



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Físicas

Unidad de Posgrado

**El Universo de MCVITTIE y algunas soluciones
cosmológicas**

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Física

AUTOR

Fulgencio VILLEGAS SILVA

ASESOR

Teófilo VARGAS AUCCALLA

Lima, Perú

2019



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Villegas, F. (2019). *El Universo de MCVITTIE y algunas soluciones cosmológicas*. Tesis para optar grado de Doctor en Física. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código Orcid del autor: <https://orcid.org/0000-0002-2560-9352>

Código Orcid del asesor: <https://orcid.org/0000-0002-0669-8863>

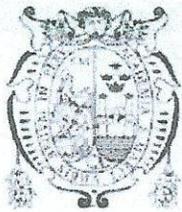
DNI del autor: **09202973**

Grupo de Investigación: **Física Teórica**

Institución que financia la investigación: **Ninguna**

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación: **Facultad de Ciencias Físicas, UNMSM, Lima, Perú**

Rango de años que la investigación abarcó: **2014 - 2017**



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, Decana de América)
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Vicedecanato de Investigación y Posgrado

UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN FÍSICA

A los veintidós días del mes de julio de dos mil diecinueve, siendo las cuatro de la tarde, se reunió el Jurado Examinador, en el auditorio 304 de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, presidido por el señor Dr. Carlos Reyes Rafael Edgardo como presidente, y con la asistencia de los siguientes miembros del Jurado Examinador:

Dr. Carlos Reyes Rafael Edgardo	(Presidente)
Dr. Dumet Montoya Habib Salomon	(Miembro integrante)
Dr. Espichan Carrillo Jorge Abel	(Miembro integrante)
Dr. Benitez del Aguila Héctor	(Miembro integrante)
Dr. Víctor Anthony García Rivera	(Miembro Suplente)
Dr. Vargas Aucalla Teófilo	(Asesor)

Para la sustentación oral y pública del trabajo de Tesis para optar el Grado Académico de Doctor en Física, del Mg. **Fulgencio Villegas Silva** con código N° 14137020.

Después de darse lectura al expediente de Grado en el que consta haberse cumplido con todas las disposiciones reglamentarias, los señores Miembros del Jurado Examinador, atendieron a la exposición de la Tesis titulada:

“El Universo de MCVITTIE y algunas soluciones cosmológicas”

Y formuladas las preguntas, éstas fueron absueltas por el graduando.

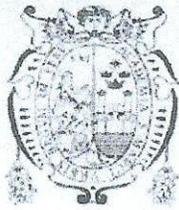
Acto seguido, en privado, el Jurado Examinador procedió a la calificación. El Presidente determinó el promedio de la calificación, obteniendo como resultado de:

Muy Bueno (18)

A continuación el Presidente del Jurado Examinador recomienda que la Facultad de Ciencias Físicas proponga que se le otorgue el Grado Académico de Doctor en Física, al Mg. **Fulgencio Villegas Silva**.

Siendo las *18:10*..... se levantó la sesión; recibiendo el graduando las felicitaciones de los señores Miembros del Jurado Examinador y público asistente.

Los Miembros del Jurado Examinador suscriben el Acta de sustentación de tesis en Lima, a los veintidós días del mes de julio de dos mil diecinueve.



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, Decana de América)
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
UNIDAD DE POSGRADO

Lima, 22 de julio de 2019

... Acta de sustentación de Tesis del Mg. Fulgencio Villegas Silva...

Dr. Carlos Reyes Rafael Edgardo
Presidente

Dr. Espichan Carrillo Jorge Abel
Miembro integrante

Dr. Benítez del Aguila Héctor
Miembro integrante

Dr. Víctor Anthony Garcia Rivera
Miembro integrante (suplente)

Dr. Vargas Auccalla Teófilo
Asesor

Dedicatoria

Dedicado a María Carmela y Segundo Fabián, mis padres, con gratitud.

Agradecimientos

En primer Lugar, agradezco a mis padres por su amor y sacrificio para que yo pudiera alcanzar mis sueños.

En forma especial, expreso mi agradecimiento al Dr. Teofilo Vargas Auccalla, asesor de la presente tesis, cuyos aportes en la investigación han sido fundamentales para la elaboración de este estudio. También cabe destacar su profesionalismo reflejado en su capacidad de escucha y comprensión, consejos útiles y, sobre todo, por su sensibilidad social y académica.

Por otro lado, presento mi agradecimiento a todos los docentes del Programa de Doctorado en Física de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Física de La UNMSM por sus enseñanzas, paciencia y dedicación en las clases impartidas en estos años.

A todas aquellas personas que, directa o indirectamente, contribuyeron en la elaboración de este trabajo; a la unidad de Posgrado de la Facultad de Física de la UNMSM, por la calidad que nos ofreció en este proceso de formación.

Resumen

La búsqueda de soluciones exactas para las ecuaciones de Einstein se ha desarrollado en dos direcciones diferentes: por un lado, el estudio de objetos masivos aislados cuyo campo gravitacional externo es modelado por soluciones asintóticamente planas (métrica de Schwarzschild); y por otro lado, el estudio a gran escala del universo, en forma global, para predecir su evolución, origen y su destino final (métrica FLRW). Pero hay un tercer camino que trata de mantener estos dos aspectos juntos, se trata de la métrica de McVittie, la cual nos presenta la posibilidad de estudiar los sistemas locales influenciados por la evolución a gran escala del espacio en el que están inmersos. Motivados por este enfoque, realizamos un estudio de la métrica de McVittie en dos etapas. En la primera etapa, analizamos el espacio-tiempo de McVittie para una partícula cargada; y a partir de ello, mediante una construcción matemática adecuada, introducimos la constante de Hubble. Posteriormente haciendo uso de las ecuaciones de campo de Einstein, se resuelve la ecuación de McVittie cargada con constante cosmológica negativa. En la segunda etapa, partimos del agujero de gusano atravesable de Morris -Thorne, la función de desplazamiento al rojo se hace nula $\phi(r) = 0$, y se realiza un cambio de variable adecuado para la función de forma $b(r) = b_0^m/r^{m-1}$, se construye una métrica para un agujero de gusano atravesable en el universo de FLRW; posteriormente, se analiza el caso de un agujero de gusano más general, se utiliza la métrica de McVittie, donde el agujero de gusano está modelado por una delgada capa esférica que acrecenta el fluido de quinta esencia; finalmente, se encuentra la ecuación dinámica de dicha capa delgada y el radio *comoving* de la misma.

Palabras clave: Relatividad General, gravitación, cosmología.

Abstract

The search for exact solutions for Einstein's equations has been developed in two different directions: the study of isolated massive objects whose external gravitational field is modeled by asymptotically flat solutions (Schwarzschild metric); and on the other hand, the large-scale study of the universe, in a global way, to predict its evolution, origin and its final fate (FLRW metric). But there is a third way that tries to keep these two aspects together, it is the McVittie metric, which presents the possibility of studying the local systems influenced by the large-scale evolution of the space in which they are immersed. Motivated by this approach, we carried out a study of McVittie's metric in two stages. In the first stage we analyze McVittie's space-time for a charged particle and from it, by means of an adequate mathematical construction, we introduce the Hubble constant, subsequently making use of the Einstein field equations we solve the charged McVittie equation with negative cosmological constant. In the second stage we start from the traversable wormhole of Morris-Thorne, making the red shift function null $\phi(r) = 0$, and performing a suitable change of variables for the form function $b(r) = b_0^m/r^{m-1}$ a metric is constructed for a traversable wormhole in the FLRW universe, the case of a more general wormhole is then analyzed using McVittie's metric, where the wormhole is modeled by a thin spherical shell that accretes the quintessence fluid ; finally the dynamic equation of the mentioned thin layer and the commoving radius of it are found.

Keywords: General Relativity, gravitación, cosmology.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	3
1.1.1. Objetivo general	3
1.1.2. Objetivos específicos	4
1.2. Metodología	4
1.3. Estructura de la tesis	4
2. Elementos de geometría diferencial	7
2.1. Variedades diferenciables	7
2.2. Difeomorfismo	9
2.3. Plano tangente	11
2.4. Tensores	14
2.5. Transporte paralelo y conexión de Levi-Civita	16
2.6. Tensor de Riemann	17
2.7. Derivada de Lie y vectores de Killing	20
3. Relatividad General	23
3.1. El principio de Equivalencia	24
3.2. Tensor de energía-momento	26
3.3. Ecuaciones de Einstein	27
3.4. Los postulados de la Relatividad General	31
3.5. Principio variacional de la Relatividad General	33

3.6. Invariancia de la relatividad general bajo difeomorfismos	38
4. Soluciones asintóticamente planas	40
4.1. Agujero negro de Schwarzschild	41
4.1.1. Métrica de Schwarzschild	42
4.1.2. Geodésicas en la métrica de Schwarzschild	45
4.1.3. Cantidades conservadas	48
4.1.4. Diagrama de Kruskal	51
4.2. Agujero negro de Reissner-Nordström	53
4.2.1. Métrica de Reissner-Nordström	54
4.2.2. Geodésicas en la métrica de Reissner-Nordström	58
4.2.3. Cantidades conservadas	61
4.2.4. Diagrama de Kruskal	62
4.3. Agujero de gusano atravesable de Morris-Thorne	63
4.3.1. Propiedades de los agujeros de gusano atravesables	65
4.3.2. Métrica del espacio-tiempo y ecuaciones de campo de Einstein	66
4.3.3. Condiciones de transitabilidad	68
4.3.4. Aceleración que percibe el viajero	69
4.3.5. Materia exótica y condiciones de Energía	70
5. Universo de FLRW y solución de McVittie	72
5.1. El Principio Cosmológico	73
5.2. Ley de Hubble	74
5.3. Universo de Friedmann - Lemaitrê - Robertson - Walker	77
5.3.1. Métrica de FLRW	78
5.3.2. Ecuaciones de Friedmann-Lemaitre	82
5.4. Solución de McVittie	85
5.4.1. Solución de McVittie sin curvatura	85
5.4.2. Solución de McVittie con curvatura	96

6. Solución de McVittie con partícula cargada y constante cosmológica negativa	99
6.1. Métrica de McVittie con carga	100
6.1.1. Ecuaciones de campo	100
6.1.2. Solución de las ecuaciones de campo	102
6.2. Métrica de McVittie cargada y término de Hubble	105
6.3. Métrica de McVittie cargada y $\Lambda < 0$	107
7. Agujeros de gusano en el universo de McVittie	113
7.1. Agujeros de Gusano Atravesable en el Universo de FLRW	114
7.2. Agujeros de Gusano en el universo de McVittie	117
8. Conclusiones	121
A. Componentes del tensor de Einstein para la métrica de McVittie	125
A.1. Componentes del tensor de Ricci	125
A.2. Escalar de Ricci	126
A.3. Componentes del tensor de Einstein	126
B. Componentes tensoriales para la métrica de FLRW	127
B.1. Componentes de las conexiones afin	127
B.2. Componentes del tensor de Ricci	128
B.3. Escalar de Ricci	128
Bibliografía	129

