



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Físicas**

**Escuela Académico Profesional de Física**

**Difusión de precios**

**MONOGRAFÍA TÉCNICA**

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

**AUTOR**

Jimmy BONILLA VALENCIA

**ASESOR**

Justo Alcides ROJAS TAPIA

Lima, Perú

2009



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Bonilla, J. (2009). *Difusión de precios*. Monografía Técnica para optar el título profesional de Licenciado en Física. Escuela Académico Profesional de Física, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

---

## Agradecimientos a:

Mi Asesor, el Doctor Justo Rojas Tapia, Docente e Investigador de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos; por el Asesoramiento, sus valiosos consejos y apoyo en la elaboración del presente Trabajo Monográfico.

Al Magister en Ciencias Físicas, Ismael Saavedra Valdiviezo por sus muchas sugerencias y aportes técnicos a este Trabajo Monográfico

Mi Padre, el Economista Pedro Bonilla Barboza, por sus aportes en el área económica.

Mi madre María D. Valencia Chamba y mi hermano Edwin Bonilla Valencia, por su constante apoyo

## RESUMEN

En cursos convencionales de finanzas se suele dar por sentado que las distribuciones de retornos de precios están normalmente distribuidas. Sin embargo la gran cantidad de datos financieros disponibles demuestra que muchos importantes parámetros de riesgo (entre ellos valor esperado y la desviación estándar) no se comportan de manera gaussiana. Actualmente el comportamiento del Mercado financiero intenta ser comprendido mediante la aplicación de los métodos de la Física Estadística y muy recientemente de la Mecánica Cuántica. Mostraremos que los Mercados Reales actualmente son modelados de manera eficiente usando distribuciones no-gaussianas

ÍNDICE	Págs.
Acta de Sustentación de la Monografía Tècnica	i
Agradecimiento	iii
Resumen	iv
Indice	v
Introducción	vi
CAPITULO I : Conceptos básicos de finanzas	8
1.1 Mercados Financieros	8
1.2 Hipótesis de Mercado Eficiente	8
1.3 Martingala	10
1.4 Activos financieros	11
1.4.1 Mercado de acciones	11
1.4.2 Mercado bursátil	13
1.5 Retorno de Precios	14
1.6 Mercado random walk	15
CAPITULO II : Random Walk y Difusión	18
2.1 Random walk isotrópico (Simple análisis cualitativo)	19
2.2 Random Walk discreto unidimensional (enfoque cuantitativo)	22
2.3 Random Walk : El límite continuo	23
2.4 Difusión Normal	26
2.5 Difusión anómala	26
CAPITULO III : Procesos estocásticos y Modelos de Difusión	28
3.1 Proceso de Wiener	29
3.2 Modelos de difusión	31
3.2.1 Proceso de Itô	31
3.2.2 El ruido blanco (white noise)	32
3.2.3 Ecuación Integral estocástica de Itô	33
3.2.4 Fórmula de Ito	34
3.2.5 Movimiento Browniano Geométrico (MBG)	35
3.2.6 Procesos estocásticos de Lévy (enfoque cualitativo)	36
CAPITULO IV : Modelos Estocásticos para la Fluctuación de Precios	38
4.1 Modelo de Louis Bachelier	38
4.2 Modelo estándar	39
CAPITULO V : Distribuciones de probabilidad	44
5.1 Distribuciones Gaussianas	44
5.2 Distribución Log Normal	47
5.3 Distribución de Levy	50
Conclusiones	56
Referencias bibliográficas	57
Apéndice:	59
A) Simulación del Random Walk 1D	59
B) Simulación del Movimiento Browniano Estándar	60

## INTRODUCCIÓN

La Economía está siendo enriquecida con la colaboración de los físicos, matemáticos y economistas. A esta reciente confluencia se le conoce como econofísica[1], la cual aplica métodos y modelos de la Física estadística y complejidad para analizar datos de fenómenos económicos, se puede decir que en cierta forma es una herramienta para predecir el futuro de los precios de las acciones, probabilísticamente hablando.

Frente a la actual masa de datos es primordial describir y entender el fenómeno económico desde el punto de vista econofísico. Hasta ahora, tenemos que decir, que la mayoría de trabajos en Econofísica son estudios empíricos de diferentes fenómenos para descubrir alguna ley especial o universal. También se está trabajando en el desarrollo de modelos y mecanismos que describan con realismo los datos existentes.

En este trabajo veremos cómo es que se aplican los Modelos Físicos, para intentar explicar el comportamiento de los precios y retornos, haciendo uso de los procesos estocásticos, y de algunas distribuciones de probabilidad para modelar correctamente la dinámica de los precios de las acciones, siendo estas conceptualmente más simples que otros activos financieros y por lo tanto más apropiados para explicar los mecanismos básicos.

La presente monografía se organiza como sigue:

### Capitulo I: Conceptos básicos de finanzas

Desarrollamos los conceptos básicos de, mercados financieros, activos financieros, retornos de precios y el concepto de mercado random walk.

### Capitulo II: Random walks y difusión

Explicamos como un ubicuo modelo físico: el random walk, permitió descubrir el comportamiento de los precios y cómo es que están conectados con otro concepto físico : la difusión.

### Capitulo III : Procesos estocásticos y Modelos de Difusión

Discute el Movimiento Browniano, bajo un punto de vista formal, lo que es conocido como proceso estocástico de Wiener, Luego desarrollamos las ecuaciones diferenciales e integrales estocásticas, cuyas soluciones son conocidas como difusión estocástica o procesos de Itô.

Por último describimos de manera cualitativa una aplicación del cálculo estocástico de Itô, lo que se conoce como Movimiento Browniano Geométrico.

### Capitulo IV : Modelos Estocásticos para la Fluctuación de Precios

Hacemos una descripción de dos modelos que tentaron explicar la dinámica de los precios:

El Modelo de Bachelier, desde un punto de vista histórico y didáctico, fué el primer modelo que usó herramientas físico-estocásticas, teniendo como base el Movimiento Browniano Aritmetico y resultando que los precios siguen distribuciones Gaussianas.

El Modelo Estándar, hace uso del Movimiento Browniano Geométrico, y resultando que las diferencias de los logaritmos de los precios estan distribuidos de manera Gaussiana. Este modelo es bien conocido por dar una primera aproximación de lo que es observado en los datos reales

### Capitulo V : Distribuciones de probabilidad

La aplicación de los modelos físico-estocásticos que explican el comportamiento de los precios, hacen uso de las distribuciones de probabilidad para modelar los datos financieros.



## CAPITULO I

### CONCEPTOS BASICOS DE FINANZAS <sup>1</sup>

#### 1.1 Mercados Financieros

Los Mercados Financieros son sistemas en el cual un gran número de traders (negociantes) interactúan unos con otros y reaccionan ante la información externa para determinar el mejor precio de una operación financiera dada. Los activos pueden ser tan diferentes como animales, minerales, acciones, dinero, bonos o productos derivados emitidos sobre bienes financieros subyacentes. Algunos mercados están localizados en ciudades específicas (New York, Tokyo y London) mientras otros (tales como mercado monetario y de cambio internacional) son localizados y accesibles en todo el mundo.

Al analizar una serie temporal de la evolución del precio, volumen y número de transacciones de un producto financiero, reconocemos que en la evolución de tiempo el precio es impredecible por que se mueve al azar en mercados imperfectos de bienes o de valores como las bolsas de valores que funcionan por expectativas de participar y ganar más dinero.

#### 1.2 Hipótesis del Mercado Eficiente

El Mercado eficiente [2] puede ser definido como un simple mercado ideal sin arbitraje<sup>2</sup>, Analizando esta idea, primero nos preguntaremos ¿Cuál es la causa de que el precio cambie? El precio de la acción de una empresa puede cambiar debido a su nueva declaración de ganancias, debido al nuevo pronóstico del rendimiento de la compañía, o por el nuevo panorama y tendencia de la industria que puede responder a procesos de innovación tecnológica y nuevos productos que afectan su estructura de costos por consiguiente sus correspondientes precios. Los eventos macroeconómicos y políticos, o simplemente el chisme o espionaje financiero acerca de la

---

<sup>1</sup>El material de este capítulo tiene por fuente [2,5,6,11,15,18]

<sup>2</sup> Arbitraje es la práctica de tomar ventaja de una diferencia de precio entre dos o más mercados

administración de una compañía, pueden también afectar el precio de la acción. Todos esos eventos implican que se disponga de nueva información disponible para los mercados. La teoría del mercado eficiente establece que los mercados financieros son eficientes por que ellos instantáneamente reflejan toda la nueva información relevante en los precios de los activos. La Hipótesis del Mercado Eficiente (HME) propone la forma de evaluar la eficiencia del mercado. Por ejemplo un inversionista en un mercado eficiente no debería esperar ganancias por encima de la rentabilidad del mercado mientras use análisis técnico o análisis fundamental, en el supuesto que todos los inversionistas o agentes financieros manejen competitivamente la información del los precios del mercado donde actúan y dependiendo de su diversificación económica.

Dos conceptos son importantes para el HME: el camino aleatorio (*Random walk*), en la que los precios del mercado siguen un camino aleatorio si sus variaciones son aleatorias e independientes Y el concepto de los inversores racionales quienes inmediatamente incorporan nueva información hacia precios justos. El Mercado Eficiente es un problema de cantidad y calidad de precios informativos y su equilibrio, añadiéndose el uso adecuado de herramientas matemáticas y estadísticas probabilísticas hacia precios aleatorios antes que precios nominales, estas son algunas razones que motiva la atención de investigación por la Econofísica que se orienta hacia el modelaje del sistema de precios en los mercados financieros

Un mercado es eficiente si sus precios siempre reflejan la información disponible (Eugene Fama 1970), este investigador considera tres niveles de eficiencia:

- a) Mercado eficiente débil, enfatiza que un mercado de capitales es débilmente eficiente si incorpora toda la información en los precios históricos de las acciones.
- b) Mercado eficiente semifuerte, si los precios incorporan toda la información pública disponible, incluyendo reportes tales como los estados financieros de las empresas emisoras publicados y la información histórica de los precios

c) Mercado eficiente fuerte, si los precios incorporan cualquier dato que fluya sobre el valor de las acciones y que sea conocido por al menos un inversionista.

### 1.3 Martingala

Usando la hipótesis de las "Expectativas correctas" (1965) llamadas después "Expectativas racionales" y la eficiencia del mercado, Paul Samuelson<sup>3</sup> fue capaz de demostrar cómo, el valor esperado del precio de un activo dado en el tiempo  $t+1$ , está relacionado a los valores previos de los precios a través de la relación [2]

$$E\{S_{t+1} | I_t\} = S_t \quad (1.1)$$

Es decir, el valor esperado de una acción en el tiempo  $t+1$ , condicionado a las informaciones  $I$  conocidas en el tiempo  $t$  corresponde al valor actual de la acción. Así el movimiento de la cotización de una acción sería completamente imprevisible a partir de informaciones tales como precio y volumen de transacciones anteriores.

Los procesos estocásticos que obedecen la probabilidad condicional dada en la ecuación anterior, son llamados Martingalas. La noción de un Martingala es un modelo probabilístico de un juego justo. En términos de jugadores, el juego es justo cuando las ganancias y pérdidas se cancelan y la riqueza futura esperada por el jugador coincide con los activos presentes del jugador.

Aplicando la idea del juego justo de los cambios de precios observados a un mercado financiero es equivalente a decir que no hay forma de obtener beneficio de un activo simplemente usando la historia gravada de sus fluctuaciones de precios.

La conclusión de esta "forma débil" de la HME es entonces que los cambios en los precios son impredecibles desde el análisis de las series de tiempo históricas de aquellos cambios. Sin embargo las

---

<sup>3</sup> Economista estadounidense de la escuela neoclásica, en 1970 obtuvo el Premio Nobel de Economía, por el trabajo científico a través del cual ha desarrollado la teoría económica estática y dinámica

observaciones empíricas han cuestionado la estricta forma de la HME, resultando que un mercado eficiente es un sistema idealizado. En los mercados reales la ineficiencia residual está siempre presente y es lo que permite oportunidades de lucro y así los inversores compensan los costos de las transacciones y de las informaciones.

#### 1.4 Activos financieros

Son elementos de financiación y existen en tres tipos:

- a) Activo circulante, es el dinero que una compañía tiene en caja o el que pueda ser transformado en dinero vivo (líquido) inmediatamente.
- b) Activo fijo, son los bienes durables como predios, inmuebles máquinas y equipos
- c) Activo financiero, títulos que las instituciones generan para representar el capital del cual están constituidos. Son utilizados en el mercado financiero, algunos con riesgo y otros libres de riesgo. Como ejemplos tenemos los títulos de renta fija públicos o privados (bonos, facturas, pagarés, etc), cuenta de ahorros, títulos de renta variable (acciones de inversión, comunes, etc), oro, monedas extranjeras, etc. Consideremos una cuenta bancaria de ahorro que paga una tasa de interés  $r$  que producirá en el tiempo una cantidad de dinero  $B(t)$  (denominado monto) que se incrementa a una tasa de interés

$$\frac{dB}{dt} = rB \quad (1.2)$$

Así una cuenta de ahorros es un ejemplo de activo financiero sin riesgo, ya que se te ha garantizado recibir una tasa de interés conocida  $r$ , independiente de la situación del mercado.

##### 1.4.1 Mercado de acciones

Las acciones son valores mobiliarios emitidos principalmente por empresas sociedades anónimas; sean comunes, preferentes, etc.

Una compañía puede aumentar su capital por emisión de acciones (stocks o shares). Básicamente un stock (la acción) representa la propiedad de una pequeña pieza de la compañía. Mediante la venta de

muchas de esas “pequeñas piezas”, una compañía puede aumentar su capital a bajo costo que si fuera a solicitar préstamo de un banco. Las acciones son activos con riesgo financiero porque sus precios están sujetos a fluctuaciones impredecibles. En efecto esto es lo que hace a las acciones atractivas a inversionistas agresivos quienes buscan beneficios desde las fluctuaciones de precios bajo la aplicación del antiguo dicho “comprar bajo y vender alto”.

La compra y venta de acciones son usualmente hechas en negocios organizados (Bolsa de Valores), los cuales colectan, organizan y divulgan informaciones sobre los negocios realizados en cada sesión de negociación electrónica. Podemos citar como ejemplos las bolsas de valores: New York Stock Exchange (NYSE) y el São Paulo Stock Exchange (BOVESPA).

Muchos intercambios de acciones tienen índices que representan algún tipo de comportamiento promedio del correspondiente mercado. Cada índice tiene su propia metodología como se describe en el mercado de acciones.

Al final de una sesión de negociación (comúnmente electrónica) se calcula un índice que representa el volumen de negocios y la tendencia general del mercado a la caída o la valorización. Ese índice es calculado en base al comportamiento de las principales acciones negociadas en la bolsa. A cada acción es dado un peso, determinado por el volumen de los negocios de aquel título. La comparación entre las transacciones en aquel día con el peso de un determinado número de puntos, comparados a los del día anterior, resulta en una variación porcentual que traduce el comportamiento de la bolsa

Por ejemplo el Dow Jones Industrial Average del NYSE (en Inglés *New York Stock Exchange*), que es discutiblemente el más famoso índice de acciones, correspondiente a un promedio de 30 compañías industriales. El índice Ibovespa de São Paulo Stock Exchange, en contraste representa el valor presente del portafolio hecho de las acciones que juntos corresponden el 80% del volumen compra-venta. Otro muy conocido índice de acciones es el Standard & Poor’s 500 (S&P500). Índice calculado en las bases de datos de cerca de 500 compañías listadas en el NYSE.

