Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Existencia y unicidad de la solución débil para una ecuación de evolución semi lineal de segundo orden

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Jenny CARBAJAL LICAS

ASESOR

Yolanda Silvia SANTIAGO AYALA

Lima, Perú

2006

Referencia bibliográfica

Carbajal, J. (2006). *Existencia y unicidad de la solución débil para una ecuación de evolución semi lineal de segundo orden*. Tesis para optar el grado de Magíster en Matemática Pura. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

"Existencia y unicidad de la solución débil para una ecuación de evolución semi lineal de segundo orden"

por

Jenny Carbajal Licas

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Grado académico de Magíster en Matemática Pura.

Aprobado por el siguiente Jurado

Dr. Oswaldo Napoleón Ramoz Chumpitaz

Presidente

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Miembro asesor

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini

Miembro

Dr. José Raúl Luyo Sánchez

Miembro

Dr. Luis Enrique Carrillo Díaz

Miembro

Ficha catalográfica

CARBAJAL LICAS, Jenny

Existencia y unicidad de la solución débil para una ecuación de evolución semi lineal de segundo orden, (Lima) 2006.
iii, 135 p., 29.7 cm. (UNMSM, Magíster en Matemática Pura, Matemática, 2006).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Facultad de Ciencias Matemáticas-Unidad de Post Grado

Dedicatoria

A mis padres y hermanas, por el apoyo incondicional.

Agradecimiento

A Concytec, por el apoyo económico.

A San Marcos mi Alma Mater,
forjadora de mi presente y futuro.

Al miembro asesor, por el tiempo invertido y sugerencias en la elaboración de este trabajo.
A los miembros del Jurado Informante, por la dedicación y útiles aportes en la redacción de la misma.

Resumen

"Existencia y unicidad de la solución débil para una ecuación de evolución semi lineal de segundo orden"

por

Jenny Carbajal Licas

Asesora: Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Grado obtenido: Magíster en Matemática Pura

En este trabajo estudiamos la existencia y unicidad de la solución débil para una ecuación de evolución de segundo orden, presentados en dos casos, semi lineal y lineal, obteniendo regularización de la solución débil para el caso semi lineal y la dependencia continua sobre los datos iniciales para el caso lineal. Para ello utilizamos el método de Faedo-Galerkin y la igualdad de la Energía, esta última está basada del libro *Problémes Aux Limites non Homogénes et Applications*, volumen 1, de Lions J. y Magenes E. Finalmente, vemos algunas aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales.

Palabras claves:

Ecuaciones diferenciales parciales

Ecuación de evolución

Ecuación semi lineal

Ecuación del Seno Gordon

Abstract

Existence and uniqueness of the weak solution for a second order semilinear evolution equation

by

Jenny Carbajal Licas

Assessor: Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Degree obtained: Master in Pure Mathematics

In this work, we study the existence and uniqueness of the weak solution for a second order evolution equation. It is presented in two cases: semilinear and linear, getting regularity for the semilinear case and continuous dependency on inicial dates for the linear case. To get these results we use the Faedo Galerkin'method and the Energy Iquality, the last one have been worked using the book *Problémes Aux limites non Homogénes et Applications,* volume 1 of Lions J. and Magenes E. Finally we see some aplications to the partial differential equations.

Key words:

Partial differential equations

Evolution equations

Semilinear equation

Seno Gordon equation

Contenido

Introducción

En el presente trabajo estudiamos el problema de Cauchy para una ecuación de evolución semi lineal de segundo orden, para el cual consideramos dos casos:

El caso no lineal

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + A_2(.)\dfrac{dy}{dt} + A_1(.)y = f(.,y) \text{ en } (0,T) \\ y(0) = y_0 \in V_1 \\ \dfrac{dy}{dt}(0) = y_1 \in H, \end{cases} \tag{1}$$

y el caso lineal

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + A_2(.)\dfrac{dy}{dt} + A_1(.)y = g(.) \text{ en } (0,T) \\ y(0) = y_0 \in V_1 \\ \dfrac{dy}{dt}(0) = y_1 \in H. \end{cases} \tag{2}$$

El problema de valor inicial (1) aparece en Ha J. y Nakagiri S. [5], en el cual los autores nos presentan como resultado principal la regularidad de su solución.

El trabajo consistirá en desarrollar de una manera minuciosa y detallada la demostración de la existencia, unicidad y regularidad de la solución de los problemas (1) y (2). Adicionalmente, el aporte de este trabajo es haber logrado probar la dependencia continua de los datos iniciales del problema (2), en un primer caso la aplicación que asocia a cada dato $(g, y_0, y_1) \in L^2(0,T;V_2') \times V_1 \times H$ y le hace corresponder $(y, y') \in C([0,T]\,;V_1) \times C([0,T]\,;H)$ es continua, debido al uso de algunos resultados de Zeidler B. [16]. En un segundo caso la aplicación que asocia a cada dato $(g, y_0, y_1) \in L^2(0,T;V_2') \times V_1 \times H$ y le hace corresponder $y \in W\,(0,T)$ es continua, gracias al uso de algunos resultados de Lions J. y Magenes E. [9]

Haciendo uso del método de Faedo-Galerkin obtenemos la existencia y unicidad de solución del problema (1), donde son usadas la coercividad de $A_i(t)$ para $i = 1, 2$ y la condición de lipchitzianidad de $f(t, y)$ en la segunda variable. La parte más laboriosa es la verificación de la convergencia fuerte de la solución aproximada, que es abordada en la Sección 2.6. Posteriormente en la Sección 3.1 estudiamos la regularidad de la solución obtenida gracias al famoso Método de la Energía. También estudiamos la igualdad de la Energía para la ecuación (2).

En el Capítulo 4, estudiamos algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo Dirichlet y Neumann, desarrollando los ejemplos presentados en Ha J. y Nakagiri S. [5].

Estudios de este tipo de ecuaciones siendo A_1 y A_2 operadores que no dependen del tiempo pueden ser vistos en Nakao M. [11] y Showalter R. [12].
En particular, en la Sección 5 del Capítulo XVIII de Dautray R. y Lions J. [4], se estudia el modelo lineal

$$\frac{d}{dt}(A_3(.)\frac{dy}{dt}) + A_2(.)\frac{dy}{dt} + A_1(.)y = f(.) \text{ en } (0, T) \tag{3}$$

desde el punto de vista variacional. Aquí los autores prueban la existencia, unicidad y regularidad de la solución débil, donde $A_1\,(t)$ y $A_2\,(t)$ definen formas sesquilineales sobre V_1, $A_3\,(t)$ sea positiva y acotada sobre H y que $f \in L^2(0, T; H)$.

Los problemas (3) y (2) difieren por la presencia de $A_3(t)$. Siguiendo nuestra técnica el operador $A_3(t)$ hace que el problema sea más complejo, debido a la elección de los espacios funcionales y sobre todo en la obtención de las estimativas apriori. Por todo ello, suponemos en nuestro trabajo que $A_3(t)$ sea el operador identidad.

Las hipótesis del problema (2), nos permiten garantizar mediante una sola vía la existencia y la regularización de la solución, mientras que para el problema (3), para obtener los mismos resultados es necesario cambiar las hipótesis, es decir considerando que A_2 sea acotada en H y usando la Regularización Parabólica se demuestran que $y \in C([0, T]\,; V)$ y que $y' \in C([0, T]\,; H)$.
En el problema (1), a diferencia de (3), la introducción del espacio V_2 para el término $A_2(.)\dfrac{dy}{dt}$ permite una apropiada elección del operador diferencial del tipo de problema a desarrollar.

Además si añadimos el operador A_3 en el problema (1) , las hipótesis ya consideradas no nos permiten garantizar la existencia de $A_3^{-1}(t)$, lo cual limita nuestros resultados. Por otro lado cabe resaltar que los resultados especificados en Dautray R. y Lions J. [4], no cubren nuestros resultados obtenidos aún para el caso lineal (2).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos el marco teórico referencial que permitirá un mejor desarrollo y entendimiento del trabajo a realizar.

1.1 Espacios Funcionales

Definición 1.1. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, y u una función escalar

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

llamamos soporte de u a la clausura del conjunto $\{x \in \Omega \text{ tal que } u(x) \neq 0\}$ y lo podemos denotar por $supp(u)$.

Así

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega \text{ tal que } u(x) \neq 0\}} \ .$$

Definición 1.2. Sea p un número real tal que $1 \leq p < \infty$. Representamos por $L^p(\Omega)$ al conjunto formado por

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } u \text{ es medible y } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

$L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de funciones, equipada con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^p \, dx,$$

el cual lo hace un espacio de Banach.

Para el caso $p = 2$, es un espacio de Hilbert con el producto escalar, definido por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \text{ para todo } u, \; v \in L^2(\Omega).$$

Su norma inducida será denotada por

$$|u|_{L^p(\Omega)} .$$

Definición 1.3. Representamos por $L^\infty(\Omega)$ al espacio de funciones numéricas u medibles en Ω y que son esencialmente acotadas en Ω, equipada con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess \; |u(x)| \, .$$

Definición 1.4. Decimos que una función u medible según Lebesgue en Ω es localmente integrable en Ω si

$$\int_K |u(x)| \, dx < \infty \text{ para todo } K \text{ compacto de } \Omega.$$

Definición 1.5. Denotamos por $L^1_{Loc}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones localmente integrables en Ω. Además decimos que $u \in L^p_{Loc}(\Omega)$ si y solo si

$$\int_K |u(x)|^p \, dx < \infty \text{ para todo } K \text{ compacto de } \Omega, \; 1 < p < \infty.$$

Definición 1.6. Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ al espacio de funciones numéricas definidas en Ω con soporte compacto sobre Ω y con derivadas parciales, de cualquier orden, continuas.

Definición 1.7. Sea $(\varphi_v)_{v\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $C_0^\infty(\Omega)$ diremos que converge a 0 si;

i) Existe un compacto K tal que $supp(\varphi_v) \subseteq K$ para todo $v \in \mathbb{N}$.

ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^{\alpha}\varphi_v(x) \underset{v \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente en K.

El espacio $C_0^{\infty}(\Omega)$ dotado de la noción de convergencia definida en (i) e (ii) es denominada el *espacio de funciones de prueba* y se representa por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 1.8. Llamamos *Distribución* a toda forma lineal y continua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Denotamos al espacio de distribuciones por $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ significa que para toda $(\varphi_v)_{v\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)$ que converja a 0 en el sentido de la Definición 1.7 entonces $(\langle T, \varphi_v\rangle)_{v\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en K.

Lema 1.9. (Du Bois-Raymond). Sea $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ para todo } \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ *c.s.* en Ω, donde *c.s.* denota casi siempre.

Demostración. Ver Adams [1]. ■

Condiciones de Caratheodory

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto cuyos elementos son denotados por (t, x) donde $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, no necesariamente continua, el problema es encontrar una función continua $x(t)$ definida en algún intervalo de la recta I tal que $(t, x(t)) \in D$ y

$$x'(t) = f(t, x) \text{ para todo } t \in I. \tag{1.1}$$

Si existe una función $x(t)$ que satisfaga (1.1), entonces decimos que x es una solución de (1.1) sobre I. La condición $x(t_0) = x_0$ asociado a (1.1) resulta el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \text{ para todo } t \in I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Decimos que f satisface las condiciones de Caratheodory sobre D si;

i) $f(t,x)$ es medible en t para cada x fijo.

ii) $f(t,x)$ es continua en x para cada t fijo.

iii) Para cada conjunto $U \subseteq D$ existe una función real integrable $m_U(t)$ tal que

$$|f(t,x)| \leq m_U(t) \text{ , para todo } (t,x) \in U.$$

Consideremos el rectángulo

$$M = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tal que } |t-t_0| \leq a, \;\; |x-x_0| \leq b \text{ , } a>0, \, b>0\right\}.$$

Teorema 1.10. (Carathéodory) Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisface las condiciones de Carathéodory sobre M. Entonces existe una única solución φ de (1.2) sobre algún intervalo $|t-t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.

Demostración. Ver Coddington-Levinson [3]. ■

Teorema 1.11. Sea un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, f satisface las dos primeras condiciones de Carathéodory sobre D. Existe una función integrable $m\,(t)$ tal que $|f\,(t,x)| \leq m\,(t)$ para todo $(t,x) \in D$. Sea φ una solución de (1.1) sobre el intervalo para todo $t \in (a,b)$. Entonces

i) Existen $\varphi\,(a+0)$, $\varphi\,(b-0)$, donde $a+0$ y $b-0$ representan los extremos del intervalo (a,b) .

ii) Si $(b, \varphi\,(b)) \in D$ entonces puede ser prolongado hasta $(a, b+\delta]$ para algún $\delta > 0$.
De manera análoga se procede para a.

iii) φ puede ser prolongada hasta un intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi\,(\gamma+0))$, $(\omega, \varphi\,(\omega-0)) \in \partial D$, donde ∂D representa la frontera de D.

Demostración. Ver Coddington-Levinson [3]. ■

Corolario 1.12. Sea $D = [0,T] \times B$, $0 < T < \infty$ donde

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } |x| \leq b,\ b > 0\}$$

y f es una función que cumple las condiciones del Teorema 1.11. Sea φ una solución de

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0,\ |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Supongase que en cualquier intervalo I donde $\varphi(t)$ está definido, tenemos que $|\varphi| \leq C$ para todo $t \in I$. C es independiente de I y $C \leq b$. Entonces φ tiene un prolongamiento hasta $[0,T]$.

Demostración. Gracias a que $|\varphi(t)| \leq C$ para todo $t \in I$, resulta

$$(t, \varphi(t)) \in D,$$

en virtud del Teorema 1.11 tenemos que φ puede ser prolongada hasta el intervalo $[0,T]$. ■

Definición 1.13. Sea $f : (0,T) \to X$, una función vectorial, decimos que f es *Integrable según Lebesgue* si existe una sucesión de funciones escalonadas

$$f_n(t) = \begin{cases} a_{i_n} \in X & , \quad t \in I_i \\ 0 & , \quad c.s. \text{ en } (0,T) \end{cases}$$

donde los intervalos $I_i \subset (0,T)$ son dos a dos disjuntos tal que

i) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ $c.s.$ en $(0,T)$.

ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo m, $n \geq n_0$

$$\int_0^T \|f_n(t) - f_m(t)\|_X \, dt \leq \varepsilon \ .$$

Observación. Las funciones vectoriales que son integrables según Lebesgue son también llamadas integrables según Bochner.

Si $f : (0,T) \longmapsto X$ es *Lebesgue integrable*, entonces definimos la *Integral de Lebesgue* (o de Bochner) de f como

$$\int_0^T f(t)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^T f_n(t)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_n}\mu(I_i)\right),$$

donde f_n es la sucesión de funciones escalonadas que satisfacen (i) y (ii), donde $\mu(I_i)$ denota la amplitud del intervalo I_i.

Definición 1.14. Espacios $L^p(0,T;X)$ **.** Llamamos espacio de *Lebesgue vectorial* $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$ al conjunto de funciones vectoriales, donde

$$L^P(0,T;X) = \left\{u : (0,T) \rightarrow X \text{ tal que } \int_0^T \|u(t)\|_X^p\, dt < \infty\right\}.$$

La norma en $L^p(0,T;X)$ está dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|u(t)\|_X^p\, dt)^{\frac{1}{p}}, \text{ para todo } u \in L^p(0,T;X).$$

Definición 1.15. Denotamos por $L^\infty(0,T;X)$ al conjunto de funciones esencialmente acotadas, es decir

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{u : (0,T)\rightarrow X \ \text{ tal que } \operatorname*{Sup}_{t\in(0,T)} ess\, \|u(t)\|_X < \infty\right\}.$$

El espacio $L^\infty(0,T;X)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{Sup}_{t\in(0,T)} ess\, \|u(t)\|_X\,.$$

Definición 1.16. Definimos el espacio $C^m([0,T]\,;X)$ con $m = 0,1...$, como el conjunto de todas las funciones $u : [0,T] \rightarrow X$ que tienen derivadas continuas hasta el orden m sobre $[0,T]$, equipada con la norma

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \sum_{i=0}^{m} \max_{0\leq\ t\leq T} \left\|u^{(i)}(t)\right\|_X .$$

Proposición 1.17. Si $1 \leq p < \infty$ entonces $C^m([0,T]\,;X)$ es denso en $L^p(0,T;X)$.

Demostración. Ver Zeidler [16]. ■

Corolario 1.18. El conjunto de los polinomios $p : [0.T] \to X$ con coeficientes en X es denso en $L^P(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Ver Zeidler [16]. ■

Si X es un espacio de Banach entonces $L^2(0,T;X)$ es un espacio de Banach. Si X es un espacio de Hilbert, entonces define un produco interno, el cual lo denotamos por $(.,.)_X$, para $p = 2$ sobre $L^2(0,T;X)$ definimos el producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X \, dt \text{ donde } u,\ v \in L^2(0,T;X).$$

Si $u = v$, con $u \in L^2(0,T;X)$, entonces

$$(u,u)_{L^2(0,T:X)} = \int_0^T (u(t),u(t))_X \, dt = \int_0^T \|u(t)\|_X^2 \, dt = \|u\|_{L^2(0,T;X)}^2 .$$

Por lo tanto $L^2(0,T;X)$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 1.19. Sea $1 \leq p \leq q \leq \infty$, siendo X e Y espacios de Banach donde $X \hookrightarrow Y$, es decir X esta continuamente inmerso en Y. Entonces

$$L^q(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y).$$

Demostración.

Como $X \hookrightarrow Y$ entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq c \|x\|_X \ , \quad \text{para todo } x \in X. \tag{1.3}$$

Sea u una función tal que $u \in L^q(0,T,X)$ entonces

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^q \, dt < \infty \ .$$

Luego como

$$\|u(.)\|_X \in L^q(0,T) \hookrightarrow L^p(0,T),$$

entonces existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$\|\|u(.)\|_X\|_{L^p(0,T)} \leq c_1 \|\|u(.)\|_X\|_{L^q(0,T)}$$

de donde deducimos

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1(\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De (1.3) conseguimos

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|_Y^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logrando así

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|_Y^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq cc_1 \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Finalmente escribimos

$$\|u\|_{L^P(0,T,Y)} \leq cc_1 \|u\|_{L^q(0,T,X)}. \ \blacksquare$$

Proposición 1.20. (Separabilidad). Sea X un espacio de Banach separable y $1 \leq p < \infty$. Entonces $L^p(0,T;X)$ es separable.

Demostración.Ver Zeidler [16]. ■

Teorema 1.21. (Pettis). Sea X un espacio de Banach y $f : (0,T) \rightarrow X$ una función vectorial, son equivalentes las siguientes proposiciones

i) f es medible.

ii) Para todo $\varphi \in X$, la aplicación $t \longmapsto \langle \varphi, f(t) \rangle_{X',X}$ es medible.

Demostración. Ver Yosida [15]. ■

Proposición 1.22. Sea X un espacio de Banach, donde $1 < p, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $u \in L^p(0,T;X)$ y $v \in L^q(0,T;X^{'})$ donde $X^{'}$ es el dual topológico de X. Entonces se verifica

$$\int_0^T \left| \langle v(t), u(t) \rangle_{X',X} \right| dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{X'}^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Demostración.

Como $u \in L^p(0,T;X), v \in L^q(0,T;X^{'})$, luego u y v son medibles, entonces existen sucesiones

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \ ,$$

tal que

$$u_n(t) \longrightarrow u(t) \ c.s. \text{ en } (0,T) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

y

$$v_n(t) \longrightarrow v(t) \ c.s. \text{ en } (0,T) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Entonces tenemos

$$\langle v_n(t), u_n(t) \rangle_{X',X} \longrightarrow \langle v(t), u(t) \rangle_{X',X}$$

y

$$\left| \langle v_n(t), u_n(t) \rangle_{X',X} \right| \leq \|v(t)\|_{X'} \|u(t)\|_X \ .$$

Como

$$\|v(t)\|_{X'} \in L^q(0,T), \ \ \|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$$

resulta

$$\|v(t)\|_{X'} \|u(t)\|_X \in L^1(0,T).$$

Así obtenemos

$$\int_0^T \left| \langle v_n(t), u_n(t) \rangle_{X',X} \right| dt \leq \int_0^T \|v(t)\|_{X'} \|u(t)\|_X \, dt,$$

de donde conseguimos

$$\int_0^T \left|\langle v_n(t), u_n(t)\rangle_{X',X}\right| dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{X'}^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}. \ \blacksquare$$

Proposición 1.23. (Teorema de Representación de Riesz). Sea X un espacio de Banach reflexivo, separable y $1 < p < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces se verifica lo siguiente

i) Para todo $\varphi \in (L^p(0,T;X))'$ existe una función $v \in L^q(0,T;X^{'})$ tal que para todo $u \in L^p(0,T;X)$ verifica lo siguiente

$$\langle \varphi, u\rangle_{(L^p(0,T;X))',L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_{X',X} \, dt. \tag{1.4}$$

Además

$$\|\varphi\|_{(L^p(0,T;X))'} = \|v\|_{L^q(0,T;X')} \, .$$

ii) Dado $v \in L^p(0,T;X')$ existe $\varphi \in \left(L^p(0,T;X)\right)^{'}$ tal que verifica la relación (1.4), así podemos hacer la indentificación $\varphi \equiv v$, donde

$$\langle \varphi, u\rangle_{(L^p(0,T;X))',L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle \varphi(t),\ u(t)\rangle_{X',X} \, dt \ \text{ para todo } u \in L^p(0,T;X).$$

Demostración. Ver Lions [8]. $\blacksquare$

Proposición 1.24. Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Entonces se verifican

i) Si $u \in L^p(0,T;X)$ y $v \in X^{'}$ entonces

$$\left\langle v, \int_0^T u(t)\right\rangle_{X',X} dt = \int_0^T \langle v, u(t)\rangle_{X',X} \, dt.$$

ii) Si $u \in L^p(0,T;X^{'})$ y $v \in X$ entonces

$$\left\langle \int_0^T u(t), v \right\rangle_{X',X} dt = \int_0^T \langle u(t), v\rangle_{X',X}\, dt.$$

Demostración.

i) Si $u \in L^p(0,T;X)$ deducimos que u es medible, esto es, existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones escalonadas, y para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $t \mapsto u_n(t)$ es de la forma

$$u_n(t) = \begin{cases} a_{i_n} & , \quad t \in I_i \\ 0 & , \quad c.s. \text{ en } (0,T), \end{cases}$$

donde $I_i \subset (0,T)$, son intervalos disjuntos dos a dos.

Por la Definición 1.12 tenemos

$$u_n(t) \longrightarrow u(t) \; c.s. \text{ en } (0,T) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty, \tag{1.5}$$

esto implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo n, $m \geq n_0$ obtenemos

$$\int_0^T \|u_n(t) - u_m(t)\|_X \, dt < \varepsilon.$$

Definamos la función caraterística

$$\chi_i(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in I_i \\ 0 & , \quad t \notin I_i, \end{cases}$$

de donde resulta que

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i_n}\chi_i.$$

Así pues

$$\langle \varphi, u_n(t)\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle \varphi, u(t)\rangle_{X',X} \;\; c.s. \text{ en } (0,T) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty, \text{ para cada } \varphi \in X^{'}.$$

Denotamos

$$f_n(t) = \langle \varphi, u_n(t)\rangle_{X',X} \quad \text{y} \quad f(t) = \langle \varphi, u(t)\rangle_{X',X} \;\; ,$$

donde se ve que

$$f_n(t) = \langle \varphi, u_n(t) \rangle_{X',X} = \sum_{i=1}^{n} \chi_i \langle \varphi, a_{i_n} \rangle_{X',X} .$$

Con estas notaciones obtenemos

$$f_n(t) \longrightarrow f(t) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

debido a (1.5).

Veamos que $\displaystyle\int_0^T |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$, para todo, n, $m \geq n_0\,(\varepsilon)$**;** en efecto dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_0^T |f_n(t) - f_m(t)|\, dt &= \int_0^T \left| \langle \varphi, u_n(t) - u_m(t) \rangle_{X',X} \right| dt \\
&\leq \int_0^T \|\varphi\|_{X'} \, \|u_n(t) - u_m(t)\|_X \, dt \\
&\leq \|\varphi\|_{X'} \int_0^T \|u_n(t) - u_m(t)\|_X \, dt \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así f_n es Lebesgue integrable y además tenemos

$$\int_0^T f(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T f_n(t) dt.$$

Luego vemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \varphi, u(t) \rangle_{X',X} &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \varphi, u_n(t) \rangle_{X',X} \, dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_1^n \langle \varphi, a_{i_n} \rangle_{X',X} \, \mu(I_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle \varphi, \textstyle\sum_1^n a_{i_n} \, \mu(I_i) \rangle_{X',X} \\
&= \left\langle \varphi, \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(t) dt \right\rangle_{X',X} \\
&= \left\langle \varphi, \int_0^T u(t) dt \right\rangle_{X',X} .
\end{aligned}$$

ii) La demostración es análoga a (i).

De esta manera conseguimos la proposición. ■

Corolario 1.25. Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 1.24 y con $0 < t < T$ tenemos el siguiente resultado

i) Si $u \in L^p(0,T;X)$ y $\varphi \in X^{'}$ entonces

$$\left\langle \varphi, \int_0^t u(t) \right\rangle_{X',X} dt = \int_0^t \langle \varphi, u(t) \rangle_{X',X} \, dt.$$

ii) Si $u \in L^p(0,T;X^{'})$ entonces para todo $v \in X$ tenemos

$$\left\langle \int_0^t u(t), v \right\rangle_{X',X} dt = \int_0^t \langle u(t), v \rangle_{X',X} \, dt.$$

Demostración.

i) Definimos

$$\chi(\tau) = \begin{cases} 1 & , \quad \tau \in (0,t) \\ 0 & , \quad \tau \notin (0,t) \end{cases}.$$

Debido a que $u \in L^p(0,T;X)$ la función $u\chi$ es medible y

$$\int_0^T \|u(t)\chi(t)\|_X^p \, dt \leq \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty,$$

entonces $u\chi \in L^p(0,T,X)$. Además por la Proposición 1.24-(i) conseguimos que

$$\left\langle \varphi, \int_0^T u\chi(t) \right\rangle_{X',X} dt = \int_0^T \langle \varphi, u\chi(t) \rangle_{X',X} \, dt,$$

de donde deducimos

$$\left\langle \varphi, \int_0^t u(t) \right\rangle_{X',X} dt = \int_0^t \langle \varphi, u(t) \rangle_{X',X} \, dt.$$

ii) Es análoga a (i). ■

Proposición 1.26. Sea X un espacio de Banach y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(0,T;X)$ con $1 \leq p < \infty$. Si

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } L^p(0,T;X) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Entonces
$$\int_0^T u_n(t)dt \longrightarrow \int_0^T u(t)dt \text{ en } X \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Demostración.

Definimos la aplicación

$$A : L^p(0,T;X) \to X \text{ tal que } A(u) = \int_0^T u(t)dt.$$

A es lineal y continua; en efecto,

$$\|A(u)\|_X = \left\| \int_0^T u(t)dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X \, dt \leq c \, \|u\|_{L^p(0,T;X)} \ ,$$

donde c es una constante que sólo depende de T. La linealidad de la integral obliga que A lo sea también. De donde seguimos el resultado. ■

Corolario 1.27. Con las hipótesis de la Proposición 1.26. Si $0 < t < T$ entonces tenemos

$$\int_0^t u_n(s)ds \longrightarrow \int_0^t u(s)ds \text{ en } X \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Demostración.

Usamos la función característica

$$\chi_{(0,t)}(s) = \begin{cases} 1 & , \quad s \in (0,t) \\ 0 & , \quad s \notin (0,t). \end{cases}$$

Denotamos por

$$V_n(.) = u_n \chi_{(0,t)}(.) \in L^p(0,T;X)$$

y

$$V(.) = u \chi_{(0,t)}(.) \in L^p(0,T;X).$$

Gracias a las hipótesis del Corolario conseguimos

$$V_n(s) \longrightarrow V(s) \text{ en } L^p(0,T;X), \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Luego

$$\int_0^T V_n(s)ds \longrightarrow \int_0^T V(s)ds \text{ en } X, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

obteniendo

$$\int_0^t u_n(s)ds \longrightarrow \int_0^t u(s)ds \text{ en } X \text{ cuando } n \longrightarrow \infty. \ \blacksquare$$

Definición 1.28. Convergencia débil. Decimos que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^p(0,T;X)$ converge debilmente a $u \in L^p(0,T;X)$, para $1 < p < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$, si

$$\int_0^T \langle \varphi(s), u_n(s) \rangle_{X',X} \, ds \longrightarrow \int_0^T \langle \varphi(s), u(s) \rangle_{X',X} \, ds \text{ para todo } \varphi \in L^q(0,T;X^{'})$$

y lo denotamos por

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } \ L^p(0,T;X).$$

Proposición 1.29. Sea X un espacio de Banach, reflexivo y separable. Entonces

$$L^1(0,T;X)' \approxeq L^\infty(0,T;X^{'}).$$

Es decir, existe una aplicación lineal biyectiva T

$$\begin{array}{rcl} T : L^1(0,T;X)' & \rightarrow & L^\infty(0,T;X^{'}) \\ \tilde{v} & \rightarrow & T(\tilde{v}) = v \end{array}$$

tal que

$$\langle \tilde{v}, u \rangle_{L_1(0,T;X)', L_1(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(s), u(s) \rangle_{X',X} \, ds \ \ \text{para todo } u \in L^1(0,T;X),$$

en este caso identificamos $\tilde{v} \equiv v$.

Demostración.Ver Lions [8]. $\blacksquare$

Definición 1.30. Convergencia débil estrella. Decimos que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(0,T;X^{'})$ converge débil-$*$ a $u \in L_\infty(0,T;X^{'})$ si

$$\int_0^T \langle u_n(s), v(s)\rangle_{X',X}\, ds \longrightarrow \int_0^T \langle u(s), v(s)\rangle_{X',X}\, ds, \text{ para todo } v \in L^1(0,T;X),$$

y lo denotamos por

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty(0,T;X').$$

Proposición 1.31. Sea X un espacio de Banach, reflexivo y separable. Consideramos las sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(0,T;X)$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^q(0,T;X')$, donde $1 < p$, $q < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$

i) Sean

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } L^p(0,T;X)$$

y

$$v_n \longrightarrow v \text{ en } L^q(0,T;X').$$

Entonces, si $0 < t \leq T$ tenemos

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_{X',X}\, ds \longrightarrow \int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle_{X',X}\, ds.$$

ii) Sean

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } L^p(0,T;X)$$

y

$$v_n \rightharpoonup v \text{ en } L^q(0,T;X').$$

Entonces, si $0 < t \leq T$, obtenemos

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_{X',X}\, ds \longrightarrow \int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle_{X',X}\, ds.$$

Demostración.

ii) Sea $t = T$, como

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{en} \quad L^q(0,T;X'),$$

en virtud de la Definición 1.28 tenemos

$$\int_0^T \langle \varphi(s), v_n(s)\rangle_{X'',X'}\, ds \longrightarrow \int_0^T \langle \varphi(s), v(s)\rangle_{X'',X'}\, ds$$

para todo $\varphi \in L^p(0,T;X'')$. Debido a que X es reflexivo resulta

$$\int_0^T \langle v_n(s), \varphi(s)\rangle_{X',X}\, ds \longrightarrow \int_0^T \langle v(s), \varphi(s)\rangle_{X',X}\, ds$$

para todo $\varphi \in L^p(0,T;X)$. Como $u \in L^p(0,T;X)$ entonces obtenemos

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_{X',X}\, ds - \int_0^T \langle v(s), u(s)\rangle_{X',X}\, ds\right| \leq \\ &\int_0^T \left|\langle v_n(s), u_n(s) - u(s)\rangle_{X',X}\right| ds + \left|\int_0^T \langle v_n(s) - v(s), u(s)\rangle_{X',X}\, ds\right|,\end{aligned}$$

y por la desigualdad de Hölder, conseguimos

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_{X',X}\, ds - \int_0^T \langle v(s), u(s)\rangle_{X',X}\, ds\right| \leq \\ &\left(\int_0^T \|v_n(s)\|_X^q\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \|u_n(s) - u(s)\|_X^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left|\int_0^T \langle v_n(s) - v(s), u(s)\rangle_{X',X}\, ds\right|.\end{aligned}$$

Luego debido a las hipótesis de (ii), tenemos

$$\int_0^T \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_{X',X}\, ds \longrightarrow \int_0^T \langle v(s), u(s)\rangle_{X',X}\, ds. \tag{1.6}$$

Para concluir la demostración (ii) definimos función característica

$$\chi_{(0,t)}(s) = \begin{cases} 1 & , \quad s \in (0,t) \\ 0 & , \quad s \notin (0,t). \end{cases}$$

Como

$$v_n \longrightarrow v \ \text{ en } \ L^p(0,T;X'),$$

esto implica

$$v_n\chi_{(0,t)} \longrightarrow v\chi_{(0,t)} \text{ en } \ L^p(0,T;X')$$

y por (1.6) resulta

$$\int_0^T \left\langle v_n \chi_{(0,t)}(s), u_n(s) \right\rangle_{X',X} ds \longrightarrow \int_0^T \left\langle v \chi_{(0,t)}(s), u(s) \right\rangle_{X',X} ds.$$

De donde obtenemos

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s) \rangle_{X',X} ds \longrightarrow \int_0^t \langle v(s), u(s) \rangle_{X',X} ds.$$

i)Es análoga a (ii). ■

Proposición 1.32. Sea X un espacio de Banach. Si $u \in L^1(0,T;X)$ y

$$\int_0^T u(t)\varphi(t) = 0 \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(0,T),$$

entonces $u = 0$ en $L^1(0,T;X)$.