Índice de figuras

2.1. Superposición de entornos coordenados	8
2.2. Difeomorfismo	9
2.3. Curvas en variedades diferenciables	10
2.4. Pullback para una función f	10
2.5. Espacio tangente en un punto $p \in M$ y vector tangente a una curva $\gamma(t)$ en p	11
2.6. Aplicación diferenciable	12
4.1. Diagrama de Kruskal para el espacio tiempo de Schwarzschild	53
4.2. Diagramas de Kruskal para el espacio-tiempo de Reissner-Nordström	63
4.3. Tipos de agujeros de gusano	64
5.1. Diagrama original de Hubble, en el cual se muestra que las velocidades de recesión y las distancias de 46 objetos galácticos presentan una correlación lineal [14]	75
5.2. Foliación del espacio-tiempo por medio de hipersuperficies espaciales Σ_t	78

Capítulo 1

Introducción

En 1915 Albert Einstein publicó la teoría de la relatividad general (TRG) [1]. Esta teoría generaliza tanto la relatividad especial como la gravitación Newtoniana. Es la que mejor describe los fenómenos gravitacionales y extiende el principio de la relatividad para sistemas de referencia no inerciales, cuyo fundamento matemático es la geometría de Riemann. En el marco de la TRG, la gravedad es consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo, la cual es generada por la presencia de cuerpos, distribuciones de materia o por la energía existente allí. Para la construcción de la TRG, Einstein utilizó el principio de equivalencia: una analogía entre sistemas de referencia no inerciales y campos gravitacionales; Einstein concluyó que allí no existe una diferencia fundamental entre un sistema de referencia con un campo gravitacional y un sistema de referencia acelerado sin campo gravitacional [2]. A partir de esta conclusión, Einstein dedujo, además, que la luz emitida por una estrella debía tener un espectro desplazado hacia el rojo a medida que atraviesa su campo gravitacional; y que la luz debe curvarse bajo la influencia de la gravedad [3]. Einstein trató de formular su teoría de la gravedad en términos puramente geométricos. Esto lo llevó hacia el principio de la covarianza general, es decir, la invariancia de las leyes físicas bajo transformaciones generales de coordenadas o difeomorfismos. Aunque abandonó temporalmente este principio, fue la idea clave que lo llevó al descubrimiento de sus famosas ecuaciones del campo gravitacional [4]. La ecuación del campo gravitacional de Einstein consta de una serie de ecuaciones diferenciales parciales, no-lineales acopladas entre ellas y

presentan cierta dificultad para su solución; de modo que el mismo Einstein creyó, inicialmente, que nunca se encontraría una solución exacta a sus ecuaciones. Sin embargo, pocos meses después de la publicación de la TRG, Karl Schwarzschild halló una solución exacta en el vacío para un objeto estático con simetría esférica [5, 6]. Este resultado condujo a la existencia de un objeto muy masivo, denominado agujero negro [7] el cual produce una singularidad en el espacio-tiempo.

Un éxito inmediato de la teoría de Einstein fue la descripción correcta de la precesión del perihelio de la órbita del planeta mercurio. Sin embargo, la relatividad general ganó mucha más popularidad cuando la predicción de la deflexión de luz se confirmó durante el eclipse solar de 1919 por Eddington [8]. Actualmente, la TRG ha visto reforzada su veracidad cuando el 11 de febrero de 2016, se anunció la primera detección directa de ondas gravitacionales provenientes de la colisión de dos agujeros negros [9].

La TRG revolucionó los modelos cosmológicos del Universo. La cosmología estudia la composición del Universo, su estructura, forma, origen, evolución y destino final. Actualmente la cosmología está basada en la TRG y en el principio cosmológico. La Cosmología Moderna tiene su origen en el año 1917 con la aplicación que hace Albert Einstein de la TRG al Universo como un todo. Surge así el primer modelo cosmológico relativista [10]: Einstein encuentra que su modelo cosmológico no presenta soluciones estables; para ello, modificó sus ecuaciones, introduciendo un término repulsivo denominado constante cosmológica (Λ). Asumiendo una distribución homogénea e isotrópica de materia e introduciendo este término de la constante cosmológica, Einstein obtuvo un modelo de universo estático. En ese mismo año el astrónomo holandés Willem de Sitter hizo una publicación [11] en la cual describe una nueva solución a la TRG en el vacío con constante cosmológica pero sin materia.

En 1922, el astrónomo, meteorólogo y matemático ruso Alexander Friedmann publicó su trabajo [12] en el cual menciona el descubrimiento de soluciones dinámicas a las ecuaciones de Einstein, describiendo así un universo ya sea en expansión o contracción. Otro descubrimiento notable para la cosmología fue realizado por el físico, astrónomo y sacerdote belga Georges Lemaitre [13], quien obtuvo, de forma independiente, las mismas

ecuaciones obtenidas anteriormente por Friedmann. En 1929, observaciones del Universo hechas por Edwin Hubble, mostraron que efectivamente las galaxias estaban alejándose unas de otras en una especie de movimiento de recesión, con lo cual se determina que el estado real del universo es un estado dinámico; fue el descubrimiento de la expansión del universo. El universo descrito por el modelo de Friedmann, aparte de ser dinámico es espacialmente homogéneo e isotrópico en relación a cualquier punto; y posee un origen en el pasado en el que la densidad de la materia y la temperatura divergen: el llamado Big Bang. Este modelo se ha convertido en la base del modelo estándar de la cosmología. Los descubrimientos realizados por Edwin Hubble [14] y la TRG dieron inicio a la cosmología moderna, la cual se expresa en un modelo isotrópico y homogéneo conocido como el modelo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) [15]. Hasta entonces, la cosmología, como hemos podido notar, había tomado dos direcciones: de una parte, el estudio de los sistemas simples que permitiría la verificación y el análisis de fenómenos a pequeña escala o escala local descritos por la métrica de Schwarzschild; y por el otro lado, el modelo de universo a gran escala o modelo global a fin de predecir la evolución y el origen del universo descrito por la métrica de FLRW. En 1933, McVittie presenta un modelo [16] con el cual unifica los modelos descritos por las métricas de Schwarzschild y FLRW. El modelo de McVittie es interesante para estudiar la evolución del universo puesto que la estructura de su métrica mantiene los aspectos a pequeña y gran escala juntos; es decir, considera sistemas locales influenciados por la evolución del espacio-tiempo a gran escala.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

Analizar la solución de McVittie cargada con constante cosmológica negativa y el estudio de agujeros de gusano transitables en el universo de McVittie.

1.1.2. Objetivos específicos

1. Determinar la métrica de McVittie para una partícula cargada.
2. Investigar el comportamiento de la métrica de McVittie cargada con constante cosmológica negativa.
3. Determinar un modelo de agujero de gusano atravesable para un caso particular del universo de McVittie como es el universo de FLRW.
4. Investigar el comportamiento físico del agujero de gusano en el universo de McVittie.

1.2. Metodología

La metodología que se ha seguido en la realización de este trabajo es esencialmente teórica y la podemos resumir en los siguientes puntos:

1. Se ha usado la teoría de la Relatividad General, es decir, la acción de Einstein-Hilbert sin términos adicionales.
2. Se ha usado la Métrica de McVittie para el caso de curvatura nula.
3. Para obtener resultados, se ha usado la ecuación de campo de Einstein con presencia de materia o energía y con constante cosmológica.
4. Se ha estudiado el modelo cosmológico de McVittie en el cual se han introducido cambios, como carga eléctrica y constante cosmológica negativa, con el fin de pluralizarlo para obtener resultados cosmológicos mas generales.

1.3. Estructura de la tesis

La presente investigación está estructurada en ocho capítulos:

Capítulo 1. En este capítulo, se hace una introducción general al trabajo de tesis; en el cual se esbozan algunos antecedentes generales y se presenta una revisión cronológica sucinta

de los sucesos más representativos de la cosmología; se describe los objetivos generales y específicos así como la metodología de la investigación y la estructura de la tesis.

Capítulo 2. Se desarrollan algunos tópicos básicos de geometría diferencial que son considerados necesarios para el desarrollo posterior del trabajo de tesis. En forma específica, se desarrollan temas como variedades diferenciables, espacio tangente, espacio dual, tensores, derivadas de Lie y vectores de Killing, entre otros.

Capítulo 3. Nuestro propósito, en este capítulo, es introducir sucintamente el principio de equivalencia como piedra angular de la TRG, sus postulados y ecuaciones. Aquí se hace gran énfasis en los principios variacionales de la TRG, bases sobre las cuales se fundamenta el presente trabajo.

Capítulo 4. En este capítulo, se comienza con el estudio de los agujeros negros, se desarrolla su definición formal y se describe las propiedades del agujero negro de Schwarzschild, Reissner-Nordström y finalmente se hace un análisis sucinto sobre agujeros de gusano transitables.

Capítulo 5. Se analiza el principio cosmológico, la ley de Hubble y los parámetros que permitieron plantear la métrica de FLRW; también se deducen las ecuaciones de Friedman. Seguidamente, enfocamos nuestro análisis en la unificación de la métrica de Schwarzschild y la métrica de FLRW. Se desarrolla, detalladamente, el *ansatz* de la métrica para los casos con y sin curvatura, para así finalmente obtener la métrica de McVittie.

Capítulo 6. En este capítulo, se plantea un *ansatz* para la métrica de McVittie cargada, mediante el tensor de energía-momento, que incluye al tensor de energía electromagnético; introducimos la carga en las ecuaciones de campo de Einstein para, posteriormente, encontrar la métrica de Mcvittie cargada; mediante artificios matemáticos logramos introducir el término cosmológico; posteriormente, mediante las ecuaciones de campo de Einstein introducimos la constante cosmológica negativa y, haciendo uso de las condiciones de energía, analizamos las consecuencias cosmológicas de esta solución.

Capítulo 7. En este capítulo, mediante cambios de variable adecuados, modificamos el modelo del agujero de gusano transitable de Morris-Thorne de tal manera que obtenemos un modelo de agujero de gusano transitable inmerso en un universo de FLRW como caso

particular del universo de McVittie; también, en este capítulo, se analiza el caso de un agujero de gusano más general usando la métrica de McVittie; donde el agujero de gusano está modelado por una delgada capa esférica que acrecenta el fluido de quinta esencia.

Capítulo 8. En este último capítulo, se hace un recuento general de los resultados obtenidos a lo largo del trabajo doctoral, y se presenta las conclusiones globales a las que hemos arribado.

Capítulo 2

Elementos de geometría diferencial

En este capítulo, desarrollaremos de manera breve algunos tópicos de geometría diferencial, necesarios para comprender la naturaleza geométrica del espacio-tiempo. Analizaremos algunos conceptos como variedades diferenciables, espacio tangente, tensores y derivadas de Lie.

