMENTO POR EMISIÓN

Al pasar la radiación por un elemento de volumen (dV), esta intensidad de radiación puede incrementarse en dI_{em} , debido a la emisión de energía de los volúmenes que se encuentran alrededor de dV (Figura 2.3). Además, la intensidad emitida en todo el trayecto dI_{em} es proporcional a la distancia recorrida y a la intensidad radiativa incidente [26].

$$dI_{em} = \sigma_e I dx. \quad (2.5)$$

Donde:

I : Intensidad radiativa incidente.

σ_e : Coeficiente de emisión.

dI_{em} : Diferencial de intensidad emitida.

dx : Diferencial de longitud.

La constante de proporcionalidad (σ_e) de la ec (2.4) es la misma que la constante de la ec (2.1); por ende, el coeficiente de absorción y de emisión son los mismos.

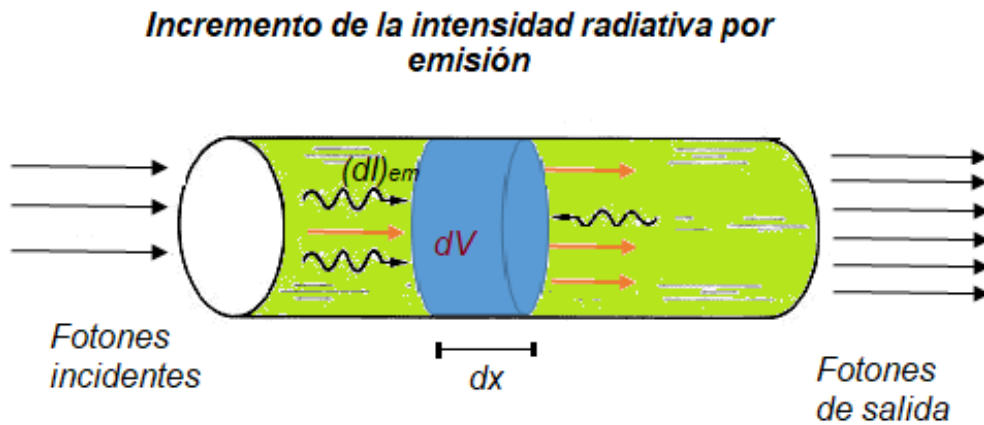


Figura 2.1.3: Representación del incremento de la intensidad radiativa por el proceso de emisión.

2.1.4 INCREMENTO POR DISPERSIÓN

EL incremento de la intensidad radiativa por dispersión consiste en una aportación que proviene de todas las direcciones en donde la intensidad fue dispersada, de manera que debe ser determinada integrando todo el espacio angular. En la Figura 2.4 se muestra una representación de cómo el flujo dispersado que proviene de otra dirección incide sobre un elemento de volumen, de tal manera que cambia su dirección al pasar por el medio.

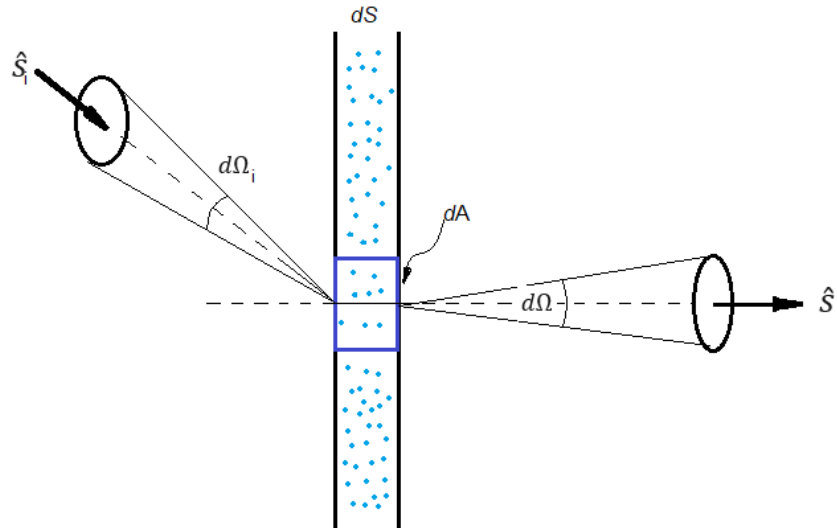


Figura 2.4: Representación de la atenuación de la intensidad radiativa por el proceso de dispersión.

En las secciones precedentes se han estudiado el incremento y la atenuación de la intensidad radiativa cuando esta pasa por un medio material. En la siguiente sección se procede a modelar el transporte de la radiación usando la ETR. Se considera como datos, la geometría del cuerpo, los coeficientes de dispersión y absorción, la fuente de radiación y las características de la frontera. Entonces, se puede calcular la intensidad de radiación en cualquier punto del medio material. Este problema es conocido como el “problema directo” que se presenta a continuación.

2.2 FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

La ecuación de transferencia radiativa (ETR) se basa en el principio de la conservación de la energía, estimando la intensidad de energía que gana y que pierde en un pequeñísimo volumen. Matemáticamente es llamada ecuación de Boltzman, la cual es utilizada en los fundamentos teóricos de la radiación de calor [10] y esta expresada por:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial I(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t) + \sigma_t(\vec{r}, \lambda) I(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t) = \int_0^\infty \sigma_s(\vec{r}, \lambda' \rightarrow \lambda, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) I(\vec{r}, \lambda', \vec{\Omega}', t) d\lambda' d\vec{\Omega}' + S(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t). \quad (2.6)$$

Donde:

$I(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t)$: Intensidad en la ubicación \vec{r} , para una longitud de onda λ , con dirección $\vec{\Omega}$, en un tiempo t determinado, con unidades de $(sr^{-1}m^{-2}w)$.

T : Espacio temporal, dado en segundos (s).

$d\vec{\Omega}'$: Diferencial de la dirección incidente $\vec{\Omega}'$, dado en estereorradianes (sr).

V : Rapidez de la radiación en la placa, dado en (m/s).

$\sigma_a(\vec{r}, \lambda)$: Absorción en la ubicación \vec{r} , para una longitud de onda λ , dado en (m^{-1}) .

$\sigma_s(\vec{r}, \lambda)$: Dispersión en la ubicación \vec{r} , para una longitud de onda λ , dado en (m^{-1}) .

$\sigma_t(\vec{r}, \lambda)$: Extinción total en la ubicación \vec{r} para una longitud de onda λ , dado en (m^{-1}).

\vec{r} : Posición, dada en metros (m).

λ : Longitud de onda, dada en metros (m).

$\vec{\Omega}$: Dirección angular dispersada, dada en (sr).

$\vec{\Omega}'$: Dirección angular incidente, dada en (sr).

Γ^2 : Representa la totalidad de direcciones $\vec{\Omega}$, unidad (sr).

$S(\vec{r}, \lambda, \vec{\Omega}, t)$. Representa la fuente de radiación en la placa material, en la posición \vec{r} , para una longitud de onda λ , con dirección $\vec{\Omega}$, en un determinado tiempo t, unidad ($sr^{-1}m^{-3}w$).

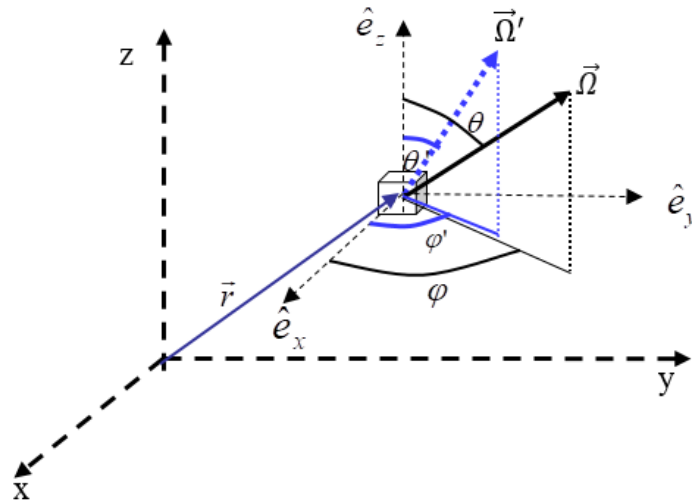


Figura 2.5: Dirección de incidencia $\vec{\Omega}'$ y vector dispersado $\vec{\Omega}$.

En la Figura 2.5 se muestra un elemento de volumen donde se representa la dirección angular de incidencia $\vec{\Omega}'$ y dispersado $\vec{\Omega}$. Por otro lado, la interpretación física de los términos de la ec (2.6) son: El primer término está asociado a la pérdida de la intensidad en el tiempo en un elemento de volumen. El segundo término representa pérdida de intensidad en el volumen de estudio. El tercer término representa pérdida de intensidad por extinción. El cuarto término es la ganancia por dispersión. El quinto término es la ganancia debido a una fuente ubicada en la placa.

Supongamos que pasa una radiación monocromática por un medio, por ende la dependencia de energía (λ) desaparece, además si consideramos que se encuentra en un estado estacionario (no cambia la intensidad radiativa en el transcurso del tiempo), entonces el 1er término de la ec (2.6) desaparece, junto al tiempo t en cada intensidad I . Por lo que la ec (2.6) es reescrita como:

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sigma_t(\vec{r})I(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int \sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})I(\vec{r}, \vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' + S(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (2.7)$$

donde $I(\vec{r}, \vec{\Omega})$ es la intensidad de la radiación sin dependencia de la energía en la posición \vec{r} y en la dirección angular $\vec{\Omega}$, $S(\vec{r}, \vec{\Omega})$ es la fuente dentro del medio [1]. Por otro lado, aplicando el método de separación del espacio y el ángulo, se escribe la dispersión (σ_s) como:

$$\sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \sigma_s(\vec{r}) \frac{\phi(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})}{4\pi}, \quad (2.8)$$

donde $\phi(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$ es la función de fase que depende de la dirección angular, además esta función se encuentra aproximada por polinomios de Legendre. Por otro lado, el coeficiente de dispersión depende del espacio representado por $\sigma_s(\vec{r})$ [7]. De esta manera la ec (2.7) queda expresada por:

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sigma_t(\vec{r}) I(\vec{r}, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (2.9)$$

con:

$$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\sigma_s(\vec{r})}{4\pi} \int \phi(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) I(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + S(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (2.10)$$

En este caso la integral de la ec (2.10) es la ganancia de la radiación incidente $\vec{\Omega}'$ llamada (*in-scattering*), que se encuentra desviada en la dirección de estudio $\vec{\Omega}$ (Figura 2.5). El segundo término $S(\vec{r}, \vec{\Omega})$ es la fuente en la posición \vec{r} y dirección $\vec{\Omega}$.

CAPÍTULO 3

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

En el presente capítulo se desarrolla la solución de la Ecuación de Transferencia Radiativa (ETR) en una dimensión, usando métodos numéricos como el método de diferencias finitas (MDF) para la parte espacial y el método de ordenadas discretas (MOD) para la parte integral. Posteriormente, se obtiene una solución analítica de la ETR que es válido solo para medios donde ocurre el proceso de absorción pura.

3.1 EL MÉTODO DE ORDENADAS DISCRETAS (MOD)

El MOD es llamado también método " S_N " que consiste en que la variable angular se discretiza en un pequeño número de direcciones o rayos, de tal manera que la ETR se expresa para cada rayo, incluyendo distintos términos de acoplamiento que describen transferencia de rayo a rayo. Este método es el más popular, así como uno de los enfoques más directos para cálculos numéricos de transporte [1].

Se procede a simplificar los pasos más importantes del enfoque de ordenadas discretas para resolver la ec (2.9) de la siguiente manera:

i. Se discretiza la dirección angular ($\vec{\Omega} \in \Gamma^2$) en L_0 direcciones. Para ello, se escoge un conjunto de “ L_0 ” direcciones discretas o rayos $\vec{\Omega}_l$ con $l = 1, 2, \dots, L_0$ y sus pesos de cuadraturas correspondientes w_1, w_2, \dots, w_{L_0} (cada peso es represento por una pequeña área sobre una esfera unitaria).

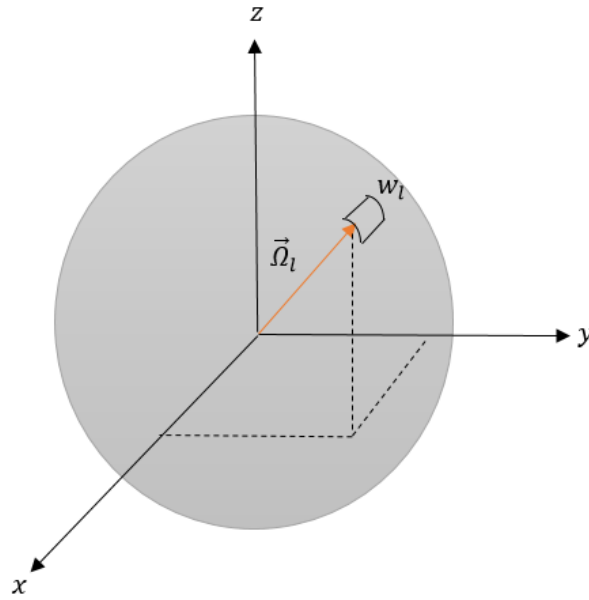


Figura 3.1: Dirección definida en la esfera unitaria.

ii Usando las direcciones ($\vec{\Omega}_l$) y sus respectivos pesos de cuadratura (w_l) que se escogieron en el paso i, entonces el primer término de la ec (2.10) que es la integral en todo el ángulo sólido, se aproxima a una sumatoria de direcciones definidas como cuadratura numérica y se expresa como:

$$\int \Phi(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) I(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \approx \sum_{m=1}^{L_0} w_m \Phi(\vec{\Omega}_m, \vec{\Omega}_l) I(\vec{r}, \vec{\Omega}_m). \quad (3.1)$$

Donde:

w_m : Es el peso para cada dirección $\vec{\Omega}_m$. Se representa por una pequeña área sobre una esfera unitaria.

$\sum_{m=1}^{L_0} w_m = 4\pi$: Área de una esfera unitaria.

iii Se evalúa la ETR de la ec (2.9) en cada una de las direcciones discretas ($\vec{\Omega}_l$). En coordenadas cartesianas las direcciones discretas ($\vec{\Omega}_l$) se pueden expresar por sus componentes en los tres ejes x, y, z, llamados cosenos directores (μ_l, ξ_l, η_l), dados por:

$$\vec{\Omega}_l = \mu_l \cdot \hat{e}_x + \xi_l \cdot \hat{e}_y + \eta_l \cdot \hat{e}_z, \text{ con } \mu_l^2 + \xi_l^2 + \eta_l^2 = 1, \quad (3.2)$$

$$\vec{r} = x \cdot \hat{e}_x + y \cdot \hat{e}_y + z \cdot \hat{e}_z \text{ y} \quad (3.3)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z. \quad (3.4)$$

De esta manera, las ecuaciones (2.9) y (2.10) quedan aproximadas por:

$$\mu_l \frac{\partial I_l(\vec{r})}{\partial x} + \xi_l \frac{\partial I_l(\vec{r})}{\partial y} + \eta_l \frac{\partial I_l(\vec{r})}{\partial z} + \sigma_l I_l(\vec{r}) = Q_l(\vec{r}), \quad (3.5)$$

con $l = 1, 2, \dots, L_0$.

$$Q_l(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{L_0} \frac{\sigma_s(\vec{r})}{4\pi} w_m \phi_{l,m} I_m(\vec{r}) + S_l(\vec{r}). \quad (3.6)$$

Donde:

$$\phi_{l,m} = \phi(\vec{\Omega}_m, \vec{\Omega}_l) = 1 \text{ para el caso de dispersión isotrópica [7].}$$

La dirección del primer octante (μ_l, ξ_l, η_l) define las direcciones en los otros octantes: $(-\mu_l, \xi_l, \eta_l)$, $(-\mu_l, -\xi_l, \eta_l)$, $(\mu_l, -\xi_l, \eta_l)$, $(\mu_l, \xi_l, -\eta_l)$, $(-\mu_l, \xi_l, -\eta_l)$, $(-\mu_l, -\xi_l, -\eta_l)$ y $(\mu_l, -\xi_l, -\eta_l)$ que corresponde al segundo, tercer, cuarto, quinto, sexto, séptimo y octavo octante respectivamente. Así los puntos colocados en el primer octante, permite conocer los puntos colocados en los otros octantes en una esfera unitaria [33].

En la Figura 3.2 se muestran los vértices del triángulo en la superficie esférica que están formadas por las intersecciones de cada nivel de los tres ejes, donde se cumple que el número de vértices en un octante es $N(N+2)/8$, que define el acercamiento S_N de la ordenada discreta.

Existen diferentes conjuntos de cuadraturas ([7], [25]) en el nivel de cuadratura simétrico, que tiene un excelente rendimiento cuando trabajamos con dispersión isotrópica (dispersión por igual en todas las direcciones). Entonces, en la cuadratura con $N = 10$, en tres dimensiones se tiene $N(N+2)=120$ puntos y para

dos dimensiones $N(N+2)/2=60$ puntos, pues no se considera el tercer eje representado por η_l .

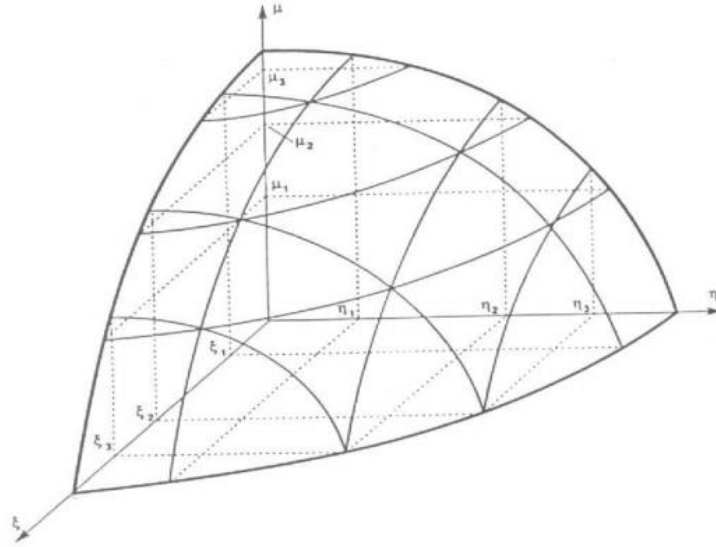


Figura 3.2: Orden de cuadratura 6, simetría S6.