### 1.4.2 Mercado Bursátil

Como se comentó la Bolsa de Valores es una alternativa de inversión y financiamiento de capital, facilita la negociación de valores mobiliarios de renta fija y renta variable

Desde su aparición a fines del siglo XV (Ciudad de Brujas hoy Bélgica), la Bolsa funciona como un abanico de precios de valores que se difunden en boletines de Índices de cotizaciones, diarias y semanales. Las bolsas de valores se localizan en la mayoría de los países del mundo y operan en todo los sectores de los sistemas económicos, como vemos en el cuadro por regiones de América, Europa y Asia

Región	Indice	Dic.2006	Dic. 2007	2006	2007	Variación	
						I Sem 2007	II Sem2007
AMERICA							
EE.UU	Dow Jones	12463	12981	16	4	8	-3
EE.UU	Nasdaq	2415	2597	10	8	8	0
Brasil	IBOVESPA	44474	60971	33	37	22	12
Argentina	MERVAL	2091	2212	35	6	5	1
México	IPC	26448	28711	49	9	18	-8
Chile	IGP	12375	14106	34	14	22	-7
Perù	IGBVL	12884	17837	168	38	74	-20
Peru	ISBVL	22159	29971	188	35	77	-24
EUROPA							
Alemania	DAX	6596	7609	22	15	21	-5
Reino Unido	FTSE100	6221	6262	11	1	6	-5
ASIA							
Japòn	Nikkei225	17226	14889	7	-14	5	-18
Corea	Seul Composite	1435	1773	4	24	22	2
China	ShangaiComposite	2676	5032	130	88	43	32
Fuente:Reuters y Bloomberg							
BCR. Perú . Reporte de Estabilidad Financiera.Diciembre 2007							

Cuadro 1 - Principales Indices Bursátiles Mundiales

Los índices bursátiles mundiales presentados en el cuadro 1, muestran el alto grado de hipersensibilidad financiera de las bolsas del mundo en especial de la Bolsa de valores de Lima, evidenciando su rápido declive a consecuencia de la sensación de Crash financiero originado por la crisis hipotecaria (Subprime) y de crédito de los

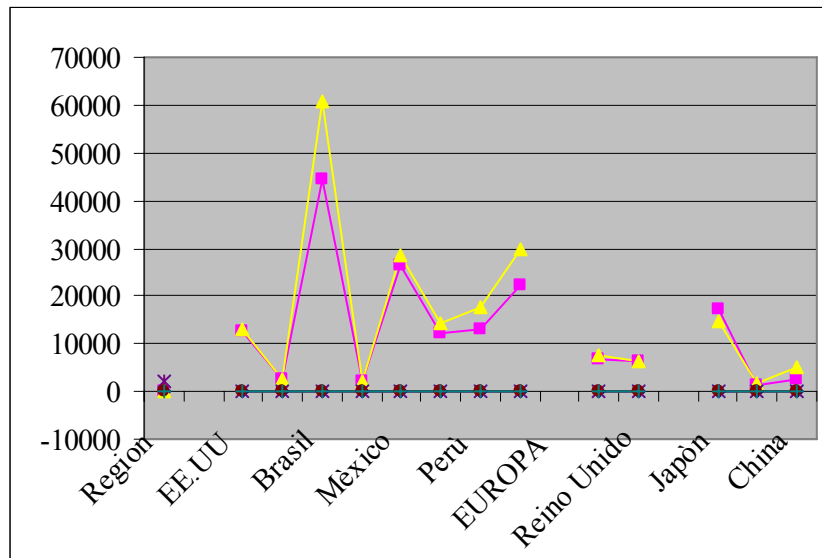


Fig.1.1 - Principales Indices Bursatiles Mundiales

Elaborado con datos del cuadro 1.

Estados Unidos, así como la caída de precio de los metales en el mundo, propagándose en el II semestre de 2007 y el año 2008.

Cabe señalar que la Bolsa de Brasil (IBOVESPA), en el quinquenio 1968-1972 muestra ventas moderadas de instrumentos financieros, sin embargo en los 13 años siguientes (1972-1983) los precios negociados en la Bolsa caen por efectos de la crisis de la Economía Brasileña y factores económicos externos; recuperándose significativamente el quinquenio 1984-1988. Entrando a una etapa bajista de precios en la década de los 90, con tendencia a una recuperación importante en la siguiente década.

### 1.5 Retorno de Precios

Cuando iniciamos estudios empíricos financieros nos tocamos con el problema de la escala de precio a ser utilizada. Desde que el precio está directamente relacionado a la moneda, y a su vez esta fluctúa en el tiempo debido a la mutación de factores económicos, como la inflación, crecimiento o receso económico, influencia de otros mercados debido a la globalización de los mercados. etc

Además las series de retornos son más fáciles de manejar que las series de precios, debido a que esta expone propiedades estadísticas más atractivas

Formulas de retornos más usadas <sup>4</sup>:

Variación directa de los precios de los índices o de los activos

$$Z_1(t) = S(t + \Delta t) - S(t) \quad (1.3)$$

Retorno de la inversión relativa respecto al capital empleado

$$Z_2(t) = S(t + \Delta t) - S(t) / S(t) \quad (1.4)$$

Variación porcentual de los precios en escala logarítmica

$$Z_3(t) = \ln[S(t + \Delta t) / S(t)] \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (1.5)$$

Para datos de alta frecuencia, donde  $\Delta t$  es pequeño, osea  $H_1(t) \ll S(t)$

$$Z_4(t) = \ln[1 + Z_1(t) / S(t)] \approx Z_1(t) / S(t) \quad (1.6)$$

Retorno normalizado

$$Z_{NORM}(t) = (Z(t) - \mu) / \sigma \quad (1.7)$$

Donde los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  son obtenidos a partir de la serie temporal histórica cuyo período total de observación T es largo

$$\mu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z(t) \quad (1.8)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Z(t) - \mu)^2} \quad (1.9)$$

Con esta normalización la serie temporal de retornos, tiene media nula y desviación estándar unidad, siendo ahora adecuada para el análisis comparativo de retornos en escalas temporales  $\Delta t$  variables

## 1.6 Mercado random walk

El precio de la acción debe de algún modo reflejar el valor global (valor neto) de esta compañía. Sin embargo el valor presente de una firma depende no sólo de la situación actual de la firma sino también de su rendimiento futuro.

---

<sup>4</sup> No estamos considerando para el análisis, datos en períodos inflacionarios o de crash financiero



En los activos de riesgo financiero el problema fundamental es intentar "predecir el futuro" en base a la presente información. Así que si una nueva información es revelada, que puede de alguna u otra manera afectar el desempeño futuro de la compañía, entonces el precio de la acción variará consecuentemente. Aplicando el concepto de martingala tenemos propiamente dicho: un mercado random walk, donde la serie de mudanzas de precios no tiene memoria, esto es, la historia pasada de la serie no puede ser usada para predecir el futuro, por que ya existen en el mercado precios nuevos no incorporados en la serie.

Un ejemplo de tal situación es mostrado en la figura 1.2 para el caso de índice de acciones de IBOVESPA

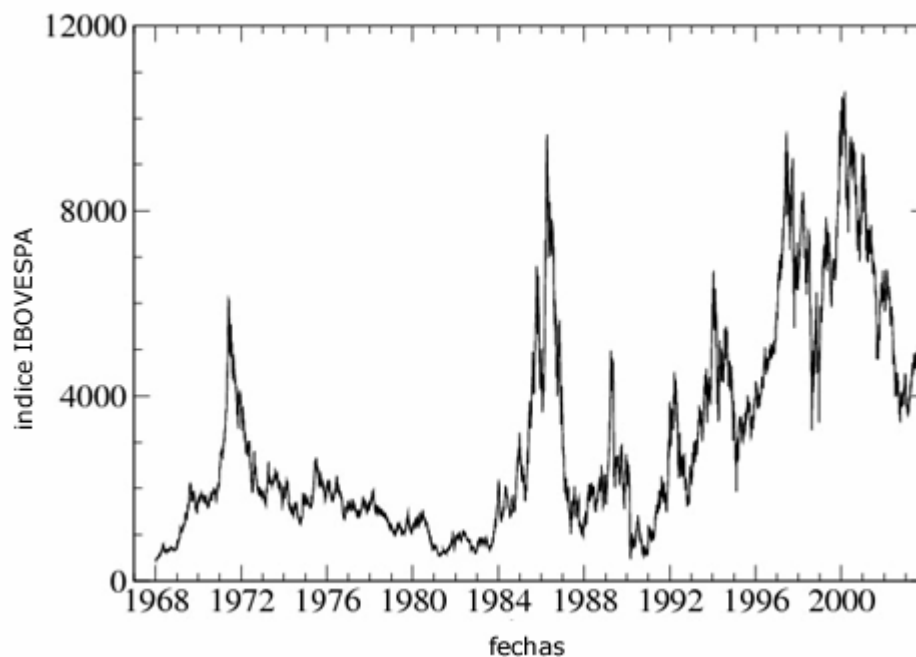


Fig.1.2 - Cierre diario de valores del índice IBOVESPA reducido en el período 1968-2003 - fuente [15]

Queda claro que el precio futuro de la acción que se visualiza en el eje "Y" está sujeto siempre a cierto grado de incertidumbre en el tiempo, además tiene fluctuaciones cíclicas con picos alcistas y bajistas sobre el eje "X". Esto es reflejado en un "comportamiento errático" que los precios de las acciones muestran cuando son graficados como una función de tiempo real.

Aunque el precio de las acciones puede variar en una forma mas que impredecible, esto no significa que ellos no puedan ser modelados. Esto dice que ellos sólo pueden ser descritos en una forma probabilística. Para hacer el argumento un poco más preciso permitamos que  $S$  sea el precio de una acción dada y supongamos que queremos escribir una ecuación análoga a (1.2) para la tasa de incremento de  $S$ :

$$\frac{dS}{dt} = R(t)S \quad (1.10)$$

donde  $R(t)$  representa la "tasa de retorno" de la acción.

$R(t)$  puede ser separado en dos componentes:

- i) una tasa de retorno media predecible será denotada por  $\mu$ , y
- ii) un término fluctuante (ruido)  $\xi(t)$  responsable de la aleatoriedad o incertidumbre del precio de la acción.

Así después de escribir  $R(t) = \mu + \xi(t)$  en (1.10) tenemos

$$\frac{dS}{dt} = [\mu + \xi(t)]S \quad (1.11)$$

## CAPITULO II

### RANDOM WALKS Y DIFUSIÓN<sup>5</sup>

El término "random walk" [3] fué originalmente propuesto por Karl Pearson en 1905, en una carta a *Nature*<sup>6</sup>, daba un simple modelo para describir una infestación de mosquitos en un bosque. En cada paso un único mosquito se mueve una longitud fija  $a$ , en un ángulo elegido aleatoriamente. Pearson quería conocer la distribución de los muchos pasos que los mosquitos tomaron.

La carta fué respondida por Lord Rayleigh, quien ya había resuelto una forma más general de este problema en 1880, en el contexto de ondas de sonido en materiales heterogeneos. Modelando una onda sonora que viaja a través de un material puede ser pensado como un vector suma de una secuencia de vectores de onda aleatorios  $K$  de amplitud constante pero fase aleatoria, las ondas de sonido en el material tienen longitud de onda mas o menos constante, pero sus direcciones están alteradas en los sitios de dispersión dentro del material.

Queremos encontrar la densidad de probabilidad de viaje una distancia entre  $R$  y  $R+dR$  en  $N$  pasos. Para pasos de longitud unidad, Lord Rayleigh mostró que cuando  $N \rightarrow \infty$

$$P_N(R) \sim \frac{2R}{N} e^{-R^2/N} \quad (2.1)$$

Esta función es mostrada en la figura 2.1 para varios valores de  $N$ . Vemos que la distancia recorrida esperada se escala de acuerdo a la raíz cuadrada del número de pasos,  $\langle R^2 \rangle \sim N$ , lo cual es típico de un fenómeno de difusión<sup>7</sup>.

Por la misma época, la teoría de random walk fué también desarrollada por Louis Bachelier en su verdaderamente notable tesis doctoral *La théorie de la Spéculation*, publicado en 1900. Bachelier

---

<sup>5</sup>El material de este capítulo tiene por fuente [2, 3, 4, 7]

<sup>6</sup> Revista científica de gran impacto

<sup>7</sup> Difusión, es un transporte neto de moléculas o cargas (aquí consideramos precios) desde una región de alta concentración a una de baja concentración por movimiento aleatorio

propuso el random walk como el modelo fundamental para series de tiempo financieras (el tictac de las acciones). Bachelier fué aparentemente el primero en ver la conexión entre random walk discreto y la ecuación de difusión (o calor) continua.

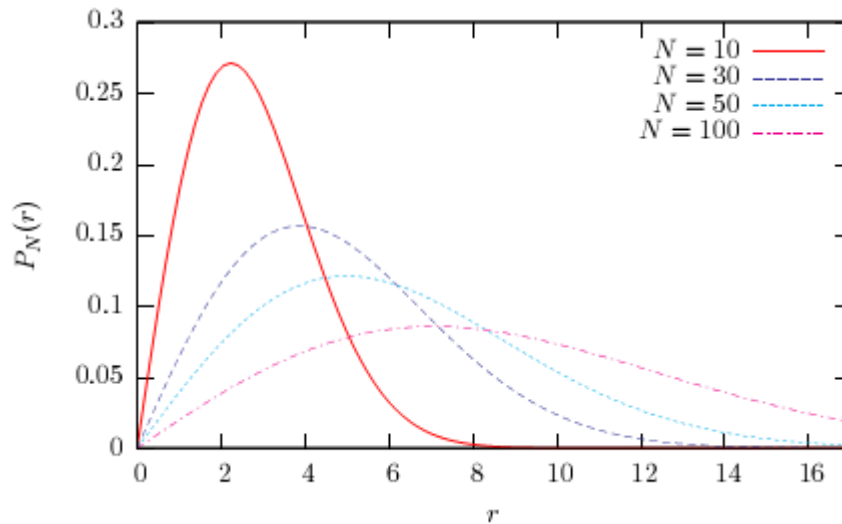


Fig. 2.1 - Aproximación asintótica de Rayleigh para  $P_N(R)$  en el random walk de Pearson para diversos valores grandes de N

Curiosamente el mismo año de la carta de Kart Pearson, Albert Einstein también publicó su seminal paper en Movimiento Browniano – el complicado camino de una gran partícula de polvo en el aire – que fué modelado como un random walk, guiado por colisiones con las moléculas de gas. Einstein no pareció estar consciente de la labor relacionada de Rayleigh y Bachelier, y el se focalizó en un diferente problema. El cálculo del coeficiente de difusión en términos de la viscosidad y la temperatura del gas.

La teoría de random walk del movimiento Browniano tiene enorme impacto, por que este da una fuerte evidencia de las partículas discretas (átomos) en el tiempo en el que los científicos aun creían que la materia era continua

Esta reseña histórica de random walk nos demuestra su amplia aplicatividad y es un modelo ubicuo en ciencias e ingeniería

## 2.1 Random walk isotrópico (Simple análisis cualitativo)

Simulaciones de computadora del random walk de Pearson, como en las figuras 2.2 y 2.3 demuestran que Lord Rayleigh resultó

mas que exacto en describir la distribución de caminantes en largos tiempos apenas más allá de 100 pasos. Es impresionante como la colección complicada de caminantes aleatorios tiende hacia un simple, suave distribución, al menos en la región central.