2.1. Variedades diferenciables

Una variedad diferenciable n -dimensional es todo conjunto M al cual se le ha fijado una estructura diferenciable de dimension n . Más rigurosamente, se puede definir a una variedad diferenciable n -dimensional como un espacio topológico de Hausdorff dotado de una familia de mapeos inyectivos ϕ entre puntos de la variedad $U \subset M$ y el espacio real n -dimensional \mathbb{R}^n [17], donde M es dotado de un conjunto de cartas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, siendo $\{U_\alpha\}$ una familia de vecindades abiertas tal que $\bigcup U_\alpha = M$ y ϕ_α es un homomorfismo de tal manera que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el mapeo $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ debe ser infinitamente diferenciable (C^∞). Un espacio M que cumple con las características mencionadas anteriormente se denomina variedad diferenciable. Cualitativamente, podemos decir que una variedad diferenciable es un espacio que localmente tiene aspecto de \mathbb{R}^n . Sea M un conjunto de puntos donde U es un subconjunto abierto de M . Una carta de dimensión n en M es un par ordenado (U, ϕ) donde ϕ es un homeomorfismo de U en \mathbb{R}^n donde $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por lo tanto una

carta puede asociar biunivocamente a un punto $p \in U$ en un punto $\phi(p)$ en \mathbb{R}^n contenido en M . Cada punto de \mathbb{R}^n tiene n coordenadas u_1, \dots, u_n , entonces, podemos decir que la carta atribuye coordenadas al punto p de M , a través de las coordenada u_i y de la aplicación ϕ . Las coordenadas de p pueden ser descritas por las n aplicaciones compuestas $x^i = u^i \circ \phi$, denominadas funciones coordenadas locales de M y la n -upla x^1, \dots, x^n . Se dice que es el sistema de funciones coordenadas asociadas a la carta (U, ϕ) . Así para el punto $p \in M, x_i(p) = u^i \circ \phi(p) = u^i(\phi(p)) = p^i$ es $p = (p_1, \dots, p_n)$. Lógicamente, un punto de M puede tener más de una carta. Consideremos que (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) son dos cartas n dimensionales sobre M cuyos dominios se sobreponen, como se muestra en la figura 2.1. En la región de intersección $U_1 \cap U_2$ pueden definirse dos aplicaciones de M en \mathbb{R}^n . Como las aplicaciones ϕ_i son inyectivas, pueden ser invertidas, luego pueden ser dadas las aplicaciones $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ y $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

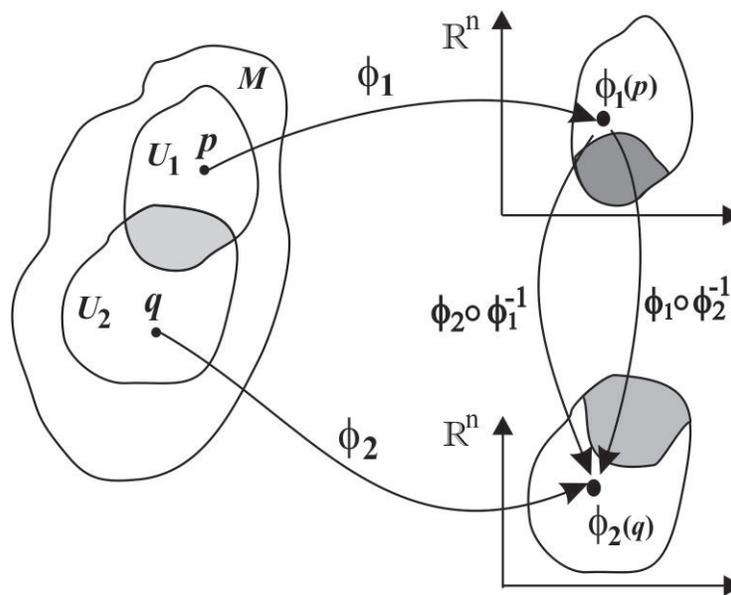


Figura 2.1: Superposición de entornos coordenados

La noción de variedad es una verdadera extensión natural del concepto de superficie en geometría diferencial, con la diferencia que una variedad no debe, necesariamente, estar inmersa en un espacio euclidiano y, por tanto, representa una estructura más general.

2.2. Difeomorfismo

Sean M y N dos variedades, una aplicación $\phi : M \rightarrow N$ asocia un punto p de M a un punto $\phi(p)$ de N . Resulta necesario caracterizar el concepto de diferenciabilidad de dichas aplicaciones. Para esto, usamos el concepto de diferenciabilidad en \mathbb{R}^n . Consideramos las cartas (U_1, φ_1) en M y (U_2, φ_2) en N , tal que $\varphi_1 : M \rightarrow D, \varphi_2 : M \rightarrow D'$, donde $D \in \mathbb{R}^n$ y $D' \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $\phi : M \rightarrow N$ es diferenciable cuando la composición $\varphi_2 \circ \phi \circ \varphi_1^{-1} : D \rightarrow D'$ es una aplicación diferenciable de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n , como se muestra en la figura 2.2. Cuando ϕ es invertible y ϕ^{-1} es diferenciable, entonces decimos que ϕ es un difeomorfismo entre variedades; además se dice que M es difeomorfa a N y ambas representan la misma variedad abstracta [18].

Si $M = N$, entonces el conjunto de difeomorfismos $\phi : M \rightarrow M$ forma un grupo denotado

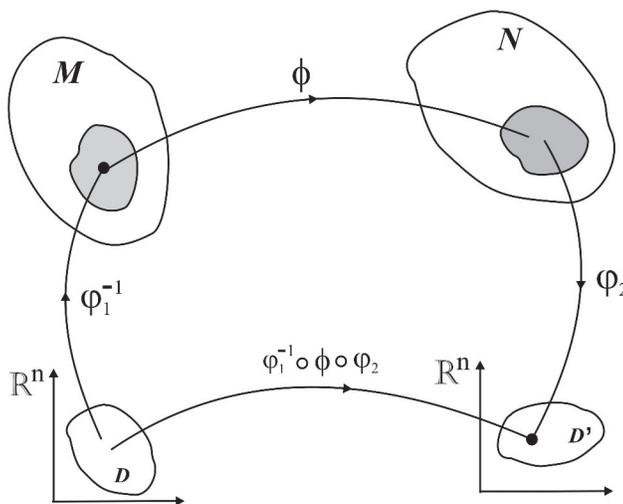


Figura 2.2: Difeomorfismo

como $\text{Diff}(M)$.

Consideremos el caso de curvas en una superficie, como se muestra en la figura 2.3. Una curva en una variedad M es una aplicación diferenciable $\varphi : I \rightarrow M$ donde I es un subconjunto abierto en \mathbb{R} ; por lo tanto, la composición de φ con la carta ϕ cuyo dominio contiene la imagen de la curva $\phi \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ debe ser diferenciable.

Si consideramos la particularidad $N = \mathbb{R}$ en la definición de diferenciabilidad, notamos

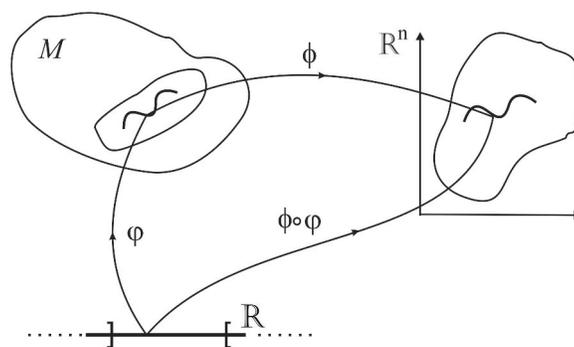


Figura 2.3: Curvas en variedades diferenciables

que el concepto de función real diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ resulta evidente.

También hacemos notar que si p es un punto que pertenece a la carta (U_1, φ_1) , donde $\varphi_1(p) = (x)$, haciendo uso de la acción de $\phi \in \text{Diff}(M)$, mapeamos el punto p a $\phi(p)$ cuyas coordenadas son $\varphi_1(\phi(p)) = x'$. Este enfoque es conocido como una transformación de coordenadas activas.

Teniendo en cuenta dos variedades M y N , como se muestra en la figura 2.4, consideremos un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ y una aplicación $f \in \mathcal{F}(N)$ que representa el conjunto de todas las funciones que van de N a \mathbb{R} , entonces ϕ induce la aplicación $\phi^* : \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, donde al término $\phi^* f$ se le denomina el pullback de f y se define como: $\phi^* f = f \circ \phi$.

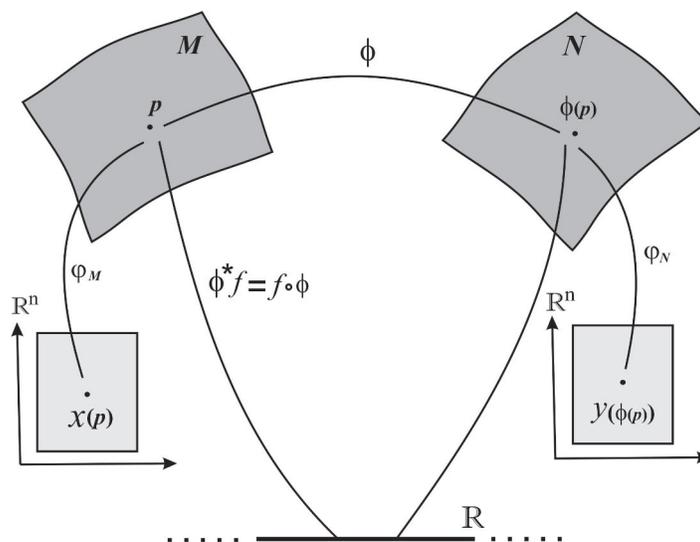


Figura 2.4: Pullback para una función f

2.3. Plano tangente

Una variedad no es necesariamente un espacio vectorial y no podemos hablar arbitrariamente de vectores en M . Sin embargo, podemos asociar a M la noción de vector tangente si es que tenemos presente el vector tangente a una curva de M .

Sea $\gamma(t)$ una curva de M , como se muestra en la figura 2.5, y sea ϕ el conjunto de todas las funciones reales diferenciables en M . El vector tangente $\gamma'(t_0)$ a γ en el punto $p = \gamma(t_0)$ es una aplicación $\gamma'(t_0) : \phi \rightarrow \mathbb{R}$, definida como [19] :

$$\gamma'(t_0)[f] = \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t_0}. \quad (2.1)$$

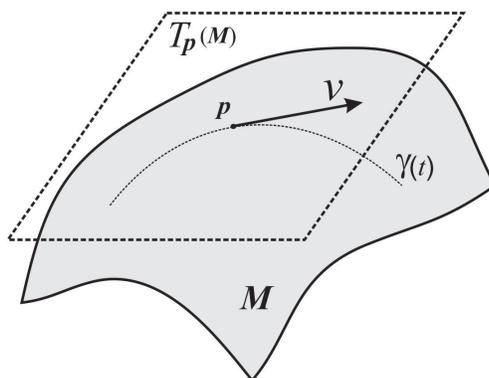


Figura 2.5: Espacio tangente en un punto $p \in M$ y vector tangente a una curva $\gamma(t)$ en p

Ahora consideremos la siguiente propiedad: si $\gamma'(t_0)$ y $\lambda'(t_0)$ son vectores tangentes a las curvas $\gamma(t)$ y $\lambda(t)$ en el punto $p = \gamma(t_0) = \lambda(t_0)$ y si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a\gamma'(t_0) + b\lambda'(t_0)$ es un vector tangente definido por

$$(a\gamma'(t_0) + b\lambda'(t_0))[f] = a\gamma'(t_0)[f] + b\lambda'(t_0)[f]. \quad (2.2)$$

Esta propiedad nos garantiza que el conjunto de todos los vectores tangentes a M en el punto p es un espacio vectorial denominado espacio tangente a M en el punto p , y es denotado por $T_p(M)$.

