Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Académico Profesional de Matemática

Teorema de factorización de Weierstrass

MONOGRAFÍA

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Teodoro Alfredo LLERENA LUCERO

ASESOR

Pedro Celso CONTRERAS CHAMORRO

Lima, Perú

2008

Referencia bibliográfica

Llerena, T. (2008). *Teorema de factorización de Weierstrass*. Monografía para optar el título profesional de Licenciado en Matemática. Escuela Académico Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

DEDICATORIA

A mis padres:
Ricardo y Juana
Y a Jorge, Lorena, Betty y Oswaldo mis hermanos.

Agradecimientos

Al Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro por la asesoría brindada y lo aprendido en clase.
A mis padres y hermanos por el apoyo invalorable que me supieron dar a lo largo de mi carrera
A mi entrañable amigo Gerónimo Lujan Saravia por sus consejos y su vocación de servicio para con su prójimo
A mi amigos Mg. Bartleby Ordoñez y Lic. Cesar Olano, que con su ayuda hicieron posible la realización de la presente.
A mis profesores de la E.A.P. de Matemática que ayudaron a mi formación académica.

Lima, Junio del 2008
Teodoro Alfredo Llerena Lucero

RESUMEN

“TEOREMA DE FACTORIZACIÓN DE WEIERSTRASS”

TEODORO ALFREDO LLERENA LUCERO
JUNIO DEL 2008

Asesor: Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
Grado Obtenido: Licenciado en Matemática

La presente monografía tiene como objetivo principal dar las condiciones para que una función se desarrolle en producto de Weierstrass.

El Teorema de Weierstrass es analizado con detenimiento y se aplica al desarrollo en producto de la función Gamma y de la función Z- de Riemann.

Palabras Claves: Desarrollo en Producto de Funciones

ABSTRAC

“WEIERSTRASS FACTORIZATION THEOREM”

TEODORO ALFREDO LLERENA LUCERO
JUNIO DEL 2008

Advisor: Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
Degree Obtained: Mathematic Licentiate

This paper has the main goal of living conditions for a function to have Weierstrass product decomposition.

The Weierstrass Theorem is analyzed deeply and is applied to get a product decomposition of the Gamma function and the Riemann Z function.

Keywords: Product decomposition of functions.

Índice

Cuestiones Previas

Convergencia Normal Una serie $\sum f_\nu$ de funciones, es llamada *normalmente convergente* en X si en cada punto x tiene una vecindad U que satisface $\sum |f_\nu|_U < \infty$ *"normal"*, aquí se refiere a la presencia de (semi-) normas y no tiene ninguno de los comunes significados esperados de la palabra. Debemos enfatizar que la *convergencia normal* es solo una definición para *series* y no para *sucesiones* generalmente. Sobre la base del criterio del mayorante de Weierstrass vemos que:

Toda serie que converge normalmente en X, es localmente convergente en X.

Teorema de Convergencia de Weierstrass Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas sobre un dominio D que converge compactamente hacia $f : D \to \mathbb{C}$. Entonces f es holomorfa en D y para cada k natural, la sucesión $f_n^{(k)}$ de las $k-\acute{e}simas$ derivadas converge compactamente en D hacia $f^{(k)}$.

Introducción

El objetivo principal de esta monografía es estudiar el *"Teorema del Producto de Weierstrass"*, y como consecuencia de éste, el *"Teorema de Factorización de Weierstrass"*. Usaremos los conceptos de divisores y divisores pricipales sobre $\mathbb{C}$, en este contexto el Teorema del Producto se reduce a mostrar que todo divisores es un divisor principal. Más aún como corolario del teorema del producto, probaremos que el cuerpo de las funciones meromorfas sobre $\mathbb{C}$ es el cuerpo de fracciones del dominio de integridad de todas las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.

Weierstrass desarrolló su teoría en 1876(Zur Theorie der eindentigen analytischen Functionen, Math. Werke 2, pp 77-124). Su principal objetivo fue establecer la *"expresión general"* para todas las funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, excepto una cantidad finita de puntos. Lo que fue nuevo y sensacional para los contemporáneos de Weierstrass en su construcción, fue la aplicación de la convergencia de los factores productos que no tienen influencia sobre el comportamiento de los ceros. Incidentalmente, de acuerdo a Weierstrass, su idea de forzar la convergencia adjuntando factores exponenciales fue gracias a la fórmula del producto

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\prod_{j\geq 1}\{(1+\frac{z}{j})(\frac{j+1}{j})^{-z}\} = z\prod_{j\geq 1}\{(1+\frac{z}{j})e^{-z\log(\frac{j+1}{j})}\}$$

que él atribuyó a Gauss antes que a Euler.

En 1898 H. Poincaré, en sus referencias sobre Weierstrass, acerca del descubrimiento de los factores $E_n(z)$, hizo el siguente comentario: *"La principal contribución de Weierstrass al desarrollo de la teoría de las funciones analíticas, fue el descubrimiento de los factores primarios"*. Sin embargo, casos especiales del teorema del producto ya habían aparecido en la literatura antes de 1876 en los trabajos de E. Betti. De su teorema del producto, Weierstrass inmediatamente dedujo el teorema sobre la representación de una función meromorfa como el cociente de dos funciones holomorfas. El atrajo la atención por ésto solamente. Para cumplir con nuestro objetivo, hemos dividido la monografía en tres capítulos:

El primero, desarrolla la teoría de los productos infinitos, así como sus teoremas de convergencia. Como caso importante damos dos pruebas del producto de Euler para la función Seno(una que es clásica y usa la diferenciación logarítmica y la otra que usa la fórmula de duplicación basada en la forma multiplicativa de Herglotz). La función Gamma de Euler es estudiada en el segundo capítulo, mostramos alguna de sus propiedades e inclusive estudiamos el problema de unicidad basado en su ecuación funcional. La fórmula asintótica de Stirling para el factorial de un número natural n es también comentada, así como la representación integral de la función gamma. En el tercer capítulo demostramos el Teorema del Producto de Weierstrass. Para ello introducimos los conceptos de divisores y divisores principales y reducimos el problema a mostrar que todo divisor es un divisor principal(como ya lo mencionamos al inicio de la introducción). También, mostramos tres ejemplos clásicos de productos, entre ellos el producto de Euler del Seno. Nuestro trabajo concluye con un breve comentario sobre las funciones σ, ζ y ρ deWeierstrass.

Capítulo I

Productos Infinitos de Funciones Holomorfas Los productos infinitos aparecen por primera vez en el año de 1579 con los trabajos de F. Vieta, más especificamente él demuestra la fórmula

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdots}}}$$

lo cual hace notar la complejidad de π. En 1655 J. Wallis descubrió el famoso producto

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n-1)} \cdots$$

Pero fue L. Euler quien trabajó por primera vez de manera sistemática con productos infinitos y formuló expansiones importantes de productos. El primer criterio de convergencia se debe a Cauchy(Cours D'analyse, p. 562). Sin embargo productos infinitos hallaron un lugar permanente en el análisis desde 1854 con los trabajos de Weierstrass.

1.1 Producto Infinitos

1.1.1 Productos Infinitos de Números

Si $(a_n)_{n\geq k}$ es una sucesión de números complejos, entonces la sucesión $(\prod\limits_{j=k}^{n} a_j)_{n\geq k}$ de productos parciales es llamada producto(infinito) $a(n)$ con los factores a_j . Escribiremos $\prod\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ o simplemente $\prod a_n$; en general $k = 0, k = 1$.

Observación Si haciendo analogía con las series, hubiéramos definido un producto $\prod a_n$ convergente cuando la sucesión de productos parciales tiene un límite a, entonces algunas patologías podrían acontecer, por ejemplo un producto podría ser convergente con valor igual a cero si justamente uno de los factores a_n fuera cero; por otro lado, el producto $\prod a_n$ podría ser cero incluso si ninguno de los factores simples fuera cero(por ejemplo si $|a_n| \leq q < 1;\ \forall n$). Entonces es importante tomar algunas precauciones respecto a los factores ceros y la convergencia a cero.

Introduciremos los productos parciales:

$$p_{m,n} := a_m a_{m+1} \cdots a_n = \prod_{j=m}^{n} a_j;\ k \leq m < n$$

y diremos que el producto $\prod a_n$ converge si existe un índice m tal que la sucesión $(p_{m,n})_{n \geq m}$ tiene un límite $\hat{a}_m \neq 0$. Llamaremos $a := a_k a_{k+1} \cdots a_{m-1} \hat{a}_m$, el valor del producto, el cual será denotado por $\prod a_n := a_k a_{k+1} \cdots a_{m-1} \hat{a}_m = a$. El número a es independiente del índice m, pues como $\hat{a}_m \neq 0$, tenemos que $a_n \neq 0;\ \forall n \geq m$, luego para cada índice fijo $l \geq m$, la sucesión $(p_{l,n})_{n \geq l}$, también tiene límite $\hat{a}_l \neq 0$ y $a := a_k a_{k+1} \cdots a_{l-1} \hat{a}_l$.

Propiedades

1. Un producto $\prod a_n$ es convergente si y sólo si a lo más una cantidad finita de factores son ceros y la sucesión de productos parciales consistente de los elementos diferentes de cero tiene un límite diferente de cero.

2. Un producto convergente $\prod a_n$ es cero si y sólo si al menos un factor es cero.

3. Si $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\hat{a} := \prod_{j=n}^{\infty} a_j$ existe para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aun, $\lim \hat{a}_n = 1$ y $\lim a_n = 1$. En efecto, podemos asumir que $a := \prod a_n \neq 0$, entonces $\hat{a} = \dfrac{a}{p_{0,n-1}}$. Como $\lim(p_{0,n-1}) = a$, síguese que $\lim \hat{a}_n = 1$. La igualdad $\lim a_n = 1$ se sigue porque, para todo $n, \hat{a}_n \neq 0$ y $a_n = \dfrac{\hat{a}_n}{\hat{a}_{n-1n}}$.

Ejemplos

a. Sea $a_0 := 0, a_n = 1$, para $n \geq 1$. Entonces $\prod a_n = 0$

b. Sea $a_n := 1 - \dfrac{1}{n^2}, n \geq 2$, entonces $p_{2,n} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{1}{n})$, luego $\prod_{n \geq 2} a_n = \dfrac{1}{2}$

c. Sea $a_n := 1 - \dfrac{1}{n}, n \geq 2$, entonces $p_{2,n} = \dfrac{1}{n}$ y por tanto $\lim p_{2,n} = 0$. El producto $\prod_{n \geq 2} a_n$ es divergente(desde que ningún factor se anula), sin embargo $\lim a_n = 1$

d. Sea $a_0, a_1, a_2, \cdots$ una sucesión de números con $a_n \geq 0$, y $\sum(1 - a_n) = +\infty$, entonces $\lim \prod_{j=0}^{n} a_j = 0$. En efecto:

$$0 \leq p_{0,n} = \prod_0^n a_j \leq \exp\left[-\sum_0^n (1-a_j)\right]; \, n \in \mathbb{N},$$

puesto que $t \leq e^{t-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y como $\sum(1-a_j) = +\infty$, se sigue que $\lim p_{0,n} = 0$.

1.1.2 Productos Infinitos de Funciones Sea X un espacio métrico localmente compacto. Las siguientes afirmaciones se siguen de los teoremas de continuidad:

1. Si $\prod f_n$ converge compactamente a f en X, entonces f es continua en X y la sucesión f_n converge compactamente en X a f.

2. Si $\prod f_n$ y $\prod g_n$ convergen compactamente en X, entonces $\prod f_n g_n$ converge y $\prod f_n g_n = (\prod f_n)(\prod g_n)$

3. Sea G un dominio en $\mathbb{C}$. Todo producto $\prod f_n$ de funciones f_n holomorfas en G que convergen compactamente en G, tiene un límite f que es función holomorfa en G. Esto se sigue del teorema de convergencia de Weierstrass.