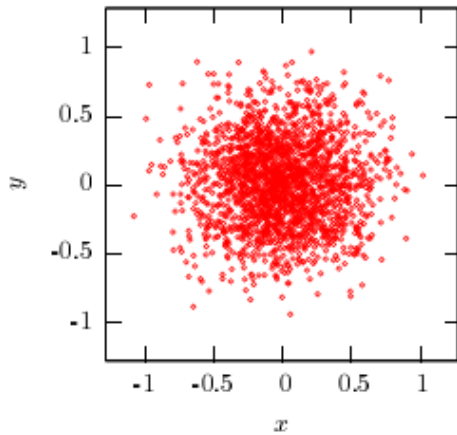


Fig. 2.2 - Las posiciones de 2000 random walks de Pearson independientes liberados desde el origen, después de  $N=2000$  pasos de longitud  $a=0.01$

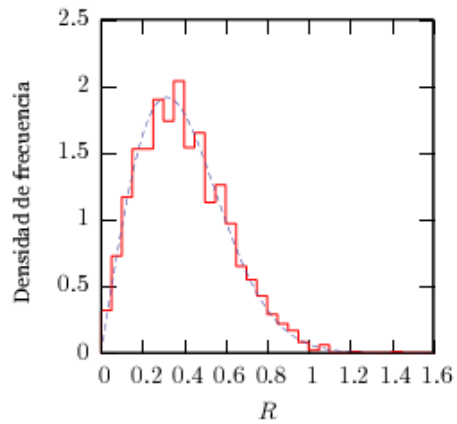


Fig. 2.3 - Un histograma normalizado de las distancias desde el origen,  $R_N$  en la Fig 2.2 comparada al resultado asintótico de Rayleigh Ec 2.1

Para generalizar el resultado de Lord Rayleigh, consideraremos un caminante aleatorio, quien inicialmente esta en el origen en  $d$  dimensiones. En cada paso, el caminante se mueve por una cantidad  $\Delta X_N$ , elegida desde una distribución de probabilidad  $p_N(r)$ . Para esta derivación consideraremos pasos idéntica e independientemente distribuídos (iid), tal que  $p_N(r) = p(r)$ . Además asumiremos que los pasos son isotrópicos, tal que  $p(r)$  es una función de la distancia radial  $r = |r|$  únicamente. Esta condición también automáticamente elimina algún drift (tendencia), tal que  $\langle \Delta X_N \rangle = 0$

Digamos que  $X_N$  es la posición del caminante después de  $N$  pasos, y digamos que  $P_N(R)$  sea la función de densidad de probabilidad asociada (FDP). Para desplazamientos iid, tenemos la siguiente recursión para la FDP:

$$P_{N+1}(R) = \int p(r)P_N(R-r)d^d r \quad (2.2)$$

En una dimensión ( $d=1$ ), esta es la ecuación de Bachelier (detallada en el capítulo siguiente). La suposición clave es la independencia de los pasos, que permite la probabilidad de una transición de  $(R-r)$  a  $R$  en el  $N$ th paso será factorizado en los dos términos en el integrando. Inicialmente de la Ec. 2.2 podemos formalmente tomar el límite continuo para llegar rápidamente a la solución de Rayleigh (2.1) al problema de Pearson.

Cuando  $N \rightarrow \infty$ ,  $P_N(r)$  varía en escalas de longitud los cuales son mucho más largos que un típico  $r$ , y por tanto expandiremos con Taylor dentro de la integral para obtener

$$\begin{aligned}
 P_{N+1}(R) &= \int p(r) \left[ P_N(R) - r \cdot \nabla P_N(R) + \frac{1}{2} r \cdot \nabla \nabla P_N \cdot r + \dots \right] d^d r \\
 &= P_N(R) - 0 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \langle r_i r_j \rangle \frac{\partial^2 P_N}{\partial R_i \partial R_j} + \dots \\
 &= P_N(R) + \frac{\langle r \cdot r \rangle}{2d} \nabla^2 P_N(R) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Como  $N \rightarrow \infty$ , la distribución límite  $\rho(R,t)$ , definido por  $P_N(R) = \rho(R, N\Delta t)$ , satisface

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho \tag{2.4}$$

Donde  $D = \langle r^2 \rangle / 2d\Delta t$ , que es la ecuación de difusión. Ya que el caminante inicia desde el origen, tenemos la condición inicial  $\rho(R,0) = \delta(R)$ . Para resolver esta ecuación diferencial, hacemos uso de la Transformada de Fourier será:

$$\hat{\rho}(k,t) = \int e^{-ik \cdot x} \rho(x,t) d^d x \tag{2.5}$$

$$\rho(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ik \cdot x} \hat{\rho}(k,t) d^d k \tag{2.6}$$

Así obtenemos la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -Dk^2 \hat{\rho} \tag{2.7}$$

Que tiene la solución

$$\hat{\rho}(k,t) = e^{-Dk^2 t} \hat{\rho}(k,0) = e^{-Dk^2 t} \tag{2.8}$$

Tomando la Transformada Inversa de Fourier:

$$\rho(R,t) = \frac{e^{-R^2/4Dt}}{(4\pi Dt)} \quad (2.9)$$

Así en el correspondiente problema discreto, cuando  $N \rightarrow \infty$

$$P_N(R) \sim \frac{e^{-dR^2/2\langle r^2 \rangle N}}{(2\pi\langle r^2 \rangle N/d)^{d/2}} \quad (2.10)$$

Este es el tiempo límite de  $P_N(R)$  para un random walk isotrópico en  $d$  dimensiones. La FDP para la posición tiende a una distribución Gaussiana (o normal), cuyo ancho depende solo de la varianza de los desplazamientos individuales. Nuestra derivación predice el mismo resultado asintótico siempre que  $\langle r^2 \rangle$  exista.

Para un walk isotrópico, podemos calcular fácilmente la FDP de la distancia  $R$  desde el origen via

$$P_N(R) = A_d R^{d-1} P_N(R) \quad (2.11)$$

Donde  $A_d$  es el area superficie de la esfera unidad en  $d$  dimensiones ( $A_1 = 1, A_2 = 2\pi, A_3 = 4\pi, \dots$ ). Para el problema de Pearson tenemos  $\langle r^2 \rangle = a^2$  y  $d = 2$ , así la ecuación (2.10) da el resultado asintótico:

$$P_N(R) \sim \frac{e^{-R^2/a^2 N}}{\pi a^2 N} \quad (2.12)$$

$$P_N(R) \sim \frac{2R}{a^2 N} e^{-R^2/a^2 N} \quad (2.13)$$

Que está de acuerdo con la solución de Rayleigh, ec 2.1 para  $a = 1$

## 2.2 Random Walk discreto unidimensional (enfoque cuantitativo)

Consideramos la suma de variables aleatorias  $x_i$  independientes e idénticamente distribuídas (iid)

$$S_n \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (2.14)$$

Aquí

$$S_n \equiv x(n\Delta t) \quad (2.15)$$

puede ser entendido como la suma de  $n$  variables aleatorias o como la posición de un único caminante (walker) en el tiempo  $t = n\Delta t$ , donde  $n$

es el número de pasos representados y  $\Delta t$  el intervalo de tiempo requerido para representar un paso.[2]

Las variables aleatorias idénticamente distribuidas  $x_i$  son caracterizadas por momentos<sup>8</sup>

$$E\{x_i^n\} \quad (2.16)$$

que no depende de  $i$ . Aquí (2.16) representan el valor esperado del momento  $x_i$  de orden  $n$ . El ejemplo más sencillo es un paseo (walk) representado por pasos aleatorios de tamaño  $s$ , tal que  $x_i$  toma aleatoriamente los valores  $\pm s$ . El primer y segundo momento para tal proceso son respectivamente:

$$E\{x_i\} = 0 \text{ y } E\{x_i^2\} = s^2 \quad (2.17)$$

Para este random walk

$$E\{x_i x_j\} = \delta_{ij} s^2 \quad (2.18)$$

De (2.14) – (2.18), se sigue que:

$$E\{x(n\Delta t)\} = \sum_{i=1}^n E\{x_i\} = 0 \quad (2.19)$$

y

$$E\{x^2(n\Delta t)\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E\{x_i x_j\} = \sum_{i=1}^n E\{x_i^2\} = ns^2 \quad (2.20)$$

Para un random walk, la varianza del proceso crece linealmente con el número de pasos  $n$ . Iniciando desde un random walk discreto, un límite continuo puede ser construido.

### 2.3 Random Walk: el límite continuo

El límite continuo de un random walk puede ser logrado considerando el límite  $n \rightarrow \infty$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  tal que  $t \equiv n\Delta t$  es finito. Entonces

$$E\{x^2(t)\} = ns^2 = \frac{s^2}{\Delta t} t \quad (2.21)$$

---

<sup>8</sup> Los momentos describen la naturaleza de la distribución. Cualquier distribución puede ser representada por un número de características tal como la media, varianza, asimetría, kurtosis, con orden 1,2,3,4 respectivamente en  $E\{x_i^n\}$ .



Para tener consistencia en el límite  $n \rightarrow \infty$  o  $\Delta t \rightarrow 0$  con  $s^2 = D\Delta t$ , se sigue que:

$$E\{x^2(t)\} = Dt \tag{2.22}$$

La dependencia lineal de la varianza  $x^2(t)$  en  $t$  es característico de un *proceso difusivo*, y  $D$  es llamada constante de difusión.

Este proceso estocástico es llamado proceso de Wiener. Usualmente es implícito asumir que para  $n \rightarrow \infty$  o  $\Delta t \rightarrow 0$ , el proceso  $x(t)$  es un proceso gaussiano. La equivalencia

“random walk”  $\equiv$  “Gaussian walk”

se mantiene solo cuando  $n \rightarrow \infty$  y no es generalmente verdad en el caso discreto, cuando  $n$  es finito, ya que  $S_n$  es caracterizado por una función de densidad de probabilidad (pdf) que es en general no Gaussiana y que asume la forma Gaussiana solo asintóticamente con  $n$ . La pdf del proceso,  $P[x(n\Delta t)]$  - o equivalentemente  $P(S_n)$  - es una función de  $n$  y  $P(x_i)$  es arbitrario

A continuación describimos la forma en que  $P[x(n\Delta t)]$  cambia con el tiempo, bajo la suposición de independencia

$$P[x(2\Delta t)] = P(x_1) \otimes P(x_2)$$

Donde  $\otimes$  denota la convolución

En la figura 2.4 mostramos cuatro diferentes pdfs  $P(x)$ :

(i) la distribución delta (ii) la distribución uniforme (iii) la distribución Gaussiana (iv) la distribución Lorentziana (o Cauchy)

Cuando una de esas distribuciones caracteriza las variables aleatorias  $x_i$ , la pdf  $P(S_n)$  cambia cuando  $n$  incrementa (figura 2.5)

Mientras todas las distribuciones cambian como una función de  $n$ , se observa una diferencia entre las dos primeras y las dos últimas distribuciones.

Las funciones  $P(S_n)$  para la distribución Delta y Uniforme cambian tanto en escala y en forma funcional cuando  $n$  se incrementa, mientras la distribución Gaussiana y Lorentziana no cambian en forma pero solo en escala (ellas se vuelven mas anchas cuando  $n$  se incrementa), Cuando la forma funcional de  $P(S_n)$  es la misma que la

forma funcional de  $P(x_i)$ , el proceso estocástico se dice que es estable. Así los procesos Gaussianos y Lorenzianos son estables, pero en general los procesos estocásticos no lo son.

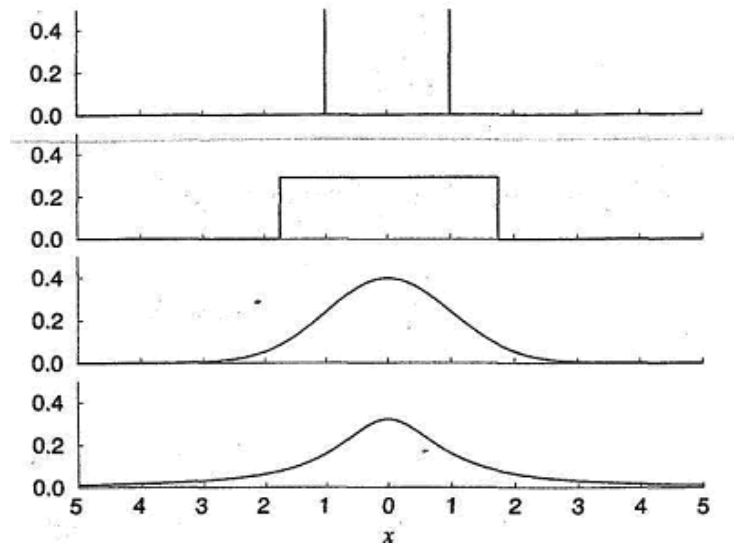


Fig 2.4 - Ejemplos de diferentes pdfs. Desde la cima hasta el inferior son mostrados :  
 (i)  $P(x) = \delta(x+1) / 2 + \delta(x-1) / 2$  (ii) una pdf uniforme con media cero y desviación estandar unidad, (iii) una pdf gaussiana con media cero y desviación estandar unidad, y (iv) una pdf Lorenziana con factor de escala unidad – **fuente [2]**

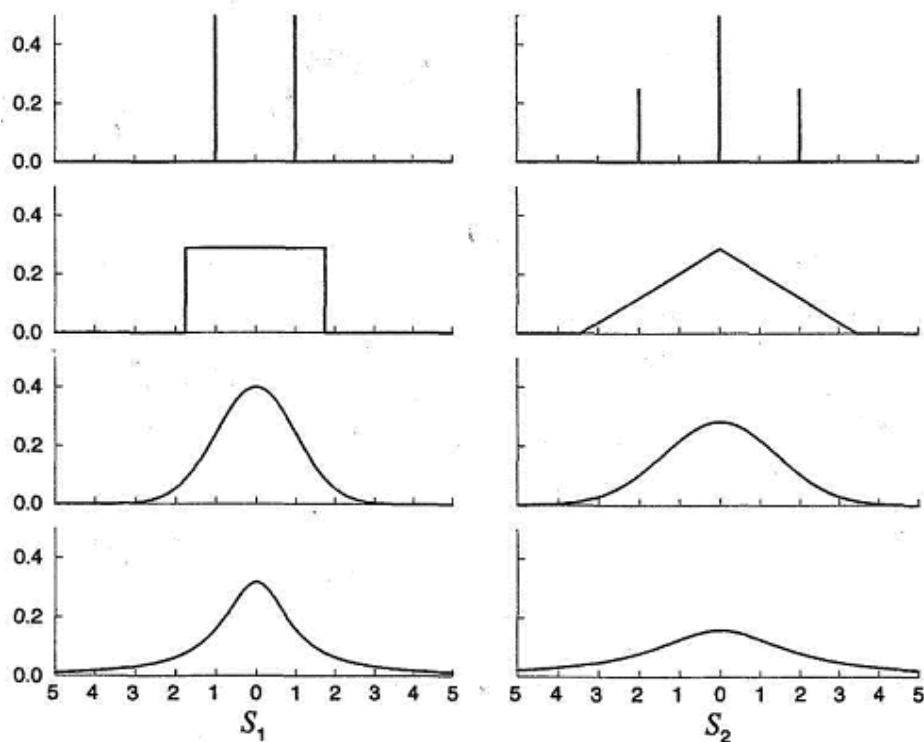


Fig 2.5 - Comportamiento de  $P(S_n)$  para variables aleatorias iid con  $n=1,2$  para las pdfs de la Fig 2.4 – **fuente [2]**

## 2.4 Difusión Normal

Como nuestra simple derivación sugiere, las propiedades estadísticas del random walk tienden hacia distribuciones Normales después de un gran número de pasos. En el caso de la FDP para la posición final, nuestro resultado para random walk isotrópico es una generalización multidimensional del Teorema de Límite Central (TLC)<sup>9</sup> para la suma de variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente. Mientras un segundo momento finito exista  $\langle r^2 \rangle$  para los desplazamientos aleatorios, la forma asintótica de  $P_N(R)$  es dada por la ec (2.10)

Notamos que el “escalamiento raíz cuadrada” del ancho de la FDP, que crece como  $R \propto \sqrt{\langle r^2 N \rangle}$

El cual es característico de un esparcimiento por “difusión normal”. Mas generalmente la varianza de la posición es dada por  $Var(R_N) = NVar(\vec{r})$ , para desplazamientos aleatorios independientes idénticamente distribuidos.

## 2.5 Difusión anómala

Cuando las suposiciones del TLC no se cumplen, los random walks pueden exhibir un comportamiento más que diferente.

Por ejemplo las distribución límite para la posición puede no ser gaussiana, y el escalamiento de su ancho,  $R \propto N^\nu$  es generalmente “anómalo” con  $\nu \neq 1/2$ . [4]

Una forma de quebrar el TLC con desplazamientos iid es vía las distribuciones de probabilidad “fat tailed”<sup>10</sup> (concepto detallado en el capítulo 5), las cuales asignan suficiente probabilidad para pasos muy grandes tal que la varianza es infinita. Un ejemplo es la FDP para una variable aleatoria de Cauchy.