Ahora escribiremos la expresión para un vector tangente v_p en términos de coordenadas locales. Sea (U_p, ϕ) una carta de M y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ entonces definimos una aplicación diferenciable dada por $f = F \circ \phi$, como se muestra en la figura 2.6. Consideremos

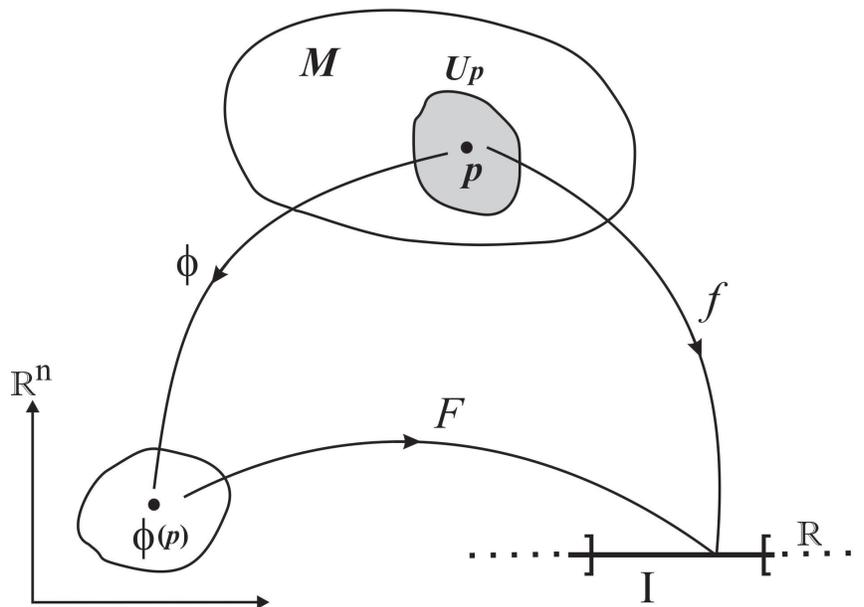


Figura 2.6: Aplicación diferenciable

$\phi(p) = (\phi_p^1, \dots, \phi_p^n)$, entonces $f(p) = F \circ \phi(p) = F(x^i(p))$. Haciendo uso del concepto de diferenciabilidad de la función F expandimos la función $f(p + \Delta p)$ en series de Taylor y, tomando en cuenta su derivada direccional, obtenemos

$$v_p[f] = v^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \Big|_p. \tag{2.3}$$

Sea $\{e'_i\}$ una base natural asociada a $\{x'^i\}$. Entonces de la ecuación (2.3) obtenemos

$$v'^i = v[x'^i] = v^j \frac{\partial x'^j}{\partial x^j}. \tag{2.4}$$

Un vector v se puede escribir $v = v^i e_i = v'^i e'_i$ de donde obtenemos

$$e_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} e'_j, \tag{2.5}$$

debido a que el $\det(\partial x'^j / \partial x^i) \neq 0$ es factible obtener la transformación inversa

$$e'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} e_j. \tag{2.6}$$

Podemos notar que cuando tenemos una transformación de coordenadas locales $\{x^i\} \longrightarrow \{x'^i\}$, con matriz jacobiana J , las bases naturales asociadas se transforman de acuerdo con la inversa de la matriz jacobiana J^{-1} . Este hecho justifica el nombre de vectores contravariantes que se le asigna a los vectores localizados en el espacio tangente $T_p(M)$. Del punto de vista matemático, podemos decir que un vector contravariante localizado en un punto p de la variedad no es un objeto que se encuentra localizado en la variedad, sino en el espacio tangente $T_p(M)$ del punto p .

Ahora consideraremos el espacio cotangente o espacio dual $T_p^*(M)$ de cada espacio tangente $T_p(M)$. El espacio dual $T_p^*(M)$ está constituido por las aplicaciones lineales de $T_p(M)$ en \mathbb{R} . Estos elementos son denominados 1-forma o vectores covariantes.

Sea $\{x^i\}$ un sistema de coordenadas locales en $U_p \subset M$. Entonces las diferenciales dx^i forman una base de $T_p^*(M)$ que es la base dual de la base natural de $T_p(M)$ asociada a $\{x^i\}$. Sea V un campo vectorial en M , como cada coordenada x^i es función de F usando la definición de diferencial tenemos

$$dx^i(V) = V[x^i] = V^j e_j[x^i] = V^j dx^i(e_j),$$

donde $\{e_j\}$ es la base natural asociada a $\{x^j\}$, también sabemos que $V^i = V[x^i]$ de donde se obtiene que

$$dx^i(e_j) = \delta_j^i,$$

expresión que define las formas lineales dx^i como elementos de la base dual de la base $\{x^i\}$. Considerando $df = (df)_i dx^i$, donde $(df)_i = (df)(e_i) = e_i[f]$, entonces $df = e_i[f] dx^i$. Considerando que f es una de las funciones de transformación del sistema de coordenadas $\{e_i\} \longrightarrow \{e'_i\}$; es decir, escribiendo $f = x'^i(x^i, \dots, x^n)$ encontramos la transformación de las bases de $T_p^*(M)$

$$dx'^i = e_i[x'^i] dx^j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j,$$

y usando las relaciones $dx^i = e^i$ y $dx'^i = e'^i$, obtenemos

$$e'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (2.7)$$

De esta expresión, surge la designación de vectores covariantes a los vectores del espacio

cotangente $T_p^*(M)$. Por tal razón, podemos decir que el espacio cotangente es el espacio de las aplicaciones que llevan vectores tangentes a números.

2.4. Tensores

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} . El espacio dual V^* de V , siendo f una función lineal, está dado por

$$V^* = \{f : V \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Sea $\{v_\nu\}$ una base de V . Se introduce una base para V^* por medio de la relación de dualidad

$$v^{*\mu}(v_\nu) = \delta_\nu^\mu.$$

La dimensión de la base V^* es la misma dimensión de la base V , por tanto, la correspondencia $v_\mu \longrightarrow v^{*\mu}$ establece un isomorfismo entre las bases V y V^* . Por medio de un procedimiento similar, consideramos el espacio doble dual V^{**} de V entre los espacios V^{**} y V puede establecerse un isomorfismo mediante la relación

$$v^{**}(w^*) = w^*(v), \quad v \in V, \quad w^* \in V^*, \quad v^{**} \in V^{**}.$$

Un tensor r -covariante en V es una aplicación multilineal

$$F : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{r\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Similarmente, un tensor s -contravariante es una aplicación multilineal

$$F : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Un tensor del tipo $\binom{s}{r}$, también llamado tensor s -contravariante y r -covariante es una aplicación multilineal

$$F : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-veces}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{r\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

El espacio de todos los tensores s -contravariantes en V es denotado por $T^s(V)$, el espacio de los tensores r -covariantes por $T_r(v)$ y el espacio de los $\binom{s}{r}$ -tensores por T_r^s . El producto tensorial de dos espacios tensoriales es un nuevo espacio tensorial denotado por \otimes y, en forma general, puede aplicarse a diversos contextos como vectores, tensores y espacios topológicos [20].

Si $F \in T_r^s(V)$ y $G \in T_q^p(V)$, el tensor $F \otimes G \in T_{r+q}^{s+p}(V)$ es definido por

$$(F \otimes G)(\omega^1, \dots, \omega^{s+p}, X_1, \dots, X_{r+q}) = F(\omega^1, \dots, \omega^s, X_1, \dots, X_r)G(\omega^{s+1}, \dots, \omega^{s+p}, X_{r+1}, \dots, X_{r+q}), \quad (2.11)$$

donde $\omega^i \in V^*$ y $X_i \in V$.

Si (e_1, \dots, e_n) es una base para V , sea $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, la base dual correspondiente a V^* , definida por $\varphi(e_j) = \delta_j^i$. Una base para $T_r^s(V)$ es dada por el conjunto de todos los tensores de la forma

$$e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r}, \quad (2.12)$$

de manera que los índices i_p, i_q , se consideran desde 1 hasta n . Estos tensores actúan en los elementos básicos de acuerdo a la relación

$$e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r}(\varphi^{u_1}, \dots, \varphi^{u_s}, e_{m_1}, \dots, e_{m_r}) = \delta_{j_1}^{u_1} \dots \delta_{j_s}^{u_s} \delta_{m_1}^{i_1} \dots \delta_{m_r}^{i_r}, \quad (2.13)$$

y cualquier tensor $F \in T_r^s(V)$ puede ser escrito en términos de esa base como

$$F = F_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r}, \quad (2.14)$$

donde

$$F_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = F(\varphi^{j_1}, \dots, \varphi^{j_s}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r}). \quad (2.15)$$

Ahora definiremos una operación llamada traza o contracción. Definimos $tr_j^i : T_{r+1}^{s+1}(V) \rightarrow T_r^s(V)$ haciendo $(tr_j^i F)(\omega^1, \dots, \omega^s, V_1, \dots, V_r)$ la traza del endomorfismo

$$F(\omega^1, \dots, \omega^s, V_1, \dots, V_r) \in T_1^1(V). \quad (2.16)$$

En términos de una base, las componentes de $tr_j^i F$ son

$$(tr_j^i F)_{q_1 \dots q_r}^{p_1 \dots p_s} = F_{q_1 \dots m \dots q_r}^{p_1 \dots m \dots p_s}, \quad (2.17)$$

donde el índice m es el i -ésimo índice arriba y el j -ésimo índice abajo.

2.5. Transporte paralelo y conexión de Levi-Civita

En la sección anterior, hemos definido el espacio tangente de una variedad como la unión de espacios tangentes individuales en un determinado punto. Puesto que estos son isomorfos, pero diferentes espacios vectoriales, no cabe la posibilidad de comparar elementos de dos espacios tangentes. Introduciremos una estructura que nos permita esta posibilidad. Esta estructura es llamada conexión [21].