Ejemplos

a. Las funciones $f_n := (1+\dfrac{2z}{2n-1})(1+\dfrac{2z}{2n+1})^{-1}$, $n \geq 1$, son holomorfas en el disco unitario. Tenemos que $p_{2,n} = \left(1+\dfrac{2}{3}z\right)\left(1+\dfrac{2z}{2n+1}\right)$ son holomorfas en el disco unitario, luego $\lim p_{2,n} = 1+\dfrac{2}{3}z$ y el producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge compactamente en el disco unitario a $f(z) = 1+2z$

b. Sea $f_n(z) = z$ para todo $n \geq 0$. El producto $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ no converge(incluso punto a punto) en el disco unitario, desde que la sucesión $p_{m,n} = z^{n-m+1}$ converge a cero para todo m.

Criterio de Convergencia Sea $f_n \in C(X)$, $n \geq 0$. Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que toda función $f_n, n \geq m$, tiene un logaritmo $\log f_n \in C(X)$. Si $\sum_{j\geq m} \log f_j$ converge compactamente en X a $g \in C(X)$, entonces $\prod f_n$ converge compactamente en X a $(f_0 f_1 \cdots . f_{m-1}) \exp g$.

Prueba Como la sucesión $g_n := \sum_{j=m}^{n} \log f_j$ converge compactamente a g, la sucesión $p_{m,n} = \prod_{j=m}^{n} f_j = \exp g_n$, converge compactamente en X a $\exp g$. Como $\exp g$ no se anula, se sigue la afirmación ■

1.2 Convergencia Normal Sea X un espacio métrico localmente compacto. Son consecuencias inmediatas de la definición. Si $\prod_{n\geq 0} f_n$ converge normalmente en X, entonces:

1. Para toda biyección $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, el producto $\prod_{n\geq 0} f_{\tau(n)}$ converge normalmente en X;

2. Todo subproducto $\prod_{j\geq 0} f_{nj}$ converge normalmente en X;

3. El producto converge conpactamente en X.

Teorema del Reordenamiento Si $\prod_{n\geq 0} f_n$ converge normalmente en X. Entonces existe una función $f : X \to \mathbb{C}$ tal que para toda biyección $\Upsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; el reordenamiento $\prod_{n\geq 0} f_{\tau(n)}$ converge compactamente a f en X.

Prueba Para $w \in E$, tenemos $\log(1+w) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} w^n$, de donde $|\log(1+w)| \leq |w|\,(1 + |w| + |w^2| + \cdots)$, luego $|\log(1+w)| \leq 2\,|w|$ si $|w| \leq \frac{1}{2}$. Ahora sea $K \subset X$ un conjunto compacto arbitrario y sea $g_n = f_n - 1$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|g_n|_k \leq \frac{1}{2}$ para $n \geq m$. Luego para $n \geq m$, $\log f_n = \sum \frac{(-1)^{j-1}}{j} g_n^j \in C(K)$, donde $|\log f_n|_K \leq 2\,|g_n|_k$. Notemos que $\sum_{n\geq m} |\log f_n|_k \leq \sum_{n\geq m} |g_n|_K < \infty$. Luego, por el Teorema del reordenamiento para series, para toda biyección σ de $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}/n \geq m\}$ la serie $\sum_{n\geq m} \log f_{\sigma(n)}$ converge uniformemente en K a $\sum_{n\geq m} \log f_n$. Luego se sigue que para dicho σ los productos $\prod_{n\geq m} \log f_{\sigma(n)}$ y $\prod_{n\geq m} f_n$ convergen uniformemente en K a la misma función límite. Pero una biyección arbitraria τ de $\mathbb{N}$ difiere solo de finitas transposiciones(que no tienen efecto sobre la convergencia) de una permutación $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $\sigma'(N_m) = N_m$. Luego existe una función $f : X \to \mathbb{C}$ tal que todo producto $\prod_{n\geq 0} f_{\tau(n)}$ converge compactamente en X a f ■

Corolario Sea $f = \prod_{n\geq 0} f_n$ converge normalmente en X. Entonces las siguientes afirmaciones siguen:

1. Todo producto $\hat{f}_n := \prod_{j\geq n} f_j$ converge normalmente en X , y $f = f_0 f_1 \cdots \hat{f}_n$

2. Si $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ es una partición (finita o infinita) de $\mathbb{N}$ en subconjuntos dos a dos disjuntos $N_1, ...N_k, ...$, entonces todo producto $\prod_{j\in N_k} f_j$ converge normalmente en X y $f = \prod_{k=1}^{\infty}(\prod_{j\in N_k} f_j)$.

Observación Algunos productos pueden converger compactamente sin ser convergentes normalmente, como muestra el siguiente ejemplo, $\prod_{n\geq 1}(1 + g_n), g_n := \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; es siempre verdad que $(1+g_{2n-1})(1+g_{2n}) = 1$; luego $P_{1,n} = 1$ para todo n par y $P_{1,n} = 1+\dfrac{1}{n}$ para todo n inpar.

El producto $\prod_{n\geq 1}(1 + g_n)$ converge compactamente en $\mathbb{C}$ a 1. En este ejemplo el subproducto $\prod_{n\geq 1}(1 + g_{2n-1})$ es no convergente.

1.2.2 Convergencia Normal de Productos de Funciones Holomorfas Sea G un dominio. El conjunto de ceros $Z(f)$ de cualquier función $f \neq 0$ holomorfa en G es localmente finito en G, luego $Z(f)$ es a lo mas infinito enumerable Para una cantidad finita de funciones $f_0 f_1 \ldots f_n \in \varphi(G), \varphi(G) = \{f : G \to G / f$ es holomorfa en $G\}$,

$Z(f_0 f_1 ... f_n) = \bigcup_{j=0}^{n} Z(f_j)$ y $O_c(f_0 f_1 ... f_n) = \sum_{j=1}^{n} O_c(f_j)$, $c \in G$ donde $O_c(f)$ denota el orden del cero de f en C.

Para productos infinitos, tenemos el siguiente resultado.

Proposición Si $f = \prod f_n$; $f_n \neq 0$ es un producto normalmente convergente en G de funciones holomorfas en G. Entonces $f \neq 0$, $Z(f) = \bigcup Z(f_n)$, $O_c(f) = \sum O_c(f_n)$

Prueba Sea $c \in G$ fijado. Como $f(c) = \prod f_n(c)$ converge, existe un índice m tal que $f_n(c) \neq 0$ para todo $m \geq n$. Por el corolario anterior $f = f_0 f_1 \ldots f_{n-1} \hat{f}_n$;

donde $\hat{f}_n := \prod_{n\geq 1} f_j \in \varphi(G)$ por el teorema de convergencia de Weierstrass. Se sigue que $O_c(f) = \sum_{j=o}^{n-1} O_c(f_j) + O_c(\hat{f}_n)$, con $O_c(\hat{f}_n) = 0$(desde que $\hat{f}_n(c) \neq 0$).

Esto prueba la regla de adición para productos infinitos. En particular, $Z(f) = \bigcup Z(f_j)$. desde que cada $f_j \neq 0$, todos los conjuntos $Z(f_j)$ son enumerables y por tanto su unión es enumerable y se sigue que $f \neq 0$ ■

Proposición Si $f = \prod f_n$; $f_n \in \varphi(G)$ es normalmente convergente en G, entonces la sucesión $\hat{f}_n = \prod_{j\geq n} f_j \ \in \varphi(G)$ converge compactamente en G a 1.

Prueba Sea $\hat{f}_m \neq 0$, entonces $A := Z(\hat{f}_m)$ es localmente finita en G. Todos los productos parciales $p_{m,n-1} \in \varphi(G)$; $n \geq m$, no se anulan en $G\backslash A$ y $\hat{f}_n(z) = \hat{f}_m(z).\left(\dfrac{1}{p_{m,n-1}(z)}\right)$ para todo $z \in G\backslash A$. Ahora la sucesión $\dfrac{1}{p_{m,n-1}}$ converge compactamente en $G\backslash A$ a $\dfrac{1}{\hat{f}_m}$. Luego, por el teorema de convergencia de Weierstrass, ésta sucesión tambien converge compactamente en G a 1.

1.2.3 Diferenciación Logarítmica La derivada logarítmica de una función meromorfa $h \in M(G)$; $h \neq 0$ es por definición la función $\dfrac{h'}{h} \in M(G)$. Para productos finitos $h = h_1 h_2 ... h_m; h_j \in M(G)$, tenemos(Fórmula de adición): $\dfrac{h'}{h} = \dfrac{h_1'}{h_1} + \dfrac{h_2'}{h_2} \cdots . + \dfrac{h_m'}{h_m}$.

Extenderemos esta fórmula a productos infinitos de funciones holomorfas.

Teorema de diferenciación Sea $f = \prod f_n$ un producto de funciones holomorfas que converge normalmente en G. Entonces $\sum \dfrac{f_n'}{f_n}$ es una serie de funciones meromorfas que converge normalmente en G y $\dfrac{f_n'}{f_n} = \sum \dfrac{f_n'}{f_n} \in M(G)$.

Prueba

1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f = f_0 f_1 ... f_{n-1} \hat{f}_n$ con $\hat{f}_n := \prod_{j\geq n} f_j$, luego $\dfrac{f_n'}{f_n} = \sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{f_j}{f_j} + \dfrac{\hat{f}_n'}{\hat{f}_n}$.
Como la sucesión $\hat{f}_n$ converge compactamente en G a 1, las derivadas $\hat{f}_n'$ convergen compactamente en G a 0 por Weierstrass. Para todo disco B con $\overline{B} \subset G$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que f_n no se anula en B; $n \geq m$ y la sucesión $\dfrac{\hat{f}_n'}{\hat{f}_n} \in O(B)$; $n \geq m$, converge

compactamente en a cero. Esto muestra que $\sum \frac{f_n'}{f_n}$ converge compactamente en G a $\frac{f'}{f}$

2) Ahora probaremos que $\sum \frac{f_n'}{f_n}$ converge normalmente en G. Sea $g_n := f_n - 1$. Podemos asignar un índice m a todo compacto K en G tal que todo conjunto de polos $P(\frac{f_n'}{f_n})$; $n \geq m$ es disjunto de K y

$$\sum_{n \geq m} \left| \frac{f_n'}{f_m} \right|_k = \sum_{n \geq m} \left| \frac{g_n'}{f_m} \right|_k < \infty \tag{$*$}$$

Podemos escoger m suficientemente grande tal que los conjuntos $Z(f_n) \cap K$; $n \geq m$ son vacíos y $\min_{z \in K} |f_n(Z)| \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \geq m$ (esto es posible, desde que la sucesión f_n converge compactamente a 1). Ahora, por las estimativas de Cauchy para derivadas, existe un compacto $L \supset K$ en G y una constante $M > 0$ tal que $|g_n\rceil_k \leq M\, |g_n|_l$ para todo n. Entonces $\left| \frac{g_n}{f_n} \right|_k \leq |g_n\rceil_k \,.(\min_{Z \in K} |f_n(Z)|)^{-1} \leq 2M\, |g_n|_l$ para $n \geq m$. Como $\sum |g_n|_l < \infty$ por hipótesis, $(*)$ sigue ■

Observación El teorema también se cumple *"Verbatim"* si la palabra *"normal"* es reemplazada por *"compacto"*.

1.3 El Producto $\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$.

El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2})$ es normalmente convergente en $\mathbb{C}$, desde que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$ converge normalmente en $\mathbb{C}$. En 1734 Euler descubrió que

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2});\ z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Daremos dos pruebas de esta fórmula.