---

<sup>9</sup> El TLC indica que, en condiciones muy generales, la distribución de la suma de variables aleatorias tiende a una distribución normal

<sup>10</sup> Es una propiedad de algunas distribuciones de probabilidad (alternativamente referidas como heavy-tailed) presentan curtosis muy grandes sobre todo en relación con la omnipresente distribución normal. Las distribuciones fat tailed tienen decaimiento en ley de potencia.

$$p(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + x^2)} \quad (2.14)$$

Ya que la función de densidad de probabilidad decae como  $x^{-2}$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , la varianza es infinita. La figura 2.6 muestra un ejemplo de un random walk isotrópico bidimensional, donde las distancias de los pasos son elejidos desde una distribución de Cauchy, Vemos que el walk en su mayoría toma pequeños pasos, pero ocasionalmente hace saltos muy largos, comparable al desplazamiento total. Esto es más que diferente del caso de walk de Pearson, mostrado en la figura 2.7, donde el tamaño del paso es constante y la difusión normal ocurre. Otras formas de lograr difusión anómala incluye distribuciones de pasos no iniformes, fuertes correlaciones entre los pasos, e interacciones entre múltiples random walkers. En tales casos el límite continuo es más sutil y conduce a varias generalizaciones de la ecuación de difusión.

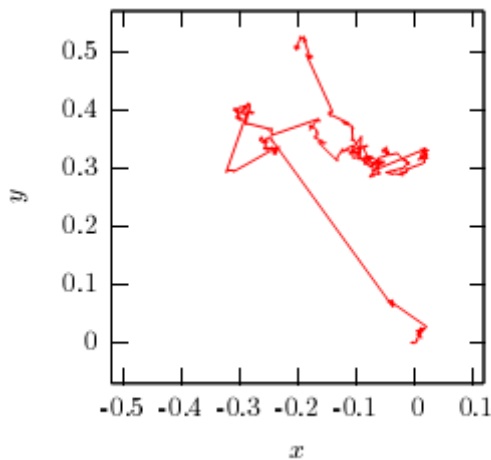


Fig 2.6 - Dos mil pasos de un random walk basado en la distribución de Cauchy

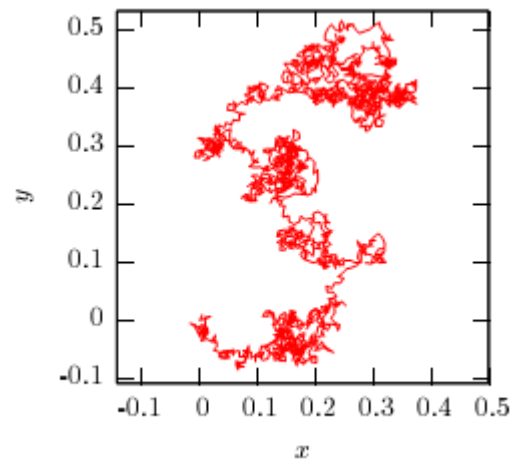


Fig 2.7 - Dos mil pasos del random walk de Pearson, con  $a=0.01$

## CAPITULO III

### PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y MODELOS DE DIFUSIÓN<sup>11</sup>

El movimiento Browniano originalmente significó el movimiento errático de una partícula (polen) en la superficie de un fluido causado por pequeños impulsos de moléculas. Wiener sugirió un modelo matemático para este movimiento, el proceso de Wiener. Pero antes Bachelier había aplicado el Movimiento Browniano para modelar el movimiento del precio de las acciones, el cual responde instantáneamente a las numerosas informaciones próximas, similar a como el polen reacciona a los impactos de las moléculas. Mostramos una gráfica

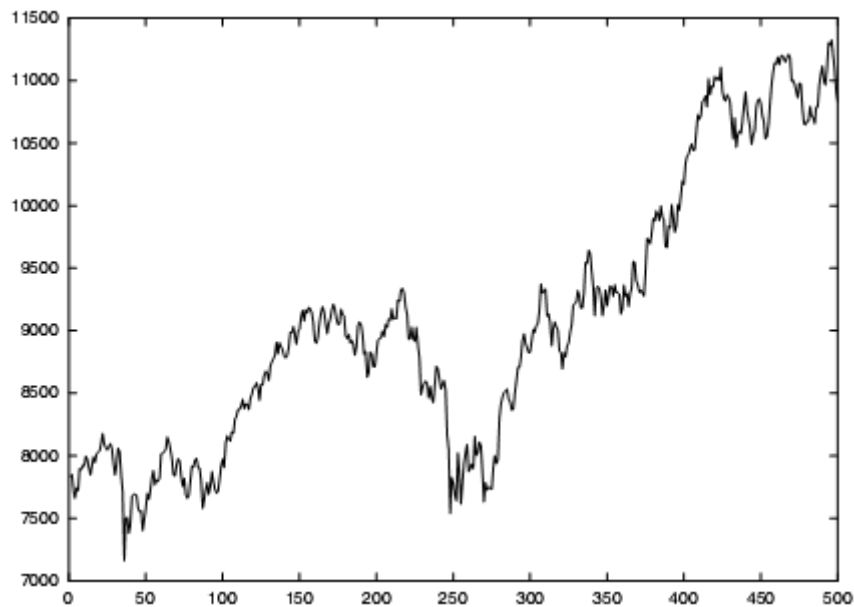


Fig 3.1 - El Down en 500 días de negociación desde Set. 8 - 1997 hasta Agos. 31 - 1999  
– fuente [9]

Las variables financieras, tales como precios y retornos, son variables dependientes del tiempo. La noción de proceso estocástico<sup>12</sup> es usada para su modelamiento. Específicamente el proceso de

<sup>11</sup> El material de este capítulo tiene por fuente [2, 6, 7, 9]

<sup>12</sup> En teoría de probabilidad, un proceso estocástico, o algunas veces un proceso aleatorio, es la contraparte de un proceso probabilístico

Wiener<sup>13</sup> (o el movimiento Browniano) juega un rol central en matemática financiera.

Una variable sigue un proceso estocástico cuando tiene una evolución temporal imprevisible (no determinística), o sea, no existe algoritmo para determinar el próximo estado del sistema. El proceso estocástico es así descrito por la especificación de la dinámica y de la distribución de probabilidades de la cual las variables aleatorias son tomadas.

La dinámica puede ser discreta, dada por la ecuación de diferencia, por ejemplo:

$$x(t+1) = x(t) + \varepsilon(t) \quad (3.1)$$

con  $x$  la variable estocástica y  $\varepsilon$  la variable aleatoria cuya distribución debe ser especificada.

La dinámica puede ser continua, dada por la ecuación diferencial, por ejemplo,

$$\dot{x}(t) = \xi(t) \quad (3.2)$$

Estos casos corresponden a tener ruido aditivo.

Los casos de abajo son ejemplos de ruido multiplicativo en el caso de dinámica discreta o continua respectivamente:

$$x(t+1) = x(t) + x(t)\varepsilon(t) \quad \text{o} \quad \dot{x}(t) = x(t)\xi(t) \quad (3.3)$$

### 3.1 Proceso de Wiener

La teoría matemática rigurosa para la descripción del movimiento Browniano fue hecha por Wiener en 1923 y dió origen al llamado proceso de Wiener.

Un proceso de Wiener (o movimiento Browniano: notación  $W_t$  o  $W$ ) es un proceso de variable continua en tiempo continuo cuya variable estocástica  $W$  posee las siguientes propiedades:

1.  $dW$  consecutivos son estadísticamente independientes.
2.  $dW$  son idénticamente distribuidos, dados por:

$$[dW]^2 = \varepsilon^2 dt \quad \text{o} \quad dW = \varepsilon \sqrt{dt} \quad (3.4)$$

(intervalo infinitesimal)

---

<sup>13</sup> La teoría matemática rigurosa para la descripción del movimiento Browniano

$$[\Delta W]^2 = \varepsilon^2 \Delta t \quad \text{o} \quad \Delta W = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3.5)$$

(intervalo finito)

donde  $\varepsilon$ , representa a las variables aleatorias normales estándares no correlacionadas y que es descrita por la distribución normal de media nula y varianza  $\sigma^2$ :

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\varepsilon^2 / 2\sigma^2) \quad (3.6)$$

Usualmente, se utiliza la notación (iid) para variables independientes e idénticamente distribuidas, en cuanto a la notación para la variable  $\varepsilon$  es:

$$\varepsilon \in N(0, \sigma^2) \quad (3.7)$$

A seguir, presentamos un pasaje de tiempo discreto para el continuo del proceso de Wiener, utilizando  $\sigma = 1$ .

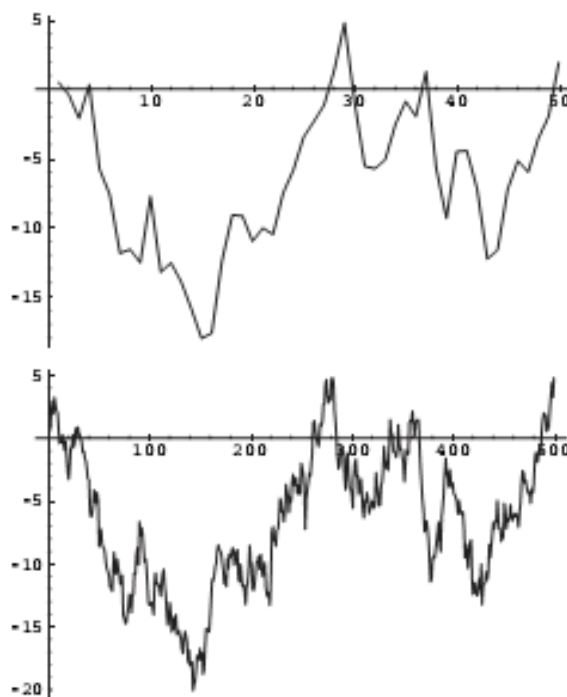


Fig. 3.2 - A medida que  $\Delta t \rightarrow 0$ , se ve que la trayectoria Browniana va quedando mas “rugosa”. Esto significa que la curva se torna no diferenciable (siendo descrita por un fractal). - fuente [6]

Podemos interpretar la ecuación (3.4) como la aproximación continua en el tiempo de la ecuación (3.5) cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , la cual puede ser reescrita como:

$$W(t_{k+1}) = W(t_k) + \varepsilon_{t_k} \sqrt{\Delta t} \quad (3.8)$$

Entonces (3.8) describe el conocido modelo random Walk dada por (2.15) excepto por el término  $\sqrt{\Delta t}$ . Además (3.8) nos da una forma de simular el Movimiento Browniano estandar (Proceso de Wiener); esto es desarrollado con más detalle en el Apéndice.

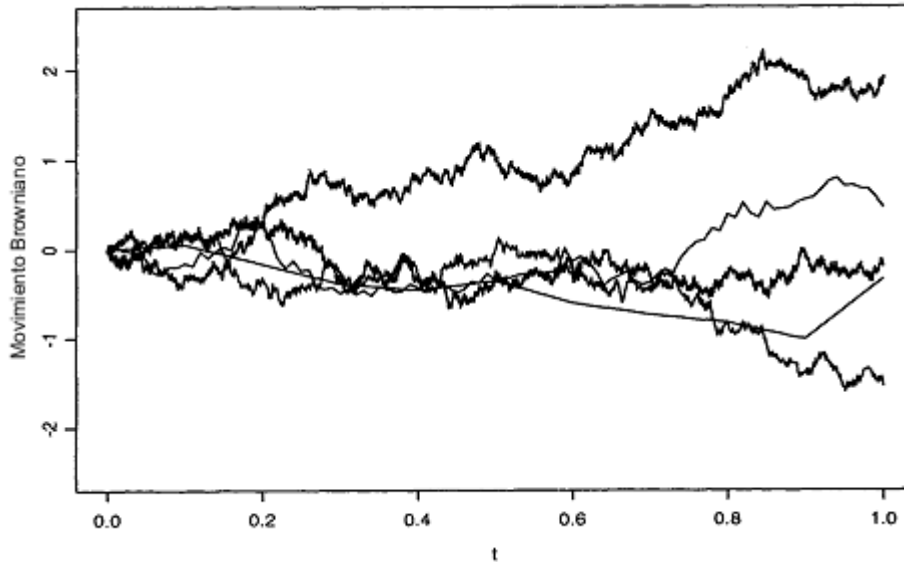


Fig 3.3 – Simulación de los Paths muestra del proceso  $S_{[nt]}$  para diferentes  $n$  y la misma secuencia de  $\varepsilon_i$

Los procesos de Wiener son ejemplos de Martingalas – sin drift

### 3.2 Modelos de difusión

En teoría de probabilidades, un proceso de difusión es una solución a una ecuación diferencial estocástica (SDE)

#### 3.2.1 Proceso de Itô

Muchos de los fenómenos en la naturaleza, tecnología y economía son modelados por ecuaciones diferenciales determinísticas

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} x = a(x, t) .$$

Este tipo de modelamiento desprecia las fluctuaciones estocásticas y no es apropiado para los precios de las acciones.

La forma más facil de considerar movimientos estocásticos es vía un término aditivo,

La forma más facil de considerar movimientos estocásticos es vía un término aditivo,



$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) + b(x,t)\xi_t \quad (3.9)$$

Aquí usamos las notaciones:

a: parte determinística

$b\xi_t$ : parte estocástica,  $\xi_t$  denota un proceso estocástico generalizado.

Un ejemplo de proceso estocástico generalizado es el ruido blanco, que también se le conoce como Proceso de Wiener Generalizado

### 3.2.2 El ruido blanco (white noise)

Los caminos (Paths) muestra de un movimiento Browniano son en ningún lado diferenciables, a esta propiedad se le conoce como auto-similaridad.

Aunque la derivada de  $W(t)$  no existe como un proceso regular estocástico, es posible dar un significado matemático a  $dW/dt$  como proceso generalizado (en el sentido de funciones generalizadas o distribuciones). En este caso la derivada de  $W(t)$  es el llamado ruido blanco  $\xi(t)$ :

$$\xi(t) \equiv \frac{dW}{dt} \quad (3.10)$$

que es una función que rápidamente fluctúa.

La derivada  $\frac{dW}{dt}$  diverge como  $\frac{1}{\sqrt{dt}}$

A su vez el proceso de Wiener es obtenido suavizando el ruido blanco

$$\int_0^t W_t = \xi_s ds \quad (3.11)$$

La forma integral de (3.9) usando  $\xi_s ds = dW_t$  es:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(x(s), s) ds + \int_{t_0}^t b(x(s), s) \xi_s ds \quad (3.12)$$

El segundo término en (3.12) es una integral ordinaria de Lebesgue o Riemann

El tercer término es la integral de Itô que será tomada con respecto al proceso de Wiener  $W_t$ , así la ecuación diferencial estocástica (SDE) resultante será llamada de Itô

### 3.2.3 Ecuación Integral estocástica de Itô

Una ecuación integral estocástica de Itô se obtiene reescribiendo (3.9) y (3.12) (ver figura 3.4):

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t \quad (3.13a)$$

que junto a  $X_{t_0} = X_0$  es una forma abreviada de la ecuación integral

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s, s)ds + \int_{t_0}^t b(X_s, s)dW_s \quad (3.13b)$$

Los términos en (3.13) son identificados como sigue:

$a(X_t, t)$  : término drift o coeficiente de tendencia

$b(X_t, t)$  : término de difusión

La ecuación integral (3.13b) define una gran clase de procesos estocásticos  $X_t$ ; las soluciones  $X_t$  de (3.13b) son llamadas procesos de Itô o de difusión estocástica.

Según lo previsto el proceso de Wiener es un caso especial del Proceso de Itô, porque de  $X_t = W_t$  la trivial SDE  $dX_t = dW_t$  sigue aquí el desvanecimiento del drift  $a=0$  y  $b=1$  en (3.13). Si  $a \equiv 0$  y  $X_0$  es constante, entonces la SDE se vuelve determinística.