Demostración. Ver Zeidler [16]. ■

Definición 1.33. Sean V y H dos espacios de Banach y Hilbert respectivamente, V' y H' representan el dual de V y H respectivamente. Por el Teorema de Representación de Riesz, ver Kreyszig [5], identificamos a H con su dual. Entendemos como Ternas de Evolución al siguiente esquema funcional

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

donde

i) V es un espacio reflexivo, separable.

ii) H es un espacio separable.

iii) La inmersión $V \hookrightarrow H$ es continua es decir existe una constante k tal que

$$|u|_H \leq k \|u\|_V$$

para todo $u \in V$. Análogamente la siguiente inmersión es continua $H \hookrightarrow V^{'}$.

iv) V es denso en H.

Proposición 1.34. Consideramos la Terna de evolución

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^{'}.$$

Entonces

i) Para cada $h \in H$, existe una forma lineal y continua $\hat{h} \in V^{'}$ tal que

$$\hat{h} : V \rightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

donde

$$\left\langle \hat{h}, v \right\rangle_{V',V} = (h, v)_H \text{ para todo } v \in V.$$

ii) La aplicación T

$$\begin{array}{rcl} T : H & \rightarrow & V^{'} \\ h & \rightarrow & T(h) = \hat{h}, \end{array}$$

es lineal, continua e inyectiva.

Demostración.

i) Para $h \in H$ definimos,

$$\begin{array}{rcl} \hat{h} : V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ v & \rightarrow & \hat{h}(v) = (h, v)_H. \end{array}$$

$\hat{h}$ es lineal y acotada en V; en efecto, por la inmersión $V \hookrightarrow H$ logramos

$$\left| \hat{h}(v) \right| \leq \|h\|_H \|v\|_H \leq C \|h\|_H \|v\|_V \quad ,$$

resultando

$$\left\| \hat{h} \right\|_{V'} \leq C \|h\|_H \quad ,$$

donde C es la constante de inmersión. La linealidad de $\hat{h}$ es gracias a que $(.,.)_H$ es bilineal.

Por lo tanto $\hat{h} \in V'$

$$\langle h, v\rangle_{V',V} = (h,v)_H \quad \text{para todo } v \in V.$$

ii) Por (i) podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} T: H &\rightarrow V' \\ h &\rightarrow T(h) = \hat{h}, \end{aligned}$$

tal que

$$\left\langle \hat{h}, v\right\rangle_{V',V} = (h,v)_H \text{ para todo } v \in V.$$

T es lineal, por la bilinealidad del producto interno.

T es continua, debido a que $\hat{h}$ es acotada.

T es inyectiva; en efecto, sea $h \in N(T)$, donde $N(T)$ denota núcleo de T es decir $T(h) = 0$, entonces se tiene $\hat{h} = 0$, luego por la definición de T tenemos

$$0 = (h,v)_H \text{ para todo } v \in V. \tag{1.7}$$

Por la densidad de V sobre H, de (1.7) obtenemos que $h = 0$.

Así podemos identificar

$$\hat{h} \approxeq h. \blacksquare$$

Observación. Si $v \in V \hookrightarrow H$, por la Proposición 1.34 -(i) existe $\hat{v} \in V'$ tal que

$$\langle \hat{v}, w\rangle_{V',V} = (v,w)_H \text{ para todo } w \in V.$$

Por la identificación hecha en la Proposición 1.34-(ii) escribimos

$$\hat{v} \approxeq v.$$

De donde conseguimos que

$$\langle v, w\rangle_{V',V} = (v,w)_H \text{ para todo } w \in V. \tag{1.8}$$

Sea $u = w$, así de (1.8) obtenemos

$$\langle v, u \rangle_{V',V} = (v, u)_H = (u, v)_H,$$

como $u \in V$ por la Proposición 1.34-(i) existe $\hat{u} \in V'$ que verifica lo siguiente

$$\langle \hat{u}, v \rangle_{V',V} = (u, v)_H$$

y por la identificación hecha en la Proposición 1.34-(ii) obtenemos $\hat{u} \approxeq u$. Así logramos

$$\langle v, u \rangle_{V',V} = \langle u, v \rangle_{V',V} \quad \text{para todo } u,\ v \in V. \tag{1.9}$$

Distibuciones Vectoriales

Sea X un espacio de Banach. Una *Distribución Vectorial* es una aplicación lineal y continua definida sobre $\mathcal{D}(0,T)$ con valores en X, el conjunto $\mathcal{L}\left(\mathcal{D}(0,T); X\right)$ representa el espacio de las distribuciones vectoriales definidas sobre $\mathcal{D}(0,T)$ con valores en X.
Denotamos $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T); X) = \mathcal{D}'(0,T; X)$.

Sea $u \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ es continua en el siguiente sentido, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(0,T)$ es tal que

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ en } \mathcal{D}(0,T) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

entonces

$$u(\varphi_n) \longrightarrow u(\varphi) \text{ en } X \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Si $u \in L^1(0,T;X)$ definamos la aplicación

$$\begin{aligned} T_u : \mathcal{D}(0,T) &\rightarrow X \\ \varphi &\rightarrow T_u(\varphi) = \int_0^T \varphi(t) u(t) dt. \end{aligned}$$

Luego T_u define una distribución vectorial, es decir, a cualquier función $u \in L^1(0,T;X)$ podemos asociar una distribución vectorial $T_u \in \mathcal{D}'(0,T;X)$.
En adelante identificamos a toda función $u \in L^1(0,T;X)$ con la distribución vectorial T_u que

ella induce y escribimos

$$T_u \equiv u.$$

Definición 1.35. Dada $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ definimos la derivada distribucional de f como

$$f'(\varphi) = -f(\varphi').$$

Definición 1.36. Sean X, Y espacios de Banach y $X \cap Y \neq \varnothing$, $u \in L^1(0,T;X)$ y $w \in L^1(0,T;Y)$. Entonces, la función w es llamada la *Derivada generalizada de orden* n de la función u si verifica lo siguiente

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt \ \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Escribimos $w = u^{(n)}$.

Proposición 1.37. Sea $u \in L^1(0,T;X)$, v y $w \in L^1(0,T;X)$. Si $u^{(n)} = v$, $u^{(n)} = w$, son derivadas en el sentido generalizado. Entonces $v = w$ en $L^1(0,T;X)$.

Demostración. Para todo $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$, en virtud de la Definición 1.36 tenemos lo siguiente

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)v(t)dt$$

y

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt.$$

De donde obtenemos

$$\int_0^T \varphi(t)\left(w(t) - v(t)\right)dt = 0,$$

por la Proposición 1.31 deducimos

$$w(t) - v(t) = 0 \ \ c.s. \text{ en } (0,T). \blacksquare$$

Proposición 1.38. Sean $X \subseteq Z$ espacios de Banach, consideramos $u_k^{(n)}$ la derivada generalizada de orden n de u_k tal que

$$u_k \rightharpoonup u \;\text{ en }\; L^q(0,T;X), \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

y

$$u_k^{(n)} \rightharpoonup v \;\text{ en }\; L^p(0,T;Z), \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

donde p y q no necesariamente son conjugados. Entonces $u^{(n)} = v$, en el sentido distribucional.

Demostración. Tenemos que

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u_k(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)u_k^{(n)}(t)dt \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Para $w \in Z^{'}$ conseguimos

$$\left\langle w, \int_0^T \varphi^{(n)}(t)u_k(t)dt \right\rangle_{Z',Z} = \left\langle w, (-1)^n \int_0^T \varphi(t)u_k^{(n)}(t)dt \right\rangle_{Z',Z}.$$

Como $\varphi^{(n)}u_k \in L^q(0,T;X)$, $\varphi u_k^{(n)} \in L^p(0,T;Z)$ y por la Proposición 1.24-(i) resulta

$$\int_0^T \left\langle v\varphi^{(n)}(t), u_k(t)dt \right\rangle_{Z',Z} dt = (-1)^n \int_0^T \left\langle w\varphi(t), u_k^{(n)}(t)dt \right\rangle_{Z',Z} dt. \tag{1.10}$$

Tenemos que $w\varphi^n \in L^{q'}(0,T;X')$, $w\varphi \in L^{p'}(0,T;Z^{'})$ y por la Definición 1.28 haciendo $k \to \infty$ en (1.10) obtenemos

$$\int_0^T \left\langle w\varphi^{(n)}(t), u(t) \right\rangle_{Z',Z} dt = (-1)^n \int_0^T \langle w\varphi(t), v(t)\rangle_{Z',Z}\, dt \text{ con } u \text{ y } v \in L^p(0,T;Z)$$

y por la Proposición 1.24-(i) deducimos

$$\left\langle w, \int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t) \right\rangle_{Z',Z} dt = \left\langle w, (-1)^n \int_0^T \varphi(t)v(t) \right\rangle_{Z',Z} dt \text{ , para todo } w \in Z^{'},$$

de donde resulta

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)v(t)dt \ , \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Así

$$v = u^{(n)},$$

en el sentido distribucional. ■

Proposición 1.39. Sea la terna de evolución $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, y $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 < T < \infty$. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados

i) La derivada generalizada de $u \in L^p(0,T;V)$ es única, además $u^{(n)} \in L^q(0,T;V')$.

ii) Dado cualquier elemento $u \in L^p(0,T;V)$, entonces existe la derivada generalizada $u^{(n)} \in L^q(0,T;V')$ si y solo si existe $w \in L^q(0,T;V')$ tal que para todo $v \in V'$ tenemos

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)(u(t),v)_H dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) \langle w(t), v \rangle_{V',V} dt. \tag{1.11}$$

La igualdad (1.11), quiere decir que la derivada generalizada de orden n de la aplicación real $t \longmapsto (u(t),v)$ es $t \longmapsto \langle w(t), v \rangle$, es decir

$$\frac{d^n}{dt^n}(u(t),v)_H = \langle w(t), v \rangle_{V',V} .$$

En tal caso denotamos $w = u^{(n)}$, luego tenemos

$$\frac{d^n}{dt^n}(u(t),v)_H = \left\langle u^{(n)}(t), v \right\rangle_{V',V} .$$

Aquí $\dfrac{d^n}{dt^n}$ denota la *Derivada generalizada de orden* n de la función real sobre $(0,T)$.

Demostración.Ver Zeidler [16]. ■

Teorema 1.40. (Temam). Sea X un espacio de Banach y u, $g \in L^1(0,T;X)$.

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) u es igual a la primitiva de la función g es decir existe $\xi \in X$ tal que

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(\tau)d\tau, \quad c.s. \text{ en } (0, T).$$

ii) Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ tenemos

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt.$$

iii) Para cada $\eta \in X'$ se verifica

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, u(t) \rangle_{X',X} = \langle \eta, g(t) \rangle_{X',X} \ ,$$

donde $\dfrac{d}{dt}$ indica derivada distribucional.

Demostración.

i)⇒ii) Como u es primitiva de g tenemos

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(\tau)d\tau$$

y derivando distribucionalmente, resulta

$$u'(t) = \xi' + g(t).$$

Esta última igualdad es debido a que la derivada distribucional de la función $t \mapsto \displaystyle\int_0^t g(\tau)d\tau$ es $g(t)$, cuya demostración se puede ver en Zeidler [16], así resulta

$$u'(t) = 0 + g(t).$$

Por Definición 1.36 obtenemos

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

ii)⇒iii) Si $\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt$, para $\eta \in X'$ conseguimos

$$\left\langle \eta, \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt \right\rangle_{X',X} = -\left\langle \eta, \int_0^T g(t)\varphi(t)dt \right\rangle_{X',X}.$$

Como $u\varphi'$, $g\varphi \in L^1(0,T,X)$ y por la Proposición 1.24-(i) obtenemos

$$\int_0^T \langle \eta, u(t)\rangle_{X',X}\, \varphi'(t)dt = -\int_0^T \langle \eta, g(t)\rangle_{X',X}\, \varphi(t)dt, \tag{1.12}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Así pues la aplicación

$$t \longmapsto \langle \eta, u(t)\rangle_{X',X} \in L^1(0,T)$$

define una distribución. Por definición de la derivada generalizada en (1.12) resulta

$$-\int_0^T \frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X',X}\, \varphi(t)dt = -\int_0^T \langle \eta, g(t)\rangle_{X',X}\, \varphi(t)dt.$$

Obteniendo

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X',X} - \langle \eta, g(t)\rangle_{X',X}\right)\varphi(t)dt = 0 \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(0,T),$$

por el Lema 1.9 deducimos

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X',X} = \langle \eta, g(t)\rangle_{X',X} \quad c.s. \text{ en } (0,T).$$

iii)⇒ii) Si

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X',X} = \langle \eta, g(t)\rangle_{X',X}$$

entonces

$$\int_0^T \langle \eta, u(t)\rangle_{X',X} \varphi'(t)dt = -\int_0^T \langle \eta, g(t)\rangle_{X',X} \varphi(t)dt.$$

Como $u\varphi'$, $g\varphi \in L^1(0,T,X)$ y por la Proposición 1.24-(i) tenemos

$$\left\langle \eta, \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt \right\rangle_{X',X} = -\int_0^T \langle \eta, g(t)\varphi(t)dt\rangle_{X',X} \text{ para todo } \eta \in X^{'}.$$

Así resulta

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -g(t)\varphi(t)dt.$$

ii)⇒i) Como $u \in L^1(0,T;X)$, existe u'derivada distribucional.

Sea

$$u_0(t) = \int_0^t g(s)ds,$$

derivando distribucionalmente, obtenemos

$$u_0'(t) = g(t).$$

Así para todo $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ resulta

$$-\int_0^T u'(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T u_0'(t)(t)\varphi(t)dt,$$

por consiguiente

$$\int_0^T \left[u'(t) - u_0'(t)\right] \varphi(t)dt = 0.$$

Por la Proposición 1.32 logramos

$$u'(t) - u_0'(t) = 0 \ \ c.s. \text{ en } (0,T)$$

entonces

$$(u-u_0)'(t) = 0,$$

lo que implica

$$u - u_0 = \xi,$$

donde $\xi \in X$ es una constante. Finalmente

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds.$$

Así logramos la demostración de las equivalencias del Teorema. ■

Lema 1.41. Dada la función $u \in L^1(0,T;X)$ y $u' \in L^1(0,T;X)$. Entonces u es continua sobre $[0,T]$ con valores en X salvo un conjunto de medida nula.

Demostración. Por el Teorema 1.40 -(i) tenemos que, si

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T u'(t)\varphi(t)dt \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Entonces

$$u(t) = \xi + \int_0^t u'(s)ds \ c.\ s. \text{ en } (0,T).$$

En esta última, debido a la continuidad de la función contante ξ y de la integral

$$t \mapsto \int_0^t u'(s)ds,$$

conseguimos que $u \in C([0,T]\,;X)$. ■

Definicón 1.42. El Espacio Sobolev $W^{1,p}(0,T;V;H)$. Sea la terna de evolución

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

y $1 < p < \infty$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, definimos el conjunto

$$W^{1,p}(0,T;V;H) = \left\{u \in L^p(0,T;V),\ u' \in L^q(0,T;V')\right\}.$$

Dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V;H)} = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V')}.$$

Teorema 1.43. Sea la terna de evolución $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ y $1 < p < \infty$. Entonces la siguiente inmersión es continua

$$W^{1,p}(0,T;V;H) \hookrightarrow C([0,T];H).$$

Es decir si $u \in W^{1,p}(0,T;V;H)$ entonces existe $\tilde{u} \in C([0,T];H)$ tal que

$$u(t) = \tilde{u}(t) \text{ } c.s. \text{ en } (0,T)$$

y

$$\|u\|_{C([0,T];H)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V;H)},$$

donde C es una constante. Ver en la Definición 1.15 la norma del espacio $C([0,T];H)$.

Demostración. Ver Zeidler [16]. ■

Lema 1.44. Sea X_0, X y X_0 espacios de Banach , sea $X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$, X_0 y X_1 son reflexivos, $X_0 \hookrightarrow X$ inmersión compacta. Dado $\eta > 0$, $\exists$ c_η tal que

$$\|v\|_X \leq \eta\|v\|_{X_0} + c_\eta\|v\|_{X_1} \text{ para todo } v \in X_0. \tag{1.13}$$

Demostración. Supongamos que (1.13) es falso, así tenemos la existencia de η tal que para todo c existe $v \in X_0$ tal que

$$\|v\|_X > \eta\|v\|_{X_0} + c\|v\|_{X_1}.$$

Es decir existe η tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $v_m \in X_0$, que verifican lo siguiente

$$\|v_m\|_X > \eta\|v_m\|_{X_0} + m\|v_m\|_{X_1}. \tag{1.14}$$

Sea $u_m = \frac{v_m}{\|v_m\|_{X_0}}$, de donde conseguimos que $\|u_m\|_{X_0} = 1$, dividiendo $\frac{1}{\|u_m\|_{X_0}}$ en (1.14) tenemos

$$\|u_m\|_X > \eta + m\|u_m\|_{X_1}. \tag{1.15}$$

De (1.15) resulta

$$\|u_m\|_{X_1} < \frac{\|u_m\|_X - \eta}{m},$$

como u_m es acotada en $X_0 \hookrightarrow X$, entonces obtenemos que también es acotada en X, así logramos

$$\|u_m\|_{X_1} < \frac{C - \eta}{m}. \tag{1.16}$$

Entonces de (1.16) conseguimos

$$u_m \underset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } X_1. \tag{1.17}$$

Como u_m es acotada en X_0, entonces tiene una subsucesión u_{m_k} talque $u_{m_k} \longrightarrow u$ en X , debido a la imnersión compacta de $X_0 \hookrightarrow X.$ Luego por la inmersión continua de $X \hookrightarrow X_1$ resulta

$$u_{m_k} \longrightarrow u \text{ en } X_1. \tag{1.18}$$

Luego por la unicidad de límite en (1.17) y (1.18) conseguimos $u = 0$. Por consiguiente, haciendo $k \longrightarrow \infty$ en (1.15) para la subsucesión $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ resulta $0 > n$, lo que es una contradicción. ■

Teorema 1.45. **(Aubin-Lions).** Sean las condiciones dadas en el Lema 1.44, además $1 \leq p_0,\ p_1 < \infty$ tal que $X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$ inmersiones compactas.
Definimos el conjunto

$$w(0,T) = \left\{u \in L^{p_0}(0,T;X_0); u' \in L^{p_1}(0,T;X_1)\right\}.$$

Dotado por la norma

$$\|u\|_{w(0,T)} = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;X_0)} + \left\|u'\right\|_{L^{p_1}(0,T;X_1)}.$$

Entonces

$$w(0,T) \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;X)\ ,$$

es una inmersión compacta.

Demostración.Ver Lions [8]. ■

Lema 1.46.(Gronwall). Sean u y v funciones continuas no negativas en $[0,T]$ tal que, $\alpha \geq 0$, satisfaciendo

$$u(t) \leq \alpha + \int_0^t v(\tau)u(\tau)d\tau,\ t \in [0,T].$$

Entonces

$$u(t) \leq \alpha\ exp\left(\int_0^t v(\tau)d\tau\right).$$

Donde exp define la función exponencial.

Demostración. Ver Sotomayor [13]. ■

Lema 1.47. (Desigualdad de Bellman-Gronwall). Sean ϕ, z y h funciones continuas sobre $[0,T]$, tal que h es una función no negativa, satisfaciendo

$$\phi(t) \leq z(t) + \int_0^t h(\tau)\phi(\tau)d\tau\ ,\ t \in [0,T].$$

Entonces

$$\phi(t) \leq z(t) + \int_0^t exp\left(\int_\tau^t h(s)ds\right)h(\tau)z(\tau)d\tau.$$

Demostración. Sea $g(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau h(s)\phi(s)ds$, derivando obtenemos $g'(\tau) = h(\tau)\phi(\tau)$, reemplazando esta igualdad en la hipótesis del Lema 1.47 resulta para $\tau \in [0,T]$

$$\phi(\tau) \leq z(\tau) + g(\tau). \tag{1.19}$$

Como $h(\tau) \geq 0$ tenemos

$$h(\tau)\phi(\tau) \leq h(\tau)z(\tau) + h(\tau)g(\tau),$$

de donde conseguimos

$$g'(\tau) - h(\tau)g(\tau) \leq h(\tau)z(\tau). \tag{1.20}$$

Multiplicamos por $exp\left(-\int_0^\tau h(s)ds\right)$ y luego integrando sobre $[0,t]$ en (1.20), resulta

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(exp\left(-\int_0^\tau h(s)ds\right)g(\tau)d\tau\right)d\tau \leq \int_0^t exp\left(-\int_0^\tau h(s)ds\right)h(\tau)z(\tau)d\tau,$$

de donde deducimos

$$exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)g(t) - g(0) \leq \int_0^t exp\left(-\int_0^\tau h(s)ds\right)h(\tau)z(\tau)d\tau.$$

Gracias a que $g(0)=0$, tenemos lo siguiente

$$g(t) \leq exp\left(\int_0^t h(s)ds\right).\int_0^t exp\left(-\int_0^\tau h(s)ds\right)h(\tau)z(\tau)d\tau.$$

Así resulta

$$g(t) \leq \int_0^t exp\left(\int_\tau^t h(s)ds\right)h(\tau)z(\tau)d\tau,$$

reemplazando esta última acotación en (1.19) tenemos

$$\phi(t) \leq z(t) + \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t h(s)ds\right)h(\tau)z(\tau)d\tau. \blacksquare$$

Teorema. 1.48. (Teorema de Green, o, Fórmula de Green) Sea Ω un conjunto abierto acotado bien regular de $\mathbb{R}^n$, denotamos la frontera de Ω como $\partial\Omega = \Gamma$. Sean $u,\ v \in H^1(\Omega)$ entonces para cada $i = 1,\ 2,\ 3, ...n$ tenemos

$$\int_\Omega u\frac{dv}{dx_i}dx = -\int_\Omega \frac{du}{dx_i}vdx + \int_\Gamma uvd\Gamma.$$

Demostración. ver Kesavan [6]. $\blacksquare$

Corolario. 1.49. Considerando Ω como en el Teorema 1.48, si $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, entonces tenemos

$$\int_\Omega(-\Delta u)vdx = \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx - \int_\Gamma \frac{du}{d\eta}vd\Gamma.$$

Demostración. ver Kesavan [6]. $\blacksquare$

Lema 1.50. Sean X e Y espacios de Banach, $X \hookrightarrow Y$ inmersión continua y densa , X reflexivo. sea el conjunto

$$C_s([0,T]\,;Y) = \Big\{ f \in L^\infty(0,T;Y);\ \forall \phi \in Y^{'},\ t \longmapsto \langle f(t), \phi \rangle_{Y',Y} \text{ es continua sobre } [0,T] \Big\}.$$

Entonces $L^\infty(0,T;X) \cap C_s([0,T]\,;Y) = C_s([0,T]\,;X)$

Demostración. Ver Lions y Magenes [9]. ■

Capítulo 2

Existencia y unicidad de la solución débil para una ecuación de evolución semilineal de segundo orden

2.1 Teorema de existencia de solución

Antes de enunciar el teorema de existencia de solución, debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones.

Sea H un espacio de Hilbert cuya norma y producto interno lo denotamos por $|.|_H$, $(.,.)_H$ respectivamente; V_i son espacios de Hilbert, reflexivos y separables cuya norma y producto interno es representada por $\|.\|_{V_i}$, $((.,.))_{V_i}$.

Consideramos las siguiente hipótesis

H1) $V_i \hookrightarrow H$, una inmersión continua, para $i = 1, 2$.

H2) $V_1 \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow H \approxeq H' \hookrightarrow V_2' \hookrightarrow V_1'$

  i) V_i es denso en H , para $i = 1$, 2.

  ii) $V_1 \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow H$ son inmersiones continuas, es decir existen k y $\tilde{k}$ constantes positivas de inmersión que verifican lo siguiente

$$\|\psi\|_{V_2} \leq k \, \|\psi\|_{V_1} \text{ para todo } \psi \in V_1 \tag{2.1}$$

y

$$|\psi|_H \leq \tilde{k} \, \|\psi\|_{V_1} \text{ para todo } \psi \in V_1. \tag{2.2}$$

iii) $V_2' \hookrightarrow V_1'$ es una inmersión continua, es decir existe $k_1 > 0$ constante de inmersión tal que

$$\|\psi\|_{V_1'} \leq k_1 \, \|\psi\|_{V_2'} \text{ para todo } \psi \in V_2'. \tag{2.3}$$

H3) Sea $0 < T < \infty$ fijo, $a_1(t\,;.\,,.)$, $t \in [0,T]$ una familia de formas bilineales definidas sobre $V_1 \times V_1$ satisfaciendo

i) Se verifica que

$$a_1(t;\phi,\psi) = a_1(t;\psi,\phi) \text{ para todo } \phi,\ \psi \in V_1 \text{ y } t \in [0,T]\,. \tag{2.4}$$

ii) Existe $c_{11} > 0$ tal que para todo ψ, $\phi \in V_1$ y $t \in [0,T]$ tenemos lo siguiente

$$|a_1(t;\phi,\psi)| \leq c_{11} \, \|\phi\|_{V_1} \|\psi\|_{V_1}\,. \tag{2.5}$$

iii) Existen $\alpha_1 > 0$ y $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tales que para todo $\phi \in V_1$ y $t \in [0,T]$ tenemos

$$a_1(t;\phi,\phi) + \lambda_1 \, |\phi|_H^2 \geq \alpha_1 \, \|\phi\|_{V_1}^2\,. \tag{2.6}$$

iv) Se cumple que

$$t \longmapsto a_1(t;\phi,\psi) \text{ es continuamente diferenciable sobre } [0,T] \tag{2.7}$$

para todo ϕ, $\psi \in V_1$ fijos.

v) Existe $c_{12} > 0$ tal que para todo ϕ, $\psi \in V_1$ y $t \in [0,T]$ tenemos lo siguiente

$$\left|a_1'(t;\phi,\psi)\right| \leq c_{12} \, \|\phi\|_{V_1} \|\psi\|_{V_1}\,, \tag{2.8}$$

donde $' = \dfrac{d}{dt}$, denota la derivada en el tiempo.

Con estas hipótesis podemos definir los operadores $A_1(t)$, $A_1'(t) \in \mathcal{L}(V_1, V_1')$, con $t \in [0,T]$ definidos por

$$a_1(t;\phi,\psi) = \langle A_1(t)\phi, \psi\rangle_{V_1',V_1} \text{ para todo } \phi,\psi \in V_1 \tag{2.9}$$

y

$$a_1'(t;\phi,\psi) = \left\langle A_1'(t)\phi, \psi\right\rangle_{V_1',V_1} \text{ para todo } \psi,\phi \in V_1. \tag{2.10}$$

H4) Sea $t \in [0,T]$, $a_2(t;\phi,\varphi)$ una familia de formas bilineales definida sobre $V_2 \times V_2$ satisfaciendo:

i) Se verifica que

$$a_2(t;\phi,\varphi) = a_2(t;\varphi,\phi) \text{ para todo } \varphi,\phi \in V_2 \text{ y } t \in [0,T]. \tag{2.11}$$

ii) Existe $c_{21} > 0$ tal que para todo $\psi,\phi \in V_2$ y $t \in [0,T]$ tenemos lo siguiente

$$|a_2(t;\phi,\psi)| \leq c_{21} \|\phi\|_{V_2} \|\psi\|_{V_2}. \tag{2.12}$$

iii) Existen $\alpha_2 > 0$ y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que para todo $\phi \in V_2$ y $t \in [0,T]$ tenemos

$$a_2(t;\phi,\phi) + \lambda_2 |\phi|_H^2 \geq \alpha_2 \|\phi\|_{V_2}^2. \tag{2.13}$$

iv) Se cumple que

$$t \longmapsto a_2(t;\phi,\psi) \text{ es continua sobre } [0,T]. \tag{2.14}$$

Con estas hipótesis podemos definir el operador $A_2(t) \in \mathcal{L}(V_2, V_2')$ definido por

$$a_2(t;\phi,\psi) = \langle A_2(t)\phi, \psi\rangle_{V_2',V_2} \text{ para todo } \psi,\phi \in V_2. \tag{2.15}$$

Debido a **H2** vale la siguiente igualdad, para todo $\phi \in V_2^{'}$, $\varphi \in V_1$ obtenemos

$$\langle \phi, \varphi \rangle_{V_1^{\prime}, V_1} = \langle \phi, \varphi \rangle_{V_2^{\prime}, V_2} . \tag{2.16}$$

Definimos el siguiente espacio vectorial

$$W(0,T) = \left\{ g \in L^2(0,T;V_1);\ g' \in L^2(0,T;V_2),\ g'' \in L^2(0,T;V_1^{'}) \right\},$$

donde $g' = \dfrac{dg}{dt}$, $g'' = \dfrac{d^2 g}{dt^2}$.
Cuya norma está dada por

$$\|g\|_{W(0,T)} = \left(\|g\|^2_{L^2(0,T;V_1)} + \left\|g'\right\|^2_{L^2(0,T;V_2)} + \left\|g''\right\|^2_{L^2(0,T;V_1^{'})} \right)^{1/2}.$$

Consideramos el siguiente problema de Cauchy para una ecuación de evolución semi lineal de segundo orden

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} + A_2(t)\dfrac{dy}{dt} + A_1(t)y = f(t,y) \text{ en } (0,T) \\ y(0) = y_0 \in V_1 \\ \dfrac{dy}{dt}(0) = y_1 \in H, \end{cases} \tag{2.17}$$

donde $f : [0,T] \times V_2 \rightarrow V_2^{'}$ es el término no lineal, además satisface lo siguiente

A1) Se cumple que

$$t \longmapsto f(t,\zeta) \text{ es medible para todo } \zeta \in V_2. \tag{2.18}$$

A2) Existe $\beta \in L^2(0,T)$ donde $\beta(t) > 0$ tal que

$$\|f(t,\zeta) - f(t,\xi)\|_{V_2^{\prime}} \leq \beta(t) \|\zeta - \xi\|_{V_2} . \tag{2.19}$$

Es decir, f es lipchitziana sobre V_2

A3) Existe $\gamma \in L^2(0,T)$ donde $\gamma(t) > 0$ tal que

$$\|f(t,0)\|_{V_2^{\prime}} \leq \gamma(t). \tag{2.20}$$

Definición 2.1. Decimos que una función y es una *solución débil* del problema (2.17) si $y \in W(0,T)$ y satisface

$$\begin{cases} \langle y''(.), \phi \rangle_{V_1', V_1} + a_2(.; y'(.), \phi) + a_1(.; y(.), \phi) = \langle f\left(., y(.)\right), \phi \rangle_{V_2', V_2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{para todo } \phi \in V_1 \text{ en el sentido de } \mathcal{D}'(0,T), \\ y(0) = y_0 \in V_1 \\ \dfrac{dy}{dt}(0) = y_1 \in H. \end{cases}$$

Teorema 2.2. Sean a_1 y a_2 una familia de formas bilineales que satisfacen las hipótesis H3-H4 y f una función que satisface (2.18), (2.19) y (2.20). Entonces el problema (2.17) tiene una única solución débil en el espacio $W(0,T)$.

Sea el siguiente problema de Cauchy lineal

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + A_2(t)\dfrac{dy}{dt} + A_1(t)y = g(t) \text{ en } (0,T) \\ y(0) = y_0 \in V_1 \\ \dfrac{dy}{dt}(0) = y_1 \in H, \end{cases} \tag{2.21}$$

donde $g \in L^2(0,T;V_2')$. La definición de una solución débil para el problema (2.21) es similar a la Definición 2.1 sólo debemos cambiar $f\left(t, y(t)\right)$ por $g(t)$.

Corolario 2.3. Sea a_1 y a_2 una familia de formas bilineales satisfaciendo las hipótesis mencionadas en el Teorema 2.2 y $g \in L^2(0,T;V_2')$, $y_0 \in V_1$, $y_1 \in H$. Entonces el problema (2.21) tiene una única solución débil y en $W(0,T)$. Además la solución y depende continuamente sobre los datos iniciales, esto es, la siguiente aplicación es continua

$$\begin{array}{rcl} L^2(0,T;V_2') \times V_1 \times H & \longrightarrow & W(0,T) \\ (g,\ y_0,\ y_1) & \longrightarrow & y\ . \end{array}$$

Definición 2.4. Si y es la solución del problema (2.17). Entonces la energía asociada al problema esta dada por

$$E(t) = \left|y'(t)\right|_H^2 + a_1(t, y(t), y(t)) + 2\int_0^t a_2(\tau, y'(\tau), y'(\tau))d\tau,\ t \in \langle 0, T\rangle . \tag{2.22}$$

2.2 Problema aproximado

En esta sección definimos el problema aproximado, para el problema (2.17) sobre un espacio finito dimensional, encontrando ahí una única solución.

Desde que V_1 es un espacio separable entonces existe $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ base numerable en V_1 tal que

i) $w_i \in V_1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

ii) $\{w_1, w_2, w_3, w_4, ..., w_m\}$ es linealmente independiente para cada $m \in \mathbb{N}$.

iii) El conjunto de las combinaciones lineales finitas de las w_i es denso en V_1.

Sea $W_m = [w_1, w_2, w_3, w_4, ..., w_m]$ el sub espacio vectorial generado por los m primeros vectores de $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Como $V_1 \hookrightarrow H$ es una inmersión densa, luego esta base se tomará ortonormal en H.