1.3.1 Prueba standard(Usando diferenciación logarítmica y la descomposición en fracciones parciales para la cotangente). Llamando $f_n := 1 - \frac{z^2}{n^2}$ y $f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty} f_n$, se tiene

$$\frac{f_n'}{f_n} = \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ y } \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

Aquí el lado derecho es la función $\pi \cot \pi z$. Como también es la derivada logarítmica de $\operatorname{sen} \pi z$, tenemos que $f(z) = c \operatorname{sen} \pi z$ con $c \in \mathbb{C}^*$, y como $\lim\limits_{z \to 0} \frac{f(z)}{\pi z} = 1 = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}$, se sigue que $c = 1$. Sustituyendo valores especiales para z en (1), tenemos algunas fórmulas interesantes.

Para $z = \frac{1}{2}$ tenemos,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n.2n}{(2n-1)(2n-1)} \text{ (Wallis,1655)}$$

Para $z = 1$, obténemos la igualdad(trivial) $\frac{1}{2} = \prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^2})$(ejemplo 1). Si reemplazamos $z = i$ y usamos la identidad $\operatorname{sen} \pi z = \frac{i}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi})$, tenemos la fórmula $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n^2}) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$. Si usamos la identidad $\operatorname{sen} z \cos z = \frac{1}{2} Sen(2z)$, obtenemos $\cos \pi z \operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - (\frac{2z}{n})^2) = \pi z \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - (\frac{2z}{2n})^2) \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - (\frac{2z}{2n-1})^2)$, de donde obtenemos la representación del producto de Euler para el coseno

$$\cos \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}),\ z \in \mathbb{C}$$

En 1734-35, con su fórmula del producto para el seno, Euler comprobó los números

$$\zeta(2n) := \sum_{j=1}^{n} j^{-2n};\ n = 1, 2, ...$$

Por ejemplo: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ pues $f_n(z) = \prod\limits_{j=1}^{n}(1 + \frac{z^2}{j^2}) = 1 - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} j^{-2} \right) z^2 + \cdots$, converge compactamente a $f(z) := \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = 1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \cdots$, se sigue que $\frac{1}{2} f_n''(0) = -\sum\limits_{j=1}^{n} j^{-2}$ converge a $\frac{1}{2} f_n''(0) = -\frac{1}{6}\pi^2$ ■

1.3.2 Caracterización del Seno por la Fórmula de Duplicación Caracterizaremos ahora la función seno por propiedades que son fáciles de verificar para el producto

$z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$. La igualdad $\operatorname{sen} 2z = 2\operatorname{sen} z\cos z$ es una.

Fórmula de Duplicación $\operatorname{sen} 2\pi z = 2\operatorname{sen}\pi z\operatorname{sen}\pi(z+\frac{1}{2})$, $z\in\mathbb{C}$.

Primero mostraremos los siguientes lemas.

Lema(Forma aditiva de Herglotz) Sea $[0,r)\subset G$ con $r>1$. Sea $h\in\varphi(G)$ y supongamos que satisface la fórmula aditiva de duplicación $2h(2z)=h(z)+h(z+\frac{1}{2})$ cuando $z, z+\frac{1}{2}; 2z\in[0,r)$. Entonces h es constante.

Prueba Sea $t\in(1,r)$ y $M=\max\{|h'(z)/z\in[0,t)|\}$. Desde que $4h'(2z)=h'(z)+h'(z+\frac{1}{2})$ y $\frac{1}{2}z$ y $\frac{1}{2}(z+1)$ siempre pertenecen al intervalo $[0,t]$ cuando z está ahi, se sigue que $4M\le 2M$ y por tanto $M=0$. Por el teorema de la Identidad $h'=0$ y en consecuencia h es constante $\blacksquare$

Lema(Forma multiplicativa de Herglotz) Sea $G\subset\mathbb{C}$ un dominio que contiene un intervalo $[0,r)$; $r>1$. Supongamos que $g\in\varphi(G)$ y satisface una fórmula multiplicativa de duplicación $g(2z)=cg(z)g(z+\frac{1}{2})$ cuando $z, z+\frac{1}{2}, 2z\in[0,r)$(con $c\in\mathbb{C}$, $c\neq 0$). Entonces $g(z)=ae^{bz}$ con $1=ace^{\frac{1}{2}b}$.

Prueba La función $h=\frac{g'}{g}$ que es meromorfa en G es holomorfa en el intervalo $[0,r)$ y $2h(2z)=\frac{g'(2z)}{g(2z)}=h(z)+h(z+\frac{1}{2})$ cuando $z.z+\frac{1}{2}$; $2z\in[0,r)$. Por la forma aditiva de Herglotz, h es constante. Se sigue que $g'=bg$ con $b\in\mathbb{C}$, luego $g(z)=ae^{bz}$. Además $1=ace^{\frac{1}{2}b}$ $\blacksquare$

El siguiente teorema ahora sigue fácilmente.

Teorema(Caracterización del Seno por la Fórmula de Duplicación) Sea f una función entera par que se anula en el intervalo $[0,1]$ solamente en los puntos 0 y 1, y que tiene ceros de primer orden ahí. Supongamos que f satisface la fórmula de duplicación

$f(2z)=cf(z)f(z+\frac{1}{2})$, $z\in\mathbb{C}$, donde $c\in\mathbb{C}$, $c\neq 0$.

Entonces $f(z)=2c^{-1}\operatorname{sen}\pi z$.

Prueba La función $g(z) = \dfrac{f(z)}{\operatorname{sen}\pi z}$ es holomorfa y nunca cero en un dominio $G \supset [0, r)$, $r > 1$. Tenemos que $g(2z) = cg(z)g(z + \frac{1}{2})$. Por la forma multiplicativa de Herglotz, $f(z) = ae^{bz}\operatorname{sen}\pi z$ con $ace^{\frac{1}{2}b} = 2$. Desde que $f(-z) = f(z)$ se sigue que $b = 0$ ■

1.3.3 Prueba de la fórmula de Euler usando el teorema anterior La función $s(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2})$ es entera y par y tiene ceros precisamente en los puntos de $\mathbb{Z}$, y ellos son ceros de primer orden. Desde que $s'(0) = \lim_{z\to 0}\dfrac{s(z)}{z} = 1$, el teorema anterior garantiza que $\operatorname{sen}\pi z = \pi s(z)$ cuando s satisface una fórmula de duplicación. Esto puede ser verificado inmediatamente. Desde que s converge normalmente se sigue que

$$s(2z) = 2z\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{(2z)^2}{(2n)^2})\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{(2z)^2}{(2n-1)^2}) = 2s(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{(2z)^2}{(2n-1)^2}) \qquad (*)$$

Un cálculo da

$$(1 - \frac{1}{4n^2})(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}) = \frac{1 + \dfrac{2z}{2n-1}}{1 + \dfrac{2z}{2n+1}}(1 - \frac{(2z+1)^2}{4n^2});\ n \geq 1$$

Luego se sigue que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{4n^2})\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}) = (1+2z)\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{(2z+1)^2}{4n^2}) = 2s(z + \frac{1}{2})$$

Por tanto $(*)$ es una fórmula de duplicación: $s(2z) = 4a^{-1}s(z)s(z + \frac{1}{2})$, donde $a = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{4n^2}) \neq 0$ ■

Observación La prueba antererior es debida al matemático americano E. H. Moore.

Capítulo II

La Función Gamma El problema de extender la función $n!$ a argumentos reales y hallar la mas simple posible "función factorial" con valores $n!$ sobre $n \in \mathbb{N}$ llevó a Euler en 1729 a desarrollar la función Γ. El dió el producto infinito

$$\Gamma(z+1) = \frac{1.2^z}{1+z} \cdot \frac{2^{1-z}3^z}{2+z} \cdot \frac{3^{1-z}4^z}{3+z} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^z(1+\frac{z}{n})^{-1}$$

como una solución. Euler consideró sólo argumentos reales; Gauss en 1811, admitió números complejos también. El 21 de Noviembre de 1811, él escribió a Bessel que ya tenía una solución para el problema de los factoriales generales, a dicha función la denotó por Π.

Las funciones de Euler y Gauss son conectadas por las ecuaciones

$$\Gamma(z+1) = \Pi(z), \Gamma(n+1) = \Pi(n) = n!; \text{ para } n = 1, 2, 3, ...$$

La función Γ es meromorfa en $\mathbb{C}$, todos sus polos son de primer orden y ocurren sobre los puntos $-n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Esta función tiene el valor $n!$ en el punto $n+1$ (antes que en n) por razones puramente históricas. La notación de Gauss $\Pi(z)$ no trascendió. Legendre introdujo la notación que ahora es estandar $\Gamma(z)$ en lugar de $\Pi(z-1)$; desde entonces uno habla de la función gamma.

2.1 La Función de Weierstrass

$$\Delta(z) = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

Vamos a coleccionar una serie de propiedades básicas de la función Δ, incluyendo $\Delta \in \varphi(\mathbb{C})$; $\Delta(z) = z\Delta(z+1) \ldots \pi\Delta(1-z) = \operatorname{sen} \pi z$

2.1.1 La función auxiliar $H(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$. Veamos algunas propiedades de la función H

(1) El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$. converge normalmente en $\mathbb{C}$.

Prueba Sea $B_n = B_n(0)$, $n \geq 1$. Es suficiente mostrar que

$$\sum_{m\geq 1}^{\infty}\left|1-(1+\frac{z}{m})e^{-\frac{z}{m}}\right|_{B_n} < \infty$$

En la identidad

$$1-(1-w)e^{w} = w^2[(1-\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})w+...+(\frac{1}{m!}-\frac{1}{(m+1)!}w^{m-1}+\cdots]$$

todas las expresiones en paréntesis sobre el lado derecho (...) son positivos. Luego

$$|1-(1-w)e^{w}| \leq |w|^2\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{1}{m!}-\frac{1}{(m+1)!}) = |w|^2 \text{ cuando } |w| \leq 1$$

Para $w \leq -\frac{z}{m}$, se sigue que $\left|1-(1+\frac{z}{m})e^{-\frac{z}{m}}\right| \leq \frac{|z|^2}{m^2}$ si $|z| \leq m$, por tanto

$$\sum_{m\geq n}^{\infty}\left|1-(1+\frac{z}{m})e^{-\frac{z}{m}}\right|_{B_n} \leq n^2\sum_{m\geq n}^{\infty}\frac{1}{m^2} < \infty \blacksquare$$

Gracias a (1), $H(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$. es una función entera. Además H tiene ceros, cada uno de primer orden, precisamente en los puntos $-n$; $n \geq 1$. La identidad

$$-H(z)H(-z) = z^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) = \pi^{-1}z\,\mathrm{sen}\,\pi z \tag{2}$$

síguese inmediatamente, ésta dice que $H(z)$ consiste esencialmente de *"parte de los factores del producto Seno"*. Además,

$$H(1) = e-^{\gamma},\ \text{con } \gamma = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n) \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Prueba Desde que $\prod_{j=1}^{n}(1+\frac{1}{j}) = n+1$, se tiene que

$$H(1) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{j=1}^{n}(1+\frac{1}{j})\exp(-\frac{1}{j}) = \lim_{n\to+\infty} \exp(\log(n+1) - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j})$$

Claramente $H(1) > 0$, luego $\gamma = -\log H(1) = \lim_{n\to+\infty}(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \log(n+1)) \in \mathbb{R}$. Como $\log(n+1) - \log n = \log(1+\frac{1}{n})$ y $\lim_{n\to+\infty}\log(1+\frac{1}{n}) = 0$, la afirmación se sigue ∎

Observación El número real γ es llamado constante de Euler; $\gamma = 0,55772156...$