3.2 FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA EN UNA DIMENSIÓN

En la sección precedente se llegó a reducir la Ecuación de transferencia Radiativa (ETR) a la ec (3.5) y (3.6) usando el método de ordenadas discretas (MOD). En la presente sección se formula la ETR en una dimensión, considerando un régimen estacionario con independencia espectral, con simetría azimutal, en un medio isotrópico y sin fuentes [33]. Por consiguiente, la ETR queda expresada por:

$$\mu_l \frac{dI_l(x)}{dx} + \sigma_t(x)I_l(x) = Q(x), \quad (3.7)$$

con $l = 1, 2, \dots, L_0$; $0 \leq x \leq L$ y $-1 \leq \mu_l \leq 1$

$$Q(x) = \sum_{m=1}^{L_0} \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} w_m I_m(x). \quad (3.8)$$

Donde:

$I_l(x)$: Intensidad de la radiación.

$\sigma_s(x)$: Coeficiente de dispersión.

$\sigma_a(x)$: Coeficiente de absorción.

$\sigma_t(x) = \sigma_a(x) + \sigma_s(x)$: Coeficiente de extinción total.

x : Posición.

μ_l : Coseno del ángulo polar (respecto al eje x).

L_0 : Indica el número de discretizaciones en el dominio angular.

L : Dirección espacial del dominio.

w_m : Peso para cada dirección $\vec{\Omega}_m$. Representa un área pequeña en una esfera unitaria.

Para determinar el conjunto de cuadraturas de ordenadas discretas, se necesita ciertos criterios para escoger las direcciones discretas ($\vec{\Omega}_m$) y sus pesos correspondientes w_m . Estos criterios depende de la geometría del medio, de la

invariancia de proyección, de la positividad del flujo escalar y la evaluación de ciertas integrales angulares que se encuentran desarrolladas en [1].

3.3 EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (MDF) EN UNA DIMENSIÓN

El método de diferencias finitas (MDF) consiste en la descomposición del dominio en pequeños volúmenes para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, obteniendo expresiones algebraicas que se desarrollan por un proceso iterativo.

Para resolver la ecuación diferencial de la ETR y aplicarlo en una placa infinita de ancho L (Figura 3.3), el dominio espacial será discretizado aplicando el MDF en E intervalos de Δx (Figura 3.4) con $L = \Delta x E$. Cada volumen se identifica por e , que resulta $I_l(x) = I_l(x_e) = I_{l,e}$, donde $I_{l,e}$ es la intensidad en el segmento “e” para la dirección “l”.

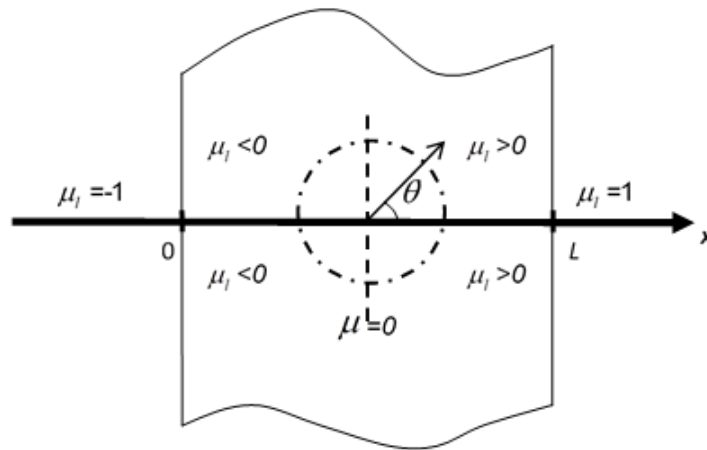


Figura 3.3: Modelo de una placa infinita.

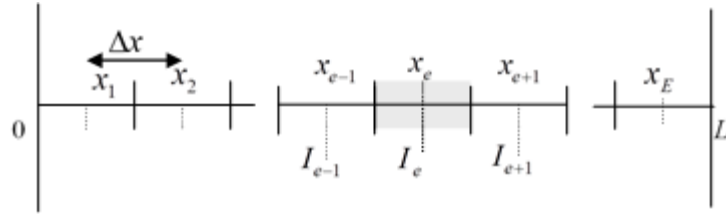


Figura 3.4: Discretización del espacio.

La posición del centro del volumen “e” sombreado (Figura 3.4), está dado por:

$$x_e = \left(e - \frac{1}{2}\right) \Delta x \quad (3.9)$$

En una dimensión la radiación puede propagarse hacia la derecha o hacia la izquierda (Figura 3.5) llamados “hemisferios” (Figura 3.6). El hemisferio I indica un movimiento hacia la derecha (o este) con $\mu_l > 0$. El hemisferio II indica un movimiento hacia la izquierda (oeste) con $\mu_l < 0$.

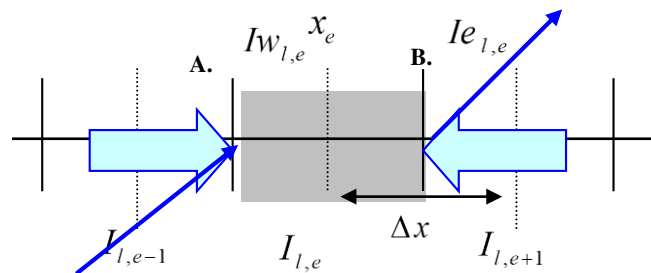


Figura 3.5: El volumen e.

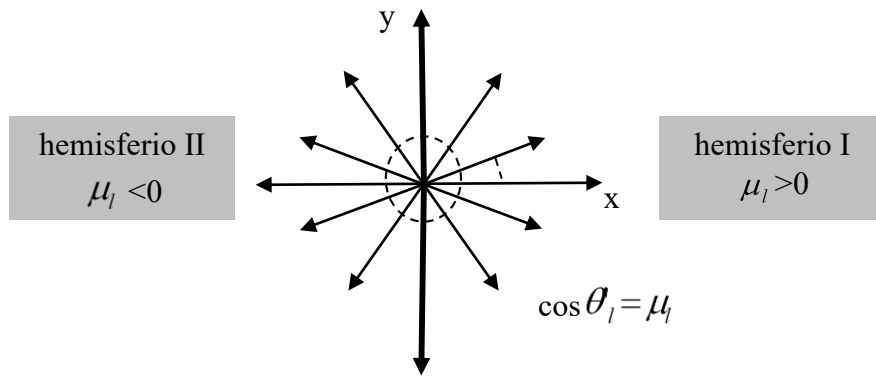


Figura 3.6: Hemisferios I y II y sus cosenos directores μ_l .

Sea la intensidad de radiación que viaje hacia la derecha, entonces en el volumen “e” la diferencia de las intensidades ($\Delta I_{l,e}$) que sale por el este ($I_{e,e}$) y la que entra por el oeste ($I_{w,e}$) es igual a (Figura 3.5):

$$\Delta I_{l,e} = I_{e,e} - I_{w,e}. \quad (3.10)$$

Por lo tanto, la ec (3.8) queda expresada por:

$$\mu_l \frac{\Delta I_{l,e}}{\Delta x} + \sigma_{t,e} I_{l,e} = Q_{l,e}, \quad (3.11)$$

con $l = 1, 2 \dots L_0$ y reemplazando la ec (3.10) en la ec (3.11) se resuelve que:

$$\mu_l \frac{I_{e,e} - I_{w,e}}{\Delta x} + \sigma_{t,e} I_{l,e} = Q_{l,e}. \quad (3.12)$$

El valor de la intensidad ($I_{l,e}$), en el centro del volumen para un medio con simetría azimutal según [17] es:

$$I_{l,e} = \frac{I_{e_{l,e}} + I_{w_{l,e}}}{2}. \quad (3.13)$$

Lo que se pretende calcular en el presente trabajo es la intensidad ($I_{l,e}$) en cada segmento “e”. A continuación, describiremos las intensidades ($I_{l,e}$) para cada hemisferio.

HEMISFERIO I: Es decir $\mu_l > 0$, esto implica que el camino de la intensidad ($I_{l,e}$) va a la derecha, la intensidad por el oeste ($I_{w_{l,e}}$) es dato y de la ec (3.13) encontramos la intensidad por el este ($I_{e_{l,e}}$) que no se conoce:

$$I_{e_{l,e}} = 2I_{l,e} - I_{w_{l,e}}, \quad (3.14)$$

se despeja la intensidad ($I_{l,e}$) de las ec (3.12 y 3.14) obteniendo:

$$I_{l,e} = \frac{2\mu_l \cdot I_{w_{l,e}} + \Delta x \cdot Q_{l,e}}{2\mu_l + \sigma_{t,e} \cdot \Delta x}, \quad (3.15)$$

con las direcciones de $l = 1, 2, \dots L_0$ y con el número de segmento $e = 1, 2, \dots E$.

La ec (3.15) es lo que se desea conocer para el hemisferio I. Además, en la frontera se observa entre los volúmenes continuos (Figura 3.7) que $I_{w_{l,e+1}} = I_{e_{l,e}}$.

Para $e+1 = E$ no se puede determinar, debido a que la radiación está en el volumen $E+1$, de la cual se observa que está fuera de la placa (Figura 3.7).

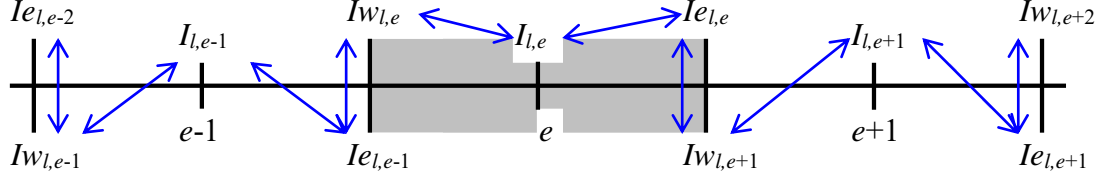


Figura 3.7: Representación en la frontera.

HEMISFERIO II. Es decir $\mu_l < 0$, esto implica que el camino de la intensidad $I_{l,e}$ va a la izquierda, la intensidad $I_{l,e}$ es dato y de la ec (3.13) despejamos la intensidad por el oeste ($I_{w,l,e}$) que no se conoce:

$$I_{w,l,e} = 2I_{l,e} - I_{e,l,e}, \quad (3.16)$$

se despeja la intensidad ($I_{l,e}$) en el segmento “e” de la ec (3.12 y 3.16). Esta intensidad es lo que deseamos calcular para el hemisferio II, obteniendo el siguiente resultado:

$$I_{l,e} = \frac{-2\mu_l \cdot I_{e,l,e} + \Delta x \cdot Q_{l,e}}{-2\mu_l + \Delta x \cdot \sigma_{t,e}}, \quad (3.17)$$

con las direcciones de $l = 1, 2, \dots, L_0$ y con el número de segmento $e = 1, 2, \dots, E$.

Además, en la frontera entre volúmenes continuos (Figura 3.7) tenemos $I_{e,l,e-1} = I_{w,l,e}$.

Para $e-1 = 1$ no se puede calcular, debido a que la intensidad estaría en el volumen 0, el cual estaría fuera de la placa (Figura 3.7). Por otro lado, las condiciones de frontera como intensidad por el oeste ($I_{w,l,1} = 1$, con $l = 1, 2, \dots L_0$, generaría que no pase radiación por el segmento “E”. Por consiguiente, la intensidad por el este en el segmento “E” ($I_{e,l,E} = 0$ para $l = 1, 2, \dots L_0$).

3.4 ALGORITMO DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

Para el desarrollo del algoritmo se basa en los métodos numéricos ya conocidos y que se han descrito en la sección precedente (método de volúmenes finitos y método de ordenadas discretas) cuyo procedimiento es:

Para el cálculo de la intensidad radiativa con dirección “ l ” y para una porción de segmento “ e ” ($I_{l,e}$) es necesario $Q_{l,e}$, pero se observa que $Q_{l,e}$ es dependiente de $I_{l,e}$. Visto de este modo, se usa un procedimiento iterativo para actualizar $Q_{l,e}$ usando un contador de iteraciones “ h ”.

Entonces la solución iterativa del hemisferio I (ec (3.15)) es

$$I_{l,e}^h = \frac{2\mu_l \cdot I_{w,l,e}^h + \Delta x \cdot Q_{l,e}^{h-1}}{2\mu_l + \sigma_{l,e} \cdot \Delta x} \quad \text{con} \quad Q_{l,e}^{h-1} = \sum_{m=1}^{L_0} \frac{\sigma_{s,e}}{4\pi} w_m \cdot I_{m,e}^{h-1} \quad (3.18)$$

Por otro lado, la solución iterativa del hemisferio II (ec. (3.17)) esta dada por:

$$I_{l,e}^h = \frac{-2\mu_l \cdot I_{l,e} + \Delta x Q_{l,e}^{h-1}}{-2\mu_l + \Delta x \sigma_{t,e}} \text{ con } Q_{l,e}^{h-1} = \sum_{m=1}^{L_0} \frac{\sigma_{s,e}}{4\pi} w_m \cdot I_{m,e}^{h-1} . \quad (3.19)$$

El criterio de parada de las interacciones es cuando el error relativo es menor que 10^{-6} :

$$\left| \frac{I_{l,e}^h - I_{l,e}^{h-1}}{I_{l,e}^h} \right| < 10^{-6} . \quad (3.20)$$

Se observa que para $h = 20$ iteraciones cumple con la ec (3.20), la cual demuestra que el algoritmo ya converge. Además, como la fuente se encuentra en uno de los extremos, la condición en el volumen 1 es $I_{l,1} = 1$, para $l = 1, 2, \dots L_0$.

Tomando en cuenta este procedimiento, se presenta el algoritmo que resuelve la ETR con los métodos numéricos (MDF y MOD).

```

Para h = 1 hasta 20
  Para l = 1 hasta L0
    Para e = 1 hasta E
      Si estamos en el 1er HEMISFERIO hacer
        Ecuación (3.18)
         $I_{l,e} = 2I_{l,e} - I_{w_{l,e}}$ 
        si e < E hacer,  $I_{w_{l,e+1}} = I_{l,e}$ , fin de si.
      Fin del 1er HEMISFERIO
      Si estamos en el 2do HEMISFERIO
        Ecuación (3.19)
         $I_{w_{l,e}} = 2I_{l,e} - I_{l,e}$ 
        si e > 1 hacer,  $I_{l,e-1} = I_{w_{l,e}}$ , fin de si.
      Fin de 2do HEMISFERIO
    Fin de e
  Ecuación (3.20)
  Fin de l
  Calcular  $Q_{l,e}$ 
Fin de h

```

Figura 3.8: Algoritmo del método numérico.

3.5 SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA PARA UN MEDIO ABSORBEDOR PURO

Debido a que la integral de la ec (2.7) no puede ser resuelta de manera analítica, se usa los métodos numéricos para resolver este problema. Sin embargo, si el medio fuera muy absorbente el coeficiente de dispersión tiende a cero y en consecuencia se anula la integral. Por lo tanto, la ec (2.7) es reescrita como:

$$\frac{dI(x)}{dx} + \sigma_a I(x) = 0, \quad (3.21)$$

cuya solución analítica es dada por:

$$I(x) = I(0)e^{-\sigma_a x}. \quad (3.22)$$

Donde:

$I(0)$: Es la intensidad de la radiación de entrada.

σ_a : Es el coeficiente de absorción.

$I(x)$: Intensidad de salida.

CAPÍTULO 4

EL MÉTODO MONTE CARLO (MC)

El método Monte Carlo (MC) es una técnica que tiene como fundamento teórico conceptos estadísticos que al aplicarlo en expresiones matemáticas nos arrojan diferentes resultados con intervalo de confianza que se acerca al valor ideal. Estos resultados dependerán de muchos factores, como por ejemplo la cantidad de variables aleatorias, la desviación estándar, entre otros. Por tal motivo, se debe conocer el margen de error de los resultados, para obtener mayor precisión, además el número de eventos deberá ser mayor al que se tiene que realizar; sin embargo al aumentar el número de eventos, aumenta el tiempo computacional. Por lo tanto, para resolver este problema podemos usar el método de reducción de varianza que son usados con el objetivo de emplear los mismos números de eventos sin variar la exactitud de los resultados [22].

4.1 HISTORIA DEL MÉTODO MONTE CARLO

A mediados del siglo XVIII, un grupo de matemáticos trataron de calcular ciertos números irracionales usando diferentes métodos. Entre este grupo de matemáticos el más resaltante fue “George Louis Leclerc”, quien era conocido por sus trabajos en distintas áreas de las ciencias naturales. En 1777 halló un experimento que consistía en la aproximación del número π usando variables

aleatorias [18]. Años más tarde, tomando como base los estudios de Leclerc, se lograron desarrollar simulaciones de ciertos fenómenos físicos. Posteriormente, estas simulaciones fueron fortalecidas durante el periodo de la segunda guerra mundial, en el famoso proyecto Manhattan, al estudiar el transporte de neutrones en cuerpos fisionables; el cual estaba bajo la dirección de los matemáticos S. Ulam y J. V. Neumann. De la misma manera, uno de los participantes del proyecto, N. Metrópolis, nombró a esta técnica como “Método Monte Carlo” en honor del “casino de Monte Carlo”, el cual Ulam acostumbraba a visitar [19]. Finalmente, debido a los trabajos desarrollados en el proyecto Manhattan(1942-1946) aplicando el MC, se empezó a utilizar este método en los diferentes campos de las ciencias, tales como: la biología, la química, las ingenierías e incluso en economía y finanzas [19].