Entonces, estudiamos el problema (2.17) sobre el espacio m-dimensional W_m. Buscamos una solución $Y_m(t) \in W_m$

$$Y_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i,$$

entonces

$$Y_m'(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}'(t)w_i,\ Y_m''(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}''(t)w_i.$$

En la primera ecuación de (2.17), reemplazando Y_m por y y usando (2.16) obtenemos,

$$\begin{gathered}\langle Y_m''(t), w_j\rangle_{V_2',V_2} + \left\langle A_2(t)Y_m'(t), w_j\right\rangle_{V_2',V_2} + \langle A_1(t)Y_m(t), w_j\rangle_{V_1',V_1} = \\ \langle f(t, Y_m(t)), w_j\rangle_{V_2',V_2} .\end{gathered} \tag{2.23}$$

Como $y_0 \in V_1$, entonces existe una sucesión $(Y_{0m})_{m\in\mathbb{N}} \in W_m$ tal que

$$Y_{0m} \longrightarrow y_0 \text{ en } V_1 \text{ cuando } m \longrightarrow \infty, \tag{2.24}$$

donde

$$Y_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}^0 w_i \;\text{ y }\; \alpha_{im}^0 = g_{im}(0).$$

También tenemos que $y_1 \in H$, entonces existe una sucesión $(Y_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$ en W_m tal que

$$Y_{1m} \longrightarrow y_1 \text{ en } H \;\text{ cuando } m \longrightarrow \infty, \tag{2.25}$$

donde

$$Y_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}^1 w_i \text{ y } \;\alpha_{im}^1 = g'_{im}(0)\ .$$

Luego tenemos el problema aproximado

$$\begin{cases} \left(Y''_m(t), w_j\right)_H + \left\langle A_2(t)Y'_m(t), w_j\right\rangle_{V'_2,V_2} + \langle A_1(t)Y_m(t), w_j\rangle_{V'_1,V_1} = \\ \langle f\left(t, Y_m(t)\right), w_j\rangle_{V'_2,V_2}\ ,\ t \in [0,T]\ ,\ 1 \le j \le m \\ Y_m(0) = Y_{0m} \;\text{ en }\; V_1 \\ Y'_m(0) = Y_{1m} \;\text{ en }\; H. \end{cases} \tag{2.26}$$

Observamos lo siguiente

$$\left\langle Y''_m(t), w_j\right\rangle_{V'_1,V_1} = (Y''_m(t), w_j)_H = \left(\sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t) w_i, w_j\right)_H = \sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)(w_i, w_j)_H.$$

Así resulta

$$\left\langle Y''_m(t), w_j\right\rangle_{V'_1,V_1} = g''_{jm}. \tag{2.27}$$

También, por (2.15), observamos que

$$\left\langle A_2(t)Y''_m(t), w_j\right\rangle_{V'_2,V_2} = \sum_{i=1}^{m} g''_{im} a_2(t, w_i, w_j), \tag{2.28}$$

así mismo por (2.9) tenemos

$$\langle A_1(t)Y_m(t), w_j\rangle_{V_1',V_1} = \sum_{i=1}^{m} g_{im} a_1(t, w_i, w_j). \tag{2.29}$$

Usando (2.27), (2.28) y (2.29) en la primera ecuación de (2.26) resulta

$$g_{jm}'' + \sum_{i=1}^{m} g_{im}'' a_2(t, w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{m} g_{im} a_1(t, w_i, w_j) = \langle f(t, Y_m(t)), w_j\rangle_{V_2',V_2}.$$

Haciendo variar j desde 1 hasta m, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{bmatrix} g_{1m}'' \\ g_{2m}'' \\ . \\ . \\ g_{mm}'' \end{bmatrix} + [a_2(t, w_i, w_j)]_{m\times m} \begin{bmatrix} g_{1m}' \\ g_{2m}' \\ . \\ . \\ g_{mm}' \end{bmatrix} + [a_1(t, w_i, w_j)]_{m\times m} \begin{bmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ . \\ . \\ g_{mm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle f\left(t, Y_m(t)\right), w_1\rangle_{V_2',V_2} \\ \langle f(t, Y_m(t)), w_2\rangle_{V_2',V_2} \\ . \\ . \\ \langle f(t, Y_m(t)), w_m\rangle_{V_2',V_2} \end{bmatrix}$$

Consideramos los siguientes cambios de variables adecuados. Sean las matrices

$$\tilde{A}_2(t) = [a_2(t, w_i, w_j)]_{m\times m}\ ,\ \tilde{A}_1(t) = [a_1(t, w_i, w_j)]_{m\times m} \tag{2.30}$$

y los siguientes vectores

$$Y = (g_{1m}, g_{2m,} .....g_{mm})^t\ ,\ Y' = \left(g_{1m}', g_{2m,}' .....g_{mm}'\right)^t, \tag{2.31}$$

$$Y_0 = (g_{1m}(0), g_{2m}(0), ...g_{mm}(0))^t\ ,\ Y_1 = \left(g_{1m}'(0), g_{2m}'(0).....g_{mm}'(0)\right)^t\ ,$$

y

$$F\left(t,Y\right)=\left(\langle f(t,Y_m(t)),w_1\rangle_{V_2',V_2},\ldots\ldots\ldots\ldots,\langle f(t,Y_m(t)),w_m\rangle_{V_2',V_2}\right)^t. \tag{2.32}$$

Luego tenemos el siguiente problema

$$\begin{cases} Y''+\tilde{A}_2\left(t\right)Y'+\tilde{A}_1\left(t\right)Y=F\left(t,Y\right)\\ Y(0)=Y_0\\ Y'(0)=Y_1. \end{cases} \tag{2.33}$$

El problema (2.33) es equivalente a

$$\begin{bmatrix} Y'' \\ Y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\tilde{A}_2\left(t\right) & -\tilde{A}_1\left(t\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y' \\ Y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} F\left(t,Y\right) \\ Y' \end{bmatrix},$$

que haciendo los siguientes cambios de variables

$$X=\begin{bmatrix} Y' \\ Y \end{bmatrix}, \tag{2.34}$$

$$A(t)=\begin{bmatrix} -\tilde{A}_2\left(t\right) & -\tilde{A}_1\left(t\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

y

$$H(t,X)=\begin{bmatrix} F\left(t,Y\right) \\ Y' \end{bmatrix}, \tag{2.36}$$

finalmente obtenemos el siguiente problema

$$\begin{cases} X'=M(t,X)\\ X(0)=X_0 \end{cases}; \tag{2.37}$$

donde

$$M(t,X)=A(t)X+H(t,X). \tag{2.38}$$

Veamos si el problema (2.37) cumple las condiciones del Teorema 1.10.

En relación a la función M veamos las siguientes propiedades:

Afirmación 1, $t \longmapsto M(t,X)$ es medible; en efecto, tenemos por (2.18) que $t \longmapsto f(t,\xi)$ es medible para todo ξ en V_2 y $t \in [0,T]$, entonces

$$t \longmapsto \langle f(t,\xi), w_i \rangle_{V_2',V_2} \text{ es medible,}$$

lo que implica

$$t \longmapsto \langle f(t,Y_m), w_i \rangle_{V_2',V_2} \text{ es medible para todo } i = 0,1,...m$$

y por (2.32) tenemos que

$$t \longmapsto F(t,Y) \text{ es medible,}$$

de (2.36) obtenemos que

$$t \longmapsto H(t,X) \text{ es medible.} \tag{2.39}$$

De (2.7), (2.14) y (2.30) resulta que la siguiente aplicación es continua

$$t \longmapsto -\tilde{A}_2(t) - \tilde{A}_1(t)$$

y por lo tanto medible. Luego, por (2.35) tenemos que

$$t \longmapsto A(t) \text{ es medible.} \tag{2.40}$$

Por (2.39), (2.40) y (2.38) obtenemos que $t \longmapsto M(t,X)$ es medible, así queda verificada la afirmación 1.

Afirmación 2, $X \longmapsto M(t,X)$ es continua; en efecto, de (2.38) deducimos que es suficiente verificar la continuidad de la aplicación

$$\begin{aligned} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longmapsto &\quad \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\ X \longmapsto &\quad H(t,X) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Por (2.19) para todo $t \in [0,T]$ obtenemos

$$\xi \longmapsto \langle f(t,\xi), w_i \rangle_{V_2',V_2} \text{ es continua.} \tag{2.42}$$

Definamos las siguientes funciones continuas

$$\begin{cases} P_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^m \\ (a,b) & \to & a, \\ & & \\ P_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^m \\ (a,b) & \to & b \end{cases} \tag{2.43}$$

y

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}^m & \to & W_m \\ & (a_1, a_2, ...a_m) & \to & \phi(a_1, a_2, ...a_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i. \end{array} \tag{2.44}$$

De (2.42) y (2.44) podemos concluir que la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & \overset{\phi}{\longmapsto} & W_m & \overset{\langle f(t,.), w_i \rangle_{V_2',V_2}}{\longmapsto} & \mathbb{R} \\ Y & \longmapsto & \sum_{i=1}^{m} g_{im}, w_i & \longmapsto & \langle f(t, Y_m), w_i \rangle_{V_2',V_2} \end{array}$$

es continua para cada $i = 1, 2.., m$, así de (2.32) resulta que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \overset{F(t,.)}{\longmapsto} & \mathbb{R}^m \\ Y & \longmapsto & F(t,Y) \end{array}$$

es continua. Así tenemos que, si $X = \Big(Y', \ Y\Big) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ entonces por (2.43) conseguimos que las siguientes aplicaciones sean continuas

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \overset{P_2}{\longmapsto} & \mathbb{R}^m & \overset{F(t,.)}{\longmapsto} & \mathbb{R}^m \\ X & \longmapsto & Y & \longmapsto & F(t,Y) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \overset{P_1}{\longmapsto} & \mathbb{R}^m \\ X & \longmapsto & Y', \end{array}$$

lo que implica por (2.36) que la aplicación (2.41) sea continua. Así logramos la afirmación 2.

Afirmación 3, $|M(t, X)| \leq \phi(t)$; $(t, X) \in K$, para cada K compacto donde ϕ es medible; en efecto, de (2.19), (2.20) y usando la disigualdad triangular tenemos

$$\left| \langle f(t, Y_m(t)), w_i \rangle_{V_2, V_2} \right| \leq \beta(t) c \left\| w_i \right\|_{V_1} + \gamma(t) k \left\| w_i \right\|_{V_1} = \phi_i(t) \ ,$$

donde c es una costante y k es una constante ver (2.1). La función ϕ_i es medible debido a que β y γ lo son. De esta última desigualdad y por (2.32) resulta

$$\| F(t, Y) \|_{\mathbb{R}^m} \leq \sum_{i=1}^{m} \phi_i(t),$$

obteniendo gracias a (2.36) la siguiente desigualdad

$$\| H(t, Y) \|_{\mathbb{R}^m} \leq C + \sum_{i=1}^{m} \phi_i(t), \tag{2.45}$$

donde C es una constante. Por (2.45) y (2.38) obtenemos

$$\| M(t, X) \|_{\mathbb{R}^m} \leq C + \sum_{i,j=1}^{m} a_1 \left(t, w_{i,} w_j \right) + \sum_{i,j=1}^{m} a_2 \left(t, w_{i,} w_j \right) + \sum_{i=1}^{m} \phi_i(t) = \phi(t) \ ,$$

por (2.7), (2.14) resulta que ϕ es medible; de donde logramos la afirmación 3.

Luego (2.37) cumple con las hipótesis del Teorema 1.10, entonces existe una única solución sobre $[0, t_m]$ donde $t_m < T$.

2.3 Estimativas a priori

En esta sección, establecemos varias estimativas sobre Y_m que probará que Y_m está acotado sobre un espacio normado.

Multiplicando por g'_{im} a (2.23) y luego sumando en i desde 1 a m resulta

$$\begin{aligned}(Y''_m(t), Y'_m(t))_H + a_2(t, Y'_m(t), Y'_m(t)) + a_1(t, Y_m(t), Y'_m(t)) = \\ \left\langle f(t, Y_m(t)), Y'_m(t) \right\rangle_{V'_2, V_2}.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Observemos lo siguiente

1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left|Y'_m(t)\right|_H^2 &= \frac{d}{dt}(Y'_m(t), Y'_m(t))_H \\ &= (Y''_m(t), Y'_m(t))_H + (Y'_m(t), Y''_m(t))_H \\ &= 2(Y''_m(t), Y'_m(t))_H,\end{aligned}$$

de donde conseguimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|Y'_m(t)\right|_H^2 = (Y''_m(t), Y'_m(t))_H. \tag{2.47}$$

2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a_1(t, Y_m(t), Y_m(t)) &= a_1(t, Y'_m(t), Y_m(t)) + a_1(t, Y_m(t), Y'_m(t)) + \\ &\quad a'_1(t, Y_m(t), Y_m(t)),\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}a_1(t, Y'_m(t), Y_m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a_1(t, Y_m(t), Y_m(t)) - \\ &\quad \frac{1}{2}a'_1(t, Y_m(t), Y_m(t)).\end{aligned} \tag{2.48}$$

Reemplazando (2.47) y (2.48) en (2.46) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|Y'_m(t)\right|_H^2 + a_2(t, Y'_m(t), Y'_m(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a_1(t, Y_m(t), Y_m(t)) - \\ \frac{1}{2}a'_1(t, Y_m(t), Y_m(t)) = \left\langle f(t, Y_m(t)), Y'_m(t) \right\rangle_{V'_2, V_2}.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Usando la condición (2.19) y (2.20) sobre f , para $t \leq t_m$ tenemos

$$
\begin{gathered}
2\left|\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y_m'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau\right| \leq \\
2\int_0^t \left|\left\langle f(\tau, Y_m(\tau)) - f(\tau, 0), Y_m'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2}\right| d\tau + 2\int_0^t \left|\left\langle f(\tau, 0), Y_m'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2}\right| d\tau \leq \\
2\int_0^t \|f(\tau, Y_m(\tau)) - f(\tau, 0)\|_{V_2'} \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2} d\tau + 2\int_0^t \|f(\tau, 0)\|_{V_2'} \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2} d\tau \leq \\
2\int_0^t \beta(\tau) \|Y_m(\tau)\|_{V_2} \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2} d\tau + 2\int_0^t \gamma(\tau) \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2} d\tau,
\end{gathered}
$$

obteniendo

$$
\begin{gathered}
2\left|\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y_m'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau\right| \leq 2\int_0^t \beta(\tau) \|Y_m(\tau)\|_{V_2} \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2} d\tau + \\
2\int_0^t \gamma(\tau) \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2} d\tau.
\end{gathered} \tag{2.50}
$$

Recordemos la desigualdad

$$
ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p' \varepsilon^{1/p-1}} \quad \text{para todo } a,\ b \geq 0, \tag{2.51}
$$

donde $1 < p,\ p' < \infty$, siendo p' el conjugado de p y $\varepsilon > 0$. Si $p = p' = 2$ en (2.51) obtenemos

$$
2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}. \tag{2.52}
$$

Utilizando (2.52) en (2.50) conseguimos

$$
\begin{gathered}
2\left|\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y_m'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau\right| \leq \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\beta^2(\tau) \|Y_m(\tau)\|_{V_2}^2 d\tau + \\
\int_0^t \varepsilon \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \gamma^2(\tau) d\tau + \int_0^t \varepsilon \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq \\
\frac{1}{\varepsilon} \|\gamma\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^+)}^2 + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\beta^2(\tau) \|Y_m(\tau)\|_{V_2}^2 d\tau + 2\int_0^t \varepsilon \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau.
\end{gathered} \tag{2.53}
$$

En relación a los otros términos de (2.49) tenemos las siguientes acotaciones, usando la hipótesis (2.6) resulta

$$
a_1(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau)) \geq \alpha_1 \|Y_m(\tau)\|_{V_1}^2 - \lambda_1 |Y_m(\tau)|^2. \tag{2.54}
$$

Así mismo de la hipótesis (2.13) conseguimos

$$a_2(\tau, Y_m'(\tau), Y_m'(\tau)) \geq \alpha_2 \left\| Y_m'(\tau) \right\|_{V_2}^2 - \lambda_2 \left| Y_m'(\tau) \right|_H^2 . \tag{2.55}$$

De la hipótesis (2.5) logramos

$$-c_{11} \left\| Y_m(0) \right\|_{V_1} \left\| Y_m(0) \right\| \leq -a_1(0, Y_m(0), Y_m(0)). \tag{2.56}$$

Por la hipótesis (2.8) resulta

$$-c_{12} \left\| Y_m(\tau) \right\|_{V_1} \left\| Y_m(\tau) \right\|_{V_1} \leq -a_1'(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau)). \tag{2.57}$$

Integrando de 0 a t a la ecuación (2.49) donde $t < t_m$ obtenemos

$$\int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left\{ \left| Y_m'(\tau) \right|_H^2 + a_1(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau)) \right\} d\tau + \int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau), Y_m'(\tau)) d\tau -$$
$$\int_0^t \frac{1}{2} a_1'(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau)) d\tau = \int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y_m'(\tau) \right\rangle_{V_2', V_2} d\tau,$$

de donde resulta

$$\begin{gathered} \left| Y_m'(t) \right|_H^2 + a_1(t, Y_m(t), Y_m(t)) - \left| Y_m'(0) \right|_H^2 - a_1(0, Y_m(0), Y_m(0)) \\ +2\int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau), Y_m'(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{1}{2} a_1'(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau)) d\tau = \\ 2\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y_m'(\tau) \right\rangle_{V_2', V_2} d\tau. \end{gathered} \tag{2.58}$$

Utilizando (2.53)-(2.57) en (2.58) conseguimos

$$\begin{gathered} \left| Y_m'(t) \right|_H^2 + \alpha_1 \left\| Y_m(t) \right\|_{V_1}^2 + 2\alpha_2 \int_0^t \left\| Y_m'(\tau) \right\|_{V_2}^2 d\tau \leq c_{11} \left\| Y_m(0) \right\|_{V_1}^2 + \\ \left| Y_m'(0) \right|_H^2 + \lambda_1 \left| Y_m(t) \right|_H^2 + 2\lambda_2 \int_0^t \left| Y_m'(\tau) \right|_H^2 d\tau + \\ \int_0^t c_{12} \left\| Y_m(\tau) \right\|_{V_1}^2 d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \gamma \right\|_{L^2(0,T)}^2 + \\ \int_0^t k^2 \frac{1}{\varepsilon} \beta^2(\tau) \left\| Y_m(\tau) \right\|_{V_1}^2 d\tau + 2\varepsilon \int_0^t \left\| Y_m'(\tau) \right\|_{V_2}^2 d\tau, \end{gathered} \tag{2.59}$$

donde k es una constante, ver (2.1).

Tenemos las siguientes acotaciones. Como

$$Y_m(t) = Y_{0m} + \int_0^t Y_m'(\tau)d\tau,$$

usando la desigualdad triangular y por (2.52) para $\varepsilon = 1$, obtenemos

$$|Y_m(t)|_H^2 \leq 2\,|Y_{0m}|_H^2 + 2T\int_0^t \left|Y_m'(\tau)\right|_H^2 d\tau. \tag{2.60}$$

De la convergencia (2.24) tenemos

$$\|Y_{0m}\|_{V_1} \leq c_1 \|y_0\|_{V_1}. \tag{2.61}$$

Así mismo de (2.25) resulta

$$|Y_{1m}|_H \leq c_2 \,|y_1|_H. \tag{2.62}$$

Usando las acotaciones (2.60), (2.61) y (2.62) en (2.59) obtenemos

$$\begin{gathered}\left|Y_m'(t)\right|_H^2 + \alpha_1 \|Y_m(t)\|_{V_1}^2 + 2(\alpha_2 - \varepsilon)\int_0^t \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq c_{11}c_1^2 \|y_0\|_{V_1}^2 + \\ c_2^2\,|y_1|_H^2 + \lambda_1\left(2\tilde{k}^2 \|Y_{0m}\|_{V_1}^2 + 2T\int_0^t \left|Y_m'(\tau)\right|_H^2 d\tau\right) + 2\lambda_2\int_0^t \left|Y_m'(\tau)\right|_H^2 d\tau + \\ c_{12}\int_0^t \|Y_m(\tau)\|_{V_1} d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\|\gamma\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{k^2}{\varepsilon}\int_0^t \beta^2(\tau)\|Y_m(\tau)\|_{V_1}^2 d\tau.\end{gathered} \tag{2.63}$$

Sea α =min$\{\alpha_1, 1\} > 0$, consideramos un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\eta = \frac{2}{\alpha}(\alpha_2 - \varepsilon) > 0. \tag{2.64}$$

Denotemos

$$C = \frac{1}{\alpha}\left[c_{11}c_1^2\|y_0\|_{V_1}^2 + 2\lambda_1\tilde{k}^2c_1^2\|y_0\|_{V_1}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\gamma\|_{L^2(0,T)}^2 + c_2^2\,|y_1|_H^2\right] \tag{2.65}$$

y

$$\widetilde{\beta}(\tau) = 2(\lambda_1 T + \lambda_2) + c_{12} + \frac{k^2}{\varepsilon}\beta^2(\tau), \tag{2.66}$$

donde k, $\tilde{k}$ son constantes de inmersión, ver (2.1) y (2.2).

Usando las notaciones (2.64)-(2.66) en (2.63) obtenemos

$$\begin{gathered}\left|Y_m'(t)\right|_H^2 + \alpha_1 \left\|Y_m(t)\right\|_{V_1}^2 + \alpha\eta\int_0^t \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq \alpha C + \\ \int_0^t \widetilde{\beta}(\tau)\left(\left|Y_m'(\tau)\right|_H^2 + \left\|Y_m(\tau)\right\|_{V_1}^2\right) d\tau \ .\end{gathered} \tag{2.67}$$

Dividimos la desigualdad (2.67) entre $\alpha = \min\{\alpha_1, 1\}$, así logramos

$$\begin{gathered}\left|Y_m'(t)\right|_H^2 + \left\|Y_m(t)\right\|_{V_1}^2 + \eta\int_0^t \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq C + \\ \int_0^t \frac{\widetilde{\beta}(\tau)}{\alpha}\left(\left|Y_m'(\tau)\right|_H^2 + \left\|Y_m(\tau)\right\|_{V_1}^2\right) d\tau \ .\end{gathered} \tag{2.68}$$

De (2.68) resulta

$$\left|Y_m'(t)\right|_H^2 + \left\|Y_m(t)\right\|_{V_1}^2 \leq C + \int_0^t \frac{\widetilde{\beta}(\tau)}{\alpha}\left(\left|Y_m'(\tau)\right|_H^2 + \left\|Y_m(\tau)\right\|_{V_1}^2\right) d\tau. \tag{2.69}$$

Debido al Lema 1.40, tenemos de (2.69)

$$\left|Y_m'(t)\right|_H^2 + \left\|Y_m(t)\right\|_{V_1}^2 \leq C\ exp\left(\int_0^t \frac{\widetilde{\beta}(\tau)}{\alpha} d\tau\right) \leq C exp\left(\frac{1}{\alpha}\left|\widetilde{\beta}\right|_{L^1(0,T)}\right). \tag{2.70}$$

De (2.70) y por el Corolario 1.12 conseguimos que la solución del problema (2.37) tenga un prolongamiento hasta $[0, T]$.

Utilizando (2.70) en (2.68) tenemos

$$\begin{aligned}\left|Y_m'(t)\right|_H^2 + \left\|Y_m(t)\right\|_{V_1}^2 + \eta\int_0^t \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq &\quad C + \int_0^t \frac{\widetilde{\beta}(\tau)}{\alpha} C\ exp\left(\tfrac{1}{\alpha}\left|\widetilde{\beta}\right|_{L^1(0,T)}\right) d\tau \\ \leq &\quad C + C\ exp\left(\frac{1}{\alpha}\left|\widetilde{\beta}\right|_{L^1(0,T)}\right)\int_0^t \tfrac{\widetilde{\beta}(\tau)}{\alpha} d\tau \\ \leq &\quad C + C\ exp\left(\frac{1}{\alpha}\left|\widetilde{\beta}\right|_{L^1(0,T)}\right)\frac{1}{\alpha}\left|\widetilde{\beta}\right|_{L^1(0,T)} .\end{aligned}$$

Así resulta para todo $t \in [0, T]$ la siguiente desigualdad

$$\left|Y_m'(t)\right|_H^2 + \left\|Y_m(t)\right\|_{V_1}^2 + \eta\int_0^t \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq C + C\ exp\left(\frac{1}{\alpha}\left|\widetilde{\beta}\right|_{L^1(0,T)}\right)\frac{1}{\alpha}\left|\widetilde{\beta}\right|_{L^1(0,T)} . \tag{2.71}$$

2.4 Paso al límite

En esta sección usamos los resultados de compacidad débil y débil-$*$ sobre la bola unitaria en un espacio reflexivo de Banach y en el dual de un espacio separable normado respectivamente, siendo posible extraer de $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión $(Y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge en el sentido débil y débil-$*$.

Por (2.71) tenemos que la sucesión $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ esta acotada en $L^\infty(0,T;V_1)\cap L^2(0,T;V_1)$ entonces existe una subsucesión $(Y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $z\in L^\infty(0,T;V_1)\cap L^2(0,T;V_1)$ tal que

$$Y_{m_k}\overset{*}{\rightharpoonup} z \quad \text{en } L^\infty(0,T;V_1) \tag{2.72}$$

y

$$Y_{m_k}\rightharpoonup z \quad \text{en } L^2(0,T;V_1). \tag{2.73}$$

Así mismo por (2.71) la sucesión $(Y_m^{'})_{m\in\mathbb{N}}$ esta acotada en $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V_2)$ entonces existe una subsucesión $(Y_{m_k}^{'})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(Y_m^{'})_{m\in\mathbb{N}}$ y $z'\in L^2(0,T;V_2)\cap L^\infty(0,T;H)$ tal que

$$Y_{m_k}^{'}\rightharpoonup z' \quad \text{en } L^2(0,T;V_2). \tag{2.74}$$

La derivada del límite de (2.73) coincide con el límite de (2.74) en $L^2(0,T;V_2)$, ver Zeidler [15]. Como $A_1(t)\in\mathcal{L}(V_1,V_1^{'})$, $A_2(t)\in\mathcal{L}(V_2,V_2^{'})$ y por (2.71), tenemos que la sucesión $(A_1(t)Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^\infty(0,T;V_1^{'})\cap L^2(0,T;V_1^{'})$ entonces existe $z_1\in L^2(0,T,V_1^{'})$ talque

$$A_1(.)Y_{m_k}\rightharpoonup z_1 \quad \text{en } L^2(0,T;V_1^{'}). \tag{2.75}$$

Por (2.71) la sucesión $(A_2(t)Y_m^{'})_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V_2^{'})$, entonces existe $z_2\in L^2(0,T;V_2^{'})$ tal que

$$A_2(.)Y_{m_k}^{'}\rightharpoonup z_2 \quad \text{en } L^2(0,T;V_2^{'}). \tag{2.76}$$

Así mismo $(A_1^{'}(t)Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^2(0,T;V_1^{'})$, entonces existe $z_3 \in L^2(0,T;V_1^{'})$ tal que

$$A_1^{'}(.)Y_{m_k} \rightharpoonup z_3 \quad \text{en } L^2(0,T;V_1^{'}). \tag{2.77}$$

Veamos que la sucesión $(f(t,Y_{m_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^2(0,T;V_2^{'})$, en efecto por (2.19), (2.20) y $Y_{m_k} \in L^\infty(0,T;V_1)$ resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\| f(\tau, Y_{m_k}(\tau)) \right\|_{V_2'}^2 d\tau &\le \int_0^T \left(\| f(\tau, Y_{m_k}(\tau)) - f(\tau,0) + f(\tau,0) \|_{V_2'} \right)^2 d\tau \\
&\le \int_0^T \left(\beta(\tau) \left\| Y_{m_k}(\tau) \right\|_{V_2} + \gamma(\tau) \right)^2 d\tau \\
&\le 2\int_0^T \beta^2(\tau) \left\| Y_{m_k}(\tau) \right\|_{V_2}^2 d\tau + 2\int_0^T \gamma^2(\tau) d\tau \\
&\le K \ ,
\end{aligned}$$

donde K es una constante. Como $L^2(0,T;V_2^{'})$ es reflexivo existe una subsucesión $(f(.,Y_{m_l}))_{l\in\mathbb{N}}$ y una función $Y \in L^2(0,T;V_2^{'})$ tal que

$$f(\tau, Y_{m_l}(\tau)) \rightharpoonup Y \quad \text{en } L^2(0,T;V_2^{'}). \tag{2.78}$$

De esta manera trabajamos con la subsucesión m_l, en (2.23) muliplicamos por una función

$$\xi \in C^1\left([0,T]\right),$$

tal que $\xi\,(T) = 0$, $\xi(0) = 1$ e integramos de 0 a T, entonces conseguimos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{d^2}{d\tau^2} \left(Y_{m_l}(\tau), w_j \right) \xi\,(\tau)\, d\tau + \int_0^T a_2(\tau, Y_{m_l}^{'}(\tau), w_j) \xi\,(\tau)\, d\tau + \\
&\int_0^T a_1(\tau, Y_{m_l}(\tau), w_j) \xi\,(\tau)\, d\tau = \int_0^T \left\langle f(\tau, Y_{m_l}(\tau)), w_j \right\rangle \xi\,(\tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

La siguiente igualdad es válida

$$\int_0^T \frac{d^2}{d\tau^2} \left(Y_{m_l}(\tau), w_j \right) .\xi\,(\tau)\, d\tau = \int_0^T -\left(Y_{m_l}^{'}(\tau), w_j \right) \xi^{'}\,(\tau)\, d\tau - \left(Y_{m_l}^{'}(0), w_j \right) \xi\,(0)\,.$$

Esta última igualdad reemplazamos en (2.79), así logramos

$$\begin{gathered}\int_0^T -\left(Y'_{m_l}(\tau),w_j\right)\xi'(\tau)\,d\tau+\int_0^T a_2(\tau,Y'_{m_l}(\tau),w_j)\xi(\tau)\,d\tau+\\ \int_0^T a_1(\tau,Y_m(\tau),w_j)\xi(\tau)\,d\tau=\int_0^T\langle f(\tau,Y_m(\tau)),w_j\rangle\,\xi(\tau)\,d\tau+\\ (Y_{1m_l},w_j)\,.\end{gathered}\tag{2.80}$$

Antes de hacer $l\longrightarrow\infty$ en (2.80) veamos las siguientes convergencias

$$\int_0^T -(Y'_{m_l}(\tau),w_j)\xi'(\tau)\,d\tau \underset{l\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}\int_0^T -\left(z'(\tau),w_j\right)\xi'(\tau)\,d\tau;\tag{2.81}$$

en efecto, de (2.74) y por la definición de la convegencia débil tenemos

$$\int_0^T \left\langle \phi(\tau)\,,Y'_{m_l}(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2}d\tau\longrightarrow\int_0^T\left\langle\phi(\tau)\,,z'(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2}d\tau$$

para todo $\phi\in L^2(0,T;V_2')$. Sea $\phi=\xi' w_j\in L^2(0,T;V_2)\hookrightarrow L^2(0,T;V_2')$, entonces obtenemos la siguiente convergencia

$$\int_0^T\left\langle\xi'(\tau)\,w_j,Y'_{m_l}(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2}d\tau\longrightarrow\int_0^T\left\langle\xi'(\tau)\,w_j,z(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2}d\tau.\tag{2.82}$$

De (1.8) resulta

$$\int_0^T(Y'_{m_l}(\tau),w_j)_H\xi'(\tau)\,d\tau=\int_0^T\left\langle\xi'(\tau)\,w_j,Y'_{m_l}(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2}d\tau.\tag{2.83}$$

Por (1.9) tenemos

$$\int_0^T(z(\tau),w_j)_H\,\xi'(\tau)\,d\tau=\int_0^T\left\langle\xi'(\tau)\,w_j,z(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2}d\tau.\tag{2.84}$$

Reemplazando (2.83) y (2.84) en (2.82) resulta (2.81).

Veamos que

$$\int_0^T a_2(\tau,Y'_{m_l}(\tau),w_j)\xi(\tau)\,d\tau\longrightarrow\int_0^T a_2(\tau,z'(\tau),w_j)\xi(\tau)\,d\tau;\tag{2.85}$$

en efecto, como $A_2(.)\xi\,(.)\,w_j \in L^2(0,T;V_2')$ debido a que

$$\int_0^T \|A_2(\tau)\xi\,(\tau)\,w_j\|^2_{V_2'}\,d\tau \leq c_{21}^2 T\,|\xi|^2_{C^\infty(0,T)}\,\|w_j\|^2_{V_2'}\,.$$

Por (2.74) y la definición de la convergencia débil resulta

$$\int_0^T \left\langle A_2(t)\xi\,(\tau)\,w_j, Y'_{m_l}(t)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau \longrightarrow \int_0^T \left\langle A_2(\tau)\xi\,(\tau)\,w_j, z'(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau.$$

De esta última convergencia, (2.15) y (2.11) conseguimos (2.85).

Tenemos que

$$\int_0^T a_1(\tau, Y_{m_l}(\tau), w_j)\xi\,(\tau)\,d\tau \longrightarrow \int_0^T a_1(\tau, z(\tau), w_j)\xi\,(\tau)\,d\tau; \tag{2.86}$$

en efecto, de (2.73) por la definición de la convergencia débil conseguimos

$$\int_0^T \langle \phi\,(\tau)\,, Y_{m_l}(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\,d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle \phi\,(\tau)\,, z(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\,d\tau$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_1')$. Tenemos que $A_1(.)\xi\,(.)\,w_j \in L^2(0,T;V_1')$, debido a que $A_1(t) \in \mathcal{L}(V_1,V_1')$ y por consiguiente obtenemos la siguiente acotación

$$\int_0^T \|A_1(\tau)\xi\,(\tau)\,w_j\|^2_{V_1'}\,d\tau \leq c_{11}^2\widetilde{k}T\,|\xi|^2_{C^\infty(0,T)}\,\|w_j\|^2_{V_1}\,,$$

donde $\widetilde{k}$ es una constante. Entonces para $\phi = A_1(.)\xi\,(.)\,w_j$ resulta

$$\int_0^T \langle A_1(\tau)\xi\,(\tau)\,w_j, Y_{m_l}(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\,d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle A_1(\tau)\xi\,(\tau)\,w_j, z(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\,d\tau,$$

por (2.9) y (2.4) logramos (2.86).