Comenzaremos analizando la noción de transporte paralelo. Sea el punto $p \in M$ y $v \in T_p(M)$ un vector en el punto p . Deseamos transportar, paralelamente, v al punto p' cercano a p , tal que p y p' están conectados por un campo vectorial X . Esto significa que en un sistema de coordenadas apropiadas, las coordenadas de p y p' están relacionadas por $p'^a = p^a + X^a$, y los componentes X^a son lo suficientemente pequeños como para aproximar el vector transportado paralelamente $v' \in T_{p'}(M)$ en la forma

$$v'^a = v^a - \Gamma_{bc}^a v^b X^c, \quad (2.18)$$

donde los coeficientes Γ_{bc}^a se denominan coeficientes de conexión o símbolos de Christoffel. Ahora podemos generalizar este transporte paralelo infinitesimal al transporte paralelo a lo largo de una curva integral de X , es decir, una curva $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$ de manera que su vector tangente $\dot{\gamma}(t)$ en $p = \gamma(t)$ sea igual a $X(p)$. De la ecuación (2.18), podemos obtener

$$\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{bc}^a v^b X^c = 0. \quad (2.19)$$

Ahora estamos en condiciones de generalizar el concepto de transporte paralelo. Sea X, V campos vectoriales. V es transportado paralelamente a lo largo de X . Usando la definición de la curva integral, podemos reescribir la derivada de la componente V^a como

$$\frac{d}{dt} V^a(\gamma(t)) = X^c(\gamma(t)) \partial_c V^a(\gamma(t)), \quad (2.20)$$

y, finalmente, obtenemos la condición

$$(\nabla_X V)^a = X^c \partial_c V^a + \Gamma_{bc}^a v^b X^c = 0. \quad (2.21)$$

El campo vectorial $\nabla_X V$ es llamado la derivada covariante de V con respecto a X .

El concepto de derivada covariante se puede generalizar adicionalmente para operar sobre

campos tensores arbitrarios. Sea X un campo vectorial y T un campo tensorial de tipo $\binom{r}{s}$. La derivada covariante de T con respecto a X puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} = & X^d \partial_d T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} + \sum_{i=1}^r \Gamma_{cd}^{a_i} T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} X^d \\ & - \sum_{i=1}^s \Gamma_{b_i d}^c T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} X^d. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ahora tenemos dos estructuras diferentes definidas en la variedad: la métrica y la conexión. Se plantea la posibilidad de si estas dos estructuras pueden relacionarse. Esto es realmente posible. Existe una conexión única de modo que los símbolos de Christoffel resultan ser simétricos en su par inferior de índices y la derivada covariante de la métrica se anula. Esta conexión se llama la conexión de Levi-Civita, y sus componentes toman la forma

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}). \quad (2.23)$$

Podemos concluir que en una variedad dotada con la conexión de Levi-Civita, todas las propiedades geométricas están determinadas por la métrica.

2.6. Tensor de Riemann

El tensor de Riemann es un mapeo que surge al considerar la no conmutatividad de operaciones sucesivas de diferenciación, aplicadas a un campo vectorial o a un campo vectorial dual. Cuando los vectores se trasladan paralelamente en un camino cerrado dentro de una variedad, generalmente, sufren transformaciones. Estas se relacionan con la curvatura de dicha variedad. El mapeo local de la curvatura es realizado por el tensor de Riemann. La derivada covariante de un vector contravariante presenta la forma

$$\nabla_\nu V^\rho = \partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda, \quad (2.24)$$

donde $\Gamma_{\nu\lambda}^\rho$ son los símbolos de Christoffel y están dados por la ecuación (2.23). Aplicando la derivada covariante a la ecuación (2.24), obtenemos

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho = \partial_\mu (\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda) + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho (\partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda) - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma (\partial_\sigma V^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\lambda), \quad (2.25)$$

efectuando una permutación de índices $\mu \leftrightarrow \nu$ en la ecuación (2.25), resulta

$$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho = \partial_\nu (\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda) + \Gamma_{\sigma\nu}^\rho (\partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma V^\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma (\partial_\sigma V^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\lambda). \quad (2.26)$$

Sustrayendo la ecuación (2.26) de la ecuación (2.25), efectuando las sustituciones necesarias y considerando la simetría de los índices inferiores de los símbolos de Christoffel, obtenemos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma) V^\lambda, \quad (2.27)$$

donde al término entre parentesis lo denominamos como tensor de Riemann [21]

$$R_{\mu\nu\lambda}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma. \quad (2.28)$$

Teniendo presente $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda}^\rho g_{\rho\sigma}$ podemos indicar algunas propiedades del tensor de curvatura.

- Simetría:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu} \quad (2.29)$$

- Antisimetría:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\nu\mu\lambda\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\lambda} \quad (2.30)$$

- Ciclicidad:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} + R_{\mu\lambda\sigma\nu} = 0 \quad (2.31)$$

Podemos notar que el tensor de Riemann es de cuarto orden, por tanto, posee 256 componentes; sin embargo, debido a las condiciones de simetría, antisimetría y ciclicidad, sus componentes se reducen a 20. El tensor de Riemann mide la variación de un vector al ser trasladado paralelamente alrededor de una curva cerrada. En particular, si el tensor de Riemann es nulo, el traslado paralelo de un vector no depende de la trayectoria, lo que implica que la variedad es plana; por lo tanto, una variedad es plana si todas las componentes del tensor de Riemann son idénticamente cero. Por lo tanto, una variedad tiene curvatura si por lo menos una componente del tensor de Riemann es distinta de cero.

Ahora podemos realizar una contracción al tensor de Riemann con el fin de obtener un tensor de segundo orden de 10 componentes denominado Tensor de Ricci

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}^{\rho}. \quad (2.32)$$

Usando la propiedad de simetría dada en la ecuación (2.29) notamos que el tensor de Ricci es simétrico, es decir $R_{\mu\lambda} = R_{\lambda\mu}$, en términos de las componentes de la conexión tenemos

$$R_{\mu\lambda} = \partial_{\mu}\Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}\Gamma_{\rho\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}. \quad (2.33)$$

La propiedad antisimétrica dada por la ecuación (2.30) nos indica que $R_{\mu\lambda}$ es el único tensor de segundo orden que puede ser formado a partir del tensor de Riemann. De igual manera podemos contraer el tensor de Ricci $R_{\mu\lambda}$ y construir el escalar de Ricci, también denominado escalar de curvatura, dado por

$$R = g^{\mu\lambda}R_{\mu\lambda}. \quad (2.34)$$

El escalar de Ricci especifica un número real en cada punto de la variedad, determinando la curvatura intrínseca de la variedad en dicho punto.

Otra relación muy importante entre los componentes del tensor de Riemann es la identidad de Bianchi, una relación cíclica de la derivada covariante de Riemann. La manera más fácil de verla es en un punto y considerar en ese punto un sistema inercial de coordenadas, que anula a los símbolos de Christoffel dejando al tensor de Riemann solo con las segundas derivadas de la métrica y la derivada covariante se reduce a la usual en dicho punto.

Consideremos la derivada covariante del tensor de Riemann

$$\nabla_{\tau}R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\left(\frac{\partial^2 g_{\gamma\lambda}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\beta}} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\lambda}}\right). \quad (2.35)$$

Permutando el índice de la derivada con los dos últimos índices del tensor de curvatura, se obtiene

$$\nabla_{\tau}R_{\sigma\gamma\lambda\beta} + \nabla_{\beta}R_{\sigma\gamma\tau\lambda} + \nabla_{\lambda}R_{\sigma\gamma\beta\tau} = 0, \quad (2.36)$$

esta expresión es conocida como la identidad de Bianchi.

Haciendo una contracción con $g^{\sigma\lambda}$, similarmente como se hizo para obtener el tensor de

Ricci; en el segundo término, aplicamos la propiedad de antisimetría dada por la ecuación (2.30); en el tercer y cuarto índice efectuamos la contracción. Al respecto, del tercer término, teniendo presente que la derivada covariante de la métrica es nula

$$\nabla_\tau R_{\gamma\beta} - \nabla_\beta R_{\gamma\tau} + \nabla_\lambda R_{\gamma\beta\tau} = 0. \quad (2.37)$$

contrayendo con $g^{\gamma\beta}$:

$$\begin{aligned} \nabla_\tau R - \nabla_\beta R_\tau^\beta - \nabla_\lambda R_\tau^\lambda &= 0, \\ \nabla_\mu R_\tau^\mu - \frac{1}{2} \nabla_\tau R &= 0, \\ \nabla_\mu (R_\tau^\mu - \frac{1}{2} R \delta_\tau^\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Multiplicando por $g^{\tau\nu}$ obtenemos

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.39)$$

A la cantidad dentro del parentesis se le denomina tensor de Einstein,

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.40)$$

Cabe resaltar que el tensor de Einstein G es, esencialmente, un tensor mixto de orden dos; y puesto que el tensor de Ricci es un tensor simétrico, el tensor de Einstein también es un tensor simétrico y libre de divergencia.

2.7. Derivada de Lie y vectores de Killing

La derivada de Lie mide el cambio de un campo vectorial a lo largo del flujo de otro campo. La derivada de Lie se puede calcular sobre cualquier variedad diferenciable M . Sea $V^\mu \in M$ un campo vectorial, que define una familia de curvas $\gamma^\mu(\lambda)$ a través de la ecuación

$$V^\mu(\gamma(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda} \gamma^\mu(\lambda), \quad (2.41)$$

donde $\gamma^\mu(\lambda)$ son las líneas de campo o curvas integrales de V^μ .

La derivada de Lie \mathcal{L}_V es un operador diferencial y representa la derivada direccional en

la dirección del campo V^μ o la derivada a lo largo de las curvas integrales $\gamma^\mu(\lambda)$.

Sean p y q dos puntos infinitesimalmente cercanos, con coordenadas x^μ y x'^μ respectivamente, tal que

$$x'^\mu = x^\mu - \varepsilon V^\mu(x), \quad (2.42)$$

donde V^μ es la dirección en la que queremos efectuar la derivada direccional y ε es una cantidad infinitesimal.

Definimos la derivada de Lie de un campo $f(x)$ en la dirección de un campo vectorial V^μ como

$$\mathcal{L}_V f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f'(x' + \varepsilon V^\mu) - f(x)}{\varepsilon}. \quad (2.43)$$

Una definición equivalente es la siguiente [22]:

$$\mathcal{L}_V f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_\varepsilon^* f - f}{\varepsilon}. \quad (2.44)$$

Donde $\{\varphi_\varepsilon\}$ es el flujo de V y $\{\varphi_\varepsilon^*\}$ es el pullback.

Utilizando la definición formal, se puede establecer que la derivada de Lie entre campos vectoriales es

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y].$$

Para tensores,

$$\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T.$$

La derivada de Lie comparte las propiedades de linealidad y la regla de Leibniz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(\alpha A^\mu + \beta B^\mu) &= \alpha \mathcal{L}_V A^\mu + \beta \mathcal{L}_V B^\mu, \\ \mathcal{L}_V(A^\mu B_\nu \rho) &= (\mathcal{L}_V A^\mu) B_\nu \rho + A^\mu (\mathcal{L}_V B_\nu \rho). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sean V^μ y W^μ dos campos vectoriales, entonces el conmutador de dos derivadas de Lie a lo largo de V^μ y W^μ se puede escribir como otra derivada de Lie $[\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W] = \mathcal{L}_Z$, donde $Z^\mu = \mathcal{L}_V W^\mu - \mathcal{L}_W V^\mu = V^\nu \partial_\nu W^\mu - W^\nu \partial_\nu V^\mu$.

