Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Comportamiento de la función punto medio y función puntos extremos sobre continuos clásicos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Leonidas Miguel ACUÑA GUILLERMO

ASESOR

Mg. William César OLANO DÍAZ

Lima, Perú

2020

Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Acuña, L. (2020). *Comportamiento de la función punto medio y función puntos extremos sobre continuos clásicos*. Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código ORCID del autor	-
DNI o pasaporte del autor	44808158
Código ORCID del asesor	0000-0002-0254-9123
DNI o pasaporte del asesor	47161385
Grupo de investigación	Villareal
Agencia financiadora	-
Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación	General Garzón 1015-interior 2A-Jesús María, Lima-Perú. -12.06982, -77.04495
Disciplinas OCDE	https://concytec-pe.github.io/vocabularios/ocde_ford.html#1.01.00

Nota: tomar en cuenta la forma de llenado según las precisiones colocas en la web.
https://sisbib.unmsm.edu.pe/archivos/documentos/recepcion_investigacion/Hoja%20de%20metadatos%20complementarios_30junio.pdf

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:00 horas del Viernes 09 de octubre del 2020, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Mg. Heidi Marlene Chupayo Evangelista (PRESIDENTE), Mg. Marco Antonio Rubio Gallarday (MIEMBRO) Y EL Mg. William César Olano Diaz (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN PUNTO MEDIO Y FUNCIÓN PUNTOS EXTREMOS SOBRE CONTINUOS CLÁSICOS», presentada por el señor Bachiller Leonidas Miguel Acuña Guillermo, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

DIECIOCHO (18) SOBRESALIENTE

A continuación, el Presidente del Jurado, Mg. Heidi Marlene Chupayo Evangelista, manifestó que el señor Bachiller LEONIDAS MIGUEL ACUÑA GUILLERMO, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 12:20 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

MG. HEIDI MARLENE CHUPAYO EVANGELISTA
PRESIDENTE

MG. MARCO ANTONIO RUBIO GALLARDAY
MIEMBRO

MG. WILLIAM CÉSAR OLANO DIAZ
MIEMBRO ASESOR

DEDICATORIA

A mi madre, *Domi. Guillermo S.*, gracias por educarme con ternura. Te amo demasiado, gracias por el apoyo incondicional a lo largo del tiempo *eso para mi, ese es tu gran legado*. Éste trabajo es producto de tu apoyo constante, te amo mucho.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco con todo mi corazón a Dios y mi familia. Gracias Papá, por mostrarme enfrentar las adversidad con valentía, Gracias Mamá, porque sin tus consejos, no tendría nada ahora. Gracias José Luis, mi gran y único hermano, te quiero mucho hermano. Por otro lado, quiero separar este espacio para dar unas palabras a los gestores del desarrollo del presente trabajo, a mi asesor de tesis, Mg. William César Olano Diaz, gracias profesor por guiarme en tan hermoso tema de investigación y por las muchas horas de estudio para la presentación final de este trabajo. Además, al Dr. Javier Sanchéz-Martinez(UNACH-México), gracias Javier, por las sugerencias y pistas finales para darle brillo al presente escrito, fue muy grato poder ganar un nuevo amigo desde tan lejos, valoro demasiado tu apoyo. Además, a mis sinodales, Mg. Heidi Chupayo E. y Mg. Marco Rubio G., por las sugerencias para fortalecer las afirmaciones expuestas en el presente trabajo. En la misma línea, agradecer enormemente al Dr. Pedro C. Contreras Ch., al maestro, al mentor y al amigo, fue especial recibir los consejos y por las largas charlas que se tuvo para enriquecer el presente trabajo.

RESUMEN

Comportamiento de la Función Punto Medio y Función Puntos Extremos sobre continuos clásicos

Leonidas Miguel Acuña Guillermo

Octubre 2020

Orientador: Mg. William César Olano Diaz
Grado obtenido Licenciado en Matemática Pura

El presente trabajo se enfoca en el estudio del comportamiento de la función punto medio y función punto extremos en el hiperespacio de los sub-continuos $C(X)$, desde el punto de vista geométrico. Con este objetivo, revisaremos la teoría de continuos e hiperespacios. Además, una herramienta indispensable en nuestro estudio, es emplear las construcciones de los modelos geométricos de hiperespacio sobre los continuos clásicos, como lo son el arco, la curva cerrada cerrada simple y el triodo simple.

Palabras clave: Continuos, Función punto medio y Función Puntos Extremos, Hiperespacios de continuos clásicos, Modelos Geométricos.

ABSTRACT

Behaviour of the Midpoint Function and End Points Function about classic continuum

Leonidas Miguel Acuña Guillermo

October 2020

Advisor: Mg.William César Olano Diaz
Obtained Title: Licenciature in Pure Mathematics

The present work focuses on the study of the behavior of the midpoint function and the extreme point function in hyperspace of sub continuum $C(X)$, from the geometric point of view. With this objective, we will review the theory of continuums and hyperspaces. Furthermore, an indispensable tool in our study is to use the constructions of the hyperspace geometric models on the classical continuums, such as the arc, the simple closed closed curve and the simple triode.

Keywords: Continuum , Midpoint Function y End Point Function, Hyperspace of continuum and Geometric Models.

ÍNDICE GENERAL

Introdución 1

1. Herramientas Básicas **3**
1.1. Espacio Métrico 4
1.1.1. Espacios Topológicos inducidos por una métrica 7
1.2. Continuidad de Funciones entre Espacios Métricos 11
1.2.1. Continuidad en Producto Cartesiano 15
1.3. Conexidad 15
1.4. Compacidad 20
1.5. Continuos 23
1.5.1. Ejemplos de continuos 24
1.5.2. Una receta para construir continuos 26
1.5.3. Continuos localmente conexos 29

2. Hiperespacios de continuos **30**
2.1. La métrica de Hausdorff para 2^X 31
2.2. Topología de Vietoris 39
2.3. Modelos Clásicos para $C(X)$ 49
2.3.1. El hiperespacio de los subcontinuos del arco 50
2.3.2. El hiperespacio de los subcontinuos de la curva cerrada simple 52
2.3.3. El hiperespacio de los subcontinuos del triodo simple 55
2.4. Modelos para productos simétricos $F_2(X)$ 58
2.4.1. El segundo producto simétrico del arco 58
2.4.2. El segundo producto simétrico del tríodo simple 60
2.4.3. El segundo producto simétrico de la curva cerrada simple . . . 62

3. Funciones Especiales en los Hiperespacios $D(X)$ y $G(X)$ **66**
3.1. Función de puntos extremos 68

3.2. Función punto medio 70
3.2.1. Función de Whitney 70
3.2.2. Función Punto Medio 72
3.3. Descripciones Importantes 74
3.3.1. Descripción para $\mathbb{E}$ 74
3.3.2. Descripción para $\mathcal{I}_\rho$ 81

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Distancia entre dos conjuntos en $\mathbb{R}^2$ 5
1.2. Axiomas de separación 10
1.3. Ejemplos especiales de conexidad 19
1.4. Ejemplos de continuos 26

2.1. Representación de la nube 32
2.2. Diámetro del conjunto A 34
2.3. Distancia de Hausdorff 35
2.4. El Hiperespacio $C(I)$ 51
2.5. Segunda forma de representar a $C(I)$ 52
2.6. Subarcos mayor y menor de $\mathbb{S}^1$ 53
2.7. Identicación longitud y Punto medio 54
2.8. Representación (C) 55
2.9. Subcontinuos de $C(\overline{ve_1})$, $C(\overline{ve_2})$ y $C(\overline{ve_3})$ 56
2.10. Subcontinuos de $C_v(\mathbb{T})$ 56
2.11. Modelo de $C(\mathbb{T})$ 57
2.12. Modelo de $\triangle$ 59
2.13. Representación de $F_2(I)$ 60
2.14. Subcontinuos de $F_2(\overline{ve_1} \cup \overline{ve_2})$, $F_2(\overline{ve_1} \cup \overline{ve_3})$ y $F_2(\overline{ve_2} \cup \overline{ve_3})$ 61
2.15. Subcontinuos de $F_2(\overline{va} \cup \overline{vb}) \cup F_2(\overline{va} \cup \overline{vc}) \cup F_2(\overline{vb} \cup \overline{vc})$ 61
2.16. Modelo de $F_2(\mathbb{T})$ 62
2.17. Banda de Möbius 63
2.18. Representación del conjunto $F_2(p, \mathbb{S}^1)$ 65

3.1. Encaje de $C(I)$ hacia $F_2(I)$ 75
3.2. Modelo de $G(\mathbb{T})$ 76
3.3. Modelo de $F_2(\mathbb{T})$ de solo arcos 77
3.4. Encaje de $G(\mathbb{T})$ hacia $F_2(\mathbb{T})$ 78

3.5. Arcos en el subcontinuo de $\mathbb{S}^1$ 79
3.6. Encaje de $G(\mathbb{S}^1)$ hacia $F_2(\mathbb{S}^1)$ 80

INTRODUCCIÓN

Nuestro estudio de tesis se inicia dentro de la Teoría de los Continuos y de sus Hiperespacios. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y con más de punto. Dado un continuo X, se denotaremos por 2^X al espacio $\{A \subset X : A \text{ es un cerrado de } X\}$ dotado de la topología de Vietoris, o en el mejor los casos, lo dotaremos con la métrica de Hausdorff. Podemos pensar para un hiperespacio de X es equivalente decir, cualquier subespacio no vacío de 2^X. En [15, pág 601], Nadler propone investigar las propiedades de otros hiperespacios como el caso del hiperespacio de arcos de un continuo X la cual se define como

$$D(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco}\}.$$

Tiempo después, A. Soto retoma en [19] la propuesta de Nadler y define el hiperespacio de arcos y singulares de la siguiente manera:

$$G(X) = D(X) \cup \{\{x\} : x \in X\} = D(X) \cup F_1(X).$$

Posterioremente, I. Serapio en [18] y [17] define de manera natural, haciendo uso de la función de Whitney, dos funciones especiales, las cuales las denominó Función Punto Medio y Función Puntos Extremos. Ahí mismo, él presenta algunos resultados relacionando estas funciones con la estructura de un continuo y sus hiperespacios. En virtud a esa secuencia de estudio, el propósito de la tesis es describir

con más detalle cuál es el comportamiento de cada función especial para los casos cuando se tiene un arco, un tríodo simple y una curva cerrada simple partiendo desde el punto de vista de sus modelos geométricos. Los resultados principales que se presentan se encuentran en el apartado 3.3.1 y 3.3.2.

El presente trabajo de tesis esta organizado de la siguiente manera.

En el Capítulo 1, se proporcionan los conceptos básicos para una mejor comprensión.

En el Capítulo 2, estudiaremos algunos resultados que son condiciones necesarias o suficientes para garantizar una métrica y topología para el hiperespacio 2^X, a su vez, esto nos garantiza poder establecer los modelos geométricos para los hiperespacios $C(X)$ y $F_2(X)$ para los continuos clásicos.

Finalmente, en el Capítulo 3, se establecen las definiciones y resultados iniciales para obtener a la Función Medio y Función Puntos Extremos, y así poder describirlos cuando se tiene un arco, un tríodo simple y una curva cerrada simple.

Para la lectura de este trabajo se recomienda un primer curso de topología por los conceptos y notación que se manejan en el mismo.

CAPÍTULO 1

HERRAMIENTAS BÁSICAS

Para iniciar, se exponen algunos resultados básicos de la topología general, para luego pasar entender a los continuos. Se presentan de manera diferente a como aparecen en los textos, se incluyen las referencias bibliográficas de varios resultados. Siempre se tratará de detallar de manera técnica y sencilla el contenido.

En la primera sección se presentan, conceptos relacionados a los espacios métricos, y se mencionan los reconocidos axiomas de separación. En la segunda sección se exponen, unos de los temas más importantes en la Topología, el concepto de continuidad, y sus propiedades fuertemente ligadas a la continuidad de funciones entre dos conjuntos y su relación con productos cartesianos. Además, se resalta la Ejemplo 7 que explica un caso especial de funciones continuas, los homeomorfismos, siendo una clase especial de funciones las que más usaremos. En la tercera sección se presentan, resultados de gran importancia como lo son la conexidad, por la idea de tener conjuntos de una sola pieza. En la cuarta sección se presenta, el concepto de compacidad, donde se muestra que esta propiedad topológica es equivalente con la propiedad de intersección finita, lo cual nos permitirá trabajar este concepto desde dos perspectivas diferentes. En la quinta sección se presenta, el concepto de un continuo, con algunos resultados sobresalientes, con el fin de que el lector adquiera conocimientos básicos de como ver a un

continuo. Por razones obvias, la teoría de continuos presenta una vasta lista de resultados y temas de interés que aún faltan por investigar, es por ello que para fines del escrito se considero lo *necesario* para su desarrollo.

1.1. Espacio Métrico

Sea X un conjunto cualquiera, no vacío, cuyos elementos se llamarán puntos.

Definición 1.1. *Una métrica en X es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, que cumple lo siguiente:*

1. $d(x, y) \geq 0$, *para todo* x, $y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *para todo* $x, y \in X$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$, *para todo* x, $y \in X$.
4. $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *para todo* $x, y, z \in X$.

Para nuestro estudio, la pareja (X, d) se le llama espacio métrico. Desde aquí en adelante, se denota a la pareja (X, d) como el espacio métrico X, suponiendo que este conjunto tiene asociada una métrica d.

Ejemplo 1. *En $\mathbb{R}^n$ se pueden definir varias métricas, estas son algunas de las más usuales:*

1. $d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.
2. $d_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.
3. $d_3(x, y) = máx\{|y_i - x_i|\}_{i=1}^{n}$.

Dados que (X, d), $A \neq \emptyset$ y $x \in X$, la familia de números reales $\{d(x, y) : y \in A\}$ esta acotado inferiormente por 0. Por lo tanto, existe $inf\{d(x, y) : y \in A\} \geqslant 0$.

Definición 1.2. *Si A es un subconjunto no vacío de X, se dirá que la* distancia de un punto $x_0 \in X$ *al conjunto A como el número real denotado por $d(x_0, A)$*

$$d(x_0, A) = \text{ínf}\{d(x_0, a) : a \in A\}.$$

Notar que si A es un subconjunto de X tal que $x_0 \in A$, entonces $d(x_0, A) = 0$; pero el recíproco no se cumple, puede ocurrir que $d(x_0, A) = 0$ y $x_0 \notin A$.

Ejemplo 2. *Considere $\mathbb{R}$ con la métrica usual y el conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, se da que $d(0, A) = 0$ y $0 \notin A$.*

Definición 1.3. *Si A, B son subconjuntos no vacíos de X, se dirá la* distancia entre dos conjuntos $d(A, B)$*, como el número real,*

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Ver que si $A \cap B \neq \emptyset$, es inmediato ver que $d(A, B) = 0$. Sin embargo, no se cumple el recíproco, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. *Sean los conjuntos $A = \langle a, b\rangle$ y $B = \langle b, c\rangle$, ambos son tomados de la recta real, es evidente que son disjuntos, pero su distancia $d(A, B) = 0$.*

Ejemplo 4. *En $\mathbb{R}^2$, dados los subconjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\}$ y $B = \mathbb{R} \times \{0\}$ se da que $d(A, B) = 1$. Puede ver en la Figura 1.1.*

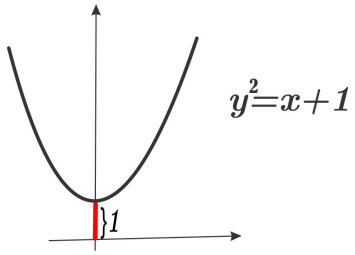


Figura 1.1: Distancia entre dos conjuntos en $\mathbb{R}^2$

Definición 1.4. *Dado $a \in X$ fijo y ϵ un real positivo.*

1. *Se dirá* bola abierta *con centro en a y radio ϵ al subconjunto de X*
$$B(a, \epsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}.$$

2. *Se dirá* bola cerrada *con centro en a y radio ϵ al subconjunto de X*
$$B[a, \epsilon] = \{x \in X : d(x, a) \leq \epsilon\}.$$

Definición 1.5. *Dado $y \in X$ fijo y $\epsilon > 0$. Se dice que:*

1. *El punto y es un* punto interior *de un subconjunto Y en X, si existe $\epsilon > 0$ tal que $B(y, \epsilon) \subset Y$.*

2. *El punto y es un* punto exterior *de un subconjunto Y en X, si para todo ϵ entonces $B(y, \epsilon) \subset X - Y$.*

3. *El punto y es un* punto frontera *de un subconjunto Y en X, si para todo $\epsilon > 0$ se cumple lo siguiente que $B(y, \epsilon) \cap Y \neq \emptyset$ y $B(y, \epsilon) \cap (X - Y) \neq \emptyset$.*

Definición 1.6. *Para un subconjunto Y de X, se define lo siguiente:*

1. *El* interior *de Y, es denotado por $Int_X(Y)$, es aquel compuesto por todos los puntos interiores de Y.*

2. *La* frontera *de Y, es denotado por $\partial(Y)$, es aquel compuesto por todos los puntos frontera de Y.*

3. *La* cerradura *de Y, es denotado por $\overline{Y}$ o $\widetilde{C}_X(Y)$, es el conjunto $Y \cup \partial(Y)$.*

4. *Se dirá que Y es* abierto, *si todos los puntos de Y son puntos interiores, es decir, que cumple $Y = Int_X(Y)$.*

Definición 1.7. *Diremos* entorno *de un punto x en X, es cualquier subconjunto no vacío E de X que contiene una bola abierta con centro en x.*

Definición 1.8. *Dado (X, d) y $A \subseteq X$ no vacío, la restricción d en $A \times A$, $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+$, es la distancia sobre A, la cual suele denotarse d_A. Se dirá que el par (A, d_A) es un* subespacio *de (X, d)*

Definición 1.9. *Se dirá que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X converge a $x \in X$, si para toda $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ de manera que $x_n \in B(x, \varepsilon)$, para todo $n \geq p$. Se denota como $x_n \longrightarrow x$, cuando $n \to \infty$.*

Lema 1.1. *Considérese A un abierto en X y B un subconjunto de X, que cumple que $A \cap \widetilde{C}_X(B) \neq \emptyset$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración. A partir de $A \cap \widetilde{C}_X(B) \neq \emptyset$, existe un elemento $a \in A \cap \widetilde{C}_X(B) \neq \emptyset$, por lo que $a \in \widetilde{C}_X(B)$. En consecuencia, para todo $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Además A es abierto, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$. Por último, se toma $\varepsilon = \delta$, entonces $B(a, \delta) \cap B \neq \emptyset$, por lo que $B(a, \delta) \cap B \subset A \cap B$, se concluye $A \cap B \neq \emptyset$. □

1.1.1. Espacios Topológicos inducidos por una métrica

Definición 1.10. *Una* topología *en un conjunto X es una familia $\mathfrak{T}$ de subconjuntos de X, que cumplen lo siguiente:*

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$.
2. $A, B \in \mathfrak{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{T}$.
3. $\mathfrak{T}^* \subset \mathfrak{T}$, *entonces* $\bigcup_{A\in\mathfrak{T}^*} A \in \mathfrak{T}$.

A la pareja $(X, \mathfrak{T})$, diremos *espacio topológico*, donde sus elementos que pertenecen $\mathfrak{T}$ se les nombran *subconjuntos abiertos* de X. Por lo supuesto X tiene asociada alguna topología, se le dirá espacio topológico.

Ejemplo 5. *Supóngase que $X = \{1, 2, 3\}$ y $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Ver que $\mathfrak{T}_1$ es una topología. Sin embargo, para $\mathfrak{T}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$ no se obtiene una topológia para X ya que $\{1\} \cup \{2\} \notin \mathfrak{T}_2$.*

Teorema 1.1. *Dados X y $\mathfrak{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : A$ es la unión de bolas abiertas$\}$ entonces $\mathfrak{T}_d$ es una topología en X.*

Demostración. A partir de la misma definición de $\mathfrak{T}_d$, se obtiene rápidamente que $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathfrak{T}_d$. Luego, para cada A, $B \in \mathfrak{T}_d$, lo manejamos por casos:

Caso a. Si $A \cap B = \emptyset$, se tiene que $A \cap B \in \mathfrak{T}_d$.

Caso b. Si $A \cap B \neq \emptyset$, se tiene que la existencia de $x \in A \cap B$, se da que existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tales que $B(x, \varepsilon_1) \subset A$ y $B(x, \varepsilon_2) \subset B$. Luego, se toma $\varepsilon = \text{mín}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, se infiere que $B(x, \varepsilon) \subset A \cap B$. Por lo que $A \cap B \in \mathfrak{T}_d$.