Verifiquemos la siguiente convergencia

$$\int_0^T \left\langle f(\tau, Y_{m_l}(\tau)), w_j\right\rangle_{V_2',V_2} \xi\,(\tau)\,d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle Y(\tau), w_j\rangle_{V_2',V_2}\,\xi\,(\tau)\,d\tau; \tag{2.87}$$

en efecto, de (2.78) tenemos

$$\int_0^T \left\langle \phi\left(\tau\right), f(t, Y_{m_l}(\tau))\right\rangle_{V_2'', V_2'} d\tau \longrightarrow \int_0^T \left\langle \phi\left(\tau\right), Y(\tau\right\rangle_{V_2'', V_2'} d\tau$$

para todo $\phi \in L^2(0, T; V_2^{''})$. Como V_2 es reflexivo obtenemos

$$\int_0^T \left\langle f(t, Y_{m_l}(\tau)), \phi\left(\tau\right)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau \longrightarrow \int_0^T \left\langle Y(\tau), \phi\left(\tau\right)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau \tag{2.88}$$

para todo $\phi \in L^2(0, T; V_2)$. Desde que $\xi w_j \in L^2(0, T; V_2)$, reemplazamos $\xi w_j = \phi$ en (2.88), así resulta (2.87).

La siguiente convergencia

$$\left(Y_{1m_l}, w_j\right)_H \xi\left(0\right) \longrightarrow \left(y_1, w_j\right)_H \xi\left(0\right), \tag{2.89}$$

es válida debido a que

$$Y_{1m_l} \longrightarrow\ y_1 \text{ en } H \quad, Y_{m_l}^{'}(0) = Y_{1m_l}.$$

En (2.80), utilizando las covergencias (2.81), (2.85), (2.86), (2.87) y (2.89) resulta

$$\begin{gathered} \int_0^T -(z'(\tau), w_j)\xi^{'}\left(\tau\right) d\tau + \int_0^T a_2(\tau, z'(\tau), w_j)\xi\left(\tau\right) d\tau + \\ \int_0^T a_1(\tau, z(\tau), w_j)\xi\left(\tau\right) d\tau = \int_0^T \left\langle Y\left(\tau\right), w_j\right\rangle_{V_2', V_2} \xi\left(\tau\right) d\tau + \left(y_1, w_j\right)\xi\left(0\right). \end{gathered} \tag{2.90}$$

Sea $\xi \in \mathcal{D}\left(0, T\right)$ tal que $\xi\left(0\right) = \xi\left(T\right) = 0$, como

$$\tau \longmapsto (z'(\tau), w_j)_H \in L^2(0, T), \tag{2.91}$$

derivando distribucionalmente sobre (2.91) tenemos

$$\int_0^T -(z'(\tau), w_j)\xi^{'}\left(\tau\right) d\tau = \int_0^T \frac{d}{d\tau}(z'(\tau), w_j)\xi\left(\tau\right) d\tau. \tag{2.92}$$

Utilizando (2.92) en el primer término de (2.90), obtenemos para todo $\xi \in \mathcal{D}(0,T)$ y $w_j \in W_m$

$$\int_0^T \frac{d}{d\tau}(z'(\tau), w_j)_H \xi(\tau)\, d\tau + \int_0^T a_2(\tau, z'(\tau), w_j)\xi(\tau)\, d\tau +$$
$$\int_0^T a_1(\tau, z(\tau), w_j)\xi(\tau)\, d\tau = \int_0^T \langle Y(\tau), w_j\rangle_{V_2', V_2} \xi(\tau)\, d\tau.$$

De donde resulta

$$\frac{d}{d\tau}(z'(.), w_j)_H + a_2(., z'(.), w_j) + a_1(., z(.), w_j) = \langle Y(.), w_j\rangle_{V_2', V_2}$$

en el sentido $\mathcal{D}'(0,T)$. Debido a que el conjunto de las combinaciones lineales finitas de los w_i es denso en V_1 y haciendo uso de (2.9), (2.15) y (2.16), obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{d}{d\tau}\left(z'(\tau), v\right)_H + \left\langle A_2(\tau) z'(\tau), v\right\rangle_{V_1', V_1} + \langle A_1(\tau) z(\tau), v\rangle_{V_1', V_1} = \langle Y(\tau), v\rangle_{V_1', V_1}. \tag{2.93}$$

De (2.93) conseguimos

$$\frac{d}{d\tau}\left\langle z'(\tau), v\right\rangle_{V_1', V_1} = \left\langle Y(\tau) - A_2(\tau) z'(\tau) - A_1(\tau) z(\tau), v\right\rangle_{V_1', V_1}$$

en el sentido $\mathcal{D}'(0,T)$ para todo $v \in V_1$. Por el Teorema 1.40-(iii) tenemos

$$\frac{d}{d\tau} z'(.) = -A_2(.) z'(.) - A_1(.) z(.) - Y(.) \in L^2(0,T; V_1').$$

Así resulta, por (2.16) y para todo $v \in V_1$

$$\left\langle z''(\tau), v\right\rangle_{V_1', V_1} + \left\langle A_2(\tau) z'(\tau), v\right\rangle_{V_1', V_1} + \langle A_1(\tau) z(\tau), v\rangle_{V_1', V_1} = \langle Y(\tau), v\rangle_{V_1', V_1} \tag{2.94}$$

2.5 Verificación de los datos iniciales

Veamos que

$$z(0) = y_0\ . \tag{2.95}$$

En efecto, tenemos que para todo $t \in [0, T\rangle$ resulta

$$Y_{m_l}(t) = Y_{m_l}(0) + \int_0^t Y'_{m_l}(\tau) d\tau. \tag{2.96}$$

De (2.74), por la definición de la convergencia débil, obtenemos

$$\int_0^t Y'_{m_l}(\tau) d\tau \rightharpoonup \int_0^t z'(\tau) d\tau \text{ en } V_2. \tag{2.97}$$

Como $Y_{m_l}(0) \longrightarrow y_0$ en V_1 implica que

$$Y_{m_l}(0) \rightharpoonup y_0 \text{ en } V_1 \hookrightarrow V_2. \tag{2.98}$$

Para verificar

$$Y_{m_l}(t) \rightharpoonup z(t) \text{ en } V_1 \tag{2.99}$$

consideremos lo siguiente, sea $\xi \in C^1([0, T])$ tal que $\xi(0) = 0$ y $\xi(t) = 1$.
Definimos la función característica

$$\chi_{(0,t)}(\tau) = \begin{cases} 1 & , \quad \tau \in (0, t) \\ 0 & , \quad \tau \notin (0, t). \end{cases}$$

Por la definición de la convergencia débil en (2.73) y $\chi_{(0,t)} \xi' v \in L^2(0, T; V_1')$ implica

$$\int_0^t \left\langle \xi'(\tau) v, Y_{m_l}(\tau) \right\rangle_{V_1', V_1} d\tau \longrightarrow \int_0^t \left\langle \xi'(\tau) v, z(\tau) \right\rangle_{V_1', V_1} d\tau. \tag{2.100}$$

Gracias a (1.8) obtenemos

$$\int_0^t (v, Y_{m_l}(\tau))_H \, \xi'(\tau) \, d\tau \longrightarrow \int_0^t (v, z(\tau))_H \, \xi'(\tau) \, d\tau. \tag{2.101}$$

Así mismo de (2.74) y $\chi_{(0,t)} \xi v \in L^2(0, T; V_2')$ tenemos

$$\int_0^t \left\langle \xi(\tau) v, Y'_{m_l}(\tau) \right\rangle_{V_2', V_2} d\tau \longrightarrow \int_0^t \langle \xi(\tau) v, z'(\tau) \rangle_{V_2', V_2} d\tau. \tag{2.102}$$

De (2.102) y (1.8) resulta

$$\int_0^t (v, Y_{m_l}^{'}(\tau))_H \xi\,(\tau)\,d\tau \longrightarrow \int_0^t (v, z'(\tau))_H \xi\,(\tau)\,d\tau. \tag{2.103}$$

Sumando las convergencias (2.101) y (2.103) obtenemos

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[(v, Y_{m_l}(t))_H\, \xi\,(\tau)\right] d\tau \longrightarrow \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[(v, z(\tau))_H\, \xi\,(\tau)\right] d\tau,$$

de donde deducimos

$$(v, Y_{m_l}(t))_H \longrightarrow (v, z(t))_H\,.$$

Como $V_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow V_1^{'}$ implica

$$\langle v, Y_{m_l}(t)\rangle_{V_1^{'},V_1} \longrightarrow \langle v, z(t)\rangle_{V_1^{'},V_1} \text{ para todo } v \in V_1^{'}.$$

Entonces

$$Y_{m_l}(t) \rightharpoonup z(t) \text{ en } V_1 \hookrightarrow V_2,$$

así queda verificado (2.99).

Utilizando las convergencias (2.97), (2.98) resulta

$$Y_{m_l}(0) + \int_0^t Y_{m_l}^{'}(\tau)d\tau \rightharpoonup y_0 + \int_0^t z'(\tau)d\tau \text{ en } V_2.$$

Finalmente gracias a (2.99), (2.96) y la unicidad del límite tenemos

$$z(t) = y_0 + \int_0^t z'(\tau)d\tau \text{ para todo } t \in [0, T\rangle\,.$$

Así obtenemos (2.95).

Veamos la siguiente igualdad

$$z'(0) = y_1. \tag{2.104}$$

En efecto, de (2.90), tomando $\xi \in \mathcal{D}(0,T)$ tal que $\xi(T)=0$ y $\xi(0)=1$ conseguimos

$$
\begin{gathered}
\int_0^T -(z'(\tau),w_j)_H \xi'(\tau)\,d\tau + \int_0^T a_2(\tau,z'(\tau),w_j)\xi(\tau)\,d\tau + \\
\int_0^T a_1(\tau,z(\tau),w_j)\xi(\tau)\,d\tau = \int_0^T \langle Y(\tau),w_j\rangle_{V_2',V_2}\,\xi(\tau)\,d\tau + (y_1,w_j)\,\xi(0)\,,
\end{gathered}
$$

obteniendo

$$
\begin{gathered}
-(y_1,w_j)_H\,\xi(0) - \int_0^T \langle z'(\tau),w_j\rangle_{V_1',V_1}\,\xi'(\tau)\,d\tau + \int_0^T a_2(\tau,z'(\tau),w_j)\xi(\tau)\,d\tau + \\
\int_0^T a_1(\tau,z(\tau),w_j)\xi(\tau)\,d\tau = \int_0^T \langle Y(\tau),w_j\rangle_{V_2',V_2}\,\xi(\tau)\,d\tau.
\end{gathered}
\tag{2.105}
$$

Multiplicando a (2.93) por una función $\xi \in C^1(0,T)$ tal que $\xi(T)=0$ y $\xi(0)=1$, luego integrando de 0 a T y después usando (2.9) y (2.15), logramos

$$
\begin{gathered}
\int_0^T \frac{d}{d\tau}(z'(\tau),w_j)_H\xi(\tau)d\tau + \int_0^T a_2\left(\tau,z'(\tau),w_j\right)\xi(\tau)d\tau + \\
\int_0^T a_1\left(\tau,z(\tau),w_j\right)\xi(\tau)d\tau = \int_0^T \langle Y(\tau),w_j\rangle_{V_2',V_2}\,\xi(\tau)d\tau\ ,
\end{gathered}
$$

luego integrando por partes conseguimos

$$
\begin{gathered}
(z'(\tau),w_j)_H\xi(\tau)|_0^T - \int_0^T \langle z'(\tau),w_j\rangle_{V_1',V_1}\,\xi'(\tau)d\tau + \int_0^T a_2\left(\tau,z'(\tau),w_j\right)\xi(\tau)d\tau + \\
\int_0^T a_1\left(\tau,z(\tau),w_j\right)\xi(\tau)d\tau = \int_0^T \langle Y(\tau),w_j\rangle_{V_2',V_2}\,\xi(\tau)d\tau\ ,
\end{gathered}
$$

así obtenemos

$$
\begin{gathered}
-(z'(0),w_j)_H\xi(0) - \int_0^T \langle z'(\tau),w_j\rangle_{V_1',V_1}\,\xi'(\tau)d\tau + \int_0^T a_2\left(\tau,z'(\tau),w_j\right)\xi(t)dt + \\
\int_0^T a_1\left(\tau,z(\tau),w_j\right)\xi(\tau)d\tau = \int_0^T \langle Y(\tau),w_j\rangle_{V_2',V_2}\,\xi(\tau)d\tau.
\end{gathered}
\tag{2.106}
$$

Restando las ecuaciones (2.105) y (2.106), resulta para todo $v \in V_1$

$$
(z'(0),v)_H\xi(0) = (y_1,v)_H\,\xi(0)\,,
$$

desde que V_1 es denso en H implica (2.104).

Tenemos

$$A_1(.)z = z_1. \tag{2.107}$$

En efecto, de (2.73) y por la definición de la convergencia débil resulta que

$$\int_0^T \langle \phi(\tau), Y_{m_l}(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle \phi(\tau), z(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_1')$. Además si $\phi \in L^2(0,T;V_1)$ entonces $A_1(.)\phi \in L^2(0,T;V_1')$ luego obtenemos

$$\int_0^T \langle A_1(\tau)\phi(\tau), Y_{m_l}(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle A_1(\tau)\phi(\tau), z(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau.$$

Por (2.9) y (2.4) resulta

$$\int_0^T \langle A_1(\tau)Y_{m_l}(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle A_1(\tau)z(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau. \tag{2.108}$$

De (2.75) tenemos

$$\int_0^T \langle \phi(\tau), A_1(\tau)Y_{m_l}(\tau)\rangle_{V_1'',V_1'} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle \phi(\tau), z_1(\tau)\rangle_{V_1'',V_1'} d\tau$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_1')$. Como V_1 es reflexivo resulta

$$\int_0^T \langle A_1(\tau)Y_{m_l}(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle z_1(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \tag{2.109}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_1)$. Por unicidad de límites en (2.108) y (2.109) logramos

$$\int_0^T \langle A_1(\tau)z(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau = \int_0^T \langle z_1(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_1)$. En particular tomando $\phi = v\xi$, con $\xi \in \mathcal{D}(0,T)$ y $v \in V_1$ cualquiera, tenemos

$$\int_0^T \langle A_1(\tau)z(\tau), v\xi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau = \int_0^T \langle z_1(\tau), v\xi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau,$$

entonces
$$\int_0^T \langle A_1(\tau)z(\tau), v\rangle_{V_1',V_1} \xi(\tau)\, d\tau = \int_0^T \langle z_1(\tau), v\rangle_{V_1',V_1} \xi(\tau)\, d\tau.$$

En virtud del Lema 1.2 conseguimos

$$\langle A_1(\tau)z(\tau), v\rangle_{V_1',V_1} = \langle z_1(\tau), v\rangle_{V_1',V_1} \text{ para todo } v \in V_1.$$

Lo que implica (2.107).

Tenemos que
$$A_1'(.)z = z_3. \tag{2.110}$$

En efecto, de (2.73) obtenemos

$$\int_0^T \langle \phi(\tau), Y_{m_l}(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle \phi(\tau), z(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \text{ para todo } \phi \in L^2(0,T;V_1').$$

Además si $\phi \in L^2(0,T;V_1)$ entonces $A_1'(.)\phi \in L^2(0,T;V_1')$, luego de esta última convergencia resulta
$$\int_0^T \left\langle A_1'(\tau)\phi(\tau), Y_{m_l}(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau \longrightarrow \int_0^T \left\langle A_1'(\tau)\phi(\tau), z(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau$$
para todo $\phi \in L^2(0,T;V_1)$. De donde conseguimos

$$\int_0^T \left\langle A_1'(\tau)Y_{m_l}(\tau), \phi(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau \longrightarrow \int_0^T \left\langle A_1'(\tau)z(\tau), \phi(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau. \tag{2.111}$$

De (2.77) resulta

$$\int_0^T \left\langle A_1'(\tau)Y_{m_l}(\tau), \phi(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle z_3(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \tag{2.112}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_1)$. Por la unicidad del límite en (2.111) y (2.112) , tenemos

$$\int_0^T \left\langle A_1'(\tau)z(\tau), \phi(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau = \int_0^T \langle z_3(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \text{ para todo } \phi \in L^2(0,T;V_1).$$

En particular tomando $\phi = v\xi$, con $\xi \in D(0,T)$ y $v \in V_1$ cualquiera, obtenemos

$$\int_0^T \left\langle A_1'(\tau)z(\tau), v\xi(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau = \int_0^T \langle z_3(\tau), v\xi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau;$$

lo que implica

$$\int_0^T \left\langle A_1'(\tau)z(\tau), v\right\rangle_{V_1',V_1} \xi(\tau)\, d\tau = \int_0^T \langle z_3(\tau), v\rangle_{V_1',V_1} \xi(\tau)\, d\tau.$$

Por el Lema 1.2 logramos

$$\left\langle A_1'(\tau)z(\tau), v\right\rangle_{V_1',V_1} = \langle z_3(\tau), v\rangle_{V_1',V_1} \text{ para todo } v \in V_1.$$

De donde se sigue (2.110).

Tenemos que

$$A_2(.)z' = z_2. \tag{2.113}$$

En efecto, de (2.74) implica

$$\int_0^T \left\langle \phi(\tau), Y_{m_l}'(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle \phi(\tau), z'(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau \text{ para todo } \phi \in L^2(0,T;V_2').$$

Además si $\phi \in L^2(0,T;V_2)$ entonces $A_2(.)\phi \in L^2(0,T;V_2')$, luego tenemos

$$\int_0^T \left\langle A_2(\tau)Y_{m_l}'(\tau), \phi(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle A_2(\tau)z'(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau \tag{2.114}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_2)$. De (2.76) resulta

$$\int_0^T \left\langle A_2(\tau)Y_{m_l}'(\tau), \phi(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau \longrightarrow \int_0^T \langle z_2(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau \tag{2.115}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_2)$. Por unicidad de límite en las convergencias (2.114) y (2.115) deducimos

$$\int_0^T \langle A_2(\tau)z'(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau = \int_0^T \langle z_2(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau.$$

En particular tomando $\phi = v\xi$, con $\xi \in \mathcal{D}(0,T)$ y $v \in V_2$ cualquiera, tenemos

$$\int_0^T \left\langle A_2(\tau)z'(\tau), v\xi\left(\tau\right)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau = \int_0^T \left\langle z_2(\tau), v\xi\left(\tau\right)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau.$$

En virtud del Lema 1.2 conseguimos

$$\left\langle A_2(\tau)z'(\tau), v\right\rangle_{V_2',V_2} = \left\langle z_2(\tau), v\right\rangle_{V_2',V_2}.$$

De donde logramos (2.113).

2.6 Convergencia fuerte de la solución aproximada

En esta Sección demostramos que $Y_m \longrightarrow z$ y $Y_m' \longrightarrow z'$ convergen fuertemente en $L^2(0,T;V_1)$ y $L^2(0,T;H)$ respectivamente con el objetivo de verificar $Y(t) = f(t,z(t))$ para todo $t \in (0,T)$.

De las estimativas a priori en (2.49) reemplazamos Y_{m_l} por Y_m para simplificar la notación, así resulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|Y_m'(t)\right|_H^2 + a_2(t, Y_m'(t), Y_m'(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a_1(t, Y_m(t), Y_m(t) - \frac{1}{2}a_1'(t, Y_m(t), Y_m(t)) = \left\langle f(t, Y_m(t)), Y_m'(t)\right\rangle.$$

Integrando sobre el intervalo $0 \leq t \leq T$, obtenemos

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left\{\left|Y_m'(\tau)\right|_H^2 + a_1(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau))\right\} d\tau + \int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau), Y_m'(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{1}{2}a_1'(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau))d\tau = \int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y_m'(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau.$$

Multiplicando por 2 y ordenando adecuadamente resulta

$$\begin{aligned}\left|Y_m'(t)\right|_H^2 + a_1(t, Y_m(t), Y_m(t)) + 2\int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau), Y_m'(\tau))d\tau = \left|Y_m'(0)\right|_H^2 + \\ a_1(0, Y_m(0), Y_m(0) + \int_0^t a_1'(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau))d\tau \\ \int_0^t 2\left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y_m'(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau.\end{aligned} \tag{2.116}$$

Debido a la bilinealidad de a_1 deducimos las siguientes igualdades

$$a_1(t, Y_m - z, Y_m - z) + 2a_1(t, Y_m, z) = a_1(t, Y_m, Y_m) + a_1(t, z, z), \tag{2.117}$$

$$a_1(t, Y'_m - z', Y'_m - z') + 2a_1(t, Y'_m, z') = a_1(t, Y'_m, Y'_m) + a_1(t, z', z'), \tag{2.118}$$

$$a'_1(t, Y_m - z, Y_m - z) + 2a'_1(t, Y_m, z) = a'_1(t, Y_m, Y_m) + a'_1(t, z, z), \tag{2.119}$$

$$\left|Y'_m(t) - z'(t)\right|_H^2 + 2(Y'_m(t), z'(t))_H = \left|Y'_m(t)\right|_H^2 + \left|z'(t)\right|_H^2 \tag{2.120}$$

y

$$\begin{gathered}\left\langle f(t, Y_m) - f(t, z), Y'_m - z'\right\rangle_{V'_2, V_2} + \left\langle f(t, z) - Y(t), Y'_m - z'\right\rangle_{V'_2, V_2} + \\ \langle f(t, Y_m), z'\rangle_{V'_2, V_2} + \left\langle Y(t), Y'_m\right\rangle_{V'_2, V_2} = \left\langle f(t, Y_m), Y'_m\right\rangle_{V'_2, V_2} + \\ \langle Y(t), z\rangle_{V'_2, V_2}.\end{gathered} \tag{2.121}$$

Identidades análogas se verifican para la bilineal a_2.

Veamos ahora la siguiente igualdad, utilizando (2.117), (2.118) y (2.120) resulta

$$\begin{gathered}a_1(t, Y_m(t) - z(t), Y_m(t) - z(t)) + \left|Y'_m(t) - z'(t)\right|_H^2 + \\ 2\int_0^t a_2(\tau, Y'_m(\tau) - z'(\tau), Y'_m(\tau) - z'(\tau))d\tau = a_1(t, Y_m(t), Y_m(t)) + \\ a_1(t, z(t), z(t)) - 2a_1(t, Y_m(t), z(t)) + \left|Y'_m(t)\right|_H^2 + |z'(t)|_H^2 - 2(Y'_m(t), z'(t))_H + \\ 2\int_0^t \left\{a_2(\tau, Y'_m(\tau), Y'_m(\tau)) + a_2(\tau, z'(\tau), z'(\tau))\right\} d\tau - 4\int_0^t a_2(\tau, Y'_m(\tau), z'(\tau))d\tau.\end{gathered}$$

Ordenando obtenemos

$$\begin{gathered}a_1(t, Y_m(t) - z(t), Y_m(t) - z(t)) + \left|Y'_m(t) - z'(t)\right|_H^2 + \\ 2\int_0^t a_2(\tau, Y'_m(\tau) - z'(\tau), Y'_m(\tau) - z'(\tau))d\tau = \\ a_1(t, Y_m(t), Y_m(t)) + \left|Y'_m(t)\right|_H^2 + 2\int_0^t a_2(t, Y'_m(t), Y'_m(t)d\tau + \\ a_1(t, z(t), z(t)) + |z'(t)|_H^2 + 2\int_0^t a_2(\tau, z'(\tau), z'(\tau))d\tau - 2a_1(t, Y_m(t), z(t)) - \\ 2(Y'_m(t), z'(t))_H - 4\int_0^t a_2(\tau, Y'_m(\tau), z'(\tau))d\tau.\end{gathered} \tag{2.122}$$

Continuando la igualdad y utilizando (2.116) en el cuarto, quinto y sexto término de (2.122), conseguimos

$$
\begin{aligned}
&a_1(t, Y_m(t)-z(t), Y_m(t)-z(t)) + \left|Y'_m(t)-z'(t)\right|_H^2 + \\
&2\int_0^t a_2(\tau, Y'_m(\tau)-z'(\tau), Y'_m(\tau)-z'(\tau))d\tau = a_1(0, Y_{0m}, Y_{0m}) + |Y_{1m}|_H^2 + \\
&\underbrace{a_1(t, z(t), z(t)) + \left|z'(t)\right|_H^2 + 2\int_0^t a_2(t, z'(t), z'(t))d\tau +}_{\text{(i)}} \\
&\int_0^t a'_1(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau))d\tau + 2\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y'_m(\tau)\right\rangle_{V'_2, V_2} d\tau - \\
&2a_1(t, Y_m(t), z(t)) - 2(Y'_m(t), z'(t)) - 4\int_0^t a_2(\tau, Y'_m(\tau), z'(\tau))d\tau.
\end{aligned} \tag{2.123}
$$

Tenemos la siguiente Igualdad de la Energía debido al Lema 3.2, cuya demostración lo abordaremos en el Capítulo 3,

$$
\begin{aligned}
&a_1(t, z(t), z(t)) + |z'(t)|_H^2 + 2\int_0^t a_2(t, z'(t), z'(t))d\tau = a_1(\tau, y_0, y_0) + |y_1|_H^2 + \\
&\int_0^t a'_1(\tau, z(\tau), z(\tau))d\tau + 2\int_0^t \langle Y(\tau), z'(\tau)\rangle_{V'_2, V_2} d\tau.
\end{aligned}
$$

Reemplazando esta última igualdad en (2.123)-(i) y ordenando resulta

$$
\begin{aligned}
&a_1(t, Y_m(t)-z(t), Y_m(t)-z(t)) + \left|Y'_m(t)-z'(t)\right|_H^2 + \\
&2\int_0^t a_2(\tau, Y'_m(\tau)-z'(\tau), Y'_m(\tau)-z'(\tau))d\tau = a_1(0, Y_{0m}, Y_{0m}) + \\
&|Y_{1m}|_H^2 + a_1(0, y_0, y_0) + |y_1|_H^2 - 2a_1(t, Y_m(t), z(t)) - \\
&2(Y'_m(t), z'(t))_H - 4\int_0^t a_2(\tau, Y'_m(\tau), z'(\tau))d\tau + \\
&\int_0^t a'_1(\tau, z(\tau), z(\tau))d\tau + 2\int_0^t \langle Y(\tau), z'(\tau)\rangle_{V'_2, V_2} d\tau + \\
&\int_0^t a'_1(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau))d\tau + 2\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y'_m(\tau)\right\rangle_{V'_2, V_2} d\tau.
\end{aligned} \tag{2.124}
$$

Utilizaremos las siguientes notaciones

$$
Y_m^0 = a_1(\tau, Y_{0m}, Y_{0m}) + |Y_{1m}|_H^2 + a_1(\tau, y_0, y_0) + |y_1|_H^2 \quad , \tag{2.125}
$$

$$
Y_m^1(t) = -2a_1(t, Y_m(t), z(t)) - 2(Y'_m(t), z'(t)) \quad , \tag{2.126}
$$

$$Y_m^2(t) = -4\int_0^t a_2(\tau, Y_m^{'}(\tau), z^{'}(\tau))d\tau + \int_0^t 2a_1'(\tau, Y_m(\tau), z(\tau))d\tau \quad , \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned} Y_m^3(t) = 2\int_0^t \langle f(\tau, Y_m(\tau)), z'(\tau)\rangle\, d\tau + 2\int_0^t \left\langle Y(\tau), Y_m'(\tau)\right\rangle d\tau + \\ 2\int_0^t \left\langle f(\tau, z(\tau)) - Y(\tau), Y_m'(\tau) - z'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau \end{aligned} \tag{2.128}$$

y

$$\gamma_m(t) = Y_m^0 + \sum_{i=1}^{3} Y_m^i(t). \tag{2.129}$$

En (2.124) por (2.125) y (2.126) tenemos

$$\begin{aligned} a_1(t, Y_m(t) - z(t), Y_m(t) - z(t)) + \left| Y_m^{'}(t) - z'(t)\right|_H^2 + \\ 2\int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau) - z'(\tau), Y_m'(\tau) - z'(\tau))d\tau = Y_m^0 + Y_m^1(t) - \\ 4\int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau), z'(\tau))d\tau + \int_0^t a_1'(\tau, z(\tau), z(\tau))d\tau + \\ 2\int_0^t \langle Y(\tau), z'(\tau)\rangle_{V_2', V_2} d\tau + \underbrace{\int_0^t a_1'(\tau, Y_m(\tau), Y_m(\tau))d\tau +}_{\text{(ii)}} \\ 2\int_0^t \langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y_m'(\tau)\rangle_{V_2', V_2} d\tau. \end{aligned} \tag{2.130}$$

Utilizamos (2.119) sobre (2.130)-(ii) y ordenando, obtenemos

$$\begin{aligned} a_1(t, Y_m(t) - z(t), Y_m(t) - z(t)) + \left| Y_m^{'}(t) - z'(t)\right|_H^2 + \\ 2\int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau) - z'(\tau), Y_m'(\tau) - z'(\tau))d\tau = Y_m^0 + Y_m^1(t) - \\ 4\int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau), z^{'}(\tau))d\tau + \int_0^t 2a_1'(\tau, Y_m(\tau), z(\tau))d\tau + \\ \underbrace{2\int_0^t \left\langle Y(\tau), z'(\tau)\right\rangle d\tau + 2\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), Y_m'(\tau)\right\rangle d\tau +}_{\text{(iii)}} \\ \int_0^t a_1'(\tau, z(\tau), z(\tau))d\tau + \int_0^t a_1'(\tau, (Y_m - z)(\tau), (Y_m - z)(\tau))d\tau + \\ \int_0^t -a_1'(\tau, z(\tau), z(\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{2.131}$$

En (2.131), usando la notación (2.127) para el sexto, séptimo término y usando (2.121) en (2.131)-(iii), resulta

$$\begin{gathered}
a_1(t, Y_m(t) - z(t), Y_m(t) - z(t)) + \left| Y_m'(t) - z'(t) \right|_H^2 + \\
2\int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau) - z'(\tau), Y_m'(\tau) - z'(\tau)) d\tau = \\
Y_m^0 + Y_m^1(t) + Y_m^2(t) + 2\int_0^t \langle f(\tau, Y_m(\tau)), z'(\tau) \rangle \, d\tau + \\
2\int_0^t \left\langle Y(t), Y_m'(\tau) \right\rangle d\tau + 2\int_0^t \left\langle f(\tau, z(\tau)) - Y(\tau), (Y_m' - z')(\tau) \right\rangle d\tau + \\
2\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m) - f(\tau, z(\tau)), (Y_m' - z')(\tau) \right\rangle d\tau + \\
\int_0^t a_1'(\tau, (Y_m - z)(\tau), (Y_m - z)(\tau)) d\tau.
\end{gathered} \tag{2.132}$$

Utilizando (2.128) en (2.132) logramos

$$\begin{gathered}
a_1(t, Y_m(t) - z(t), Y_m(t) - z(t)) + \left| Y_m'(t) - z'(t) \right|_H^2 + \\
2\int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau) - z'(\tau), Y_m'(\tau) - z'(\tau)) d\tau = \\
Y_m^0 + Y_m^1(t) + Y_m^2(t) + Y_m^3(t) + \\
2\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m) - f(\tau, z), Y_m' - z' \right\rangle d\tau + \int_0^t a_1'(\tau, Y_m - z, Y_m - z) d\tau.
\end{gathered} \tag{2.133}$$

Finalmente usando la notación (2.129) en (2.133) conseguimos

$$\begin{gathered}
a_1(t, Y_m(t) - z(t), Y_m(t) - z(t)) + \left| Y_m'(t) - z'(t) \right|_H^2 + \\
2\int_0^t a_2(\tau, Y_m'(\tau) - z'(\tau), (Y_m' - z')(\tau)) d\tau = \\
\gamma_m(t) + \int_0^t a_1'(\tau, (Y_m - z)(\tau), (Y_m - z)(\tau)) d\tau + \\
2\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m) - f(\tau, z(\tau)), (Y_m' - z')(\tau) \right\rangle_{V_2', V_2} d\tau.
\end{gathered} \tag{2.134}$$

En (2.134) emplearemos las acotaciones mencionadas en (2.6), (2.13), (2.8) y (2.19), para el primero, tercero, quinto y sexto término respectivamente, y ordenado obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \|Y_m(t)-z(t)\|_{V_1}^2 + \left|Y_m'(t)-z'(t)\right|_H^2 + 2\int_0^t \alpha_2 \left\|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \\
&\leq \gamma_m(t) + \lambda_1 |Y_m(t)-z(t)|_H^2 + c_{12}\int_0^t ||Y_m(\tau)-z(\tau)||_{V_1}^2 d\tau + \\
&2\int_0^t \beta(\tau)\,||Y_m(\tau)-z(\tau)||_{V_2}\left\|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right\|_{V_2} d\tau + \\
&2\lambda_2\int_0^t \left|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right|_H^2 d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.135}
$$

De (2.60) deducimos

$$
|Y_m(t)-z\,(t)|_H^2 \leq 2\,|Y_m(0)-z\,(0)|_H^2 + 2T\int_0^t \left|Y_m'(\tau)-z'\,(0)\right|_H^2 d\tau. \tag{2.136}
$$

En (2.135) usamos (2.136) y (2.52), en el quinto y séptimo término respectivamente, resultando

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \|Y_m(t)-z(t)\|_{V_1}^2 + \left|Y_m'(t)-z'(t)\right|_H^2 + 2\int_0^t \alpha_2 \left\|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq \\
&\gamma_m(t) + 2\lambda_1\tilde{k}^2\,||Y_m(0)-z(0)||_{V_1}^2 + 2\lambda_1 T\int_0^t \left|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right|_H^2 d\tau + \\
&c_{12}\int_0^t ||Y_m(\tau)-z(\tau)||_{V_1}^2 d\tau + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\beta^2(\tau)\,||Y_m(\tau)-z(\tau)||_{V_2}^2 d\tau + \\
&\int_0^t \varepsilon \left\|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau + 2\lambda_2 \textstyle\int_0^t \left|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right|_H^2 d\tau,
\end{aligned}
\tag{2.137}
$$

siendo $\tilde{k}$ una constante ver (2.2). De donde obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \|Y_m(t)-z(t)\|_{V_1}^2 + \left|Y_m'(t)-z'(t)\right|_H^2 + (2\alpha_2-\varepsilon)\int_0^t \left\|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq \\
&\gamma_m(t) + 2\lambda_1\tilde{k}^2\,\|Y_{0m}-y_0\|_{V_1}^2 + 2\lambda_1 T\int_0^t \left|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right|_H^2 d\tau + \\
&\int_0^t \left[c_{12}+\varepsilon^{-1}k^2\beta^2(\tau)\right]||Y_m(\tau)-z(\tau)||_{V_1}^2 d\tau + 2\lambda_2\int_0^t \left|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right|_H^2 d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.138}
$$

Sea $\alpha = \min\{\alpha_1, 1\}$; tomamos un ε pequeño tal que $\dfrac{2\alpha_2-\varepsilon}{\alpha} > 0$, dividiendo entre α la desigualdad (2.138), resulta

$$
\begin{aligned}
&\|Y_m(t)-z(t)\|_{V_1}^2 + \left|Y_m'(t)-z'(t)\right|_H^2 + \left(\frac{2\alpha_2-\varepsilon}{\alpha}\right)\int_0^t \left\|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq \\
&\frac{1}{\alpha}\left(\gamma_m(t) + 2\lambda_1\tilde{k}^2\,\|Y_{0m}-y_0\|_{V_1}^2\right) + \left(\frac{2\lambda_1 T+2\lambda_2}{\alpha}\right)\int_0^t \left|Y_m'(\tau)-z'(\tau)\right|_H^2 d\tau + \\
&\int_0^t \left(\tfrac{c_{12}+\varepsilon^{-1}k^2\beta^2(\tau)}{\alpha}\right)||Y_m(\tau)-z(\tau)||_{V_1}^2 d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.139}
$$

Denotemos por

$$\phi_m(t) = \|Y_m(t) - z(t)\|_{V_1}^2 + \left|Y_m^{'}(t) - z'(t)\right|_H^2 \ , \tag{2.140}$$

$$Z_m(t) = \alpha^{-1}\left(\gamma_m(t) + 2\lambda_1\tilde{k}^2 \|Y_{0m} - y_0\|_{V_1}^2\right) \tag{2.141}$$

y

$$h(t) = \alpha^{-1}\left(c_{12} + 2\lambda_1 T + 2\lambda_2 + \varepsilon^{-1}k^2\beta^2(t)\right). \tag{2.142}$$

Reemplazando (2.141) y (2.142) en (2.139) obtenemos

$$\|Y_m(t) - z(t)\|_{V_1}^2 + \left|Y_m^{'}(t) - z'(t)\right|_H^2 \leq Z_m(t) + \int_0^t h(\tau)\left|Y_m^{'}(\tau) - z'(\tau)\right|_H^2 d\tau +$$
$$\int_0^t h(\tau)\,||Y_m(\tau) - z(\tau)||_{V_1}^2\, d\tau.$$

Luego usando la notación (2.140) resulta

$$\phi_m(t) \leq Z_m(t) + \int_0^t h(\tau)\phi_m(\tau)d\tau. \tag{2.143}$$

Aplicando el Lema 1.41 sobre (2.143), para $0 \leq \tau \leq t$, logramos

$$\phi_m(t) \leq Z_m(t) + \int_0^t exp\left(\int_\tau^t h(r)dr\right)h(\tau)Z_m(\tau)d\tau. \tag{2.144}$$

Identifiquemos

$$K(t,\tau) = exp\left(\int_\tau^t h(r)dr\right)h(\tau) \tag{2.145}$$

y

$$M_m(t) = \int_0^t K(t,\tau)Z_m(\tau)d\tau. \tag{2.146}$$

Luego reemplazando (2.145) y (2.146) en (2.144) obtenemos

$$\phi_m(t) \leq Z_m(t) + M_m(t). \tag{2.147}$$

Notamos que

$$K(t,\tau) \leq exp\left(|h|_{L^1(0,T)}\right)h(\tau), \tag{2.148}$$

debido a que $h \in L^1(0,T)$.