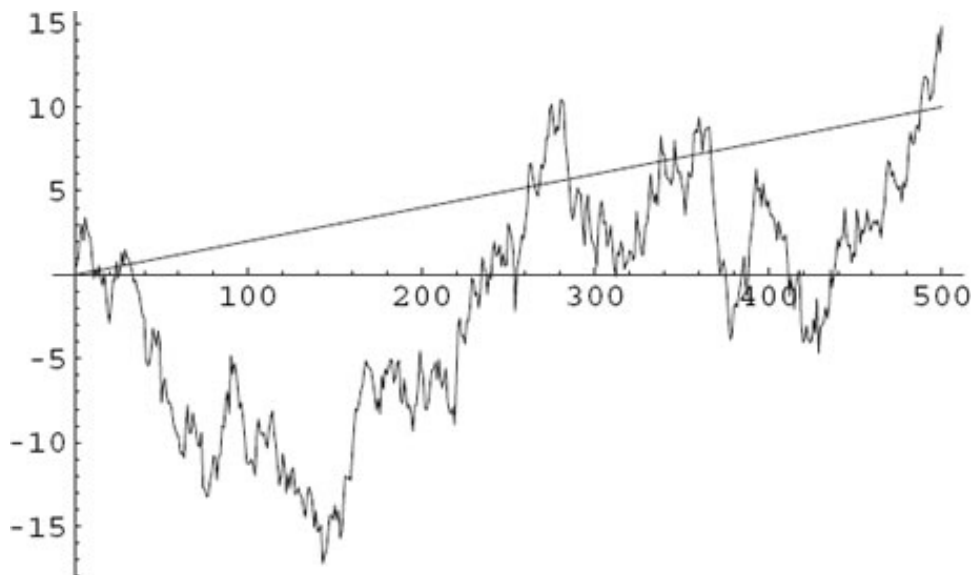


Fig 3.4 Proceso de Wiener Generalizado – la línea recta representa la tendencia (el drift) superpuesta en los datos. – fuente [6]

### 3.2.4 Fórmula de Itô

Es uno de los procesos estocásticos más fundamentales. Nos puede ayudar a derivar soluciones de SDE

Consideremos el proceso genérico  $X(t)$  descrito por el SDE (3.13a), y suponer que tenemos un nuevo proceso estocástico  $Z$  definido por

$$Z(t) = F(X(t), t) \quad (3.16)$$

Para alguna función dada  $F(x, t)$ . Ahora queremos encontrar la dinámica local seguida por el  $Z(t)$ , que es la SDE cuyas soluciones corresponden al proceso  $Z(t)$  anterior. La respuesta es dada por la fórmula de Itô que ahora procedemos a derivar.

Primero consideramos la expansión de Taylor de la función  $F(X, t)$ :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dX)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} dt dX + \dots \quad (3.17)$$

Notar, sin embargo que

$$(dX)^2 = b^2 dW^2 + 2abdtdW + a^2(dt)^2 = b^2 dt + O(dt^{3/2}) \quad (3.18)$$

Donde hemos usado el hecho que  $dW^2 = dt$  y  $dtdW = O(dt^{3/2})$

Insertando (3.17) en (3.18) y dejando sólo términos de orden  $dt$  obtenemos

$$dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] (dt) + b \frac{\partial F}{\partial x} dX \quad (3.19)$$

Que es conocida como la fórmula de Itô. Si consideramos (3.9a) en la ecuación anterior, obtenemos la fórmula de Itô en una fórmula más explícita

$$dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + a(X, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(X, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(X, t) \frac{\partial F}{\partial x} dW \quad (3.20)$$

Lo que es destacado acerca de esta fórmula es el hecho que la parte fluctuante del proceso primario  $X(t)$  contribuye al drift del proceso derivado  $Z(t) = F(t, X)$  a través del término

$$\frac{1}{2} b^2(t, X) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

### 3.2.5 Movimiento Browniano Geométrico (MBG)

El MBG es uno de los más importantes modelos continuos para el movimiento del precio de las acciones  $S_t$ . Este modelo estandar asume que el cambio relativo (retorno)  $dS/S$  de un security (documento que prueba la propiedad de una acción) en el intervalo de tiempo  $dt$  es compuesto de un drift determinístico  $\mu dt$  mas fluctuaciones estocásticas en la forma  $\sigma dW_t$

El Modelo del MBG es:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (3.21)$$

Esta SDE es lineal en  $X_t = S_t$ , y  $a(S_t, t) = \mu S_t$  es la tasa de drift con la tasa esperada de retorno  $\mu$ ,  $b(S_t, t) = \sigma S_t$ ,  $\sigma$  es la volatilidad. El movimiento Browniano geométrico de (3.21) es el modelo referencia en la que la aproximación de Black-Scholes-Merton está basada en las suposiciones que  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes

Analizando la parte determinística de (3.21) vemos que es una ecuación diferencial ordinaria:  $\dot{S} = \mu S$

con solución  $S_t = S_0 e^{\mu(t-t_0)}$ . Para la solución de (3.21) la espectación  $E(S_t)$  soluciona  $\dot{S} = \mu S$ . Aquí  $S_0 e^{\mu(t-t_0)}$  es la espectación del proceso estocástico y  $\mu$  es la ganancia de retorno compuesta continua esperada. La tasa de retorno  $\mu$  es también llamada tasa de crecimiento. La función  $S_0 e^{\mu(t-t_0)}$  puede verse como el núcleo sobre el cual el proceso fluctua.

La solución a (3.21) se obtiene aplicando la fórmula de Itô, se detalla en el siguiente capítulo.

Podemos reescribir (3.21) en una versión discreta

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \quad (3.22)$$

Y así conseguir simular el Movimiento Browniano Geométrico (detalles en el apéndice)

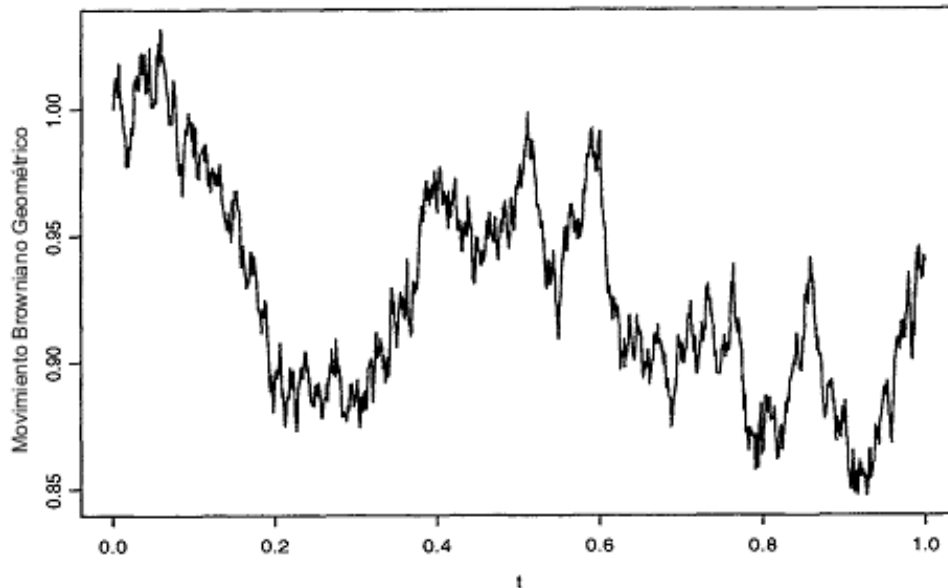


Fig 3.5 – Simulación de 1000 paths de MBG con  $\mu = 0.03$  y  $\sigma^2 = 0.04$

### 3.2.6 Procesos estocásticos de Lévy (enfoque cualitativo)

Son procesos estocásticos que obedecen a una versión generalizada del teorema de límite central. Tiene un número de interesantes propiedades.

Son estables (como los procesos Gaussianos más comunes), es decir la suma de dos procesos estocásticos independientes  $x_1$  y  $x_2$  caracterizada por la misma distribución de Lévy de índice  $\alpha$  es así mismo un proceso estocástico caracterizado por una distribución de Lévy del mismo índice.

La forma de la distribución es mantenida (es estable) por suma de variables aleatorias de Levy estables independientes e idénticamente distribuidas.

Los procesos de Levy estables definen un *cuenca de atracción*<sup>14</sup> en el espacio funcional de la funciones densidad de probabilidad. La suma de los procesos estocásticos independientes idénticamente distribuidos

---

<sup>14</sup> El pdf gaussiana es un atractor (o punto fijo) en el espacio fundamental de las pdfs para todas las pdfs que cumplen el TLC. El conjunto de tales pdfs constituye el basín de atracción de la pdf gaussiana

$S_n \equiv \sum_{i=1}^n x_i$  caracterizado por una función densidad de probabilidad con colas tipo ley de potencia.

$$P(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$$

convergerá en probabilidad, a un proceso estocástico estable de Lévy de índice  $\alpha$  cuando  $n \rightarrow \infty$

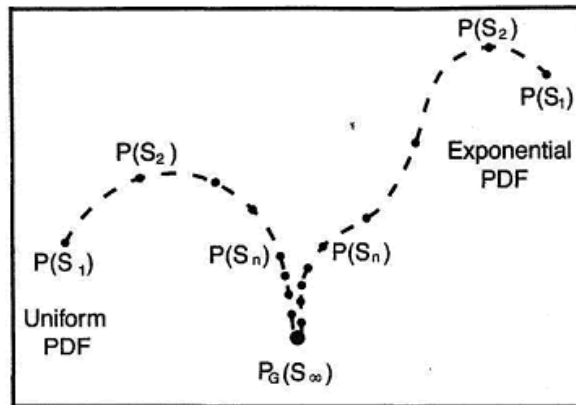


Fig 3.6 – Representación gráfica de la convergencia a la pdf gaussiana para la suma de variables aleatorias de varianza finita i.i.d – fuente [2]

Esta propiedad nos dice que la distribución de un proceso estable de Lévy es una distribución ley de potencia para grandes valores de la variable estocástica  $x$ . El hecho que las distribuciones ley de potencia carezcan de una escala típica es reflejado en un proceso estable de Lévy por la propiedad que la varianza del proceso estable de Lévy es infinito para  $\alpha < 2$ . Los procesos estocásticos con varianza infinita, aunque matemáticamente bien definidos, son extremadamente difíciles de usar. Podemos usar la siguiente analogía...

En Física, el segundo momento podría ser la temperatura, entonces varianza infinita, implica temperatura indefinida o infinita

En Finanzas, el segundo momento es el riesgo, entonces varianza infinita, complica la estimación del riesgo

En el capítulo 5 se discutirá cuantitativamente las distribuciones tipo Lévy.

## CAPITULO IV

### MODELOS ESTOCÁSTICOS PARA LA FLUCTUACIÓN DE PRECIOS<sup>15</sup>

#### 4.1 Modelo de Louis Bachelier

En 1900, Bachelier propuso un modelo estocástico en el cual los precios  $S(t)$  siguen un proceso Browniano Aritmético con "drift"  $\mu$  constante:

$$dS = \mu dt + \sigma dW_t \quad \text{con} \quad dW_t \in N(0, dt) \quad (4.1)$$

El término  $\mu dt$  caracteriza una variación temporal de precios determinística o típica, con tasa media en el tiempo  $\mu$  - drift (tendencia media). El término  $\sigma dW_t$  caracteriza la variación estocástica de precios, cuya amplitud  $\sigma$  es dada por la desviación estándar de las variaciones históricas de precio,  $dW_t$  es el ruido estocástico gaussiano caracterizado por un proceso de Wiener con propiedades:

$$\langle dW(t) \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle dW^2(t) \rangle = dt \quad (4.2)$$

La ecuación (4.1) caracteriza el proceso browniano aritmético que da como solución para la distribución de variaciones de precios la distribución gaussiana con dispersión proporcional a la raíz cuadrada del tiempo

Así, después de un intervalo de tiempo T:

$$\begin{aligned} \langle S(T) - S(0) \rangle &= \mu T \\ \text{var}[(S(T) - S(0))] &= \sigma^2 T \end{aligned} \quad (4.3)$$

Siendo una suma de ruidos Gaussianos, la distribución de valores de  $S \equiv S(T)$ , con  $S(0) = 0$  es dada por:

$$P_T(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{T}}} \exp\left[-\frac{(S - \mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right] \quad (4.4)$$

La distribución gaussiana del modelo de Bachelier permite precios negativos, lo que viola las leyes del mercado.

Además, según este modelo, el lucro esperado de la inversión en un intervalo de tiempo T es dado por  $\langle S(T) - S(0) \rangle = \mu T$ , que es

---

<sup>15</sup> El material de este capítulo tiene por fuente [2, 6, 7, 9]

independiente del valor  $S(0)$  invertido. Sin embargo, mas importante que el lucro de una inversión, es el retorno de la inversión, i. e., lucro relativo al capital invertido. Debemos, por tanto buscar el modelo en el que la tasa de retorno sea un parámetro importante y que esta sea independiente del precio del activo (por ejemplo, tasa de retorno de 15% por año, independiente del valor de la acción).

## 4.2 Modelo estándar

Después el Modelo de Bachelier fue generalizado para la descripción de lucros relativos  $dS_t/S_t$ , y es lo que se conoce hoy como "modelo estándar" que es usado como modelo de referencia para el proceso estocástico de las fluctuaciones de precios.

Consideramos inicialmente un modelo sin fluctuaciones aleatorias, y con una tasa de retorno  $\mu$ :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \quad \text{o sea,} \quad dS = \mu S dt, \quad (4.5)$$

y así el lucro es proporcional al capital invertido  $S$  en la compra de la acción.

Para  $\mu$  constante, el precio tiene crecimiento exponencial con el tiempo:

$$\begin{aligned} d(\ln S) &= \mu dt \\ \ln \left[ \frac{S(T)}{S(0)} \right] &= \mu T \quad \therefore \quad S(T) = S(0)e^{\mu T} \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $\mu$  – tasa de retorno (lucro relativo) por unidad de tiempo

y  $\mu T$  – retorno (logarítmico) en el intervalo de tiempo  $T$

Si la tasa de retorno  $\mu$  fuera dependiente del tiempo:

$$\frac{dS}{S} = \mu(t)dt \quad (4.7)$$

Se obtiene análogamente que:

$$S(T) = S(0) \exp \left[ \int_0^T \mu(t') dt' \right] \quad (4.8)$$

La ecuación diferencial anterior es determinística con lucro relativo dado por  $\mu dt$ .



Sin embargo, las variaciones relativas del precio poseen incertidumbre, en la cual también podemos suponer inicialmente que sean independientes del valor de la acción. Podemos modelarlas por:

$$\text{var} \left[ \frac{dS}{S} \right] = \sigma^2 dt, \quad (4.9)$$

donde  $\sigma^2$  es la varianza por unidad de tiempo, que es independiente de  $S$ .

El Modelo estándar para las fluctuaciones de precios de acciones supone que las variaciones relativas del precio tienen tasa de crecimiento modelada por:

$$\frac{dS}{S} = (\mu + \xi(t)) dt, \quad (4.10)$$

donde el término de ruido blanco<sup>16</sup>  $\xi(t)$  es responsable por la incertidumbre do retorno de la inversión.

De esta forma, las fluctuaciones relativas son regidas por el proceso Browniano geométrico:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \quad dW \in N(0, dt) \quad (4.11)$$

con tasas constantes en el tiempo de "drift" y varianza de datos por  $\mu$  y  $\sigma^2$  respectivamente.

Se debe observar que en este modelo, el lucro relativo esperado es

$$\left\langle \frac{dS}{S} \right\rangle = \mu dt \quad (4.12)$$

o sea, el parámetro  $\mu$  (parámetro de drift) mide la tasa en el tiempo de retorno esperado.

La amplitud  $\sigma$  (parámetro de difusión) de las fluctuaciones de los valores de  $dS/S$  en relación al valor medio  $\mu dt$  representa el nivel de incertidumbre de los retornos, llamado de volatilidad.