Por último, dado $\mathfrak{T}^* \subset \mathfrak{T}_d$, si $x \in \mathfrak{T}^*$, existe $A \in \mathfrak{T}^*$ tal que $x \in \mathfrak{T}^*$, como A es abierto es posible la existencia de $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A \subset \mathfrak{T}^*$. En consecuencia, $\bigcup_{A \in \mathfrak{T}^*} A \in \mathfrak{T}$. □

Definición 1.11. *Se le nombrará a $\mathfrak{T}_d$ la* topología *en X* inducida por la métrica *d.*

Definición 1.12. *Sean (X, d_1) y (X, d_2) espacios métricos, se dirá que son equivalentes si d_1 y d_2 generan la misma topología, es decir, si $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.*

Definición 1.13. *Sea el espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$, se dirá que X es* metrizable *si existe una distancia d en el conjunto que induce la topología $\mathfrak{T}$.*

Por otro lado, para facilitar la lectura de la presente tesis, se incluyen los famosos *Axiomas de Separación.*

Definición 1.14. *Un espacio $(X, \mathfrak{T})$. Diremos que:*

1. *X es un espacio T_0 o* Kolmogoroff*, si por cada par de puntos $x \neq y$ de X, existe abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ o $y \in U$, pero no ambos.*

2. *X es un espacio T_1 o* Fréchet *si, para cualesquiera puntos $x \neq y$ en X, existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U - V$ e $y \in V - U$.*

3. *X es un espacio T_2 o* Hausdorff *si, X cumple la siguiente condición: Para cada par $x \neq y$ en X, existen conjuntos disjuntos que contienen a x e y, respectivamente.*

4. *X es un espacio T_3 o* Regular *si, cumple lo siguiente:*

   (i) *X es un espacio T_1.*

   (ii) *Para cualquier $F \subset X$ cerrado y $x \in X - F$ existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $F \subset V$.*

5. *X es un espacio T_4 o* Normal *si, X cumple lo siguiente:*

   (i) *X es un espacio T_1.*

   (ii) *Para cada par F, G conjuntos cerrados disjuntos de X, existen conjuntos abiertos que contiene a F y G, respectivamente.*

Observación 1. *Es importante observar que para algunos autores es distinto hablar de un espacio regular y un espacio T_3. En algunos casos, un espacio regular es como lo definimos pero sin que el espacio sea T_1 y un espacio T_3 es un espacio tal como lo definimos.*

A continuación daremos algunos resultados referentes a los axiomas de separación, los cuales son conocidos en topología general y no incluiremos su prueba

Teorema 1.2. *[20, Teorema 3.7, p. 137] Un espacio topológico X es T_1 si sólo si para cada $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado.*

Teorema 1.3. *[20, Teorema 4.3, p.135] Un espacio topológico X es T_3 si y sólo si es T_1 y para cada x en el espacio y toda vecindad U de x, existe una vecindad V de x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Teorema 1.4. *[20, Teorema 4.10, p.139] Un espacio topológico X es T_4 si y sólo si es T_1 y para cualquier conjunto cerrado E y cualquier abierto A tal que $E \subset A$, existe un abierto B tal que $E \subset B \subset \overline{B} \subset A$.*

Teorema 1.5. *[14, Teorema 32.1, p. 229] Todo espacio T_3 con base numerable es T_4.*

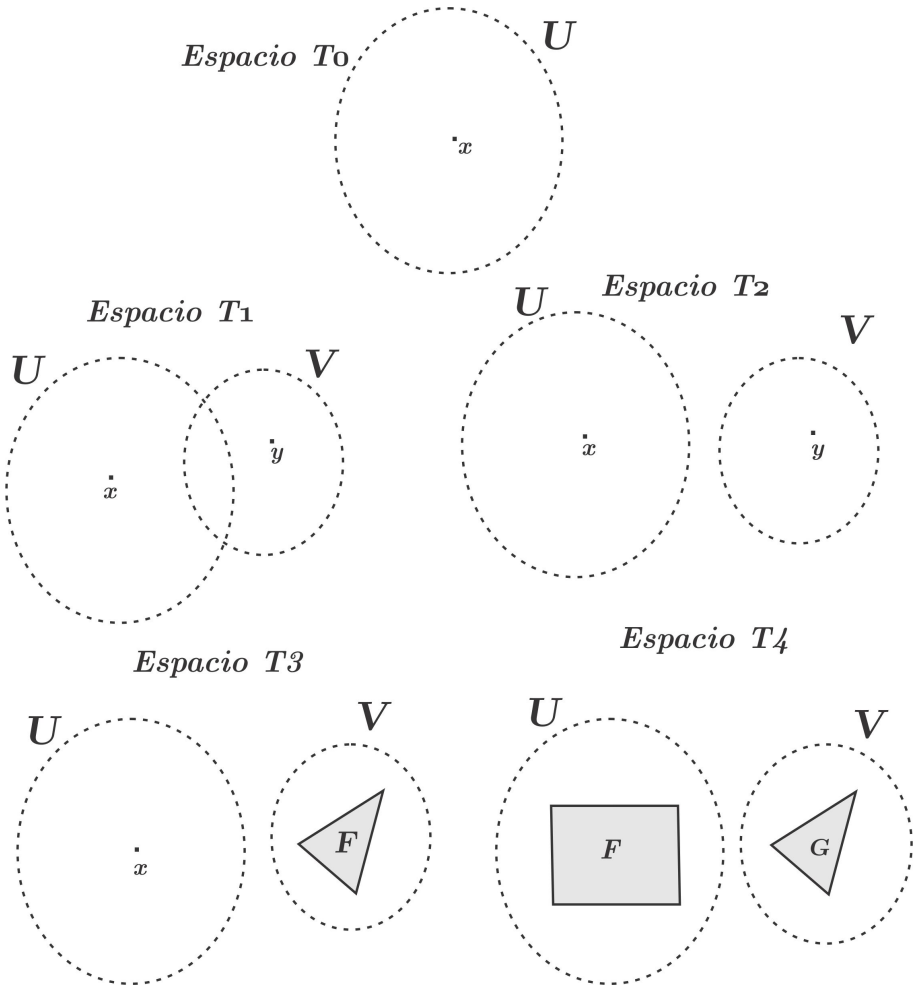


Figura 1.2: Axiomas de separación

Como comentario final, para pasar a la siguiente sección. Podemos hablar de aquellos espacios topológicos metrizables. Recordemos que toda estructura métrica define una estructura topológica, pero a la inversa no necesariamente es cierto. El problema de metrizabilidad, nos hace preguntarnos

¿Existe una métrica que define la topología dada?

o

¿Qué condiciones debe satisfacer dicho espacio topológico para garantizar tal existencia?.

Notar que un espacio sea metrizable es una propiedad muy deseada, ya que estos espacios tienen propiedades muy importantes, por mencionar algunas: Todo espacio métrico satisface el primer axioma de numerabilidad, se satisfacen todos los axiomas de separación; es decir, entre otras cosas son espacios de Hausdorff (T_2), son regulares (T_3), son normales (T_4). En espacios métricos son equivalentes las siguientes propiedades: segundo numerable, separable y Lindelöf. Esto último, nos garantizará la prueba que se dará en el apartado 2.2.

1.2. Continuidad de Funciones entre Espacios Métricos

La idea de continuidad constituye uno de los conceptos más resaltantes en la Topología, por las propiedades locales que se presentan.

Definición 1.15. *Dada la función entre espacios métrico $f : X \to Y$ es* continua en un punto $x \in X$ *si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$. Diremos que es* continua *en $A \subseteq X$, para cada punto de A.*

Otra alternativa de definir la continuidad es:

Definición 1.16. *Una función $g : X \to Y$ entre espacios métricos es continua si para cada abierto U de Y y x en $g^{-1}(U)$, existe un abierto V de x tal que $g(V) \subset U$.*

En virtud de la Definición 1.9, el siguiente resultado es otra equivalencia de continuidad por sucesiones.

Proposición 1.1. *[14, Teorema 21.3, p. 147] Dada la función entre espacio métricos $f : X \longrightarrow Y$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

- *f es continua en un punto x.*
- *Para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en X que converja a x, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ en Y.*

Ejemplo 6. *La inclusión canónica dado por $i_A : A \to X$, es continua para cada espacio (X, d) y cada subespacio $A \subseteq X$.*

EL siguiente ejemplo se tiene una función continua y biyectiva, cuya inversa es discontinua.

Ejemplo 7. *Consideremos la función $h : [0, 2\pi\rangle \to \mathbb{S}^1$, definido por $h(t) = (\cos t, \sin t)$. Es claro que h es continua, por sus coordenadas. Además, por la trigonometría se sabe que h es biyectiva.*
Ver que la función h ordena al segmento $[0, 2\pi\rangle$ que se enrolle sobre el círculo $\mathbb{S}^1$, de manera que no se doble, ni se estire, de modo que si se evalúa en el punto $t = 0$, le corresponde $p = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Ahora, supóngase que $h^{-1} : \mathbb{S}^1 \to [0, 2\pi\rangle$ sea continua en $\mathbb{S}^1$, en particular para el punto $(1, 0)$.
Consideremos las sucesiones $(t_k) \subseteq [0, 2\pi\rangle$ y $(s_k) \subseteq \mathbb{S}^1$ tales que

$$t_k = 2\pi - \tfrac{1}{k} \text{ y } s_k = h(t_k),$$

se toma la distancia de s_k a $(1, 0)$. Resulta que:

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} h(t_k) = \lim_{k\to\infty} (\cos(2\pi - \tfrac{1}{k}), \sin(2\pi - \tfrac{1}{k})) = (1, 0).$$

Aplícase h^{-1}, por la continuidad, se obtiene $\lim_{k\to\infty} h^{-1}(s_k) = h^{-1}(1,0)$. *Es decir,* $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$, *por lo que* $2\pi = \lim_{k\to\infty}(2\pi - \frac{1}{k}) = 0$. *Esto genera una contradicción.*

Observación 2. *Ver que h^{-1} consiste en romper el círculo $\mathbb{S}^1$ en el punto p, el cual lo desenrolla sobre el segmento $[0, 2\pi\rangle$.*

Definición 1.17. *Se dirá que la función f es un* homeomorfismo *cuando f sea biyectiva, continua y además f^{-1} sea también continua.*

Teorema 1.6. *Sea M un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y h una función continua e inyectiva. Entonces h es un homeomorfismo entre M y $h(M)$.*

Demostración. Sea la función $h^{-1} : h(M) \to M$, la cual existe por la inyectividad de h. Se toma $B \subseteq M$ un cerrado, entonces por ser $h(B)$ un compacto, en ese sentido se obtiene que $h(B)$ es un cerrado y $h(B) = (h^{-1})^{-1}(B) \subseteq h(M)$. Por lo que h^{-1} es continua en $h(M)$. □

Definición 1.18. *Dado (X, τ_d) y $\wp$ una propiedad. Se dirá que $\wp$ es una* propiedad topológica *o un* invariante topológico *si siempre que X tiene la propiedad $\wp$ entonces cualquier espacio Y homeomorfo a X la tiene.*

Ejemplo 8. *Las propiedades de conjuntos* ser abierto, ser cerrado *son invariantes de homeomorfismos.*

Visto de un modo sencillo, los homeomorfismos son espacios topológicamente *iguales*, es decir: se permite estirar, doblar, cortar y pegar. Un ejemplo práctico es contraer de forma continua un intervalo hasta un punto, éste proceso topológico se le denomina deformación.

Teorema 1.7. *Dado la función $f : X \to Y$ entre espacios métricos, son equivalentes las afirmaciones:*

1. *f es continua.*

2. *$f^{-1}(U)$ es abierto en X, para cada subconjunto abierto U de Y.*

3. $f^{-1}(C)$ *es cerrado en* X*, para cada subconjunto cerrado* C *de* Y*.*

4. $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$ *para cada* B *en* X*.*

Demostración. Veamos cada una de las implicancias:

1. $\Rightarrow$ **2.** Sean U un abierto en Y y $x \in f^{-1}(U)$. Dado que U es abierto y $f(x) \in U$, se tiene la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subset U$. Luego, por la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. Así se concluye la prueba tomándose $V = B(x, \delta)$.

2. $\Rightarrow$ **1.** Se fija $x \in X$ y un entorno abierto U de $f(x)$. Por hipótesis $f^{-1}(U)$ es un entorno abierto de x. Con esto se concluye la demostración, ya que $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$.

2. $\Rightarrow$ **3.** Si C es un cerrado de Y, entonces $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X, se tiene que $f^{-1}(C) = X - f^{-1}(Y - C)$ y por hipótesis, $f^{-1}(Y - C)$ es abierto por que $f^{-1}(C)$ es cerrado.

3. $\Rightarrow$ **2.** Repetir procedemiento en 2. $\Rightarrow$ 3.

3. $\Rightarrow$ **4.** Como $B \subseteq f^{-1}(\overline{f(B)})$ (cerrado), por lo que $\overline{B} \subseteq f^{-1}(\overline{f(B)})$.

4. $\Rightarrow$ **3.** Sea un cerrado arbitrario C de Y. Por hipótesis $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$. Por lo que $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$ entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado.

□

Definición 1.19. *Se dirá que un encaje entre* (X, d_X) *y* (Y, d_Y) *es una función* $f : X \to Y$ *continua e inyectiva, la cual es un homeomorfismo con su imagen.*

Observación 3. *Es natural pensar que cualquier homeomorfismo es un encaje, sin embargo, el recíproco no se cumple, en efecto, consideremos dos conjuntos* $X = \langle 0, 1\rangle$ *e* $Y = [0, 1]$*. Es claro que estos dos conjuntos no son homeomorfos, ya que uno es compacto (revisar su*

definición en apartado 1.4) y el otro no. Sin embargo, si consideramos la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ *dada por* $x \mapsto \frac{1+x}{4}$*, es un encaje de* X *con su imagen en* Y

1.2.1. Continuidad en Producto Cartesiano

Considérese $\{X_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de espacios métricos, se dirá *producto cartesiano* de la familia $\{X_i\}_{i\in\Lambda}$ al conjunto

$$\prod_{i\in\Lambda} X_i = \{(x_i)_{i\in\Lambda} : x_i \in X_i, \text{ para todo } i \in \Lambda\},$$

dotado con la correspondiente topología producto (ver [1, 1. Definition, p. 48]). Para cada $\beta \in \Lambda$, se define $\pi_\beta : \prod_{i\in\Lambda} X_i \longrightarrow X_\beta$, de tal manera que $\pi_\beta((x_i)_{i\in\Lambda}) = x_\beta$, para todo $(x_i)_{i\in\Lambda} \in \prod_{i\in\Lambda} X_i$, es la llamada *i-ésima proyección.*
El siguiente resultado relaciona las funciones continuas entre las proyecciones de un producto numerable de espacios métricos.

Teorema 1.8. *[10, Proposição 16, p. 135] Dados* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de espacios métricos, sea una función* $f : Y \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$*, y* $\pi_k : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow X_k$ *la k-ésima proyección. Entonces,* f *es continua si y sólo si* $\pi_k \circ f$ *es continua para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Corolario 1.8.1. *[10, Teorema 19.6, p. 132] Dada la familia de espacios métricos* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, y para cada* $k \in \mathbb{N}$*, sea una función* $f_k : X \longrightarrow Y_k$*. Si* $f : X \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ *esta dado por* $f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$*, se tiene que son equivalentes los siguientes enunciados:* f *es continua si y sólo si* f_n *es continua, para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*

1.3. Conexidad

Esta sección está dedicada a estudiar propiedades importantes de los espacios métricos: la conexidad. Se iniciará con la siguiente definición.

Definición 1.20. *Se dirá que X es* disconexo *si existen un par de conjuntos abiertos no vacíos A y B en X tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. De lo contrario, se dirá* conexo.

Definición 1.21. *Un subconjunto no vacío $E \subseteq (X, d)$, diremos que es conexo, si E es conexo, con la métrica inducida por d, a saber, no existen ningún par de abiertos no vacíos A y B en E que cumplan $E = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.*

Observación 4. *De acuerdo a la Definición 1.21, X es disconexo, si es unión disjunta de abiertos. En ese sentido, si $X = A \cup B$, donde A y B son abiertos disjuntos, entonces $A = X - B$ y $B = X - A$, es decir, A y B también son cerrados. Así, X es disconexo si y sólo si $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados disjuntos no vacíos.*

Ejemplo 9. *Los conjuntos que son uniones de intervalos no necesariamente son conexos, por ejemplo el conjunto $A = [-1, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$ de la recta $\mathbb{R}$ no es conexo, porque los conjuntos $[-1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1]$, son disjuntos y abiertos en A, pero no en $\mathbb{R}$, por lo que A es disconexo.*

Proposición 1.2. *[4, Teorema 1.3 (2), p. 108] Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *X es conexo*
2. *Los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X, son X y $\emptyset$, respectivamente.*

Proposición 1.3. *Dado Y un subconjunto de X. Si A y B son cerrados disjuntos de Y tales que $Y = A \cup B$, entonces $\widetilde{C}_X(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap \widetilde{C}_X(B) = \emptyset$, donde $\widetilde{C}_X(A)$ y $\widetilde{C}_X(B)$ son la cerradura de A y B con respecto a X, respectivamente.*

Demostración. Por hipótesis A es cerrado de Y, entonces

$$\widetilde{C}_X(A) \cap Y = A.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_X(A) \cap B &= \widetilde{C}_X(A) \cap (Y \cap B) \\ &= (\widetilde{C}_X(A) \cap Y) \cap B \\ &= A \cap B = \emptyset. \end{aligned} \tag{1.1}$$

De misma manera, se tiene obtiene

$$A \cap \widetilde{C}_X(B) = \emptyset. \tag{1.2}$$

Combinando los resultados (1.1) y (1.2) se prueba lo requerido. □

Teorema 1.9. *Sean A, B dos subconjuntos de X. Supóngase que A es conexo y $A \subset B \subset \widetilde{C}_X(A)$ entonces B es conexo.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que B no es conexo, a saber, existen V y U, abiertos disjuntos no vacíos en X que cumplen que $B = U \cup V$. Si $A \subset B$, siendo A conexo, resulta que por [20, Teorema 1.8, p. 191] se cumple que $A \subset U$ o $A \subset V$. Sin perdida de generalidad, supongáse que $A \subset U$, por Proposición 1.3, se da que $\widetilde{C}_X(U) \cap V = \emptyset$ y notar que $A \subset U$, resulta que $\widetilde{C}_X(A) \subset \widetilde{C}_X(U)$. Por lo que se infiere que $B \subset \widetilde{C}_X(A) \subset \widetilde{C}_X(U)$. En consecuencia, se da que $B \subset \widetilde{C}_X(U)$, en consecuencia $B \cap V \subset \widetilde{C}_X(U) \cap V = \emptyset$. Esto prueba que B y V son disjuntos, esto es una contradicción, pues V es un subconjunto no vacío de B. Así es que B es conexo. □

La ventaja de ser conexo es por tener la propiedad topólogica, es decir que se preserva con funciones continuas, esto se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 1.10. *Dados los espacios métricos X e Y, y la función $f : X \longrightarrow Y$, continua y suryectiva. Si X es conexo entonces Y es conexo.*

Demostración. Por contradicción, supóngase que Y es disconexo, luego existen V y U abiertos disjuntos no vacíos de Y tales que $Y = U \cup V$,

por la continuidad de f, entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos de X, tales que $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Dado que $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, pues f es suryectiva, se concluye que X es una disconexo, esto es una contradicción, así es que Y es conexo. □

El siguiente resultado es de importancia dentro de los espacios métricos conexos, teniendo en cuenta que los índices tomados son a lo sumo numerable.

Teorema 1.11. *[20, Teorema 3.3 (1), p. 200] Considérese $\{Y_\alpha\}_{\alpha \epsilon I}$ una familia de espacios métricos. Entonces, $\prod_{\alpha \epsilon I} Y_\alpha = Y$ es conexo si y sólo si, para toda $\alpha \epsilon I$ se tiene que Y_α es conexo.*

Un punto interesante de la conexidad es que la intersección de una familia numerable y anidada de conjuntos conexos no necesariamente es conexa, veamos el siguiente observación.

Observación 5. *Sean m,$n \in \mathbb{R}$, tales que $m < n$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $P_j = [m, n] \times \left[0, \frac{1}{j}\right\rangle - \{(\frac{m+n}{2}, 0)\}$. Véase que para cada $j \in \mathbb{N}$, P_j son conexos. Sin embargo,*

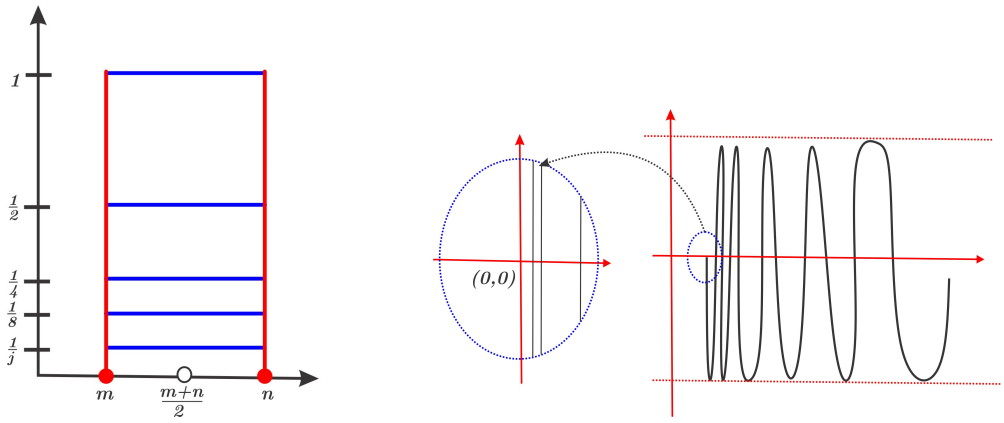
$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} P_j = ([m, n] - \{\tfrac{m+n}{2}\}) \times \{0\} \text{ y } ([m, n] - \{\tfrac{m+n}{2}\}) \times \{0\}$$

no es conexo, como se observa en la Figura 1.3 (a).

Las siguientes definiciones serán necesarias en lo subsecuente de la tesis.

Definición 1.22. *Diremos que X es* localmente conexo *si para cualquier $x \in X$ y cualquier abierto U que contiene a x, se tiene la existencia de un abierto conexo V de x, que cumple $x \in V \subset U$.*

Ejemplo 10. *Sea $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{1}{3}\right]$, el conjunto A es localmente conexo, pero no es conexo.*



(a) Intersección de conexos, no es conexo

(b) Ser conexo no implica ser localmente conexo

Figura 1.3: Ejemplos especiales de conexidad

Teorema 1.12. *[12, Teorema 1.10, p. 2] Son equivalentes los siguientes resultados:*

1. *X es localmente conexo en $p \in X$*
2. *Todo conjunto U abierto en X con $p \in U$; existe un conjunto V abierto en X tal que V es conexo y $p \in V \subset U$.*

La conexidad y la conexidad local ofrecen características diferentes a los espacios que las contienen, como lo veremos a continuación.

Ejemplo 11. *Consideremos los siguientes conjuntos:*

$$M = \{(x, \sin(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1)\} \text{ y}$$
$$N = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$$

subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^2$. Notar que el conjunto N es localmente conexo. Sin embargo, se prueba en [12, Ejemplo 1.15, p. 3] el conjunto $Z = M \cup N$ no es localmente conexo en $(0, 0)$, como puede ver en la Figura 1.3 (b).

Teorema 1.13. *[4, Teorema 2.5, p. 198] Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función cerrada, continua y suryectiva. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

1.4. Compacidad

El concepto de compacidad es una abstracción de una propiedad de gran importancia que poseen los números reales, el conocido Axioma del Supremo, en ese sentido cubriremos los conceptos y resultados más conocidos.

Definición 1.23. *La colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es una cubierta de X si $X = \bigcup \mathcal{U}$. Además, para cada elemento de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, entonces a $\mathcal{U}$ se le llamará* cubierta abierta *de X.*

Definición 1.24. *La cubierta $\mathcal{U}$ de X y $\mathcal{V}$ es una subcolección de $\mathcal{U}$, se dirá que $\mathcal{V}$ es una* subcubierta *de $\mathcal{U}$ si $X = \bigcup \mathcal{V}$.*

Ejemplo 12. *Dados los conjuntos $U_1 = \{B(p,1) : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ y $U_2 = \{B(p, \frac{1}{2}) : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$. Obsérvese que U_1 es una cubierta abierta para $\mathbb{R}^2$, a comparación de U_2 que no lo es, ya que el punto $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$, no pertenece a U_2.*

Definición 1.25. *Se dirá que X es* compacto*, si toda cubierta abierta de X contienen una subcubierta finita.*

Definición 1.26. *El espacio de los números reales $\mathbb{R}$ no es compacto porque dado un cubrimiento abierto $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ no hay ningún subcubrimiento finito, ya que no existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle n-1, n+1\rangle$ pueda contener a $\mathbb{R}$.*

La forma más práctica de determinar la compacidad es por medio de la siguiente proposición.

Proposición 1.4. *[10, Proposição 2, p. 212] Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

La compacidad también es una propiedad topólogica, veasé el siguiente resultado.