Ahora analizaremos acerca de las simetrías de un campo tensorial, para ello, consideremos a $\varphi \in Diff(M)$ como el flujo de un campo; y decimos que φ es una simetría de algún campo tensorial T si el campo es invariante bajo la acción del pullback de φ

$$\varphi^* T = T. \quad (2.46)$$

Si la familia de simetrías uniparamétricas es generada por un campo vectorial V , entonces se tiene

$$\mathcal{L}_V T = 0. \quad (2.47)$$

Esta relación nos permite deducir que si T posee una simetría, bajo alguna familia de difeomorfismos, siempre será posible hallar un sistema coordenado local en el cual las componentes de la representación coordenada de T sean independientes del parámetro de la curva integral definida por el campo V . Esto implica que, si todas las componentes son independientes de una de las coordenadas, entonces el campo vectorial asociado a esa coordenada genera una simetría.

En relatividad general, es de mucha importancia la simetría respecto a la métrica. Para su análisis consideremos la variedad (M, g) , un difeomorfismo φ es una isometría si preserva la métrica; entonces

$$\varphi^*(g_{\varphi(p)}) = (\varphi^*g)_{(p)} = g(p). \quad (2.48)$$

Por lo tanto, se dice que una métrica $g_{\mu\nu}$ tiene una isometría si su expresión no cambia bajo una transformación $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon k^\mu$ para un campo k^μ en concreto. En otras palabras, pedir que la métrica sea invariante, bajo dicha transformación, es lo mismo que pedir que la derivada de Lie de la métrica con respecto a k^μ sea nula, lo cual se expresa por la relación

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = k^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu k^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu k^\rho = 0. \quad (2.49)$$

Esta relación, para variedades equipadas con la conexión de Levi-Civita, es equivalente a la ecuación de Killing,

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (2.50)$$

Los vectores que satisfacen la ecuación (2.50) se denominan vectores de Killing. El conmutador de dos vectores de Killing da otro vector de Killing y estos conmutadores forman el álgebra de isometrías de la métrica $g_{\mu\nu}$. La ecuación de Killing muestra que la geometría local no cambia mientras nos desplazamos a lo largo de las líneas de flujo φ . Por esta razón, los vectores de Killing representan la dirección de la simetría en una determinada variedad diferenciable.

Capítulo 3

Relatividad General

La Relatividad General es una teoría gravitacional y, en la actualidad, es una de las teorías más aceptadas. Fue propuesta por Albert Einstein y tiene como fundamento explicar los fenómenos gravitacionales como consecuencias de la curvatura del espacio-tiempo, generada por el contenido de materia y campos presentes. Debido a esta razón, fue posible realizar una transición de la descripción fenomenológica de la gravedad, vista como una fuerza de atracción Newtoniana a una propiedad netamente geométrica del espacio-tiempo. El objeto matemático que define tal geometría es denominado tensor métrico ($g_{\mu\nu}$), donde μ y ν son índices relacionados con las coordenadas tetra-dimensionales. El tensor métrico es un tensor simétrico definido en términos del intervalo ds^2 entre dos puntos en el espacio-tiempo, separados por un desplazamiento infinitesimal dx^μ . De este modo, la distancia infinitesimal (ds^2) y el tensor métrico se relacionan por la expresión

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1)$$

siendo x^μ la representación de la cuadri-coordenada, con el índice $\mu = (0, 1, 2, 3)$, donde $\mu = 0$ denota la coordenada temporal y $\mu = (1, 2, 3) \equiv i$ denotan las coordenadas espaciales. En este capítulo vamos a describir los postulados fundamentales de la Relatividad General, el principio de equivalencia y las ecuaciones de campo de Einstein.

3.1. El principio de Equivalencia

El principio de equivalencia es la piedra angular de la teoría de la gravedad de Einstein, quien lo descubrió basándose en un experimento mental [23] conocido como el experimento del ascensor. Un sujeto se encuentra dentro de un ascensor sin ventanas y en ausencia de fuerzas gravitatorias. Si el ascensor se desplaza con movimiento rectilíneo, uniformemente acelerado, con aceleración de magnitud igual a la gravedad en la superficie terrestre, en estas circunstancias, el sujeto no notará diferencia entre esta aceleración y la que sería causada por el campo gravitatorio en la superficie terrestre; las ecuaciones que describen el movimiento de caída de un cuerpo, en ausencia de rozamiento con el aire, serían las mismas. Este experimento conduce a la igualdad entre las masas gravitatoria e inercial que figuran en la ecuación gravitacional de Newton y en su segunda ley respectivamente. A esta igualdad, se le conoce como el principio de equivalencia débil. Si se diera el caso en el que el ascensor se encuentra en caída libre en un campo gravitatorio, de acuerdo al principio de equivalencia débil, todos los cuerpos dentro del ascensor tendrían la misma magnitud de la aceleración. Por tanto, sería como si no existiera campo gravitacional alguno. Si se analiza el experimento localmente, entonces el campo gravitatorio se comporta aproximadamente homogéneo y no existiría diferencia entre una caída libre y la ausencia de campo gravitatorio. Esta conclusión condujo a Einstein a formular su principio de equivalencia fuerte, que puede expresarse diciendo que es imposible distinguir un campo de gravedad de un sistema acelerado por medio de cualquier experiencia local; o más explícitamente, podríamos enunciarlo diciendo que un sistema de referencia en caída libre es equivalente, localmente, a un sistema de referencia inercial. Esto nos conduce a concluir que en un sistema de referencia de caída libre es aplicable la teoría de la relatividad especial. Una de las consecuencias directas del principio de equivalencia fuerte es que la geometría del espacio-tiempo depende de la distribución de masa o energía.

El modelo matemático para el espacio-tiempo es una variedad tetra-dimensional pseudo-riemanniana (M, g) , donde la métrica $g_{\mu\nu}$ posee la misma signatura que la métrica $\eta_{\mu\nu}$ de Minkowski.

Sabemos que un sistema inercial local, con respecto a un punto $p \in M$, es un sistema de coordenadas locales x^μ definidas en una vecindad del punto p si es que cumple

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(p) = 0.$$

La versión matemática del principio de equivalencia es la existencia de un sistema inercial local. Esto implica la posibilidad de encontrar un sistema de referencia donde las componentes de la métrica y sus primera derivada sean nulas en dicho evento. En otras palabras, las componentes de la métrica en un sistema local de referencia deben tomar la forma [24].

$$g_{\mu\nu}(x^\sigma) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\sigma\nu\tau}(p)x^\sigma x^\tau + \vartheta(x^\sigma)^3,$$

cerca del punto p , donde $R_{\mu\sigma\nu\tau}$ son las componentes del tensor de curvatura con respecto a las coordenadas x^σ analizado en el capítulo 2.

Para encontrar las leyes de la física sobre (M, g) , usamos el principio de covariancia; entonces una ecuación de primer orden tendrá la forma de una derivada covariante [24]

$$\nabla T = J,$$

donde T y J son campos tensoriales. Haciendo uso de la derivada covariante para un campo tensorial t de tipo $\binom{r}{s}$, con respecto a coordenadas locales $x^1 \dots x^n$, se tiene la expresión

$$\begin{aligned} \nabla_k t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^k} \\ &+ \Gamma_{kl}^{i_1} t_{j_1 \dots j_s}^{l i_2 \dots i_r} + \dots + \Gamma_{kl}^{i_r} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-1} l} \\ &- \Gamma_{kj_1}^l t_{lj_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \dots - \Gamma_{kj_s}^l t_{j_1 \dots j_{s-1} l}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Con respecto a las coordenadas locales, se tiene [24]

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\dots} + \Gamma_{\dots}^{\dots} T^{\dots} + \dots - \Gamma_{\dots}^{\dots} T^{\dots} = J^{\dots}(p).$$

Como en relatividad especial tenemos la expresión

$$\partial T = J, \quad (3.3)$$

donde T y J son tensores de Lorentz, y en relatividad general, para la misma ley, se tiene

$$\nabla T = J, \quad (3.4)$$

donde T y J son campos tensoriales sobre (M, g) , podemos concluir que hemos obtenido un acoplamiento de la materia al campo gravitacional.

3.2. Tensor de energía-momento

El tensor de energía-Momento describe la distribución y también el flujo de energía y momento debido a la presencia y movimiento de materia y radiación en una región del espacio-tiempo.

Consideremos un fluido con densidad propia $\rho(x)$ y $\mathbf{u}(x)$ su cuadrivector velocidad, con los que podemos construir un tensor \mathbf{T} de rango 2 a partir de los cuadrivectores velocidad, de la forma

$$\mathbf{T}(x) = \rho(x)\mathbf{u}(x) \otimes \mathbf{u}(x). \quad (3.5)$$

Donde $\mathbf{T}(x)$ es llamado tensor de energía-momento. En un sistema de coordenadas x^μ donde el cuadrivector velocidad del fluido es u^μ , las componentes contravariantes del tensor de energía-momento vienen dadas por

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu.$$

Para el caso de un fluido perfecto con presión p , es posible encontrar un sistema de referencia; de tal manera que un punto del fluido se vea en reposo, las componentes del tensor de energía-momento pueden expresarse por [25]

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

En general, podemos escribir las componentes del tensor de energía-momento como [29]

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu}.$$

Esta ecuación es válida para cualquier sistema cartesiano localmente inercial. Usando el principio de acoplamiento mínimo, hacemos el cambio ($\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$) con el fin de obtener una expresión covariante del tensor de energía-momento para un fluido perfecto, válido en un sistema de coordenadas arbitrario, obtenemos la expresión

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

De la expresión anterior, notamos que $T^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico y esta conformado por los campos escalares p y ρ , y un campo vectorial \mathbf{u} que son las variables que caracterizan al fluido.

3.3. Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein han desempeñado un papel importante dentro de la física teórica; ellas poseen una notable riqueza conceptual y han contribuido a descubrir y entender una serie de fenómenos astrofísicos y plantean diversos modelos cosmológicos que nos permiten entender nuestro universo.