Usando que $n^z = e^{z\log n}$, tenemos que

$$z\prod_{j=1}^{n}(1+\frac{z}{j})e^{-\frac{z}{j}} = \frac{z(z+1)...(z+n)}{n!n^z}\exp\left[z(\log n - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j})\right]$$

por tanto H puede ser escrita como

$$H(z) = e^{-\gamma z}\lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)...(z+n)}{n!n^z} \tag{4}$$

2.1.2 La Función Entera Δ

La función entera $\Delta(z) = e^{\gamma z}H(z)$ tiene ceros, todos de primero orden, precisamente sobre los puntos $-n$, $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\overline{\Delta(z)} = \Delta(\overline{z})$, $\Delta(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Se sigue entonces de las fórmulas (3) y (4) de arriba, que

$$\Delta(1) = 1, \Delta(z) = \lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)...(z+n)}{n!n^z} \tag{1}$$

De esto y desde que $\lim_{n\to+\infty}\frac{z+n+1}{n} = 1$, obtenemos inmediatamente la ecuación funcional $\Delta(z) = z\Delta(z+1)$. La función sen y la función Δ son conectadas por la siguiente ecuación

$$\pi\Delta(z)\Delta(1-z) = \operatorname{sen}\pi z \tag{2}$$

Prueba Esto es claro por la fórmula (2) anterior, desde que

$$\Delta(z)\Delta(1-z) = -z^{-1}\Delta(z)\Delta(-z) = -z^{1}H(z)H(-z) \ \blacksquare$$

Mas adelante necesitaremos la siguiente fórmula de multiplicación

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)}\Delta(\frac{1}{k})\Delta(\frac{2}{k})\cdots\Delta(\frac{k-1}{k}) = \sqrt{k} \text{ para } k = 2, 3, ... \tag{3}$$

Prueba Usaremos la bien conocida ecuación

$$2^{k-1}\prod_{j=1}^{k-1}\operatorname{sen}(\frac{j}{k}\pi) = k \tag{$*$}$$

(El camino más simple para deducir ésto es : $\operatorname{sen} z = (2i)^{-1}e^{iz}(1 - e^{-2iz})$ y $\prod_{j=1}^{k-1} e^{\frac{i\pi j}{k}} = e^{\frac{i\pi(k-1)}{2}} = i^{k-1}$, escribimos el producto de Senos en $(*)$ en la forma $(2i)^{1-k}i^{k-1}\prod_{j=1}^{k-1}(1 - e^{-\frac{2i\pi j}{k}})$, y usamos la identidad

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{k-1} = \frac{w^k - 1}{w - 1} = \prod_{j=1}^{k-1}(w - e^{-\frac{2i\pi j}{k}})$$

para $w = 1$

Desde que $\prod_{j=1}^{k-1}\Delta(\frac{j}{k}) = \prod_{j=1}^{k-1}\Delta(1 - \frac{j}{k})$, (2) y (*) implican que

$$\prod_{j=1}^{k-1}(\Delta(\frac{j}{k}))^2 = \prod_{j=1}^{k-1}\Delta(\frac{j}{k})\Delta(1 - \frac{j}{k}) = \prod_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{j}{k}\pi = \frac{k}{(2\pi)^{k-1}}$$

Como $\Delta(x) > 0$ para $x > 0$, la afirmación se sigue tomando raíces $\blacksquare$

2.2 La Función Gamma Γ Definimos la función Gamma como $\Gamma(z) = \dfrac{1}{\Delta(z)}$ y trasladaremos los resultados obtenidos para Δ en propiedades de la función Γ.

2.2.1 Propiedades de la función Gamma Nuestro primer resultado es inmediato: $\Gamma(z)$ es holomorfa y no se anula en $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$; todo punto $-n, n \in \mathbb{N}$, es un polo de primer orden de $\Gamma(z)$. Más aún

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \text{ con } \Gamma(1) = 1(\text{ Ecuación Funcional }) \tag{F}$$

La ecuación funcional (F) es un resultado central, por ejemplo, si $\Gamma(z)$ es conocida en la franja $0 < \mathrm{Re}(z) \leq 1$, entonces (F) puede ser inmediatamente usado para hallar sus valores en la franja adyacente $1 < \mathrm{Re}(z) \leq 2$. En general, se sigue inductivamente de (F), para $n \geq 1$; $n \in \mathbb{N}$, que

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)...(z+n-1)\Gamma(z), \Gamma(n) = (n-1)! \tag{1}$$

También podemos determinar los residuos de la función gamma

$$res_{-n}\Gamma = \frac{(-1)^n}{n!}, \, n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Prueba Desde que $-n$ es un polo de primer orden de gamma, sabemos que

$$res_{-n}\Gamma = \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z)$$

Por (1),

$$res_{-n}\Gamma = \lim_{z \to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)...(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)...(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \blacksquare$$

La fórmula (1) para $\Delta(z)$ induce la representación como producto(denominada representación de Gauss):

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)} \tag{G}$$

Se sigue inmediatamente de (1) y (G) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n)n^z} = 1 \tag{3}$$

La fórmula (2), para Δ puede ser reescrita como un suplemento de Euler:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \tag{E}$$

Se sigue inmediatamente de la definición de $\Gamma(z)$ que

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z}) \text{ y } \Gamma(x) > 0 \text{ para } x > 0$$

Como $|n^z| = n^x$ y $|z+j| \geq x+j$ para todo z con $x = \operatorname{Re} z > 0$, la fórmula (G) implica que

$$|\Gamma(z)| \leq \Gamma(x) \text{ para todo} z \in \mathbb{C} \text{ con } x = \operatorname{Re} z > 0 \tag{4}$$

En particular, $\Gamma(z)$ es acotada en toda franja $\{z \in \mathbb{C}/r \leq x \leq s\}$ con $0 < r < s < \infty$.

Notemos algunas consecuencias de (E):

a. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; más generalmente, $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$; $n \in \mathbb{N}$

b. $\Gamma(\frac{1}{2}+z)\Gamma(\frac{1}{2}-z) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \operatorname{sen} \pi z}$

c. $|\Gamma(iy)^2| = \frac{\pi}{\operatorname{sen} h\pi i}, \left|\Gamma(\frac{1}{2}+iy)\right|^2 = \frac{\pi}{\cos h\pi y}$

d. $\int_0^1 \log \Gamma(t)dt = \log \sqrt{2\pi}$

Prueba (a) y (b) siguen directamente de (E). La parte (c) se sigue de (b) y observando que $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z})$, $\operatorname{sen} ht = -i \operatorname{sen} it$, y $\cos ht = \cos it$. Para (d), el suplemento de Euler (E) implica que $\int_0^1 \log \Gamma(t)dt + \int_0^1 \log \Gamma(1-t)dt = \log \pi - \int_0^1 \log \operatorname{sen} \pi t dt$. Luego (d) sigue inmediatamente de esto y la fórmula (3) para ■

2.2.2 La Derivada Logarítmica $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ es una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ que satisaface las ecuaciones

$$\psi(z+1)=\psi(z)+z^{-1}, \psi(1-z)-\psi(z)=\pi\cot\pi z \tag{1}$$

Éstas fórmulas pueden ser deducidas de las siguientes series de expansión.

Proposición(Representación en fracciones parciales de $\psi(z)$)

$$\psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}-\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{z+j}-\frac{1}{j})$$

donde la serie converge normalmente en $\mathbb{C}$.

Prueba Desde que $\Gamma=\dfrac{1}{\Delta}$, tenemos que $\psi=-\dfrac{\Delta'}{\Delta}$. Luego la afirmación sigue del teorema del capítulo I, por diferenciación logarítmica de

$$\Delta(z)=ze^{\gamma z}\prod_{j=1}^{\infty}(1+\frac{z}{j})e^{-\frac{z}{j}} \blacksquare$$

Corolario 1 $\Gamma'(1)=\psi(1)=-\gamma$; $\psi(k)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{k-1}-\gamma$, para $k=2,3,....$

Prueba $\Gamma'(1)=\psi(1)=-\gamma-1-\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j})=-\gamma-1+1=-\gamma$. La afirmación para $\psi(k)$ entonces sigue inductivamente por (1) $\blacksquare$

Corolario 2 Representación en fracciones parciales de $\psi'(z)=\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(z+j)^2}$, donde la serie converge normalmente en $\mathbb{C}$.

Prueba Esto es claro desde que series normalmente convergentes de funciones meromorfas pueden ser difrenciadas término a término $\blacksquare$

Observación Note que las series para ψ y ψ' son esencialmente parte de la serie de fracciones parciales para $\pi\cot\pi z$ y $\dfrac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2\pi z}$, respectivamente.

2.2.3 El Problema de Unicidad

La función exponencial es la única función $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa en 0 y con $F'(0) = 1$ que satisface la ecuación funcional $F(z + w) = F(z)F(w)$. Puede también la función Γ ser caracterizada por su ecuación funcional $F(z + 1) = zF(z)$?. Para empezar notemos que ésta ecuación es satisfecha por todas las funciones $F = g\Gamma$ donde g es una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ con período 1. El siguiente teorema fue probado por H.Wielandt en 1939.

Teorema de Unicidad Sea F una función holomorfa en el semiplano derecho $T = \{z \in \mathbb{C}/ \operatorname{Re} z > 0\}$. Supongamos que $F(z + 1) = zF(z)$ y también que F es acotada en la franja $S = \{z \in \mathbb{C}/1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$. Entonces $F = a\Gamma$ en T , donde $a = F(1)$.

Prueba La ecuación $\nu(z + 1) = z\nu(z)$ también sigue para $\nu = F - a\Gamma$ que es holomorfa en T. Por tanto ν tiene una extensión meromorfa a $\mathbb{C}$. Sus polos si tiene, sólo pueden ocurrir en $0, -1, -2, ...$. Desde que $\nu(1) = 0$, se sigue que $\lim_{z \to 0} z\nu(z) = 0$; entonces ν continua holomorfa en 0. Y como $\nu(z + 1) = z\nu(z)$, ν también puede ser continuada de manera holomorfa a todo punto $-n$; $n \in \mathbb{N}$. Desde que Γ restringida a S es acotada, entonces ν restringida a S es acotada. Pero entonces ν es también acotada en la franja $S_0 = \{z \in \mathbb{C}/0 \leq \operatorname{Re} z < 1\}$(para $z \in S_0$ con $|\operatorname{Im} z| \leq 1$, ésto síguese por continuidad; para $|\operatorname{Im} z| > 1$ se sigue, desde que $\nu(z) = \dfrac{\nu(z + 1)}{z}$, pues ν restringida a S es acotada). Como $\nu(1 - z)$ y $\nu(z)$ asumen los mismos valores en S_0, la función $q(z) = \nu(z)\nu(1-z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y acotada en S_0. Del teorema de Liouville se sigue que $q(z) = q(1) = \nu(1)\nu(0) = 0$. Entonces $\nu = 0$, es decir $F = a\Gamma$ ∎

2.2.4 Fórmulas de Multiplicación La función Γ satisface las ecuaciones

$$\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{k})\Gamma(z + \frac{2}{k})...\Gamma(z + \frac{k-1}{k}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)} k^{\frac{1}{2}-kz}\Gamma(kz);\ k = 2, 3, ... \qquad (*)$$

Prueba Sea $F(z) := \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{k})\Gamma(z+\frac{2}{k})...\Gamma(z+\frac{k-1}{k})}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)}k^{\frac{1}{2}-kz}}$, entonces F es una función holomorfa sobre $\mathbb{C}^-$, donde $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$. Nosotros tenemos que

$$F(z+1) = k\Gamma\left(\frac{z}{k}\right)^{-1} F(z)\Gamma\left(z + \frac{z+k}{k}\right) = zF(z)$$

Más aún, $F(1) = 1$. Desde que $|k^z| = k^x$ y $\Gamma(z) \leq |\Gamma(x)|$ cuando $x = \mathrm{Re}(z) > 0$, F es acotada en la franja $\{z \in \mathbb{C}/1 \leq \mathrm{Re}(z) < 2\}$. Por el teorema de unicidad de la sección anterior, se sigue que $F = \Gamma$; y por tanto $F(kz) = \Gamma(kz)$, es decir , se sigue $(*)$ ∎

Observación Si hacemos $k = 2$ en $(*)$ tenemos la siguiente(Fórmula de duplicación)

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\ \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$$

que ya fue establecida por Legendre alla en 1811. La identidad $(*)$ también contiene la siguiente: Fórmula de Multiplicación para $\operatorname{sen}\pi z$. Para todo $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $\operatorname{sen} k\pi z = 2^{k-1} \operatorname{sen}\pi z \operatorname{sen}\pi(z+\frac{1}{k}) \operatorname{sen}\pi(z+\frac{2}{k}) \cdots \operatorname{sen}\pi(z+\frac{k-1}{k})$.