Teorema 1.14. *Dados (X, d) un espacio compacto y $f : X \longrightarrow Y$ una función suryectiva entre espacios métricos, entonces Y es compacto.*

Demostración. Considere $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{I}}$ una cubierta abierta de Y. Por hipótesis, f es una función continua y suryectiva, de manera que $\mathcal{U} = \{f^{-1}(W_\alpha)\}_{\alpha\epsilon I}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in I$ tales que
$X = \bigcup_{i=1}^{p} f^{-1}(W_{\alpha_i})$. Resulta que

$$Y = f(X) = f(\bigcup_{i=1}^{p} f^{-1}(W_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^{p} f(f^{-1}(W_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^{p} W_{\alpha_i}.$$

Así es que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{p} W_{\alpha_i}$ y por lo tanto, se obtiene una subcubierta finita de $\mathcal{W}$ que cubre a Y. □

Teorema 1.15. *Dado un subconjunto compacto M en X, y $x_0 \in M$. Se cumple que existe $y_0 \in M$ tal que $d(x_0, y_0) \leq d(x, x_0)$ para cada $x \in M$.*

Demostración. Sea la función $f : M \to [0, \infty^+\rangle$ tal que $f(x) = d(x, x_0)$, está función es continua [1], como M es compacto, f alcanza su mínimo, a saber, $y_0 \in M$, así que,

$$d(y_0, x_0) \leq d(x_0, x) \text{ para cada } x \in M.$$

□

Proposición 1.5. *[10, Proposição 1, p. 211] Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico y compacto, es compacto.*

Definición 1.27. *La familia $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de subconjuntos cerrados de un espacio métrico X, se dirá que tiene la* propiedad de la intersección finita*, si para cualquier subconjunto finito J de I, se tiene que $\bigcap_{\alpha\in J} V_\alpha$ es no vacío.*

El siguiente resultado relaciona la propiedad de intersección finita con la compacidad.

[1] Ver que la función distancia es continua, puede consultarse en [4, 4.3 Theorem, p. 185]

Teorema 1.16. *[4, 1.3 Theorem, p. 223] Son equivalente los siguientes resultados:*

1. *Sea (X, d) un espacio compacto*
2. *si cualquier familia de subconjuntos cerrados de X, con la propiedad de la intersección finita, tiene intersección no vacía.*

Proposición 1.6. *Sea (X, d) es un espacio compacto y A_1,A_2,... una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos de X anidados ($A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$). Si U es un abierto en X de manera que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset U$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A_p \subset U \neq \emptyset$.*

Demostración. Por hipótesis $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset U$, se toma leyes de Morgan, en consecuencia se da $X - U \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X - A_n)$. Además $X - U$ es cerrado en X, entonces por Proposición 1.5, se tiene $X - U$ es compacto. Por consiguiente, existen $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$ tales que:

$$X - U \subset \bigcup_{j=1}^{k} (X - A_{n_j}) = X - (\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j}).$$

Se toma a $p = máx\{n_1, n_2, ..., n_k\}$, resulta que $\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j} = A_p$. En consecuencia, se da que $X - U \subset X - A_p$. Aplicando el complemento, resulta que $A_p \subset U$. □

Teorema 1.17. *Todo espacio métrico compacto X contiene un subconjunto denso numerable.*

Demostración. Consideremos X es compacto, para cada $x \in X$, se toma $B(x, 1)$, la bola abierta con centro en x y radio 1. La familia $\{B(x, 1)\}_{x\in X}$, es una cubierta abierta de X. A partir de aquí, existen $x_1^1, x_2^1, ...x_{m_1}^1 \in X$ tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{m_1} B(x_i^1, 1)$.
Sea $V_1 = \{x_i^1 : i = 1, ..., m_1\}$. De la misma manera, considérese $\{B(x, \frac{1}{2})\}_{x\in X}$ una cubierta abierta de X, por la compacidad de X, existen $x_1^2, x_2^2, ...x_{m_2}^2 \in X$ tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{m_2} B(x_i^2, \frac{1}{2})$.

Considérese $V_2 = \{x_i^2 : i = 1, ..., m_2\}$. Realizando el proceso k veces, podemos elegir al conjunto $V_k = \{x_i^k : i = 1, ..., m_k\}$ donde los x_i^k son centros de bolas abiertas de radio $\frac{1}{k}$. En consecuencia, $X \subset \bigcup_{i=1}^{m_k} B(x_i^k, \frac{1}{k})$. Se toma $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, es decir $\mathcal{V}$ es numerable, pues es la unión numerable de conjuntos finitos.
Mostraremos que $\mathcal{V}$ es denso en X.
Para ello considere $y \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Dado que $y \in X \subset \bigcup_{i=1}^{m_p} B(x_i, \frac{1}{p})$, se tiene que $y \in B(x_{i_0}, \frac{1}{p})$, para algún $i_0 \in \{1, ..., m_p\}$.
Resulta que $d(y, x_{i_0}^p) < \frac{1}{p} < \varepsilon$, es decir $x_{i_0}^p \in B(y, \varepsilon)$. Así mismo, dado que $x_{i_0}^p \in B(y, \varepsilon) \cap V_{i_0}$, se obtiene $B(y, \varepsilon) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo que se infiere que $\mathcal{V}$ es denso en X. □

Para culminar la presente sección, es de gran importancia resaltar el famoso *Teorema de Tychonoff*.

Teorema 1.18. *[4, Theorem 1.4 (4), p. 224] El producto de espacios métricos $\mathcal{M} = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ es compacto si y sólo si cada M_i, es compacto.*

1.5. Continuos

Vamos a empezar a dar el concepto de continuo y excibir los resultados básicos a lo largo del texto.

Definición 1.28. *Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo, con más de un elemento.*

Tomar en cuenta que la compacidad implica que sea cerrado, es por ello que se omite este hecho. Además la conexidad, permite ver que todo continuo se expresa como una sola pieza. Algunos autores nombre al continuo X como un continuo T_2. A continuación, se presentan algunos ejemplos que sirven para ilustrar la estructura de un continuo.

1.5.1. Ejemplos de continuos

Se ilustrarán algunos continuos de los más reconocidos.

1. *Intervalo* $[0, 1]$.

   Es uno de los ejemplos más sencillo por ser un subespacio métrico de $\mathbb{R}$. Además, es conexo, cerrado, y acotado por lo que $[0, 1]$ es compacto. Así, $[0, 1]$ es un continuo. Identificaremos al intervalo $[0, 1]$ por la letra I, por simplicidad de notaciones.

2. *El arco.*

   Un arco es un espacio topológico que es homeomorfo a I, sabiendo que I es un continuo, el arco también posee la propiedad de ser un continuo. Puede identificarlo en la Figura 1.4 (a).

3. *Curva cerrada simple.*

   La curva cerrada simple es un espacio topológicamente homeomorfo a $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$ o visto en el plano complejo como $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = 1\}$, éste último por ser un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, con la métrica d_1, es compacto, por un resultado clásico de cálculo (Heine-Borel) y, es conexo por ser imágen continua del intervalo $[0, 2\pi]$, visto en el Ejemplo 7. Por lo tanto la curva cerrada simple es un continuo. Puede identificarlo en la Figura 1.4 (b) y (c).

4. *Continuo ocho.*

   El **continuo ocho** es la unión de dos circunferencias unidas solo en un punto (semejante al número ocho), definido por: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : z = a + ib$, tal que $(a - 2)^2 + b^2 = 1)\}$. Puede revisarse la Figura 1.4 (d).

5. *El Triodo simple* $\mathbb{T}$.

   Este continuo está constituido por la unión de tres arcos que coinciden exactamente en un punto común v. Al punto v lo llamaremos vértice del tríodo. Definido por:

$$\mathbb{T} = \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1\}$$

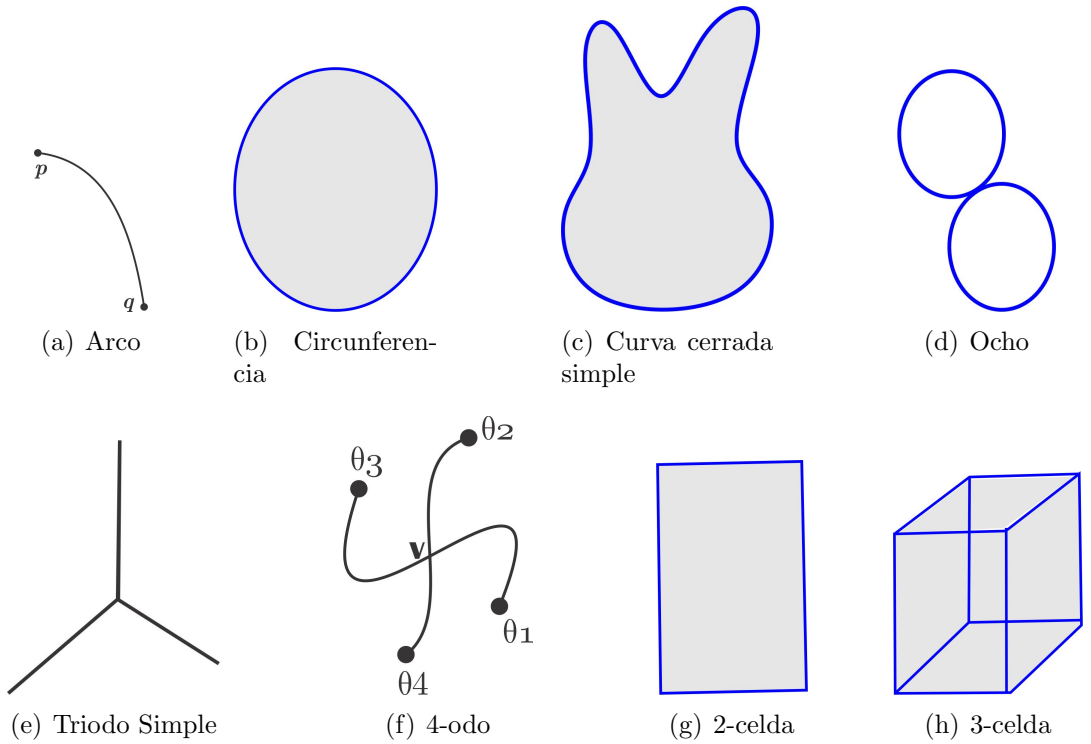
6. *Una gráfica finita.*

   Una gráfica finita es un continuo visto como la unión de una cantidad finita de arcos $A_1, A_2, ...A_m$, tales que A_i intersecta a A_j, siempre que $i \neq j$, y sólo en uno o en ambos puntos extremos, para $i, j = \{1, 2, ..., m\}$. Por ejemplo, sea X un $4-$odo simple, es aquel que se interceptan dos a dos en un único punto, llamado vértice del $4-$odo, el vértive tiene que ser un extremo de cada uno de los 4 arcos y los otros extremos de los arcos se llaman *extremos* del $4-$odo *simple* con *vértice* v y puntos extremos θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4. Puede identificarlo en la Figura 1.4 (e).

7. *2-celda.*

   Se sabe que el producto cartesiano de dos continuos es un continuo. Entonces I^2 es un continuo. Una 2-celda es cualquier continuo homeomorfo a I^2. Asímismo la $3-$celda es un continuo homeomorfo a I^3. Puede identificarlo en la Figura 1.4 (f) y (g).

8. Existen continuos más complejos, que son objeto de estudio en la teoría de continuos, tales como la curva senoidal del topólogo, el Círculo de Varsovia, hay continuos que se pueden construir a partir de otros continuos, tal como el cubo de Hilbert, la carpeta de Sierpinski y la curva universal de Menger. No estudiaremos estos tipos de continuos, ya que se salen de nuestros propósitos. El lector puede consultar en [16].



(a) Arco (b) Circunferencia (c) Curva cerrada simple (d) Ocho

(e) Triodo Simple (f) 4-odo (g) 2-celda (h) 3-celda

Figura 1.4: Ejemplos de continuos

1.5.2. Una receta para construir continuos

Un continuo o continuo metrizable también se le puede ver como espacio topológico, conexo y compacto. De cambiar la condición de metrizabilidad, por la de Hausdorff, a este tipo de continuos llamaremos un continuo T_2 o *continuo de Hausdorff*.

Definición 1.29. *Dados (X, d) y A un subconjunto cerrado de X, se dice que A es un* subcontinuo *de X, si A es un continuo.*

Observación 6. *Tener presente en la Definición 1.29, que es válido considerar el subcontinuo A puede tener cardinalidad 1, pero no el vacío, para evitar conflictos en el proceso de nuestro estudio.*

Observación 7. *Ser un espacio Hausdorff y un espacio metrizable, sus propiedades son hereditarias, es decir, si consideramos un subconjunto $A \subseteq X$ implica que A es no vacío, cerrado y conexo en X si y sólo si*

.

Una de las recetas para poder construir continuos nos lo brinda el siguiente resultado.

Teorema 1.19. *Si X es un continuo y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subcontinuos de X, de tal manera que $F_{n+1} \subset F_n$, resulta que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. A partir de que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ es cerrado y no vacío, pues es la intersección de cerrados, y que X es compacto, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ también lo es, ya que $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, por la Proposición 1.6 se tiene que $F = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ es no vacío. Por otro lado, falta ver que F es un subcontinuo, para ello basta solo con probar que F es conexo.
Proceda por el absurdo, entonces F se puede escribir como $F = M \cup N$, donde M y N son cerrados en X disjuntos y no vacíos. Como el espacio X es métrico, entonces es normal, por lo que existen abiertos ajenos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de X tales que $M \subset \mathcal{U}$ y $N \subset \mathcal{V}$.
Por la Proposición 1.6, existe un número natural n_p tal que $F_{n_p} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Dado que F_{n_p} es conexo y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abierto disjuntos, tenemos que $F_{n_p} \subset \mathcal{U}$ o $F_{n_p} \subset \mathcal{V}$. Sin embargo, se tiene que $M \subset F \subset F_{n_p}$ y como $M \subset \mathcal{U}$, entonces F_{n_p} intersecta a $\mathcal{U}$, y $L \subset F \subset F_{n_p}$ y $N \subset \mathcal{V}$, esto nos lleva a que F_{n_p} intersecta también a $\mathcal{V}$. Esto es un absurdo, es por ello que F es conexo. □

Por lo visto en la Observación 5 indica que la intersección anidada de conexos *no es precisamente conexo*. Sin embargo, si cambiamos la hipótesis por compacidad a cada uno de los interceptados, si cumple. Esto nos motiva presentar las siguientes propiedades.

Teorema 1.20. *Todo continuo tiene un subconjunto denso numerable.*

Demostración. Por consecuencia inmediata del Teorema 1.20 se observa todo continuo es compacto, en consecuencia tiene un subconjunto denso numerable. □

Teorema 1.21. *[7, Proposición 1 b, p. 274] Todo continuo tiene bases*[2] *numerables.*

Teorema 1.22. *[9, 13 theorem, p. 121] Si X es un continuo, existe una métrica $\widetilde{d}$ que induce la topología $\tau_{\widetilde{d}}$ de X y es tal que $\widetilde{d}(x,y) \leq 1$ para cualesquiera x,$y \in X$.*

Teorema 1.23. *[9, 14 theorem, p. 122] Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios méricos. Entonces*

$$\Upsilon : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

dado por

$$\Upsilon((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

es métrica para $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y además, la topología generada por la métrica Υ coincide con la topogía producto.

Teorema 1.24. *Sean (X, d_X) un espacio compacto e (Y, d_Y) cualquiera, y la función continua $f : X \longrightarrow Y$, entonces f es cerrada.*

Demostración. Si $M \subset X$ un conjunto cerrado. Dado que X es compacto y M es cerrado, se tiene que M es compacto. Adicional a ello, por ser f continua, se tiene que $f(M)$ es compacto. Además Y es un espacio métrico, se obtiene que $f(M)$ es cerrado. □

En virtud del Teorema 1.22, podemos acotar cualquier espacio métrico X, se tiene la existencia de una *métrica equivalente* y *acotada* por 1. Adicional a ello, una sucesión de continuos $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, con la propiedad que cada métrica se encuentra acotada por 1, entonces por el Teorema 1.24 se tiene que

$$\Upsilon((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{X_n}(x_n, y_n)}{2^n},$$

[2]Se entenderá por base de un espacio topológico, aquella colección de abiertos de la topología dada, la cual verifica que todo abierto de la topología puede expresarse como unión de los elementos de la base

es la métrica para $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Se concluye que si X_n es continuo para cada $n \in \mathbb{N}$, también lo es $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Ejemplo 13. El cubo de Hilbert*, se define como el producto topológico del una cantidad numerable de copías de intervalo* $[0,1]$*. Es decir, se considera el producto* $\mathbb{Q}_H = [0,1]\times[0,1]\times...$*, con la topología producto.*

1.5.3. Continuos localmente conexos

En el presente apartado exhibiremos un resultado general, que es pieza clave para los continuos localmente conexos.

Proposición 1.7. *[12, Teorema 1.10, p. 2] Sea X un continuo localmente conexo. Sea un subcontinuo $T \subseteq X$ y U es un abierto de X, que cumple $T \subset U$, entonces existe un subcontinuo Z de X, tal que $T \subset int_X(Z) \subset Z \subset U$.*

Además, si T_1 y T_2 son subcontinuos de X disjuntos, entonces existen subcontinuos Z_1 y Z_2 de X, tales que $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, $T_1 \subset int_X(Z_1)$ y $T_2 \subset int_X(Z_2)$.

La propiedad de conexidad local demanda a cada punto del espacio estudiado haya vecindades abiertas, conexas y arbitrariamente pequeñas. En ocasiones esta condición resulta ser rigurosa en la demostración, así que existen otros resultados los cuales tiene condiciones más accesibles, es claro que estos resultados escapan de los verdaderos fines del escrito. Sin embargo, podemos comentar que un continuo localmente conexo se puede dotar de una métrica tal que el continuo obtiene una forma convexa, comparado a la convexidad en los espacios euclídeanos en $\mathbb{R}^n$.

CAPÍTULO 2

HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

El presente capítulo se define al hiperespacio de continuo y se dará algunos resultados importantes con el objetivo de presentar los modelos de hiperespacios $C(X)$ y $F_2(X)$. Para ello, un continuo X con métrica d, asumiremos en todo nuestro estudio, que los hiperespacios de X son las familias de subconjuntos no vacíos de X que satisfacen una propiedad particular. Se abordará las ideas que contribuyeron a *dotar* de una estructura a un hiperespacio de un continuo X. Sobre las bases de las ideas expuestas, procedemos a enunciar aquellos continuos muy utilizados por muchos investigadores, como lo son el arco, la circuferencia y el tríodo simple, cabe resaltar que las ideas presentadas son bajo la base de las siguientes citas: [3], [7], [8], [12] y [13], [21] donde lo demás son construcciones hechas para hacer *sencilla* su comprensión. Partiendo de los supuestos anteriores, los hiperespacios de continuos más utilizados en este trabajo son:

1. El *hiperespacio de los cerrados* de X o conocido como el *hiperespacio más grande:*

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\}.$$

2. El *hiperespacio de los subcontinuos* de X dado por:

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

3. El *n-ésimo hiperespacio* de X es dado por:

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Se dirá $F_1(X)$, como el conjunto de elementos *unipuntuales.* Para una lectura sencilla, el conjunto 2^X se encuentra sin una estructura, es decir, no es de mucha utilidad. Para dotarlo de una estructura topológica, en la siguiente sección se le definirá una métrica.

2.1. La métrica de Hausdorff para 2^X

Los primeros pasos para establecer la métrica para 2^X, fueron presentados por Hausdorff en su trabajo Mengenlehre [1]. Este artículo introduce el caso cuando X es un espacio métrico y, la familia de todos los subconjuntos cerrados y acotados de X, no vacíos, mostrando que se puede asociar la hoy conocida como métrica de Hausdorff (distancia). Para ello, se introduce el concepto de nube.

Definición 2.1. *Si A es un subconjunto cerrado de X y $\varepsilon > 0$, la* nube *en X con centro en A y radio ε es el conjunto:*

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \textit{existe un punto } a \in A \textit{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Observación 8. *De la definición se deduce lo siguiente:*

i) *Para cada $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \varepsilon$ y $A \subset B$, tenemos que*

$$N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, B).$$

ii) $A \subset N(\varepsilon, A)$.

iii) $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0,\ \delta < \varepsilon\}$.

iv) *Si A es un subconjunto en X, entonces $N(\varepsilon, A)$ es un conjunto abierto.*

[1] F, Hausdorff, Mengenlehre 1965.

v) $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} \mathbf{B}(\varepsilon, a)$, *donde* $\mathbf{B}(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(a, x) < \varepsilon\}$.

La prueba de los enunciados es de rutina, el desarrollo es de manera conjuntista.

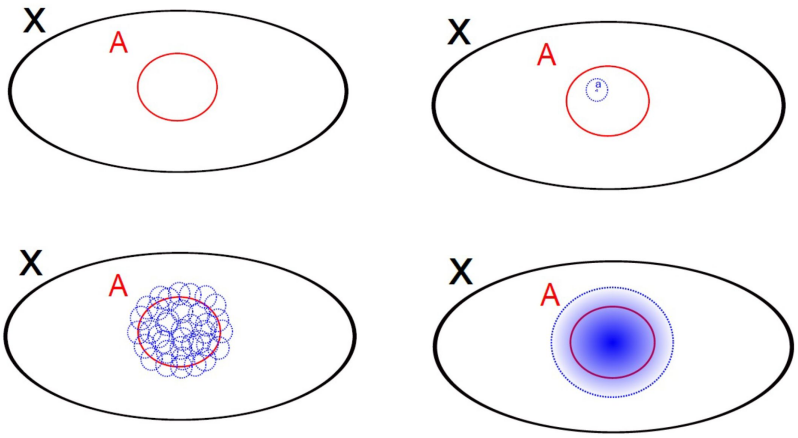


Figura 2.1: Representación de la nube

Lema 2.1. *Dado* $\varepsilon > 0$ *y* A, $B \in 2^X$, *se cumple que*

$$N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B).$$

Demostración. Por el inciso i), de la observación, se infiere que

$$N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) \text{ y } N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B).$$

Por lo que se tiene $N(\varepsilon, A) \cup (\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$.
Por otra parte, se toma $z \in N(\varepsilon, A \cup B)$. Por definición, existe $b \in A \cup B$ tal que $d(b, z) < \varepsilon$. Se tienen dos casos:

Caso 1. Si $b \in A$, entonces $z \in N(\varepsilon, A)$.

Caso 2. Si $b \in B$, se tiene $z \in N(\varepsilon, B)$.

En ambos casos, $z \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. Se infiere que:

$$N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B).$$

□

Lema 2.2. *Dado X un continuo y A,$B \in 2^X$ tales que A y B son disjuntos, entonces existe un número real positivo ε tal que*

$$N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) = \emptyset.$$

Demostración. Por contradicción, supóngamos que para cada $\varepsilon > 0$, se tiene $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Como $A \cap B = \emptyset$ y A, B son compactos en X, es inmediato que $d(A, B) > 0$. Luego, se toma $\varepsilon = \frac{d(A,B)}{2}$, se puede ver que $\varepsilon > 0$. Consideremos $z \in N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B)$. Se tiene que existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, z) < \varepsilon$ y $d(b, z) < \varepsilon$. Por desigualdad triángular $d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \varepsilon + \varepsilon$, hacemos $d(A, B) = 2\varepsilon$, obteniendo $d(a, b) < d(A, B)$, lo cual es una contradicción, por definición de $d(A, B)$, por tanto $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) = \emptyset$. □

Teorema 2.1. *Si $S \in 2^X$ y U es un abierto en X tal que $S \subset U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, S) \subset U$.*

Demostración. Por la hipótesis $S \subset U$, se tiene $S \cap (X - U) = \emptyset$. Cabe resaltar que S y $X - U$ son cerrados X. De tal manera que $d(S, X - U) > 0$. Se toma $\varepsilon = \frac{d(S,X-U)}{2}$, si $x \in N(\varepsilon, S)$, entonces existe $a \in S$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$, es decir, $x \in B(a, \varepsilon)$. Ahora, resta probar que $x \in U$. Procédase por absurdo, es decir, supóngase que $x \notin U$, con esto $x \in X - U$, y entonces $d(S, X - U) \leq d(a, x)$. Así resulta que $d(S, X - U) < \varepsilon = \frac{d(A,X-U)}{2}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in U$.