Nuestro objetivo en adelante es demostrar

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^T \phi_m(t)dt = 0 \tag{2.149}$$

para eso nos basamos en la desigualdad (2.147) que nos indica que debemos conseguir los siguientes límites

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^T Z_m(t)dt = 0 \text{ y } \lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^T M_m(t)dt = 0. \tag{2.150}$$

De (2.141) y (2.147) conseguimos

$$\begin{aligned} \phi_m(t) &\leq Z_m(t) + \int_0^t K(t,\tau) Z_m(\tau) d\tau, \\ Z_m(t) &= \alpha^{-1} \left(\gamma_m(t) + 2\lambda_1 \tilde{k}^2 \left\| Y_{0m} - y_0 \right\|_{V_1}^2 \right). \end{aligned}$$

Debido a (2.24), para obtener (2.149) es suficiente probar que los siguientes límites converjan uniformemente sobre $[0,T]$

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^t K(t,\tau) \gamma_m(\tau) d\tau = 0 \tag{2.151}$$

y

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^t \gamma_m(\tau) d\tau = 0. \tag{2.152}$$

Veamos (2.151): en efecto, de (2.129) tenemos

$$\int_0^t K(t,\tau)\gamma_m(\tau)d\tau = \int_0^t K(t,\tau) Y_m^0 d\tau + \sum_{i=1}^{3} \int_0^t K(t,\tau) Y_m^i(\tau) d\tau. \tag{2.153}$$

A fin de conseguir (2.151) veamos las siguientes convergencias.

$$Y_m^0 \underset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 2a_1(0, y_0, y_0) + 2\left| y_1 \right|_H^2. \tag{2.154}$$

En efecto, de (2.24), (2.25) y (2.125) tenemos la siguiente convergencia

$$Y_m^0 \underset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} a_1(0, y_0, y_0) + \left| y_1 \right|_H^2 + a_1(0, y_0, y_0) + \left| y_1 \right|_H^2,$$

así logramos (2.154).

Veamos

$$Y_m^2(t) \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} -4\int_0^t a_2(\tau, z'(\tau), z'(\tau))d\tau + \int_0^t 2a_1'(\tau, z(\tau), z(\tau))d\tau. \tag{2.155}$$

En efecto, de (2.76) y (2.113) tenemos

$$\int_0^T \left\langle A_2(\tau)Y_m^{'}(\tau), \phi\,(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left\langle A_2 z'(\tau), \phi\,(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_2)$. Definimos la función característica

$$\chi_{(0,t)}(\tau) = \begin{cases} 1 & , \quad \tau \in (0,t) \\ 0 & , \quad \tau \notin (0,t). \end{cases}$$

Tomamos $\chi_{(0,t)} z' = \phi$ entonces

$$\int_0^t \left\langle A_2(\tau)Y_m^{'}(\tau), z'\,(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left\langle A_2 z'(\tau), z'\,(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau, \tag{2.156}$$

de (2.77) y (2.110) logramos

$$\int_0^T \left\langle A_1^{'}(\tau)Y_m(\tau), \phi\,(\tau)\right\rangle_{V_1', V_1} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left\langle A_1^{'} z(\tau), \phi\,(\tau)\right\rangle_{V_1', V_1} d\tau$$

para $\phi \in L^2(0,T;V_1)$. Tomamos $\chi_{(0,t)} z = \phi$ entonces

$$\int_0^t \left\langle A_1^{'}(\tau)Y_m(\tau), z\,(\tau)\right\rangle_{V_1', V_1} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left\langle A_1^{'} z(\tau), z\,(\tau)\right\rangle_{V_1', V_1} d\tau. \tag{2.157}$$

Utilizando (2.156), (2.157), (2.10) y (2.15) en (2.127) obtenemos (2.155).

Veamos que

$$Y_m^3(t) \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 4\int_0^t \left\langle Y(\tau), z'(\tau)\right\rangle_{V_1', V_1} d\tau. \tag{2.158}$$

En efecto, de (2.78) y por la definición de la convergencia débil, como $\phi = \chi_{(0,t)} z' \in L^2(0,T;V_2)$ entonces

$$\int_0^t \left\langle f(\tau, Y_m(\tau)), z'\,(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left\langle Y(\tau), z'\,(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau. \tag{2.159}$$

De (2.74) y por la definición de la convergencia débil, como $\phi = \chi_{(0,t)}Y \in L^2(0,T;V_2')$ obtenemos

$$\int_0^t \left\langle Y(\tau), Y_m'(\tau) \right\rangle_{V_2',V_2} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left\langle Y(\tau), z'(\tau) \right\rangle_{V_2',V_2} d\tau. \tag{2.160}$$

Tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{gathered} \int_0^t \left\langle f(\tau,z) - Y(\tau), Y_m'(\tau) - z' \right\rangle_{V_2',V_2} d\tau = \int_0^t \left\langle f(\tau,z), Y_m'(\tau) \right\rangle_{V_2',V_2} d\tau - \\ \int_0^t \left\langle Y(\tau), Y_m'(\tau) \right\rangle_{V_2',V_2} d\tau - \int_0^t \langle f(\tau,z), z'(\tau) \rangle_{V_2',V_2} d\tau + \\ \int_0^t \langle Y(\tau), z'(\tau) \rangle_{V_2',V_2} d\tau. \end{gathered} \tag{2.161}$$

Sabemos que $f(\tau,z) \in L^2(0,T;V_2')$ y por (2.160) en (2.161) resulta

$$\int_0^t \left\langle f(\tau,z) - Y(\tau), Y_m'(\tau) - z'(\tau) \right\rangle_{V_2',V_2} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.162}$$

Haciendo $m \longrightarrow \infty$ en (2.128) y usando (2.159), (2.160) y (2.162) obtenemos (2.158).

Tenemos que

$$\int_0^t k(t,\tau) Y_m^1(\tau) d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} -2\int_0^t k(t,\tau) \left\{ a_1(\tau, z(\tau), z(\tau)) + \left| z'(\tau) \right|_H^2 \right\} d\tau. \tag{2.163}$$

En efecto, de (2.126) logramos

$$\begin{gathered} \int_0^t k(t,\tau) Y_m^1(\tau) d\tau = -2\int_0^t k(t,\tau) \left\langle A_1(\tau) Y_{m_l}(\tau), z(\tau) \right\rangle_{V_1',V_1} d\tau - \\ 2\int_0^t k(t,\tau) (Y_m'(\tau), z'(\tau))_H d\tau, \end{gathered}$$

de donde conseguimos gracias a (1.8), lo siguiente

$$\begin{gathered} \int_0^t k(t,\tau) Y_m^1(\tau) d\tau = -2\int_0^t \langle A_1(\tau) Y_m(\tau), k(t,\tau) z(\tau) \rangle_{V_1',V_1} d\tau - \\ 2\int_0^t \left\langle Y_m'(\tau), k(t,\tau) z'(\tau) \right\rangle_{V_2',V_2} d\tau. \end{gathered} \tag{2.164}$$

Tenemos que $k(t,\tau)z(\tau) \in L^1(0,T,V_1)$, debido a la siguiente acotación

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|k(t,\tau)z(\tau)\|_{V_1} d\tau &\leq \int_0^T exp\left(|h|_{L^1(0,T)}\right) h(\tau) \|z(\tau)\|_{V_1} d\tau \\
&\leq exp\left(|h|_{L^1(0,T)}\right) \|z\|_{L^\infty(0,T;V_1)} \int_0^T h(\tau) d\tau \\
&\leq exp\left(|h|_{L^1(0,T)}\right) \|z\|_{L^\infty(0,T;V_1)} \|h\|_{L^1(0,T)} .
\end{aligned}$$

Como $(A_1(.)Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ esta acotada en $L^\infty(0,T;V_1^{'})$ entonces

$$\int_0^T \langle A_1(\tau)Y_m(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle A_1(\tau)z(\tau), \phi(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau$$

para todo $\phi \in L^1(0,T;V_1)$. Sea $k(t,\tau)z(\tau)\chi_{(0,t)} = \phi(\tau)$ así resulta

$$\int_0^t \langle A_1(\tau)Y_m(\tau), k(t,\tau)z(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \langle A_1(\tau)z(\tau), k(t,\tau)z(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau. \tag{2.165}$$

De la siguiente acotación

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|k(t,\tau)z'(\tau)\right|_H d\tau &\leq \int_0^T exp\left(|h|_{L^1(0,T)}\right) h(\tau) \left|z'(\tau)\right|_H d\tau \\
&\leq exp\left(|h|_{L^1(0,T)}\right) \left\|z'\right\|_{L^\infty(0,T;H)} \int_0^T h(\tau) d\tau \\
&\leq exp\left(|h|_{L^1(0,T)}\right) \left\|z'\right\|_{L^\infty(0,T;H)} \|h\|_{L^1(0,T)}
\end{aligned}$$

tenemos que

$$k(t,.)z'(.) \in L^1(0,T;H).$$

Por (2.70) obtenemos que $(Y_m^{'})_{m\in\mathbb{N}}$ esta acotada en $L^\infty(0,T;H)$, de donde deducimos

$$\int_0^t \left(Y_m^{'}(\tau), \phi(\tau)\right)_H d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left(z'(\tau), \phi(\tau)\right)_H d\tau$$

para todo $\phi \in L^1(0,T;H)$. Sea $k(t,\tau)z'(\tau)\chi_{(0,t)} = \phi(\tau)$ entonces

$$\int_0^t \left(Y_m^{'}(\tau), k(t,\tau)z'(\tau)\right)_H d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left(z'(\tau), k(t,\tau)z'(\tau)\right)_H d\tau. \tag{2.166}$$

De (2.165) y (2.166) en (2.164) resulta,

$$\int_0^t k(t,\tau)Y_m^1(\tau)d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} -2\int_0^t \langle A_1(\tau)z(\tau), k(t,\tau)z(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau - 2\int_0^t \langle z'(\tau), k(t,\tau)z'(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau,$$

de donde conseguimos (2.163).

De (2.148) tenemos

$$k(t,.) \in L^1(0,t).$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue y los puntos (2.154), (2.155) y (2.158) tenemos

$$\int_0^t k(t,\tau)Y_m^0 d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t k(t,\tau)\left\{2a_1(0,y_0,y_0) + 2\,|y_1|_H^2\right\} d\tau,$$

$$\int_0^t k(t,\tau)Y_m^2(\tau)d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t k(t,\tau)\left\{-4\int_0^\tau a_2(\delta,z'(\delta),z'(\delta))d\delta\right\} d\tau + \int_0^t k(t,\tau)\left\{\int_0^\tau 2a_1'(\delta,z(\delta),z(\delta))d\delta\right\} d\tau$$

y

$$\int_0^t k(t,\tau)Y_m^3(\tau)d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t k(t,\tau)\left\{4\int_0^\tau \Big\langle Y(\delta), z'(\delta)\Big\rangle\, d\delta\right\} d\tau.$$

Agregando a estas convergencias (2.163), tenemos lo siguiente

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_0^t k(t,\tau)\gamma_m(\tau)d\tau = \lim_{m\longrightarrow\infty}\int_0^t k(t,\tau)Y_m^0 d\tau + \lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^3 \int_0^t k(t,\tau)Y_m^i(\tau)d\tau$$

y haciendo uso del Lema 3.2, que será abordada en el Capítulo 3, tenemos

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_0^t k(t,\tau)\gamma_m(\tau)d\tau = 0,$$

de donde concluimos (2.151).

Veamos ahora (2.152), en efecto, de (2.154), (2.155), (2.158) y por la convergencia uniforme obtenemos las siguientes convergencias

$$\int_0^t Y_m^0 d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t (2a_1(0,y_0,y_0)+2\left|y_1\right|_H^2)d\tau, \tag{2.167}$$

$$\int_0^t Y_m^2(\tau)d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left\{-4\int_0^\tau a_2(\delta,z'(\delta),z'(\delta))d\delta + \int_0^\tau 2a_1'(\delta,z,z)d\delta\right\} d\tau, \tag{2.168}$$

y

$$\int_0^t Y_m^3(\tau)d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left\{4\int_0^\tau \left\langle Y(\delta),z'(\delta)\right\rangle d\delta\right\} d\tau. \tag{2.169}$$

Veamos que sucede con

$$\int_0^t Y_m^1(\tau)d\tau \quad \text{cuando } m\longrightarrow\infty,$$

de (2.126) tenemos

$$\int_0^t Y_m^1(\tau)d\tau = \int_0^t \left\{-2a_1(\tau,Y_m(\tau),z(\tau)) - 2\left(Y_m'(\tau),z'(\tau)\right)_H\right\} d\tau \tag{2.170}$$

por la definición de convergencia débil en (2.75) y (2.9) tenemos

$$\int_0^T a_1(\tau,Y_m(\tau),\phi(\tau))d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^T a_1(\tau,z(\tau),\phi(\tau))d\tau$$

para todo $\phi\in L^2(0,T;V_1)$. Tomamos $\chi_{(0,t)}z=\phi$ entonces

$$\int_0^t a_1(\tau,Y_m(\tau),z(\tau))d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t a_1(\tau,z(\tau),z(\tau))d\tau. \tag{2.171}$$

Así mismo por (2.74), obtenemos

$$\int_0^T \left\langle Y_m'(\tau),\phi(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left\langle z'(\tau),\phi(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau$$

para todo $\phi\in L^2(0,T;V_2)$. Para $\chi_{(0,t)}z'=\phi$ resulta

$$\int_0^t \left\langle Y_m'(\tau),z'(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left\langle z'(\tau),z'(\tau)\right\rangle_{V_2',V_2} d\tau,$$

de donde se sigue por (1.8)

$$\int_0^t \left(Y_m'(\tau), z'(\tau)\right)_H d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left(z'(\tau), z'(\tau)\right)_H d\tau. \tag{2.172}$$

Utilizando (2.171) y (2.172) en (2.170) tenemos

$$\int_0^t Y_m^1(\tau)d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left\{-2a_1(\tau, z(\tau), z(\tau)) - 2\left|z'(\tau)\right|_H^2\right\} d\tau. \tag{2.173}$$

Integrando de 0 a t en (2.129), utilizando las convergencias (2.167)-(2.169), (2.173) y por Lema 3.2 conseguimos (2.152).

Previo a verificar (2.150), veamos lo siguiente

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_0^t Z_m(\tau)d\tau = 0 \text{ y } \lim_{m\longrightarrow\infty} M_m(t) = 0 \text{ , donde } t \in [0,T]. \tag{2.174}$$

En efecto, gracias a (2.152) resulta

$$\int_0^t Z_m(\tau)d\tau = \alpha^{-1}\int_0^t \left(\gamma_m(\tau) - 2\lambda_1\tilde{k}^2 \left\|Y_{0m} - y_0\right\|_{V_1}^2\right) d\tau \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Debido a (2.151), obtenemos

$$M_m(t) = \int_0^t \left(\alpha^{-1}k(\tau,s)\gamma_m(s) - 2\lambda_1\tilde{k}^2 k(t,s)\left\|Y_{0m} - y_0\right\|_{V_1}^2\right) ds \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Así se verifica (2.174).

El segundo límite de (2.174) es una convergencia uniforme, esto permite la siguiente convergencia

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_0^T M_m(t)dt = 0,$$

así mismo de (2.174), por la continuidad de $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t Z_m(\tau)d\tau$, $0 \le t \le T$, resulta

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_0^T Z_m(\tau)d\tau = 0.$$

Así queda verificado (2.150).

Finalmente veamos (2.149), en efecto, sobre (2.147) integramos de 0 a T y usamos (2.150),

$$0 \leq \lim_{m\longrightarrow\infty}\int_0^T \phi_m(\tau)d\tau \leq \lim_{m\longrightarrow\infty}\int_0^T Z_m(\tau)d\tau + \lim_{m\longrightarrow\infty}\int_0^T M_m(\tau)d\tau = 0.$$

así obtenemos lo que queríamos (2.149).

Con la herramienta (2.149) verificaremos $Y = f(.,z)$, de (2.140) y (2.149) resulta

$$\int_0^T \phi_m(\tau) = \int_0^T \|Y_m(\tau) - z(\tau)\|_{V_1}^2 + \int_0^T \left|Y_m^{'}(\tau) - z'(\tau)\right|_H^2 \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.175}$$

Así deducimos

$$Y_m \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} z \text{ en } L^2(0,T;V_1) \text{ y } Y_m^{'} \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} z' \text{ en } L^2(0,T;H). \tag{2.176}$$

De (2.78), tenemos por la definición de la convergencia débil que

$$\int_0^T \langle f(t,Y_m(t)), \phi(t))\rangle_{V_2',V_2} dt \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle Y(t), \phi(t))\rangle_{V_2',V_2} dt$$

para todo $\phi \in L^2(0,T;V_2)$. Tomamos $\xi v = \phi$, $v \in V_2$, para todo $\xi \in \mathcal{D}(0,T)$ tenemos

$$\int_0^T \langle f(t,Y_m(t)), v)\rangle_{V_2',V_2} \xi(t)dt \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle Y(t), v)\rangle_{V_2',V_2} \xi(t)dt. \tag{2.177}$$

Verifiquemos la siguiente convergencia

$$f(.,Y_m(.)) \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f(.,z(.)) \text{ en } L^1(0,T;V_2^{'}), \tag{2.178}$$

por (2.19) obtenemos

$$\int_0^T \|f(t,Y_m(t)) - f(t,z(t))\|_{V_2'} dt \leq \int_0^T \beta(t)\|Y_m(t) - z(t)\|_{V_2} dt \leq \|\beta\|_{L^2(0,T)} \|Y_m - z\|_{L^2(0,T;V_2)}$$

y por la primera convergencia de (2.176) conseguimos

$$\int_0^T \|f(t, Y_m(t)) - f(t, z(t))\|_{V_2'}\, dt \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

de donde logramos (2.178).

De (2.178) tenemos para $\xi \in \mathcal{D}(0,T)$ la siguiente convergencia

$$\int_0^T \langle f(t, Y_m(t)), v\rangle_{V_2', V_2}\, \xi(t)dt \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle f(t, z(t)), v\rangle_{V_2', V_2}\, \xi(t)dt, \tag{2.179}$$

para todo $v \in V_2$. Así de (2.177) y (2.179), por la unicidad de límite resulta

$$\int_0^T \langle Y(t), v\rangle_{V_2', V_2}\, \xi(t)dt = \int_0^T \langle f(t, z(t)), v\rangle_{V_2', V_2}\, \xi(t)dt.$$

Gracias al Lema 1.2 resulta

$$\langle Y(t), v\rangle_{V_2', V_2} = \langle f(t, z(t)), v\rangle_{V_2', V_2} \text{ para todo } v \in V_2,$$

lo que implica finalmente

$$Y(.) = f(., z(.)) \text{ en } L^2(0, T; V_2^{'}).$$

así concluimos lo que se quería probar en esta Sección 2.6.

Observación. Si agregamos a la hipótesis H2 la condición de inmersión compacta sobre

$$V_1 \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow H,$$

por el Teorema 1.45 resulta, para

$$X_0 = V_1,\ X = V_1,\ X_1 = V_2,\ p_0 = p_1 = 2,$$

que la siguiente inmersión es compacta

$$w(0,T) \hookrightarrow L^2(0, T; V_1),$$

esto quiere decir, si

$$(Y_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } w(0,T)$$

entonces existe una subsucesión $(Y_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$Y_{m_l} \longrightarrow z \text{ en } L^2(0,T;V_1),$$

esta convergencia permite verificar (2.178), obteniendo así lo que se prueba en esta Sección 2.6.

2.7 Unicidad de solución

Sea z_1, z_2 soluciones del problema (2.17), así tenemos

$$\begin{cases} z_1'' + A_2(t)z_1' + A_1(t)z_1 = f(t,z_1) \\ z_1(0) = y_0 \\ z_1'(0) = y_1 \end{cases} \tag{2.180}$$

y

$$\begin{cases} z_2'' + A_2(t)z_1' + A_1(t)z_2 = f(t,z_2) \\ z_2(0) = y_0 \\ z_2'(0) = y_1. \end{cases} \tag{2.181}$$

De (2.180) y (2.181), conseguimos

$$\begin{cases} (z_1 - z_2)'' + A_2(t)(z_1 - z_2)' + A_1(t)(z_1 - z_2) = f(t,z_1) - f(t,z_2) \\ (z_1 - z_2)(0) = 0 \\ (z_1' - z_2')(0) = 0, \end{cases} \tag{2.182}$$

denotemos $z_3 = z_1 - z_2$.

Por la Igualdad de la Energía, para el problema (2.182), resulta

$$\begin{gathered} a_1(t, z_3(t), z_3(t)) + |z_3'(t)|_H^2 + 2\int_0^t a_2(\tau, z_3'(\tau), z_3'(\tau))d\tau = \\ \int_0^t a_1'(\tau, z_3(\tau), z_3(\tau))d\tau + \int_0^t \langle f(\tau, z_1(\tau)) - f(\tau, z_2(\tau)), z_3'(\tau)\rangle_{V_2', V_2}\, d\tau. \end{gathered} \tag{2.183}$$

Siguiendo los pasos de las identificaciones hechas en (2.125)-(2.129) para $Y_m = z_1$, $z = z_2$ tenemos

$$\widetilde{Y_m}^0 = 2a_1(0, y_0, y_0) + 2\left|y_1\right|_H^2,$$

$$\widetilde{Y_m}^1(t) = -2a_1(t, z_1(t), z_2(t)) - 2(z_1'(t), z_2'(t))_H,$$

$$\widetilde{Y_m}^2(t) = -4\int_0^t a_2(\tau, z_1'(\tau), z_2'(\tau))d\tau + 2\int_0^t a_1'(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau))d\tau,$$

$$\widetilde{Y_m}^3(t) = 2\int_0^t \left\langle f(\tau, z_1(\tau)), z_2'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau + 2\int_0^t \left\langle f(\tau, z_2(\tau)), z_1'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau$$

y

$$\widetilde{\gamma_m}(t) = \widetilde{Y_m}^0 + \sum_{i=1}^{3} \widetilde{Y_m}^i(t).$$

Procediendo análogamente a los cálculos hechos para obtener (2.134), conseguimos

$$\begin{gathered} a_1(t, z_1(t) - z_2(t), z_1(t) - z_2(t)) + \left|z_1'(t) - z_2'(t)\right|_H^2 + \\ 2\int_0^t a_2(\tau, z_1'(\tau) - z_2'(\tau), z_1'(\tau) - z_2'(\tau))d\tau = \widetilde{\gamma_m}(t) + \\ \int_0^t a_1'(\tau, z_1(\tau) - z_2(\tau), z_1(\tau) - z_2(\tau))d\tau + \\ \int_0^t \left\langle f(\tau, z_1(\tau)) - f(\tau, z_2(\tau)), z_1'(\tau) - z_2'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau. \end{gathered} \tag{2.184}$$

De (2.184) obtenemos

$$\begin{gathered} a_1(t, z_3(t), z_3(t)) + \left|z_3'(t)\right|_H^2 + 2\int_0^t a_2(\tau, z_3'(\tau), z_3'(\tau))d\tau = \widetilde{\gamma_m}(t) + \\ \int_0^t a_1'(\tau, z_3(\tau), z_3(\tau))d\tau + \int_0^t \left\langle f(\tau, z_1(\tau)) - f(\tau, z_2(\tau)), z_3'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau. \end{gathered} \tag{2.185}$$

De (2.183) y (2.185) resulta

$$\begin{gathered} \int_0^t \left\langle f(\tau, z_1(\tau)) - f(\tau, z_2(\tau)), z_3'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau = \\ \widetilde{\gamma_m}(t) + \int_0^t \left\langle f(\tau, z_1(\tau)) - f(\tau, z_2(\tau)), z_3'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau, \end{gathered}$$

de donde conseguimos

$$\widetilde{\gamma_m}(t) = 0.$$

Ahora procediendo análogamente a los cálculos para obtener (2.147) resulta

$$\widetilde{\phi_m}(t) \leq \widetilde{Z_m}(t) + \widetilde{M_m}(t)$$

de donde tenemos

$$\widetilde{Z_m}(t) = \alpha^{-1} \left(\widetilde{\gamma_m}(t) + 2\lambda_1 \tilde{k}^2 \left\| y_0 - y_0 \right\|_{V_1}^2 \right) = 0,$$

lo que implica

$$\widetilde{M_m}(t) = \int_0^t K(t,s) \widetilde{Z_m}(s) ds = 0 \ .$$

Entonces

$$\widetilde{\phi_m}(t) = \left\| z_1(t) - z_2(t) \right\|_{V_1}^2 + \left| z_1'(t) - z_2'(t) \right|_H^2 ,$$

de lo cual resulta

$$0 \leq \left\| z_1(t) - z_2(t) \right\|_{V_1}^2 + \left| z_1'(t) - z_2'(t) \right|_H^2 \leq 0.$$

Entonces para todo $t \in [0,T]$ tenemos

$$\left\| z_1(t) - z_2(t) \right\|_{V_1}^2 + \left| z_1'(t) - z_2'(t) \right|_H^2 = 0.$$

Así concluimos

$$z_1 = z_2 \text{ en } L^2(0,T;V_1)$$

y

$$z_1' = z_2' \text{ en } L^2(0,T;H).$$

2.8 Dependencia continua sobre los datos iniciales para el caso lineal

En esta sección demostramos el Corolario 2.3 que indica la dependencia continua de los datos para el problema (2.21).

La demostración de la existencia y unicidad de la solución para el problema (2.21) se debe al Teorema 2.2. Veamos ahora la demostración de la dependencia continua sobre los datos iniciales.

Como estamos en el caso lineal tenemos que $\gamma(t) = 0$ en (2.20), trabajamos sobre (2.70) y denotamos por

$$B = exp\left(\frac{1}{\alpha}\left|\widetilde{\beta}\right|_{L^1(0,T)}\right).$$

Así de (2.71), tenemos las siguientes acotaciones

$$\|Y_m(\tau)\|_{V_1}^2 \leq C\left(1 + B\ exp(B)\right) \tag{2.186}$$

y

$$\eta \int_0^t \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq C\left(1 + B\ exp(B)\right), \text{ para todo } t \in [0,T]\,. \tag{2.187}$$

En (2.186), integrando de 0 a T, conseguimos

$$\int_0^T \|Y_m(\tau)\|_{V_1}^2 d\tau \leq TC(1 + B\ exp(B)),$$

entonces

$$\|Y_m\|_{L^2(0,T;V_1)}^2 \leq TC(1 + B\ exp(B)). \tag{2.188}$$

De (2.187), por la continuidad de la integral, tenemos

$$\eta \int_0^T \left\|Y_m'(\tau)\right\|_{V_2}^2 d\tau \leq C(1 + B\ exp(B)),$$

así resulta

$$\eta \left\|Y_m'\right\|_{L^2(0,T;V_2)}^2 d\tau \leq C(1 + B\ exp(B)). \tag{2.189}$$

De (2.73) y (2.74) obtenemos, respectivamente

$$\|y\|_{L^2(0,T;V_1)} \leq \lim_{m \longrightarrow \infty} \inf \|Y_m\|_{L^2(0,T;V_1)} \tag{2.190}$$

y

$$\left\|y'\right\|_{L^2(0,T;V_2)} \leq \lim_{m\longrightarrow\infty} \inf \left\|Y_m'\right\|_{L^2(0,T;V_2)}. \tag{2.191}$$

Aplicando límite inferior a la suma de (2.188), (2.189) y usando (2.190), (2.191) obtenemos

$$\|y\|^2_{L^2(0,T;V_1)} + \eta \left\|y'\right\|^2_{L^2(0,T;V_2)} d\tau \leq C\underbrace{((T+1)(1+exp(B)B))}_{M}. \tag{2.192}$$

De (2.65), para $\gamma = 0$ resulta

$$C \leq \tilde{C}\left(\|y_0\|^2_{V_1} + |y_1|^2_H\right), \tag{2.193}$$

donde $\tilde{C}$ agrupa todas las constantes.