El proceso estocástico de los precios  $S(t)$  es representado por la ecuación diferencial estocástica (SDE):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (4.13)$$

---

<sup>16</sup> El ruido blanco  $\xi(t)$  es simplemente definido como una función que fluctúa rápidamente  $\xi(t) \equiv dW / dt$  que diverge como  $1/\sqrt{t}$  y que puede ser entendido en términos de las integrales estocásticas de Ito

Y cuya solución describe el llamado movimiento Browniano Geométrico (MBG), donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes, sujetas a una condición inicial genérica  $S(t_0) = S_0$ . Ahora vamos a representar el siguiente cambio de variables  $Z = \ln(S)$ . Aplicando la Fórmula de Itô (ecuación 3.20) con  $a = \mu S$ ,  $b = \sigma S$  y  $F(S) = \ln(S)$ , entonces resulta:

$$dW = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW \quad (4.14)$$

que integrando resulta:

$$W(t) = W_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma [W(t) - W(t_0)] \quad (4.15)$$

Donde  $W_0 = \ln S_0$ . Volviendo a la variable S obtenemos la solución explícita de la SDE (4.13):

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma [W(t) - W(t_0)] \right\} \quad (4.16)$$

De (4.15) vemos que  $W(t) - W(t_0)$  está distribuido de acuerdo a  $N \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau, \sigma \sqrt{\tau} \right)$ , donde  $\tau = t - t_0$ . Entonces se sigue que el MBG con valor inicial  $S(t_0) = S_0$  tiene la siguiente distribución log-normal

$$p(S, t; S_0, t_0) = \frac{1}{S(\tau)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp \left\{ - \frac{\left[ \ln(S/S_0) - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right]^2}{2\sigma^2\tau} \right\} \quad (4.17)$$

En el movimiento MBG las diferencias de los logaritmos de los precios son distribuídas en forma Gaussiana

El Modelo estandar esta basado en el MBG y se considera que fué el primer modelo en dar una primera aproximación de lo que es observado en datos reales. Además es el modelo básico para dinámica de cotizaciones en el entorno Black & Scholes<sup>17</sup>.

---

<sup>17</sup> Modelo de opción de precios más usado en la actualidad, basado en el Modelo estándar

Cabe señalar que en el modelo estándar, los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes. Sin embargo, datos empíricos indican que  $\mu$  y  $\sigma$  varían en el tiempo.

Los gráficos siguientes muestran datos del IBOVESPA, donde se distinguen los períodos pre y pos plano real con diferentes tasas medias de retorno.

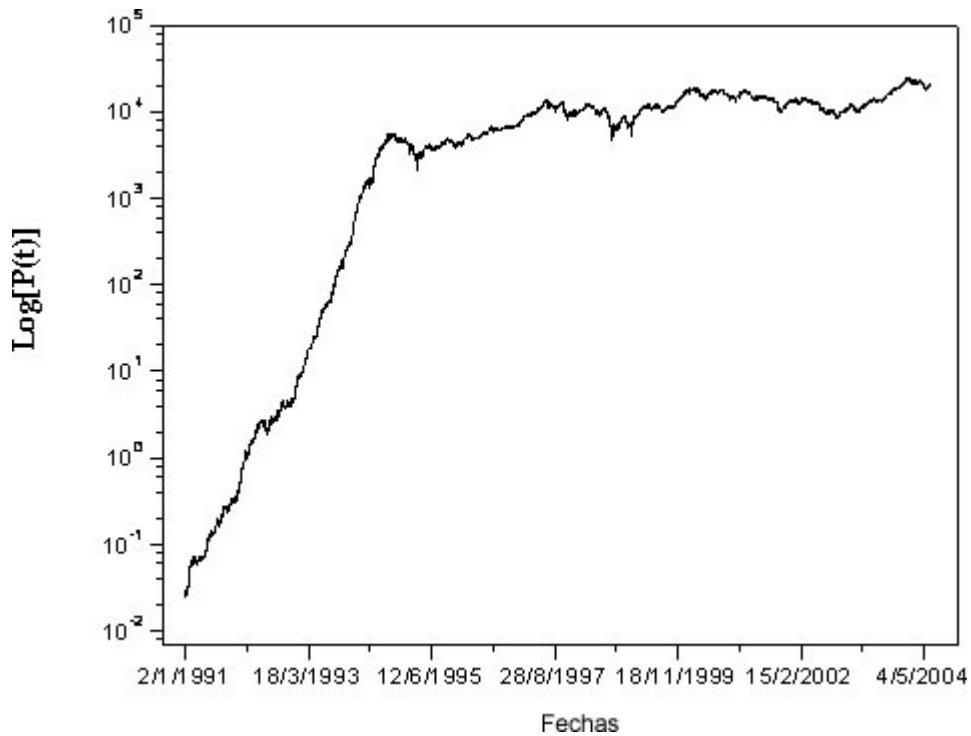


Fig. 4.1 - Serie histórica de los valores de cierre del IBOVESPA – fuente [11].

La volatilidad  $\sigma$  de los retornos de precios también depende del tiempo, presentando períodos intermitentes de grande volatilidad, en general asociados a épocas de inestabilidad política y/o económica.

La figura 4.2 muestra la volatilidad de la Bolsa de Valores de Sao Paulo IBOVESPA donde se distinguen series de mayor amplitud de incertidumbre de retornos asociados a eventos tales como Plan económico Brasileño de Fernando Collor de Mello (90), crisis en México (95), crisis Asiática (97) de crisis en Rusia (98).

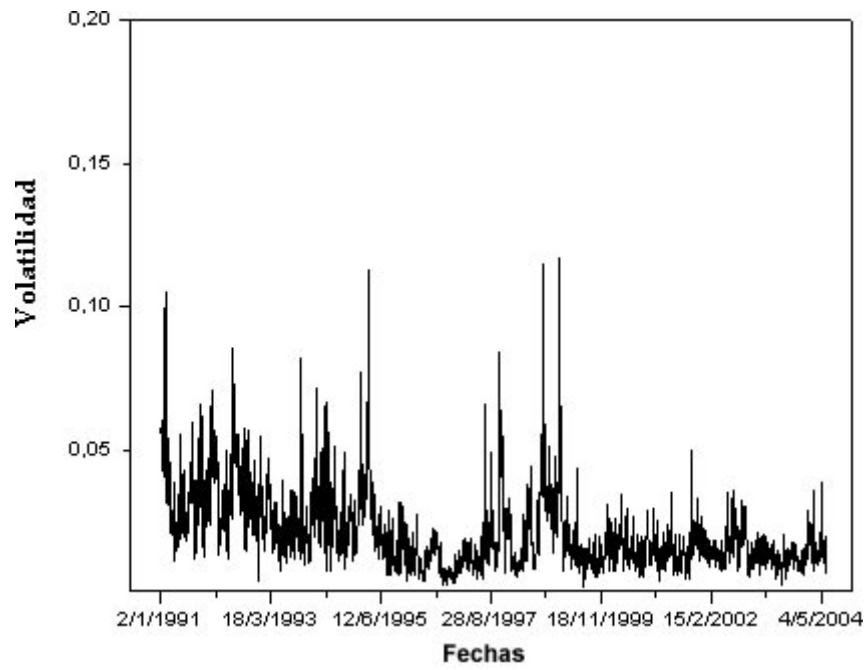


Fig 4.2 - Série histórica de Volatilidad – ~~fuente~~ [11]

Se concluye así que en general, el análisis con  $\mu$  y  $\sigma$  constantes sirven para modelar en horizontes finitos en el tiempo.

## CAPITULO V

### DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD <sup>18</sup>

Muchos de los conceptos en finanzas teórica y empírica que han sido desarrollados en los últimos 50 años se basan en la suposición de que las distribuciones de precios o retornos para activos financieros siguen una distribución normal. Aún con rara excepción, estudios que han investigado la validez de esta suposición desde 1960<sup>19</sup> no han encontrado soporte para la distribución normal – o distribución Gaussiana, como es también llamada. Es más, hay evidencia empírica [16,17] que muchas sino la mayoría, de las series de retornos financieros tienen colas pesadas (fat-tailed)

Las Colas (tails) de la distribución son donde los valores extremos ocurren. Así, las grandes fluctuaciones en el precio para acciones que suceden en breves períodos de tiempo (intradarios<sup>20</sup>) pueden ser explicadas con un modelamiento adecuado de los activos financieros y con el uso de distribuciones fat tails.

Para distinguir entre distribuciones gaussianas y distribuciones estables no gaussianas, a las últimas se le conoce también como distribuciones "Paretianas estables" o distribuciones "levy estable". Posteriores investigaciones en retornos de activos fueron hechos por Eugene Fama, entre otros, y condujo a la consolidación de la hipótesis que los retornos de activos, pueden ser mejor descritos por distribuciones paretianas estables

#### 5.1 Distribuciones Gaussianas

Esta distribución aparece en diversos fenómenos en la naturaleza y en particular en procesos relacionados a difusión normal o Browniana. La razón de la presencia prácticamente universal de la

---

<sup>18</sup> El material de este capítulo tiene por fuente [2, 5, 6, 8, 9,12]

<sup>19</sup> **El primero que intentó probar que las distribuciones de precios o retornos son no gaussianas (o distribuidos normalmente) fue Benoit Mandelbrot (1963).**

<sup>20</sup> **Los datos de alta frecuencia son observaciones tomadas en intervalos de tiempo cortos. En finanzas ellos a menudo consideran observaciones diarias medias o en una escala de tiempo mas fina. También son importantes por que tienen características únicas que no aparecen en datos de baja frecuencia**

distribución gaussiana se debe a que ella emerge naturalmente como una distribución límite para procesos aleatorios, como consecuencia del Teorema del Límite Central: la suma de variables aleatorias independientes con segundo momento finito (varianza) convergen gradualmente para una distribución estable gaussiana.

La distribución gaussiana es caracterizada por dos parámetros: media  $\mu$  y la desviación estándar  $\sigma$ . Comúnmente se denota una variable  $x$  gobernada por una distribución gaussiana como  $x \sim N(\mu, \sigma)$ .

La función densidad de probabilidad de la variable aleatoria con distribución normal es dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.1)$$

Si consideramos una distribución gaussiana normalizada, donde la variable aleatoria  $X$ , tiene media cero y desviación estándar unidad, tenemos:

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} X^2\right) \quad (5.2)$$

También podemos normalizar  $X$ , obtenida a partir de la variable original  $x$ , como:  $X = \frac{x-\mu}{\sigma}$  (5.3)

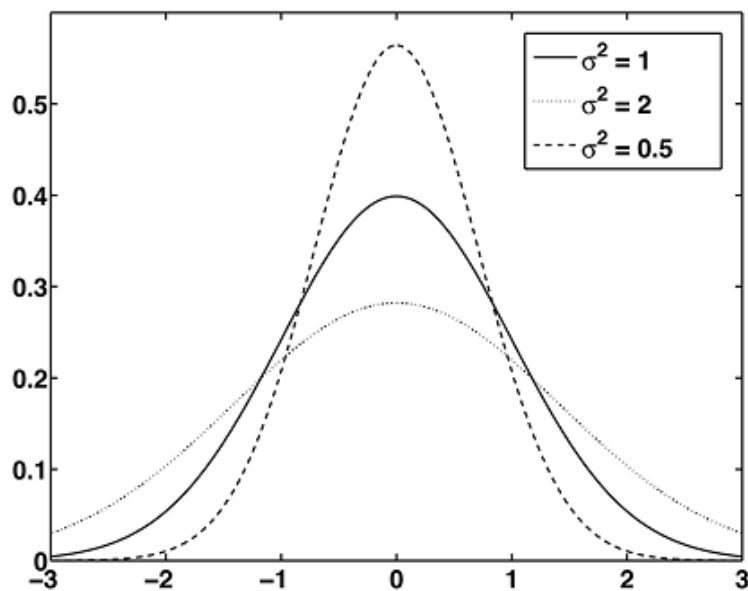


Fig 5.1 - Tres distribuciones normales con  $\mu = 0$  pero con diferentes valores de dispersión  $\sigma^2 = 1$ ,  $\sigma^2 = 2$ , y  $\sigma^2 = 0.5$

Es sabido, que aunque la parte central de la distribución  $|x| < \sigma$  posee mayor probabilidad de ocurrencia, son las colas de las distribuciones, las que dan las informaciones relativas a los valores extremos. Así en cualquier modelaje de distribución de retornos de precios es fundamental el análisis de las colas de las distribuciones, pues permite estimar lucros y prejuicios relevantes para el mercado financiero.

Ejemplo:

Para verificar la probabilidad de ocurrencia de valores extremos en un mercado regido por la distribución gaussiana, presentamos cuadro 5.1 que muestra la probabilidad ( $P|X \geq n$ ), que equivale de acuerdo con (5.3), la probabilidad de ocurrencia de un valor de retorno, descontada la media, sera mayor o igual en valor absoluto a  $n$  veces la desviación estándar histórica de la serie.

A partir del cuadro 2 podemos concluir que la distribución gaussiana es inadecuada para el análisis del mercado financiero.

La probabilidad estimada de observar una fluctuación de precios de por lo menos 5 veces mayor que la de una fluctuación típica  $\sigma$  es de una vez cada 7 milenios, lo que hace tal observación prácticamente imposible.

	$P X \geq n$	N	Tiempo
1	0.317	3	3 días
2	0.045	22	1 mes
3	0.0027	370	1.5 año
4	$6.3 \times 10^{-5}$	15.787	63 años
5	$5.7 \times 10^{-7}$	$1.7 \times 10^6$	7 milenios
6	$2.0 \times 10^{-9}$	$5.1 \times 10^8$	2 millones de años

Cuadro 2 Segunda columna: Probabilidad de módulo de retorno en relación al valor medio será mayor que  $n$  veces la desviación estandar, según una distribución normal

Tercera columna: probabilidad en número equivalente a  $N$  eventos que se debe observar para obtener una vez tal retorno

Cuarta columna: considerando la ocurrencia del evento a escala diaria y usando la siguiente equivalencia, 1 mes es 22 días y un año es 252 días, que es considerado el tiempo de negocio.

Sin embargo valores de retornos de esta orden han sido observados en las series reales, ver el gráfico

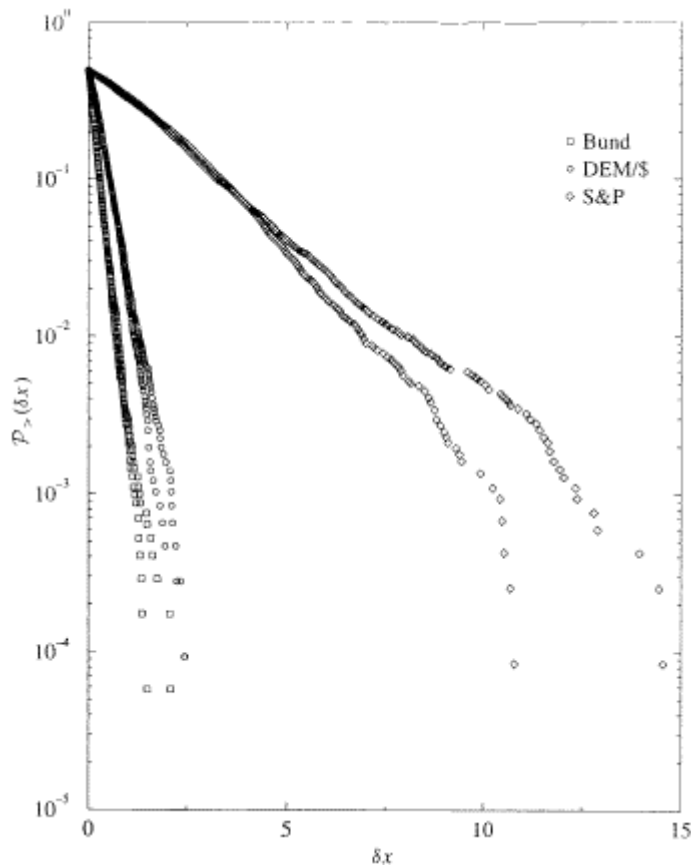


Fig 5.2 - Gráfico semi-logarítmico de la distribución acumulada de retornos normalizada en escala  $\Delta t = 1$  día, para tres tipos de títulos financieros durante 1991-1995: S&P 500, cambio marco-dolar (DEM/\$), y letras y tasa de interes del mercado alemán (Bund) – fuente [5]

En general, la frecuencia de ocurrencia de valores extremos en las series financieras es una característica de normalidad con órdenes de magnitud mayor que la prevista por la distribución gaussiana. Las distribuciones empíricas de retornos poseen "fat tails" o "heavy tails" para designar distribuciones con colas mas gordas que la distribución normal

## 5.2 Distribución Log Normal

Desde que la distribución gaussiana es invariante por adición de variable aleatoria, es solución estacionaria de la ecuación diferencial del tipo (5.1) donde el ruido es aditivo.