□

Es preciso mencionar, para efectos de nuestro estudio, todo subconjunto de un continuo de X es no vacío.

Definición 2.2. *Sea A subconjunto del continuo X, llamaremos* diámetro *de A como $diám(A) = \sup\{d(p, q) : p, q \in A\}$. Si el subconjunto fuesé vacío definimos su diámetro igual a cero*

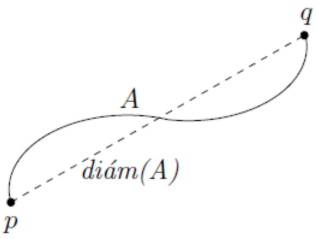


Figura 2.2: Diámetro del conjunto A

Definición 2.3. *Sean A y B subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo X. Se denotara al conjunto*

$$E(A,B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Observación 9. *Si X es compacto, entonces diám(X) es un número real que pertenece al conjunto $E(A,B)$.*

Definamos ahora la distancia entre dos elementos de 2^X de la siguiente manera:

Definición 2.4. *Para un continuo X, llamaremos* distancia de Hausdorff *la función $H : 2^X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, que cumple lo siguiente:*

$$H(A,B) = \text{ínf } E(A,B)$$

para cada A, B en 2^X.

Observación 10. *Tener presente lo siguiente:*

- *Se observa de manera intuitiva, que dos conjuntos son cercanos con la distancia de Hausdorff si se parecen en el sentido que uno está sobrepuesto en el otro, y viceversa. La Figura 2.3, permite visualizar el concepto dado.*
- *Si X es un continuo y A, $B \in 2^X$, entonces $H(A,B) = \text{ínf } E(A,B)$ es un número real positivo.*

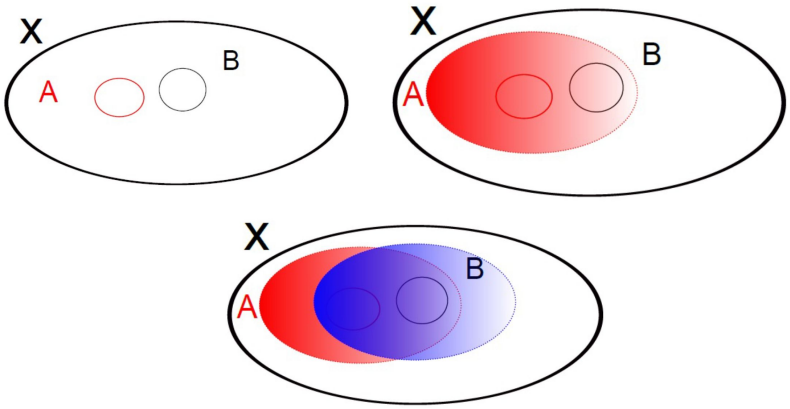


Figura 2.3: Distancia de Hausdorff

Lema 2.3. *Sea un continuo X con la métrica d. Si M, $N \in 2^X$ y $x \in M$, se tiene que existe $y \in N$ tal que $d(x, y) \leq H(M, N)$.*

Demostración. Dado que M, $N \in 2^X$, se sigue que M, N son cerrados y nos vacíos en el compacto X, se infiere que M, N son compactos. Por otro lado, sea $x \in M$, analicemos por casos:

Caso 1. Si $x \in N$, entonces $d(x, x) = 0 \leq H(M, N)$.

Caso 2. Si $x \notin N$, entonces por ser N compacto, se tiene por el Teorema 1.15, la existencia de $y \in N$ tal que $d(x, y) \leq d(x, z)$ para cada $z \in N$. Se necesita verificar que $d(x, y) \leq H(M, N)$.
Procédase por el absurdo, es decir, tomar que $d(x, y) > H(M, N)$. Nótese que $d(x, y)$ es un número real fijo. Entonces por propiedades de ínfimo, existe $\varepsilon_0 \in E(A, B)$ tal que $\varepsilon_0 < d(x, y)$. A partir de aquí, se tiene $M \subset N(\varepsilon_0, N)$ y $N \subset N(\varepsilon_0, M)$. En particular, $M \subset N(\varepsilon_0, N)$ y así, para $x \in M$, existe $w \in N$ que cumple $d(x, w) < \varepsilon_0 < d(x, y)$.
Sin embargo, por lo último, es una contradicción, ya que se encontró que $d(x, y) \leq d(x, z)$ para todo $z \in N$, y $w \in N$. Por lo tanto, se llega a que $d(x, z) \leq H(M, N)$.

□

Otro resultado de gran relevancia, es probar que la distancia de Hausdorff define en realidad una métrica.

Teorema 2.2. *H es una métrica para 2^X.*

Demostración. Sea la función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty^+\rangle$, que cumple para cada $A, B \in 2^X$ por

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\} = \text{ínf}\, E(A,B),$$

se tienen los siguientes resultados.

1. H está bien definida
   Ya que en virtud del Observación 10, el conjunto $E(A,B)$ es no vacío y acotado inferiormente.

2. Además, para cada A, $B \in 2^X$, se infiere que $H(A,B) \geq 0$.

3. Por la misma definición de $H(A,B)$, se deduce que

   $$H(A,B) = H(B,A),$$

   para cada $A, B \in 2^X$.

4. Por otro lado, para cada $A, B \in 2^X$, se necesita probar que

   $$H(A,B) = 0 \text{ si y sólo si } A = B.$$

   Dados $A, B \in 2^X$, supóngase que $H(A,B) = 0$, es decir, por definición $\text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$ es cero, luego para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Se infiere que $A \subset N(\frac{1}{n}, B)$ y tomándose $x \in A$, se tiene que para cada n, existe y_n en B, que cumple $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$.
   Dado que B es compacto, para la sucesión $\{y_n\}$ existe una subsucesión convergente, denotado por $\{y_{n_k}\}$ con límite $y \in B$, cuando k tiende a ∞.
   A partir de desigualdad triángular $d(x,y) \leq d(x, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y)$, y para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $d(x,y) \leq \varepsilon$. Se infiere que $d(x,y) = 0$, y por tanto $x = y$. Por tal razón se tiene que $x \in B$, y se concluye que $A \subset B$.

Análogamente, se obtiene que $B \subset A$. Así $A = B$.
Por otro lado, consideremos que $A = B$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.
Así, ínf $E(A, B)$ es cero, por lo tanto $H(A, B) = 0$.

5. Luego, restaría probar $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$, para cada A, B, $C \in 2^X$
Sean $\delta > 0$ y $a \in A$, resulta que por Lema 2.3, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq H(A, B)$. Nuevamente se utiliza Lema 2.3, para $b \in B$, existe $c \in$ tal que $d(b, c) \leq H(B, C)$. Luego, se infiere que

$$d(a, c) \leq H(A, B) + H(B, C) < H(A, B) + H(B, C) + \delta.$$

En consecuencia tenemos

$$A \subset N(H(A, B) + H(B, C) + \delta, C),$$

si se considera para todo $a \in A$.

Si se imita el mismo proceso, se logra también que

$$C \subset N(H(A, B) + H(B, C) + \delta, A).$$

Por lo que se concluye $H(A, C) < H(A, B) + H(B, C) + \delta$.
Para terminar, como δ es arbitrario, se llega a que

$$H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C),$$

para así finalizar la prueba de que H es una métrica para 2^X.

□

Definición 2.5. *En virtud del Teorema 2.2, H es conocida como* métrica de Hausdorff, *y $(2^X, H)$ es un espacio métrico.*

Lema 2.4. *Sean X un continuo, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Son equivalentes los siguientes resultados:*

1. $H(A, B) < \varepsilon$
2. $A \subset N(\varepsilon, B)$ *y* $B \subset N(\varepsilon, A)$

Demostración. Vamos a pasar a dar la prueba de la siguiente forma:

- (Suficiencia)
  Supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$. Por la definición de H, existe $\delta' \in E(A, B)$ tal que $A \subset N(\delta', B)$ y $B \subset N(\delta', A)$; y por el punto i) de la Observación 8, tenemos que

  $$N(\delta', B) \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } N(\delta', A) \subset N(\varepsilon, A).$$

  Por lo tanto:

  $$A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A).$$

  Ahora, consideremos que se cumple $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Así, por el punto ii) de la Observación 8 se tiene

  $$A \subset N(\varepsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) \mid \delta > 0, \delta < \varepsilon\}.$$

- (Necesidad)
  Sea A compacto, se tiene la existencia de números positivos $\delta_1, , \ldots, \delta_n$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que

  $$\delta_i < \varepsilon \text{ y } A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B).$$

  Sea $\alpha = \text{máx}\{\delta_1, , \ldots, \delta_n\}$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene $N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Así, tenemos:

  $$\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B).$$

  Por consiguiente, se obtiene que $A \subset N(\alpha, B)$. De forma analóga se consigue que $B \subset N(\varepsilon, A)$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma < \varepsilon \text{ y } B \subset N(\gamma, A).$$

Digamos que $\beta = \text{máx}\{\alpha, \gamma\}$, tal que $\beta < \varepsilon$, además de que $A \subset N(\beta, B)$ y $B \subset N(\beta, A)$. Obteniendo que $\beta \in E(A, B)$. En consecuencia $H(A, B) \leq \beta < \varepsilon$. Por lo tanto $H(A, B) < \varepsilon$.

□

Ejemplo 14. *Consideremos el espacio* $\mathbb{R}$ *con su métrica usual. Por ejemplo, si* $[a, b]$ *y* $\{x\}$ *son cerrados en el continuo* $[0, 100]$*, entonces*

$$\begin{aligned} N(\varepsilon, [a, b]) &= \bigcup_{x \in [a,b]} \mathbf{B}(x, \varepsilon) = \langle a - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle . \\ N(\varepsilon, \{x\}) &= \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle . \end{aligned}$$

Sean $[1, 2], [3, 4]$ *son cerrados en* $[0, 100]$*, por lo tanto*

$$\begin{aligned} H([1, 2], [3, 4]) &= \text{ínf} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon > 0 : [1, 2] \subset \langle 3 - \varepsilon, 4 + \varepsilon \rangle \\ y\ [3, 4] \subset \langle 1 - \varepsilon, 2 + \varepsilon \rangle . \end{array} \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

La idea central del Teorema 2.2, indica que la métrica para (X, d), induce la métrica de Hausdorff H en el hiperespacio 2^X. Además, la estructura métrica de 2^X posee mayor extensión para la intuición, mucha veces es mejor tratar directamente con su estructura topológica. El siguiente resultado da una manera conveniente y útil. Antes, es necesario definir los siguientes conceptos.

2.2. Topología de Vietoris

Por cuestiones hístoricas, ésta topología fue introducida por Leopold Vietoris, en Bereiche Zweiter Ordnung. Vietoris probó la estructura más famosa para la presente teoría de hiperespacios de continuos, es decir la compacidad (similar para el caso de conexidad) de 2^X es equivalente a la de X.

Años màs tarde, Ernest Michael, presenta un listado de topologías para 2^X en su *artículo Topologies on spaces of subsets*, con el fín de conocer la diversidad de topologías para 2^X, por ejemplo , la topologia Vietoris para un continuo X, expresa mejor las propiedades de los continuos. Para efecto de la presenta sección, probaremos la topología inducida por la métrica de Hausdorff para 2^X es la misma que la topología de Vietoris.

Definición 2.6. *Dado X un continuo. Para cada $S \subset X$, consideremos los siguientes conjuntos:*

- $\Upsilon(S) = \{A \in 2^X : A \subset S\}$.
- $\Omega(S) = \{A \in 2^X : A \cap S \neq \emptyset\}$.

Lema 2.5. *Sean un subconjunto S de un continuo X, tenemos los siguientes resultados:*

1. *Si S es abierto, entonces $\Upsilon(S)$ y $\Omega(S)$ son abiertos en 2^X.*
2. *Si S es cerrado, entonces $\Upsilon(S)$ y $\Omega(S)$ son cerrados en 2^X.*

Demostración. Vamos a dar a la prueba de cada inciso de la siguiente manera:

- Primero, consideremos S un abierto en X, por probar que $\Upsilon(S)$ es abierto en 2^X.
  Considere que $T \in \Upsilon(S)$, luego $T \in 2^X$ y $T \subset S$. Ver que S es abierto y por Teorema 2.1, se tiene la existencia de $\varepsilon > 0$ tal que $T \subset N(\varepsilon, T) \subset S$. A partir de aquí, se toma

  $$\mathbf{B}(\varepsilon, T) = \{P \in 2^X : H(P, T) < \varepsilon\}.$$

  Ver que $\mathbf{B}(\varepsilon, T) \subset \Upsilon(S)$.
  En efecto, sea $P \in N(\varepsilon, T)$ (por Lema 2.4) y $N(\varepsilon, T) \subset S$ se sigue que $P \subset S$. Por lo que $P \in \Upsilon(S)$. Es por ello, $\mathbf{B}(\varepsilon, T) \subset \Upsilon(S)$. Se infiere que $T \in \Upsilon(S)$, esto garantiza que $\Upsilon(S)$ es abierto en 2^X.

- Además, veamos que $\Omega(S)$ es abierto en 2^X.
  Por supuesto, sea $T \in \Omega(S)$ se tiene que $T \in 2^X$ y $T \cap S \neq \emptyset$. Se toma un $a \in T \cap S$, como S es abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset S$. Por otro lado,

  $$\mathbf{B}(\varepsilon, T) \subset \Omega(S).$$

  Sea $P \in \mathbf{B}(\varepsilon, T)$, se puede ver que $H(T, P) < \varepsilon$.
  Luego por Teorema 2.3, $T \subset N(\varepsilon, P)$. Puesto que $a \in T$, existe $b \in P$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$, es decir, $b \in B(a, \varepsilon)$. Por lo que obtenemos $b \in S$. Ahora $b \in P \cap T$ de manera que $P \cap S \neq \emptyset$. Se infiere que $P \in \Omega(S)$, garantizando que $\mathbf{B}(\varepsilon, T) \subset \Omega(S)$, es decir que $\Omega(S)$ es abierto en 2^X.

- Por otro lado, consideremos S cerrado y un subconjunto $M \subset S$. Por probar que $\Upsilon(S)$ es cerrado en 2^X.

  Bastaría con probar que $\overline{\Upsilon(S)} \subset \Upsilon(S)$.
  Para ello, sea $T \in \overline{\Upsilon(S)}$ y supongamos que ocurre el siguiente hecho $T \notin \Upsilon(S)$. Luego, se toma un $a \in T - S$. Luego, como S es compacto en X y $a \notin S$, se logra que $d(S, b) > 0$. Sea $\varepsilon = d(S, a)$. A consecuencia que $T \in \overline{\Upsilon(S)}$, se sigue que

  $$\mathbf{B}(T, \varepsilon) \cap \Upsilon(S) \neq \emptyset,$$

  tomemos un $R \in \mathbf{B}(T, \varepsilon) \cap \Upsilon(S)$, de tal manera que:

  $$H(T, R) < \varepsilon \text{ y } R \subset S.$$

  En ese sentido, por el Lema 2.4 se tiene:

  $$T \in N(\varepsilon, R) \text{ y } R \subset S,$$

  como $a \in T$, existe $b \in R$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Además, por consecuencia de $R \subset S$, $b \in S$. Así, $d(a, S) \leq d(a, b)$. Por tal sentido, $d(a, S) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción. En ese sentido, se tiene que $T \in \Upsilon(S)$. Por tal razón, se concluye $\overline{\Upsilon(S)} \subset \Upsilon(S)$.

- Para finalizar, restaría probar que $\Omega(S)$ es cerrado en 2^X.
  Por la prueba anterior, se tiene que $\Upsilon(X - S)$ es abierto, cuando S es cerrado. Dado que:

$$2^X = \Omega(S) \cup \Upsilon(X - S) \text{ y } \Omega(S) \cap \Upsilon(X - S) = \emptyset.$$

  Se concluye que $\Omega(S)$ es cerrado en 2^X.

□

Definición 2.7. *Para S_1, S_2,..., $S_n \in \mathfrak{T}$, y $n \in \mathbb{N}$ sea*

$$\langle S_1, \ldots, S_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{j=1}^{n} S_j \text{ y } A \cap S_j \neq \emptyset, \text{ para cada } j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

A este conjunto se le conoce como vietórico *de $S_1, \ldots, S_n$ sobre 2^X.*

Teorema 2.3. *Dados $n, m \in \mathbb{N}$, se verifican los siguientes hechos:*

1. $\Upsilon(S) = \langle S \rangle$ *y* $\Omega(S) = \langle X, S \rangle$.

2. $\langle S_1, \ldots, S_n \rangle = \left[\Upsilon(\bigcup_{j=1}^{n} S_j)\right] \cap \left[\bigcap_{j=1}^{n} \Omega(S_j)\right]$.

3. *Sean $S_j, T_j \in \mathfrak{T}$. Si $S_0 = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$ y $T_0 = \bigcap_{j=1}^{m} T_j$, se tiene que*

$$\langle S_1, \ldots, S_n \rangle \cap \langle T_1, \ldots, T_m \rangle =$$
$$\langle T_0 \cap S_1, \ldots, T_0 \cap S_n, S_0 \cap T_1, \ldots, S_0 \cap T_m \rangle$$

Demostración. Empecemos a resolver cada afirmación:

Prueba 1. Para la prueba de $\Upsilon(S) = \langle S \rangle$, bastará ver para cada $A \in 2^X$ es diferente del conjunto vacío, en consecuencia cumple la definición, y en consecuencia se da la igualdad $\Upsilon(S) = \langle S \rangle$.
Por otro lado, para ver que $\Omega(S) = \langle X, S \rangle$, ver nuevamente que $S \cup X = X$ y cada $A \in 2^X$ es no vacío, luego $\Omega(S) = \langle X, S \rangle$.

Prueba 2. Notar que:

$$\Upsilon(\bigcup_{j=1}^{n} S_j) = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{j=1}^{n} S_j\}.$$

Además, tenemos que:

$$\bigcap_{j=1}^{n} \Omega(S_j) = \{A \in 2^X : A \in \Omega(S_j) \neq \emptyset\} = \{A \in 2^X : A \cap S_j \neq \emptyset\}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$

Finalmente, por definición se tiene que

$$\langle S_1, \ldots, S_n \rangle = \left[\Upsilon(\bigcup_{j=1}^{n} S_j)\right] \cap \left[\bigcap_{j=1}^{n} \Omega(S_j)\right].$$

Prueba 3. Consideremos $S_0 = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$ y $T_0 = \bigcup_{j=1}^{m} T_j$, resolvamos cada contingencia:

Primero, considere un $A \in \langle S_1, \ldots, S_n \rangle \cap \langle T_1, \ldots, T_m \rangle$, por lo demostrado en el inciso 2., se tiene que:

$$\langle S_1, \ldots, S_n \rangle \cap \langle T_1, \ldots, T_m \rangle =$$
$$\Upsilon(S_0) \cap \left[\bigcap_{j=1}^{n} \Omega(S_j)\right] \cap \Upsilon(T_0) \cap \left[\bigcap_{j=1}^{m} \Omega(T_j)\right].$$

Así se logra que $A \subset S_0 \cap T_0$. Además, tenemos que:

$$S_0 \cap T_0 = (S_0 \cap T_0) \cup (T_0 \cap S_0) =$$
$$\left(S_0 \cap \bigcup_{j=1}^{m} T_j\right) \bigcap \left(T_0 \cap \bigcup_{j=1}^{n} S_j\right) =$$
$$\left(\bigcup_{j=1}^{m} S_0 \cap T_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{n} T_0 \cap S_j\right).$$

A su vez, como $A \cap S_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $A \subset T_0$, se infiere que:

$$A \cap (T_0 \cap S_j) \neq \emptyset,$$

para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Ahora, podemos repetir el mismo procedimiento para obtener que $A \cap (S_0 \cap T_j) \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como consecuencia de lo último se deduce que:

$$A \in \langle T_0 \cap S_1, \ldots, T_0 \cap S_n, S_0 \cap T_1, \ldots, S_0 \cap T_m \rangle .$$

Para terminar la prueba, vamos a probar la otra contingencia, consideremos un $A \in \langle T_0 \cap S_1, \ldots, T_0 \cap S_n, S_0 \cap T_1, \ldots, S_0 \cap T_m \rangle$, por consiguiente, tenemos que:

$$A \subset S_0 \cap T_0, \text{ es decir } A \subset S_0 \text{ y } A \subset T_0.$$

En consecuencia, se tiene el siguiente resultado:

$$A \in \Upsilon(S_0) \text{ y } A \in \Omega(T_0).$$

Luego, se observamos que:

$$A \cap (S_0 \cap T_j) = A \cap T_j \neq \emptyset,$$

para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. De modo que se logra

$$A \in \Upsilon(S_0) \text{ y } A \in \Upsilon(T_0).$$

Por otra parte, se tiene que $A \cap (S_0 \cap T_j) = A \cap T_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.
Además, ver que $A \in \bigcap_{j=1}^{m} \Omega(T_j)$.
De manera similar, se puede ver que

$$A \in \bigcap_{j=1}^{n} \Omega(S_j).$$

Por lo que resulta que $A \in \langle S_1, \ldots, S_n \rangle \cap \langle T_1, \ldots, T_m \rangle$. De esa manera se concluye la prueba.

□

Teorema 2.4. *Sean (X, d) un continuo, la topología $\mathfrak{T}$ con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Dados los conjuntos*

1. $\mathfrak{B} = \{\langle S_1, \ldots, S_n\rangle : S_j \in \mathfrak{T} \text{ para cada } j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$.

2. $\mathfrak{S} = \{\Upsilon(S) : S \in \mathfrak{T}\} \cup \{\Omega(S) : S \in \mathfrak{T}\}$.

Entonces, $\mathfrak{B}$ es una base para la topología que se obtuvo de la métrica de Hausdorff H para 2^X y $\mathfrak{S}$ es sub-base contenida en $\mathfrak{B}$.

Demostración. En virtud del Teorema 2.3 inciso 1, se tienen las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1. $\langle X\rangle = 2^X$.

Por definición se tiene que $\langle X\rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$, se concluye la prueba, por lo visto en la prueba anterior. Por último denotaremos como $\bigcup \mathfrak{B}$ a la reunión de los conjuntos de $\mathfrak{B}$, por lo que se infiere que $2^X = \bigcup \mathfrak{B}$.

Afirmación 2. $\mathfrak{B}$ es base para 2^X.

Para cada par de elementos $\langle S_1, \ldots, S_n\rangle$ y $\langle T_1, \ldots, T_m\rangle$ de $\mathfrak{B}$, resulta que si $A \in \langle S_1, \ldots, S_n\rangle \cap \langle T_1, \ldots, T_m\rangle$, entonces existe un $\langle Q_1, \ldots, Q_k\rangle \in \mathfrak{B}$ tal que:

$$A \in \langle Q_1, \ldots, Q_k\rangle \subset \langle S_1, \ldots, S_n\rangle \cap \langle T_1, \ldots, T_m\rangle .$$

Sin embargo, por Teorema 2.3 inciso 3, tenemos que:

$$\langle Q_1, \ldots, Q_k\rangle = \langle S_1, \ldots, S_n\rangle \cap \langle T_1, \ldots, T_m\rangle ,$$

por tal razón, $\mathfrak{B}$ es base.