4.2 IMPORTANCIA DEL MÉTODO MONTE CARLO

Las aplicaciones del método Monte Carlo (MC) se han ido masificando en estas últimas décadas con el desarrollo del cálculo computacional. De esta manera, desde la primera vez que se usó un ordenador para la simulación del transporte de neutrones [20], el MC se ha convertido en un método de suma importancia en física y otros campos de la ciencia. En ese sentido, el MC puede ser usado en modelos numéricos que resuelvan ecuaciones complicadas y a su vez que describan el estado físico del sistema. Además, existen algunos problemas de bastante dificultad que no pueden ser resueltos mediante métodos determinísticos; por tal motivo, surge la necesidad de usar nuevos métodos como

el MC, el cual simula los fenómenos físicos con la ventaja de prescindir la resolución de todas las ecuaciones asociadas a la descripción de un sistema, sin dejar de lado la determinación de las funciones asociadas a la densidad de probabilidad, la cual nos permiten conocer su comportamiento [21]. Por otro lado, desde 1970 hasta el 2015 se han publicado aproximadamente 300 000 artículos relacionados con el MC, de las cuales el 10% son artículos publicados en el área de medicina, esto demuestra la importancia de este método en los últimos años [32].

Bajo el nombre del método Monte Carlo (MC) se agrupan una serie de procedimientos que analizan las distribuciones de variables aleatorias, tratando de simular una experiencia real. Por esto, la importancia del MC están basados en varios hechos como:

- Este método tiene como solución a una gran variedad de problemas físicos y matemáticos sin la necesidad de que se realicen los experimentos físicamente, sino usando simulaciones con muestreo estadístico en una computadora. Lo cual hace que este método sea aplicable a cualquier tipo de problema ya sea estocástico o estadístico [13].
- Los diversos problemas que no poseen solución analítica o son muy complicados [13].

- La resolución de las ecuaciones matemáticas complejas que han trascendido en el campo académico (ecuaciones diferenciales parciales de Laplace o de Schrödinger, integrales, matrices, redondeos aleatorios etc).

Por eso, las aplicaciones en estas últimas décadas abarca a diferentes campos científicos como: la mecánica estadística, biología, genética [14], redes de información, telecomunicaciones, finanzas entre otros [13].

Por estas razones, es de suma importancia conocer el método Monte Carlo, que ha generado mejores resultados que otros métodos cuando se aplica a diferentes fenómenos como: [23]

- Movimientos de los neutrones en los reactores nucleares.
- El movimiento browniano.
- Paso de los fluidos a través de sólidos.
- Reconstrucción de espectros de fotones en aceleradores lineales de partículas (LinAc) [34].
- Correlación local y formación de *clusters* en las aleaciones binarias modelo de tipo *fcc* (Figura 4.1) [22].
- Modelamientos de circuitos (Figura 4.2).

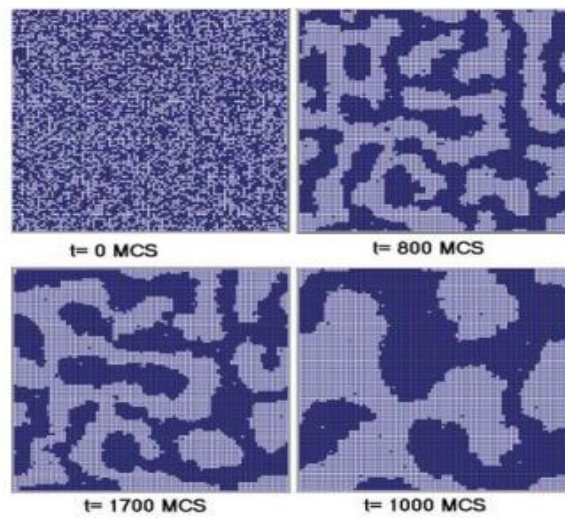


Figura 4.1: Modelo de aleación en forma de cuasi partículas.

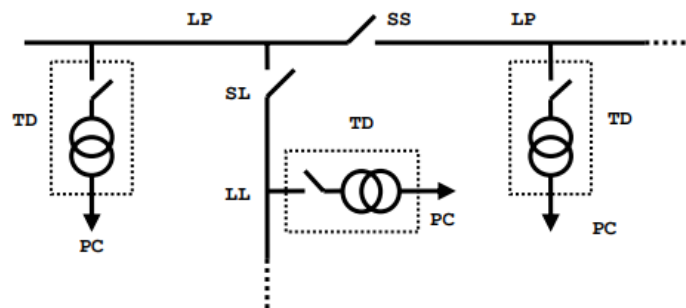


Figura 4.2: Modelamiento en circuitos primarios.

4.3 DESVENTAJAS DEL MÉTODO MONTE CARLO

Los resultados obtenidos al aplicar el método Monte Carlo (MC) no son exactos, debido a que se usa números aleatorios y estos generan diferentes resultados cada vez que se ejecuta el programa.

Una de las principales desventajas del MC es la lentitud con la que converge, la cual depende de la relación σ/\sqrt{M} , donde σ es la varianza y M el número de historias [9]. Por lo tanto, para aumentar la rapidez de convergencia se debe disminuir la varianza (σ) o aumentar el número de historias (M). De esta manera, si aumentamos el número de historias (M), aumentamos el tiempo computacional, pero con la ventaja de llegar a una mejor precisión en nuestros resultados.

4.4 PASO DE LA RADIACIÓN POR UNA PLACA CON EL MÉTODO MONTE CARLO

En la presente sección se modela el transporte de partículas que pasa por una placa infinita con el método Monte Carlo (MC). Para tal fin, se necesita una serie de procedimientos y condiciones que presentamos a continuación [24]:

- Se analiza el recorrido de las partículas individuales desde su creación en una fuente, hasta el término de su historia ya sea al ser absorbido, dispersado por el medio o recogido por el detector de salida.
- El análisis se emplea para un medio isotrópico; por ende, en cualquier punto del medio se cumple que la partícula que es absorbida no es dispersada, por lo tanto, termina su historia. Por otro lado, la partícula dispersada que no es absorbida puede ser dispersada en diferentes ángulos. La probabilidad que la partícula sea dispersada hacia adelante, será la misma que sea dispersada

hacia atrás. El coeficiente de absorción (σ_a) está relacionado con la probabilidad que tiene el material de absorber una partícula por unidad de longitud y el coeficiente de dispersión (σ_s) está relacionado con la probabilidad de dispersarlo por unidad de longitud [30].

Teniendo en cuenta estas condiciones procederemos a modelar el transporte de las partículas cuando pasa por una placa infinita.

Supongamos que tenemos una placa homogénea infinita de ancho "L", la cual es bombardeada por un flujo de fotones de energía " E_0 " que incide de manera perpendicular a dicha placa. Cada fotón avanza cierta distancia aleatoria conforme a la probabilidad de interacción y se determina cuál es el proceso que experimenta (pueden ser esparcidas elásticamente o absorbidas).

Para un medio homogéneo, la probabilidad de que un fotón sufra una interacción en un intervalo dx alrededor de x o llamado también densidad de probabilidad $p(x)$ está expresada por [30]:

$$p(x)dx = \sigma_t e^{-\sigma_t x} dx. \quad (4.1)$$

Por lo tanto, la probabilidad $P(x)$ de que el fotón experimente una interacción antes de avanzar una distancia x es [30]:

$$P(x) \equiv \int_0^x p(x)dx = 1 - e^{-\sigma_t x}, \quad (4.2)$$

donde σ_t es el coeficiente de extinción.

Consideremos que la partícula al expandirse conserva su energía y cualquier cambio en la dirección, provocado por el choque con un átomo es igualmente probable.

En la figura 4.1 se presenta las diferentes historias que pueden tener las partículas: la partícula (a) atraviesa la placa, la partícula (b) es absorbida y la partícula (c) es reflejada.

Es de suma importancia determinar la probabilidad de que la partícula atraviese la placa (p^+), la probabilidad de que la partícula sea reflejada (p^-) y la probabilidad de que la partícula resulte absorbida (p^0).

La interacción de la radiación con la materia se caracteriza mediante dos constantes σ_a y σ_s , que se denominan coeficiente de absorción y dispersión respectivamente. La suma de estos dos coeficientes lleva el nombre de coeficiente de extinción total $\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$.

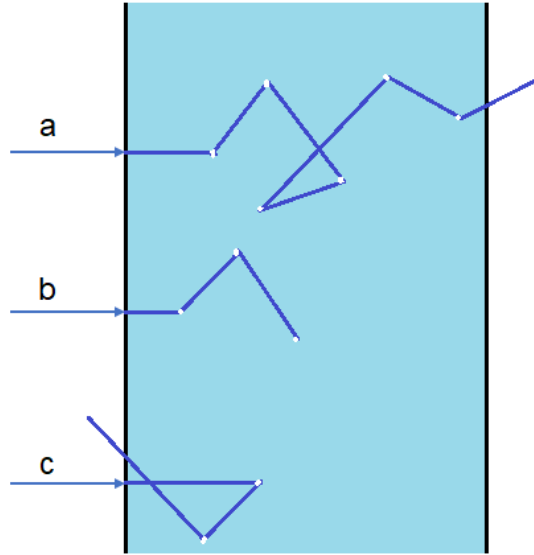


Figura 4.3: Fenómenos que pueden experimentar las partículas.

Por otro lado, el recorrido libre medio ($M\lambda$) está dado por [30]:

$$M\lambda = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-\sigma_t x} dx}{\int_0^{\infty} e^{-\sigma_t x} dx} = \frac{1}{\sigma_t}, \quad (4.3)$$

cuya fórmula para el sorteo del recorrido libre (λ) es:

$$\lambda = -\frac{1}{\sigma_t} \ln \gamma, \quad (4.4)$$

donde γ es el parámetro entre 0 y 1.

Para escoger la dirección aleatoria de la partícula cuando se produce el esparcimiento, puesto que existe una simetría respecto al eje x, esta dirección se

determina plenamente con sólo indicar el ángulo φ entre la dirección de la velocidad de la partícula y el eje ox . Se puede verificar que la condición de que todas las direcciones son igualmente probables es equivalente a la condición de que el coseno de este ángulo ($\mu = \cos\varphi$) este uniformemente distribuido en el intervalo de $(-1,1)$. De tal manera, obtenemos el sorteo de μ

$$\mu = 2\gamma - 1. \quad (4.5)$$

Se considera que la partícula ha experimentado el k -ésimo esparcimiento en el punto de la abscisa x_k correspondiente al interior de la placa y ha comenzado a moverse en la dirección μ_k . Entonces el recorrido libre (λ_k) es

$$\lambda_k = -\left(\frac{1}{\sigma_t}\right) \text{Ln}\gamma. \quad (4.6)$$

Se procede a calcular la abscisa del punto de colisión siguiente (figura 4.2)

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k. \quad (4.7)$$

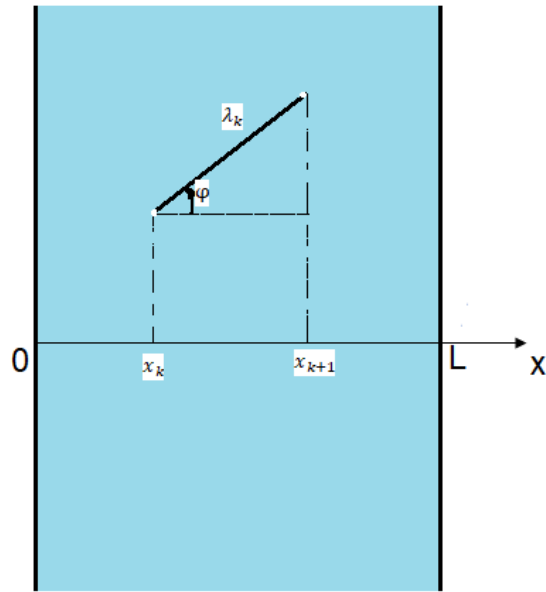


Figura 4.4: Representación de un recorrido medio.

Se comprueba la condición de que la placa es atravesada con:

$$x_{k+1} > L, \quad (4.8)$$

si esta conclusión se cumple, se concluye el análisis de la trayectoria de la partícula y agregamos uno al contador de las partículas que atraviesan la placa.

En caso contrario, comprobamos la condición de reflexión.

$$x_{k+1} < 0, \quad (4.9)$$

si esta condición se cumple, concluimos el análisis de la trayectoria y agregamos uno al contador de las partículas reflejadas. Si tampoco se cumple esta condición

y

$$0 < x_{k+1} < L, \quad (4.10)$$

significa que la partícula experimenta la $(k+1)$ -ésima colisión en el interior de la placa; habrá que sortear de nuevo el destino de la partícula en esta colisión. De tal manera, que escogemos el valor de " γ " y se comprueba la condición de absorción.

$$\gamma < \frac{\sigma_a}{\sigma_t}, \quad (4.11)$$

si esta desigualdad se cumple, se concluye el análisis de la trayectoria y agregamos uno al contador de partículas absorbidas. En caso contrario, se acepta que la partícula experimenta un esparcimiento en el punto de abscisa x_{k+1} y se realiza de nuevo el sorteo de la nueva dirección de la partícula.

$$\mu_k = 2\gamma - 1, \quad (4.12)$$

volvemos a repetir todo el ciclo (tomando, claro está, otros valores para γ).

Se han desarrollado todos los valores de γ sin índices sobreentendiendo que cada valor de γ se emplea una sola vez.

Para analizar un eslabón de la trayectoria o historia es necesario emplear tres valores de γ .

Por condiciones iniciales para cada trayectoria tendríamos:

$$x_0 = 0 \quad \text{y} \quad \mu_0 = 1$$

Después de analizar de esta manera N trayectorias, resultará que N^+ partículas han atravesado la placa, que N^- han sido reflejadas y que N^0 partículas han quedado absorbidas.

Es evidente que las probabilidades requeridas son aproximadamente iguales a las razones.

$$p^+ \sim \frac{N^+}{N} \qquad p^- \sim \frac{N^-}{N} \qquad p^0 \sim \frac{N^0}{N}$$

Se presenta a continuación el diagrama de flujo del método Monte Carlo (MC) para una placa homogénea e infinita.

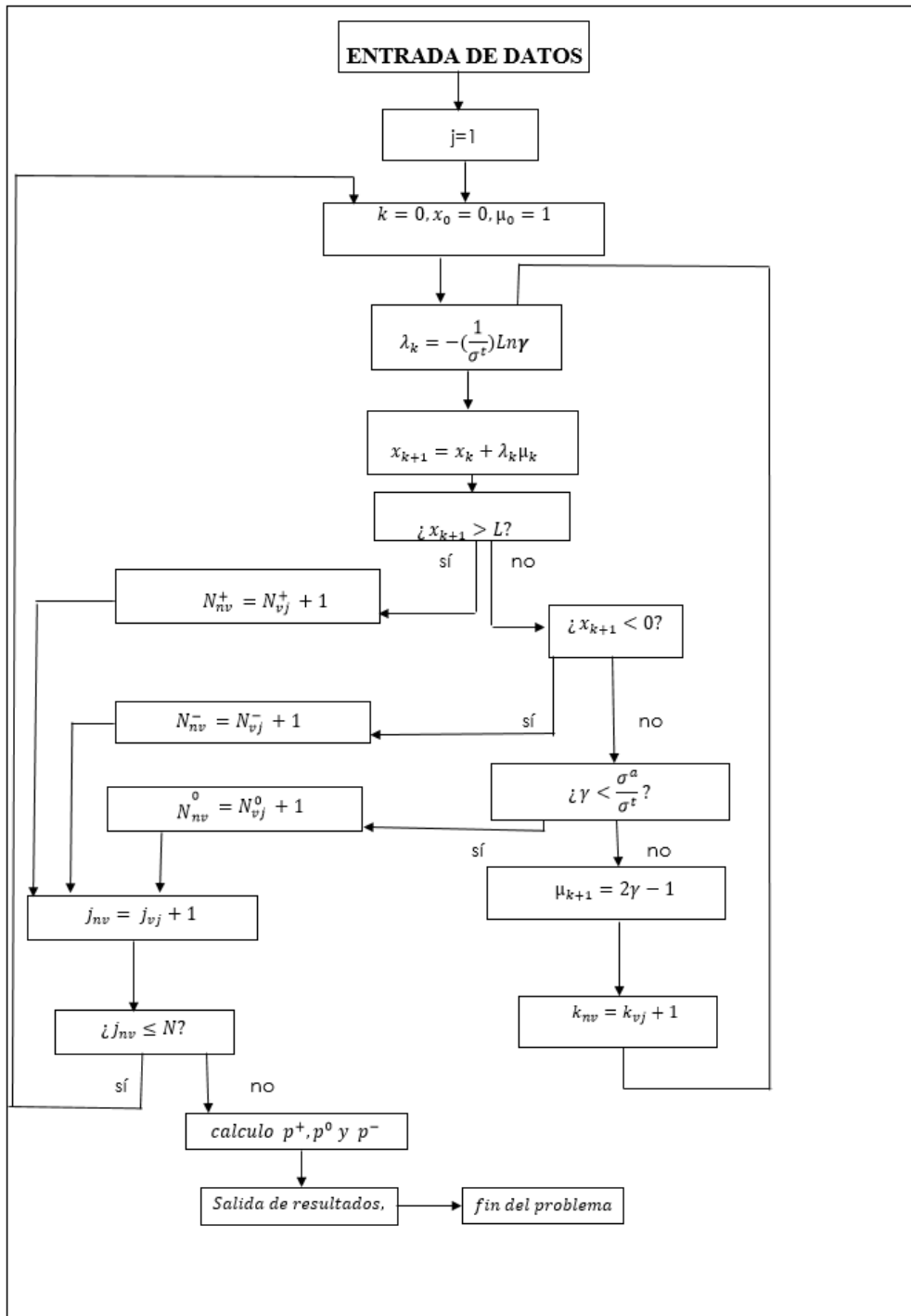


Figura 4.5: Diagrama de flujo para el transporte de la radiación en una placa infinita.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

En el presente capítulo se presentan y discuten los resultados teóricos obtenidos aplicando los diferentes métodos ya descritos en el capítulo 3 y 4 (método analítico, métodos numéricos y el método Monte Carlo), para resolver y modelar la Ecuación de Transferencia Radiativa (ETR). Se procede a analizar tres problemas que enumeramos a continuación.

5.1 PROBLEMA 1: ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN SIN DISPERSIÓN EN UNA PLACA INFINITA

Sea una placa infinita, homogénea y muy absorbente (sin dispersión), de 0.1 metros de largo, tal como se muestra en la Figura 5.1, donde se tiene una fuente de radiación monocromática por el extremo izquierdo, que genera una intensidad (I_0)=10 000 fotones y por el otro extremo un detector de fotones.