Prueba Desde que $1 - kz = k(-z + \frac{1}{k})$ las fórmulas de Euler implican que

$$\pi(senk\pi z)^{-1} = \Gamma(kz)\Gamma(k(-z+\frac{1}{k}) = (2\pi)^{1-k}\prod_{j=0}^{k-1}\left[\Gamma(z+\frac{j}{k})\Gamma(-z+\frac{1+j}{k})\right]$$

Es claro que $\prod_{j=0}^{k-2}\Gamma(-z+\frac{1+j}{k}) = \prod_{j=0}^{k-1}\Gamma(1-z-\frac{j}{k})$ y por tanto

$$\begin{aligned}\pi(\operatorname{sen} k\pi z)^{-1} &= (2\pi)^{1-k}\Gamma(z)\Gamma(1-z)\prod_{j=1}^{k-1}\left[\Gamma(z+\frac{j}{k})\Gamma(1-(z+\frac{j}{k})\right] \\ &= (2\pi)^{1-k}\pi(\operatorname{sen}\pi z)^{-1}\prod_{j=1}^{k-1}\left[\pi(\operatorname{sen}\pi(z+\frac{j}{k}))^{-1}\right] \quad ∎\end{aligned}$$

La fórmula de duplicación nos permite establecer otro teorema de unicidad.

TeoremadeUnicidad Sea F una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ y que es positiva en $(0, \infty)$ y satisface $F(z+1) = zF(z)$ y $\sqrt{\pi}F(2z) = 2^{2z-1}F(z)F(z+\frac{1}{2})$.

Entonces $F = \Gamma$

Prueba Para $g = \frac{F}{\Gamma}$, que es meromorfa sobre $\mathbb{C}$, tenemos que $g(2z) = g(z)g(z+\frac{1}{2})$ y $g(z+1) = g(z)$. Además $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego por un lema anterior $g(z) = ae^{bz}$, donde b es ahora real . Desde que g tiene período 1, se sigue que $b = 0$ y por tanto $g(z) = 1$, es decir $F = \Gamma$ ∎

2.3 Representación Integral de Euler

Euler observó alrededor del año 1729, en su primer trabajo sobre la función Gamma, que la secuencia de factoriales $1, 2, 6, 24, ...$ es dada por la integral $n! = \int_0^1 (-\log \tau)^n d\tau$, $n \in \mathbb{N}$. En general, $\Gamma(z+1) = \int_0^1 (-\log \tau)^z d\tau$ cuando $\mathrm{Re}(z) > -1$; Si reemplazamos z por $z+1$ y $t = -\log \tau$, la ecuación anterior toma la siguiente forma

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt,\ z \in \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) > 0\} \qquad (+)$$

La integral impropia del lado derecho de $(+)$ fue llamada como integral de Euler de segundo tipo por Legendre en 1811. Su existencia no es obvia, nosotros probaremos que ésta converge y es holomorfa.

2.3.1 Convergencia de la integral de Euler Comenzamos estableciendo el siguiente resultado.

Criterio Mayorante Sea $g : D \times [a, \infty) \to \mathbb{C}$ una aplicación continua, donde $D \subset \mathbb{C}$ es una región y $a \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe una función M definida en $[a, \infty)$ tal que

$|g(z,t)| \leq M(t)$ para todo $z \in D$; $t \geq a$, y que $\int_a^{\infty} M(t)dt \in \mathbb{R}$ existe. Entonces $\int_a^{\infty} g(z,t)dt$ converge uniforme y absolutamente en D. Si $g(z,t)$ es una función holomorfa sobre D para todo $t \geq a$, entonces $\int_a^{\infty} g(z,t)dt$ es holomorfa en D.

Prueba Sea $\varepsilon > 0$. Escogemos $b \geq a$ tal que $\int_b^\infty M(t)dt \leq \varepsilon$. Entonces

$$\left| \int_b^c g(z,t)dt \right| < \int_b^c g(z,t)dt \leq \int_b^c M(t)dt \leq \varepsilon$$

para todo $z \in D$ y $c \geq b$. La convergencia uniforme y absoluta de la integral en D se sigue del criterio de convergencia de Cauchy. Si G es siempre holomorfa en D para cada t fijado, entonces $\int_r^s g(z,t)dt$ es holomorfa en D para todo r y s tal que $a < r < s < \infty$. Entonces se tiene que $\int_a^\infty g(z,t)dt$ es holomorfa en D ∎

Para $r \in \mathbb{R}$, denotaremos con S_r^+(respectivamente S_r^-) el semiplano

derecho $\operatorname{Re}(z) \geq r$ (respectivamente el semiplano izquierdo $\operatorname{Re}(z) \leq r$). Denotemos también, por brevedad, $u(z) := \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt, v(z) := \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$

Teorema de Convergencia

a. La integral $v(z)$ converge uniforme y absolutamente en S_r^- para todo $r \in \mathbb{R}$; más aún $v(z)$ es una función holomorfa sobre $\mathbb{C}$.

b. La integral $u(z)$ converge uniforme y absolutamente en S_r^+ para todo $r > 0$. Más aún, $u(z)$ es holomorfa sobre $T = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$ y

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} \text{ para todo } z \in T \qquad (*)$$

Prueba (a) Para todo $z \in S_r^-$, tenemos, $|t^{z-1}| \leq t^{r-1}$. Desde que

$$\lim_{t \to \infty} t^{r-1} e^{-\frac{1}{2}t} = 0$$

existe un $M > 0$ tal que $|t^{z-1}e^{-t}| \leq Me^{-\frac{1}{2}t}$ para todo $z \in S_r^-$, $t \geq 1$. Desde que $\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}t} dt = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$ y $t^{z-1}e^{-t}$ es una función holomorfa sobre $\mathbb{C}$ para todo $t \geq 1$, la afirmación acerca de (b) se sigue del criterio mayorante.

(b) Sea $s = \dfrac{1}{t}$, entonces

$$u(z) = \int_1^\infty e^{-\frac{1}{s}} s^{-z-1} ds$$

Si $r > 0$, entonces $\left| e^{-\frac{1}{s}} s^{-z-1} \right| \leq s^{-r-1}$ para todo $z \in S_r^+$, y más aun

$$\int_1^\infty s^{-z-1} ds = r^{-1}.$$

El criterio mayorante prueba entonces la primera afirmación acerca de u. Ahora mostremos $(*)$. De la identidad

$$\int_\delta^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \int_\delta^1 t^{z+j-1} dt = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{z+j} - \delta^z \sum_0^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\delta^j}{z+j}$$

que es verdadero para todo $\delta \in (0,1)$ (teorema sobre intercambio del orden de integración y series), y desde que $\mathrm{Re}(z) > 0$ y el último sumando tiende a cero cuando δ tiende a cero , se concluye $(*)$ ■

2.3.2 Teorema de Euler La integral $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ converge uniforme y absolutamente en toda franja $\{z \in \mathbb{C}/a \leq \mathrm{Re}(z) \leq b\}$; $0 < a < b < \infty$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ para todo $z \in T = \{z \in \mathbb{C}/\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Prueba La convergencia se deduce del teorema de convergencia anterior, desde que las integrales coinciden con $F = u + v$ en t. Para F, holomorfa sobre T, es inmediato que

$F(z+1) = zF(z), F(1) = 1, |F(z)| \leq |F(\mathrm{Re}(z)|$, para todo $z \in T$. En particular, F es acotada si $1 \leq \mathrm{Re}(z) < 2$. Que $F = \Gamma$ se sigue del nuestro primer teorema de unicidad

■

Observación La $\Gamma-$ integral puede ser usada para determinar un número de integrales, por ejemplo $\int_0^\infty e^{1-\alpha} dx = \alpha^{-1}\Gamma(\alpha^{-1})$ para $\alpha > 0$; en particular, $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

En efecto: Para $t = x^{\alpha}$, tenemos $t^{\alpha^{-1}-1} = x^{1-\alpha}$ y $dt = \alpha x^{\alpha-1}dx$, luego

$$\Gamma(\alpha^{-1}) = \int_0^{\infty} t^{\alpha^{-1}-1}e^{-t}dt = \int_0^{\infty} x^{1-\alpha}e^{-x^{-\alpha}}x^{\alpha-1}dx = \alpha\int_0^{\infty} e^{-x^{\alpha}}dx$$

La última igualdad es clara, desde que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ■

Un argumento inductivo usando integración por partes implica que

$$\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+\frac{1}{2});\ n \in \mathbb{N}$$

2.4 Fórmula de Stirling Recibe el nombre de Stirling la siguiente fórmula asintótica $n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{a_n}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ésta fórmula sugiere visualizar una *"función de error"* μ que sea holomorfa sobre $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ para la función Γ tal que una ecuación $\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}e^{\mu z}$, con $\lim\limits_{z\to\infty} \mu(z) = 0$ se cumpla en todo $\mathbb{C}^-$, donde $z^{z-\frac{1}{2}} = \exp\left[(z-\frac{1}{2})\log(z)\right]$. Observemos que la fórmula de Stirling estaría contenida en esta última fórmula, pues $n\Gamma(n) = n!$ Veremos que $\mu(z) = \log\Gamma(z) - (z-\frac{1}{2})\log(z) + z - \frac{1}{2}\log(2\pi)$ es una función de error ideal.

2.4.1 Definición de Stieltjes de la función $\mu(z)$. Las funciones reales

$$P(t) = t - \|t\| - \frac{1}{2} \text{ y } Q(t) = \frac{1}{2}(t - \|t\| - (t - \|t\|)^2) \qquad (*)$$

donde $\|t\|$ denota la función máximo entero de t , son continuas en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ y tienen período igual a 1. La función $Q(t)$ es una antiderivada de $-P(t)$ en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Además $0 \leq Q(t) \leq \frac{1}{8}$ y Q es continua en $\mathbb{R}$.

El punto de partida de nuestras futuras consideraciones es la siguiente definición:

$$\mu(z) = -\int_0^{\infty} \frac{P(t)}{z+t}dt = \int_0^{\infty} \frac{Q(t)}{(z+t)^2}dt \qquad (**)$$

que es holomorfa sobre $\mathbb{C}^-$. Probaremos que ésta definición es legítima y que las integrales en $(**)$ convergen localmente uniforme en $\mathbb{C}^-$ a la misma función.Sea $\delta \in (0, \pi]$ y $\varepsilon > 0$. Para todo $t \geq 0$, tenemos $\left|\dfrac{Q(t)}{(z+t)^2}\right| \leq \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{2}\delta}\dfrac{1}{(\varepsilon+t)^2}$, si $z = |z|\, e^{i\varphi}$ con $|z| \geq \varepsilon$ y $|\varphi| \leq \pi - \delta$. La segunda integral entonces converge localmente uniforme en $\mathbb{C}^-$ por el criterio mayorante. La primera integral también converge localmente uniforme en $\mathbb{C}^-$ desde que $-\int_r^s \dfrac{P(t)}{z+t}dt = \left.\dfrac{Q(t)}{z+t}\right|_r^s + \int_r^s \dfrac{Q(t)}{(z+t)^2}dt$ para $0 < r < s < \infty$(la integración por partes es permitida porque Q es continua).