Por otro lado, una distribución Log-normal es invariante por multiplicación de variable alatoria, siendo así útil en el análisis de procesos estocásticos con ruido multiplicativo



La distribución Log-normal surge en el mercado financiero a partir del modelo estándar para la fluctuación de precios, en el cual el retorno de los precios es descrito por el movimiento Browniano geométrico, dado por (4.11) y que usando el Lema de Itô para mudanza de variable estocástica :  $x_t = \ln S_t$ , se obtiene:

$$dx_t = \mu' dt + \sigma dW_t \quad (5.4)$$

Con  $dW_t \sim N(0, dt)$  y  $\mu' \sim \mu - \frac{\sigma^2}{2}$

La ecuación (5.4) corresponde al movimiento Browniano aritmético cuya solución para la distribución de probabilidad de variable estocástica  $x_t$  en el tiempo  $t$ , es dada por la gaussiana de media  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$  :

$$P(\Delta x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(\Delta x_t - \mu' t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \quad (5.5)$$

Donde  $\Delta x_t = x_t - x_0$  y  $\mu' = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$

De la relación entre las distribuciones por mudanza de variable:

$$P(S)dS = P(x)dx \quad (5.6)$$

Se obtiene:

$$P(S_t) = \frac{1}{S_t} P\left[\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] \quad (5.7)$$

Tomando  $\Delta x_t = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$  en (5.7) se obtiene la ecuación (4.17), que es la distribución de precios en la forma log-normal, la cual volvemos a escribir:

$$p(S, t) = \frac{1}{S_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{-\frac{\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - \mu' t\right]^2}{2\sigma^2 t}\right\} \quad (5.8)$$

Como se observa en la figura inferior, la masa total de una distribución log-normal está concentrada en la línea real positiva. La distribución está reflejada a la derecha y posee un heavy tail derecho.

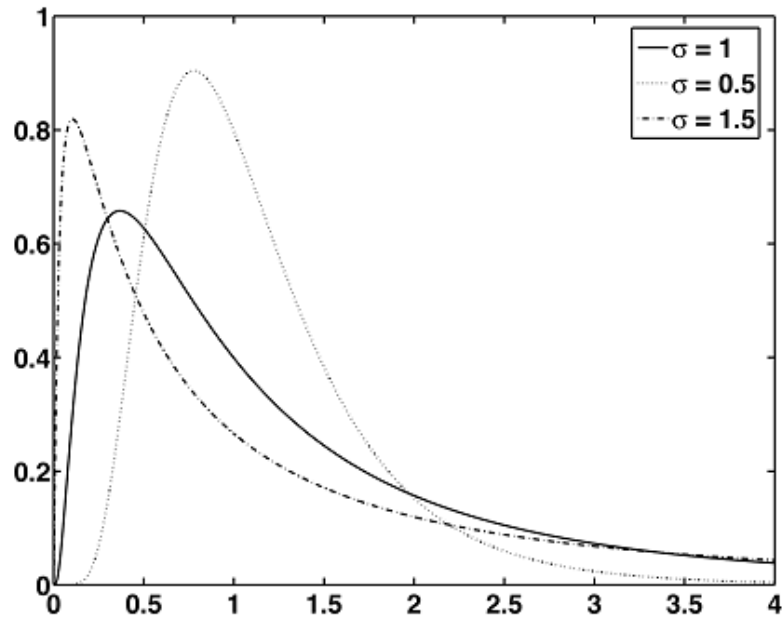


Fig 5.3 - Densidad de probabilidad Log-normal para diferentes parámetros de la distribución

Muchos estudios utilizan la distribución log-normal para el análisis de la variable financiera conocida como volatilidad. Para algunos mercados financieros, la distribución de precios (al final del día en un activo o índice en una negociación de acciones) normalizados por el volumen negociado, es bien descrita por la distribución log-normal, que es mostrada en la figura inferior.

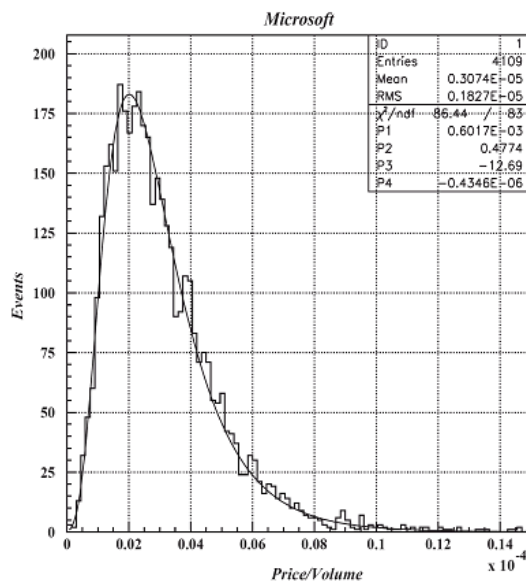


Fig 5.4 - Distribución de precios de cierre diario de las acciones de Microsoft normalizadas por el volumen negociado y una distribución log-normal aproximada – fuente [12]

### 5.3 Distribución de Levy

Benoit Mandelbrot en 1963 fue quizás la primera persona en desafiar el paradigma de que los retornos están normalmente distribuidos. Se analizaron los precios del algodón en varios mercados en los Estados Unidos y encontramos evidencias que sus distribuciones de retornos decaen como una ley de potencias y mucho más lento que una Gaussiana. Un ejemplo de este comportamiento "Fat Tail" puede ser visto en la fig. 5.5 donde se ploteó la distribución para los retornos del índice de Ibovespa. En esta figura, también mostramos una distribución gaussiana con la varianza de los datos, que aparecen como una parábola en la escala log-lineal del gráfico. Claramente vemos que la distribución empírica ciertamente tiene "colas gordas" (fatter tails) cuando comparamos con la distribución gaussiana.

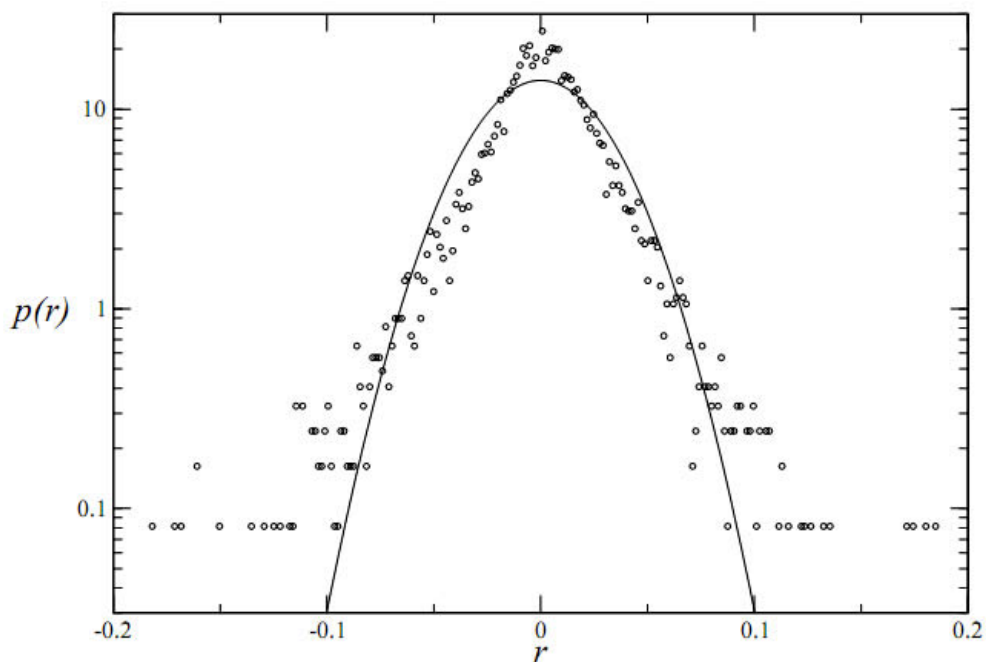


Fig. 5.5 - Distribuciones de los retornos diarios de Ibovespa (círculos abiertos). La línea sólida corresponde a una distribución gaussiana con la misma varianza de la distribución empírica – fuente [15]

Como mencionamos antes la distribución Gaussiana es especial por dos razones principales:

Cumplir con el Teorema del Límite Central, que establece que la suma infinita de variables aleatorias independientes (con varianza finita) convergerá a una variable Gaussiana. y

El ser una distribución estable, en el sentido que la suma de dos variables aleatorias independientes Gaussianas es también una variable Gaussiana.

Así es natural preguntar si hay otras distribuciones estables.

El matemático francés Paul Lévy mostró que hay ciertamente una amplia familia de distribuciones estables de las cuales la gaussiana es un caso particular.

Antes del formalismo matemático de Lévy, se fueron encontrando casos en los que los histogramas de alguna variable, que generalmente se veían como una distribución normal, fueron desviándose de la distribución normal en una manera sistemática. Por ejemplo el Economista Wesley Claire Mitchell en 1915 encontró que la distribución de cambios porcentuales en los precios de las acciones cuando se comparaban al mejor ajuste de una distribución normal consistentemente se desviaba de la distribución normal como se muestra a continuación:

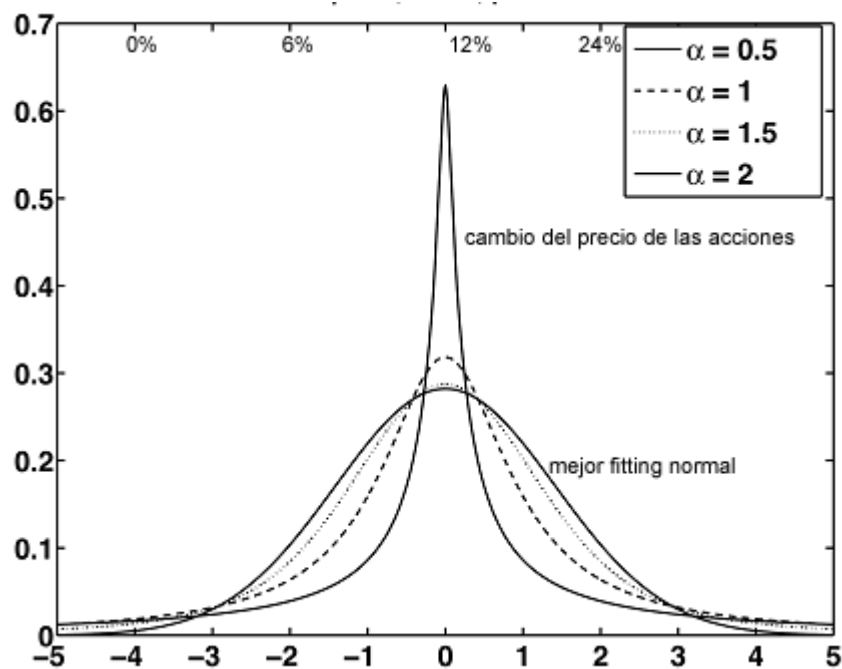


Fig 5.6 – Influencia de  $\alpha$  en el resultado de la distribución estable

Este tipo de desviación significa que habrían desviaciones muy pequeñas de la media, desviaciones demasiado grandes y pocas desviaciones moderadas. Los cambios extremos fueron de interés particular porque aquellos fueron los casos de auge y caída de los mercados de acciones.

Debido a la alta proporción de la probabilidad que existe en las colas (tails), estas distribuciones fueron llamadas fat-tailed o también se les denomina con la palabra griega, leptokurticas.

La expresión, en la forma simétrica y con media cero, es dada a partir de la función característica [2]

$$L_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\gamma q^{\alpha}) \cos(qx) dq \quad (5.9)$$

Con parámetros de Lévy  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ) y un factor de escala positivo  $\gamma$ . Para  $\alpha=2$  y  $\alpha=1$  tenemos respectivamente la distribución Gaussiana y la Lorenziana. (Distribución de Cauchy)

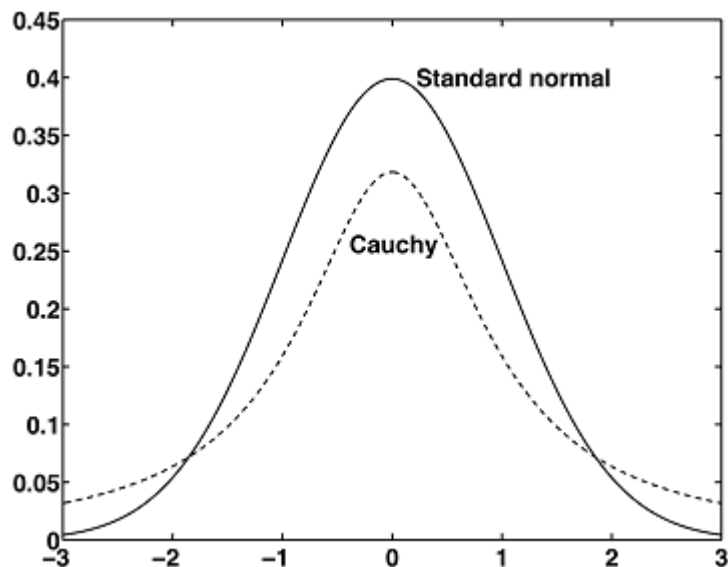


Fig 5.7 - Comparación de la distribución Cauchy estándar y Normal estándar

El comportamiento asintótico de la distribución puede ser obtenido a partir de la expresión para  $|x| \gg 1$  en (5.9). Considerando  $\gamma=1$  y siendo  $\Gamma(x)$  una función de Euler se tiene que:

$$L_{\alpha}(|x|) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha k + 1)}{k! |x|^{\alpha k + 1}} \text{sen}\left(\frac{k\pi\alpha x}{2}\right) + O(|x|^{-\alpha(n+1)-1}) \quad (5.10)$$

$$L_{\alpha}(|x|) \sim \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (5.11)$$

Así, para grandes valores de  $x$ , la distribución de Lévy tiene comportamiento en ley de potencia. Verificamos también que el segundo momento:

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 L_{\alpha}(x) dx \approx \int x^2 x^{-(\alpha+1)} dx = \int x^{1-\alpha} dx \quad (5.12)$$

es divergente para procesos con  $0 < \alpha < 2$

La importancia de las distribuciones Gaussianas y de Lévy para el mercado financiero se debe a que ambas poseen invarianza por la suma de variables aleatorias débilmente dependientes.

Siguiendo el T.L.C. generalizado [2], una distribución con segundo momento divergente con cola en ley de potencia dada por (5.11) converge para una distribución de Lévy del mismo parámetro  $\alpha$ . Estas distribuciones forman también una clase de distribuciones estables, siendo invariantes por agregación de variables aleatorias.

Note que el retorno en la escala temporal  $2dt$  equivale a una suma de retornos sucesivos en la escala  $dt$

$$\begin{aligned} Z_{2dt}(t) &= \ln S(t+2dt) - \ln S(t) = [\ln S(t+2dt) - \ln S(t+dt)] + [\ln S(t+dt) - \ln S(t)] \\ Z_{2dt}(t) &= Z_{dt}(t+dt) + Z_{dt}(t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Así cada retorno de dos minutos es la suma de dos retornos sucesivos de 1 minuto, cada retorno de 5 minutos es la suma de 5 retornos sucesivos de 1 minuto, cada retorno de dos días es la suma de dos retornos sucesivos de 1 día, etc, En otras palabras, los retornos en escala temporal  $\tau = n\Delta t$  siendo  $\Delta t$  una escala temporal de referencia, equivalen a variables formadas por la agregación de  $n$  variables aleatorias de escala temporal de referencia.