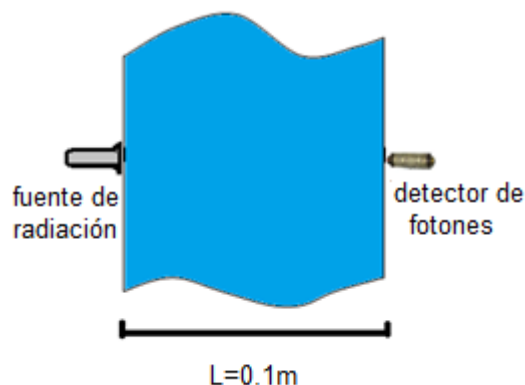


Figura 5.1: Placa infinita muy absorbente.

A continuación, se procede analizar cualitativa y cuantitativamente la cantidad de fotones que llegan al detector, que se encuentra al lado derecho de la placa. Para tal fin, se resuelve con una solución analítica, numérica y por el método Monte Carlo.

5.1.1 SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA 1

Según el problema 1, la radiación electromagnética al interactuar con la placa infinita, experimenta el fenómeno de la absorción sin dispersión; además, esta radiación incidente es monocromática, en régimen estacionario y la placa posee una geometría con simetría azimutal. Por consiguiente, para modelar este fenómeno, se usa la Ecuación de Transferencia Radiativa (ec (3.21)), cuya solución es exacta y está dada por (ec (3.22)):

$$I(x) = I(0)e^{-\sigma_a x},$$

donde la intensidad de fotones que sale de la fuente $I(0) = 10\,000$ fotones y la longitud de la placa $(x) = 0.1m = 10cm$.

Se procede a calcular la intensidad de fotones que atraviesa la placa por cada centímetro de esta, para diferentes coeficientes de absorción (en cm^{-1}). Se ejecuta el siguiente código basándose en la ec (3.22) y desarrollado en el software libre scilab-6.1.0 Desktop.

➤ Código de la solución analítica del problema 1

```
Io = 10000; //Intensidad de fotones que sale de la fuente.  
ca=0.05; //coeficiente de absorción (en cm-1).  
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; //longitud de la placa por cada centímetro.  
Ix= Io*exp(-ca*x); //Intensidad de fotones que atraviesa la placa.  
plot(x,Ix,'r','linewidth',2)  
xgrid  
xlabel("longitud de la barra (cm)")  
ylabel("número de partículas transmitidas")  
legend('ca=0.05')
```

De esta manera, se obtiene los siguientes resultados para diferentes coeficientes de absorción.

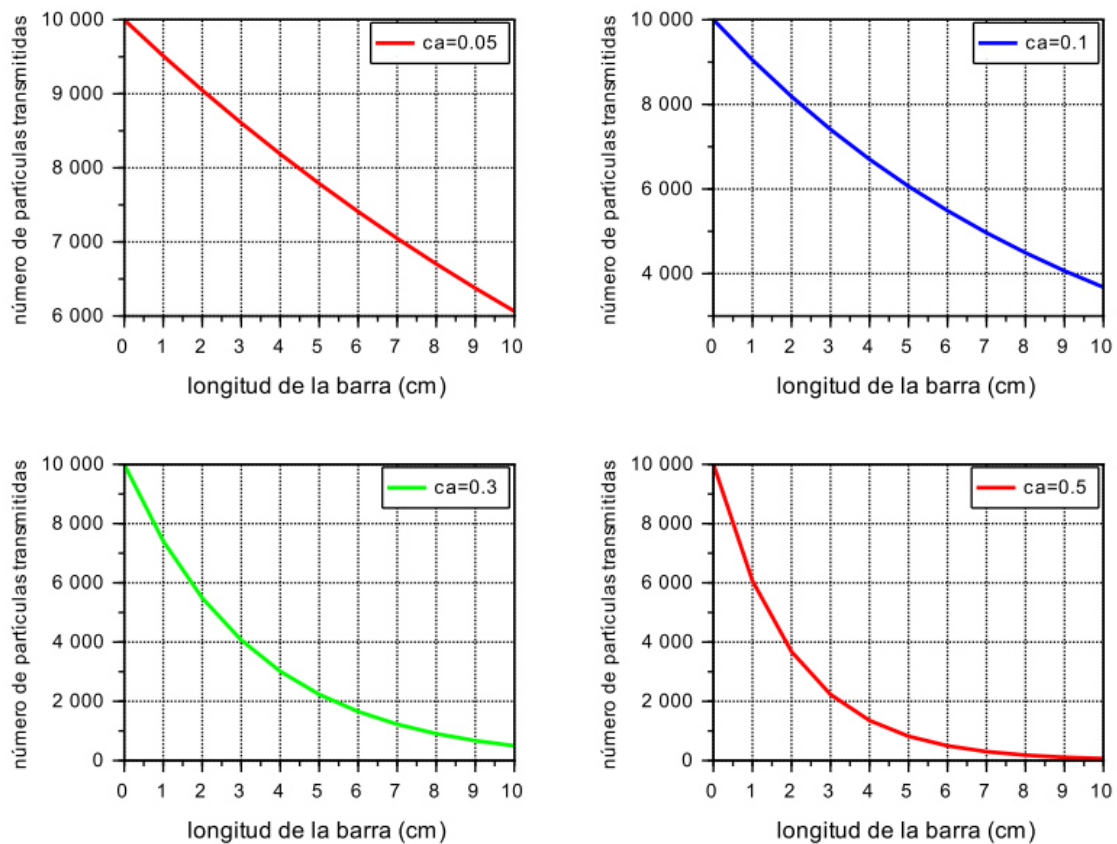


Figura 5.2: Número de partículas transmitidas (fotones) por cada centímetro de la placa homogénea para diferentes coeficientes de absorción que son obtenidos al resolver el problema 1.

De la figura 5.2, se observa que mientras aumenta el coeficiente de absorción, la cantidad de partículas transmitidas (fotones) decaen más rápido. En consecuencia, para el mayor coeficiente de absorción ($C_a = 0.5 \text{ cm}^{-1}$) se obtiene la menor cantidad de partículas transmitidas (aproximadamente 67).

En la tabla 5.1 se presentan la cantidad de partículas que atraviesan la placa (partículas que llegan al detector de fotones) para diferentes coeficientes de absorción. Para ello, se ejecuta el código de la solución analítica y tan solo se cambia el valor del coeficiente de absorción, para obtener los siguientes resultados:

Tabla 5.1: Tabla de la cantidad de fotones ($I_{(x)}$) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σ_a), obtenidos al resolver el problema 1 con el método analítico.

Coeficiente de absorción $\sigma_a(\text{cm}^{-1})$	Solución analítica Número de fotones detectados $I_{(x)}$
0.05	6065.3
0.1	3678.8
0.3	497.9
0.5	67.4
0.7	9.1
0.8	3.4

5.1.2 SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA 1

Para resolver el problema 1 con los métodos numéricos (método de diferencias finitas y métodos de ordenadas discretas), se debe tener en cuenta que la placa posee simetría azimutal y la dirección de la radiación incidente es paralela al ancho de la placa. Por tal motivo, es adecuado usar la Ecuación de Transferencia Radiativa (ETR) en una dimensión. Esta ecuación ya ha sido resuelta en el capítulo 3 y se muestra el algoritmo (Figura 3.8) que da solución al problema 1. Para describir el código que resuelve este problema, se necesita conocer las condiciones de frontera y las variables independientes como: el peso de cuadratura para cada dirección angular, el número de intervalos de posición, el coeficiente de absorción, la cantidad de discretizaciones angulares.

La selección del conjunto de las direcciones angulares en una dimensión (μ_l) y sus respectivos pesos de cuadraturas (w_l), dependen de la geometría del medio. Para una placa infinita o una lámina unidimensional se usa la cuadratura de nivel simétrico LSH S_{10} (*Level Symmetric Hybrid*) de orden 10 (tabla 5.2), propuestas por [1], que al usarlos en los métodos numéricos proporciona los valores más cercanos a la solución exacta.

Tabla 5.2: Tabla del conjunto de direcciones angulares en una dimensión llamados también cosenos directores (μ_l) con sus respectivos pesos de cuadraturas LSH S10, que discretiza el espacio angular. Estos datos fueron tomados de las revistas de investigación ([9], [28]).

Punto Numérico	Cosenos directores(μ_l)	Pesos (w_l)
1	0.1372719	2.0122
2	0.5046889	2.1071
3	0.7004129	0.5990
4	0.8523177	1.1872
5	0.9809754	0.3778
6	-0.1372719	2.0122
7	-0.5046889	2.1071
8	-0.7004129	0.5990
9	-0.8523177	1.1872
10	-0.9809754	0.3778

A continuación, con los datos brindados por el problema 1 y con los valores de la tabla 5.2, se procede a crear el código que da solución al problema 1. Para tal fin, se usa el algoritmo descrito en la figura 3.8. Este código se realiza en el programa (scilab-6.1.0 Desktop).

➤ Código de la solución numérica del problema 1.

```

//Código de la solución numérica del caso I para un  $ca=0.5 \text{ cm}^{-1}$ 
Lx = 10; //longitud del medio (en cm).
no = 20; vx=Lx/no; // no:Números de intervalos. vx:Variación de x.
lo = 10; //cantidad de discretizaciones angulares.
Io = 10000; // cantidad de fotones que sale de la fuente.
//um: Cosenos directores.
um = [0.1373,0.5047,0.7004,0.8523,0.981,-0.1373,-0.5047,-0.7004,-0.8523,-0.981];
//w:Pesos de las cuadraturas, para sus respectivos cosenos directores (um).
w= [2.0122,2.1071,0.5990,1.1872,0.3778,2.0122,2.1071,0.5990,1.1872,0.3778];
itemax = 20; //iteracción máxima.
//ca:Coeficiente de absorción para cada número de intervalo.
ca=[0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5];
//cs:Coeficiente de dispersión.
cs=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
B = ca+cs; // B:Coeficiente de extinción total.
//Iniciando los datos
Qt = zeros(no,1); //ganancia por dispersión.
lw = zeros(no,1);le = zeros(no,1); //las intensidades oeste (lw) y este (le).
l = zeros(no,1); //intensidad en el centro de cada elemento de línea.
for int = 1:itemax
    De1 = zeros(no,1); //detector de fotones transmitidos.
    De2 = zeros(no,1); //detector de fotones dispersados.
    Q = zeros(no,1);
    for iu = 1:lo
        lw(1) = Io;
        le(no) = 0;
        //Para el Hemisferio I.
        if um(iu)>0 then
            for i = 1:no
                //l(i):Intensidad en la posición "i" de la Ec 3.18
                l(i) = (vx*Qt(i)+(2*lw(i))*um(iu))/(2*um(iu)+vx*B(i));
                if l(i)<0 then l(i) = 0; end;
                le(i) = 2*l(i)-lw(i); // Ec 3.14
                if i<no then lw(i+1) = le(i);end;
                Q(i) = w(iu)*l(i)+Q(i);
            end;
            De1 = le;
            //Para el Hemisferio II.
        elseif um(iu)<0 then
            for i = no:-1:1
                //l(i):Intensidad en la posición "i" de la Ec 3.19
                l(i) = (vx*Qt(i)-(2*le(i))*um(iu))/(-2*um(iu)+vx*B(i));
                if l(i)<0 then l(i) = 0; end;
                lw(i) = 2*l(i)-le(i); //Ec 3.16
                if i>1 then le(i-1) = lw(i);end;
                Q(i) = w(iu)*l(i)+Q(i);
            end;
            De2 =lw;
        end
    end
end

```

```

end;
end; //fin de las direcciones
for i = 1:no
    //Qt(i):Ganancia por dispersión en la posición "i"
    Qt(i)=(cs(i)*Q(i)*0.25)/%pi;
end;
end; //fin de las direcciones.
xgrid
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; //posición por cada centímetro de la placa.
y=[ Io Del(2) Del(4) Del(6) Del(8) Del(10) Del(12) Del(14) Del(16) Del(18) Del(20)];
plot2d(x,y)

```

En la tabla 5.3 se presentan la cantidad de fotones que atraviesan la placa (partículas que llegan al detector de fotones) para diferentes coeficientes de absorción. Para ello, se ejecuta el código de la solución numérica y tan solo se cambia el valor del coeficiente de absorción, para obtener los siguientes resultados:

Tabla 5.3: Tabla de la cantidad de fotones ($I_{(x)}$) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σ_a), obtenidos al resolver el problema 1 con los métodos numéricos (MDF y MOD).

Coeficiente de absorción $\sigma_a(cm^{-1})$	Solución numérica Número de fotones detectados $I_{(x)}$
0.05	6006.7
0.1	3607.4
0.3	466.9
0.5	59.4
0.7	7.4
0.8	2.6

Con los resultados obtenidos que se muestran en la tabla 5.3 (solución con los métodos numéricos), se procede a comparar con los resultados obtenidos que se muestran en la tabla 5.1 (solución analítica).

Tabla 5.4: Tabla de la cantidad de fotones ($I_{(x)}$) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σ_a), obtenidos al resolver el problema 1 con el método analítico y los métodos numéricos.

Coeficiente de absorción $\sigma_a(cm^{-1})$	Solución analítica Número de fotones detectados $I_{(x)}$	Solución numérica Número de fotones detectados $I_{(x)}$
0.05	6065.3	6006.7
0.1	3678.8	3607.4
0.3	497.9	466.9
0.5	67.4	59.4
0.7	9.1	7.4
0.8	3.4	2.6

Para poder medir que tan cerca se encuentra los resultados obtenidos por los métodos numéricos con respecto a la solución analítica, se usa técnicas de validación para determinar el error que hay entre los dos conjuntos y están dadas por el error porcentual absoluto medio (MAPE) y el porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE). La descripción de estas técnicas se muestran en el Apéndice A.

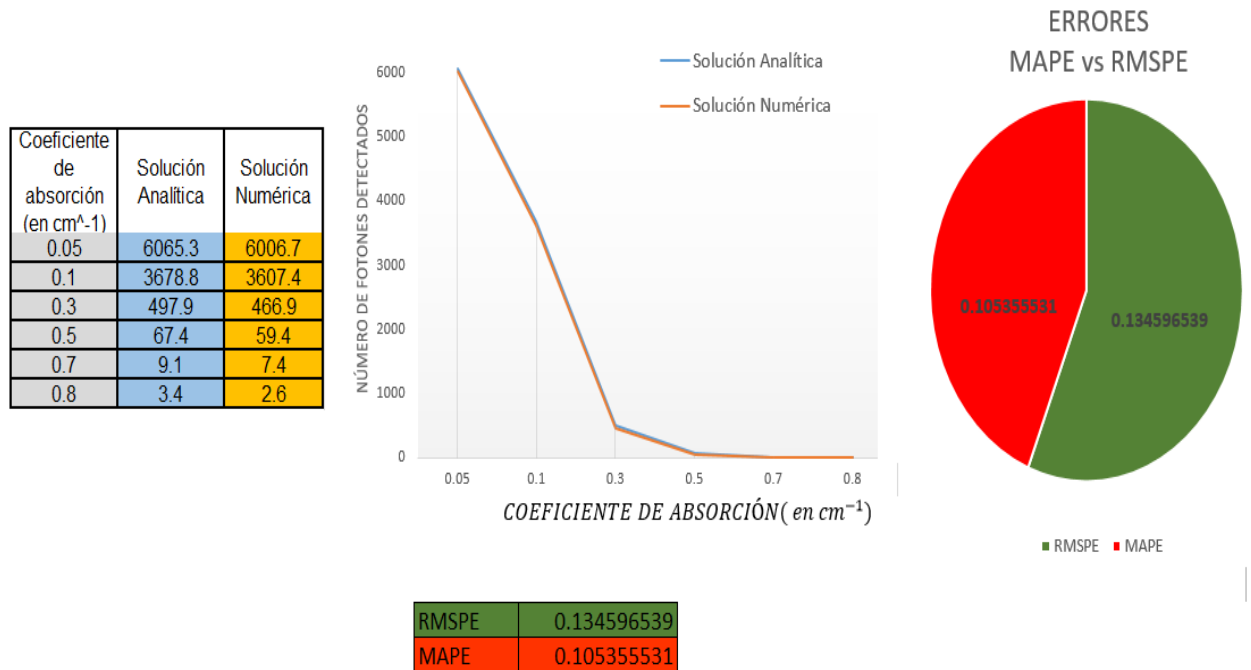


Figura 5.3: Error porcentual absoluto medio (MAPE) y el porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE) de los resultados obtenidos por los métodos numéricos (MDF y MOD).

La figura 5.3 muestra la cantidad de fotones que atraviesan la placa (partículas que llegan al detector de fotones) para el problema 1, resuelta con una solución analítica y numérica. Además, se observa como la cantidad de fotones que llegan al detector disminuye abruptamente cuando los coeficientes de absorción son menores a 0.3 cm^{-1} . En general, cuando aumenta el coeficiente de absorción disminuye la cantidad de fotones detectados. Por otro lado, para validar los resultados obtenidos con los métodos numéricos, se muestra el error porcentual absoluto medio (MAPE) que es igual a 10.54%; mientras que, el porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE) es igual a 13.46%. Estos resultados obtenidos son muy cercanos a la solución exacta.

Se procede a comparar las gráficas obtenidas con la solución analítica y numérica, que muestra la cantidad de fotones transmitidos por cada centímetro de la placa, para diferentes coeficientes de absorción como se muestra en la Figura 5.4. El código se muestra en el Anexo 1.