Inmediatamente vamos a obtener una Ecuación Funcional para la función μ :

$$\mu(z) - \mu(z+1) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - t}{z+t}dt = (z + \frac{1}{2})\log(1 + \frac{1}{z}) - 1, z \in \mathbb{C}^- \qquad (***)$$

Prueba Observe que $P(t+1) = P(t)$ y escribimos

$$\mu(z+1) = -\int_0^\infty \frac{P(t+1)}{z+t+1}dt = -\int_1^\infty \frac{P(t)}{z+t}dt = \mu(z) - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - t}{z+t}dt$$

El integrando del lado derecho tiene a $(z + \frac{1}{2})\log(z+t) - t$ como una antiderivada; $(***)$ sigue desde que $\log(z+1) - \log(z) = \log(1 + \frac{1}{z})$ en todo $\mathbb{C}^-$.

2.4.2 Fórmula de Stirling Para cada $\delta \in (0, \pi]$, denotamos por W_δ el sector angular $\{|z|\, e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^x / \, |\varphi| \leq \pi - \delta\}$, que omite el eje real negativo. El siguiente teorema describe las relaciones entre las funciones $\Gamma(z)$ y $\mu(z)$, así como el *"growth"* de $\mu(z)$.

Teorema (Fórmulas de Stirling)

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)} \ , \ z \in \mathbb{C}^- \\
|\mu(z)| &\leq \frac{1}{8}\frac{1}{\cos^2\dfrac{1}{2}\varphi(z)}\frac{1}{|z|} \ , \ z = |z|\, e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^- \\
|\mu(z)| &\leq \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\delta(z)}\frac{1}{|z|} \ , \ z \in W_\delta \ , \ 0 < \delta < \pi
\end{aligned}$$

Prueba Desde que $Q(t) \leq \dfrac{1}{8}$ y $|z+t| \geq |z|\cos\dfrac{1}{2}\varphi \geq |z|\operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta$, las inecuaciones se siguen de $(**)$. Demostraremos ,mas aún, que $F(z) := z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)}$ que pertenece a las funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}^-$ satisfacen las hipotésis del primer teorema de unicidad. La ecuación funcional $(***)$ para $\mu(z)$ inmediatamente implica que

$$\begin{aligned} F(z+1) &= (z+\frac{1}{2})^{z+\frac{1}{2}} e^{-z-1} e^{\mu(z)-(z+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{z})+1} \\ &= z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)} = zF(z) \end{aligned}$$

Además, F es acotada en la franja $S = \{z \in \mathbb{C}/1 \leq \mathrm{Re}(z) < 2\}$. En efecto $e^{\mu(z)}$ es acotada ahí. Para todo $z = x+iy = |z|\, e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^-$, tenemos $\left| z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \right| = |z|^{x-\frac{1}{2}} e^{-y\varphi}$. Si $z \in S$ y $|y| \geq 2$, entonces $x - \frac{1}{2} \leq 2$, $|z| \leq 2y$, y $-y\varphi \leq -\frac{1}{2}\pi\,|y|$; para cada z se sigue que $\left| z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \right| \leq 4y^2 e^{-\frac{1}{2}\pi|y|}$. Desde que $\lim\limits_{|y|\to\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}\pi|y|} = 0$, F es acotada en S.

Que $\Gamma(z) = az^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)}$ se sigue ahora del primer teorema de unicidad. Para probar que $a = \sqrt{2\pi}$, substituimos el lado derecho en la fórmula de duplicación de Legendre. despues de simplificar, obtenemos

$$\sqrt{2\pi} e^{\mu(2z)-\mu(z)-\mu(z+\frac{1}{2})} = a(1+\frac{1}{2z})^z.$$

Desde que $\lim\limits_{x\to\infty} \mu(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{2x})^x = \sqrt{e}$, se sigue que $a = \sqrt{2\pi}$ ∎

Observación Las fórmulas de Stirling prueban que

$$\log\Gamma(z) = \frac{1}{2}\log 2\pi + (z-\frac{1}{2})\log z - z + \mu(z)$$

Para números reales la fórmula de Stirling puede ser escrita como

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}x^x e^{-x+\dfrac{\theta(x)}{8x}} \;;\; x > 0, 0 < \theta < 1$$

Para $x = n$, ésta es una versión más precisa de la fórmula original de Stirling como mencionamos al principio. La fórmula de Stirling también puede ser vista como una *"ecuación asintótica"* $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}z^{z-\dfrac{1}{2}}e^{-z}$, o $\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z}(\dfrac{z}{e})^z$; donde el símbolo $\sim$ significa que el cociente del lado izquierdo y del lado derecho convergen uniformemente a 1 cuando z tiende a ∞ en todo sector angular W_δ agujereado en 0.

2.5 La Función Beta

La integral impropia

$$B(w, z) = \int_0^1 t^{w-1}(1-t)^{z-1}dt \qquad (*)$$

converge compacta y absolutamente en el cuadrante $T \times T = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 / \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0\}$, y es por tanto holomorfa en $z \in T$(respectivamente $w \in T$) para $w \in T$ fijado ($z \in T$); la prueba al igual que para la $\Gamma-$ integral, usa un test mayorante. La función $B(w, z)$ es llamada como función Beta de Euler . Legendre se refirió en 1811 a la Función Beta como la integral de Euler de primer tipo. El principal resultado de la teoría de la función Beta es,

Identidad de Euler:

$$B(w, z) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)} \text{ para todo } w, z \in T$$

2.5.1 Prueba de la identidad de Euler Necesitaremos los siguientes resultados

a. $B(w, 1) = w^{-1}$, $B(w, z+1) = \dfrac{z}{w+z}B(w, z)$

b. $|B(w, z)| \leq B(\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z)$.

Prueba (a) La primera fórmula es trivial , la segunda es probada como sigue:

$$\begin{aligned}(w+z)B(w,z+1)-zB(w,z) &= (w+z)\int_0^1 t^{w-1}(1-t)^z dt - z\int_0^1 t^{w-1}(1-t)^{z-1}dt \\ &= \int_0^1 \{wt^{w-1}(1-t)^z - t^w z(1-t)^{z-1}\}dt \\ &= [t^w(1-t)^z]_0^1 = 0\end{aligned}$$

(b) Esto es claro, desde que $|(1-t)^{w-1}t^{z-1}| \leq (1-t)^{\operatorname{Re} w-1}t^{\operatorname{Re} z-1}$ ∎

Para probar la identidad de Euler, ahora fijamos $w \in T$, y definimos la función $F(z) = B(w,z)\Gamma(w+z)$ que es una función holomorfa sobre T. Por (a), $F(1) = \Gamma(w)$ y $F(z+1) = zF(z)$. Desde que $|\Gamma(w+z)| \leq \Gamma(\operatorname{Re}(w+z))$, la parte b) muestra que F es acotada en la franja $\{z \in \mathbb{C}/1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$, tenemos por el primer teorema de unicidad que $F(z) = \Gamma(w)\Gamma(z)$ ∎

Observación Las siguientes fórmulas integrales, válidas para todo $w, z \in T$, son usuales

$$B(w,z) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\operatorname{sen}\varphi)^{2w-1}(\cos\varphi)^{2z-1}d\varphi = \int_0^\infty \frac{s^{w-1}}{(1+s)^{w+z}}ds \qquad (+)$$

Prueba En $(*)$, sustituímos $t = \operatorname{sen}^2\varphi($ respectivamente $s = \tan^2\varphi$); entonces

$$(1+s)^{-1} = \cos^2\varphi \text{ y } ds = 2\tan\varphi(\cos\varphi)^{-2}d\varphi \ ∎$$

2.5.2 Prueba clásica de la identidad de Euler Como B es holomorfa en T, es suficiente verificar la fórmula para números reales $w > 0, z > 0$(en virtud al teorema de la Identidad).

La siguiente prueba la elaboró Dirichlet en 1839. Primero, tenemos

$$(1+s)^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-(1+s)t}dt; \ \operatorname{Re} s > -1, z > 0$$

(inclusive $z \in T$). Sustituyendo $w+z$ por z y usando (+), hallamos que

$$\Gamma(w+z)B(w,z) = \int_0^{\infty} s^{w-1} \left[\int_0^{\infty} t^{w+z-1} e^{-(1+s)t} dt \right] ds; \; w > 0, z > 0$$

Por teoremas de análisis real, invertir el orden de integración es legítimo para todo número real $w > 0, z > 0$; y por tanto

$$\Gamma(w+z)B(w,z) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} s^{w-1} e^{-ts} ds \right] t^{w+z-1} e^{-t} dt$$

La integral interior es igual a $\Gamma(w)t^{-w}$. Luego

$$\Gamma(w+z)B(w,z) = \Gamma(w) \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \Gamma(w)\Gamma(z) \; \blacksquare$$

Observación Dirichlet examinó cuidadosamente el teorema usado para invertir el orden de integración.

Capìtulo III

El Teorema de Factorización de Weiestrass

Si $f \neq 0$ es una función holomorfa sobre un dominio G, su conjunto de ceros $Z(f)$ es locamente finito en G por el teorema de la Identidad. Es natural plantearse el siguiente problema: Sea T un subconjunto localmente finito de G, y supongamos que a cada punto $a \in T$ hemos asignado un número natural $d(a) \geq 1$. Construir funciones holomorfas en G que tengan a T como su conjunto de ceros y, más aún cuyos ceros en cada punto $d \in T$ posean orden $n(d)$. No es claro que dichas funciones existan. Por supuesto, si T es finito, los polinomios:

$$\prod_{a\in T}(z-a)^{d(a)} \quad \text{o} \quad z^{d(0)} \prod_{a\in T\setminus\{0\}}(1-\tfrac{z}{a})^{d(a)}$$

dan el resultado deseado (el factor inicial $z^{d(0)}$ aparece sólo si $0 \in T$). En 1876, Weierstrass extendió esta construcción de producto a funciones enteras trascendentales: Para una sucesión dada $a_j \in \mathbb{C} - \{0\}$, con $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = \infty$, él construyó productos de la forma

$$z^m \prod_{j\geq 1}\left[\left(1-\frac{z}{a_j}\right)\exp(\frac{z}{a_j}+\frac{1}{2}(\frac{z}{a_j})^2+\cdots+\frac{1}{k_j}(\frac{z}{a_j})^{k_j})\right]$$

y forzó su convergencia normal en G por una adecuada elección de números reales k_j.

3.1 El Teorema del Producto de Weierstrass para $\mathbb{C}$.

3.1.1 Divisores y divisores principales Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Una aplicación $d : D \to \mathbb{C}$ cuyo soporte $S = \{z \in D / d(z) \neq 0\}$ es localmente finito en D es llamado un divisor sobre D. Toda función h meromorfa en D cuyo conjunto de ceros $Z(h)$ y cuyo conjunto de polos $P(h)$ son discretos en D determina, por $z \mapsto o_z(h)$, un divisor (h) sobre D con soporte $Z(h) \cup P(h)$; dichos divisores son llamados divisores principales sobre D. Entonces el problema planteado en la introducción está ahora contenido en el siguiente problema:

Probar que todo divisor es un divisor principal.

Dos divisores $d, \hat{d}$ (como aplicaciones en $\mathbb{Z}$) pueden ser sumadas de manera natural, la suma $d + \hat{d}$ es también un divisor. Se sigue fácilmente que:

El conjunto $Div(D)$ de todos los divisores sobre D es un grupo abeliano, con la adición como operación de grupo.