Un análisis de Mandelbrot del mercado americano de algodón mostró que la distribución de retorno de los precios tenía la misma forma funcional para diversas escalas de tiempo, osea, las distribuciones poseían propiedades de invarianza por mudanza de escala temporal. Además, de tener colas con comportamientos en ley de potencia, más

largas que las distribuciones gaussianas. Basado en estas dos suposiciones el sugirió que las distribuciones empíricas fuesen modeladas por la distribuciones estables de Lévy.

Podemos verificar de la figura 5.8, un análisis de datos del S&P 500 [13], mostró que las distribuciones de retorno de alta frecuencia, cuando reescaladas de forma conveniente, colapsan en una misma curva maestra pudiendo así ser modeladas por una distribución de Lévy.

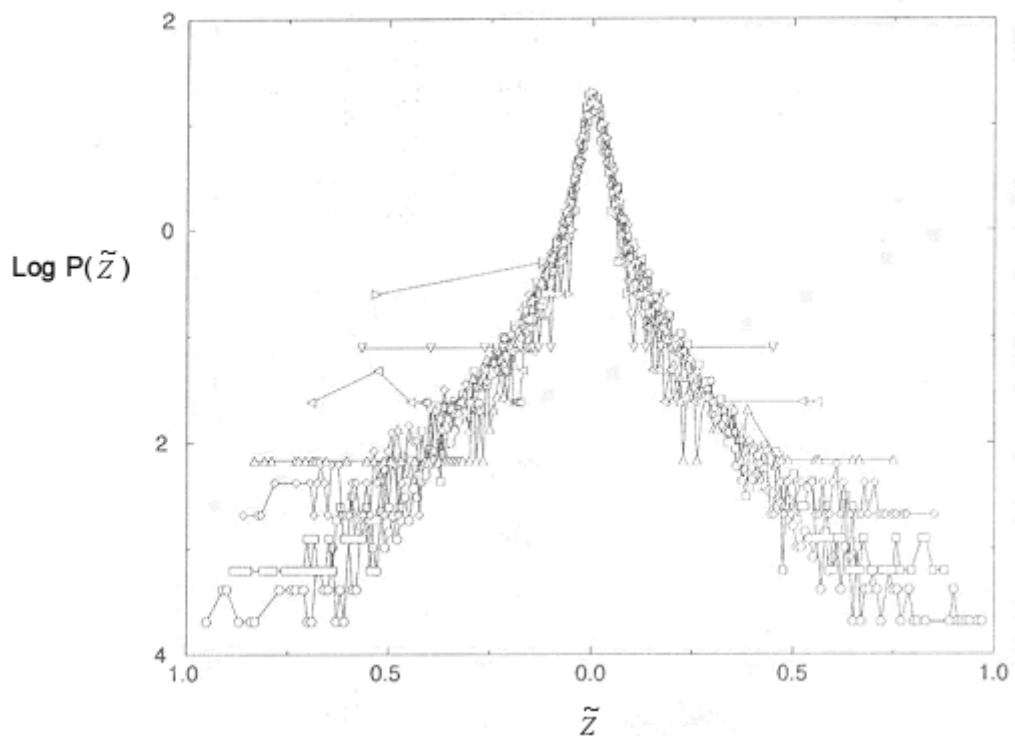


Fig 5.8 – Función densidad de probabilidad para retornos rescalados de alta frecuencia del S&P500 en horizontes de tiempo  $\Delta t = 1, 3, 10, 32, 100, 316$  y 1000 minutos -fuente [13]

La observación de las distribuciones de retorno en diversas escalas temporales  $\tau = n\Delta t$ , siendo  $\Delta t$  una escala temporal de referencia, permite analizar la convergencia de las distribuciones empíricas a la luz del TLC generalizado para la suma de  $n$  variables aleatorias independientes. Por tanto, las propiedades de invarianza por mudanza de escala temporal que son observadas en las distribuciones empíricas de retorno sugieren modelaje por distribuciones estables. Se espera así que para largos horizontes de tiempo cortos, debido a las colas

gordas en ley de potencia. Podemos observar también una invariancia de corto plazo de la forma funcional de los datos empíricos debido a la estabilidad de las distribuciones de Lévy. Sin embargo, esta estacionalidad de corto plazo es quebrada, habiendo una transición de régimen de Lévy para el régimen Gaussiano de largo plazo, debido a la finitud de los datos reales.

Por otro lado, el TLC se basa en la hipótesis de dependencia débil de las variables aleatorias, que en el caso del mercado financiero es violada en escalas de tiempo intradiaria ultracortas como es mostrada en la figura 5.9 para la correlación temporal entre datos sucesivos retarda la convergencia siguiendo el TLC, permitiendo aún una observación de nuevas formas de distribuciones estables en horizonte temporal intradiario

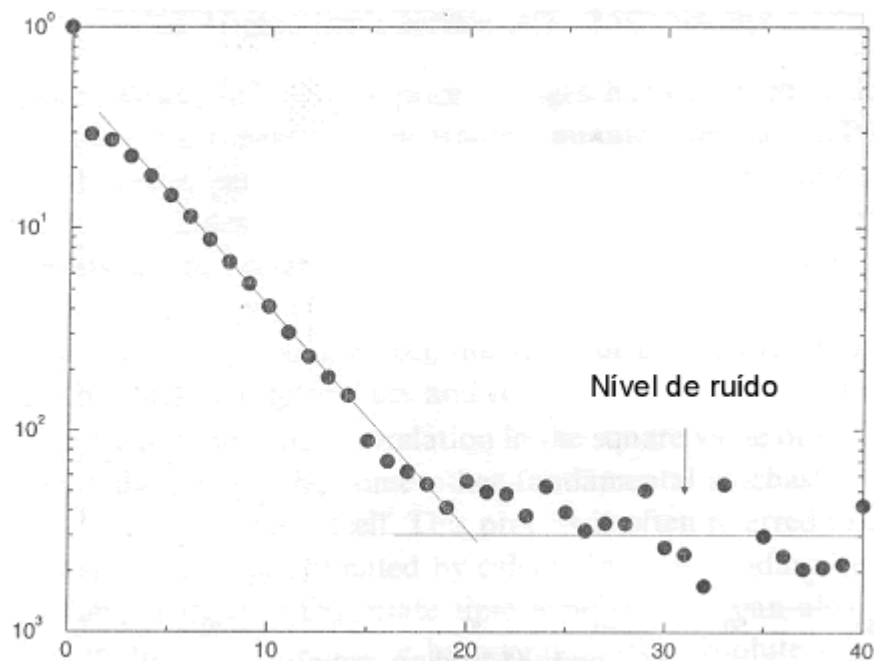


Fig 5.9 - Función de autocorrelación para S&P en gráfico semilogarítmico.

Una línea recta corresponde a un decaimiento exponencial con tiempo crítico  $t=4$  minutos. La correlación intradiaria en este mercado dura cerca de 20 minutos – fuente [14]



## CONCLUSIONES

El presente Trabajo Monográfico es de carácter cualitativo y en él mostramos de manera simple y esperamos que didáctica los fundamentos y herramientas que hacen de la econofísica, un área interdisciplinar realmente atractiva para los físicos.

- 1 Los Modelos físicos describen de manera cada vez más aproximada el comportamiento de los precios. Es así que los estudiamos como procesos físicos difusivos que siguen distribuciones diferentes a las normales.
- 2 Se mostró que el Modelo de Bachelier y el Modelo Estandar siguen procesos gaussianos. Sin embargo la realidad que nos muestran esos mismos datos, es que no siguen procesos gaussianos necesariamente, que su comportamiento es Fat-tailed o Heavy-tailed, y que para ello se hace uso de los procesos estocásticos de Lévy
- 3 Es así que el paradigma de las distribuciones Gaussianas es reemplazado por una forma más general: Las distribuciones de Lévy
- 4 Las simulaciones muestran que los precios se comportan de manera errática (random walk) y que se hace impredecible su eventual predicción.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Stanley H.E; Amaral L.A.N.; Canning D.; Gopikrishnan P.; Lee Y.; Liu Y., *Physica A*, Volume 269, Number 1, 1 July 1999 , pp. 156-169.
- [2] R. Mantegna and H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [3] Hughes, B. *Random Walks and Random Environments*. Vol. 1. Oxford, U.K.: Clarendon Press, 1996. ISBN:
- [4] Crank, J. *Mathematics of Diffusion*. 2nd ed. Oxford, U.K.: Clarendon Press, 1975.
- [5] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [6] J. Voit, *The Statistical Mechanics of Financial Markets*, Springer, Berlin, 2003.
- [7] Don S. Lemons. *An Introduction to Stochastic Processes in Physics*  
The Johns Hopkins university press, 2002
- [8] Svetlozar T. Rachev Christian menn Frank J. Fabozzi , *Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions Implications for Risk Management Portfolio Selection, and Option Pricing*  
Jhon Willey & Sons, Inc
- [9] *Numerical Methods for finance*  
Jhon A. D. Appleby David C. Edelman Jhon J. H. Miller, Chapman & Hall/CRC Financial Matematics Series
- [10] *Tools for Computational Finance*  
Seydel, Rüdiger U.  
3th ed., 2005, Series: Universitext
- [11] Website de la Bolsa de valores de SaoPaulo  
([www.bovespa.com.br](http://www.bovespa.com.br))
- [12] Antoniou I.1; Ivanov V.V.; Ivanov V.V.; Zrellov P.V., *Physica A*, Volume 331, Number 3, 15 January 2004 , pp. 617-638(22)
- [13] R N. Mantegna, H. E. Stanley, *Scaling behavior in the dynamics of an economic index* , *Nature*, Vol. 376 (1995), pp. 46-49.
- [14] Yanhui Liu, Parameswaran Gopikrishnan, Cizeau, Meyer, Peng, and H. Eugene Stanley, *Phys. Rev. E* 60, 1390 - 1400 (1999)

- [15] Giovani L. Vasconcelos, Braz. J. Phys. 34, 1039-1065 (2004)
- [16] Rosario Nunzio Mantegna, Phys. Rev. E 49, 4677 - 4683 (1994)
- [17] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Physics Investigation of Financial Markets', in Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi', Course CXXXIV, edited by F. Mallamace and H. E. Stanley (IOS Press, Amsterdam, 1997).
- [18] Paul Massonnat. Las variaciones de la Moneda y de los Precios. Capitulo III.P.80.DUNOD. Paris.1964
- [19] J.Fred Weston, Eugene F.Brigham. Manual de Administración Financiera.Vol.1.P.104. 8va,Edición.Emalsa S.A.Madrid.1986

## APENDICE

### Simulación de random Walk 1D

Iniciando en 0, saltos de un paso hacia arriba con probabilidad **p**, y hacia abajo con probabilidad **1-p**

Podemos representar la siguiente simulación: (código en MATLAB)

$$x_i(n) = x_i(n-1) + \delta$$

```
p=0.5;  
n=15;  
r=rand(1,n);  
step = (r<=p);  
impar=2.*step-1;  
cs=cumsum(impar);  
y=[0 cs];  
plot([0:n],y,'-r*');
```

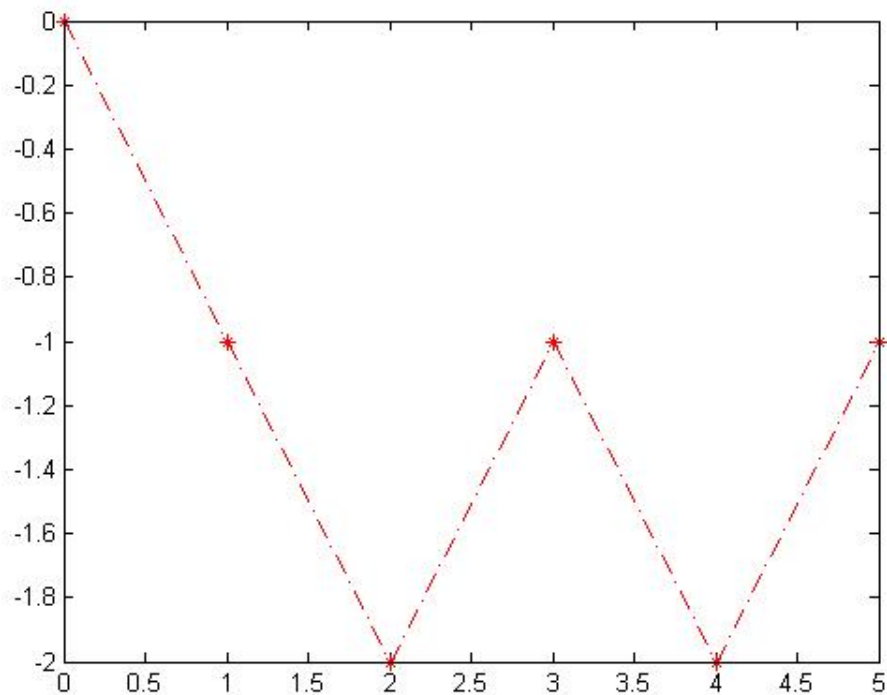


Fig A1 – Random walk 1D para n= 15 pasos

## Simulación del Movimiento Browniano estándar

Aquí el análogo continuo del random walk simétrico, cada incremento  $W(s+t)-W(s)$  es Gaussiano con distribución  $N(0, t)$  y los incrementos sobre intervalos disjuntos son independientes. Es típicamente simulado como un random walk aproximado en tiempo discreto

Podemos representar la siguiente simulación: (código en MATLAB)

$$W(t_{k+1}) = W(t_k) + \varepsilon_{t_k} \sqrt{\Delta t}$$

```
n=5000;  
dt=1;  
y=[0 cumsum(dt^0.5.*randn(1,n))];  
plot(0:n,y);
```

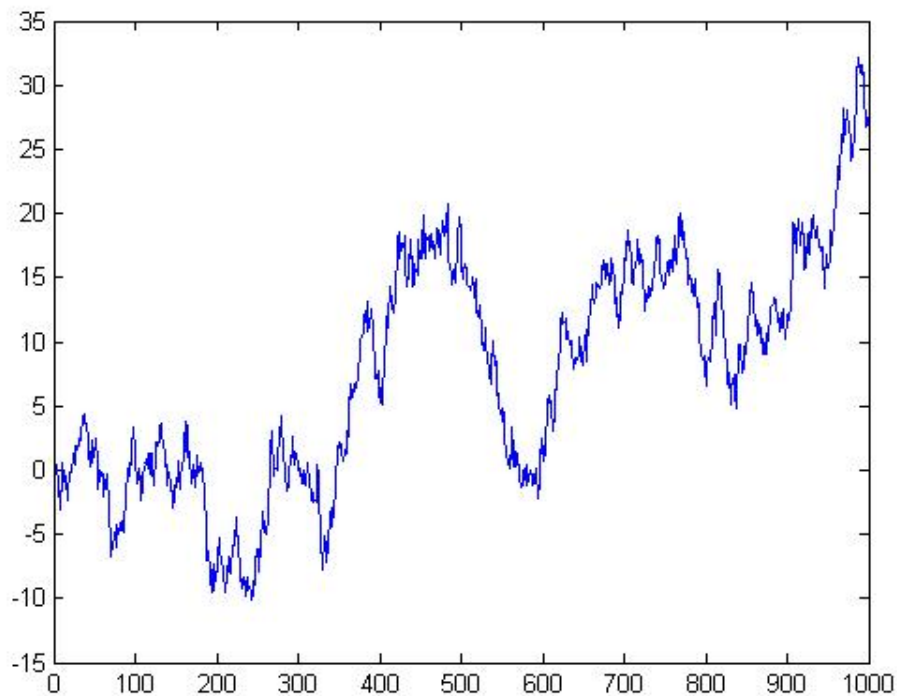


Fig A2 – Movimiento Browniano estándar para 5000 pasos.