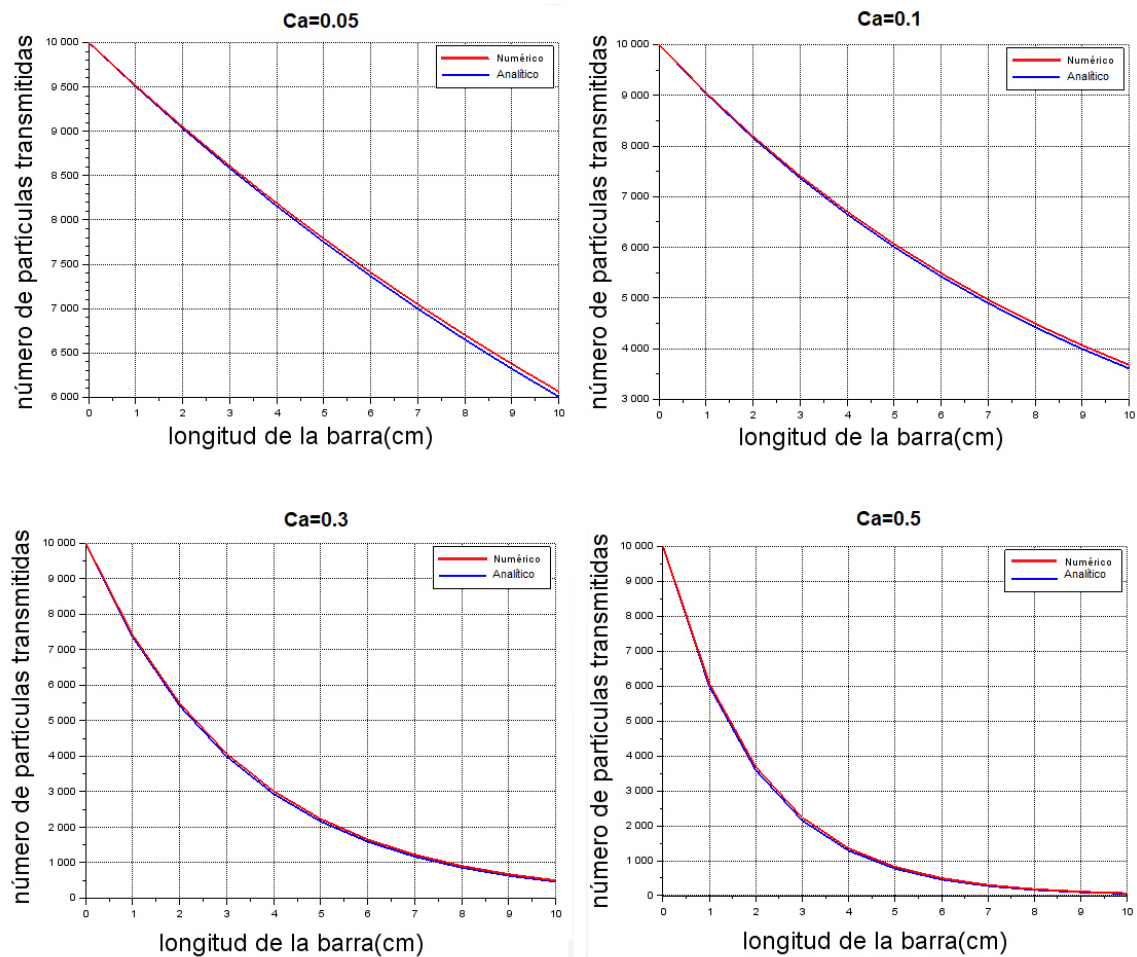


Figura 5.4: Comparación de los gráficos obtenidos del problema 1, resueltos con los métodos numéricos y el método analítico.

5.1.3 SOLUCIÓN CON EL MÉTODO MONTE CARLO PARA EL PROBLEMA 1

Para resolver el problema 1 con el método Monte Carlo (MC), se procede a simular el proceso de transporte de los fotones al pasar por la placa infinita. Se desarrolla en la computadora una descripción estadística, análoga al ciclo de vida de las partículas, utilizando métodos de muestreo al azar. El fenómeno del transporte de partículas ya ha sido descrito en la sección 4.4 y se realizó su respectivo diagrama de flujo que se muestra en la Figura 4.5. Con los datos brindados por el problema 1 y con el diagrama de flujos se procede a crear el algoritmo que da solución a este problema.

➤ Código de la solución con el método Monte Carlo para el problema 1

```
clear; //Problema de la radiación en un medio absorbente y esparcidor (scattering)
I0 = 10000; //Intensidad de fotones que sale de la fuente (fotones que ingresan a la placa)
Lx = 10; //longitud del dominio del medio en una dimensión en centímetros
//coeficiente de absorción, en cada cm, que forma el medio
ca=[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
//coeficiente de dispersión, en cada cm que forma el medio
P2 = 1-exp(-ca); //probabilidad de pérdida + retorno
De1 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo transmitido
De2 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo dispersado
for i = 1:I0
    E = 1; H = 0;
    while H==0
        n = rand();
        if E==Lx & n>P2(E) then De1(E) = De1(E)+1; H = 1;
        elseif E<Lx & n>P2(E) then E = E+1;
        else H = 1; De2(E) = De2(E)+1;
        end;
    end;
end;
De1(1)=I0-De2(1);
for i=2:Lx-1
    De1(i)=De1(i-1)-De2(i);
end
xgrid
xo=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
yo=[I0 De1(1) De1(2) De1(3) De1(4) De1(5) De1(6) De1(7) De1(8) De1(9) De1(10)];
```

```
plot2d(xo,yo);
plot(xo,yo,'r','linewidth',2)
```

Este código se ejecutó en un ordenador con las siguientes características:

- Nombre del dispositivo: DESKTOP-G6D5DMI.
- Procesador : Intel(R) Core(TM) i5-2400 CPU @ 3.10GHz
- RAM instalada : 8.00 GB (7.82 GB utilizable).
- Id. del dispositivo : 3A945021-32F3-4785-BFED-FDF5AFF14A8C.
- Id. del producto : 00330-80000-00000-AA339.
- Tipo de sistema : Sistema operativo de 64 bits, procesador x64.

Tabla 5.5: Tabla de la cantidad de fotones ($I_{(x)}$) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σ_a), obtenidos al resolver el problema 1 con el método Monte Carlo.

Coeficiente de absorción $\sigma_a(cm^{-1})$	Método Monte Carlo Número de fotones detectados $I_{(x)}$
0.05	6109, 6100, 6077
0.1	3676, 3659, 3701
0.3	481, 474, 513
0.5	64, 55, 67
0.7	6,5,7
0.8	2, 2, 3

Con los resultados obtenidos que se muestran en la tabla 5.5 (solución con el método Monte Carlo), se procede a comparar con los resultados obtenidos que se muestran en la tabla 5.1 (solución analítica).

Tabla 5.6: Tabla de la cantidad de fotones ($I_{(x)}$) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σ_a), obtenidos al resolver el problema 1 con el método analítico y el método Monte Carlo.

Coeficiente de absorción $\sigma_a(cm^{-1})$	Solución Analítica Número de fotones detectados $I_{(x)}$	Solución con Monte Carlo Número de fotones detectados $I_{(x)}$
0.05	6065.3	6109, 6100, 6077
0.1	3678.8	3676, 3659, 3701
0.3	497.9	481, 474, 513
0.5	67.4	64, 55, 67
0.7	9.1	6,5,7
0.8	3.4	2, 2, 3

Para poder medir que tan cerca se encuentra los resultados obtenidos por el método Monte Carlo con respecto a la solución analítica, se usa técnicas de validación para determinar el error que hay entre los dos conjuntos, como el error porcentual absoluto medio (MAPE) y el porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE). La descripción de estas técnicas se muestran en el Apéndice A.

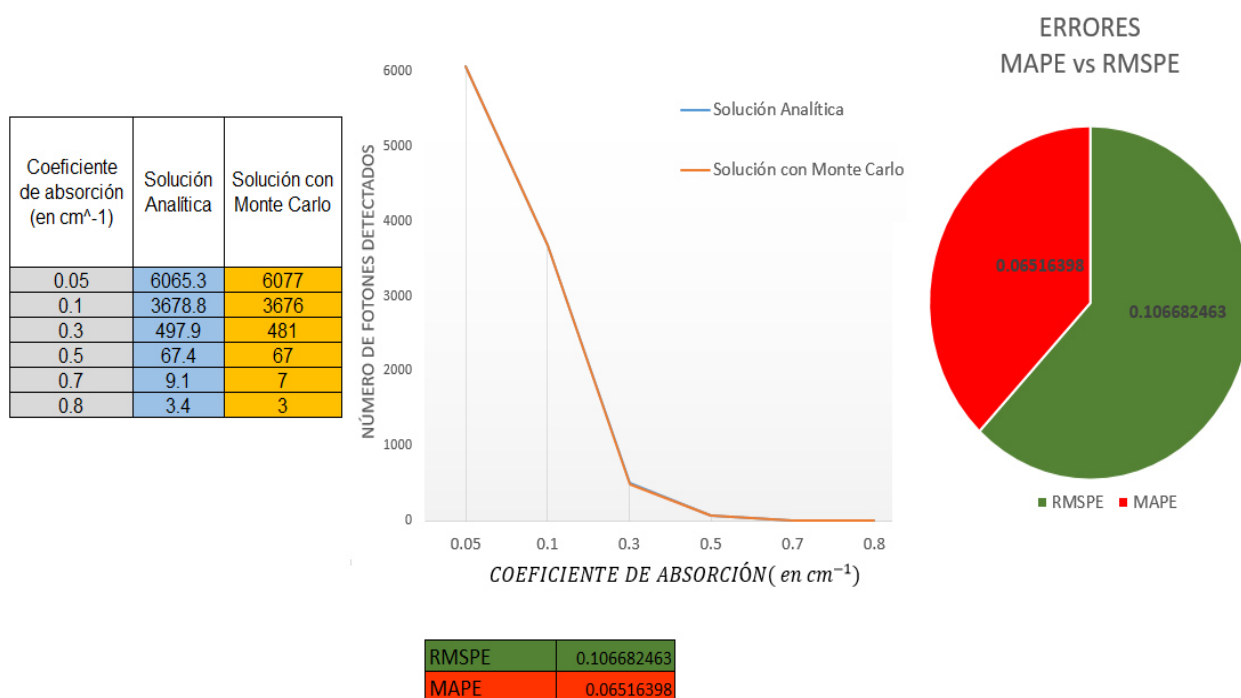


Figura 5.5: Error porcentual absoluto medio (MAPE) y el porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE) de los resultados obtenidos por el método Monte Carlo.

La figura 5.5 muestra la cantidad de fotones que atraviesan la placa (partículas que llegan al detector de fotones) para el problema 1, resuelto con el método Monte Carlo y con el método analítico. Además, se observa como la cantidad de fotones que llegan al detector disminuye abruptamente cuando los coeficientes de absorción son menores a 0.3 cm^{-1} . En general, cuando aumenta el coeficiente de absorción disminuye la cantidad de fotones detectados. Por otro lado, para validar los resultados obtenidos con el método Monte Carlo, se muestra el error porcentual absoluto medio (MAPE) que es igual a 6.51%; mientras que, el porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE) es igual a 10.67%. Estos resultados obtenidos son muy cercanos a la solución exacta.

Se procede a comparar las gráficas obtenidas con la solución analítica y con el método Monte Carlo, que muestra la cantidad de fotones transmitidos por cada centímetro de la placa, para diferentes coeficientes de absorción como se muestra en la Figura 5.6. El código para obtener estos gráficos se muestra en el Anexo 2.

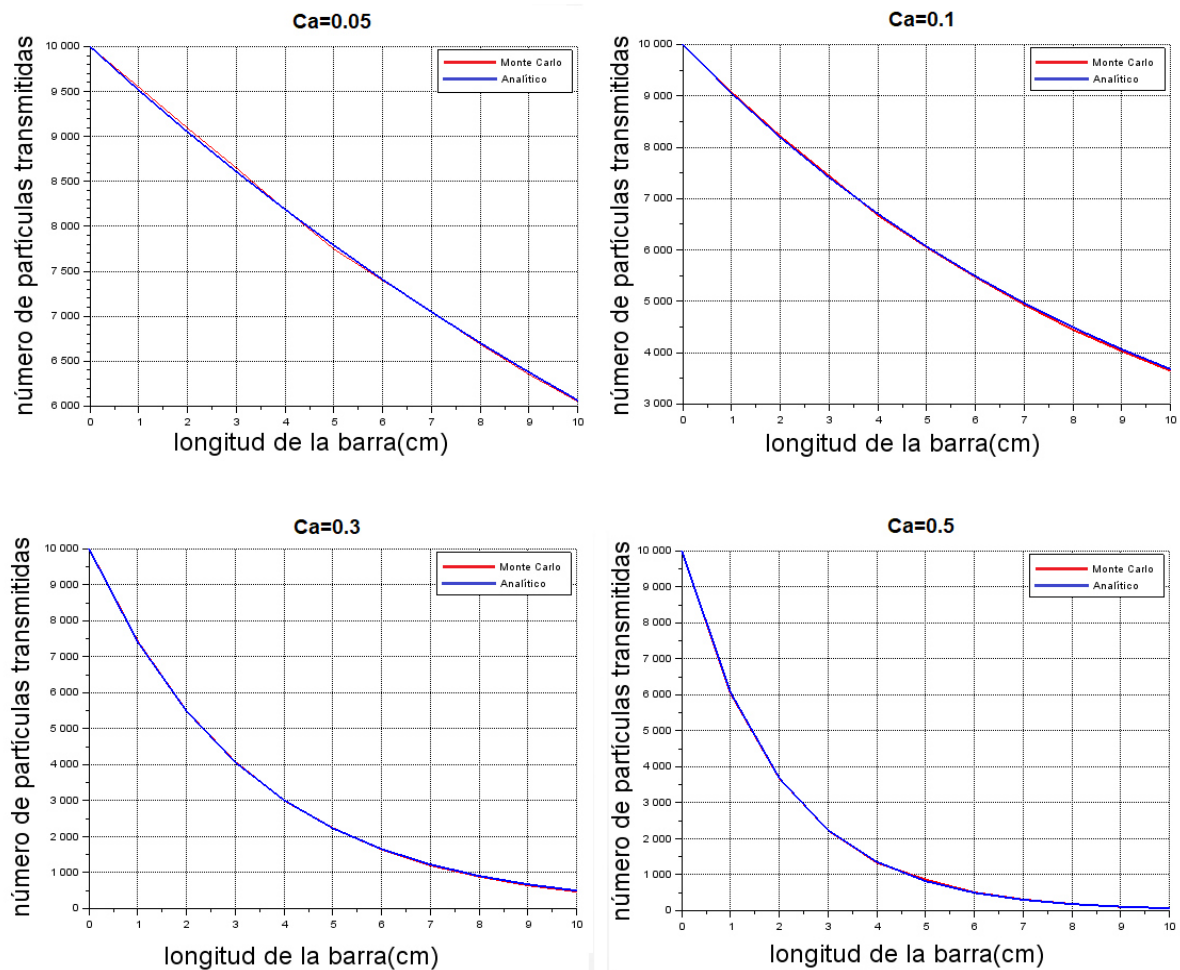


Figura 5.6: Comparación de los gráficos obtenidos del problema 1, resueltos con los métodos analíticos y Monte Carlo.

Tabla 5.7: Tabla de la cantidad de fotones ($I_{(x)}$) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σ_a), obtenidos al resolver el problema 1 con los métodos: analítico, numérico y Monte Carlo.

Número de fotones detectados			
Coeficiente de absorción $\sigma_a(cm^{-1})$	analítica	numérica	Monte Carlo
0.05	6065.3	6006.7	6109, 6100, 6077
0.1	3678.8	3607.4	3676, 3659, 3701
0.3	497.9	466.9	481, 474, 513
0.5	67.4	59.4	64, 55, 67
0.7	9.1	7.4	6,5,7
0.8	3.4	2.6	2, 2, 3

En síntesis, la Tabla 5.7 muestra la cantidad de fotones que atraviesan la placa (fotones detectados) resueltos con la solución analítica, numérica y Monte Carlo para el problema 1. Para validar los métodos aplicados se usó magnitudes de indicadores de error, obteniendo los siguientes resultados:

✓ **Para los métodos numéricos de ordenadas discretas y diferencias finitas (MDF y MOD)**

Error porcentual absoluto medio (MAPE) = 10.54%.

Porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE) =13.46%.

✓ **Para el método Monte Carlo**

Error porcentual absoluto medio (MAPE) = 6.51%.

Porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (RMSPE) = 10.67%.

➤ **Tiempo computacional al ejecutar el método Monte Carlo para el problema 1**

El tiempo computacional es la cantidad de tiempo que demora en ejecutar un algoritmo. Esta cantidad de tiempo puede variar con las diferentes entradas y con las características del ordenador.

Se procede a analizar el tiempo computacional del código de Monte Carlo que da solución al problema 1. Para ello, se usa el mismo ordenador cuyas características han sido descritos en esta sección (sección 5.1.3). Además, se calcula el tiempo computacional para diferentes cantidades de fotones ($I_{(0)}$) que ingresan a la placa: 10^4 , 10^5 , 10^6 , y 10^7 en función de los diferentes coeficientes de absorción.

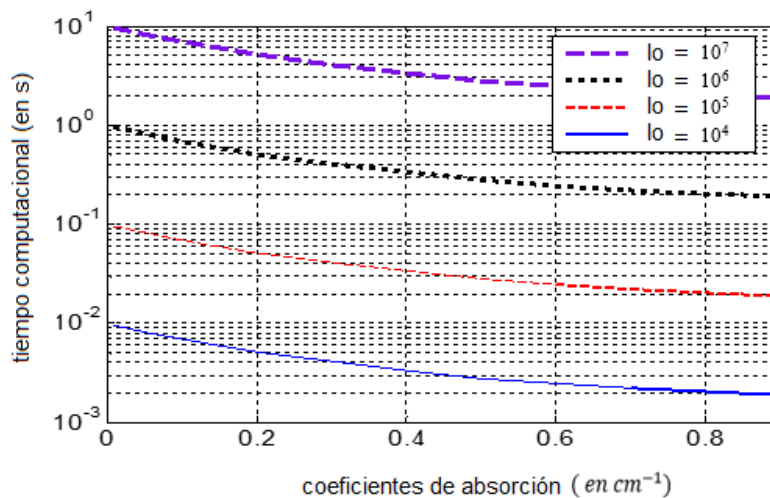


Figura 5.7: Tiempo computacional para diferentes cantidades de fotones que ingresan a la placa (I_0): 10^4 , 10^5 , 10^6 , y 10^7 .