Afirmación 3. $\mathfrak{S}$ es una sub-base contenida en $\mathfrak{B}$.

Consideremos el siguiente conjunto $\mathfrak{S}^* = \{\bigcap U : U \text{ es un subconjunto finito de } \mathfrak{S}\}$. Para mostrar que si $\mathfrak{S}$ es una sub-base de $\mathfrak{B}$. Bastará con mostrar que $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{B}$.

En efecto, primero consideremos un $W \in \mathfrak{S}^*$, entonces se tienen dos posibilidades:

$$W = \Upsilon(A) \text{ o } W = \Omega(A),$$

para algún abierto A de X. A saber,

$$W = \langle A \rangle \text{ o } W = \langle X, A \rangle.$$

De cualquier forma, $W \in \mathfrak{B}$. Por otro lado, del Teorema 2.3 inciso 3, se sabe que $\mathfrak{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Por lo que

$$W \in \mathfrak{B} \text{ y } \mathfrak{S}^* \subset \mathfrak{B}.$$

Para terminar, sea $W \in \mathfrak{B}$. Consideremos $S_1, ..., S_n$ subconjuntos abiertos de X tales que $W = \langle S_1, ..., S_n \rangle$ y $Z = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$. Luego, por Teorema 2.3 inciso 2 y 3, resulta que

$$W = \langle S_1, \ldots, S_n \rangle = \left[\Upsilon(\bigcup_{j=1}^{n} S_j) \right] \cap \left[\bigcap_{j=1}^{n} \Omega(S_j) \right] = \Upsilon(Z) \cap \left[\bigcap_{j=1}^{n} \Omega(S_j) \right].$$

Por lo que $W \in \mathfrak{S}^*$ y $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}^*$.

□

Definición 2.8. *La topología generada por la base $\mathfrak{B}$, denotado por $\mathfrak{T}_V$, se llamará la* Topología de Vietoris o Topología finita *en 2^X.*

Teorema 2.5. *La topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris de cualquier continuo, son la misma.*

Demostración. Denótese como $\mathfrak{T}_H$, la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Por probar que $\mathfrak{T}_V = \mathfrak{T}_H$.
Veamos la primera contención, entonces será suficiente probar que la sub-base de $\mathfrak{T}_V$ está contenido en $\mathfrak{T}_H$.
Considere un $W \subset X$ abierto fijo, se tienen los siguientes casos:

Caso 1. Si $W = X$, se tiene que $\Upsilon(W) = \Omega(W) = 2^X$.

Caso 2. Si $W = \emptyset$, resulta que $\Upsilon(W) = \Omega(W) = \emptyset$.

Se infiere que a partir de los Casos 1 y 2, se tiene que $\Upsilon(W)$, $\Omega(W) \in \mathfrak{T}_H$, para $W = X$ o $\emptyset = W$.

Caso 3. Considere que $W \neq X$ o $W \neq \emptyset$, se fija un $P \in \Upsilon(W)$ y considere $\varepsilon = d(P, X - W)$. Dado que P y $X - W$ son compactos, cuya intersección es el vacío, se tiene que $\varepsilon > 0$. Ahora empecemos a resolver las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1. Si $\mathbf{B}(P, \varepsilon) \subset \Upsilon(W)$, se tendrá que $\Upsilon(W) \in \mathfrak{T}_H$.

Se procede por contradicción. Sea $G \in \mathbf{B}(P, \varepsilon)$ y supóngase que existe $z \in G \cap (X - W)$.

Por Lema 2.4, se tiene que $G \subset N(\varepsilon, P)$, de modo que existe $y \in P$ que cumple $d(y, z) < \varepsilon$. Además, se obtiene que

$$d(P, X - W) \leq d(x, y) < \varepsilon = d(P, X - W),$$

lo cual es imposible. Por lo que $G \cap (X - W) = \emptyset$, es decir, $G \subset W$. Por lo tanto, $G \in \Upsilon(W)$, esto prueba la afirmación.

Ahora, consideremos un $P \in \Omega(W)$ fijo y un punto $z_0 \in W \cap P$.
Se toma un $\varepsilon = d(z_0, X - W)$, se tiene que $\varepsilon > 0$. Luego, podemos decir que:

Afirmación 2. Si $\mathbf{B}(P, \varepsilon) \subset \Omega(W)$, se tendrá que $\Omega(W) \in \mathfrak{T}_H$.

Consideremos en efecto que $G \in \mathbf{B}(P, \varepsilon)$ y supongamos que

$$G \subset (X - W),$$

por Lema 2.4, se tiene que $P \subset N(\varepsilon, G)$, esto sugiere que existe $y_0 \in G$ que cumple $d(z_0, y_0) < \varepsilon$.

Así pues, $d(z_0, X - W) \leq d(z_0, y_0) < \varepsilon = d(z_0, X - W)$, es decir,

$$G \cap W \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $G \in \Omega(W)$, logrando la prueba la afirmación.

En resumen, de las afirmaciones 2 y 3, se prueba que $\mathfrak{T}_V \subset \mathfrak{T}_H$.

Para terminar, probemos la última contención, es decir, restaría demostrar que $\mathfrak{T}_H \subset \mathfrak{T}_V$.
En efecto, para ello bastará probar que para cada bola $\mathbf{B}(P, \varepsilon)$ en $\mathfrak{T}_H$, existen abiertos $S_1, S_2, ..., S_n$ en $\mathfrak{T}_V$ tales que

$$P \in \langle S_1, S_2, ..., S_n \rangle \subset \mathbf{B}(P, \varepsilon).$$

Entonces, se fija un $P \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, probaremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 3. $\mathbf{B}(P, \varepsilon) \in \mathfrak{T}_H$. En consecuencia, se obtiene $\mathfrak{T}_H \subset \mathfrak{T}_V$.

Como P es compacto y $P \subset \bigcup_{y \in P} B_d(y, \frac{\varepsilon}{2})$, se tiene la existencia de $n \in \mathbb{N}$ e $y_1, ..., y_n \in P$ tal que:

$$P \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_d(y_j, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Sea $S_j = B_d(y_j, \frac{\varepsilon}{2})$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Resulta que $\langle S_1, ..., S_n \rangle$ es un elemento de la topología $\mathfrak{T}_V$ y $P \in \langle S_1, ..., S_n \rangle$.

Afirmación 4. $\langle S_1, ..., S_n \rangle \subset \mathbf{B}(P, \varepsilon)$.

En efecto, considérese $S \in \langle S_1, ..., S_n \rangle$. Por definición, se tiene que $S \subset \bigcup_{j=1}^{n} S_j$. Resulta que:

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_d(y_j, \tfrac{\varepsilon}{2}) \subset N(\tfrac{\varepsilon}{2}, P) \subset N(\varepsilon, P).$$

Por otro lado, si $y \in P$ existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $y \in S_j$. Además $S \in \langle S_1, ..., S_n \rangle$, así que $S \cap S_j \neq \emptyset$. Se toma $y_0 \in S \cap S_j$ fijo y como $y \in S_j$, se infiere

$$d(y, y_0) \leq d(y, y_j) + d(y_j, y_0) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $P \subset N(\varepsilon, S)$.

En virtud del Lema 2.4, tenemos $H(S,P) < \varepsilon$, en consecuencia, $S \in \mathbf{B}(P,\varepsilon)$.

En resumen, por las afirmaciones anteriores 3 y 4, se logra $\mathfrak{T}_H \subset \mathfrak{T}_V$. En síntesis, se prueba que $\mathfrak{T}_V = \mathfrak{T}_H$. □

Observación 11. *Podemos inferir de éste último resultado que la Topología de Vietoris, para el caso de continuos, es metrizable.*

Una de las lecciones que nos deja la presente sección es todo hiperespacio de un continuo se le considera, ya sea con la topología inducida por la métrica de Hausdorff, o la topología de Vietoris, de manera que no sea conveniente. Entonces a partir de aquí, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ estarán considerados con la métrica inducida por la métrica de Hausdorff. Otra interrogante interesante

¿bajo qué condiciones se tienen que 2^X y $C(X)$ son continuos?

La respuesta es la única condición es que X sea continuo, puede revisarsé en [15, 1.13, p. 65].

Observación 12. *Por la manera definida de $C(X)$ y $F_n(X)$ son subconjuntos de 2^X. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ y por la métrica inducida del hiperespacio 2^X permite ver a $C(X)$ y $F_n(X)$ como continuos.*

Ahora pasemos a ver los modelos geométricos de los hiperespacios.

2.3. Modelos Clásicos para $C(X)$

Como ya se ha mencionado, un hiperespacio se define como una colección de subconjuntos de X, en general, es preferible conocer un espacio como colección de puntos, y en ese sentido, entenderemos como modelo para un hiperespacio $\mathcal{H}(X)$, a un espacio homemorfo a $\mathcal{H}(X)$, y donde los elementos de dicho espacio sean puntos.

Para justificar cada modelo de $C(X)$, los continuos considerados son localmente conexos y las afirmaciones declaradas son propias de [21].

La forma de trabajo en ambos casos es la siguiente; dado un continuo X identificaremos los subcontinuos de X y daremos relaciones entre $C(X)$ y desarrollaremos un modelo geométrico de $C(X)$.

Notación 1. *Dado cualquier arco que tenga como puntos extremos a s y t, lo denotamos como $\overline{st}$. Si tenemos el caso de que s y t fueran iguales se denota al conjunto de un solo punto $\{s\}$.*

2.3.1. El hiperespacio de los subcontinuos del arco

Por lo visto anteriormente, todo arco es homeomorfa a I, en consecuencia, construiremos el modelo para $C(I)$, donde los subcontinuos pueden ser un intervalos cerrados o ser un solo punto

$$C(I) = \{[a, b] \subset I : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

El siguiente resultado permite facilitar el camino para modelar $C([0, 1])$.

Lema 2.6. *[21, Teorema 4.1.1, p. 47] $C(I)$ es homeomorfo al conjunto $\Delta = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$.*

Para modelar $C(I)$, utilicemos la función $f : C(I) \to \mathbb{R}^2$ dado por $f([a, b]) = (a, b)$.
Luego, podríamos preguntarnos si $\{k\} \in C(X)$, ¿Cómo representarlo?

Notación 2. *Dado un continuo X, $k \in X$ y cualquier hiperespacio $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X), F_n(X)\}$. Consideremos la siguiente notación $\mathcal{H}(k, X) = \{A \in \mathcal{H}(X) : k \in A\}$, que es la* colección de puntos en el hiperespacio *que contiene al conjunto unipuntual $\{k\}$, pero por un abuso de notación lo consideraremos sólo con la letra k.*

Observación 13. *En nuestro caso, se tiene:*

$$C(x, I) = \{[a, b] : 0 \leq a \leq x \leq b \leq 1\}.$$

En ese sentido, se obtienen los siguientes resultados:

1. *Fijamos el punto* $a = 0$, *y variando* b, *se tiene que el conjunto* $C(0, I) = \{[0, b] : 0 \leq b \leq 1\}$. *Puede verse en Figura 2.4 (A).*

2. *Ahora, fijamos* $b = 1$ *y variando* a, *el conjunto* $C(1, [0, 1]) = \{[a, 1] : 0 \leq a \leq 1\}$. *Puede verse en Figura 2.4 (B).*

3. *Mientras que los conjuntos* $\{0\}$ *y* $\{1\}$ *están representado por* $[0, 0]$ *y* $[1, 1]$, *respectivamente. Además, si realizamos la identificación a* $[0, 0]$, $[1, 1]$ *y* I, *son* $(0, 0)$, $(1, 1)$ *y* $(0, 1)$. *Para los casos* $a, b \in [0, 1]$ *cualesquiera, rellenan todo el triángulo, ver Figura 2.4 (D).*

4. *Por último para* $a \in [0, 1]$, *el conjunto* $\{a\}$ *es representado por* $[a, a]$, *luego es identificado en* Δ, *como puntos ubicados en la recta* $a = b$. *Puede verse en Figura 2.4 (C).*

5. *Como resultado final, el modelo de* $C([0, 1])$ *queda ilustrando en Figura 2.4 (E).*

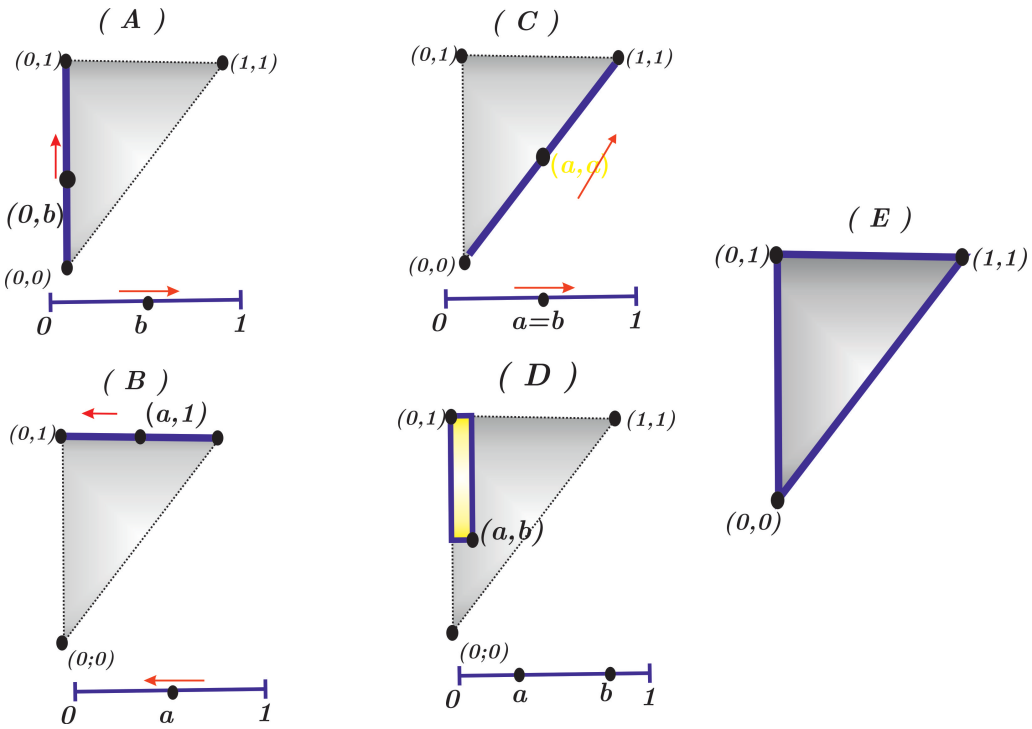


Figura 2.4: El Hiperespacio $C(I)$

Observación 14. *Otra manera de realizar una representación, que en ciertas ocaciones suele ser más útil, para $C(I)$; consiste en emplear la identificación: $C(I) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $([a,b]) \mapsto (\frac{a+b}{2}, b-a)$, es decir, a cada intervalo le asigna su punto medio y su longitud. Con esta identificación, en lugar de obtener el triángulo Δ, se obtiene el triángulo $\blacktriangle$. Puede verse en Figura 2.5.*

Un aspecto importante para el primer modelo es que tenemos *otro camino* para poder modelar a $C(X)$ y así se ajuste a nuestra necesidades más adelante, ya que es importante *tener diferentes maneras de representar un mismo hiperespacio.*

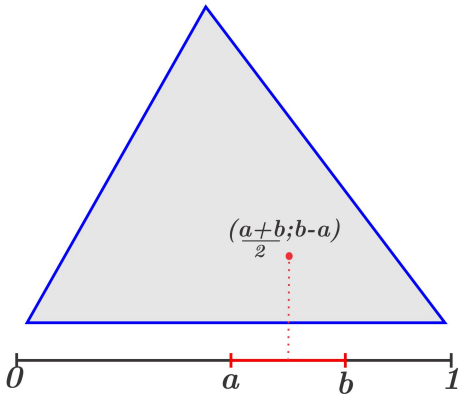


Figura 2.5: Segunda forma de representar a $C(I)$

2.3.2. El hiperespacio de los subcontinuos de la curva cerrada simple

Se sabe que toda curva cerrada simple es homeomorfa a la circuferencia, por tal razón construiremos el modelo para $C(X)$ cuando $X = \mathbb{S}^1$, en ese caso los subcontinuos pueden ser un sólo punto, o subarcos, o una copia de sí mismo.

Sin embargo debemos ver que dados dos puntos en la circunferencia es posible determinar dos tipos de subarcos, a los que llamaremos a uno de ellos *subarco mayor*, por ser de mayor longitud; y el que resta *subarco menor*, por ser de menor longitud, a excepción cuando los

puntos son *antípodas*.

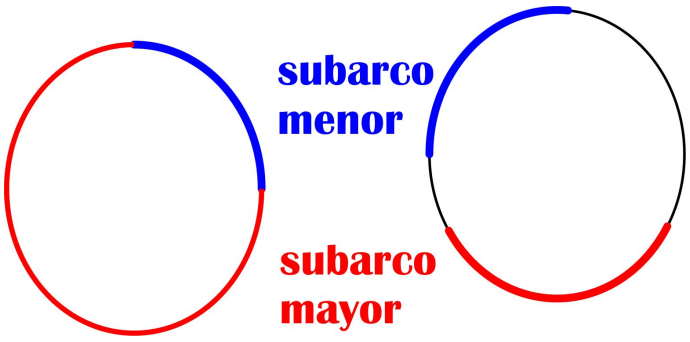


Figura 2.6: Subarcos mayor y menor de $\mathbb{S}^1$

La forma correcta de identificar a un arco es siempre mediante su longitud $l(J)$ y su punto medio $m(J)$.
Por consiguiente, el siguiente resultado permite imaginar el modelo de $C(\mathbb{S}^1)$.

Lema 2.7. *[21, Teorema 4.1.3, p. 50]* $C(\mathbb{S}^1)$ *es homeomorfa a* $\mathbb{D}$, *donde* $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Para modelar $C(\mathbb{S}^1)$, utilizaremos la función

$$g : C(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}^2 \text{ dado por } g(J) = \begin{cases} \left(1 - \frac{l(J)}{2\pi}\right) m(J) & \text{si} \quad J \neq \mathbb{S}^1 \\ (0,0) & \text{si} \quad J = \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

La función g sugiere que por cada subarco que se tome con la identificación de su longitud y punto medio, nos permite ver a cada elemento de $C(X)$ como un *punto* en el plano $\mathbb{R}^2$. El resultado del conjunto de todos *esos puntos* determinan un disco relleno unitario. Puede verse en Figura 2.7.

Observación 15. *Con el objeto de visualizar elementos del disco unitario, se tiene los siguientes aspectos:*

1. *Si* $A = \mathbb{S}^1$, *por medio de la función de* g, *le corresponde el centro del disco* $\mathbb{D}$ *en el punto* $(0, 0)$.

2. *Los conjuntos unipuntuales de la forma* $\{p\}$*, se encuentran en el borde de* $\mathbb{D}$*.*

3. *Cuando* A *es un arco menor de* X*, la recta determinada por el centro de la circuferencia y el punto medio* $m(A)$*, nos permite ver que la distancia desde* $m(A)$ *a* $g(A)$ *es* $\frac{l(A)}{2\pi}$*. Por lo cual,* $m(A)$ *representa un vector hacía el centro de* A*.*

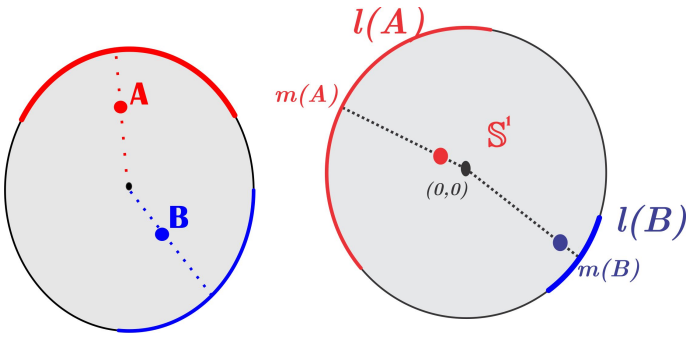


Figura 2.7: Identicación longitud y Punto medio

Observación 16. *Consideremos un tipo especial de subcontinuo de* $\mathbb{S}^1$*, por ejemplo*

- *Tomar al punto* $P(1,0)$ *y considérese a todos los subcontinuos de* $\mathbb{S}^1$ *que lo contienen.*

- *Hasta aquí surgen dos casos; los arcos que contienen a* $(1,0)$ *como extremo izquierdo, y los arcos que contienen a* $(1,0)$ *como extremo derecho.*

- *Al decir que un arco tiene como extremo derecho a un punto* P*, da entender que si nos paramos en cualquier punto del arco, viendo hacia el origen, el punto* P *estará de lado derecho de nosotros.*

- *El caso es análogo si decimos que un arco tiene como extremo izquierdo a un punto* P*.*

- *Se tiene entonces que todos los subcontinuos de* $\mathbb{S}^1$ *que tienen como punto izquierdo(derecho) a* $P(1,0)$ *están representados en la siguiente figura por* H_1 *y* H_2*, respectivamente.*

- *Los arcos mencionados tienen la forma corazón (C), como se muestra en Figura 2.8.*

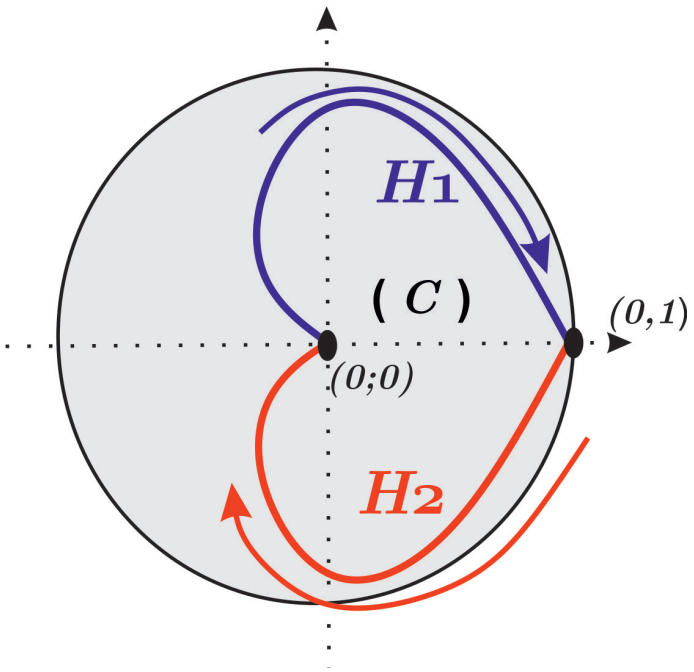


Figura 2.8: Representación (C)

2.3.3. El hiperespacio de los subcontinuos del triodo simple

Sé conoce al triodo simple como aquel formado por un punto v llamado vértice, del cual salen tres arcos, los cuales son $v = (0,0,0)$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$, de esa manera obtenemos que $\mathbb{T}$ es formado por los arcos $\overline{ve_1}$, $\overline{ve_2}$ y $\overline{ve_3}$.
Dar un modelo de $C(\mathbb{T})$, como en los continuos anteriores, se procede a identificar a cada subcontinuos de $\mathbb{T}$, estos pueden ser categorizados de la siguiente manera, subcontinuos de $\overline{ve_1}$, subcontinuos de $\overline{ve_2}$, subcontinuos de $\overline{ve_3}$ y subcontinuos que contienen a v. Previámente, se tenía que para cada i, $\overline{ve_i}$ es homeomorfo a I, por tal razón $C(\overline{ve_i})$ es homeomorfo $\triangle_i$.
Por otro lado, nos hace falta representar a los subcontinuos que contienen a v, los cuales son de la forma

$$\overline{(x,0,0)v} \cup \overline{(0,y,0)v} \cup \overline{(0,0,z)v}, \text{ con } 0 \leq x,y,z \leq 1.$$

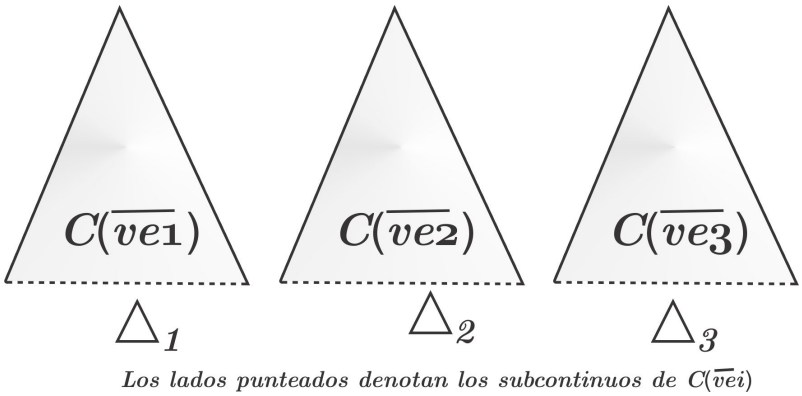


Figura 2.9: Subcontinuos de $C(\overline{ve_1})$, $C(\overline{ve_2})$ y $C(\overline{ve_3})$

Al conjunto de subcontinuos lo denotaremos por $C_v(\mathbb{T})$, los elementos de $C_v(\mathbb{T})$ dependen únicamente de x, y, y de z podemos dar un modelo para $C_v(\mathbb{T})$ como

$$\square = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

Lema 2.8. *[21, Afirmación, p. 53]* $C_v(\mathbb{T})$ *es homeomorfo a* $\square$.