Einstein, para elaborar la TRG, se apoya en la geometría de Riemann, reconociendo que esta se adapta perfectamente a la física de la gravedad. Sin embargo, aparte de utilizar el formalismo tensoral para expresar sus ecuaciones de campo, Einstein se basó en cinco principios [27] para el desarrollo de la TRG :

- 1. Principio de Mach.-** Este principio se puede enunciar diciendo que la inercia de cualquier sistema es el resultado de su interacción con el resto del Universo. En otras palabras, cada partícula del universo ejerce una influencia sobre todas las demás partículas. En forma mas concisa, podríamos decir que las propiedades inerciales de un objeto están definidas por la presencia de otros cuerpos en el universo; entendiéndose que las leyes de la física, a nivel local, están determinadas por la estructura del universo a gran escala [28].
- 2. Principio de equivalencia.-** Este principio trata de la equivalencia entre una aceleración uniforme y un campo gravitatorio uniforme; y se enuncia en forma equivalente diciendo que la masa gravitacional de un objeto es equivalente a su masa inercial [27]. El principio de equivalencia es de suma importancia en la TR; por tal razón, lo trataremos con más detalle posteriormente.
- 3. Principio de Covarianza.-** En la teoría de la relatividad especial(TRE), todos los

observadores inerciales son equivalentes. En la TGR, el principio de covarianza establece que todos los observadores, ya sea que estén en marcos de referencia inerciales o no, deben observar las mismas leyes de la física [27]. En otras palabras, las coordenadas son apenas un artificio para describir la naturaleza y no existen a priori, entonces no deben tener participación en la formulación de las leyes fundamentales. Esto nos permite expresar las leyes de la física, por medio de entes matemáticos invariantes, ante transformaciones de coordenadas denominados tensores.

- 4. Principio de Correspondencia.-** Este principio establece que bajo la influencia de campos gravitacionales débiles y a velocidades muy inferiores a la velocidad de la luz, las predicciones de la TRG deben ser aproximadamente las mismas que las predicciones de la teoría clásica de Newton. Cuando los campos gravitacionales sean nulos, la TRG debe reducirse a la teoría especial de la Relatividad [27].
- 5. Principio de acoplamiento mínimo gravitacional.-** Este principio permite hacer la transición entre un espacio plano y uno curvo realizando la sustitución de la derivada ordinaria por la derivada covariante ($\partial_\mu \mapsto \nabla_\mu$) y la métrica de Minkowski por una formulación general del tensor métrico ($\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$); pero teniendo presente que ningún término que contenga explícitamente la curvatura debe ser añadido al hacer la transición de la TRE a la TRG [27].

Consideremos un campo gravitacional fuerte: de acuerdo con el principio de equivalencia, es factible, en un punto p cualquiera del campo, definir un sistema de coordenadas localmente inerciales [26], de tal manera que se cumpla

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(p) &= \eta^{\mu\nu}, \\ \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma}\right)_{x=p} &= 0. \end{aligned}$$

En la teoría gravitacional de Newton, el potencial gravitacional ϕ está dado por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \tag{3.8}$$

donde G es la constante gravitacional. Teniendo presente que $g_{00} = -(1 + 2\phi)$ y $T_{00} \simeq \rho$; sustituyendo en la ecuación (3.7), obtenemos

$$\nabla^2 \phi = -8\pi G T_{00}. \quad (3.9)$$

Esta ecuación es válida para un sistema de coordenadas localmente inercial, sin embargo esta expresión nos da una noción para plantear una expresión generalizada para el caso de campos gravitacionales, consideramos una expresión de la forma

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

donde $G_{\mu\nu}$ debe ser un tensor que describa la curvatura; por tanto, debe ser una combinación lineal del tensor métrico y de sus primeras y segundas derivadas. Para determinar la forma del tensor $G_{\mu\nu}$, vamos a señalar las siguientes consideraciones:

1. El tensor $G_{\mu\nu}$ debe ser simétrico ya que $T_{\mu\nu}$ lo es.
2. El tensor $G_{\mu\nu}$ tiene que ser un objeto puramente geométrico; por tanto, será función solamente de la métrica y de sus derivadas.
3. Para el espacio plano, tenemos que $G_{\mu\nu} = 0$.
4. De acuerdo a la ley de conservación de la energía $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, esto implica que también debe cumplirse $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.
5. En el límite Newtoniano, debe cumplirse que $G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00}$.

Como hemos expresado anteriormente, la relatividad general trata de la curvatura del espacio-tiempo y el tensor que calcula la curvatura es el tensor de Riemann; sin embargo, este tensor es de cuarto orden y antisimétrico; por tal razón, el tensor $G_{\mu\nu}$ debe construirse a partir de las contracciones del tensor de Riemann. Los únicos tensores que pueden obtenerse a partir del tensor de Riemann son el tensor de Ricci y el escalar de curvatura; entonces consideramos que $G_{\mu\nu}$ debe tener la forma

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \quad (3.11)$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

Aplicando la consideración (4.), obtenemos

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = C_1 R_{\nu;\mu}^{\mu} + C_2 \delta_{\nu}^{\mu} R_{;\mu} = 0. \quad (3.12)$$

Usando la identidad de Bianchi, obtenemos

$$R_{;\eta} = 2R_{\eta;\mu}^{\mu}. \quad (3.13)$$

Sustituyendo la ecuación (3.13) en la ecuación (3.12), obtenemos que $C_2 = -C_1/2$; entonces obtenemos

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right).$$

Ahora utilizaremos la condición (5.) en la expresión anterior, obteniéndose

$$G_{00} = C_1 \left(R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \right) \simeq \nabla^2 g_{00}. \quad (3.14)$$

Haciendo uso de la aproximación Newtoniana $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donde $\| h_{\mu\nu} \| \ll 1$; entonces obtenemos

$$G_{00} \simeq C_1 \left[R_{00} - \frac{1}{2} (-1) R \right] \simeq \nabla^2 g_{00}. \quad (3.15)$$

Para el caso de sistemas no relativísticos, se cumple que $\| G_{ij} \| \ll \| G_{00} \|$. Bajo esta consideración, se tiene que

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} R \simeq 0. \quad (3.16)$$

Usando la relación

$$\begin{aligned} R &\simeq R_{kk} - R_{00} \\ &\simeq \frac{3}{2} R - R_{00} \\ &\simeq 2R_{00}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Reemplazando la ecuación (3.17) en la ecuación (3.15),

$$\begin{aligned} G_{00} &\simeq C_1 \left[R_{00} + \frac{1}{2} (2R_{00}) \right] \simeq \nabla^2 g_{00}, \\ &\simeq 2C_1 R_{00} \simeq \nabla^2 g_{00}, \\ &\simeq 2C_1 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \right) \simeq \nabla^2 g_{00}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De la relación anterior, concluimos que $C_1 = 1$.

Entonces, finalmente, las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

Las ecuaciones de Einstein relacionan materia con geometría. La materia es la que determina la geometría curvando al espacio; y el espacio determina la trayectoria de la materia.

3.4. Los postulados de la Relatividad General

En la TRG, la gravedad se manifiesta a través de la curvatura del espacio-tiempo; y la trayectoria descrita por una partícula, con o sin masa, depende de la geometría local del espacio-tiempo por donde ella se desplaza.

Las ecuaciones de campo de Einstein de la TRG representan una descripción matemática de una entidad geométrica denominada espacio-tiempo. La construcción de esta teoría se basa en postulados [29] que permitieron a Einstein relacionar el aspecto geométrico del espacio-tiempo con la presencia de materia o energía. A continuación, describimos los postulados que permitieron la elaboración de la TRG.

Postulado 1. La variedad espacio-tiempo.- El espacio-tiempo está constituido por todos los eventos físicos, el cual será descrito por el par (M, g) . M es una variedad suave (C^∞) 4-dimensional conectada de Hausdorff y g una métrica Lorentziana sobre M .

La curvatura en la variedad está descrita por el tensor de curvatura de Riemann \mathbf{R} , que en componentes podemos escribirla como

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\delta\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} \quad (3.20)$$

con $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ las conexiones afín o símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}[\partial_{\gamma}g_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}g_{\sigma\gamma} - \partial_{\sigma}g_{\beta\gamma}], \quad (3.21)$$

donde $g_{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor métrico. Una restricción fundamental que se impone sobre la variedad M en RG es que sea libre de torsión. Dicha restricción se basa en el teorema fundamental de la geometría riemanniana, el cual dice que, en una variedad Riemanniana (M, g) , existe una única conexión simétrica $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ que es compatible con la métrica \mathbf{g} . Esta conexión es llamada la conexión de Levi-Civita. La condición de que la variedad sea libre de torsión se satisface exigiendo que el tensor de torsión de Cartan $S_{\beta\gamma}^{\alpha}$ sea nulo

$$S_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha} = 0 \quad (3.22)$$

y la relación entre la conexión $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ y la métrica g se obtiene exigiendo que la derivada covariante de la métrica sea nula

$$\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.23)$$

Postulado 2. Conservación local de la energía.- Existe un tensor simétrico $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(\psi) = T_{\beta\alpha}$ que es función de los campos de materia ψ y sus derivadas tal que

- a) $T_{\alpha\beta} = 0$ sobre $U \in M$ si y solo si $\psi_i = 0$ para todo i sobre U .
- b) $\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0$

La primera condición expresa que todos los campos de materia contribuyen a la energía. A partir de la segunda condición, si la variedad espacio-tiempo admite un campo vectorial de Killing \mathbf{K} , entonces obtenemos una ley de conservación dada por

$$p^{\alpha} = T^{\alpha\beta} K_{\beta}, \quad (3.24)$$

que son las componentes del vector \mathbf{P} obtenida por contracción del tensor energía-momento con el campo de Killing, entonces

$$p_{;\alpha}^{\alpha} = T_{;\alpha}^{\alpha\beta} K_{\beta} + T^{\alpha\beta} K_{\beta;\alpha}, \quad (3.25)$$

pues $T^{\alpha\beta}$, $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ y \mathbf{K} satisfacen la ecuación de Killing $K_{(\alpha;\beta)} = 0$.

Postulado 3. Causalidad Local.- La métrica sobre la variedad espacio-tiempo (M, g) está determinada por las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta}, \quad (3.26)$$

siendo $R_{\alpha\beta}$ el tensor de Ricci, R el escalar de curvatura, $T_{\alpha\beta}$ el tensor energía-momento y $k = 8\pi G$ y G la constante de gravitación universal.

Si definimos el tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$ como

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}, \quad (3.27)$$

entonces se tiene una restricción geométrica

$$\nabla_{\beta}G^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.28)$$

conocida como la Identidad de Bianchi.