Un divisor d es llamado positivo y denotado por $d \geq 0$ si $d(z) \geq 0$ para todo $z \in D$. Por ejemplo las funciones holomorfas f tienen divisores positivos (f). El conjunto $M(D)^x$ de todas las funciones meromorfas en D que tienen conjuntos de ceros discretos es un grupo abeliano multiplicativo; más precisamente, $M(D)^x$ es el grupo de unidades del anillo $M(D)$. Si $D = G$ es un dominio, entonces $M(G)$ es un cuerpo, entonces $M(G)^x = M(G) - \{0\}$. El siguiente resultado es inmediato:

La aplicación $M(D)^x \to Div(D)$, $h \mapsto (h)$, es un homomorfismo de grupos. Más aún,

a. $f \in M(D)^x$ es holomorfa en D si y solamente si $(f) \geq 0$

b. $f \in M(D)^x$ es una unidad y holomorfa en D si y solamente si $(f) = 0$

Todo divisor d es la diferencia de dos divisores positivos: $d = d^+ - d^-$, donde $d^+(z) = \max(0, d(z))$, $d^-(z) = \max(0, -d(z))$.

Se sigue inmediatamente que: d es un divisor principal sobre D si d^+ y d^- son divisores principales sobre D . En efecto, sea $d^+ = (f), d^- = (g)$, con f y g holomorfas sobre D . Entonces, para $h = \dfrac{f}{g} \in M(D)^x$, tenemos $(h) = (\dfrac{f}{g}) = (f) - (g) = d^+ - d^- = d$ ■

El problema planteado arriba es reducido al siguiente problema: Para todo divisor positivo d sobre D, construir una función f holomorfa sobre D con $(f) = d$.

3.1.2 Productos de Weierstrass Sea $d \neq 0$ un divisor positivo sobre D. El soporte $T \neq \varnothing$ de d es a lo más enumerable(pues T es localmente finito en D. De los puntos de $T - \{0\}$ formamos, de alguna forma, una sucesión(finita o infinita) $a_1, a_2, ...$ tal que todo punto $a \in T - \{0\}$ aparece exactamente $d(a)$ veces en la sucesión. Diremos que $a_1, a_2, ...$ es una sucesión correspondiente a d. Un producto

$$f = z^{d(0)} \prod_{j \geq 1} f_j \qquad (*)$$

con f_j holomorfa sobre D para cada $j \geq 1$, es llamado un producto de Weierstrass para el divisor $d \geq 0$ en D si las siguientes condiciones son satisfechas:

1. f_j no tiene ceros en $D - \{a_j\}$ y $o_{a_j}(f_j) = 1$; $j \geq 1$.
2. El producto $\prod_{j \geq 1} f_j$ converge normalmente en D.

Proposición Si f es un producto de Weierstrass para $d \geq 0$,entonces $(f) = d$; o sea, el conjunto de ceros de f holomorfa sobre D es el soporte T de d, y todo punto $a \in T$ es un cero de f de orden $d(a)$.

Prueba Por (2), f es holomorfa sobre D. Todo punto $a \in T$, $a \neq 0$, ocurre exactamente $d(a)$ veces en la sucesión a_j. La condición 1) y el teorema de convergencia normal para producto de funciones holomorfas(aplicado en cada una de las componentes conexas de D) implican que $o_z(f) = d(z)$ para todo $z \in D$. Luego $(f) = d$ ■

Los siguientes resultados se siguen inmediatamente de la definición:

Si $z^{d(0)} \cdot \prod_{j \geq 1} f_j$ y $z^{\hat{d}(0)} \cdot \prod_{j \geq 1} \hat{f}_j$ son productos de Weierstrass para $d \geq 0$ y $\hat{d} \geq 0$ respectivamente, entonces $z^{d(0)+\hat{d}(0)} \cdot \prod_{j \geq 1} g_j$ es un producto de Weierstrass para $d + \hat{d}$, donde $g_{2j-1} = f_j$ y $g_{2j} = \hat{f}_j$.

Construiremos productos de Weierstrass para todo divisor positivo d. En la construcción debemos escoger factores f_j holomorfos sobre D que satisfagan las condiciones 1) y 2). Cuando $D = \mathbb{C}$, dichos factores pueden ser explícitamjente especificados.

3.1.3 Factores de Weierstrass

Las funciones enteras

$$
\begin{aligned}
E_0(z) &= 1 - z \\
E_n(z) &= (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n}\right); \; n \geq 1
\end{aligned}
$$

Son llamadas factores de Weierstrass. Observamos inmediatamente que

1. $E_n'(z) = -z^n \exp(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n})$; para $n \geq 1$

2. $E_n(z) = 1 + \sum_{j > n} b_j z^j$; donde $\sum_{j > n} |b_j| = 1$, para $n \geq 0$

Prueba Sea $t_n(z) = z + \dfrac{z^2}{2} + \cdots + \dfrac{z^n}{n}$; entonces $(1-z)\,t'_n(z) = 1 - z^n$

$E'_n(z) = -\exp t_n(z) + (1-z)t'_n(z)\exp t_n(z) = -z^n \exp t_n(z)$, ésto prueba (1). Por otro lado sea $\sum_{j\geq 0} b_j z^j$ la serie de Taylor para E_n alrededor de 0. El caso $n = 0$ es trivial. Para $n \geq 1$, tenemos $\sum_{j>n} j b_j z^{bj-1} = -z^n \exp t_n(z)$ por la parte 1). Desde que la función del lado derecho tiene un cero de orden n en 0 y todos los coeficientes de Taylor de $\exp t_n(z)$ alrededor de 0 son positivos, vemos que $b_1 = \cdots = b_n = 0$ y $b_j \leq 0$, luego $|b_j| = -b_j$ para $j > n$. La parte (2), se sigue porque $b_0 = E_n(0) = 1$ y $0 = E_n(1) = 1 + \sum_{j>n} b_j$ ∎

De (2), obtenemos inmediatamente (3) $|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1}$; $n = 0, 1, 2, ...$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq 1$.

3.1.4. El Teorema del Producto de Weierstrass Aqui denotaremos con d un divisor positivo sobre $\mathbb{C}$ y $(a_j)_{j\geq 1}$ una sucesión correspondiente a d.

Lema Si $(k_j)_{j\geq 1}$ es cualquier sucesión de números naturales tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{r}{a_j}\right|^{k_j+1} < \infty$ para todo real $r > 0$, entonces $z^{d(0)} \cdot \prod_{j\geq 1} E_{k_j}(\dfrac{z}{a_j})$ es un producto de Weierstrass para d.

Prueba Por la parte (3) referente a los factores de Weierstrass tenemos que

$$\left|E_{k_j}(\frac{z}{a_j}) - 1\right| \leq \left|\frac{r}{a_j}\right|^{k_j+1} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}, |z| < r$$

y para todo j con $|a_j| \geq r$. Desde que $\lim_{j\to\infty} |a_j| = \infty$, para todo $r > 0$ existe un $n(r)$ tal que $|a_j| \geq r$ para todo $j > n(r)$. Luego $\sum_{j>n(r)} \left|E_{k_j}(\dfrac{z}{a_j}) - 1\right|_{B_r(0)} \leq \sum_{j>n(r)} \left|\dfrac{r}{a_j}\right|^{k_j+1} < \infty$ para todo $r > 0$, probando la convergencia normal del producto. Desde que el factor $E_{k_j}(\dfrac{z}{a_j})$ que es holomorfa en $\mathbb{C}$ no tiene ceros en $\mathbb{C} - \{a_j\}$ y tiene ceros de primer orden en a_j, tenemos un producto de Weierstrass para d ∎

El Teorema del Producto Para todo divisor positivo $d \geq 0$ sobre $\mathbb{C}$, existe un producto de Weierstrass, es decir,

$$z^{d(0)}\prod_{j\geq 1}E_{j-1}(\frac{z}{a_j}) = z^{d(0)}\prod_{j\geq 1}[(1-\frac{z}{a_j})\exp\left(\frac{z}{a_j}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_j}\right)^2+\cdots+\frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_j}\right)^{j-1}]$$

Prueba Dado $r>0$, escogemos $m\in\mathbb{N}$ tal que $|d_j|>2r$, para todo $j>m$. Se sigue que $\sum_{j>m}\left|\frac{r}{a_j}\right|^j < \sum_{j>m}2^{-j}<\infty$. Luego para $k_j=j-1$ tenemos una desigualdad como en el lema anterior, lo cual prueba el teorema ■

Observación La elección de $k_j=j-1$ no es óptima. Es suficiente, por ejemplo, exigir que $k_j>\alpha\log j$ con $\alpha>1$. En efecto, desde que $|a_j|>e\cdot r$ para casi todo j, tenemos que $\left|\frac{r}{a_j}\right|^{k+1_j} < j^{-\alpha}$ y por tanto se verifica la desigualdad del lema anterior.

3.1.5 Consecuencias El teorema del producto de Weierstrass tiene importantes corolarios.

Teorema de Existencia Todo divisor sobre $\mathbb{C}$ es un divisor principal.

Prueba Es clara ■

Teorema de Factorización Toda función entera $f\neq 0$ puede ser escrita en la forma $f(z)=e^{g(z)}\cdot z^m\cdot\prod_{j\geq 1}[\left(1-\frac{z}{a_j}\right)\exp(\frac{z}{a_j}+\frac{1}{2}(\frac{z}{a_j})^2+\cdots+\frac{1}{k_j}(\frac{z}{a_j})^{k_j})]$ donde g es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ y $z^m.\prod_{j\geq 1}$ ... es un(posiblemente vacío) producto de Weierstrass para el divisor (f).

Prueba Por el teorema del producto de Weierstrass ,existe un producto de Weierstrass h para el divisor (f). Entonces $\frac{h}{f}$ es una función que no tiene ceros, y por tanto es de la forma $\exp g$ para alguna función entera g ■

El siguiente teorema es una consecuencia simple del teorema de existencia.

Teorema(Representación en cociente de funciones meromorfas**)** Para toda función meromorfa h en $\mathbb{C}$, existen dos funciones enteras f y g,sin ceros en común en $\mathbb{C}$, tal que $h=\frac{f}{g}$.

Prueba Sea $h \neq 0$.Divisores positivos sobre $\mathbb{C}$ con soportes disjuntos son definidos por $d^{+}(z) = \max(0, o_z(h)$ y $d^{-}(z) = \max(0, -o_z(h))$; ellos satisfacen $(h) = d^{+} - d^{-}$. Sea g una función entera escogida tal que $(g) = d^{-}$. Entonces $g \neq 0$. Para $f = gh$, se sigue que $(f) = (g) + (h) = d^{+} \geq 0$, cuando f es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por construcción, $Z(f) \cap Z(g)$ es vacío ∎

En particular hemos probado el siguiente resultado:

El cuerpo $M(\mathbb{C})$ de funciones meromorfas sobre $\mathbb{C}$ es el cuerpo de fracciones del dominio de integridad $O(\mathbb{C})$ de las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.

Criterio de la Raiz Las siguientes afirmaciones sobre una función entera $f \neq 0$ y un número natural $n \geq 1$ son equivalentes:

a. Existe una función holomorfa que es raiz $n-$ ésima de f, o sea, existe una función entera g tal que $g^n = f$.

b. Todo número natural $o_z(f)$, $z \in \mathbb{C}$, es divisible por n.