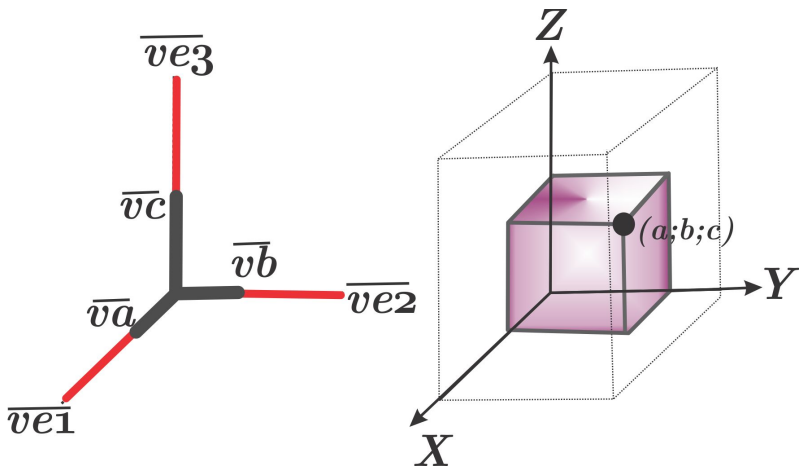


Figura 2.10: Subcontinuos de $C_v(\mathbb{T})$

Observación 17. *Visualizar un elemento* $T \in C_v(\mathbb{T})$, T *está determinado de manera única por la longitud de las intersecciones de* T *con los lados de* $\mathbb{T}$. *Así que ellos pueden ser representados por un vector con tres coordenadas* (a, b, c). *En consecuencia, al varíar* $0 \leq a, b, c, \leq 1$, *se obtiene un cubo convexo.*

Notar, un elemento de $C_v(\mathbb{T})$ queda determinado como

$$T = (\mathbb{T} \cap \overline{ve_1}) \cup (\mathbb{T} \cap \overline{ve_2}) \cup (\mathbb{T} \cap \overline{ve_3}).$$

Además, se tiene que $\square \cap \triangle_i . \neq \emptyset$, este hecho nos hace pensar que para tener un modelo geométrico $C(\mathbb{T})$, se debería identificar $\square$ con cada $\triangle_i$ para $i = 1, 2, 3$.
Como resulta de la identificación se tiene un cubo convexo pegado con tres triángulo a travéz de las lineas punteadas:

$$C(\mathbb{T}) = C(\overline{ve_1}) \cup C(\overline{ve_2}) \cup C(\overline{ve_3}) \cup C_v(\mathbb{T}).$$

A este modelo se le conoce como el *cubo con alas*. El modelo de $C(\mathbb{T})$ queda representado en la Figura 2.11.

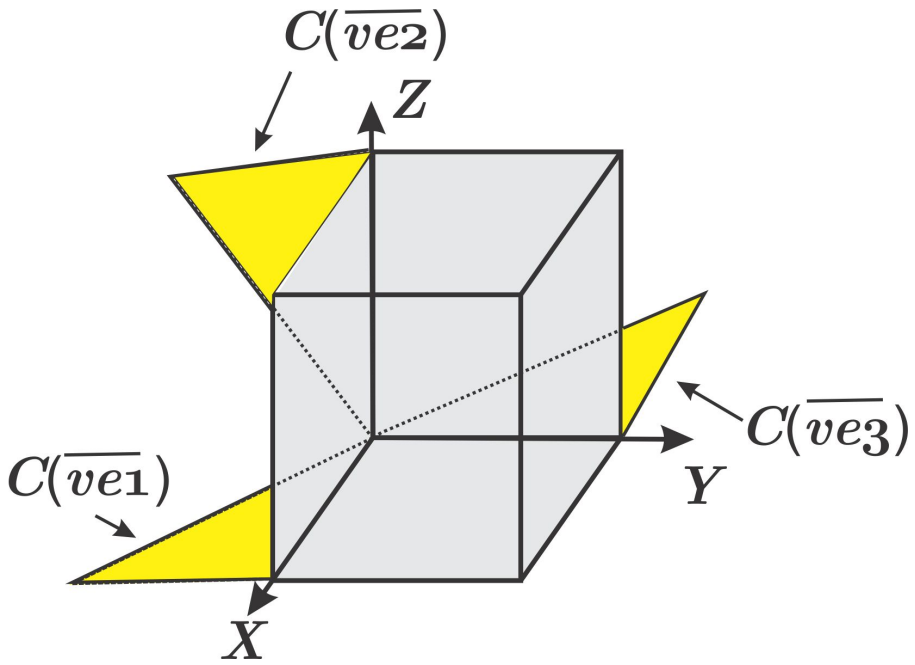


Figura 2.11: Modelo de $C(\mathbb{T})$

2.4. Modelos para productos simétricos $F_2(X)$

Para $n \in \mathbb{N}$, al hiperespacio $F_n(X)$ se le conoce como el n-ésimo producto simétrico de X. La definición de n-ésimo producto simétrico para un espacio topológico fue introducido por vez primera en el año de 1931 en el artículo *On Symmetric Products of Topological Spaces* escrito por Karol Borsuk y Stanislaw Ulam, en [2] prueban que si $X = [0, 1]$, entonces $F_n(X) \cong [0, 1]^n$ para cada $n \in \{1, 2, 3\}$ y para cada $n \geq 4$ se cumple que $F_n(X)$ no es homeomorfo a ningún subconjunto del espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$, según Borsuk-Ulam.

Siguiendo la misma dirección de la sección anterior, el objetivo de este apartado será construir los modelos geométricos del hiperespacio $F_2(X)$ de algunos continuos, debemos mencionar que los continuos utilizados son localmente conexos, para los cuales su hiperespacio $F_2(X)$ puede ser encajado en $\mathbb{R}^3$.
Se sabe que $F_2(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más 2 puntos}\}$. Iniciaremos por encontrar del modelo arco.

2.4.1. El segundo producto simétrico del arco

Nuevamente, tener el modelo para el arco, se tiene que considerar al intervalo I como

$$F_2(I) = \{\{a, b\} \in 2^I : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Se puede pensar que cada subconjunto $\{a, b\}$ del intervalo I está completamente determinado por sus elementos, es decir, por a y b, por lo que podemos asignarle a cada subconjunto $\{a, b\}$ de I la pareja ordenada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Establezcamos el siguiente resultado.

Lema 2.9. *[21, Teorema 5.1.1, p. 71]*

$$F_2(I) \text{ es homeomorfo a } \Delta = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Podemos inferir que $F_2(I)$ es homeomorfo al triángulo Δ, como se ve en Figura 2.12.

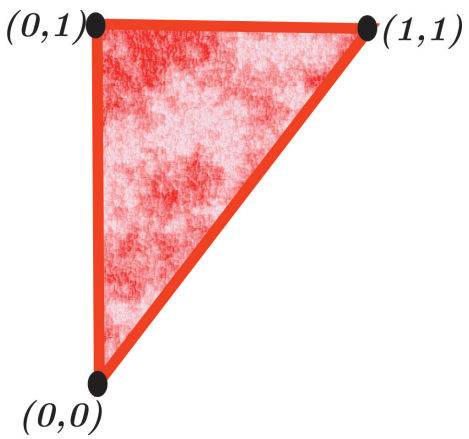


Figura 2.12: Modelo de $\triangle$

Observación 18. *Veamos los siguientes aspectos:*

1. *Se toma $a = 0$ fijo y variando b a lo largo de I, se tiene que $F_2(\{0, b\})$ se ubica a lo largo del eje Y. Puede verse en la Figura 2.13 (A).*

2. *Considere que $b = 1$ y al variar a, resulta que $F_2(\{a, 1\})$ se ubican a lo largo de una recta paralelo al eje X. Puede verse en Figura 2.1 (B).*

3. *Si $a = b$ es identificado el elemento de $F_2(\{a, a\})$ en Δ, como puntos ubicados en la recta $y = x$. Puede verse en la Figura 2.13 (C).*

4. *Por último, para cualquier $a, b \in [0, 1]$, rellenan todo el triángulo. Puedo verse en (D).*

Otra manera útil para modelar $F_2(X)$, es de la siguiente manera:

Teorema 2.6. *[13, Teorema 4.1, p. 37] Dado el conjunto $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. La función $\lambda : F_2([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida para cada $\{a, b\} \in F_2([0, 1])$ por $\lambda(\{a, b\}) = (\text{mín}\{a, b\}, \text{máx}\{a, b\})$ es un homeomorfismo con su imágen.*

Hasta aquí, se puede inferir que existen *más funciones* para modelar el segundo producto simétrico del intervalo. Ahora, procedamos para el continuo $\mathbb{T}$.

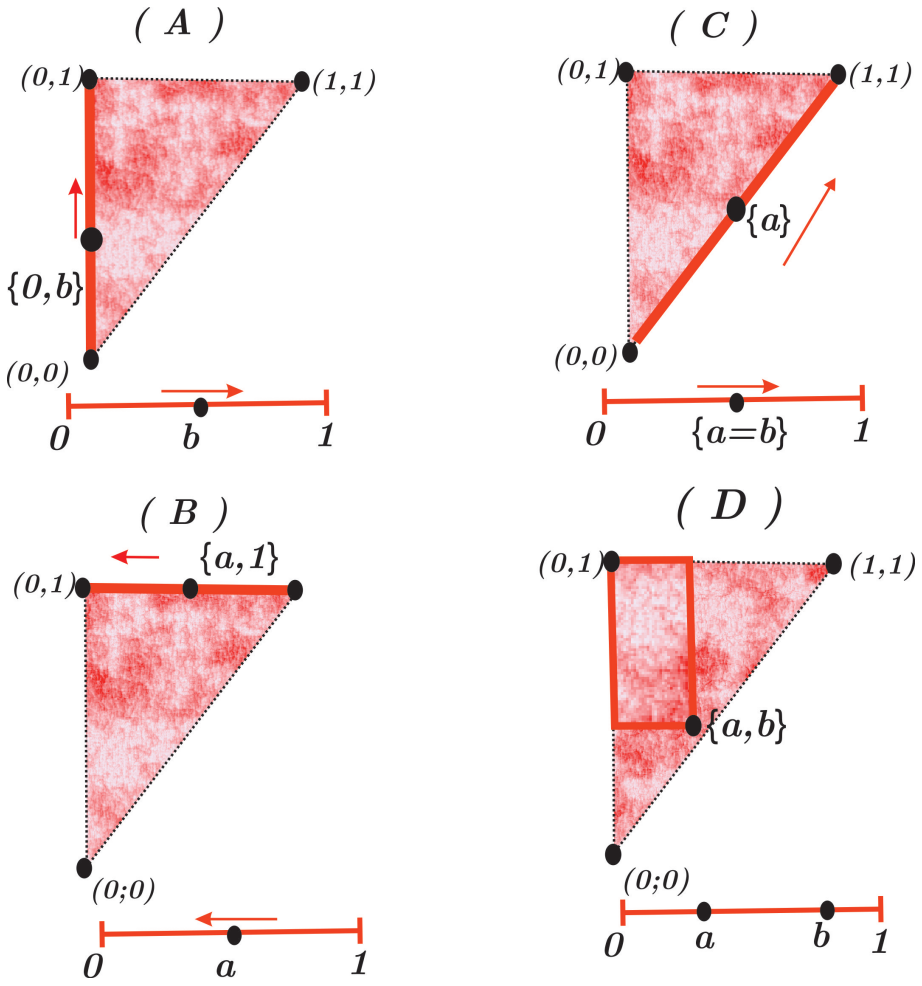


Figura 2.13: Representación de $F_2(I)$

2.4.2. El segundo producto simétrico del tríodo simple

Conservando la misma notación del apartado 2.3.3, dar un modelo de $F_2(\mathbb{T})$, es identificar para cada $\{a,b\}$ de $\mathbb{T}$, los subcontinuos de $F_2(\mathbb{T})$ son clasificados de la siguiente manera:

1. Los subconjuntos de $\overline{ve_1}$, $\overline{ve_2}$, $\overline{ve_3}$.
2. Los subconjuntos de $(\overline{ve_1} \cup \overline{ve_2})$, $(\overline{ve_1} \cup \overline{ve_3})$ y $(\overline{ve_2} \cup \overline{ve_3})$.

Un hecho importante de esta clasificación es:

- Para cada $i, j \in \{1,2,3\}$, cada $\overline{ve_i}$ o $(\overline{ve_i} \cup \overline{ve_j})$ son homeomorfos a I.
- Por el apartado 2.4.1, se tiene que cada $F_2(\overline{ve_i})$ es homeomorfo a un $\triangle_i$, para cada $i \in \{1,2,3\}$.

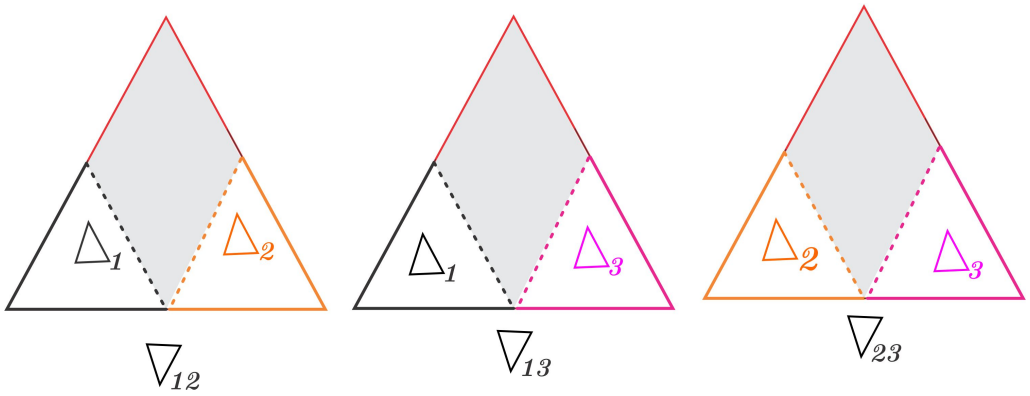
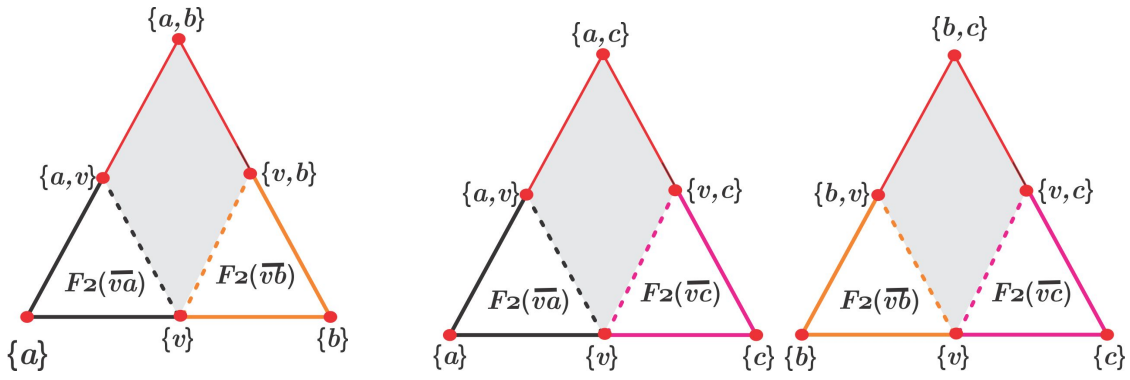


Figura 2.14: Subcontinuos de $F_2(\overline{ve_1} \cup \overline{ve_2})$, $F_2(\overline{ve_1} \cup \overline{ve_3})$ y $F_2(\overline{ve_2} \cup \overline{ve_3})$

- Entonces se deduce que para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que $F_2(\overline{ve_i} \cup \overline{ve_j})$ es homeomorfo a un triángulo el cual lo denotaremos como $\nabla_{i,j}$
- Además, cada $\triangle_i \subset \nabla_{i,j}$, $\triangle_j \subset \nabla_{i,j}$ con $\nabla_{i,j} \cap \nabla_{k,j} \neq \emptyset$.

Observación 19. *Para visualizar los elementos de $F_2(\overline{ve_i} \cup \overline{ve_j})$, tomemos los pares de puntos $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ y $\{a, c\}$ a lo largo del arco $\overline{ve_i} \cup \overline{ve_j}$, con i, $j \in \{1, 2, 3\}$, se tienen que:*

1. *El modelo de $F_2(\overline{va} \cup \overline{vb})$ están representado en la Figura 2.15 (a).*
2. *El modelo de $F_2(\overline{va} \cup \overline{vc})$ está representado en la Figura 2.15 (b).*



(a) $F_2(\overline{va} \cup \overline{vb})$ (b) $F_2(\overline{va} \cup \overline{vc})$ (c) $F_2(\overline{vb} \cup \overline{vc})$

Figura 2.15: Subcontinuos de $F_2(\overline{va} \cup \overline{vb}) \cup F_2(\overline{va} \cup \overline{vc}) \cup F_2(\overline{vb} \cup \overline{vc})$

3. El modelo de $F_2(\overline{vb} \cup \overline{vc})$ está representado en la Figura 2.15 (c).

De manera que identificamos los conjuntos $\triangle_i$, donde $i \in \{1, 2, 3\}$, obtenemos el modelo de $F_2(\mathbb{T})$.

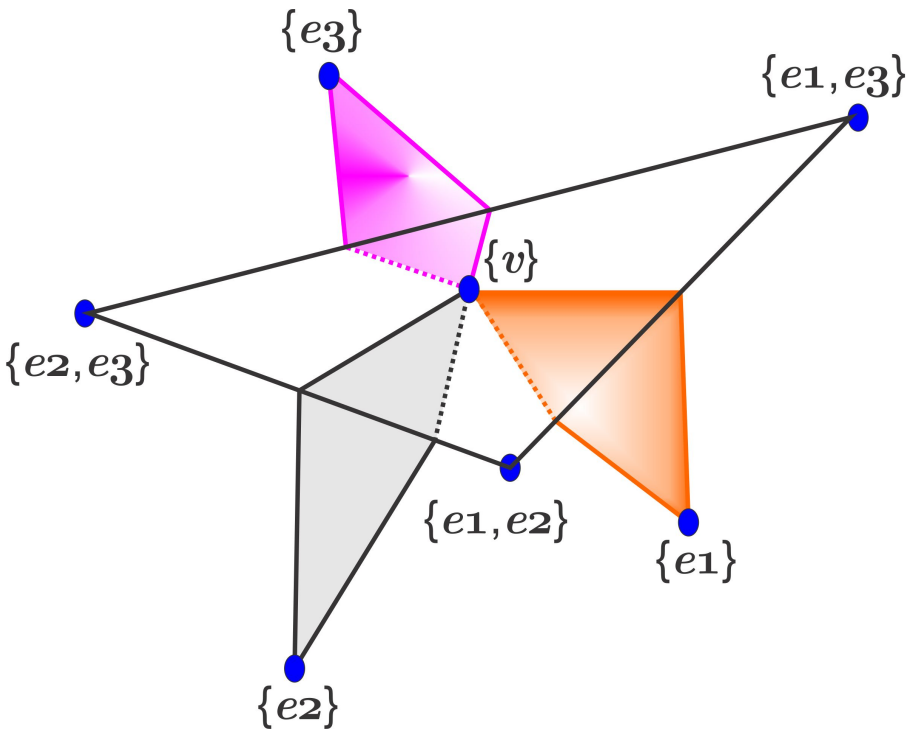


Figura 2.16: Modelo de $F_2(\mathbb{T})$

Este pegado, según los continuológos lo conocen como la *mesa triangular con tres patas.*

2.4.3. El segundo producto simétrico de la curva cerrada simple

Un modelo para la curva cerrada simple es identificar los subcontinuos de $F_2(\mathbb{S}^1)$ de la siguiente manera que

$$F_2(\mathbb{S}^1) = \{\{a, b\} \in 2^{S^1} : a, b \in \mathbb{S}^1\}.$$

Se tiene que para cada conjunto determinado por $\{a, b\}$ es un arco sobre $\mathbb{S}^1$, se imita los pasos que se realizó para encontrar el modelo de $C(\mathbb{S}^1)$ (visto en el apartado 2.3.2) y así deducir un modelo de $F_2(\mathbb{S}^1)$,

indudablemente se considera el arco de menor longitud determinado por $\{a, b\}$, sin embargo, se tiene un caso especial, cuando $a = -b$ (puntos antípodas), los dos arcos determinados por $\{a, b\}$ tienen la misma longitud y por tal motivo no podemos decidir con que arco vamos a trabajar.