De (2.192) y (2.193) con $\tilde{\eta}$ =mínimo$\{\eta, 1\}$ resulta

$$\|y\|^2_{L^2(0,T;V_1)} + \left\|y'\right\|^2_{L^2(0,T;V_2)} d\tau \leq \frac{\tilde{C}M}{\tilde{\eta}}\left(\|y_0\|^2_{V_1} + |y_1|^2_H\right). \tag{2.194}$$

De (2.5) obtenemos, para todo $\phi, \psi \in V_1$ lo siguiente

$$\left|\langle A_1(t)\phi, \psi\rangle_{V_1', V_1}\right| \leq c_{11} \|\phi\|_{V_1} \|\psi\|_{V_1},$$

esto implica

$$\|A_1(t)\phi\|_{V_1'} \leq c_{11} \|\phi\|_{V_1}.$$

Para $\phi = y(t)$ conseguimos

$$\int_0^T \|A_1(t)y(t)\|^2_{V_1'} dt \leq c_{11} \int_0^T \|y(t)\|^2_{V_1} dt$$

así deducimos

$$\|A_1(.)y(.)\|_{L^2(0,T;V_1')} \leq c_{11} \|y\|_{L^2(0,T;V_1)}. \tag{2.195}$$

Procediendo análogamente para A_2 y usando (2.12), para $\phi = y'(t)$ resulta

$$\left\|A_2(.)y'(.)\right\|_{L^2(0,T;V_2')} \leq c_{21} \left\|y'\right\|_{L^2(0,T;V_2)}. \tag{2.196}$$

Con la ayuda de los resultados anteriores procederemos a verificar la siguiente desigualdad

$$\|y\|_{W(0,T)}^2 \leq M_1 \left(\|g\|_{L^2(0,T;V_2')}^2 + \|y_0\|_V^2 + |y_1|_H^2 \right). \tag{2.197}$$

En efecto, tenemos que

$$y'' = g - A_2(.)y'(.) - A_1(.)y(.) \in L^2(0,T;V_1').$$

Por (2.195) y (2.196) resulta

$$\begin{aligned}
\left\|y''\right\|_{L^2(0,T;V_1')} &\leq \|g\|_{L^2(0,T;V_1')} + \left\|A_2(.)y'(.)\right\|_{L^2(0,T;V_1')} + \|A_1(.)y(.)\|_{L^2(0,T;V_1')} \\
&\leq \bar{k}_1 \|g\|_{L^2(0,T;V_2')} + c_{21} \left\|y'\right\|_{L^2(0,T;V_2)} + c_{11} \|y\|_{L^2(0,T;V_1)} \ ,
\end{aligned}$$

donde $\bar{k}_1$ es la constante de inmersión de $L^2(0,T;V_2') \hookrightarrow L^2(0,T;V_1')$. Sea $K =$máx$\left\{\bar{k}_1, c_{21}, c_{11}\right\}$, entonces tenemos

$$\left\|y''\right\|_{L^2(0,T;V_1')}^2 \leq K \left(\|g\|_{L^2(0,T;V_2')}^2 + \left\|y'\right\|_{L^2(0,T;V_2)}^2 + \|y\|_{L^2(0,T;V_1)}^2 \right),$$

esto implica lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|y\|_{W(0,T)}^2 &= \|y\|_{L^2(0,T;V_1)}^2 + \left\|y'\right\|_{L^2(0,T;V_2)}^2 + \left\|y''\right\|_{L^2(0,T;V_1')}^2 \leq \\
&\quad \|y\|_{L^2(0,T;V_1)}^2 + \left\|y'\right\|_{L^2(0,T;V_2)}^2 + K \|g\|_{L^2(0,T;V_2')}^2 + \\
&\quad K \left\|y'\right\|_{L^2(0,T;V_2)}^2 + K \|y\|_{L^2(0,T;V_1)}^2 .
\end{aligned}$$

Consideremos $M =$máx$\{K, 1\}$, así resulta

$$\|y\|_{W(0,T)}^2 \leq M \left(\|g\|_{L^2(0,T;V_2')}^2 + \left\|y'\right\|_{L^2(0,T;V_2)}^2 + \|y\|_{L^2(0,T;V_1)}^2 \right).$$

Usando (2.194) en esta última desigualdad obtenemos (2.197), donde M_1 es una constante máxima.

Así verificamos que la siguiente aplicación es continua

$$\begin{array}{rcl} L^2(0,T;V_2) \times V_1 \times H & \longrightarrow & W(0,T) \\ (g,\ y_0,\ y_1) & \mapsto & y\ . \ \blacksquare \end{array}$$

Observación. La desigualdad (2.197) permite obtener la dependencia continua de y en relación a los datos iniciales y el término fuerte g. Si tenemos datos iniciales próximos para el problema (2.21), por (2.197) tenemos

$$\|y - \tilde{y}\|^2_{W(0,T)} \leq M_1 \left(\|y_0 - \tilde{y}_0\|^2_{V_1} + |y_1 - \tilde{y}_1|^2_H \right),$$

donde y e $\tilde{y}$ son soluciones para el problema (2.21) respectivamente para los datos iniciales próximos. Esta desigualdad indica que las soluciones también serán próximas.

Capítulo 3

Igualdad de la Energía y regularidad

En esta sección probamos la igualdad de la Energía para el problema (2.17) y (2.21), así como la regularidad de la solución para el problema (2.21).

Lema 3.1. Asumamos que y es una solución débil del problema (2.17). Entonces

$$y \in C_s([0,T]\,;V_1) \text{ y } y' \in C_s([0,T]\,;H).$$

Demostración.
Veamos que

$$y \in C_s([0,T]\,;V_1). \tag{3.1}$$

En efecto, tenemos que

$$V_1 \hookrightarrow H,$$

es una inmersión densa, entonces por resultados del Análisis Funcional tenemos, que la siguiente inmersión

$$H^{'} \hookrightarrow V_1^{'},$$

también es una inmersión densa. Entonces si $\varphi \in V_1^{'}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\psi \in H'$ tal que

$$\|\varphi - \psi\|_{V_1'} \leq \varepsilon(4\,\|y\|_{L^\infty(0,T;V_1)})^{-1}, \tag{3.2}$$

fijamos ψ. Por otra parte tenemos que

$$y \in L^{\infty}(0,T;V_1) \hookrightarrow L^2(0,T;H) \tag{3.3}$$

y

$$y' \in L^{\infty}(0,T;H) \hookrightarrow L^2(0,T;H). \tag{3.4}$$

Entonces de (3.3), (3.4) y por el Lema 1.41, conseguimos

$$y \in C([0,T]\,,H),$$

esto implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$|t_n - t| < \delta$$

entonces

$$|y(t_n) - y(t)|_H < \varepsilon(2\,|\psi|_H)^{-1}. \tag{3.5}$$

Si $|t_n - t| < \delta$, tenemos lo siguiente, para todo $\varphi \in V_1^{'}$

$$\begin{aligned}
\left|\langle \varphi, y(t_n) - y(t)\rangle_{V_1',V_1}\right| &\leq \left|\langle \varphi - \psi, y(t_n) - y(t)\rangle_{V_1',V_1}\right| + \left|\langle \psi, y(t_n) - y(t)\rangle_{V_1',V_1}\right| \\
&\leq \|\varphi - \psi\|_{V_1'} \|y(t_n) - y(t)\|_{V_1} + |\psi|_H\, |y(t_n) - y(t)|_H\,.
\end{aligned}$$

Usando (3.2) y (3.5) en esta última desigualdad, resulta

$$\begin{aligned}
\left|\langle \varphi, y(t_n) - y(t)\rangle_{V_1',V_1}\right| &\leq \varepsilon\left(\tfrac{1}{4\|y\|_{L^{\infty}(0,T;V_1)}}\right) 2\,\|y\|_{L^{\infty}(0,T;V_1)} + |\psi|_H \left(\tfrac{1}{2|\psi|_H}\right)\varepsilon \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

De esta manera deducimos, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$|t_n - t| < \delta \text{ entonces } \left|\langle \varphi, y(t_n) - y(t)\rangle_{V_1',V_1}\right| < \varepsilon \text{ para todo } \varphi \in V_1^{'}. \tag{3.6}$$

De (3.3) y (3.6) logramos (3.1).

Veamos

$$y' \in C_s([0,T]\,; H). \tag{3.7}$$

En efecto, tenemos que

$$y' \in L^2(0,T;V_2) \hookrightarrow L^2(0,T;V_1^{'}) \text{ y } y'' \in L^2(0,T;V_1^{'}),$$

entonces, en virtud del Lema 1.41, conseguimos que $y' \in C([0,T]\,;V_1^{'})$, esto implica

$$y' \in C_s([0,T]\,;V_1^{'}). \tag{3.8}$$

De (3.4) y (3.8) tenemos

$$y' \in L^\infty(0,T;H) \cap C_s([0,T]\,;V_1^{'}).$$

Identificamos $X = H$ y $Y = V_1^{'}$ y por el Lema 1.50 tenemos (3.7).

Luego de (3.1) y (3.7) obtenemos el Lema 3.1. ■

Lema 3.2 Asumamos que y es una solución débil del problema (2.21). Entonces para cada $t \in [0,T]$ tenemos la siguiente Igualdad de la Energía

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1(t,y(t),y(t)) + |y'(t)|_H^2 + 2\displaystyle\int_0^t a_2(\tau,y'(\tau),y'(\tau))d\tau = a_1(0,y_0,y_0) + \\ |y_1|_H^2 + \displaystyle\int_0^t a_1'(\tau,y(\tau),y(\tau))d\tau + 2\int_0^t \langle g(\tau),y'(\tau)\rangle_{V_2',V_2}\,d\tau. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

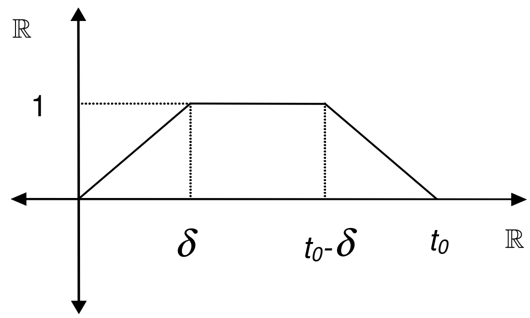
Demostración.

Sea $t_0 \in \langle 0,T\rangle$, arbitrario.

Sea $\delta > 0$ fijado, definimos la función χ_δ sobre $\mathbb{R}_t$, por

$$\chi_\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{, en } \quad [\delta, t_0-\delta]\,, \\ 0 & \text{, en } \quad \mathbb{R}_t - [0,t_0]\,, \\ \frac{1}{\delta}t & \text{, en } \quad [0,\delta]\,, \\ -\frac{1}{\delta}(t-t_0) & \text{, en } \quad [t_0-\delta, t_0]\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Siendo la gráfica de la función χ_δ la siguiente figura



Sea

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ en } \quad [0, t_0] \ , \\ 0 & , \text{ en } \quad \mathbb{R}_t - [0, t_0] \end{cases} . \tag{3.11}$$

Veamos algunas propiedades de las funciones χ_δ y χ_0. Tenemos la siguiente convergencia puntual

$$\lim_{\delta \to 0} \chi_\delta(t) = \chi_0(t), \tag{3.12}$$

esto implica que, si $y \in L^p(\mathbb{R}_t; X)$ para algún espacio X de Banach, donde $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$y\chi_\delta \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} y\chi_0 \text{ en } L^p(\mathbb{R}_t; X). \tag{3.13}$$

Además, tenemos la siguiente derivada en el sentido distribucional

$$\chi'_\delta \in L^1(\mathbb{R}_t), \tag{3.14}$$

debido a lo siguiente

$$\left\| \chi'_\delta \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} = \int_{\mathbb{R}_t} \left| \chi'_\delta(t) \right| dt = \int_0^\delta \left| \frac{1}{\delta} \right| + \int_{t_{0-\delta}}^{t_0} \left| -\frac{1}{\delta} \right| = 2,$$

de donde obtenemos (3.14).

Sea $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión regularizante de funciones pares tales que $\int_{\mathbb{R}_t} \rho_n = 1$, donde

$supp(\rho_n) \subset (-1/n, 1/n)$, si $f \in L^p(\mathbb{R}_t; X)$, siendo X un espacio de Banach, denotemos por

$$\rho_n * f$$

a la convolución de una función vectorial definido por

$$\rho_n * f(t) = \int_{\mathbb{R}_t} \rho_n(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Así mismo, verifica algunas propiedades, como la siguiente convergencia

$$\rho_n * f \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f \text{ en } L^p(\mathbb{R}_t; X) \tag{3.15}$$

para $1 \leq p < \infty$, cuya demostración es similar para las funciones escalares, ver Brezis [2]. Denotemos por

$$\delta_n = \rho_n * \rho_n, \tag{3.16}$$

de donde tenemos que δ_n es una función par, es decir verifica

$$\delta_n(t) = \delta_n(-t), \tag{3.17}$$

esto es debido a que ρ_n es una función par. También tenemos que

$$\int_0^{t_0} \delta_n(t) = \frac{1}{2}. \tag{3.18}$$

Su demostración se basa en la Propiedad Arquimediana, para $\dfrac{t_0}{2} > 0$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{t_0}{2}$$

así tenemos

$$\frac{2}{n} < t_0$$

de donde resulta

$$supp(\delta_n) \subset (-1/n, 1/n) + (-1/n, 1/n) \subset (-t_0, t_0)$$

y usando (3.17) conseguimos (3.18).

Por Lema 3.1 notamos que $y(t)$ y $y'(t)$, tienen valores en V_1 y H respectivamente para todo $t \in [0, T]$.

Como $a_1(t, \phi, \psi)$ y $a_2(t, \phi, \psi)$ son continuas y acotadas, podemos extender las formas bilineales para todo $t \in \mathbb{R}_t$ con las mismas propiedades sobre $[0, T]$.

Extendemos la solución $y \in W(0, T)$ del problema (2.21) sobre $\mathbb{R}_t$ vía reflexión.

Denotamos por $\langle\langle ., . \rangle\rangle$ a la dualidad entre $L^2(\mathbb{R}_t; V_1')$ y $L^2(\mathbb{R}_t; V_1)$, así tenemos la siguiente igualdad

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle_{L^2(\mathbb{R}_t;V_1'),L^2(\mathbb{R}_t;V_1)} = \int\limits_{\mathbb{R}_t} \langle f(t), g(t) \rangle_{V_1',V_1} \, dt \tag{3.19}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}_t; V_1')$ y $g \in L^2(\mathbb{R}_t; V_1)$. Denotemos por $[[., .]]$ al producto interno en $L^2(\mathbb{R}_t; H)$, de donde tenemos la igualdad

$$[[f, g]]_{L^2(\mathbb{R}_t;H)} = \int\limits_{\mathbb{R}_t} (f(t), g(t))_H \, dt \tag{3.20}$$

para todo $g, f \in L^2(\mathbb{R}_t; H)$. Donde $\langle\langle ., . \rangle\rangle$ es la extensión de $[[., .]]$ debido a las inmersiones $V_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow V_1'$, escribimos

$$\langle\langle ., . \rangle\rangle_{L^2(\mathbb{R}_t;V_1'),L^2(\mathbb{R}_t;V_1)} = [[., .]]_{L^2(\mathbb{R}_t;H)} \, . \tag{3.21}$$

Tenemos lo siguiente

$$\begin{gathered}
\left\langle\left\langle A_1'(\rho_n * (\chi_0 y)), \rho_n * (\chi_0 y) \right\rangle\right\rangle + 2 \left\langle\left\langle \rho_n * (A_1 \chi_0 y), \rho_n * (\chi_0 y') \right\rangle\right\rangle + \\
2 \left\langle\left\langle A_1(\rho_n * (\chi_0 y) - \rho_n * (A_1 \chi_0 y), \rho_n' * (\chi_0 y) \right\rangle\right\rangle + \\
2 \left\langle \rho_n * \rho_n * (\chi_0 A_1 y)(0), y(0) \right\rangle_{V_1',V_1} - \\
2 \left\langle \rho_n * \rho_n * (\chi_0 A_1 y)(t_0), y(t_0) \right\rangle_{V_1',V_1} = 0.
\end{gathered} \tag{3.22}$$

En efecto, empezando con la igualdad de la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}a_1(t;\rho_n*(\chi_\delta y)(t),\rho_n*(\chi_\delta y))(t))dt =$$
$$\lim_{\mathrm{b,a}\longrightarrow\infty^{+,\ -}} a_1(t;\rho_n*(\chi_\delta y)(t),\rho_n*(\chi_\delta y)(t))\big|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = 0 \quad ,$$

esta última es debido a que $\rho_n(x) \underset{\mathrm{x}\longrightarrow\infty^{+,\ -}}{\longrightarrow} 0$ y la continuidad de a_1, derivando tenemos

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}a_1(t;\rho_n*(\chi_\delta y)(t),\rho_n*(\chi_\delta y))(t)dt\\
= & \int_{-\infty}^{\infty} a_1'(t;\rho_n*(\chi_\delta y)(t),\rho_n*(\chi_\delta y))(t)+\\
& \int_{-\infty}^{\infty} 2a_1(t;\rho_n*(\chi_\delta y)(t),(\rho_n*(\chi_\delta y))'(t).
\end{aligned}$$

Por (2.19) y (2.10) resulta

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & \int_{-\infty}^{\infty}\Big\langle A_1'(\rho_n*(\chi_\delta y))(t),\rho_n*(\chi_\delta y)(t)\Big\rangle_{V_1',V_1} dt +\\
& \int_{-\infty}^{\infty} 2\left\langle A_1(\rho_n*(\chi_\delta y))(t),(\rho_n*(\chi_\delta y))'(t)\right\rangle_{V_1',V_1} dt.
\end{aligned}$$

Usando (3.19) tenemos

$$\Big\langle\Big\langle A_1'(\rho_n*(\chi_\delta y)),\rho_n*(\chi_\delta y)\Big\rangle\Big\rangle + 2\left\langle\left\langle A_1(\rho_n*(\chi_\delta y)),(\rho_n*(\chi_\delta y))'\right\rangle\right\rangle = 0. \tag{3.23}$$

Como

$$(\rho_n*\chi_\delta y)' = \rho_n'*\chi_\delta y = \rho_n*(\chi_\delta y)'. \tag{3.24}$$

Entonces por (3.24) tenemos de (3.23), la siguiente igualdad

$$\Big\langle\Big\langle A_1'(\rho_n*(\chi_\delta y)),\rho_n*(\chi_\delta y)\Big\rangle\Big\rangle + 2\left\langle\left\langle A_1(\rho_n*(\chi_\delta y)),\rho_n'*(\chi_\delta y)\right\rangle\right\rangle = 0. \tag{3.25}$$

Por (3.24) la siguiente igualdad es válida

$$\begin{gathered}
2\left\langle\left\langle\rho_n*A_1(\chi_\delta y),\rho_n*(\chi_\delta' y)\right\rangle\right\rangle + 2\left\langle\left\langle\rho_n*A_1(\chi_\delta y),\rho_n*(\chi_\delta y')\right\rangle\right\rangle - \\
2\left\langle\left\langle\rho_n*A_1(\chi_\delta y),\rho_n'*(\chi_\delta y)\right\rangle\right\rangle = 0.
\end{gathered} \tag{3.26}$$

Agregando la igualdad (3.26) en la ecuación (3.25) y ordenando adecuadamente, conseguimos

$$\begin{gathered}\left\langle\left\langle A_1'(\rho_n * (\chi_\delta y)), \rho_n * (\chi_\delta y)\right\rangle\right\rangle + 2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_\delta y), \rho_n * (\chi_\delta y')\right\rangle\right\rangle + \\ 2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_\delta y), \rho_n * (\chi_\delta' y)\right\rangle\right\rangle + \\ 2\left\langle\left\langle A_1(\rho_n * \chi_\delta y) - \rho_n * A_1\chi_\delta y, \rho_n' * (\chi_\delta y)\right\rangle\right\rangle = 0\ .\end{gathered} \tag{3.27}$$

Previo a hacer $\delta \longrightarrow 0$ en (3.27) debemos verificar algunas convergencias

$$\left\langle\left\langle A_1'(\rho_n * (\chi_\delta y)), \rho_n * (\chi_\delta y)\right\rangle\right\rangle \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \left\langle\left\langle A_1'(\rho_n * (\chi_0 y)), \rho_n * (\chi_0 y)\right\rangle\right\rangle . \tag{3.28}$$

En efecto, como y en $L^2(\mathbb{R}_t, V_1)$ y por (3.13), tenemos

$$\chi_\delta y \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \chi_0 y \ \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t, V_1). \tag{3.29}$$

Debido a que ρ_n esta acotada en $C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ resulta por (3.29)

$$\rho_n * (\chi_\delta y) \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \rho_n * (\chi_0 y) \ \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t, V_1). \tag{3.30}$$

De (3.30) y $A_1' \in \mathcal{L}(V_1, V_1')$, conseguimos lo siguiente

$$A_1'(\rho_n * (\chi_\delta y)) \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} A_1'(\rho_n * (\chi_0 y)) \ \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t, V_1'). \tag{3.31}$$

Por (3.29) y (3.31) queda verificado (3.28).

Veamos

$$\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_\delta y), \rho_n * (\chi_\delta y')\right\rangle\right\rangle \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y), \rho_n * (\chi_0 y')\right\rangle\right\rangle . \tag{3.32}$$

En efecto, de (3.29) y $A_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_1')$, tenemos

$$\rho_n * A_1(\chi_\delta y) \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \rho_n * A_1(\chi_0 y) \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t, V_1'). \tag{3.33}$$

Para $y' \in L^2(\mathbb{R}_t, V_2)$ y (3.13), obtenemos

$$\chi_\delta y' \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \chi_0 y' \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t, V_2), \tag{3.34}$$

esto implica

$$\rho_n * (\chi_\delta y') \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \rho_n * (\chi_0 y') \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t, V_2). \tag{3.35}$$

Entonces de (3.33) y (3.35) resulta (3.32).

Verifiquemos la siguiente convergencia

$$\begin{aligned} \langle\langle A_1(\rho_n * \chi_\delta y) - \rho * A_1 \chi_\delta y, \rho_n' * (\chi_\delta y)\rangle\rangle & \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \\ \langle\langle A_1(\rho_n * \chi_0 y) - \rho_n * A_1 \chi_0 y, \rho_n' * (\chi_0 y)\rangle\rangle & , \end{aligned} \tag{3.36}$$

En efecto, procediendo como en (3.31), para el operador A_1 resulta

$$A_1(\rho_n * \chi_\delta y) \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} A_1(\rho_n * \chi_0 y) \;\text{ en } L^2(\mathbb{R}_t, V_1^{'}) \;. \tag{3.37}$$

Tenemos que

$$\rho_n' * (\chi_\delta y) \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \rho_n' * (\chi_0 y) \;\text{ en } L^2(\mathbb{R}_t, V_1). \tag{3.38}$$

Luego por (3.33), (3.37) y (3.38) concluimos (3.36).

Veamos

$$\begin{aligned} 2\,\langle\langle \rho_n * A_1(\chi_\delta y), \rho_n * (\chi_\delta' y)\rangle\rangle \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} & \, 2\,\langle \rho_n * \rho_n * (A_1 \chi_0 y)(0), y(0)\rangle_{V_1', V_1} - \\ & 2\,\langle \rho_n * \rho_n * (A_1 \chi_0 y)(t_0), y(t_0)\rangle_{V_1', V_1} \,. \end{aligned} \tag{3.39}$$

En efecto, para verificar (3.39), observemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} 2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_\delta y), \rho_n * (\chi_\delta' y)\right\rangle\right\rangle &= 2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_\delta y), \rho_n * (\chi_\delta' y)\right\rangle\right\rangle + \\ & \quad 2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y), \rho_n * (\chi_\delta' y)\right\rangle\right\rangle - \\ & \quad 2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_0) y, \rho_n * (\chi_\delta' y)\right\rangle\right\rangle , \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_\delta y), \rho_n * (\chi'_\delta y)\right\rangle\right\rangle = 2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y), \rho_n * (\chi'_\delta y)\right\rangle\right\rangle + \\ 2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_\delta - \chi_0) y, \rho_n * (\chi'_\delta y)\right\rangle\right\rangle . \tag{3.40}$$

De (2.5), (2.9) y $y \in L^\infty(\mathbb{R}_t; V_1)$, logramos

$$\rho_n * A_1(\chi_\delta - \chi_0) y \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}_t; V_1^{'}) . \tag{3.41}$$

Tenemos que

$$\rho_n * (\chi'_\delta y) \text{ es acotada en } L^1(\mathbb{R}_t; V_1); \tag{3.42}$$

en efecto, usando (3.14) resulta

$$\begin{aligned} \left\|\rho_n * (\chi'_\delta y)\right\|_{L^1(R_t;V_1)} &\leq |\rho_n|_{C_0^\infty(\mathbb{R}_t)} \int_{\mathbb{R}_t} \left|\chi'_\delta(t)\right| \|y(t)\|_{V_1}\, dt \\ &\leq 2\,|\rho_n|_{C_0^\infty(\mathbb{R}_t)} \|y\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;V_1)} , \end{aligned}$$

así logramos (3.42).

Luego de (3.41) y (3.42) conseguimos

$$2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_\delta - \chi_0) y, \rho_n * (\chi'_\delta y)\right\rangle\right\rangle \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 . \tag{3.43}$$

Ahora de (3.40), analicemos

$$2\left\langle\left\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y), \rho_n * (\chi'_\delta y)\right\rangle\right\rangle , \tag{3.44}$$

observamos que $\rho_n * A_1(\chi_0 y(t)) \in V_1^{'}$ y por la Proposición 1.24-(i), tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{gathered} \langle\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y), \rho_n * (\chi'_\delta y)\rangle\rangle = \\ \int_{\mathbb{R}_t} \left\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y)(\mu), \int_{\mathbb{R}_t} \rho_n(\mu - \tau)\chi'_\delta y(\tau) d\tau \right\rangle_{V_1', V_1} d\mu = \\ \int_{\mathbb{R}_t} \left[\int_{\mathbb{R}_t} \underbrace{\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y)(\mu), \rho_n(\mu - \tau)\chi'_\delta y(\tau)\rangle_{V_1', V_1}}_{\phi(\mu,\tau)} d\tau \right] d\mu . \end{gathered}$$

Siguiendo la igualdad, por el Teorema de Fubini tenemos que $\phi \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, como $\chi_\delta' y(\tau) \in V_1$, por la Proposición 1.24-(ii) y por (3.17), conseguimos la siguiente igualdad

$$
\begin{gathered}
\langle\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y), \rho_n * (\chi_\delta' y)\rangle\rangle = \\
\int_{\mathbb{R}_t}\int_{\mathbb{R}_t} \langle \rho_n(\mu-\tau)\rho_n * A_1(\chi_0 y)(\mu), \chi_\delta' y(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\, d\mu d\tau = \\
\int_{\mathbb{R}_t} \left\langle \int_{\mathbb{R}_t} \rho_n(\tau-\mu)\rho_n * A_1(\chi_0 y)(\mu) d\mu, \chi_\delta' y(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau = \\
\int_{\mathbb{R}_t} \langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(\tau), \chi_\delta' y(\tau)\rangle_{V_1',V_1} d\tau = \\
\int_{\mathbb{R}_t} \langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(\tau), y(\tau)\rangle_{V_1',V_1} \chi_\delta'(\tau) d\tau,
\end{gathered}
$$

de donde conseguimos

$$
\begin{aligned}
&\big\langle\big\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y), \rho_n * (\chi_\delta' y)\big\rangle\big\rangle = \\
&-\int_{\mathbb{R}_t} \Big(\langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(\tau), y(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\Big)' \chi_\delta(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

Haciendo $\delta \to 0$ a (3.45), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_t} \Big(\langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(\tau), y(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\Big)' \chi_\delta(\tau) d\tau \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}_t} \Big(\langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(\tau), y(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\Big)' \chi_0(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

Veamos la siguiente equivalencia del límite en (3.46), por (3.11) tenemos

$$
\begin{gathered}
\int_{\mathbb{R}_t} \Big(\langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(\tau), y(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\Big)' \chi_0(\tau) d\tau = \\
\int_0^{t_0} \Big(\langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(\tau), y(\tau)\rangle_{V_1',V_1}\Big)' d\tau = \\
\langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(0), y(0)\rangle_{V_1',V_1} - \langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(t_0), y(t_0)\rangle_{V_1',V_1},
\end{gathered}
$$

reemplazando esta última igualdad (3.46), conseguimos

$$
\begin{aligned}
2\,\langle\langle \rho_n * A_1(\chi_0 y), \rho_n * (\chi_\delta' y)\rangle\rangle \underset{\delta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} &\, 2\,\langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(0), y(0)\rangle_{V_1',V_1} - \\
&\, 2\,\langle \rho_n * \rho_n * A_1(\chi_0 y)(t_0), y(t_0)\rangle_{V_1',V_1}.
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

Por (3.43) y (3.47) en (3.40) verificamos (3.39).

De las convergencias (3.28), (3.32), (3.36) y (3.39), obtenemos (3.22), cuando hacemos $\delta \longrightarrow 0$ en (3.27)

Verifiquemos lo siguiente

$$\begin{aligned} 2\,[[\rho_n * \chi_0 y'', \rho_n * (\chi_0 y')]] + 2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(0), y'(0))_H - \\ 2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(t_0), y'(t_0))_H = 0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

En efecto, de la igualdad

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}(\rho_n * (\chi_\delta y')(t), \rho_n * (\chi_\delta y')(t))_H dt = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \left|\rho_n * (\chi_\delta y')(t)\right|_H^2 dt \\ = & \lim_{\mathrm{b,a} \longrightarrow \infty^{+,\,-}} \left|\rho_n * (\chi_\delta y')(t)\right|_H^2 \Big|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \\ = & \ 0, \end{aligned}$$

debido a que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_n * (\chi_\delta y')(t), \rho_n * (\chi_\delta y')(t))_H = 2(\rho_n * (\chi_\delta y')(t), \rho_n * (\chi_\delta y'')(t))_H + \\ 2(\rho_n * (\chi_\delta y')(t), \rho_n * (\chi'_\delta y')(t))_H \end{aligned}$$

resulta

$$2\left[\left[\rho_n * (\chi_\delta y'), \rho_n * (\chi_\delta y'')\right]\right] + 2\left[\left[\rho_n * (\chi_\delta y'), \rho_n * (\chi'_\delta y')\right]\right] = 0.$$

En la última igualdad agregamos

$$2\left[\left[\rho_n * \chi_0 y', \rho_n * \chi'_\delta y')\right]\right] - 2\left[\left[\rho_n * \chi_0 y', \rho_n * \chi'_\delta y')\right]\right]$$

obteniendo

$$\begin{aligned} 2\,[[(\rho_n * (\chi_\delta y'), \rho_n * (\chi_\delta y'')]] + 2\,[[(\rho_n * (\chi_\delta - \chi_0) y', \rho_n * \chi'_\delta y']] + \\ 2\,[[\rho_n * \chi_0 y', \rho_n * \chi'_\delta y')]] = 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Antes de observar el resultado cuando $\delta \longrightarrow 0$ en (3.49), verifiquemos las siguientes convergencias.

Veamos

$$[[\rho_n * \chi_\delta y', \rho_n * (\chi_\delta y'')]] \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} [[\rho_n * \chi_0 y', \rho_n * (\chi_0 y'')]] . \tag{3.50}$$

En efecto, de (3.34) tenemos

$$\rho_n * (\chi_\delta y') \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \rho_n * (\chi_0 y') \ \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t, V_2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}_t, H). \tag{3.51}$$

Análogamente a (3.34) para $y'' \in L^2(\mathbb{R}_t, V_1^{'})$ resulta

$$\rho_n * (\chi_\delta y'') \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \rho_n * (\chi_0 y'') \text{ en } \ L^2(\mathbb{R}_t, V_1^{'}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}_t, H). \tag{3.52}$$

De (3.51) y (3.52) verificamos (3.50).

Veamos

$$[[(\rho_n * (\chi_\delta - \chi_0) y', \rho_n * \chi_\delta' y']] \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.53}$$

En efecto, de (3.13) y $y' \in L^\infty(\mathbb{R}_t, H)$, tenemos

$$\rho_n * (\chi_\delta - \chi_0) y' \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}_t, H). \tag{3.54}$$

Deducimos que

$$\rho_n * \chi_\delta' y' \text{ esta acotada en } L^1(\mathbb{R}_t, H), \tag{3.55}$$

debido a la siguiente acotación

$$\left\| \rho_n * \chi_\delta' y' \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t, H)} \leq |\rho_n|_{C_0^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}_t} \left| \chi_\delta' y'(t) \right| dt \leq 2 \left| \rho_n \right|_{C_0^\infty(\mathbb{R}_t)} \left\| y' \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t; H)} \ .$$

Luego de (3.54) y (3.55), tenemos lo que se pide (3.53)

Verifiquemos

$$\begin{aligned} 2\,[[\rho_n * \chi_0 y', \rho_n * \chi_\delta' y')]] \underset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} & \ 2\,(\rho_n * \rho_n * y'(0), y'(0))_H - \\ & 2\,(\rho_n * \rho_n * y'(t_0), y'(t_0))_H . \end{aligned} \tag{3.56}$$

En efecto, haciendo uso de la Proposición.1.24-(i), tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
[[\rho_n * \chi_0 y', \rho_n * \chi'_\delta y')]] = & \int_{\mathbb{R}_t} (\rho_n * \chi_0 y'(\mu), \rho_n * \chi'_\delta y'(\mu))_H d\mu \\
= & \int_{\mathbb{R}_t} (\rho_n * \chi_0 y'(\mu), \int_{\mathbb{R}_t} \rho_n(\mu-\tau)\chi'_\delta y'(\tau) d\tau)_H d\mu \\
= & \int_{\mathbb{R}_t}\int_{\mathbb{R}_t} \langle \rho_n * \chi_0 y'(t), \rho_n(\mu-\tau)\chi'_\delta y'(\tau))\rangle_{V'_2,V_2} d\tau d\mu \\
= & \int_{\mathbb{R}_t}\int_{\mathbb{R}_t} \underbrace{\left\langle \rho_n(\mu-\tau)\rho_n * \chi_0 y'(t), \chi'_\delta y'(\tau))\right\rangle_{V'_2,V_2}}_{\phi(\mu,\tau)} d\tau d\mu \ .
\end{aligned}$$

Continuando la igualdad, tenemos por el Teorema de Fubini que $\phi \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, por la Proposición 1.24-(ii) y (3.17), conseguimos lo siguiente

$$\begin{aligned}
[[\rho_n * \chi_0 y', \rho_n * \chi'_\delta y')]]_{L^2(\mathbb{R}_t,H)} = & \int_{\mathbb{R}_t}\int_{\mathbb{R}_t} \langle \rho_n(\mu-\tau)\rho_n * \chi_0 y'(\mu), \chi'_\delta y'(\tau))\rangle_{V'_2,V_2} d\mu d\tau \\
= & \int_{\mathbb{R}_t} \left\langle \int_{\mathbb{R}_t} \rho_n(\tau-t)\rho_n * \chi_0 y'(t) dt, \chi'_\delta y'(\tau))\right\rangle_{V'_2,V_2} d\tau \\
= & \int_{\mathbb{R}_t} \langle \rho_n * \rho_n * \chi_0 y'(\tau), \chi'_\delta y'(\tau))\rangle_{V'_2,V_2} d\tau \\
= & \int_{\mathbb{R}_t} (\rho_n * \rho_n * \chi_0 y'(\tau), y'(\tau)))_H \chi'_\delta(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Obteniendo así

$$\left[[\rho_n * \chi_0 y', \rho_n * \chi'_\delta y')\right]] = -\int_{\mathbb{R}_t} \left(\rho_n * \rho_n * \chi_0 y'(\tau), y'(\tau))\right)'_H \chi_\delta(\tau) d\tau. \tag{3.57}$$

Haciendo $\delta \to 0$ en (3.57) resulta

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}_t} \left(\rho_n * \rho_n * \chi_0 y'(\tau), y'(\tau))\right)'_H \chi_\delta(\tau) d\tau \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} & \\
-\int_{\mathbb{R}_t} \left(\rho_n * \rho_n * \chi_0 y'(\tau), y'(\tau))\right)'_H \chi_0(\tau) d\tau \ . &
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Veamos la igualdad del límite (3.58)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_t} \left(\rho_n * \rho_n * \chi_0 y'(\tau), y'(\tau))\right)'_H \chi_0(\tau) d\tau = & \int_0^{t_0} \left(\rho_n * \rho_n * \chi_0 y'(\tau), y'(\tau))\right)' \\
= & \left(\rho_n * \rho_n * \chi_0 y'(0), y'(0))\right)_H - \\
& \left(\rho_n * \rho_n * \chi_0 y'(t_0), y'(t_0))\right)_H ,
\end{aligned}$$

reemplazando esta última igualdad, al límite de la convergencia (3.58) obtenemos (3.56). Usando las convergencias (3.50), (3.53) y (3.56) y haciendo $\delta \to 0$ en (3.49) queda verificado (3.48).