5.2 PROBLEMA 2: ABSORCIÓN Y DISPERSIÓN DE LA RADIACIÓN EN UNA PLACA INFINITA.

Sea el mismo sistema del problema 1, con la diferencia que la placa infinita es un medio absorbente y dispersor a la vez, donde se tiene una fuente de radiación monocromática por el extremo izquierdo, que genera una intensidad (I_0)=10 000 fotones y por el otro extremo un detector de fotones (Figura 5.1).

A continuación, se procede analizar cualitativa y cuantitativamente la cantidad de fotones que llegan al detector que se encuentra al lado derecho de la placa. Esta, al ser un medio absorbente y dispersor no puede ser resuelta con el método analítico; por ello, se calcula a través de una solución numérica y por el método Monte Carlo.

Se procede a crear el código que da solución al problema 2, por los métodos numéricos (método de diferencias finitas y método de ordenadas discretas). Para tal fin, se usa el algoritmo descrito en la figura 3.8. Este código se realiza en el programa (scilab-6.1.0 Desktop) y se encuentra en el ANEXO 3.

Asimismo, para crear el código aplicando el método Monte Carlo se basa en el procedimiento de la sección 4.4 y el diagrama de flujo que se muestra en la Figura 4.5. Este código se realiza en el programa (scilab-6.1.0 Desktop) y se encuentra en el ANEXO 4.

Tabla 5.8: Tabla de la cantidad de fotones ($I_{(x)}$) que llegan al detector para diferentes coeficientes de absorción (σ_a) y dispersión(σ_s), obtenidos al resolver el problema 2 con el método Monte Carlo y los métodos numéricos.

Coeficiente de absorción $\sigma_a(cm^{-1})$	Coeficiente de dispersión $\sigma_s(cm^{-1})$	Solución numérica Número de fotones detectados $I_{(x)}$	Solución con Monte Carlo Número de fotones detectados $I_{(x)}$
0.5	0.01	54.1	65, 64, 60
0.1	0.05	2328.2	2281, 2260, 2325
0.2	0.1	523.7	503, 480, 522
0.2	0.2	208.7	206, 199, 206
0.1	0.5	37.7	33, 45, 30
0.05	0.8	3.8	3, 3, 2

La tabla 5.8 muestra los resultados obtenidos al compilar los códigos de los métodos numéricos y el método Monte Carlo, que resuelve el problema 2. Se procede a superponer las gráficas obtenidas por el método Monte Carlo y los métodos numéricos, para diferentes coeficientes de absorción y dispersión (*en cm^{-1}*). Estos resultados obtenidos son del problema 2 y muestran la cantidad de partículas transmitidas (fotones) por cada centímetro de la placa. El código que se utiliza para superponer los gráficos para un coeficiente de absorción de 0.5 cm^{-1} y coeficiente de dispersión de 0.01 cm^{-1} se encuentra en el ANEXO 5.

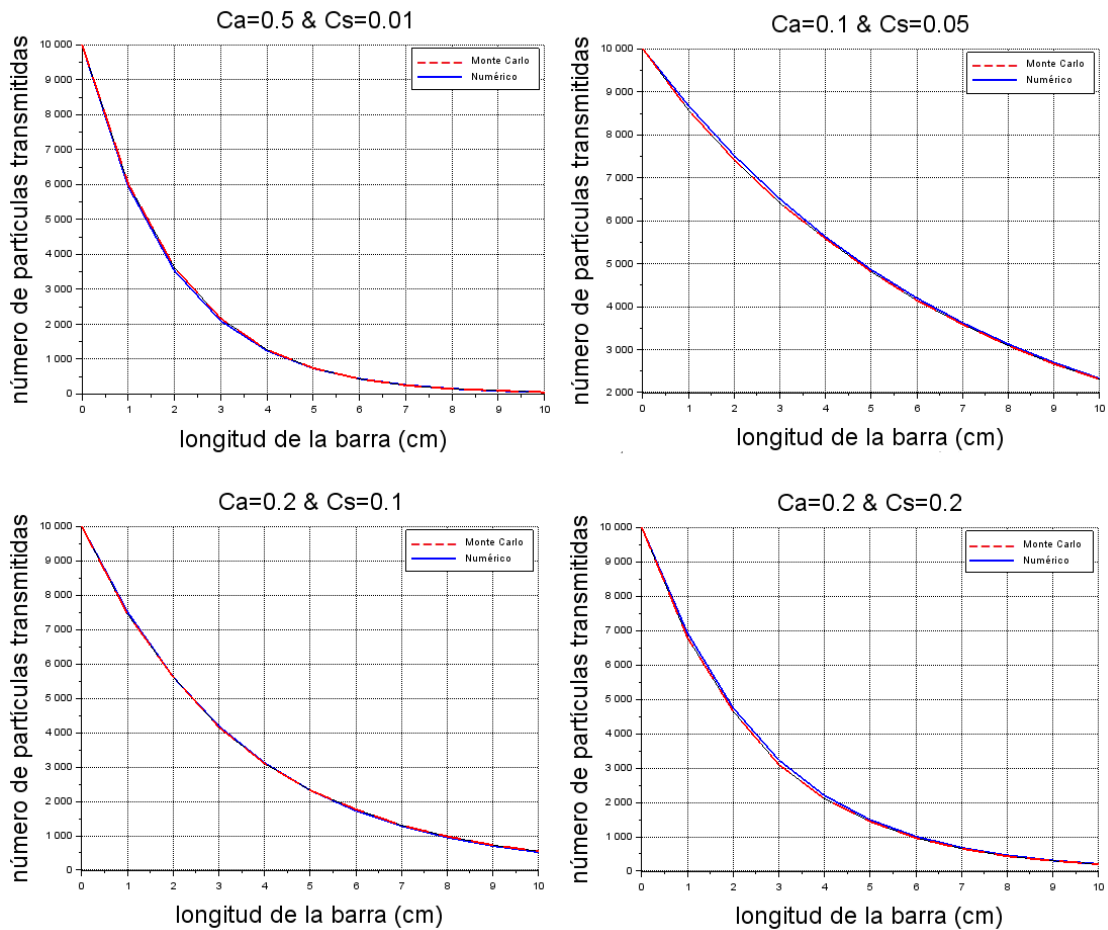


Figura 5.8: Comparación de los gráficos obtenidos del problema 2, resueltos con los métodos numéricos y por el método Monte Carlo.

5.3 PROBLEMA 3: ABSORCIÓN Y DISPERSIÓN DE LA RADIACIÓN EN UNA BARRA HETEROGÉNEA

En el presente problema se tiene una barra heterogénea formada por tres placas, con las capas exteriores de igual coeficiente de absorción y dispersión, pero la capa del medio tiene diferentes coeficientes. La intensidad de fotones que salen de la fuente es $I_{(0)} = 10^5$ fotones (ver la Figura 5.9). Se procede a determinar el número de partículas transmitidas mapeando las trayectorias por cada

centímetro de la barra con el método Monte Carlo (MC) y con los métodos numéricos, luego se comparan estos resultados; Además, calcular la convergencia del algoritmo de los métodos numéricos para 10 iteraciones.

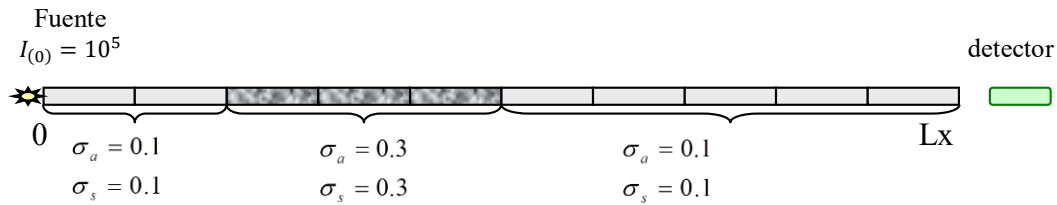


Figura 5.9: Barra heterogénea con tres capas.

5.3.1 SOLUCIÓN CON EL MÉTODO MONTE CARLO PARA EL PROBLEMA 3

Para determinar el número de partículas transmitidas que pasa por la barra heterogénea, se desarrolla en base al diagrama de flujo de la figura 4.5. Asimismo, el logaritmo utilizado para resolver el problema 3 se muestra en el ANEXO 6.

El algoritmo que se muestra en el ANEXO 6 se ejecuta en el programa (scilab-6.1.0 Desktop), en el mismo ordenador que se utilizó en la solución del problema 1. Al ejecutar el algoritmo, el programa muestra los siguientes resultados (figura 5.10).

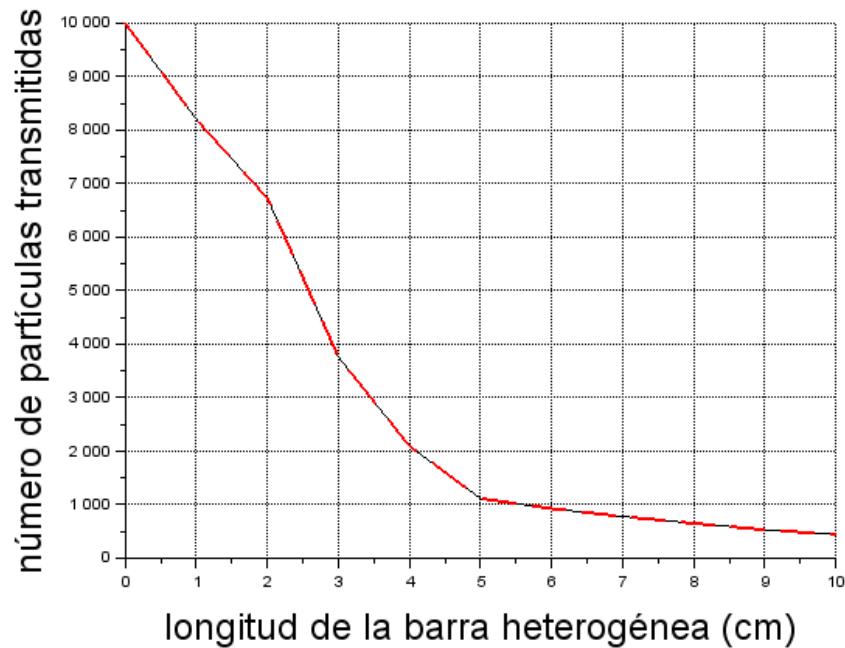


Figura 5.10: Número de partículas transmitidas por cada centímetro de la barra heterogénea, resuelto con el método Monte Carlo.

En la figura 5.10 se observa un mayor decaimiento desde la posición ($x = 2 \text{ cm}$) hasta la posición ($x = 5 \text{ cm}$) de la barra heterogénea. Estos resultados son coherentes con los datos brindados por el problema 3, dado que, en ese intervalo de longitud, la barra tiene mayor magnitud en sus coeficientes de absorción y dispersión ($\sigma_a = \sigma_s = 3 \text{ cm}^{-1}$).

➤ **Tiempo computacional al ejecutar el método Monte Carlo para el problema 3**

El tiempo computacional es una magnitud física muy usada ya que describe la cantidad de tiempo que lleva a ejecutar un algoritmo.

Se procede a analizar el tiempo computacional del código de Monte Carlo que da solución al problema 3. Para ello, se usa el mismo ordenador cuyas características han sido descritos en la sección 5.1.3. Además, se calcula el tiempo computacional para diferentes cantidades de fotones ($I_{(0)}$) que ingresan a la barra heterogénea: 10^4 , 10^5 , 10^6 , y 10^7 .

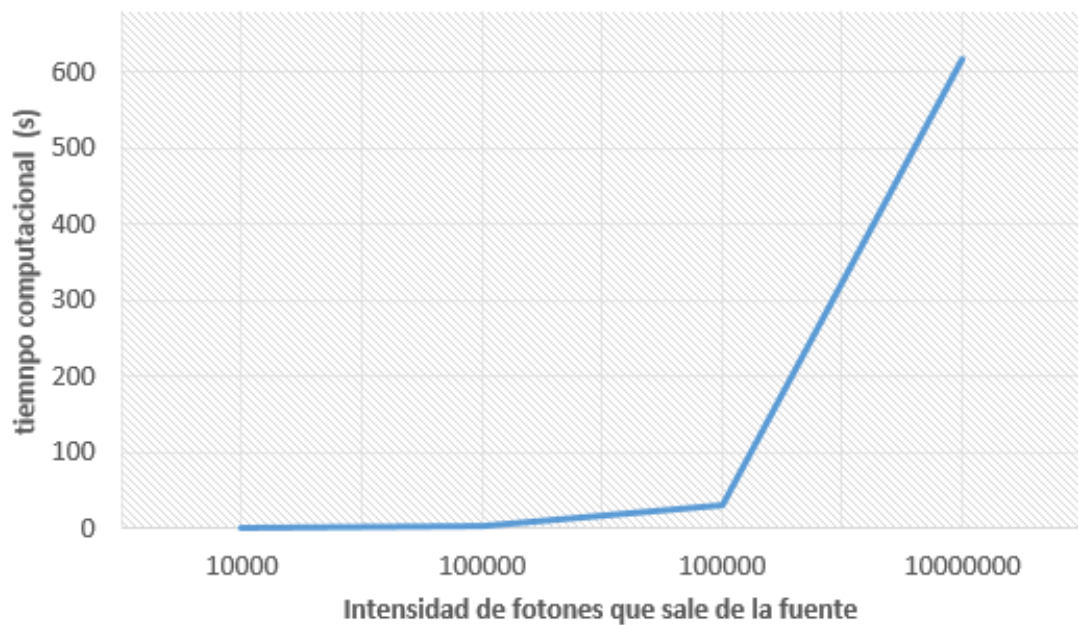


Figura 5.11: Tiempo computacional del código de Monte Carlo que resuelve el problema 3 para diferentes cantidades de fotones ($I_{(0)}$) : 10^4 , 10^5 , 10^6 , y 10^7 .

5.3.2 SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA 3.

Para determinar el número de partículas transmitidas que pasa por la barra heterogénea, se desarrolla de forma similar al problema 1. Se debe tener en cuenta, que los medios del problema 1 y 3 tienen diferentes geometrías (placa infinita y barra heterogénea respectivamente). Sin embargo, el conjunto de

direcciones angulares y sus respectivos pesos de cuadraturas (Tabla 5.2) toman los mismos valores para ambos medios, debido a que este conjunto de valores son idóneos para la aplicación del método de ordenadas discretas (MOD) [1].

El código que da solución al problema 3 donde se aplica los métodos numéricos, se muestra en el ANEXO 7. Se ejecuta en el programa (scilab-6.1.0 Desktop), en el mismo ordenador que se utilizó en el problema 1. Al ejecutar el código, el programa muestra la siguiente figura 5.12.

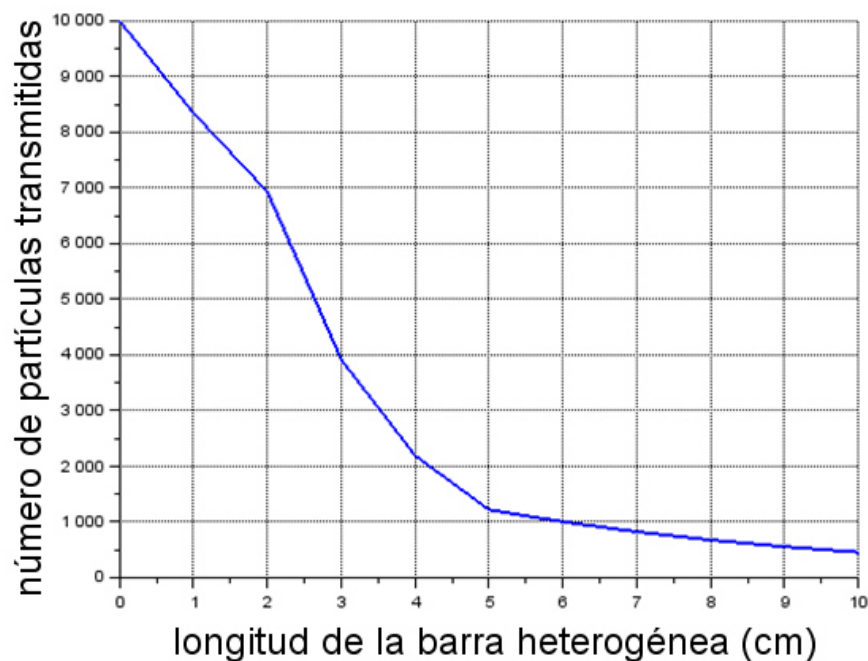


Figura 5.12: Número de partículas transmitidas por cada centímetro de la barra heterogénea, resuelto con los métodos numéricos.

En la figura 5.12 se aprecia un decaimiento de la intensidad de partículas (fotones) transmitidas por cada centímetro de la barra, además se observa que la

gráfica es muy parecida a la figura 5.10. Por lo tanto, se procede a superponer las gráficas obtenidas (Figura 5.13) para validar nuestros resultados.