Para levantar ese detalle, continuemos con la misma técnica, dado un conjunto $\{a, b\} \subset \mathbb{S}^1$, se toma el arco de menor longitud determinado por los extremos a, b, para luego, con la misma notación del apartado 2.3.2, se toma la función $g : C(\mathbb{S}^1) \to D$ dado por

$$g(J) = \left(1 - \frac{l(J)}{2\pi}\right) m(J).$$

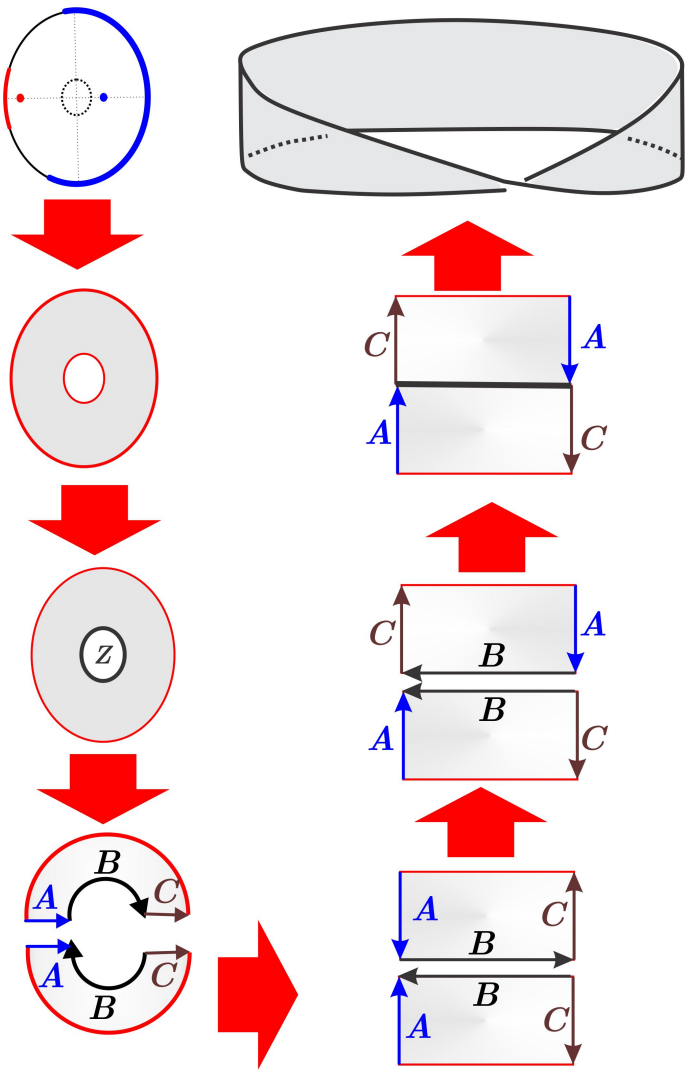


Figura 2.17: Banda de Möbius

Por otro lado, si se tiene J un arco determinado por puntos antípodas, tal que $0 \leq l(J) \leq \pi$. Considere un

$$W = \{J \in C(\mathbb{S}^1) : 0 \leq l(J) \leq \pi\},$$

utilicemos la función g para determinar la imagen de W, como:

$$g(W) = \{z \in \mathbb{C} : \tfrac{1}{2} \leq \|z\| \leq 1\}.$$

Sin embargo, $g(W)$ no es un buen modelo para $F_2(\mathbb{S}^1)$, ya que se tienen dificultades para aquellos $J \in W$ que están determinados por puntos antípodas, como lo mencionamos en el párrafo anterior, ya que estos elementos están doblemente representados en $g(W)$, por lo que nombraremos de la siguiente manera al conjunto

$$Z = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = \tfrac{1}{2}\}.$$

Con esas observaciones podemos dar el modelo de $F_2(\mathbb{S}^1)$, basta con hacer una identificación entre los puntos antípodas de Z, como lo muestra la Figura 2.17 el proceso de identificación para dar paso al modelo geométrico.

Observación 20. *A continuación un conjunto de puntos que resulta importante mencionar en $F_2(\mathbb{S}^1)$, son aquellos formados por $\{p, x\}$ donde p es un punto fijo en $\mathbb{S}^1$, éste conjunto representa una línea (anaranjada), como puede verse en la Figura 2.18, dentro de la banda de Möbius, por*

$$F_2(p, \mathbb{S}^1) = \{\{x, p\} \in F_2(\mathbb{S}^1)\}.$$

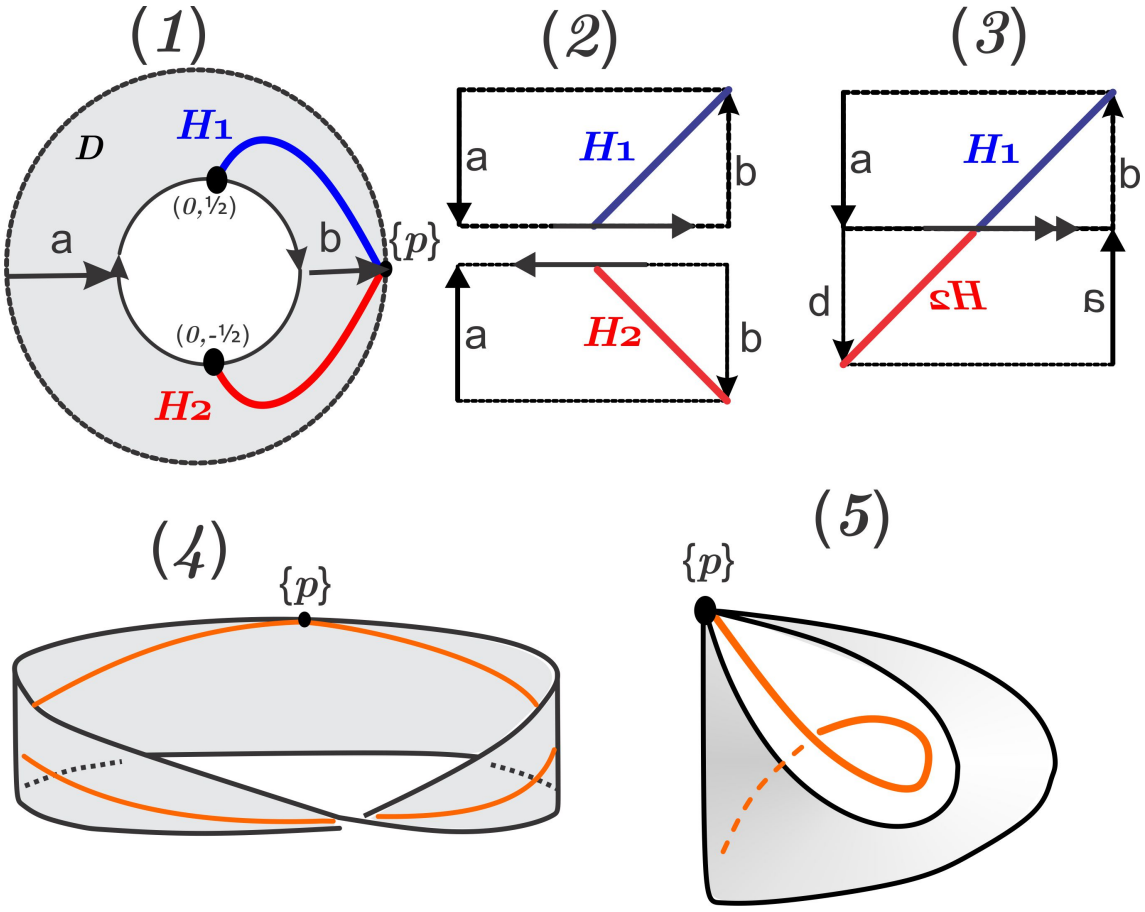


Figura 2.18: Representación del conjunto $F_2(p, \mathbb{S}^1)$

CAPÍTULO 3

FUNCIONES ESPECIALES EN LOS HIPERESPACIOS $D(X)$ Y $G(X)$

Dentro de la literatura de los hiperespacios, Nadler en [15], propone estudiar aquellas propiedades para el hiperespacio de arcos de un continuo X, definido como

$$D(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco}\}.$$

Muchos años después, Adrián Ulises Soto [19] considera la propuesta de Nadler y define el hiperespacio de arcos y singulares $G(X)$ como

$$G(X) = D(X) \cup \{\{x\} : x \in X\} = D(X) \cup F_1(X).$$

Véase que un elemento en $G(X)$, puede ser a lo más un punto o un arco de X. Notése que cuando X es un continuo ocurre que

$$D(X) \subset C(X) \text{ y } G(X) \subset C(X).$$

El siguiente resultado es una propiedad topologíca del hiperespacio $G(X)$.

Teorema 3.1. *[19, Teorema 1.34, p. 18] Sea X un continuo. Entonces $G(X)$ es conexo y T_2.*

Observación 21. *El hiperespacio $G(X)$, dotado con la métrica de Hausdorff, no siempre es compacto, como en el caso cuando $X = \mathbb{S}^1$, ya que contienen arcos que convergen a todo $\mathbb{S}^1$, tampoco en el caso cuando contengan copias de $\mathbb{S}^1$.*

Por otro lado, los siguientes resultados son de suma importancia para este trabajo:

Lema 3.1. *Si X es un arco, entonces $G(X) = C(X)$.*

Lema 3.2. *Si X es una curva cerrada simple, entonces $G(X) = C(X) - \{X\}$.*

La demostración de los lema anteriores son simples.
Por otro lado, es común considerar al hiperespacios de arcos $D(X)$ como el hiperespacio de los conjuntos que son homeomorfos a I. Es por ello, que debemos caracterizar a los arcos por medio de sus extremos. Recordando un resultado conocido, en el que toda circunferencia no es homeomorfa a I, ya que se tiene que $I - \{p\}$, donde $p \in I$ y $p \neq 0, 1$; es disconexo, mientras tanto para la circunferencia no lo es.
En virtud de lo expuesto, se define los puntos de corte y a los puntos que no son de corte se les denominará de una forma particular.

Definición 3.1. *Sea X un continuo. Se definirá que $p_0 \in X$ es* punto de corte *si $X - \{p_0\}$ es disconexo. Por otro lado, si p_0 no es punto de corte se dirá que es un* punto extremo.

Como resultado inmediato de la definición se tiene que:

Proposición 3.1. *[18, 2.6 teorema, p. 19] Sean X un continuo y p_0 un punto de corte de X. Si A y B son subconjuntos de X que desconectan a $X - \{p_0\}$, entonces se da que A y B contienen al menos un punto que no es punto de corte de X.*

De la Proposición 3.1, se desprende un hecho importante que nos permite conocer más a los continuos.

Proposición 3.2. *[18, 2.7 corolario, p. 19] Todo continuo tiene al menos dos puntos que no son de corte.*

Un hecho importante para ser un punto extremo es el siguiente:

Lema 3.3. *[19, Observación 1.5, p. 6] El ser punto extremo(o corte) se preserva bajo homeomorfismo*

Este lema nos dice que dado I, sus extremos no cambian bajo cualquier homeomorfismo, es decir, siempre es posible tener la imágen para 0 y 1. Para nuestra suerte, en los continuos, existe un fuerte resultado acerca de la caracterización del arco en términos de sus puntos de corte.

Teorema 3.2. *[16, 6.6, p. 89] Un continuo X tiene al menos dos extremos.*

Teorema 3.3. *[16, 9.29 Corollary, p. 154] Un continuo X es un arco sí y sólo sí X tiene exactamente dos puntos que no son de corte.*

En virtud de los teoremas 3.2 y 3.3, nos permiten dar la noción de arcos prescindiendo del uso de homeomorfismos con el intervalo $[0, 1]$. Debemos aclarar que la mayor parte de los resultados propuesto en éste capitulo serán citados, ya que su veracidad esta fundamentalmente probada bajo la intuición geométrica del lector.
Ahora estamos equipados para presentar la primera función especial para este trabajo, nos referimos a la *función de puntos extremos.*

3.1. Función de puntos extremos

En [11], los autores introducen el concepto de función de puntos extremos para $G(X)$, con el propósito ligar fuertemente sus resultados con una segunda función especial que representa un rol importante para este último capítulo. Utilizaremos algunos resultados de [18], como sigue a continuación.

Definición 3.2. *La* función de puntos extremos *es una función continua* $\mathbb{E} : G(X) \to F_2(X)$ *tal que*

$$\mathbb{E}(J) = \begin{cases} J & si \quad J \in F_1(X) \\ \\ \{q \in J : q \text{ es un punto extremo } J\} & si \quad J \in D(X) \end{cases}$$

En [18], se prueba la buena definición y continuidad. Partiendo de aquí, se desencadena una gran variedad de resultados con respecto a la función de puntos extremos. No obstante, aquellos resultados escapan de los verdaderos objetivos del presente capítulo, aún así podemos mencionar algunos de importancia para el desarrollo natural de la presente sección.

Proposición 3.3. *[18, 2.20 Lema, p. 24] Sea X un continuo entonces su función de puntos extremos es continua en cada punto de $F_1(X)$.*

Algunas propiedades de los arcos caracterizan a la función de puntos extremos, tal y como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *[18, 2.25 Teorema, p. 25] La función de puntos extremos de un arco cualquiera es un homeomorfismo*

Por último estos dos últimos resultados garantizan la existencia de la función de puntos extremos para el arco y la curva cerrada simple.

Teorema 3.4. *[11, Teorema 3.15, p. 117] Todo* arco *tiene función puntos extremos.*

Teorema 3.5. *[11, Teorema 3.16, p. 117] Todo* curva cerrada simple *tiene función puntos extremos.*

Ahora, se introduce la noción de Función de Whitney para dar paso a nuestra segunda función especial, la cual llamaremos *función punto medio.*

3.2. Función punto medio

3.2.1. Función de Whitney

Las funciones de Whitney, hoy en dia, resultan ser una herramienta indispensable para el estudio de los hiperespacios. Históricamente, en el año 1942, Kelley fue el primero en usar este tipo de funciones [6].

Definición 3.3. *Dado un continuo X. La* función de Whitney *para el hiperespacio 2^X es una función continua $\rho : 2^X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que cumple las siguientes condiciones:*

1. *Para cada $x \in X$, $\rho(\{x\}) = 0$.*
2. *Para cada $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, se tiene que $\rho(A) < \rho(B)$.*

Definición 3.4. *Una $\rho : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que cumple lo siguiente: Una* función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$ *es una función contin*

a. *$\rho(\{x\}) = 0$, para cualquier $x \in X$.*

b. *Para cada $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, tenemos que $\rho(A) < \rho(B)$.*

Una de las preguntas naturales en funciones de Whitney es determinar si *¿la restricción de función de Whitney es una función de Whitney?.* La respuesta: En efecto, primero se debe considerar a 2^X y $C(X)$ como compactos [7, Teorema 4.2, p. 66 y Corolario 4.3, p. 69] por lo que su imágen bajo la función de Whitney es un subconjunto acotado en $\mathbb{R}^+$. Por tal razón, si $M \in C(X)$, considere un punto $x \in M$, por el inciso 1. se tiene que:

$$\rho(\{x\}) = 0 \leq \rho(M) \text{ y } \rho(M) \leq \rho(X).$$

Entonces, podemos restringir al rango de ρ al intervalo $[0, \rho(M)]$, garantizando una función continua y que cumplen los incisos 1 y 2.

Ejemplo 15. *Pensar en una función de Whitney, se podría realizar de manera sencilla si se toma a $X = I$. En ese caso la función $\rho : C(I) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, dada por*

$$\rho([a,b]) = b - a$$

es una función de Whitney en donde $0 \leq a \leq b \leq 1$. ■

Además, la existencia de las funciones de Whitney es justificado a continuación:

Teorema 3.6. *[7, Teorema 5.3, p. 74] Para cualquier continuo X, 2^X admite funciones de Whitney.*

Ejemplo 16. *Una de las funciones que* no son función Whitney, *es la función diámetro $diám : 2^I \to I$.*
En efecto, dados I, $\{0,1\} \in 2^I$, es claro que $\{0,1\} \subsetneq I$. Sin embargo, como $diám(I) = 1 = diám(\{0,1\})$, se ve que la segunda condición de una función de Whitney no se cumple. Así es que $diám : 2^I \to I$ no es una función de Whitney. Por otra lado, si nos restringimos a $C(I)$, es decir:

$$diám : C(I) \to I.$$

Se verifican las propiedades:

1. *Sea $I \in C(I)$, como I es conexo y cerrado al aplicar la función diámetro tenemos: $diám(I) = 0$*

2. *Si $[a,b]$, $[c,d] \in C(I)$ tal que $[a,b] \subsetneq [c,d]$, aplicando la función diám, se deduce que $diám([a,b]) < diám([c,d])$.*

Así se tiene que $diám : C(I) \to I$ es una función de Whitney.

Podemos preguntarnos sobre el Teorema 3.6, cuya prueba es sofisticada, *¿existe una única forma de construir funciones de Whitney?.*
La respuesta a esto, es negativo, al menos existen tres, para obtener funciones de Whitney, se pueden consultar en [7, Teorema 5.3, p. 74], [7, Ejemplo 5.4, p. 78] y [7, Ejercicio 5.8, p. 83].

Pues bien, estamos preparados para definir nuestra segunda función especial.

3.2.2. Función Punto Medio

Dentro de los continuos, para su hiperespacios de arcos y singulares $G(X)$ es natural preguntarse acerca del concepto de punto medio, a continuación pasemos a definir:

Definición 3.5. *Dado un continuo X. La función $\rho : C(X) \to J$ de Whitney, donde $J \in G(X)$ y un punto $x_0 \in X$. Se dirá que x_0 es* punto medio *de J respecto de ρ si existen dos subcontinuos M y N de X tales que*

1. $J = M \cup N$.
2. $M \cap N = \{x_0\}$.
3. $\rho(M) = \rho(N)$.

Se puede ver que para cada punto x_0 en X, x_0 es el punto medio de $\{x_0\}$ respecto de *cualquier función Whitney.*

Teorema 3.7. *[17, 3.17 Teorema, p. 60] Dados X un continuo y una función de Whitney ρ. Para cada $J \in G(X)$, existe un* único *punto x_0 en X que es punto medio de J respecto de ρ.*

La prueba de este resultado nos dice que si X es un continuo y una función de Whitney ρ, definida en $C(X)$, se cumple que todo elemento de $G(X)$ tiene un único punto medio respecto a ρ.
Es oportuno nombrar algunos enunciados importantes:

1. Si es *posible encontrar* una función de Whitney $\rho : C(I) \to J$, entonces existe x_0 en I tal que $\rho([0, x_0]) = \rho([x_0, 1])$ y además, x_0 es el único punto medio de I respecto ρ.
2. Dados ρ una función Whitney y un continuo X, entonces para cada $J \in G(X)$ existe $p \in X$ que es el único punto medio de J respecto de ρ.

De este modo sea la función punto medio para un continuo X.

Definición 3.6. *La* función de punto medio *de X es una función continua*

$$\mathcal{I}_\rho : G(X) \to X,$$

donde para cada $J \in G(X)$, $\mathcal{I}_\rho(J)$ es el único punto medio *de J respecto a ρ.*

Volviendo la mirada hacia aquellos continuos que son las curvas cerradas, es necesario definir aquellos puntos antípodas según el punto de vista de una función de Whitney.

Definición 3.7. *Sea $\rho : C(Z) \to J$ una función de Whitney, donde Z una curva cerrada simple. Dados x, $y \in Z$ llamaremos a y un* punto antípodal *de x respecto de ρ si existen M, $N \in C(Z)$ tales que:*

1. $Z = M \cup N$.
2. $M \cap N = \{x, y\}$.
3. $\rho(M) = \rho(N)$.

Notar que si x es *punto antipodal* de y respecto de ρ entonces y es *punto antipodal* de x respecto de ρ.

Ejemplo 17. *De acuerdo al Ejemplo 15, se toma al continuo I, entonces elijamos a $J = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y la función punto medio $\mathcal{I}_\rho : G(J) \to J$, se tiene que $\mathcal{I}_\rho(J) = \frac{1}{6}$.*

Como último resultado, daremos un teorema que nos habla de la unicidad de la función punto medio con respecto a un arco.

Teorema 3.8. *[18, 2.70 Teorema, p. 45] Dado una función de Whitney definida en $C(J)$ donde J es un arco, entonces J se le puede asociar el único punto medio respecto de ρ. Además, el punto medio del arco J respecto de ρ, no es un punto extremo.*

Para concluir el presente trabajo, empecemos a dar las descripciones de las funciones especiales expuestas, nos referimos a la Función de Puntos Extremos y Función Punto Medio para continuos clásicos.

3.3. Descripciones Importantes

Finalmente, en este capítulo se centra en atender a las siguientes preguntas, sin antes aclarar al lector que todas las representaciones geométricas están en $\mathbb{R}^n$:

¿Cuál es el comportamiento de las funciones especiales para C(X) cuando X es un arco, un tríodo simple y una curva cerrada simple?

Para esto haremos uso recurrente de los resultados visto en la sección 2.3, sección 2.4, incluso será fundamental los Lemas 3.1 y 3.2.

3.3.1. Descripción para $\mathbb{E}$

X es un arco

Previamente, por nuestro Lema 2.6, resultó que $C(I)$ es homeomorfo al conjunto $\triangle$. Además, por nuestro Lema 2.9, $F_2(I)$ es homeomorfo al conjunto $\triangle$. Ambos resultados nos garantizan que comparten el mismo modelo. Por consiguiente, definir la funcion de puntos extremos entre los hiperespacios $G(I)$ y $F_2(I)$, es empezar a visualizarlos a partir de sus respectivos modelos, destacando el resultado del Lema 3.1, el cual se refería a que $G(I) = C(I)$.
Nuestra función puntos extremos para nuestro caso es:

$$\mathbb{E} : C(I) \to F_2(I).$$

Entonces, para cada el conjunto $[a, b] \subset I$, se dirá que:

1. Si $a = b$, entonces $\mathbb{E}([a, a]) = a$.
2. Si $a \neq b$, entonces $\mathbb{E}([a, b]) = b$.

Por lo que podemos colocar el siguiente cuadro de resultados para identificar cada arco ya sea en $G(I)$ y $F_2(I)$, donde se destaca que en

Casos $x \in I$	$G(x,I)$	$F_2(x,I)$
1.Cuando $x = 0$ fijo	$C(0,I)$	$F_2(0,I)$
2.Cuando $x = 1$ fijo	$C(1,I)$	$F_2(1,I)$
3.Cuando $x = y$ fijo	$F_1(I)$	$F_1(I)$

ambos conjuntos se tiene una congruencia de lados desde el punto de vista de su modelo.
El siguiente cuadro puede ser ilustrado en Figura 3.1.