Prueba Sólo la implicación $(b) \implies (a)$ necesita ser probada.Por hipótesis, existe un divisor positivo d sobre $\mathbb{C}$ con $nd = (f)$. Sea h una función entera escogida tal que $(h) = d$. Entonces $v = \dfrac{f}{h^n}$ es holomorfa y no se anula en $\mathbb{C}$, luego existe u, holomorfa sobre $\mathbb{C}$ con $v = u^n$(por el teorema de existencia de raíces de funciones holomorfas). La función $g = uh^n$ es una raiz $n-$ésima de f ∎

3.2. Discusión del Teorema del Producto

3.2.1.Productos Canónicos Sea d un divisor positivo sobre $\mathbb{C}$ y sea $a_1, a_2, a_3, ...$ la correspondiente sucesión. Haremos en principio algunas observaciones:

1. Si $f(z) = \prod \left(1 - \dfrac{z}{a_j}\right) e^{p_j(z)}$ converge normalmente en $\mathbb{C}$ y toda función p_j es un polinomio de grado $\leq k$, entonces $\displaystyle\sum_{j \geq 1} \left|\frac{1}{d_j}\right|^{k+1}$ converge.

Prueba Diferenciando $\dfrac{f'}{f} = \displaystyle\sum \left|\frac{1}{z - a_j} + p_j'(z)\right|$ unas $k-$ veces,tenemos que la serie $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{(z - a_j)^{k+1}} k!$, converge absolutamente a $0 \in \mathbb{C}$ ∎

Ahora nos preguntamos cuándo,para un divisor dado d, existen productos de Weierstrass de forma particularmente simple $z^{d(0)} \cdot \prod_{j\geq 1} E_k(\frac{z}{a_j})$ con $k \in \mathbb{N}$, fijado.

(2) $z^{d(0)} \cdot \prod_{j\geq 1} E_k(\dfrac{z}{a_j})$ es un producto de Weierstrass para el divisor d si y sólo si $\displaystyle\sum_{j\geq 1} \left|\frac{1}{d_j}\right|^{k+1} < \infty$.

Prueba Si el producto en cuestión es un producto de Weierstrass para d, entonces $\displaystyle\sum_{j\geq 1} \left|\tfrac{1}{d_j}\right|^{k+1} < \infty$ por la parte 1),pues $E_k(\dfrac{z}{a}) = \left(1 - \dfrac{z}{a}\right) e^{p(z)}$ con un polinomio de grado k. Recíprocamente, si $\displaystyle\sum_{j\geq 1} \left|\frac{1}{d_j}\right|^{k+1} < \infty$, entonces el producto es un producto de Weierstrass para d, por el lema sobre el teorema del producto ■

Si existen productos de Weierstrass para d como en la parte (2 ,podemos escoger k minimal, en este caso $z^{d(0)} \prod_{j\geq 1} E_k(\dfrac{z}{a_j})$ es llamado Producto Canónico de Weierstrass para el divisor d.

La siguiente proposición es clara a partir de (2).

Proposición $z^{d(0)} \cdot \prod_{j\geq 1} E_k(\dfrac{z}{a_j})$ es el producto canónico para d si y sólo si $\displaystyle\sum \left|\frac{1}{d_j}\right|^{k} = \infty$ y $\displaystyle\sum_{j\geq 1} \left|\frac{1}{d_j}\right|^{k+1} < \infty$.

3.2.2. Tres productos canónicos clásicos

1. El producto $\prod_{j\geq 1}(1+q^j z) = \prod_{j\geq 1} E_0(-q^j z)$, donde $0 < |q| < 1$, es el producto canónico para el divisor sobre $\mathbb{C}$ dado por $d(-q^{-j}) = 1$ para $j = 1, 2, ...$; $d(z) = 0$ en otro caso.

(Aplicar la proposición anterior con $k = 0$)

2. La función $H(z) = \dfrac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(z)} = z \prod_{j\geq 1}(1 + \dfrac{z}{j})e^{\frac{-z}{j}} = z \prod_{j\geq 1} E_1(\dfrac{-z}{j})$, es el producto canónico para el divisor sobre $\mathbb{C}$ definido por $d(-j) = 1$ para $j \in \mathbb{N}$, $d(z) = 0$ en otro caso. (Aplicar la proposición anterior con $k = 1$ pero no con $k = 0$).

3. El producto Seno

$$z \cdot \prod_{j\geq 1}(1-\frac{z^2}{j^2}) = z \cdot \prod_{j\geq 1}\left[(1-\frac{z}{j})e^{\frac{z}{j}}(1+\frac{z}{j})e^{\frac{-z}{j}}\right] = z \cdot \prod_{j\geq 1} E_1(\frac{z}{j})E_1(\frac{-z}{j})$$

es el producto canónico para el divisor sobre $\mathbb{C}$ definido por $d(j) = 1$ para $j \in \mathbb{Z}$; $d(z) = 0$ en otro caso.

(Aplicar la proposición anterior con $k = 1$ pero no con $k = 0$; la sucesión correspondiente a_j es $1, -1, 2, -2, ...$).

Observación Esos ejemplos,muchas veces son dados como ejemplos de aplicaciones del teorema del producto de Weierstrass,sin embargo hay que señalar que dichos productos fueron conocidos antes de Weierstrass.Por supuesto ,su teorema muestra el mismo principio de construcción que engloba a todos ellos.

3.2.3.La función σ

Si w_1 y w_2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ el conjunto

$$\Omega = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{w \in \mathbb{C}/w = mw_1 + nw_2;\, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

es llamado una Latice en $\mathbb{C}$. Ω es localmente finito en $\mathbb{C}$ y la aplicación:

$\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$, $z \longmapsto d(z)$, donde $\delta(z) = 1$ si $z \in \Omega$ y $\delta(z) = 0$ si $z \notin \Omega$ es un divisor positivo sobre $\mathbb{C}$ con soporte Ω.

Proposición La función entera

$$\sigma(z) = \sigma(z, \Omega) = z \prod_{0\neq w\in\Omega}(1-\frac{z}{w})e^{\frac{z}{w}+\frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2} = z \prod_{0\neq w\in\Omega} E_2(\frac{z}{w}) \qquad (*)$$

es el producto canónico de Weierstrass para la latice Ω.

Antes de demostrar la proposición observemos lo siguiente: El conjunto

$$U = \left\{(u, v) \in \mathbb{C}^2 / \operatorname{Im} \frac{u}{v} > 0\right\}$$

es un conjunto abierto en $\mathbb{C}^2$. Para todo punto $(w_1, w_2) \in U$, el conjunto

$$\Omega(w_1, w_2) = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$$

es una latice en $\mathbb{C}$;recíprocamente toda latice $\Omega \subset \mathbb{C}$ tiene una base en U. El siguiente lema es ahora crucial:

Lema de Convergencia Sea $K \subset U$ compacto y sea $\alpha > 2$. Entonces existe una cota $M > 0$ tal que $\displaystyle\sum_{0 \neq w \in \Omega(w_1, w_2)} |w|^{-\alpha} \leq M$ para todo $(w_1, w_2) \in K$; $\displaystyle\sum_{0 \neq w \in \Omega(w_1, w_2)} |w|^{-2} = \infty$.

Prueba La función

$$q : (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times U \to \mathbb{R},\ (x, y, w_1, w_2) \longmapsto \frac{|xw_1 + yw_2|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

es homogénea en x, y, y además $q(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \times U) = q(S^1 \times U)$. Como q es continua, ella tiene un máximo T y un mínimo t sobre el compacto $S^1 \times K$. La independencia lineal sobre $\mathbb{R}$ de w_1 y w_2 implican que q es siempre positiva y por tanto $t > 0$. Por otro lado, como $t\sqrt{m^2 + n^2} \leq |mw_1 + nw_2| \leq T\sqrt{m^2 + n^2}$ para todo (w_1, w_2) y para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, la convergencia de $\sum |w|^{-\alpha}$ es equivalente a la convergencia de

$$\sum_{0 \neq (m,n)} (m^2 + n^2)^{-\beta} = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} + 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)\beta}; \text{ donde } \beta = \frac{1}{2}\alpha$$

Como $m^2 + n^2 \geq 2mn \geq mn$ para todo $m, n \geq 1$, se sigue que para $\alpha > 2$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)\beta} < \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^\beta n^\beta} = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta})(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\beta}) < \infty \ \blacksquare$$

Prueba de la proposición: Como $\left|E_2(\frac{z}{w})-1\right| < \left|\frac{z}{w}\right|^3$ para $|z|<|w|$; el lema de arriba implica inmediatamente la proposición, más aún.

En $\mathbb{C}\times U$, el $\sigma-$producto $\sigma(z;w_1,w_2)=\sigma(z,\Omega(z_1,z_2))$ converge normalmente a una función holomorfa en z, w_1 y w_2 ■

3.2.4 La función ρ de Weierstrass .

Desde que el producto $\sigma(z;w_1,w_2)$ es una función holomorfa sobre $\mathbb{C}\times U$ y converge normalmente(lema anterior), ésta puede ser diferenciada logarítmicamente con respecto a z:

$$\zeta(z;w_1,w_2)=\frac{\sigma'(z;w_1,w_2)}{\sigma(z;w_1,w_2)}=\frac{1}{z}+\sum_{0\neq w\in\Omega(w_1,w_2)}(\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2})\in M(\mathbb{C}\times U) \qquad (1)$$

(o sea es meromorfa sobre $\mathbb{C}\times U$).

Esta serie(de funciones meromorfas),que converge normalmente en $\mathbb{C}\times U$, es llamada función ζ de Eisenstein-Weierstrass. Una diferenciación ordinaria de (1) da la siguiente función:

$$\rho(z;w_1,w_2)=-\zeta'(z;w_1,w_2)=\frac{1}{z^2}+\sum_{0\neq w\in\Omega(w_1,w_2)}(\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2})\in M(\mathbb{C}\times U) \qquad (2)$$

Esta serie también es normalmente convergente en $\mathbb{C}\times U$. Ambas, la función ζ y la función ρ son holomorfas en $\mathbb{C}-\Omega(w_1,w_2)$ para puntos fijados w_1 y w_2 y tienen polos de primer y segundo orden,respectivamente, en cada punto de la latice. La función ρ es doblemente periódica(= elíptica), con $\Omega(w_1,w_2)$ como latice período. En la teoría de funciones elípticas, es fundamental que la función ρ sea meromorfa en todas las tres variables z, w_1 y w. En el caso $w_2=\infty$, las funciones σ,ζ y ρ se transforman en funciones trigonométricas:Escribiendo w para $w_1\in\mathbb{C}^\times$, tenemos $\sigma(z;w,\infty)=\frac{w}{\pi}e^{\frac{\pi^2}{6}(\frac{z}{w})^2}\sin\pi\frac{z}{w}$, $\zeta(z;w,\infty)=\frac{\pi^2}{3}(\frac{z}{w})^2+\frac{\pi}{w}\cot\pi\frac{z}{w}$, $\rho(z;w,\infty)=-\frac{1}{3}(\frac{\pi}{w})^2+(\frac{\pi}{w})^2(\sin(\pi(\frac{z}{w}))^{-2}$

$\sigma(z;\infty,\infty)=z$, $\zeta(z;\infty,\infty)=\frac{1}{z}$, $\rho(z;\infty,\infty)=\frac{1}{z^2}$. Aquí hemos continuado usando la notación $\zeta = \dfrac{\sigma^{'}}{\sigma}$ y $\rho = -\zeta^{'}$. Se puede probar que

$\lim\limits_{w_2 \to \infty} \sigma(z; w_1, w_2) = \sigma(z; w_1, \infty)$, donde la convergencia es compacta;lo mismo para ζ y ρ . En consecuencia la teoría de funciones elípticas contiene la teoría de funciones trigonométricas como un caso degenerado.

Referencia Bibiográfica

[1] Comway, J.B, Functions of one Complex Variable. Second edition Springer Verlag 1978

[2] Reinhold Remmert, Theory of Complex Functions. Readings in Mathematics. Sprin ger Verlag 1991

[3] Reinhold Remmert, Classical Topics in Complex Function theory. Springer Verlag 1998