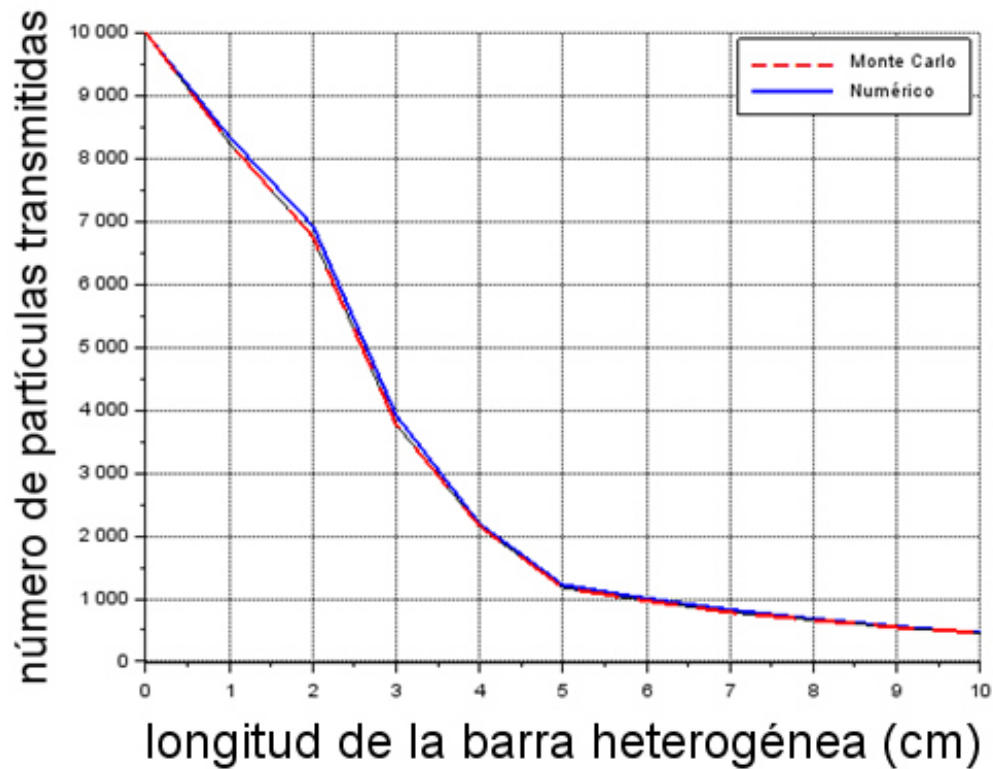


Figura 5.13: Comparación de los gráficos obtenidos del problema 3, resueltos con los métodos numéricos y por el método Monte Carlo.

La Figura 5.13 muestra la superposición de las gráficas de la cantidad de partículas transmitidas (fotones) en función de la longitud de la placa, resueltos con los métodos numéricos y Monte Carlo. Se aprecia una gran similitud entre las dos soluciones.

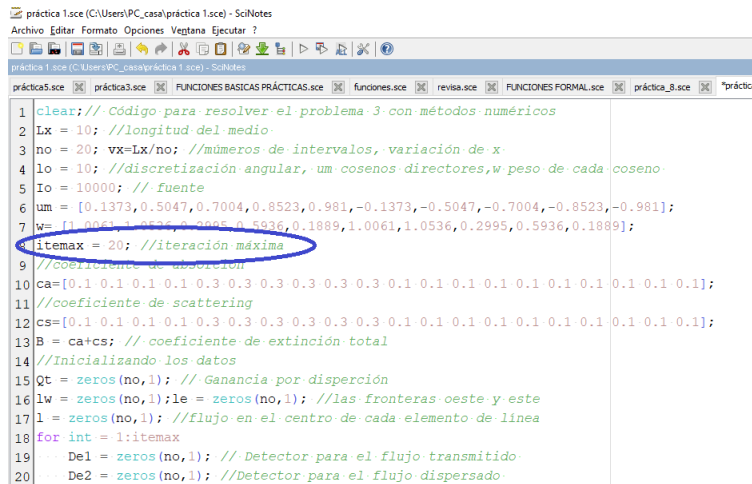
Tabla 5.9: Tabla de la cantidad de fotones transmitidos por cada centímetro de la barra heterogénea, resueltos con los métodos numéricos y Monte Carlo para el problema 3.

Longitud de la barra (cm)	Método Numérico Número de fotones detectados	Método Monte Carlo Número de fotones detectados
0	10000	10000
1	8347.34	8295
2	6933.75	6887
3	3917.18	3924
4	2192.11	2175
5	1219.62	1218
6	1003.35	1004
7	825.11	831
8	678.28	675
9	557.37	558
10	457.78	445

➤ **Convergencia del algoritmo de los métodos numéricos usado en el problema 3**

Los algoritmos empleados en el presente trabajo, donde se aplican los métodos numéricos (MDF y MOD) son procesos iterativos. En la sección 3.4, se presentó la cantidad de iteraciones necesarias ($h=20$) para resolver la ETR.

En esta subsección se procede analizar el algoritmo del ANEXO 7 y determinar la cantidad de procesos iterativos adecuados para resolver el problema 3. Para tal objetivo, se modifica la iteración máxima (itemax) ver Figura 5.14, tomando valores desde 1 hasta 10, cuyos resultados se muestra en la tabla 5.10.



```

1 clear; // Código para resolver el problema 3 con métodos numéricos
2 Lx = 10; // longitud del medio
3 no = 20; vx=Lx/no; // números de intervalos, variación de x
4 lo = 10; // discretización angular, um cosenos directores, w peso de cada coseno
5 Io = 10000; // fuente
6 lm = [0.1373, 0.5047, 0.7004, 0.8523, 0.981, -0.1373, -0.5047, -0.7004, -0.8523, -0.981];
7 w = [1.0063, 1.0536, 0.2995, 0.5936, 0.1889, 1.0061, 1.0536, 0.2995, 0.5936, 0.1889];
8 itemax = 20; // iteración máxima
9 // coeficiente de absorción
10 ca = [0.1 0.1 0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
11 // coeficiente de scattering
12 cs = [0.1 0.1 0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
13 B = ca+cs; // coeficiente de extinción total
14 // Inicializando los datos
15 Qt = zeros(no,1); // Ganancia por dispersión
16 lw = zeros(no,1); le = zeros(no,1); // las fronteras oeste y este
17 l = zeros(no,1); // flujo en el centro de cada elemento de línea
18 for int = 1:itemax
19     De1 = zeros(no,1); // Detector para el flujo transmitido
20     De2 = zeros(no,1); // Detector para el flujo dispersado

```

Figura 5.14 : Sección del código que resuelve el problema 3, donde se remarca la iteración máxima a cambiar.

Tabla 5.10: Tabla de la cantidad de partículas transmitidas por cada centímetro de la barra heterogénea para diferentes iteraciones usadas en el problema 3.

Longitud de la barra (en cm)	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3	Iteración 4	Iteración 5	Iteración 6	Iteración 7	Iteración 8	Iteración 9	Iteración 10
1	8154.21	8327.32	8344.61	8346.9	8346.9	8347.34	8347.34	8347.34	8347.34	8347.34
2	6649.12	6896.78	6928.24	6932.84	6932.84	6933.72	6933.75	6933.75	6933.75	6933.75
3	3589.56	3859.43	3906.69	3915.22	3915.22	3917.10	3917.16	3917.18	3917.18	3917.18
4	1937.84	2139.2	2181.16	2189.85	2189.85	2192.01	2192.09	2192.11	2192.11	2192.11
5	1046.15	1179.13	1210.4	1217.56	1217.56	1219.52	1219.6	1219.61	1219.62	1219.62
6	853.05	967.19	994.91	1001.42	1001.42	1003.26	1003.33	1003.35	1003.35	1003.35
7	695.6	793.08	817.46	823.33	823.33	825.02	825.09	825.11	825.11	825.11
8	567.21	650.14	671.42	676.66	676.66	678.20	678.26	678.28	678.28	678.28
9	462.51	532.82	551.27	555.9	555.9	557.29	557.35	557.36	557.36	557.37
10	377.14	436.58	452.44	456.48	456.48	457.71	457.76	457.77	457.78	457.78

La tabla 5.10 muestra los resultados obtenidos al ejecutar el código del ANEXO 7 que resuelve el problema 3 aplicando los métodos numéricos. Se observa, a partir de la iteración 6 que el algoritmo ya converge.

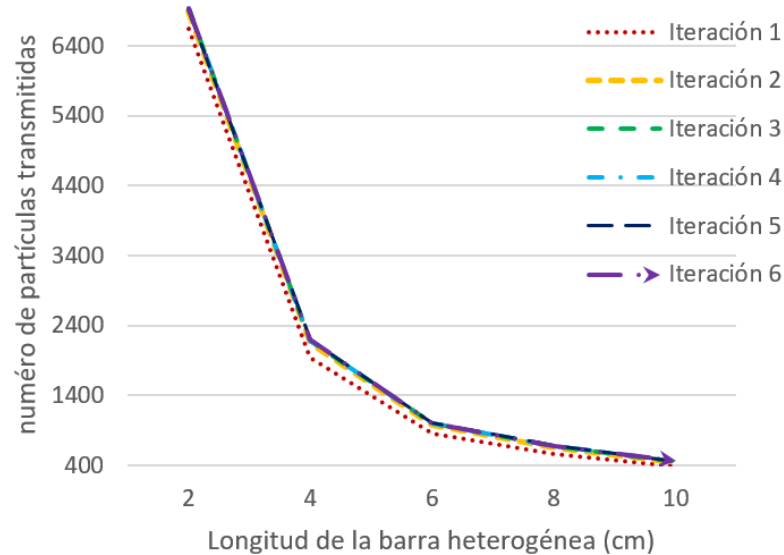


Figura 5.15: La convergencia del algoritmo usando los métodos numéricos para resolver el problema 3.

En la Figura 5.15 se puede apreciar la cantidad de partículas transmitidas versus la longitud de la barra heterogénea, resueltos con los métodos numéricos (MDF y MOD) para las iteraciones 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Siendo la iteración número 6 la que cumple con el criterio de parada del algoritmo.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

- ✓ De los resultados obtenidos se concluye de manera general que se ha resuelto el problema del transporte de la radiación en una placa infinita y en una barra heterogénea que tienen un medio absorbente y dispersor. Para tal fin, se resolvió la Ecuación de transferencia Radiativa (ETR) y se aplicó el método Monte Carlo (MC). Los códigos generados en el presente trabajo son aceptables para uso, ya que han sido validados teóricamente.

- ✓ En el presente trabajo de tesis se generó códigos donde se aplicó el método Monte Carlo (MC) para resolver el problema del transporte de la radiación en una placa infinita y una barra heterogénea, cuando ocurren los fenómenos de absorción y dispersión de la radiación.

- ✓ Los resultados obtenidos cuando se aplicó el método Monte Carlo (MC) para resolver el problema 1, muestra un error porcentual absoluto medio (MAPE) igual a 6.51%; mientras que, usando los métodos numéricos el MAPE es igual a 10.54%. A partir de estos resultados se concluye, que el código generado al usar el método Monte Carlo es más eficiente para resolver el problema de la placa infinita.

- ✓ En los resultados obtenidos aplicando los métodos numéricos para el problema 3 (transporte de la radiación por una barra heterogénea), se apreció la convergencia de su algoritmo a partir de la iteración 6. Sin embargo, teóricamente el algoritmo converge a partir de la iteración 20. Estos resultados muestran que el código generado tiene un buen rendimiento.

- ✓ Durante la ejecución del código, donde se aplicó el método Monte Carlo (MC) para resolver el problema 1 (absorción sin dispersión de la radiación), se ha verificado que al aumentar la cantidad de fotones que sale de la fuente, mayor es el tiempo computacional. Por otro lado, el tiempo computacional es mucho mayor en el problema 3, ya que ocurre los fenómenos de absorción y dispersión. En consecuencia, mientras aumente los valores de entrada o el tamaño (complejidad) del algoritmo mayor es el tiempo computacional.

RECOMENDACIONES

- ✓ Comprobar empíricamente los resultados obtenidos usando una fuente de radiación monocromática de alta energía y un medio de bajo coeficiente de atenuación lineal.

- ✓ Al ejecutar el código donde se aplica el método Monte Carlo, considerar que su tiempo computacional también depende de las características del ordenador, por tal motivo se recomienda que su RAM tenga una capacidad mayor de 8.00 GB para obtener los resultados presentados en este trabajo.

ANEXO 1

CÓDIGO APLICANDO LOS MÉTODOS NUMÉRICOS Y ANALÍTICO PARA COMPARAR SUS RESPECTIVOS RESULTADOS DEL PROBLEMA 1

```
clear;
Lx = 10; //longitud del medio.
no = 20; vx=Lx/no; //números de intervalos, variación de x.
lo = 10; //cantidad de discretizaciones angulares.
Io = 10000; // cantidad de fotones que sale de la fuente.
//um: cosenos directores.
um = [0.1373,0.5047,0.7004,0.8523,0.981,-0.1373,-0.5047,-0.7004,-0.8523,-0.981];
//w:peso de la cuadratura para sus respectivos cosenos directores (um).
w = [2.0122,2.1071,0.5990,1.1872,0.3778,2.0122,2.1071,0.5990,1.1872,0.3778];
itemax = 20; //iteracción máxima.
//ca:coeficiente de absorción
ca=[0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5];
// cs: coeficiente de scattering
cs=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
B = ca+cs; // B:coeficiente de extinción total
//Iniciando los datos
Qt = zeros(no,1); // Ganancia por dispersión
lw = zeros(no,1);le = zeros(no,1); //las intensidades oeste (lw) y este (le).
l = zeros(no,1); //flujo en el centro de cada elemento de línea
for int = 1:itemax
    Del = zeros(no,1); // Detector para el flujo transmitido
    De2 = zeros(no,1); //Detector para el flujo dispersado
    Q = zeros(no,1);
    for iu = 1:lo
        lw(1) = Io;
        le(no) = 0;
        //Para el Hemisferio I.
        if um(iu)>0 then
            for i = 1:no
                //l(i):Intensidad en la posición "i" de la Ec 3.18
                l(i) = (vx*Qt(i)+(2*lw(i))*um(iu))/(2*um(iu)+vx*B(i));
                if l(i)<0 then l(i) = 0; end;
                le(i) = 2*l(i)-lw(i);
                if i<no then lw(i+1) =le(i);end;
                Q(i) = w(iu)*l(i)+Q(i);
            end;
            Del = le;
            //Para el Hemisferio II.
```

```

elseif um(iu)<0 then
    for i = no:-1:1
        //l(i):Intensidad en la posición "i" de la Ec 3.19
        l(i) = (vx*Qt(i)-(2*le(i))*um(iu))/(-2*um(iu)+vx*B(i));
        if l(i)<0 then l(i) = 0;end;
        lw(i) = 2*l(i)-le(i);
        if i>1 then le(i-1)= lw(i);end;
        Q(i) = w(iu)*l(i)+Q(i);
    end;
    De2 =lw;
end;
end; //fin de las direcciones
for i = 1:no
    //Qt(i):Ganancia por dispersión en la posición "i"
    Qt(i)=(cs(i)*Q(i)*0.25)/%pi;
end;
end; //fin de las iteraciones
xgrid
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
y=[ Io Del(2) Del(4) Del(6) Del(8) Del(10) Del(12) Del(14) Del(16) Del(18)
Del(20)];
plot2d(x,y)
plot(x,y,'b','linewidth',2)

```

// SOLUCIÓN ANALÍTICA

```

Io = 10000
ca=0.5
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]
z= Io*exp(-ca*x)
plot(x,z,'r','linewidth',2),legend('Numérico','analítico')

```

ANEXO 2

CÓDIGO APLICANDO EL MÉTODO ANALÍTICO Y MONTE CARLO PARA COMPARAR SUS RESPECTIVOS RESULTADOS DEL PROBLEMA 1

```
clear; //Problema de la radiación en un medio absorbente y esparcidor (scattering)
I0 = 10000; //Intensidad de fotones que sale de la fuente
Lx = 10; //longitud del dominio del medio en una dimensión en centímetros
//coeficiente de absorción, en cada cm, que forma el medio
ca=[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
//coeficiente de dispersión, en cada cm que forma el medio
P2 = 1-exp(-ca); //probabilidad de perdida + retorno
De1 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo transmitido
De2 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo dispersado
for i = 1:I0
    E = 1; H = 0;
    while H==0
        n = rand();
        if E==Lx & n>P2(E) then De1(E) = De1(E)+1; H = 1;
        elseif E<Lx & n>P2(E) then E = E+1;
        else H = 1; De2(E) = De2(E)+1;
        end;
    end;
end;
De1(1)=I0-De2(1);
for i=2:Lx-1
    De1(i)=De1(i-1)-De2(i);
end
xgrid
xo=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
yo=[I0 De1(1) De1(2) De1(3) De1(4) De1(5) De1(6) De1(7) De1(8) De1(9) De1(10)];
plot2d(xo,yo);
plot(xo,yo,'r','linewidth',2)

// SOLUCIÓN ANALÍTICA
Io = 10000
ca=0.1
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]
z= Io*exp(-ca*x)
plot(x,z,'b','linewidth',2),legend('Monte Carlo','Analítico')
```


ANEXO 3

CÓDIGO APLICANDO LOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA 2

```
clear;
Lx = 10; //longitud del medio
no = 20; vx=Lx/no; //números de intervalos, variación de x
lo = 10; //discretización angular, um cosenos directores, w peso de cada coseno
NH = 10000; //fuente
um = [0.1373,0.5047,0.7004,0.8523,0.981,-0.1373,-0.5047,-0.7004,-0.8523,-0.981];
w = [1.0061,1.0536,0.2995,0.5936,0.1889,1.0061,1.0536,0.2995,0.5936,0.1889];
itemax = 20; //iteración máxima
//coeficiente de absorción
ca=[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
//coeficiente de scattering
cs=[0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5];
B = ca+cs; // coeficiente de extinción total
//Iniciando los datos
Qt = zeros(no,1); // Ganancia por dispersión
lw = zeros(no,1);le = zeros(no,1); //las fronteras oeste y este
l = zeros(no,1); //flujo en el centro de cada elemento de línea
for int = 1:itemax
    De1 = zeros(no,1); // Detector para el flujo transmitido
    De2 = zeros(no,1); //Detector para el flujo dispersado
    Q = zeros(no,1);
    for iu = 1:lo
        lw(1) = NH;
        le(no) = 0;
        if um(iu)>0 then
            for i = 1:no
                l(i) = (vx*Qt(i)+(2*lw(i))*um(iu))/(2*um(iu)+vx*B(i));
                if l(i)<0 then l(i) = 0; end;
                le(i) = 2*l(i)-lw(i);
                if i<no then lw(i+1) =le(i);end;
                Q(i)= w(iu)*l(i)+Q(i);
            end;
            De1 = le;
        elseif um(iu)<0 then
            for i = no:-1:1
                l(i) = (vx*Qt(i)-(2*le(i))*um(iu))/(-2*um(iu)+vx*B(i));
                if l(i)<0 then l(i) = 0;end;
                lw(i) = 2*l(i)-le(i);
```

```

        if i>1 then le(i-1)= lw(i);end;
        Q(i) = w(iu)*l(i)+Q(i);
    end;
    De2 =lw;
end;
end; //fin de las direcciones
for i = 1:no
    Qt(i)=(cs(i)*Q(i)*0.25)/%pi;
end;
end; //fin de las iteraciones
xgrid
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
y=[ NH Del(2) Del(4) Del(6) Del(8) Del(10) Del(12) Del(14) Del(16) Del(18)
Del(20)];

plot2d(x,y)