Sumando (3.22) y (3.48) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\langle\langle A_1'(\rho_n * (\chi_0 y), \rho_n * (\chi_0 y)\rangle\rangle + 2\,\langle\langle \rho_n * (A_1\chi_0 y), \rho_n * (\chi_0 y')\rangle\rangle + \\
&2\,\langle\langle A_1(\rho_n * (\chi_0 y)) - \rho_n * (A_1\chi_0 y), \rho_n' * (\chi_0 y)\rangle\rangle + \\
&2\,\langle \rho_n * \rho_n * (\chi_0 A_1 y)(0), y(0)\rangle_{V_1', V_1} - \\
&2\,\langle \rho_n * \rho_n * (\chi_0 A_1 y)(t_0), y(t_0)\rangle_{V_1', V_1} + \\
&2\,[[\rho_n * \chi_0 y'', \rho_n * (\chi_0 y')]] + 2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(0), y'(0))_H - \\
&2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(t_0), y'(t_0))_H = 0.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Reemplazando $y'' = g - A_2 y' - A_1 y \in L^2(\mathbb{R}_t, V_1')$ y usando la igualdad (3.21), en el quinto término de (3.59) resulta

$$\begin{aligned}
&\langle\langle A'(\rho_n * (\chi_0 y)), (\chi_0 y)\rangle\rangle + 2\,\langle\langle \rho_n * \chi_0(A_1 y), \rho_n * (\chi_0 y')\rangle\rangle + \\
&2\,\langle\langle A_1(\rho_n * (\chi_0 y)) - \rho * A_1\chi_0 y, \rho_n' * (\chi_0 y)\rangle\rangle + \\
&2\,\langle \rho_n * \rho_n * (A_1\chi_0 y)(0), y(0)\rangle_{V_1', V_1} - \\
&2\,\langle \rho_n * \rho_n * (A_1\chi_0 y)(t_0), y(t_0)\rangle_{V_1', V_1} + \\
&2\,\langle\langle \rho_n * \chi_0(g - A_2 y'), \rho_n * (\chi_0 y')\rangle\rangle - 2\,\langle\langle \rho_n * \chi_0(A_1 y), \rho_n * (\chi_0 y')\rangle\rangle + \\
&2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(0), y'(0))_H - 2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(t_0), y'(t_0))_H = 0.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Es válida la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
&\langle\langle A_1(\rho_n * (\chi_0 y)) - \rho_n * A_1\chi_0 y, \rho_n' * (\chi_0 y)\rangle\rangle =, \\
&\langle\langle A_1(\rho_n * (\chi_0 y)) - \rho_n * A_1\chi_0 y, (\rho_n * (\chi_0 y))'\rangle\rangle
\end{aligned}$$

derivando distribucionalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
&\langle\langle A_1(\rho_n * (\chi_0 y)) - \rho_n * A_1\chi_0 y, \rho_n' * (\chi_0 y)\rangle\rangle = \\
&-\langle\langle (A_1(\rho_n * (\chi_0 y)) - \rho_n * A_1\chi_0 y)', \rho_n * (\chi_0 y)\rangle\rangle\,.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Reemplazando (3.61), en el tercer término de (3.60) y ordenando, resulta

$$\begin{gathered}\langle\langle A'(\rho_n * (\chi_0 y)), (\chi_0 y)\rangle\rangle + 2\,\langle\langle \rho_n * \chi_0(g - A_2 y')), \rho_n * (\chi_0 y')\rangle\rangle - \\ 2\,\langle\langle (A_1(\rho_n * (\chi_0 y)) - \rho_n * A_1\chi_0 y)', \rho_n * (\chi_0 y)\rangle\rangle + \\ 2\,\langle \rho_n * \rho_n * (A_1\chi_0 y)(0), y(0)\rangle_{V_1', V_1} - \\ 2\,\langle \rho_n * \rho_n * (A_1\chi_0 y)(t_0), y(t_0)\rangle_{V_1', V_1} + \\ 2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(0), y'(0))_H - 2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(t_0), y'(t_0))_H = 0.\end{gathered} \tag{3.62}$$

Previo a hacer $n \longrightarrow \infty$ en (3.62), verifiquemos las siguientes convergencias.

Veamos

$$\left\langle\left\langle A^{'}(\rho_n * (\chi_0 y)), (\chi_0 y)\right\rangle\right\rangle \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \left\langle\left\langle A^{'}(\chi_0 y), (\chi_0 y)\right\rangle\right\rangle. \tag{3.63}$$

En efecto, de (3.15) resulta

$$\rho_n * (\chi_0 y) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \chi_0 y \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t; V_1)$$

de donde conseguimos

$$A^{'}(\rho_n * (\chi_0 y)) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} A^{'}(\chi_0 y) \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t; V_1^{'})$$

obteniendo (3.63).

Veamos

$$\langle\langle \rho_n * \chi_0(g - A_2 y')), \rho_n * (\chi_0 y')\rangle\rangle \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \langle\langle \chi_0(g - A_2 y')), (\chi_0 y')\rangle\rangle. \tag{3.64}$$

En efecto, de (3.15) resulta

$$\rho_n * \chi_0(g - A_2 y')) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \chi_0(g - A_2 y') \text{ en } \ L^2(\mathbb{R}_t; V_2^{'})$$

y

$$\rho_n * (\chi_0 y') \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} (\chi_0 y') \text{ en } \ L^2(\mathbb{R}_t; V_2).$$

Obteniendo (3.64).

Verifiquemos

$$\langle\langle (A_1(\rho_n * (\chi_0 y)) - \rho_n * A_1\chi_0 y)', \rho_n * (\chi_0 y)\rangle\rangle \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.65}$$

En efecto, de (3.15) tenemos

$$\rho_n * \chi_0 y \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \chi_0 y \text{ en } \ L^2(\mathbb{R}_t; V_1)$$

esto implica

$$A_1(\rho_n * \chi_0 y) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} A_1(\chi_0 y) \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t; V_1^{'}). \tag{3.66}$$

Por (3.15), conseguimos

$$\rho_n * A_1\chi_0 y \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} A_1\chi_0 y \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t; V_1^{'}). \tag{3.67}$$

Restando (3.66) y (3.67) logramos

$$A_1(\rho_n * \chi_0 y) - \rho_n * A_1(\chi_0 y) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} A_1(\chi_0 y) - A_1(\chi_0 y) = 0 \text{ en } L^2(\mathbb{R}_t; V_1^{'}),$$

derivando distribucionalmente obtenemos

$$(A_1\rho_n * \chi_0 y - \rho_n * A_1\chi_0 y)' \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de esto resulta (3.65).

Veamos

$$2\,\langle \rho_n * \rho_n * (A_1\chi_0 y)(t_0), y(t_0)\rangle_{V_1', V_1} - \langle (A_1 y)(t_0), y(t_0)\rangle_{V_1', V_1} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.68}$$

En efecto, de (3.16), tenemos la siguiente igualdad

$$
\begin{aligned}
2\left\langle \rho_n * \rho_n * (A_1\chi_0 y)(t_0), y(t_0)\right\rangle_{V_1',V_1} &= 2\left(\delta_n * (A_1\chi_0 y)(t_0), y(t_0)\right)_H = \\
2\left(\int_0^{t_0} \delta_n(\tau)(A_1\chi_0 y)(t_0-\tau)d\tau, y(t_0)\right)_H &= 2\int_0^{t_0} \left(\delta_n(\tau)(A_1\chi_0 y)(t_0-\tau)d\tau, y(t_0)\right)_H d\tau.
\end{aligned}
$$

Resultando

$$
2\left\langle \rho_n * \rho_n * (A_1\chi_0 y)(t_0), y(t_0)\right\rangle_{V_1',V_1} = 2\int_0^{t_0} \left(\delta_n(\tau)(A_1\chi_0 y)(t_0-\tau)d\tau, y(t_0)\right)_H d\tau. \tag{3.69}
$$

Usando (3.69) y (3.18), en la siguiente diferencia, y tomando límite resulta

$$
\begin{gathered}
2\left(\delta_n * (A_1\chi_0 y)(t_0), y(t_0)\right)_H - \left((A_1 y)(t_0), y(t_0)\right)_H = \\
2\int_0^{t_0} \delta_n(\tau)\left((A_1\chi_0 y)(t_0-\tau), y(t_0)\right)_H d\tau - 2\int_0^{t_0} \delta_n(\tau)d\tau\left((A_1 y)(t_0), y(t_0)\right)_H = \\
2\int_0^{t_0} \delta_n(\tau)\left((A_1\chi_0 y)(t_0-\tau) - (A_1 y)(t_0), y(t_0)\right)_H d\tau \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{gathered}
$$

de donde conseguimos (3.68).

Procediendo análogamente a la verificación de la convergencia (3.68), obtenemos

$$
2\left\langle \rho_n * \rho_n * (A_1\chi_0 y)(0), y(0)\right\rangle_{V_1',V_1} - \left\langle (A_1 y)(0), y(0)\right\rangle_{V_1',V_1} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0\ . \tag{3.70}
$$

Veamos

$$
2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(t_0), y'(t_0))_H - \left|y'(t_0)\right|_H^2 \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.71}
$$

En efecto, en (3.48) tomando límite, tenemos lo siguiente

$$
\begin{gathered}
2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(t_0), y'(t_0))_H - (y'(t_0), y'(t_0))_H = \\
2\int_0^{t_0} \delta_n(\tau)\left(y(t_0-\tau) - y'(t_0), y(t_0)\right)_H d\tau \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{gathered}
$$

así resulta (3.71).

Procediendo análogamente a la comprobación de (3.71), obtenemos

$$
2(\rho_n * \rho_n * (\chi_0 y')(0), y'(0))_H - \left|y'(0)\right|_H^2 \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.72}
$$

Usando las convergencias (3.63)–(3.65), (3.68)-(3.72) y haciendo $n \longrightarrow \infty$ en la ecuación (3.62), tenemos

$$\begin{gathered}\left\langle\left\langle A'(\chi_0 y),(\chi_0 y)\right\rangle\right\rangle + 2\left\langle\left\langle \chi_0(g-A_2y')),(\chi_0 y')\right\rangle\right\rangle + \langle (A_1y)(0),y(0)\rangle_{V_1',V_1} + \\ \langle (A_1y)(t_0),y(t_0)\rangle_{V_1',V_1} + |y'(0)|_H^2 - |y'(t_0)|_H^2 = 0\end{gathered} \tag{3.73}$$

antes de reducir (3.73), notemos las siguientes igualdades

$$\begin{gathered}\left\langle\left\langle A'(\chi_0 y),\chi_0 y\right\rangle\right\rangle = \int_{\mathbb{R}_t}\left\langle A_1'(\tau)\chi_0 y(\tau), y\chi_0(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau = \\ \int_0^{t_0}\left\langle A_1'(\tau)y(\tau),y(\tau)\right\rangle_{V_1',V_1} d\tau = \int_0^{t_0} a_1'(\tau;y(\tau),y(\tau))d\tau.\end{gathered} \tag{3.74}$$

Por (3.11) conseguimos

$$\begin{gathered}2\left\langle\left\langle \chi_0(g-A_2y')),\chi_0 y'\right\rangle\right\rangle = 2\int_{\mathbb{R}_t}\langle \chi_0 g(\tau) - A_2(\tau)y'(\tau),\chi_0 y'(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau = \\ 2\int_0^{t_0}\langle g(\tau)-A_2(\tau)y'(\tau),y'(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau.\end{gathered} \tag{3.75}$$

De (2.9) tenemos

$$\langle (A_1y)(t_0),y(t_0)\rangle_{V_1',V_1} = a_1(t_0,y(t_0),y(t_0)) \tag{3.76}$$

y

$$\langle (A_1y)(0),y(0)\rangle_{V_1',V_1} = a_1(0,y(0),y(0). \tag{3.77}$$

Remmplazando (3.74)-(3.77) en (3.73) resulta

$$\begin{gathered}\int_0^{t_0} a_1'(\tau;y(\tau),y(\tau))d\tau + 2\int_0^{t_0}\langle g(\tau)-A_2(\tau)y'(\tau),y'(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau + \\ a_1(0,y(0),y(0)) - a_1(t_0,y(t_0),y(t_0) + |y'(0)|_H^2 - |y'(t_0)|_H^2 = 0,\end{gathered}$$

ordenando conseguimos

$$\begin{gathered}a_1(t_0,y(t_0),y(t_0) + |y'(t_0)|_H^2 + 2\int_0^{t_0} a_2\left(\tau,y'(\tau),y'(\tau)\right)d\tau = a_1(0,y(0),y(0)) \\ + |y'(0)|_H^2 + \int_0^{t_0} a_1'(\tau;y(\tau),y(\tau))d\tau + \int_0^{t_0}\langle g(\tau),y'(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau.\end{gathered} \tag{3.78}$$

Recordemos que se tomó $t_0 \in \langle 0,T\rangle$ arbitrario, de (3.78) obtenemos finalmente (3.9). ■

Teorema 3.3. Asumamos que todas las hipótesis del Teorema 2.2 son válidas. Sea $y \in W(0,T)$ una solución del problema (2.17). Entonces para todo $t \in [0,T]$ tenemos la siguiente igualdad de la Energía

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1(t,y(t),y(t)) + |y'(t)|_H^2 + 2\displaystyle\int_0^t a_2(\tau,y'(\tau),y'(\tau))d\tau = a_1(0,y_0,y_0) + |y_1|_H^2 \\ +\displaystyle\int_0^t a_1'(\tau,y(\tau),y(\tau))d\tau + 2\int_0^t \langle f(\tau,y(\tau)),y'(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau. \end{array} \right. \tag{3.79}$$

Demostración.

Sea

$$\tilde{g}(t) = f(t,y(t)) - A_2(t)y'(t) \tag{3.80}$$

reemplazando en

$$y'' + 0y' + A_1(t)y = f(t,y) - A_2(t)y'$$

tenemos el problema

$$y'' + 0y' + A_1(t)y = \tilde{g}(t). \tag{3.81}$$

con los datos iniciales

$$y\,(0) = y_0,\ y'\,(0) = y_1$$

Verifiquemos que $\tilde{g} \in L^2(0,T,V_2^{'})$.

Afirmación 1, $\tilde{g}$ es medible, en efecto, debido que y' es medible y $A_2(t)$ es continua, entonces

$$t \longmapsto A_2(t)y'(t) \text{ es medible.} \tag{3.82}$$

Gracias a (3.82), (2.18) y (3.80) , conseguimos que $\hat{g}$ es medible.

Afirmación 2, $\tilde{g}$ es integrable, debido a

$$\|\tilde{g}(t)\|_{V_2'} \leq \left\|A_2(t)y'(t)\right\|_{V_2'} + \|f(t,y(t))\|_{V_2'}\,,$$

por (2.12) y (2.15), resulta

$$\|\tilde{g}(t)\|_{V_2'} \leq c_{21} \left\|y'(t)\right\|_{V_2'} + \|f(t,y(t))\|_{V_2'} . \tag{3.83}$$

De (2.19) y (2.20), tenemos

$$\begin{aligned} \|f(t,y(t))\|_{V_2'} &\leq \|f(t,y(t)) - f(t,0)\|_{V_2'} + \|f(t,0)\|_{V_2'} \\ &\leq \beta(t) \|y(t)\|_{V_2'} + \gamma(t), \end{aligned}$$

resultando

$$\|f(t,y(t))\|_{V_2'}^2 \leq 2\left(\beta(t)^2 \|y(t)\|_{V_2}^2 + \gamma^2(t)\right). \tag{3.84}$$

Elevando al cuadrado (3.83) y utilizando (3.84), conseguimos

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(t)\|_{V_2'}^2 &\leq 2\left(c_{21}^2 \left\|y'(t)\right\|_{V_2}^2 + \|f(t,y(t))\|_{V_2'}^2\right) \leq 2c_{21}^2 \left\|y'(t)\right\|_{V_2}^2 + \\ &\quad 4\left(\beta(t)^2 \|y(t)\|_{V_2}^2 + \gamma^2(t)\right). \end{aligned}$$

Integrando sobre $[0,T]$, teniendo en cuenta que $y \in L^\infty(0,T;V_1)$ y considerando que S agrupa las constantes, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\tilde{g}(t)\|_{V_2'}^2 &\leq 2\int_0^T c_{21}^2 \left\|y'(t)\right\|_{V_2}^2 dt + 4\int_0^T \left(\beta(t)^2 \|y(t)\|_{V_2}^2 + \gamma^2(t)\right) dt \\ &\leq S\left(\left\|y'\right\|_{L^2(0,T;V_2)} + \|\beta\|_{L^2(0,T)} + \|\gamma\|_{L^2(0,T)}\right). \end{aligned}$$

De donde concluimos que $\hat{g}$ es integrable.

Aplicando el Lema 3.2 para la ecuación (3.81), tenemos

$$\begin{gathered} a_1(t,y(t),y(t)) + |y'(t)|_H^2 + 2\int_0^t 0(\tau,y'(\tau),y'(\tau))d\tau = \\ a_1(0,y_0,y_0) + |y_1|_H^2 + \int_0^t a_1'(\tau,y(\tau),y(\tau))d\tau + 2\int_0^t \langle \tilde{g}(\tau), y'(\tau)\rangle_{V_2',V_2} d\tau. \end{gathered}$$

Utilizando (3.80) y siguiendo la igualdad resulta

$$\begin{aligned} a_1(t, y(t), y(t)) + \left|y'(t)\right|_H^2 &= a_1(0, y_0, y_0) + |y_1|_H^2 + \int_0^t a_1'(\tau, y(\tau), y(\tau))d\tau + \\ & 2\int_0^t \left\langle f(\tau, y(\tau)) - A_2(t)y'(\tau), y'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau. \end{aligned}$$

Obteniendo finalmente (3.79). ■

Teorema 3.4. Asumamos las hipótesis del Teorema 2.2 y sea $y \in W(0,T)$ una solución débil de (2.17). Entonces $y \in C([0,T]\,; V_1)$ y $y' \in C([0,T]\,; H)$.

Demostración. Como

$$y \in W(0,T)$$

implica que

$$y \in L^2(0,T; V_1),\; y' \in L^2(0,T; V_2).$$

Como

$$V_1 \hookrightarrow H \text{ y } V_2 \hookrightarrow H$$

entonces tenemos

$$y \in L^2(0,T; H),\, y' \in L^2(0,T; H).$$

De donde seguimos, en virtud del Lema 1.35, que

$$y \in C([0,T]\,; H). \tag{3.85}$$

Tenemos que

$$t \longmapsto \int_0^t \left\langle f(\tau, y(\tau)), y'(\tau)\right\rangle_{V_2', V_2} d\tau\ , \tag{3.86}$$

$$t \longmapsto \int_0^t a_2(\tau, y'(\tau), y'(\tau))_{V_2'; V_2} d\tau \tag{3.87}$$

y

$$t \longmapsto \int_0^t a_1'(\tau, y(\tau), y(\tau))d\tau \tag{3.88}$$

son funciones que pertenecen al conjunto de $C([0,T]\,;\mathbb{R})$. De la Igualdad de la Energía (3.79) y por (3.86), (3.87) y (3.88), tenemos

$$t \longmapsto a_1(t, y(t), y(t)) + \left|y'(t)\right|_H^2 \in C([0,T]\,;\mathbb{R}). \tag{3.89}$$

Denotemos por ξ_n

$$\begin{aligned}\xi_n \quad &= \quad a_1(t_n, y(t_n) - y(t), y(t_n) - y(t)) + \\ &\quad\ \ \lambda_1 \left|y(t_n) - y(t)\right|_H^2 + \left|y'(t_n) - y'(t)\right|_H^2,\end{aligned} \tag{3.90}$$

obteniendo por (2.6)

$$\xi_n \geq \alpha_1 \left\|y(t_n) - y(t)\right\|_{V_1}^2 + \left|y'(t_n) - y'(t)\right|_H^2. \tag{3.91}$$

Identifiquemos por

$$\Psi(t) = a_1(t, y(t), y(t)) + \lambda_1 \left|y(t)\right|_H^2 + \left|y'(t)\right|_H^2, \tag{3.92}$$

por (3.85) y (3.89), deducimos que

$$\Psi \in C([0,T]\,;\mathbb{R}). \tag{3.93}$$

Desarrollando (3.90), por la bilinealidad de a_1, tenemos

$$\begin{gathered}\xi_n = a_1(t_n, y(t_n), y(t_n)) - 2a_1\left(t_n, y(t_n), y(t)\right) + a_1(t_n, y(t), y(t)) + \\ \lambda_1 \left|y(t_n)\right|_H^2 + \lambda_1 \left|y(t)\right|_H^2 - 2\lambda_1 (y(t), y(t_n))_H + \left|y'(t_n)\right|_H^2 + \\ \left|y'(t)\right|_H^2 - 2(y'(t), y'(t_n))_H,\end{gathered}$$

siguiendo la igualdad y usando la notación (3.92) logramos

$$\begin{aligned}\xi_n \quad &= \quad \Psi(t_n) - 2a_1(t_n, y(t_n), y(t)) + a_1(t_n, y(t), y(t)) + \lambda_1 \left|y(t)\right|_H^2 \\ &\quad\ \ -2\lambda_1 (y(t), y(t_n))_H + \left|y'(t)\right|_H^2 - 2(y'(t), y'(t_n))_H,\end{aligned}$$

en esta última igualdad agregamos

$$a_1(t, y(t), y(t)) - a_1(t, y(t), y(t)),\ 2a_1\left(t, y\left(t_n\right), y\left(t\right)\right) - 2a_1\left(t, y\left(t_n\right), y\left(t\right)\right)$$

y usando la notación (3.92), agrupando adecuadamente, obtenemos

$$\begin{gathered}\xi_n = \Psi(t_n) + \Psi(t) - 2\left[a_1(t_n, y(t_n), y(t)) - a_1(t, y(t_n), y(t)\right] + \\ \left[a_1(t_n, y(t), y(t)) - a_1(t, y(t), y(t))\right] - 2\lambda_1(y(t), y(t_n))_H \\ -2(y'(t), y'(t_n))_H - 2a_1(t, y(t_n), y(t)).\end{gathered} \tag{3.94}$$

De (2.8) conseguimos

$$\left|\int_{t_2}^{t_1} a_1'(\tau, \phi, \psi) d\tau\right| \leq \int_{t_2}^{t_1} \left|a_1'(\tau, \phi, \psi)\right| d\tau \leq \int_{t_2}^{t_1} c_{12} \left\|\phi\right\|_{V_1} \left\|\psi\right\|_{V_1}$$

esto implica

$$|a_1(t_1, \phi, \psi) - a_1(t_2, \phi, \psi)| \leq c_{12}\left(t_1 - t_2\right) \left\|\phi\right\|_{V_1} \left\|\psi\right\|_{V_1}. \tag{3.95}$$

Para $t_1 = t_n$, $t_2 = t$ y $\phi = \psi = y(t)$ en (3.95), tenemos

$$|a_1(t_n, y(t), y(t)) - a_1(t, y(t), y(t))| \leq c_{12}\left(t_n - t\right) \left\|y(t)\right\|_{V_1} \left\|y(t)\right\|_{V_1}.$$

Logrando

$$a_1(t_n, y(t), y(t)) - a_1(t, y(t), y(t)) \underset{t_n \longrightarrow t}{\longrightarrow} 0\ . \tag{3.96}$$

Para $t_1 = t_n$, $t_2 = t$ y $\phi = y(t_n)$, $\psi = y(t)$ en (3.95), resulta

$$|a_1(t_n, y(t_n), y(t)) - a_1(t, y(t_n), y(t))| \leq c_{12}\left(t_n - t\right) \left\|y(t_n)\right\|_{V_1} \left\|y(t)\right\|_{V_1}.$$

Como $y \in L^{\infty}(0, T; V_1)$, esto implica

$$a_1(t_n, y(t), y(t)) - a_1(t, y(t_n), y(t)) \underset{t_n \longrightarrow t}{\longrightarrow} 0\ . \tag{3.97}$$

En virtud del Lema 3.1 tenemos

$$y' \in C_s([0,T]\,;H)$$

esto implica que la aplicación

$$t \longmapsto \big(\phi, y'(t)\big)_H \text{ sea continua para todo } \phi \in H$$

si $t_n \longrightarrow t$, entonces

$$\big(\phi, y'(t_n)\big)_H \longrightarrow \big(\phi, y'(t)\big)_H\,.$$

Para $y'(t) = \phi \in H$ resulta

$$(y'(t), y'(t_n))_H \underset{t_n \longrightarrow t}{\longrightarrow} (y'(t), y'(t))_H\ , \tag{3.98}$$

Por Lema 3.1, tenemos

$$y \in C_S([0,T]\,;V_1)$$

obteniendo

$$\tau \longmapsto \langle \phi, y(\tau)\rangle_{V_1',V_1} \text{ es continua para todo } \phi \in V_1^{'}$$

si $t_n \longrightarrow t$ entonces

$$\langle \phi, y(t_n)\rangle_{V_1',V_1} \longrightarrow \langle \phi, y(t)\rangle_{V_1',V_1}\,.$$

Tomamos $A_1(t)y(t) = \phi$, así obtenemos

$$a_1(t, y(t), y(t_n)) \underset{t_n \longrightarrow t}{\longrightarrow} a_1(t, y(t), y(t)). \tag{3.99}$$

Cuando $t_n \longrightarrow t$ sobre (3.94), resulta por (3.93), (3.96), (3.97), (3.98) y (3.99)

$$\xi_n \underset{t_n \longrightarrow t}{\longrightarrow} 2\Psi(t) - 2\lambda_1(y(t), y(t))_H - 2(y'(t), y'(t))_H - a_1(t, y(t), y(t)),$$

ordenando el límite obtenido y por (3.92) tenemos lo siguiente

$$2\Psi(t) - 2\left(a_1(t, y(t), y(t) + \lambda_1 \left|y(t)\right|_H^2 + \left|y'(t)\right|_H^2\right) = 2\Psi(t) - 2\Psi(t),$$

de donde conseguimos

$$\xi_n \underset{t_n \longrightarrow t}{\longrightarrow} 0. \tag{3.100}$$

Finalmente de (3.91) y (3.100), obtenemos

$$0 \leq \lim_{t_n \longrightarrow t} \left(\alpha_1 \left\| y(t_n) - y(t) \right\|_{V_1}^2 + \left| y'(t_n) - y'(t) \right|_H^2 \right) \leq \lim_{t_n \longrightarrow t} \xi_n$$

así deducimos

$$\left\| y(t_n) - y(t) \right\|_{V_1}^2 \underset{t_n \longrightarrow t}{\longrightarrow} 0 \tag{3.101}$$

y

$$\left| y'(t_n) - y'(t) \right|_H^2 \underset{t_n \longrightarrow t}{\longrightarrow} 0. \tag{3.102}$$

Por lo tanto de (3.101) y (3.102) conseguimos el Teorema 3.4. ■

Corolario 3.5. Asumamos las condiciones del Corolario 2.3 para el problema (2.21). Entonces la solución débil y para el problema (2.21) satisface

$$y \in C([0,T]\,; V_1) \text{ y } y' \in C([0,T]\,; H).$$

Además tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} T : L^2(0,T;V_2') \times V_1 \times H & \rightarrow & C([0,T]\,;V_1) \times C([0,T]\,;H) \\ (g, y_0, y_1) & \rightarrow & T(g,y_0,y_1) = (y, y') \end{array}$$

es continua.

Demostración. Del Teorema 3.5 resulta

$$y \in C([0,T]\,; V_1), \;\; y' \in C([0,T]\,; H).$$

Procediendo similarmente con los cálculos realizados para obtener (2.59), para $Y_m^{'} = y'$, $Y_m = y$

y $\varepsilon = 1$, resulta

$$\begin{aligned} |y'(t)|_H^2 + \alpha_1 \|y(t)\|_{V_1}^2 + 2\alpha_2 \int_0^t \|y'(\tau)\|_{V_2}^2 \, d\tau \le c_{11} \|y_0\|_{V_1}^2 + |y_1|_H^2 + \lambda_1 |y(t)|_H^2 + \\ 2\lambda_2 \int_0^t |y'(\tau)|_H^2 \, d\tau + \int_0^t c_{12} \|y(\tau)\|_{V_1}^2 \, d\tau + \int_0^t |g(\tau)|_H^2 + 2\int_0^t |y'(\tau)|_H^2 \, d\tau. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Trabajando similarmente a (2.60) obtenemos

$$|y(t)|_H^2 \le 2\tilde{k} \|y_0\|_{V_1}^2 + 2T \int_0^t \left|y'(\tau)\right|_H^2 d\tau.$$

Reemplazando esta última igualdad en el sexto termino de (3.103), siendo K y $\tilde{K}$ constantes máximas, sea $\tilde{\alpha}$ =mínimo$\{\alpha_1, 1\}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{V_1}^2 + |y'(t)|_H^2 \le \tfrac{K}{\tilde{\alpha}} \left(\|g\|_{L^2(0,T;V_2)}^2 + \|y_0\|_{V_1}^2 + |y_1|_H^2 \right) + \\ \tfrac{\tilde{K}}{\tilde{\alpha}} \left(\int_0^t |y'(\tau)|_H^2 \, d\tau + \int_0^t \|y'(\tau)\|_{V_1}^2 \, d\tau \right). \end{aligned} \tag{3.104}$$

Por el Lema 1.40, en (3.104) resulta

$$\|y(t)\|_{V_1}^2 + \left|y'(t)\right|_H^2 \le \tilde{C} \left(\|g\|_{L^2(0,T;V_2)}^2 + \|y_0\|_{V_1}^2 + |y_1|_H^2 \right) \tag{3.105}$$

donde $\tilde{C}$ es una constante máxima.

De (3.105) resulta

$$\|y\|_{C([0,T];V_1)} + \left\|y'\right\|_{C([0,T];H)} \le \tilde{C} \left(\|g\|_{L^2(0,T;V_2)} + \|y_0\|_{V_1} + |y_1|_H \right)$$

lo que implica

$$\left\|(y, y')\right\|_{C([0,T];V_1)\times C([0,T];H)} \le \tilde{C} \left\|(g, y_0, y_1)\right\|_{L^2(0,T;V_2)\times V_1 \times H} .$$

Obteniendo así lo siguiente

$$\|T(g, y_0, y_1)\|_{C([0,T];V_1)\times C([0,T];H)} \le \tilde{C} \left\|(g, y_0, y_1)\right\|_{L^2(0,T;V_2)\times V_1 \times H} . \blacksquare$$

Capítulo 4

Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales

Sea Ω un conjunto abierto, limitado y bien regular de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Omega$. Denotemos por $Q = (0,T)\times\Omega$ y $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Ejemplo 1. (Ecuación del seno$-$Gordon: Problema de Dirichlet). Consideramos el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \beta seny = f & \text{en } Q \\ y(x,t) = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ y(0,x) = y_0(x) & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = y_1(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Donde tenemos las constantes $\alpha, \beta > 0$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$.

Solución.

Una solución clásica para (4.1) es una función y suficientemente regular, es decir $y \in C^2(\bar{\Omega})$que verifique (4.1) puntualmente. Veamos como definir la solución débil para (4.1), sea y una solución clásica de la primera ecuación del problema (4.1) y sus datos inciales sobre Ω, luego multiplicamos por $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ a la primera ecuación de (4.1) e integramos sobre Ω, tenemos lo siguiente

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \alpha \frac{\partial y}{\partial t}\varphi(x)dx - \int_\Omega \Delta y(t,x)\varphi(x)dx +$$
$$\int_\Omega \beta sen y(t,x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(t,x)\varphi(x)dx.$$

Por la Identidad del Teorema de Green, obtenemos

$$\begin{gathered}\int_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \alpha \frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla y(t,x)\nabla\varphi(x)dx = \\ \int_\Omega (f(t,x) - \beta sen y(t,x))\varphi(x)dx.\end{gathered} \tag{4.2}$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Consideramos los siguientes espacios $V_1 = H_0^1(\Omega)$, $V_2 = H = L^2(\Omega)$, así tenemos las siguientes inmersiones

$$V_1 \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow H \approxeq H^{'} \hookrightarrow V_2^{'} \hookrightarrow V_1^{'}.$$

Por la desigualdad de Poincaré, tenemos la siguiente norma

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} = \int_\Omega \nabla\varphi(x).\nabla\varphi(x)dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Entonces, decimos que una función y es solución débil de (4.1) si $y \in W(0,T)$ y además satisface (4.2) para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Procedemos que existe una única solución débil para el problema (4.1).

Definamos las formas bilineales:

1.1) $a_2 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ tal que $a_2(\varphi,\phi) = \int_\Omega \alpha\varphi(x)\phi(x)dx$; $\forall \varphi,\phi \in V_2$.