Observación 22. *Dentro de esta perspectiva, la función puntos extremos para I, es ver un* encaje *en el espacio euclídeano $\mathbb{R}^2$.*

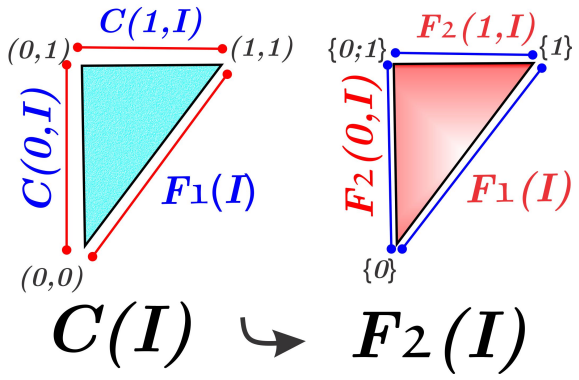


Figura 3.1: Encaje de $C(I)$ hacia $F_2(I)$

X es tríodo simple

Debido al apartado 2.3.3, se encontró un modelo del hiperespacio de subcontinuos $C(\mathbb{T})$. Sin embargo, para nuestro propósito el Lema 2.8, nos indicaba que $C_v(\mathbb{T})$ es homeomorfo al conjunto $\square$, sé sabe que los elementos de este hiperespacio son aquellos que contenían al vértice v y a su vez son aquellos que salen 3 arcos, por lo que estos no podrían ser considerados para nuestro hiperespacios de arcos y singulares $G(\mathbb{T})$. Pese a ello, podemos tomar otro camino, y empezar a describir los arcos a un ambiente más amigable como el espacio euclídeano $\mathbb{R}^3$ mediante la siguiente función:

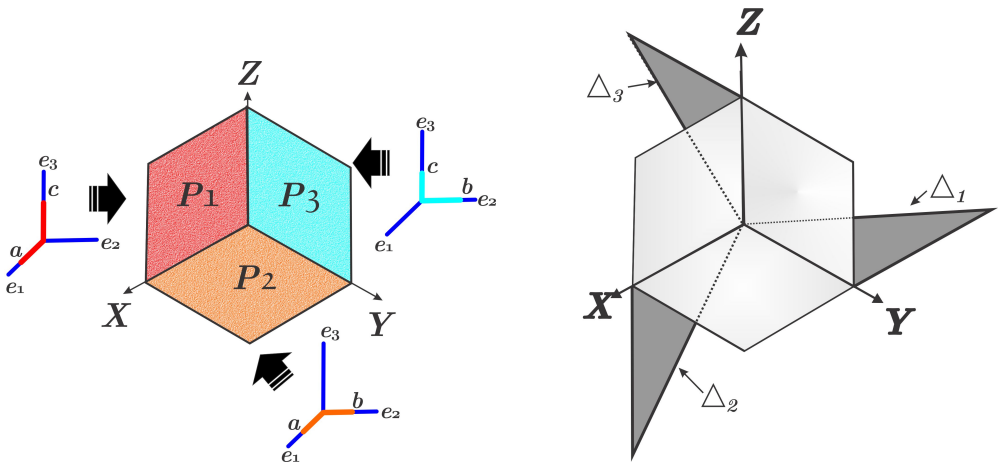
$$h : G(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}^3$$

$$h(J) = \begin{cases} (a,0,c) & \text{si,} \quad J \subset \mathbb{T} \cap \overline{ac} \\ (a,b,0) & \text{si,} \quad J \subset \mathbb{T} \cap \overline{ab} \\ (0,b,c) & \text{si,} \quad J \subset \mathbb{T} \cap \overline{bc} \end{cases}$$

donde $v \in \overline{ab}, \overline{bc}$ y $\overline{ac}$.

Como resultado de está función, cuales fuera el caso, se encuentran ubicadas en los paneles P_1, P_2 y P_3; como se puede apreciar en la Figura 3.2 (a). No obstante, para cada subarco de la forma $\overline{st} \subset \overline{ve_j}$, donde $j = \{1,2,3\}$, donde sus extremos s y t pertenecen a I, resultó que su hiperespacio $C(\overline{ve_j})$ es homeomorfo a los conjuntos $\triangle_1, \triangle_2$ y $\triangle_3$. Reedefiniendo la función h de la siguiente manera:

$$h(J) = \begin{cases} J = (a,0,c) & \text{si,} \quad J \subset \mathbb{T} \cap \overline{ac} \\ J = (a,b,0) & \text{si,} \quad J \subset \mathbb{T} \cap \overline{ab} \\ J = (0,b,c) & \text{si,} \quad J \subset \mathbb{T} \cap \overline{bc} \\ (-s,0,t) & \text{si,} \quad \overline{st} \subset \overline{ve_3} \\ (-s,t,0) & \text{si,} \quad \overline{st} \subset \overline{ve_2} \\ (s,-t,0) & \text{si,} \quad \overline{st} \subset \overline{ve_1} \end{cases}$$



(a) Arcos del tríodo identicados en □ (b) Representación de $G(\mathbb{T})$ en $\mathbb{R}^3$.

Figura 3.2: Modelo de $G(\mathbb{T})$

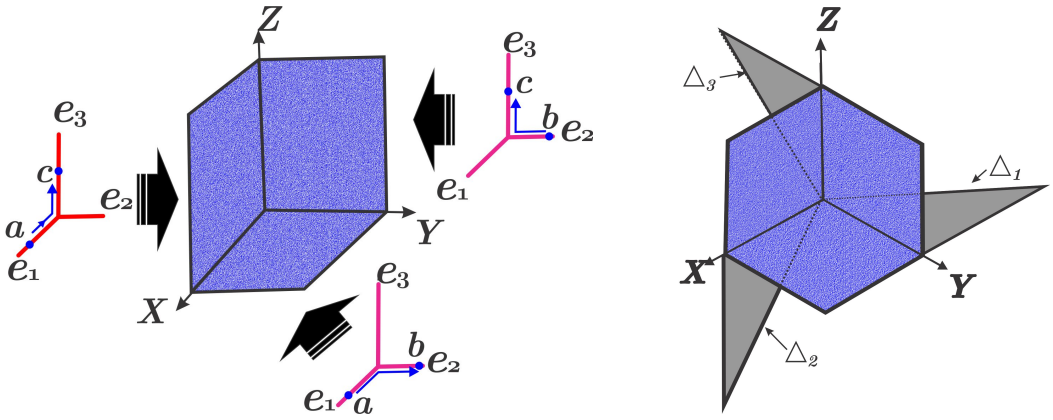
De igual manera que el anterior caso, para $F_2(\mathbb{T})$ se utilizará la misma técnica.

Recordar que el modelo $F_2(\mathbb{T})$ se asemeja a una mesa triangular. Es así que para nuestros objetivos se necesita describir aquellos arcos representados en $F_2(\mathbb{T})$ hacía a un ambiente más amigable como lo es el espacio $\mathbb{R}^3$.

Esto quiere decir, tomése el conjunto de los puntos $\{a, b\} \in F_2(\overline{ve_i} \cup \overline{ve_j})$, donde $i,j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$, donde es homeomorfo al conjunto $\triangle_j$. No obstante, incluyamos aquella parejas de puntos $\{a, b\} \in F_2(\overline{ve_j})$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Con toda estas consideraciones definamos la siguiente función.

$$\widetilde{h} : F_2(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}^3$$

$$\widetilde{h}(\mathbb{T}) = \begin{cases} (a, 0, c) & \text{si, } \{a, c\} \subset F_2(\overline{ve_1} \cup \overline{ve_3}) \\ (a, b, 0) & \text{si, } \{a, b\} \subset F_2(\overline{ve_1} \cup \overline{ve_2}) \\ (0, b, c) & \text{si, } \{b, c\} \subset F_2(\overline{ve_2} \cup \overline{ve_3}) \\ (a_1, -b_1, 0) & \text{si, } \{a_1, b_1\} \subset \overline{ve_1} \\ (-a_1, b_1, 0) & \text{si, } \{a_1, b_1\} \subset \overline{ve_2} \\ (-a_1, 0, b_1) & \text{si, } \{a_1, b_1\} \subset \overline{ve_3} \end{cases}$$



(a) Identificación de un par de puntos en $\mathbb{R}^3$

(b) Representación de $G(\mathbb{T})$ en $\mathbb{R}^3$.

Figura 3.3: Modelo de $F_2(\mathbb{T})$ de solo arcos

De esta manera se logra tener un modelo de los hiperespacios de arcos $G(\mathbb{T})$ en el espacio euclídeano $\mathbb{R}^3$, puede revisarse la Figura 3.3.

Observación 23. *Podemos inferir de acuerdo a la descripción previa, para poder describir arcos del hiperespacio $G(\mathbb{T})$, un modelo en $\mathbb{R}^3$, que justamente coincide con el modelo de $F_2(\mathbb{T})$ en el plano euclídeano, por lo que se tiene que la función puntos extremos para el tríodo es un* encaje *i en $\mathbb{R}^3$. Puede revisar el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} G(\mathbb{T}) & \xrightarrow{\mathbb{E}} & F_2(\mathbb{T}) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{h}} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow[i]{} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

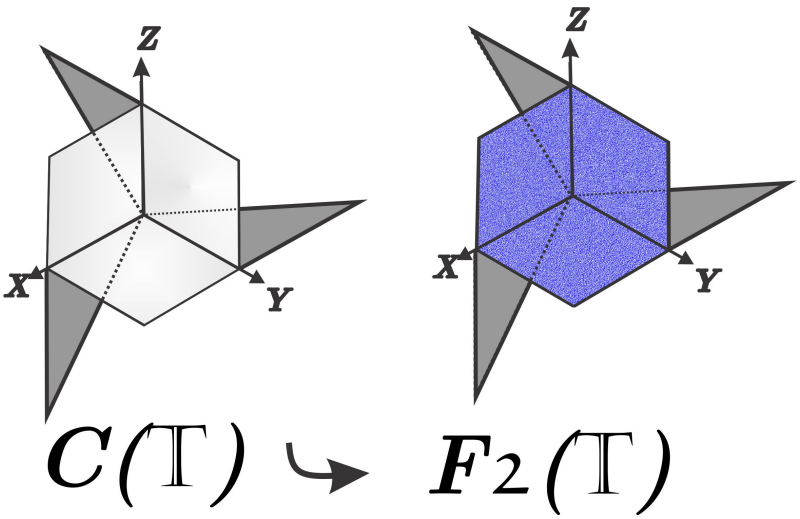


Figura 3.4: Encaje de $G(\mathbb{T})$ hacia $F_2(\mathbb{T})$

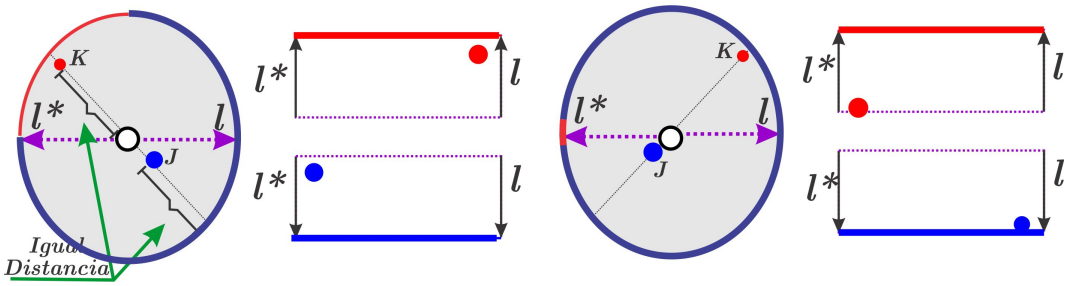
X es una curva cerrada simple

Previamente en el apartado 2.7, se mostró que la función g permitía ubicar un elemento del hiperespacio $C(\mathbb{S}^1)$ en $\mathbb{R}^2$, a travéz de un punto. Para nuestro caso el hiperespacio de arcos de $G(\mathbb{S}^1)$ es considerar, por Lema 3.2, $G(\mathbb{S}^1) = C(\mathbb{S}^1) - \{\mathbb{S}^1\}$. Empecemos a describir el hiperespacio $C(\mathbb{S}^1) - \{\mathbb{S}^1\}$ de la siguiente manera:

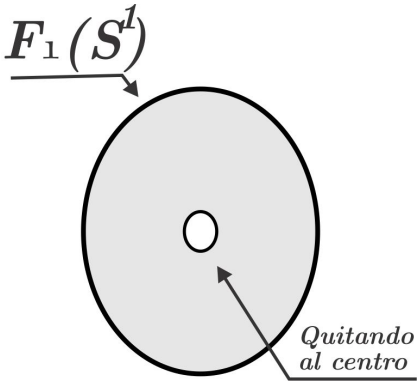
1. Dados arcos J y K en $\mathbb{S}^1$, los cuales K complementa al arco J de tal manera que $K \cup J = \mathbb{S}^1$, por lo que al utilizar la función g, representa la ubicación de cada arco sobre el disco relleno $\mathbb{D}$. Mientras que el arco J es *mayor* (K es *menor*), se ubica *cerca* del

punto $(0,0)$ (*alejado* del punto $(0,0)$), como lo ilustra la Figura 3.5 (a).

2. Sin embargo, para aquellos arcos que comparten la misma longitud y punto medio, es en ese caso que no se puede hablar de arco menor o mayor, entonces sus representaciones en $\mathbb{D}$ son respectivamente puntos antípodas, es decir ambos puntos tienen la *misma distancia* con respecto al centro. Puede verse en la Figura 3.5 (b).



(a) Identificación de un par de puntos en $\mathbb{D}$



(b) Representación de $G(\mathbb{S}^1)$ en $\mathbb{R}^2$

Figura 3.5: Arcos en el subcontinuo de $\mathbb{S}^1$

3. A partir de aquí, nos preguntamos lo siguiente:

¿Qué es la función puntos extremos en $G(\mathbb{S}^1)$?

y

¿Qué se obtiene de esta identificación en $\mathbb{S}^1$?

Empecemos a responder cada interrogante.

Al ubicar cada subcontinuo de $\mathbb{S}^1$, por ejemplo J y K, visto como puntos en un mismo margén, llegan a tener las mismas distancias congruentes (Figura 3.5), entonces desde la perceptiva de su modelo, se elige una orientación, obteniendosé dos rectángulos, los cuales se puede buscar la identificación por flechas, como resultados, se tiene la banda de Möbius.

Notar que aquellos subcontinuos ubicados en la orilla de $\mathbb{S}^1$, estós se ubican en el borde del rectángulo, tal como lo muestra la Figura 3.5 (a).

Observación 24. *Se concluye que la función puntos extremos para* $\mathbb{S}^1$*, desde la perceptiva de su modelo geométrico, es aquella que identifica arcos hacia puntos ubicados en la banda de Möbius. A saber, se deduce que se tiene una encaje de* $\mathbb{R}^3$*, donde el esquema siguiente conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} G(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{\mathbb{E}} & F_2(\mathbb{S}^1) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[i]{} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

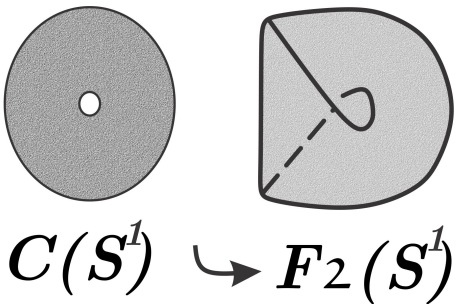


Figura 3.6: Encaje de $G(\mathbb{S}^1)$ hacia $F_2(\mathbb{S}^1)$

3.3.2. Descripción para $\mathcal{I}_\rho$

Lo anteriormente expuesto en el apartado 3.2.2, será pieza clave para nuestro objetivo en la presente sección. A saber,

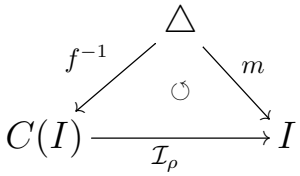
¿cómo está descrito la función $\mathcal{I}_\rho : G(X) \to X$, cuando X es un arco, un tríodo simple y una curva cerrada simple?

Se tienen los siguientes casos:

1. Cuando $X = I$, se tiene la existencia de la función de Whitney ρ (ver Teorema 3.6), lo cual queda definida nuestra función continua de punto medio $\mathcal{I}_\rho : G(I) \to I$. No obstante, recordando que $G(I) = C(I)$, y por el Lema 2.6, se tuvo que la aplicación f, $C(I)$ era homeomorfo al conjunto $\triangle$.

   Por otro lado, definamos la función $m : \triangle \to I$, como para cada $(a, b) \in \triangle$, se tiene que $m((a, b)) = \frac{b+a}{2}$. Es fácil reconocer la buena definición de nuestra función y a su continuidad en su dominio.

   Ahora bien, podemos decir que la aplicación $\mathcal{I}_\rho \circ f^{-1} = m$ es continua por lo que el diagrama siguiente, conmuta:



En particular, si deseamos saber el comportamiento de la función punto medio en el continuo I es verlo de la siguiente manera:

1.1. Cuando se toman los pares sobre la recta $y = x$, son aquellas que tiene la forma (a, a), por lo que al aplicar $m((a, a)) = \frac{a+a}{2} = a$, entonces son aquellos unipuntuales de I.

1.2. Mientras aquellos que tienen la forma $(0, a)$, ubicados sobre el eje Y, se obtiene que $m((0, a)) = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2}$, cuando $a \in [0, 1]$. Además, para las coordenadas con la forma $(b, 1)$, ubicados sobre

la recta paralelo al eje X, se logra ver que $m((b,1)) = \frac{b+1}{2}$, cuando $b \in [0,1]$. Así pues, la unión de los puntos $m((0,a))$ y $m((b,1))$, cuando $a, b \in [0,1]$, son el continuo I.

2. Cuando $X = \mathbb{T}$, previamente el hiperespacio $G(\mathbb{T})$ es homeomorfo a la imagen de $h(\mathbb{T})$ por medio de

$$h(\mathbb{T}) = \begin{cases} (a,0,c) & \text{si,} \quad J \subset \mathbb{T} \cap \overline{ac} \\ (a,b,0) & \text{si,} \quad J \subset \mathbb{T} \cap \overline{ab} \\ (0,b,c) & \text{si,} \quad J \subset \mathbb{T} \cap \overline{bc} \\ (s,-t,0) & \text{si,} \quad \overline{st} \subset \overline{ve_1} \\ (-s,t,0) & \text{si,} \quad \overline{st} \subset \overline{ve_2} \\ (-s,0,t) & \text{si,} \quad \overline{st} \subset \overline{ve_3} \end{cases}$$

podemos denotarlo como $\boxdot$. Así se tiene que $G(\mathbb{T})$ es homeomorfo a $\boxdot$. Luego, por Teorema 3.6, se tiene la existencia de la función de Whitney $\mathcal{I}_\rho : G(\mathbb{T}) \to \mathbb{T}$. Luego, definamos la función $m : \boxdot \to \mathbb{T}$ de la siguiente manera:

$$h(\mathbb{T}) = \begin{cases} \frac{a+c}{2} & \text{si,} \quad (a,0,c) \in X \times Z \\ \frac{a+b}{2} & \text{si,} \quad (a,b,0) \in X \times Y \\ \frac{b+c}{2} & \text{si,} \quad (0,b,c) \in Y \times Z \\ \frac{s+(-t)}{2} & \text{si,} \quad (s,-t,0) \in X \times -Y \\ \frac{t+(-s)}{2} & \text{si,} \quad (-s,t,0) \in -X \times Y \\ \frac{t+(-s)}{2} & \text{si,} \quad (-s,0,t) \in -X \times Z \end{cases}$$

Nuevamente, es inmediato notar que h es una función continua bajo su dominio. Finalmente, la función $\mathcal{I}_\rho \circ h^{-1} = m$ es continua por lo que el diagrama siguiente, conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \boxdot & \xrightarrow{\quad h^{-1} \quad} & C(\mathbb{T}) \\ & {\scriptstyle m} \searrow \quad \circlearrowleft \quad \swarrow {\scriptstyle \mathcal{I}_\rho} & \\ & \mathbb{T} & \end{array}$$

3. Cuando $X = \mathbb{S}^1$, previamente se tuvó que el hiperespacio $G(\mathbb{S}^1) = C(\mathbb{S}^1) - \{\mathbb{S}^1\}$, el cual es homeomorfo por medio de una función g

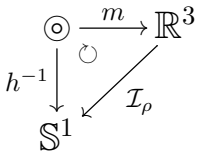
al disco relleno $\mathbb{D}$ sin su centro $(0,0)$, por lo que convenientemente lo denotamos como $\circledcirc$. Entonces dado un punto $p = (x, y) \in \circledcirc$ es posible asociarle un arco parametrizado $A \in G(\mathbb{S}^1)$ determinado por

$$l(A) = 2\pi - 2\pi\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$m(A) = (\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

Es rápido ver que para cada punto p en la borde de S^1, su punto medio es $m(p) = p$. Se puede inferir que $\mathcal{I}_\rho \circ h^{-1} = m$ es una función continua y el esquema conmuta.

La justificación de ese hecho, ya que un arco en $\mathbb{S}^1$ es correctamente identificado por su longitud y punto medio, es por la misma razón, que se tiene el siguiente esquema.



CONCLUSIONES

Del presente trabajo de tesis se desprenden las siguientes conclusiones.

1. La función puntos extremos para los continuos clásicos I, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{S}^1$ en su hiperespacio de arcos y singulares $G(X)$, se comportan como encajes, desde el punto de vista de sus modelo geométricos, bastó con tomar los homeomorfismos visto en la secciones 2.3 y 2.4, respectivamente, e identificar cada arco, para luego tomar la función puntos extremos y notar que coinciden en el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$.

2. La función punto medio para los continuos clásicos, claramente se observó comportarse como una función continua bajo su dominio. Cabe precisar, a partir del modelo geométrico de sus hiperespacio de subcontinuos, siempre podemos conseguir una aplicación continua la cual conmuta nuestro esquema presentados.

BIBLIOGRAFÍA

[1] C. Borges, *Elementary Topology and Applications*, Cientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1939.

[2] K. Borsuk y S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37, 875-882, 1931.

[3] V. Cordova, *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Licenciatura , Facultad de Ciencia Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 26 de agosto de 2011.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc. Boston, 1966.

[5] A. Illanes, *Continuum Theory*, Lecures notes in Pure and Applied Mathematics, 230, New York, Marcel Dekker, p. 51-65 Denton, TX, 1999.

[6] A. Illanes y Sam Nadler Jr, *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances* , Monographs and Textbooks in Pure an Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc. New York, 1999.

[7] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas: Textos, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[8] A. Illanes, *Models of Hyperspaces* , Topology Proceedings, vol. 41, p. 1-26, 2013.

[9] J. Kelley, *General Theory* , Graduate Texts in mathematics; 27, Springer, 1991.

[10] E. Lages, *Espaços Métricos* 3^{era}, edição. Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 1993.

[11] M. López, Patricia Pellicer-Covarrubias, Iván Serapio Ramos, *Introducción a la función punto medio en continuos* , Revista Integración, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Vol. 34, No. 1, 2016, p. 109-123.

[12] M. Macías, *Sobre Algunos Modelos de Hiperespacios de Continuos* , Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencia Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, agosto de 2013.

[13] S. Macías, *Una Introdución a la Teoría de los Continuos* , Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios. Sociedad Matematica Mexicana, p. 1-35, 2006

[14] J. Munkres, *Topología* 2^{nd} *edición (Traducido de Topology* 2^{nd}), Prentice Hall, Inc. 2002, edición en español, Madrid, 2002.

[15] S. B. Nadler Jr, *Hyperespaces of Sets*, Monographs and Texbooks in Pure and Aplied Mathematics, 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[16] S. B. Nadler Jr, *Continuum Theory*, An Introduction. Editorial Board. Pure and applied mathematics. 1992.

[17] I. Serapio, *Funciones y propiedades de Whitney*, Tesis de Licenciatura dirigida por Raul Escobedo Conde y María de Jesús López, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 17 de enero, 2014.

[18] I. Serapio, *Funciones punto medio en continuos*, Tesis de Maestría dirigida por María de Jesús López Toriz y Patricia

Pellicer Covarrubias, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 24 de junio de 2016.

[19] A. Soto, *El hiperespacio de arcos de un continuo*, Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 1999, 92p.

[20] A. Tamariz, *Curso de Topología General*, Notas de Clase, Publicaciones del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias UNAM, México (1990).

[21] P. Vidal, *Los hiperespacios de continuos desde el punto de vista de sus modelos geométricos*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, 2009.