```

ANEXO 4

CÓDIGO APLICANDO EL MÉTODO MONTE CARLO PARA RESOLVER EL PROBLEMA 2

```
clear; //Problema de la radiación en un medio absorbente y esparcidor
(scattering)
I0 = 10000; //Intensidad de fotones que sale de la fuente
Lx = 10; //longitud del dominio del medio en una dimensión en centímetros
//coeficiente de absorción, en cada cm, que forma el medio
ca=[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
//coeficiente de dispersión, en cada cm que forma el medio
cs=[0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5];
P1 = 0.0321-0.4/(4*3.1416)*(1.0-cs+cs^2/2-cs^3/6+cs^4/24-cs^5/120);
//probabilidad de retorno
P2 = 1-exp(-ca-cs)-P1; //probabilidad de perdida + retorno
De1 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo transmitido
De2 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo dispersado
for i = 1:I0
E = 1; H = 0;
while H==0
n = rand();
if E==Lx & n>P2(E) then De1(E) = De1(E)+1; H = 1;
elseif E>1 & n<=P1(E) then E = E-1;
elseif E<Lx & n>P2(E) then E = E+1;
else H = 1; De2(E) = De2(E)+1;
end;
end;
end;
De1(1)=I0-De2(1);
for i=2:Lx-1
De1(i)=De1(i-1)-De2(i);
end
xgrid
xo=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
yo=[I0 De1(1) De1(2) De1(3) De1(4) De1(5) De1(6) De1(7) De1(8) De1(9)
De1(10)];
plot2d(xo,yo);
plot(xo,yo,'-r')
```

ANEXO 5

CÓDIGO APLICANDO LOS MÉTODOS NUMÉRICOS Y MONTE CARLO PARA COMPARAR SUS RESPECTIVOS RESULTADOS DEL PROBLEMA 2

```
clear;
Lx = 10; //longitud del medio
no = 20; vx=Lx/no; //números de intervalos, variación de x
lo = 10; //discretización angular, um cosenos directores, w peso de cada coseno
Io = 10000; //fuente
um = [0.1373,0.5047,0.7004,0.8523,0.981,-0.1373,-0.5047,-0.7004,-0.8523,-
0.981];
w= [1.0061,1.0536,0.2995,0.5936,0.1889,1.0061,1.0536,0.2995,0.5936,0.1889];
itemax = 20; //iteración máxima
//coeficiente de absorción
ca=[0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 ];
//coeficiente de scattering
cs=[0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01
0.01 0.01 0.01 0.01 0.01];
B = ca+cs; // coeficiente de extinción total
//Inicializando los datos
Qt = zeros(no,1); // Ganancia por dispersión
lw = zeros(no,1);le = zeros(no,1); //las fronteras oeste y este
l = zeros(no,1); //flujo en el centro de cada elemento de línea
for int = 1:itemax
    De1 = zeros(no,1); // Detector para el flujo transmitido
    De2 = zeros(no,1); //Detector para el flujo dispersado
    Q = zeros(no,1);
    for iu = 1:lo
        lw(1) = Io;
        le(no) = 0;
        if um(iu)>0 then
            for i = 1:no
                l(i) = (vx*Qt(i)+(2*lw(i))*um(iu))/(2*um(iu)+vx*B(i));
                if l(i)<0 then l(i) = 0; end;
                le(i) = 2*l(i)-lw(i);
                if i<no then lw(i+1) =le(i);end;
                Q(i)= w(iu)*l(i)+Q(i);
```

```

end;
De1 = le;
elseif um(iu)<0 then
for i = no:-1:1
l(i) = (vx*Qt(i)-(2*le(i))*um(iu))/(-2*um(iu)+vx*B(i));
if l(i)<0 then l(i) = 0;end;
lw(i) = 2*l(i)-le(i);
if i>1 then le(i-1)= lw(i);end;
Q(i) = w(iu)*l(i)+Q(i);
end;
De2 =lw;
end;
end; //fin de las direcciones
for i = 1:no
Qt(i)=(cs(i)*Q(i)*0.25)/%pi;
end;
end; //fin de las iteraciones
xgrid
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
y=[ Io De1(2) De1(4) De1(6) De1(8) De1(10) De1(12) De1(14) De1(16)
De1(18) De1(20)];

```

```

plot2d(x,y)
plot(x,y,'b','linewidth',2)

```

```

//Problema de la radiación en un medio absorbente y esparcidor (scattering)
I0 = 10000; //Intensidad de fotones que sale de la fuente
Lx = 10; //longitud del dominio del medio en una dimensión en centímetros
//coeficiente de absorción, en cada cm, que forma el medio
ca=[0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5];
//coeficiente de dispersión, en cada cm que forma el medio
cs=[0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01];
P1 = 0.0321-0.4/(4*3.1416)*(1.0-cs+cs^2/2-cs^3/6+cs^4/24-cs^5/120);
//probabilidad de retorno
P2 = 1-exp(-ca-cs)-P1; //probabilidad de perdida + retorno
De1 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo transmitido
De2 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo dispersado
for i = 1:I0
E = 1; H = 0;
while H==0
n = rand();
if E==Lx & n>P2(E) then De1(E) = De1(E)+1; H = 1;
elseif E>1 & n<=P1(E) then E = E-1;

```

```

    elseif E<Lx & n>P2(E) then E = E+1;
    else H = 1; De2(E) = De2(E)+1;
    end;
end;
end;
De1(1)=I0-De2(1);
for i=2:Lx-1
    De1(i)=De1(i-1)-De2(i);
end
xgrid
xo=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
yo=[I0 De1(1) De1(2) De1(3) De1(4) De1(5) De1(6) De1(7) De1(8) De1(9)
De1(10)];
plot2d(xo,yo);
plot(xo,yo,'-r','linewidth',2)

xlabel('longitud de la barra (cm)','fontsize',5)
ylabel('número de partículas transmitidas','fontsize',5)
legend('numérico','Monte Carlo')
legend('Numérico','Monte Carlo')
title('Ca=0.5 & Cs=0.01','fontsize',5)

```

ANEXO 6

CÓDIGO APLICANDO EL MÉTODO MONTE CARLO PARA RESOLVER EL PROBLEMA 3

```
clear//Problema de la radiación en un medio absorbente y esparcidor (scattering)
I0 = 10000; //Intensidad de fotones que sale de la fuente
Lx = 10; //longitud del dominio del medio en una dimensión en centímetros
//coeficiente de absorción, en cada cm, que forma el medio
ca=[0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
//coeficiente de dispersión, en cada cm que forma el medio
cs=[0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
P1 = 0.0321-0.4/(4*3.1416)*(1.0-cs+cs^2/2-cs^3/6+cs^4/24-cs^5/120);
//probabilidad de retorno
P2 = 1-exp(-ca-cs)-P1; //probabilidad de perdida + retorno
De1 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo transmitido
De2 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo dispersado
for i = 1:I0
    E = 1; H = 0;
    while H==0
        n = rand();
        if E==Lx & n>P2(E) then De1(E) = De1(E)+1; H = 1;
        elseif E>1 & n<=P1(E) then E = E-1;
        elseif E<Lx & n>P2(E) then E = E+1;
        else H = 1; De2(E) = De2(E)+1;
    end;
end;
De1(1)=I0-De2(1);
for i=2:Lx-1
    De1(i)=De1(i-1)-De2(i);
end
xgrid
xo=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
yo=[I0 De1(1) De1(2) De1(3) De1(4) De1(5) De1(6) De1(7) De1(8) De1(9)
De1(10)];

plot2d(xo,yo);
plot(xo,yo,'-r','linewidth',2)

xlabel('longitud de la barra heterogénea (cm)','fontsize',5)
ylabel('número de partículas transmitidas','fontsize',5)
```

ANEXO 7

CÓDIGO APLICANDO LOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA 3

```

clear;
Lx = 10; //longitud del medio
no = 20; vx=Lx/no; //números de intervalos, variación de x
lo = 10; //discretización angular, um cosenos directores,w peso de cada coseno
NH = 10000; // fuente
um = [0.1373,0.5047,0.7004,0.8523,0.981,-0.1373,-0.5047,-0.7004,-0.8523,-0.981];
w= [1.0061,1.0536,0.2995,0.5936,0.1889,1.0061,1.0536,0.2995,0.5936,0.1889];
itemax = 20; //iteración máxima
//coeficiente de absorción
ca=[0.1 0.1 0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
//coeficiente de scattering
cs=[0.1 0.1 0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
B = ca+cs; // coeficiente de extinción total
//Iniciando los datos
Qt = zeros(no,1); // Ganancia por dispersión
lw = zeros(no,1);le = zeros(no,1); //las fronteras oeste y este
l = zeros(no,1); //flujo en el centro de cada elemento de línea
for int = 1:itemax
    De1 = zeros(no,1); // Detector para el flujo transmitido
    De2 = zeros(no,1); //Detector para el flujo dispersado
    Q = zeros(no,1);
    for iu = 1:lo
        lw(1) = NH;
        le(no) = 0;
        if um(iu)>0 then
            for i = 1:no
                l(i) = (vx*Qt(i)+(2*lw(i))*um(iu))/(2*um(iu)+vx*B(i));
                if l(i)<0 then l(i) = 0; end;
                le(i) = 2*l(i)-lw(i);
                if i<no then lw(i+1) =le(i);end;
                Q(i)= w(iu)*l(i)+Q(i);
            end;
            De1 = le;
        elseif um(iu)<0 then
            for i = no:-1:1
                l(i) = (vx*Qt(i)-(2*le(i))*um(iu))/(-2*um(iu)+vx*B(i));
                if l(i)<0 then l(i) = 0;end;
                lw(i) = 2*l(i)-le(i);
                if i>1 then le(i-1)= lw(i);end;
                Q(i) = w(iu)*l(i)+Q(i);
            end;
            De2 =lw;
        end;
    end; //fin de las direcciones
    for i = 1:no
        Qt(i)=(cs(i)*Q(i)*0.25)/%pi;
    end;
end; //fin de las iteraciones
xgrid
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
y=[ NH De1(2) De1(4) De1(6) De1(8) De1(10) De1(12) De1(14) De1(16) De1(18) De1(20)];
plot2d(x,y)

```


APÉNDICE

TÉCNICAS DE VALIDACIÓN DE MODELOS DE SIMULACIÓN

Error porcentual absoluto medio (MAPE)

El error porcentual absoluto medio (*Mean Absolute Percentage Error*) es un indicador de desempeño que mide el tamaño de error absoluto. Se considera como el promedio del error absoluto o diferencia entre el valor real y el estimado, expresado como un porcentaje de los valores reales [29].

$$MAPE = \frac{\sum_{e=1}^E \left| \frac{I_{exacto} - I_{e,calculado}}{I_{exacto}} \right|}{E}. \quad A.1$$

Donde:

I_{exacto} : Es la solución analítica.

$I_{e,calculado}$: Es la solución con el método calculado.

e : Es el valor en cada ejecución del programa

E : Es el numero total de ejecuciones del programa para el cálculo del MAPE.

Porcentaje de la raíz del cuadrado medio del error (*RMSPE*)

Es una de las medidas más usada para la validación de modelos de simulación, donde el error está normalizado con el uso del promedio de las medidas [27].

$$\text{RMSPE} = 100 * \sqrt{\frac{\sum_{e=1}^E \left(\frac{I_{\text{exacto}} - I_{e,\text{calculado}}}{I_{\text{exacto}}} \right)^2}{E}}. \quad \text{A. 2}$$

Donde:

I_{exacto} : Es la solución analítica.

$I_{e,\text{calculado}}$: Es la solución con el método calculado.

e : Es el valor en cada ejecución del programa

E : Es el numero total de ejecuciones del programa para el cálculo del RMSPE.

REFERENCIAS

- [1] Duderstadt, J. J., & Martin, W. R. (1979). Transport theory. *Transport theory*.
- [2] Incropera, F. P., & De Witt, D. P. (1999). Flujo externo. *Fundamentos de Transferencia de Calor*, 346-394.
- [3] Miralles, J. M. (Ed.). (1991). *La teledetección en el seguimiento de los fenómenos naturales. Recursos renovables: agricultura*. Universitat de València.
- [4] Durán, P., Acevedo, P., & Garrido, E. (2004). Un modelo de Radiación UV desde Medidas Espectroradiométricas. *Charlas de Física, Publicaciones del Departamento de Física*, (18), 33e38.
- [5] Duderstadt, J. J., Hamilton, L. J., Moorthy, S., & Scott, C. C. (1977). Nuclear Reactor Analysis by James J. Duderstadt and Louis J. Hamilton. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 24(4), 1983-1983.
- [6] Fiveland, W. A., & Jamaluddin, A. S. (1991). Three-dimensional spectral radiative heat transfer solutions by the discrete-ordinates method. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 5(3), 335-339.
- [7] Fiveland, W. A. (1987). Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media. *Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineers), Series C);(United States)*, 109(3).
- [8] Arridge, S. R., & Schotland, J. C. (2009). Optical tomography: forward and inverse problems. *Inverse problems*, 25(12), 123010.
- [9] Tito, M. B., Cabrera, C. E. V., & Montero, R. C. (2010). El método de Monte Carlo y la solución de la ecuación de transferencia radiativa. *Revista de investigación de física*, 13(02), 1-9.
- [10] Rebollo, D., Velasco, M., & Bocca, F. (2016). Análisis numérico de la transferencia de calor por conducción y radiación térmica combinadas en un medio esférico participante. *Mecánica Computacional*, 34(27), 1907-1924.

- [11] Chandrasekhar, S. (2013). *Radiative transfer*. Courier Corporation.
- [12] Elaloufi, R., Arridge, S., Pierrat, R., & Carminati, R. (2007). Light propagation in multilayered scattering media beyond the diffusive regime. *Applied optics*, 46(13), 2528-2539.
- [13] Barrera, P. S., & Mercado, V. H. I. El método Monte-Carlo y su aplicación a finanzas. *Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana/Iztapalapa*.
- [14] Trujillo, J. G., Cortés, M. P., & Gamboa, J. M. (2008). Simulación del esparsamiento de la luz en medios biológicos mediante el método Monte Carlo. *Ingeniería*, 12(2), 57-65.
- [15] Chandler, W. P., Hartmann-Siantar, C. L., & Rathkopf, J. A. (1999). *U.S. Patent No. 5,870,697*. Washington, DC: U.S. Patent and Trademark Office.
- [16] Rodrigues, P., Trindade, A., Peralta, L., Alves, C., Chaves, A., & Lopes, M. C. (2004). Application of GEANT4 radiation transport toolkit to dose calculations in anthropomorphic phantoms. *Applied Radiation and Isotopes*, 61(6), 1451-1461.
- [17] Fiveland, W. A. (1984). Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures.
- [18] Garrido, A., & Conesa, E. M. (2009). Simulación por el método de Monte Carlo para generar criterios de aceptación en el control de calidad de productos de construcción. *Informes de la Construcción*, 61(515), 77-85.
- [19] Díaz, N. A. C. (2009). *Desarrollo de un código de simulación por Monte Carlo para la calibración de sistemas de detección en espectrometría de radiación gamma* (Doctoral dissertation, Universidad de Extremadura).
- [20] Mayer, M. (1951). Report on a Monte Carlo calculation performed with the ENIAC. *Monte Carlo Method*, 19-20.
- [21] Nieto, J. A., & Vega, J. C. A. (2010). *Protección radiológica*. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería.

- [22] Rojas, J., Manrique, E., & Frants, I. (2005). Simulación Monte Carlo de la correlación local y formación de clusters en las aleaciones binarias modelo de tipo fcc.
- [23] Team, M. C. (2003). MCNP A General Monte Carlo N-Particle Transport Code Version 5 Volume I: Overview and Theory. *Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, LA-UR-03-1987*.
- [24] Sóbol, I. M. (1976). Método de Montecarlo Lecciones populares de matemáticas. *Mir, año*.
- [25] El Wakil, N., & Sacadura, J. F. (1992). Some improvements of the discrete ordinates method for the solution of the radiative transport equation in multidimensional anisotropically scattering media. *Developments in radiative heat transfer*, 119-127.
- [26] MUÑOZ FLORES, F. L. (2018). SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR RADIATIVA EN UN MEDIO DISPERSIVO APLICADO A LAGUNAS SOLARES.
- [27] Sterman, J. D. (1984). Appropriate summary statistics for evaluating the historical fit of system dynamics models. *Dynamica*, 10(2), 51-66.
- [28] Tito, M. B., Montero, R. C., Bravo, J. A., & da Silva Neto, A. J. (2014). Estrategia para el estimado de los coeficientes de absorción y esparcimiento en medios participantes unidimensionales. *Revista de Investigación de Física*, 17(01), 1-8.
- [29] Mayer, D. G., & Butler, D. G. (1993). Statistical validation. *Ecological modelling*, 68(1-2), 21-32.
- [30] AZORIN VEGA, C. G. (2013). *Simulación de la interacción de fotones en la materia usando el método Monte Carlo* (Doctoral dissertation).
- [31] López, M. V., & Mariño, S. I. (2002). Aplicación del Método de Montecarlo para el cálculo de integrales definidas. In *IV Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*.
- [32] Bielajew, A. F. (2013). History of monte carlo. *Monte Carlo techniques in radiation therapy*, 1.
- [33] Porras Gonzales, I. (2018). Solución numérica de la ecuación de transferencia de radiación (ETR) en una dimensión.

[34] Juste Vidal, B. J. (2011). *Aplicación del Método de Monte Carlo a la Planificación en Radioterapia ya la Reconstrucción de Espectros de Fotones de Aceleradores Lineales de Partículas (LinAc)* (Doctoral dissertation, Editorial Universitat Politècnica de València).

[35] Tagliabue, C. U. Á., & Marino, P. (2007). Utilización del método de elementos finitos discontinuos para la resolución de la ecuación de transferencia radiativa. *Mecánica Computacional*, (41), 3493-3511.