1.2) $a_1 : V \times V_1 \to \mathbb{R}$ tal que $a_1(\varphi,\phi) = \int_\Omega \nabla\varphi(x).\nabla\phi(x)dx$; $\forall \varphi,\phi \in V_1$.

1.3) $\tilde{f} : [0,T] \times V_2 \to V_2^{'}$ tal que $\tilde{f}(t,\varphi) = f(t) - \beta sen(\varphi)$ donde

$$\left(\tilde{f}(t,\varphi),\phi\right) = \int_\Omega \left(f(t,x) - \beta sen(\varphi(x))\right)\phi(x)dx, \ \forall \phi \in V_2.$$

Ahora verifiquemos las condiciones del Teorema 2.2

1.1) Dado que $a_2 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ es tal que

$$a_2(\varphi, \phi) = \int_\Omega \alpha\varphi(x)\phi(x)dx, \ \forall \varphi, \phi \in V_2 = L^2(\Omega).$$

Entonces

i) a_2 es bilineal, debido a la Linealidad de la integral.

ii) a_2 es acotada, gracias a la siguiente,

$$|a_2(\varphi, \phi)| \leq \alpha \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} .$$

iii) a_2 verifica la hipótesis (2.13),

$$a_2(\varphi, \varphi) + \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

La forma bilineal a_2 verifica las hipótesis (2.11)-(2.14), esto nos permite definir el operador lineal $A_2 \in \mathcal{L}(V_2', V_2)$, denotamos por $D(A_i)$ al espacio

$$D(A_i) = \{\varphi \in V_i; \ \phi \mapsto a_i(\varphi, \phi) \text{ es continua sobre } V_i \text{ con la topología de } H\} . \tag{4.3}$$

Esto es, el dominio de A_i en H, para $i = 1, 2$.
Si $\varphi \in D(A_2)$, entonces tenemos $\varphi \in L^2(\Omega)$ y $\alpha\varphi \in L^2(\Omega)$, de donde logramos

$$D(A_2) = L^2(\Omega).$$

Denotamos por (αI) al operador $A_2 \in \mathcal{L}(V_2', V_2)$, donde I es la función identidad.

1.2) Dado que $a_1 : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$ es tal que

$$a_1(\varphi, \phi) = \int_\Omega \nabla\varphi(x).\nabla\phi(x)dx, \ \forall \varphi, \phi \in V_1 = H^1_0(\Omega).$$

Entonces:

i) a_1 es bilineal debido a la linealidad del gradiente.

ii) a_1 es acotada, en virtud a lo siguiente,

$$|a_1(\varphi,\phi)| \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} .$$

iii) a_1 satisface la hipótesis (2.6), debido a lo siguiente

$$a_1(\varphi,\varphi) = \int_{\Omega} \nabla\varphi(x)\nabla\varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

de donde conseguimos

$$a_1(\varphi,\varphi) + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 .$$

La forma bilineal a_1 verifica las hipótesis (2.4)-(2.8), esto nos permite definir el operador $A_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_1^{'})$; si $\varphi \in D(A_1)$, por la definición (4.3), conseguimos $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ y $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$, esto es equivalente a

$$D(A_1) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Denotamos por $(-\Delta)$ al operador $A_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_1^{'})$.

1.3) Dado que $\tilde{f} : [0,T] \times V_2 {\rightarrow} V_2^{'}$ es tal que

$$(\tilde{f}(t,\varphi),\phi) = \textstyle\int_{\Omega} (f(t,x) - \beta sen(\varphi(x)))\phi(x)dx \ , \forall\phi \in V_2.$$

i) La buena definición de $\tilde{f}(t,\varphi)$, es decir $\tilde{f}(t,\varphi) \in V_1$

$\tilde{f}(t,\varphi)$ es lineal, por la linealidad de la integral.

$\tilde{f}(t,\varphi)$ es acotada , debido a que $|sen(a)| \leq a$, de donde resulta

$$\left| \left(\tilde{f}(t,\varphi), \phi \right) \right| \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \beta \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} .$$

ii) $t \longmapsto \tilde{f}(t,\varphi)$ es medible, debido a que f es medible y $sen(\varphi)$ es medible.

iii) $\tilde{f}(t,\varphi)$ es Lipchitziana en la segunda variable para cada $t \in [0,T]$, sea $u,\ v \in L^2(\Omega)$

$$\begin{gathered}\left\|\tilde{f}(t,u)-\tilde{f}(t,v)\right\|_{V_2'} = \beta \left\|senv - senu\right\|_{L^2(\Omega)} = \\ \beta \left(\int_\Omega \left|senv(x) - senu(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq \\ \beta \left(\int_\Omega \left|v(x)-u(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq \beta \left\|v-u\right\|_{L^2(\Omega)}.\end{gathered}$$

iv) $\tilde{f}(t,0)$ es acotada por una función $\gamma \in L^2(0,T)$, debido a definición de $\tilde{f}(t,\varphi)$ y tomando $\varphi = 0$ conseguimos

$$\left\|\tilde{f}(t,0)\right\|_{V_2'} \leq \left\|f(t)\right\|_{L^2(\Omega)} + \beta \left\|0\right\|_{L^2(\Omega)} = \gamma(t).$$

Así tenemos por el Teorema 2.2 la existencia de una única solución débil y de (4.1) tal que $y \in L^2(0,T;V_1)$, $y' \in L^2(0,T;V_2)$ y $y'' \in L^2(0,T;V_1')$, que satisface

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t}(x,t)\phi(x)dx + a_2(\frac{\partial y}{\partial t}(.),\phi) + a_1(y(.),\phi) = (f(.,y(.)),\phi)_{L^2(\Omega)},$$

para $\forall\phi \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido distribucional $\mathcal{D}'(0,T)$,

$$\begin{aligned} y(0,x) &= y_0(x) \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) &= y_1(x) \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

Observemos que $y(t) \in V_1 = H_0^1(\Omega)$,entonces

$$\begin{gathered} y(t,x) = 0,\ x \in \Gamma \\ y(t,x) = 0 \text{ sobre } \Sigma. \end{gathered}$$

Así obtenemos una única solución $y \in W(0,T)$, que satisface (4.1) en el sentido distribucional

Ejemplo2. – (Ecuación del seno-Gordon : Problema de Neumann).

Consideramos la ecuación del seno-Gordon teniendo en cuenta las condiciones de Neumann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \alpha\Delta\dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \beta seny = f & \text{en } Q \\ \alpha\dfrac{\partial}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = g & \text{sobre } \Sigma \\ y(0,x) = y_0(x) & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = y_1(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

Dado las constantes $\alpha,\ \beta > 0$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ y $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ denota la derivada direccional con dirección a la normal exterior de Γ, $y_0 \in H^1(\Omega)$ y $y_1 \in L^2(\Omega)$.

Solución.

Veamos como definir la solución débil para el problema (4.4). Sea y una solución clásica de la primera ecuación del problema (4.4) y sus datos inciales sobre Ω, luego multiplicamos por $\varphi \in H^1(\Omega)$ e integramos sobre Ω, así obtenemos

$$\begin{gathered} \int_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\varphi(x)\,dx - \int_\Omega \alpha\Delta\frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\varphi(x)\,dx - \int_\Omega \Delta y(t,x)\varphi(x)dx + \\ \int_\Omega \beta sen(y(t,x))\varphi(x)dx = \int_\Omega f(t,x)\varphi(x)dx. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Por la Identidad del Teorema de Green, obtenemos las siguientes igualdades

$$-\int_\Omega \Delta\frac{\partial y}{\partial t^2}(t,x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \nabla\frac{\partial y}{\partial t}(t,x).\nabla\varphi(x)dx - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\varphi(x)dx$$

y

$$-\int_\Omega \Delta y(t,x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \nabla y(t,x).\nabla\varphi(x)dx - \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \eta}(t,x)\varphi(x)dx,$$

utilizando estas dos últimas igualdades en (4.5), resulta

$$\begin{gathered} \int_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\varphi(x)dx + \alpha\int_\Omega \nabla\frac{\partial y}{\partial t}(t,x).\nabla\varphi(x)dx - \alpha\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\varphi(x)dx + \\ \int_\Omega \nabla y(t,x).\nabla\varphi(x)dx - \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \eta}(t,x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega \beta sen((y(t,x))\,\varphi(x)dx + \\ \int_\Omega f(t,x)\varphi(x)dx. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Ordenando y reemplazando por $g = \alpha \dfrac{\partial}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial t}\varphi + \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\varphi$ sobre Γ, en (4.6), conseguimos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\varphi(x)dx + \alpha \int_\Omega \nabla \frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla y(t,x)\nabla\varphi(x)dx = \\ &\quad -\int_\Omega \beta sen(y(t,x))\varphi(x)dx + \int_\Omega f(t,x)\varphi(x)dx + \int_\Gamma g(t,x)\varphi(x)dx. \end{aligned} \tag{4.7}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Consideramos los siguientes espacios $V_1 = H^1(\Omega)$, $V_2 = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, así tenemos las siguientes inmersiones

$$V_1 \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow H \approxeq H' \hookrightarrow V_2' \hookrightarrow V_1'.$$

Esto nos lleva a la siguiente definición una función y es solución débil de (4.4) si $y \in W(0,T)$ y además satisface (4.7). Procedemos que existe una única solución débil de (4.4).

Definamos las siguientes aplicaciones:

2.1) $a_2 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ tal que $a_2(\varphi,\phi) = \alpha \int_\Omega \nabla\varphi.\nabla\phi dx;\ \forall \varphi,\phi \in V_2$.

2.2) $a_1 : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$ tal que $a_1(\varphi,\phi) = \int_\Omega \nabla\varphi.\nabla\phi dx\ ;\ \forall \varphi,\phi \in V_1$.

2.3) $\tilde{f} : [0,T] \times V_2 \to V_2'$ tal que

$$(\tilde{f}(t,\varphi),\phi) = \int_\Omega [f(t,x) - \beta sen\varphi(x)]\,\phi(x)dx + \int_\Gamma g(t,x)\phi(x)dx,\ \forall \phi \in V_2.$$

Verifiquemos las hipótesis del Teorema 2.2

2.1) Dado que $a_2(\varphi,\phi) = \alpha \int_\Omega \nabla\varphi.\nabla\phi dx$ es tal que $\forall \phi,\varphi \in V_2 = H^1(\Omega)$; donde la norma de $H^1(\Omega)$ esta definida por

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}, \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

i) a_2 es bilineal, por la linealidad del Gradiente.

ii) a_2 es acotada, gracias a lo siguiente

$$|a_2(\varphi,\phi)| = \alpha \left| \int_\Omega \nabla\varphi.\nabla\phi dx \right| \leq \alpha \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

iii) a_2 satisface la hipotesis (2.13), consecuencia de

$$a_2(\phi,\phi)+\alpha\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}=\alpha\int_\Omega \nabla\phi.\nabla\phi dx+\alpha\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}=\alpha\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

La forma bilineal a_2 verifica las hipótesis (2.11)-(2.14), esto nos permite definir el operador $A_2\in\mathcal{L}(V_2,V_2^{'})$, si $\varphi\in D(A_2)$ entonces gracias a la definición (4.3), tenemos

$$\varphi\in H^1(\Omega),\ \Delta\varphi\in L^2(\Omega) \tag{4.8}$$

y

$$(-\alpha\Delta\varphi,\phi)_{L^2(\Omega)}=(\alpha\nabla\varphi,\nabla\phi)_{L^2(\Omega)}\ \forall\phi\in H^1(\Omega). \tag{4.9}$$

Si φ verifica (4.8), entonces el trazo $\gamma_1\varphi=\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right|_\Gamma$ puede ser definida y pertencer a $H^{-1/2}(\Gamma)$,ver Medeiros [10]. La igualdad (4.9) expresa que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0$ sobre Γ, así tenemos

$$D(A_2)=\left\{\varphi\in H^2(\Omega),\ \Delta\varphi\in L^2(\Omega),\ \gamma_1\varphi=0\right\}.$$

Denotamos por $(-\alpha\Delta)$ al operador $A_2\in\mathcal{L}(V_2,V_2^{'})$

2.2) Dado que $a_1(\varphi,\phi)=\int_\Omega\nabla\varphi.\nabla\phi$ es tal que $\forall\varphi,\phi\in V_1=H^1(\Omega)$.

i) a_1 es bilineal, debido a que el Gradiente es lineal.

ii) a_1 es acotada, consecuencia de

$$|a_1(\varphi,\phi)|=\left|\int_\Omega\nabla\varphi.\nabla\phi dx\right|\le\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\|\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

iii) a_1 satisface la hipotesis (2.6), en virtud de

$$a_1(\phi,\phi)+\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega\nabla\phi.\nabla\phi dx+\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Luego la forma bilineal a_1 verifica las hipótesis (2.4)-(2.8), así logramos definir el operador

$A_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_1')$. Si $\varphi \in D(A_1)$ entonces por (4.3) obtenemos que φ verifica (4.8) y

$$(-\Delta\varphi, \phi)_{L^2(\Omega)} = (\nabla\varphi, \nabla\phi) \ \forall\phi \in H^1(\Omega),$$

de donde obtenemos que $D(A_1)$ es igual al conjunto $D(A_2)$. Denotamos a $(-\Delta)$ por el operador $A_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_1')$.

2.3) $\tilde{f} : [0, T] \times V_2 \rightarrow V_2'$ donde

$$\left(\tilde{f}(t, \varphi), \phi\right) = \int_\Omega \left(f(t, x) - \beta sen\varphi(x)\right)\phi(x)dx + \int_\Gamma g(t, x)\phi(x)dx, \ \forall\phi \in V_2.$$

i) La buena definición de $\tilde{f}(t, \varphi)$, es decir $\tilde{f}(t, \varphi) \in V_2'$.
$\tilde{f}(t, \varphi)$ es lineal debido a la linealidad de la integral .
$\tilde{f}(t, \varphi)$ es acotada, gracias a lo siguiente

$$\begin{aligned} \left|\left(\tilde{f}(t, \varphi), \phi\right)\right| \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \beta \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \\ \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

dedido a la continuidad de la función trazo γ_0 de $H^1(\Omega)$ a $H^{1/2}(\Gamma)$ y a la inmersión $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, conseguimos de (4.10) lo siguiente

$$\left|\left(\tilde{f}(t, \varphi), \phi\right)\right| \leq \left(|f(t)|_{L^2(\Omega)} + \beta \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right) \|\phi\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.11}$$

donde C es una constante, por lo tanto $\tilde{f}(t, \varphi) \in V_2'$.

ii) $t \longmapsto \tilde{f}(t, \varphi)$ medible: Pues f, $sen\varphi$ y g son medibles.

iii) $\tilde{f}$ es Lipchitziana en la segunda variable para cada $t \in [0, T]$, sea u y $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{f}(t, u) - \tilde{f}(t, v)\right\|_{(H^1(\Omega))'} &\leq \beta \|senu - senv\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \beta \|u - v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se debe a la inmersión $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

iv) $\tilde{f}(t, 0)$ es acotada por una función $\gamma \in L^2(0, T)$, debido a lo siguiente, de (4.11) tenemos

$$\left\| \tilde{f}(t,0) \right\|_{(H^1(\Omega))'} \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \gamma(t).$$

En esta última igualdad, aplicando la desigualdad (2.52) para $\varepsilon = 1$ resulta

$$\int_0^T |\gamma(t)|^2 \leq 2(\int_0^T \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \|g(t)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} dt),$$

de donde deducimos que $\gamma \in L^2(0,T)$.

Luego por el Teorema 2.2 tenemos la existencia de una solución débil y que verifica la siguiente igualdad

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\varphi(x)dx + a_2(y'(),\phi) + a_1(y(),\phi) = \left\langle \tilde{f}(t,y), \phi \right\rangle_{V_2', V_2} \tag{4.12}$$

para $\forall \phi \in H^1(\Omega)$ en el sentido distribucional $\mathcal{D}'(0,T)$,

$$\begin{aligned} y(0,x) &= y_0(x) \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) &= y_1(x) \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

Sea y una solución débil de (4.4) tal que $y, y' \in C^2(\bar{\Omega})$ y $y'' \in C(\bar{\Omega})$ de (4.12) resulta para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ y usando la identidad del Teorema de Green obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{gathered} \int_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\varphi(x)dx - \int_\Omega \alpha \Delta y'(t,x).\phi(x)dx + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\varphi(x)dx - \\ \int_\Omega \Delta y(t,x).\phi(x)dx + \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \eta}(t,x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \left(f(t,x) - \beta seny(t,x)\right)\phi(x)dx + \\ \int_\Gamma g(t,x)\phi(x)dx, \end{gathered}$$

de donde, por el Lema de Du Bois-Raymond , conseguimos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \alpha \Delta \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \beta seny = f \ c.s. \text{ sobre } \Omega.$$

Como $y, y' \in C^2(\bar{\Omega})$ y $y'' \in C(\bar{\Omega})$ tenemos que $f \in C(\bar{\Omega})$, así resulta

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \alpha\Delta\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \beta seny = f \text{ en } Q. \tag{4.13}$$

Si $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ en (4.12) y usando (4.13), concluimos

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial y}{\partial\eta}(t,x) - g(t,x)\right)\phi(x)dx = 0.$$

Debido a la densidad de $C^1(\bar{\Omega})$ en $L^2(\Omega)$, logramos lo siguiente

$$g = \alpha\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial\eta} \text{ en } \Sigma.$$

Ejemplo 3. – (Ecuación general de mayor orden : Problema Neumann).

Definimos la función $g : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

i) $g\ (.,u,n,v)$ es medible sobre $[0,T]$ para todo $u,v \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{R}^n$.

ii) Existe $\beta_i \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$, $i = 1,2,3$ para cada $t \in [0,T]$ y tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} \left|g\left(t,u,n,v\right) - g\left(t,u',n',v'\right)\right| &\leq \beta_1(t)\left|u-u'\right| + \\ &\quad \beta_2(t)\left|n-n'\right| + \beta_3(t)\left|v-v'\right| \\ ;\forall u,\ v,\ u',\ v' &\in \mathbb{R};\ n\ ,n' \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

iii) Existe $\gamma \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$ tal que $|g\left(t,0,0,0\right)| \leq \gamma(t)$, $t \in [0,T]$.

Consideremos una ecuación con términos no lineales dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \nabla.\left(b\nabla\dfrac{\partial y}{\partial t}\right) + \Delta\left(a\Delta y\right) = g\left(t,y,\nabla y,\Delta y\right) & \text{en } Q \\ y = \dfrac{\partial y}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ y(0,x) = y_0(x) & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = y_1(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.14}$$

Donde $a,\, b \in C^1([0,T]\,; L^\infty(\Omega))$ satisfaciendo $a(t,x),\, b(t,x) > 0$ para todo $(t,x) \in Q$.

Solución.

Veamos como definir la solución débil para el problema (4.14). Sea y una solución suficientemente regular para la primera ecuación en (4.14) y sus datos iniciales sobre Ω, luego multiplicando por $\phi \in H_0^2(\Omega)$ e integrando sobre Ω a la primera ecuación del problema (4.14) resultando

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\phi(x)dx + \nabla.\left(b(t,x)\nabla\frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\right)\phi(x) + \Delta\left(a(t,x)\Delta y(t,x)\right)\phi(x) = \\ \int\limits_\Omega g\left(t, y(t,x), \nabla y(t,x), \Delta y(t,x)\right)\phi(x)dx.\end{gathered} \tag{4.15}$$

Por la Fórmula de Green, ver Medeiros [7], para todo $u \in L^2(\Omega)$, $\Delta u \in L^2(\Omega)$, $v \in H^2(\Omega)$ tenemos

$$\int_\Omega \Delta u v dx - \int_\Omega u \Delta v dx = \int_\Gamma (v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta})d\Gamma\ ,$$

para $u = a(t,.)\Delta y(t,.)$ y $v = \phi$, conseguimos

$$\int\limits_\Omega \Delta\left(a(t,x)\Delta y(t,x)\right)\phi(x)dx = \int\limits_\Omega \left(a(t,x)\Delta y(t,x)\right)\Delta\phi(x)dx. \tag{4.16}$$

Por Teorema 1.42, tenemos

$$\int\limits_\Omega \nabla.\left(b(t,x)\nabla\frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\right)\phi(x)dx = -\int\limits_\Omega \left(b(t,x)\nabla\frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\right).\nabla\phi(x)dx. \tag{4.17}$$

Reemplazando (4.16) y (4.17) en (4.15), resulta

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\phi(x) + \int\limits_\Omega \left(b(t,x)\nabla\frac{\partial y}{\partial t}(t,x)\right).\nabla\phi(x) + \int\limits_\Omega \left(a(t,x)\Delta y(t,x)\right)\Delta\phi(x) = \\ \int\limits_\Omega g\left(t, y(t,x), \nabla y(t,x), \Delta y(t,x)\right)\phi(x)dx,\end{gathered} \tag{4.18}$$

donde $\nabla . = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}$. Consideramos los espacios $V_1 = H_0^2(\Omega)$, $V_2 = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, teniendo así las inmersiones

$$V_1 \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow H \approxeq H^{'} \hookrightarrow V_2^{'} \hookrightarrow V_1^{'}.$$

Una función y es solución débil de (4.14), si $y \in W\,(0,T)$ y además satisface (4.18). Procedemos que existe una única solución débil de (4.14).

Ahora definamos las siguientes formas bilineales:

3.1) $a_2(t) : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ tal que $a_2(t;\varphi,\phi) = \int_\Omega b(t,x)\nabla\varphi.\nabla\phi dx;\ \forall\phi,\varphi \in V_2$.

3.2) $a_1(t) : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}$ tal que $a_1(t;\varphi,\phi) = \int_\Omega a(t,x)\Delta\varphi\Delta\phi dx;\ \forall\phi,\varphi \in V_1$.

3.3) $\tilde{f} : [0,T] \times V_2 \to V_2^{'}$ tal que

$$\left(\tilde{f}(t,\varphi),\phi\right) = \int_\Omega g\left(t,\varphi(x),\nabla\varphi(x),\Delta\varphi(x)\right)\phi(x)dx,\ \forall\phi \in V_2.$$

Veamos si cumplen las hipótesis del Teorema 2.3

3.1) Dado que $a_2(t;\varphi,\phi) = \int_\Omega b(t,x)\nabla\varphi.\nabla\phi dx$ es tal que $\forall\phi,\ \varphi \in V_2 = H_0^1(\Omega)$.

i) a_2 es bilineal, por la linealidad del Gradiente.

ii) a_2 es acotada, dedido a que

$$\begin{aligned} |a_2(t;\varphi,\phi)| &= \left|\int_\Omega b(t,x)\nabla\varphi.\nabla\phi dx\right| \\ &\leq \|b(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \left|\int_\Omega \nabla\varphi.\nabla\phi dx\right| \end{aligned}$$

así obtenemos

$$|a_2(t;\varphi,\phi)| \leq \|b(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.19}$$

iii) a_2 verifica (2.13), gracias a

$$a_2(t;\phi,\phi) = \int_\Omega b(t,x)\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^2 dx \geq \int_\Omega \min_{x\in\overline{\Omega},t\in[0,T]}\{b(t,x)\}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

resultando

$$a_2(t;\phi,\phi) + \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}\,;\ \alpha = \min_{x\in\overline{\Omega},\ t\in[0,T]} \{b(t,x)\}\,.$$

iv) $t \to a_2(t;\phi,\phi)$ verifica (2.14), esto se debe a que $b \in C^1([0,T]\,;L^\infty(\Omega))$ y (4.19).

Gracias a que la forma bilineal a_2 verifica las hipótesis (2.11)-(2.14), nos permite definir el operador $A_2(t) \in \mathcal{L}(V_2, V_2^{'})$, si $\varphi \in D\left(A_2(t)\right)$ implica que

$$\varphi \in H^1_0(\Omega),\ A_2(t)\varphi \in L^2(\Omega) \tag{4.20}$$

y

$$\int_\Omega A_2(t)\varphi.\phi dx = a_2(t;\varphi,\phi). \tag{4.21}$$

La igualdad (4.21) expresa lo siguiente

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_1\left(b(t,x)\frac{\partial\varphi}{x_j}\right) = 0 \text{ en } H^{-1/2}(\Gamma). \tag{4.22}$$

Así tenemos

$$D(A_2) = \left\{\varphi \in H^1_0(\Omega),\ A_2(t)\varphi \in L^2(\Omega) \text{ y } (4.22)\right\}.$$

así el operador $A_2(t)$ está denotado por

$$A_2(t)\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{x_i}\left(b(t,x)\frac{\partial}{x_j}\varphi\right) \in L^2(\Omega)$$

3.2) Dado que $a_1(t;\varphi,\phi) = \displaystyle\int_\Omega a(t,x)\Delta\varphi\Delta\phi dx$ es tal que $\forall\phi,\ \varphi \in V_1 = H^2_0(\Omega)$, donde la norma de $H^2_0(\Omega)$ esta dada por

$$\|\varphi\|^2_{H^2(\Omega)} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \int_\Omega \Delta\varphi(x)\Delta\varphi(x)dx, \forall\varphi \in H^2_0(\Omega).$$

i) a_1 es bilineal por la linealidad del Laplaciano.

ii) a_1 es acotada, en virtud de

$$\begin{aligned} |a_1(t;\varphi,\phi)| &= \left|\int_\Omega a(t,x)\Delta\varphi\Delta\phi dx\right| \\ &\leq \|a(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|a(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

iii) a_1 verifica (2.6), gracias a

$$a_1(t;\phi,\phi) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a(t,x)\left|\frac{\partial^2\varphi\,(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2 dx \geq \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \min_{x\in\overline{\Omega},\ t\in[0,T]}\{a(t,x)\}\left|\frac{\partial^2\varphi\,(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2 dx,$$

de esta desigualdad tenemos

$$a_1(t;\phi,\phi) + \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \tilde{\alpha}\,\|\phi\|_{H^2(\Omega)}\ ;\ \tilde{\alpha} = \min_{x\in\overline{\Omega},\ t\in[0,T]}\{a(t,x)\}\,.$$

iv) a_1' es acotada, consecuencia de

$$\left|a_1'(t;\varphi,\phi)\right| \leq \left\|a'(t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}\|\phi\|_{H^2(\Omega)}\,.$$

La forma bilineal a_1 define el operador $A_1(t)\in\mathcal{L}(V_1,V_1')$, si $\varphi\in D(A_1(t))$ entonces

$$\varphi\in H_0^2(\Omega),\ A_1(t)\varphi\in L^2(\Omega)$$

y

$$\int_\Omega A_1(t)\varphi.\phi dx = a_2(t;\varphi,\phi).$$

Así el operador $A_1(t)$ está denotado por

$$A_1(t)\varphi = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(a(t,x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right).$$

3.3) $\tilde{f}:[0,T]\times V_2\to V_2'$ donde
$(\tilde{f}(t,u),\phi) = \int_\Omega g\left(t,\ u(x),\ \nabla u(x),\ \Delta u(x)\right)\phi(x)dx\ ;\forall\phi\in V_2 = H_0^1(\Omega).$

i) La buena definición de $\tilde{f}(t,\varphi)$, es decir $\tilde{f}(t,\varphi) \in V_2'$.

$\tilde{f}$ es lineal por la linealidad de la integral .

$\tilde{f}(t,\varphi)$ es acotada, debido a lo siguiente

$$\begin{aligned}
\left|(\tilde{f}(t,\varphi),\phi)\right| &\leq \int_{\Omega} \left[\beta_1(t)\left|\varphi(x)\right| + \beta_2(t)\left|\nabla\varphi(x)\right| + \beta_3(t)\left|\Delta u(x)\right|\right] \\
&\quad \int_{\Omega} \gamma(t)\left|\phi(x)\right| dx \\
&\leq \left(\beta_1(t)\left\|\varphi\right\|_{L^2(\Omega)} + \beta_2(t)\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2(\Omega)}\right) c\left\|\phi\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + c\beta_3(t)\left\|\Delta\varphi\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\left\|\phi\right\|_{H^1(\Omega)} + \gamma(t)c\left\|\phi\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|(\tilde{f}(t,\varphi),\phi)\right| &\leq \left(\beta_1(t)\left\|\varphi\right\|_{L^2(\Omega)} + \beta_2\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2(\Omega)}\right) c\left\|\phi\right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + c\beta_3(t)\left\|\varphi\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\phi\right\|_{H^1(\Omega)} + c\gamma(t)\left\|\phi\right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq K\left\|\phi\right\|_{V_2}
\end{aligned}$$

donde $c = (\mu(\Omega))^{1/2}$, aquí μ denota medida según Lebesgue y

$$K = c\beta_1(t)\left\|\varphi\right\|_{L^2(\Omega)} + c\beta_2\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2(\Omega)} + c\beta_3(t)\left\|\varphi\right\|_{H^1(\Omega)} + c\gamma(t)$$

por lo tanto $\tilde{f}(t,\varphi) \in V_2'$.

ii) $t \longmapsto \tilde{f}(t,\varphi)$ medible: Por condición del problema.

iii) $\tilde{f}$ es Lipchitziana en la segunda variable para cada $t \in [0,T]$, sea $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{gathered}
\left|\left(\tilde{f}(t,u) - \tilde{f}(t,v),\phi\right)\right| \leq \\
\left(\beta_1(t)\left\|(u-v)\right\|_{L^2(\Omega)} + \beta_2(t)\left\|\nabla(u-v)\right\|_{L^2(\Omega)}\right) c\left\|\phi\right\|_{L^2(\Omega)} + \\
c\beta_3(t)\left\|\Delta u - \Delta v\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\left\|\phi\right\|_{H^1(\Omega)} \leq \\
\left(\beta_1(t)\left\|(u-v)\right\|_{L^2(\Omega)} + \beta_2(t)\left\|\nabla(u-v)\right\|_{L^2(\Omega)}\right) c\left\|\phi\right\|_{H_0^1(\Omega)} + \\
\left(\beta_3(t)\left\|u-v\right\|_{H^1(\Omega)}\right) c\left\|\phi\right\|_{H^1(\Omega)}.
\end{gathered}$$

Así tenemos

$$\left\|\tilde{f}(t,u)-\tilde{f}(t,v)\right\|_{V_2'} \leq c\beta_1(t)\left\|(u-v)\right\|_{V_2} + c\beta_2(t)\left\|(u-v)\right\|_{V_2} + c\beta_3(t)\left\|(u-v)\right\|_{V_2},$$

denotemos a $\beta(t)=\beta_1(t)c+c\beta_2(t)+c\beta_3(t)$, $\beta \in L^2(0,T;R^+)$, así resulta

$$\left\|\tilde{f}(t,u)-\tilde{f}(t,v)\right\|_{V_2'} \leq \beta(t)\left\|(u-v)\right\|_{V_2}$$

iv) $\tilde{f}(t,0)$ es acotada por algún $\tilde{\gamma} \in L^2(0,T)$, gracias a

$$\left\|\tilde{f}(t,0)\right\|_{V_2'} \leq c\gamma(t)=\tilde{\gamma}(t)\ ,\ \tilde{\gamma} \in L^2(0,T).$$

Por el Teorema 2.2 existe una única solución débil y que verifica lo siguiente

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x)\varphi(x)dx + a_2(t;y'(t),\phi) + a_1(t;y(t),\phi) = \left\langle \tilde{f}(t,y),\phi \right\rangle_{V_2',V_2}$$

para $\forall \phi \in H_0^2(\Omega)$ en el sentido distribucional $\mathcal{D}'(0,T)$,

$$\begin{aligned} y(0,x) &= y_0(x) \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) &= y_1(x) \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

Conclusiones

1. Agregando la condición de inmersión compacta sobre las inclusiones

$$V_1 \subset V_2 \subset H,$$

y haciendo uso del Teorema 1.45, los cálculos realizados para obtener la convergencia fuerte de la solución aproximada se reducen considerablemente.

2. La elección de los espacios independientes de las formas bilineales nos facilita la identificación de los espacios funcionales del problema a desarrollar.

3. El Teorema 2.2 permite encontrar soluciones para ecuaciones de tipo hiperbólicas.

4. Las hipótesis (2.4)-(2.15), nos permite hacer uso de las técnicas de cálculo para la obtención de la regularidad de la solución.

Bibliografía

[1] Adams, Robert A., *Sobolev Spaces*, London 1970

[2] Brézis, Haim, *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones,* Alianza Editorial S. A. Madrid,1984

[3] Coddington Earl A., Levinson Norman, *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York Toronto London 1955.

[4] Dautray, R. y Lions, J. L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Sience and Technology*, Vol.5 Evolution Problems I, Springer-Velag, 1992.

[5] Ha Junhong y Nakagiri Shin-ichi, Existence and Regularity of Weak Solutions for Semilinear Second Order Evolution Equations, Funkcialaj Ekvacioj, 41, 1-24, 1998

[6] Kesavan, S, *Topic in Funtional Analysis and Applications, John Willey* & Sons, New york, Brisabane, Toronto, Sigapore 1989.

[7] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York Chichester, Toronto, Singapore 1989.

[8] Lions, J. L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier- Villars, Paris 1960.

[9] Lions J. L.y Magenes E., *Problemes aux limites non homogenes et Applications*, volumen (1), Dunod Paris 1968.

[10] Medeiros L. A., *Espacios de Sobolev*, Rio de Janeiro, maio 1997.

[11] Nakao, M., *Decay of solutions of some nonlinear evolution equations*, J. Math Anal.Appl., 60, 542-549, 1977.

[12] Showalter, R.E., *Hilbert Space Method for Partial Differential Equations*, Pitman, London, 1977 Springer-Verlag, New York Heidelberg 1989.

[13] Sotomayor, Jorge, *Licões de Equacões Diferenciais Ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Río de Janeiro, 1979.

[14] Teman, Roger, *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1988.

[15] Yosida, Kosaku , *Functional Analysis*, sixth edition, Springer-Velag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[16] Zeidler, E. Berhard, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications* II /A: Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1989.