3.5. Principio variacional de la Relatividad General

Después de promulgar su Teoría de la Relatividad General, Einstein se enfrentó con el problema de encontrar sus ecuaciones de campo a partir de un lagrangiano y un principio variacional $\delta S = 0$ expresando S la acción total. Einstein y Hilbert encontraron los mismos resultados usando medios diferentes; sin embargo, una forma de determinar las ecuaciones de Einstein a partir del principio variacional consiste en tener en cuenta una acción asociada al campo gravitacional, la cual es denominada como la acción de Einstein-Hilbert S_{EH} . La acción S está expresada en términos de S_{EH} , el término de frontera de Gibbons-York-Hawking (S_{GYH}) [30], y la acción asociada a los campos de materia S_M . La acción total puede escribirse como [31]

$$S = \frac{1}{2k}(S_{EH} + S_{GYH}) + S_M, \quad (3.29)$$

con

$$S_{EH} = \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.30)$$

$$S_{GYH} = 2 \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} K, \quad (3.31)$$

y donde ν es un hipervolumen en M , $\partial\nu$ su frontera, h el determinante de la métrica inducida, K es la traza de la curvatura extrínseca sobre la frontera $\partial\nu$ y ε toma el valor de $+1$ y -1 si $\partial\nu$ es tipo temporal o espacial respectivamente. Vamos a obtener las ecuaciones de campo de Einstein variando la acción con respecto a $g^{\alpha\beta}$. Fijamos la condición de frontera

$$\delta g_{\alpha\beta}|_{\partial\nu} = 0, \quad (3.32)$$

Usando los siguientes resultados

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad \delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (3.34)$$

$$\delta R_{\beta\gamma\delta} = \nabla_{\gamma}(\delta\Gamma_{\delta\beta}^{\alpha}) - \nabla_{\delta}(\delta\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}), \quad (3.35)$$

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_{\gamma}(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}) - \nabla_{\beta}(\delta\Gamma_{\gamma\alpha}^{\gamma}). \quad (3.36)$$

Ahora hallamos la variación de Einstein-Hilbert

$$\delta S_{EH} = \int_{\nu} d^4x (R \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta R). \quad (3.37)$$

Haciendo uso de $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ y de la relación (3.36) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} \\ &+ \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} (g^{\alpha\beta} (\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}) - g^{\alpha\sigma} (\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma})). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Denotando la segunda integral de la expresión anterior por δS_B , se obtiene

$$\delta S_B = \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} V^{\sigma}, \quad (3.39)$$

donde $V^{\sigma} = g^{\alpha\beta} (\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}) - g^{\alpha\sigma} (\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma})$.

Utilizando el teorema de Gauss-Stokes

$$\int_{\nu} d^n x \sqrt{|g|} \nabla_{\mu} A^{\mu} = \oint_{\partial\nu} d^{n-1} y \varepsilon \sqrt{|h|} n_{\mu} V^{\mu}, \quad (3.40)$$

obtenemos

$$\delta S_B = \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} n_\sigma V^\sigma. \quad (3.41)$$

Podemos escribir

$$V_\sigma|_{\partial\nu} = g_{\sigma\mu} V^\mu|_{\partial\nu} = g^{\alpha\beta} [\partial_\beta(\delta g_{\sigma\alpha}) - \partial_\sigma(\delta g_{\beta\alpha})]. \quad (3.42)$$

Ahora calcularemos el término $n^\sigma V_\sigma|_{\partial\nu}$, para ello, haremos uso de $g^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + \varepsilon n^\alpha n^\beta$, reemplazando en la expresión (3.42) y efectuando las operaciones obtenemos

$$n^\sigma V_\sigma|_{\partial\nu} = -n^\sigma h^{\alpha\beta} \partial_\sigma(\delta g_{\beta\alpha}). \quad (3.43)$$

De esta manera, la variación del término de Einstein-Hilbert es

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= 2 \int_\nu d^4x \sqrt{-g} (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} \\ &\quad - \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} h^{\alpha\beta} \partial_\sigma(\delta g_{\beta\alpha}) n^\sigma. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Podemos notar que si fijamos $\delta g_{\alpha\beta} = 0$ existe un término de frontera adicional. Este término se puede anular argumentando flujos nulos en el infinito, fijando tanto la variación de la métrica como su primer derivada a ser nulas sobre la frontera; es decir, $\delta g_{\alpha\beta} = 0$ y $\partial_\gamma \delta g_{\alpha\beta} = 0$. Aunque este último argumento nos conduce directamente a las ecuaciones de campo de Einstein (pues la contribución en la frontera es automáticamente cero), implica fijar dos condiciones en la variación. Para evitar esto, Hawking, York y Gibbons introdujeron un término de frontera que permite tener un problema variacional bien definido con solo $\delta g_{\alpha\beta} = 0$. Es importante recalcar que aunque la acción total se vea modificada por términos adicionales sobre la frontera, las ecuaciones de campo obtenidas son las mismas.

Ahora evaluaremos el término de frontera de Gibbons-York-Hawking

$$\delta S_{GYH} = \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} \delta K. \quad (3.45)$$

Usando la definición de traza de la curvatura extrínseca $K = \nabla_\alpha n^\alpha$, determinamos la variación de K

$$\delta K = -h^{\alpha\beta} \partial_\sigma(\delta g_{\beta\alpha}) n^\sigma. \quad (3.46)$$

Entonces tenemos para la variación del término de frontera

$$\delta S_{EH} = \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} h^{\alpha\beta} \partial_\sigma(\delta g_{\beta\alpha}) n^\sigma. \quad (3.47)$$

Vemos que este término cancela exactamente la contribución en la frontera proveniente de la acción de Einstein-Hilbert.

En un aspecto más formal, podríamos determinar el tensor de energía momento haciendo uso de la acción de Einstein-Hilbert para una densidad lagrangiana \mathcal{L} . Si tenemos una acción de materia definida por

$$S_M = \int \mathcal{L}_M[g_{\alpha\beta}, \varphi] \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.48)$$

donde φ denota los campos de materia. La variación de esta acción toma la forma

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M), \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + \mathcal{L}_M \delta \sqrt{-g} \right), \\ &= \delta S_M = \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_M g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Definimos el tensor de energía-momento como

$$T_{\alpha\beta} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\alpha\beta}} + \mathcal{L}_M g_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\alpha\beta}}. \quad (3.50)$$

El tensor de energía-momento es de mucha importancia tanto en relatividad general como en cosmología puesto que representa el flujo del tetra-momento, a través de la hipersuperficie que engloba las fuentes de campo.

Reemplazando la ecuación (3.50), en la ecuación (3.49), obtenemos

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (3.51)$$

imponiendo que las variaciones totales permanezcan invariantes, con respecto a $\delta g^{\alpha\beta}$, podemos escribir finalmente

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0 \Rightarrow R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = k T_{\alpha\beta}, \quad (3.52)$$

que corresponde a las ecuaciones de Einstein.

Por otro lado, cabe mencionar que el principio variacional y, por ende, la acción de

Einstein-Hilbert nos permite determinar la formulación hamiltoniana de la Relatividad General [32]. Para ello, consideramos la densidad lagrangiana de Einstein-Hilbert dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}^{(4)} R = \sqrt{-g}^{(3)} R - K^2 + K_{ab}K^{ab} + \Delta_{;a}^a, \quad (3.53)$$

donde $\Delta_{;a}^a = \nabla_a(-n^a \nabla_c n^c + n^c \nabla_c n^a)$, siendo ∇_a la derivada covariante en el espacio-tiempo tetradimensional.

Usando la relaciones $S = \int dx^4 \sqrt{-g} R$ y $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$, obtenemos

$$S = \int N\sqrt{h}({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2)dx^4, \quad (3.54)$$

donde h es el determinante de la métrica espacial inducida h_{ab} y N la función lapso. Términos usados en la formulación ADM de la Relatividad General [32].

Usando la métrica de Witt

$$G^{abcd} = \frac{1}{2}\sqrt{h}(h^{ac}h^{bd} + h^{ad}h^{bc} - 2h^{ab}h^{cd}), \quad (3.55)$$

se puede escribir la densidad lagrangiana como

$$\mathcal{L} = NG^{abcd}K_{ab}K_{cd} + \sqrt{h}{}^{(3)}R. \quad (3.56)$$

Los momentos canónicos vienen dados por

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab}), \quad (3.57)$$

$$\pi_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}} = 0, \quad \pi_{N^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^a}. \quad (3.58)$$

Por lo tanto, la densidad hamiltoniana viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{H} = \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L} = NG_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - N\sqrt{N}{}^{(3)}R - 2N_b D_a \pi^{ab}, \quad (3.59)$$

donde D_a es la derivada covariante definida en la hipersuperficie espacial Σ_t . Usando la relación $H = \int dx^3 \mathcal{H}$, calculamos la hamiltoniana de la Relatividad General, cuya expresión viene dada por

$$H = \int dx^3 [p_i^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L} = NG_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - N\sqrt{N}{}^{(3)}R - 2N_b D_a \pi^{ab}]. \quad (3.60)$$

$$(3.61)$$

El formalismo hamiltoniano es importante para obtener soluciones numéricas a las ecuaciones de la Relatividad General de Einstein para sistemas físicos reales o complejos, así como es la base para la cuantización canónica de la gravedad.

3.6. Invariancia de la relatividad general bajo difeomorfismos

La Relatividad General es una teoría donde todas las cantidades son covariantes bajo difeomorfismos. Esto significa que si los elementos de nuestro universo están representados por una variedad $(M, g_{\mu\nu})$ y campos de materia φ ; entonces si $\phi \in \text{diffeo}(M)$, los conjuntos $(M, g_{\mu\nu}, \varphi)$ y $(M, \phi^* g_{\mu\nu}, \phi^* \varphi)$ son físicamente equivalentes. Comencemos analizando un difeomorfismo:

$$X^\mu \longrightarrow X^\mu + \xi^\mu, \quad (3.62)$$

Para un campo vectorial, la variación δA_μ , bajo un difeomorfismo, estará dada por la derivada de Lie introducida en el capítulo 2

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \mathcal{L}_\xi A_\mu \\ &= -\xi^\sigma \partial_\sigma A_\mu - (\partial_\mu \xi^\lambda) A_\lambda. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Por lo tanto, las transformaciones de difeomorfismo para A_μ son

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \xi^\sigma \partial_\sigma A_\mu - (\partial_\mu \xi^\lambda) A_\lambda. \quad (3.64)$$

Utilizando la definición de derivada de Lie para un tensor genérico de segundo orden, $\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}$, obtenemos la transformación de difeomorfismo para el tensor $g_{\mu\nu}$ como

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow A_{\mu\nu} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} - \partial_\nu \xi^\lambda g_{\mu\lambda}. \quad (3.65)$$

Ahora podemos hacer un análisis a partir de la acción de Einstein-Hilbert, escrita como

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}(x)] = \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.66)$$

Haciendo una variación de la acción sobre la variación de la métrica, obtenemos

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= S_{EH}[g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}] - S_{EH}[g^{\mu\nu}], \\ &= \int G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu v^\mu,\end{aligned}\quad (3.67)$$

donde $v^\mu = \nabla_\nu(-\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta})$.

Haciendo uso de la ecuación (3.67) y considerando el difeomorfismo $\delta g^{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g^{\mu\nu}$:

$$\delta S_{EH} = \int G_{\mu\nu} (\mathcal{L}_\xi g^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x = -2 \int G^{\mu\nu} (\nabla_\mu \xi_\nu) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.68)$$

Haciendo uso de la ecuación (3.34) y la derivada de Lie de la métrica, obtenemos

$$\mathcal{L}_\xi \sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = (\nabla_\alpha \xi^\alpha) \sqrt{-g}. \quad (3.69)$$

Usando el hecho de que la derivada de Lie de un escalar es la derivada direccional, obtenemos

$$\delta S_{EH} = \int \mathcal{L}_\xi (\psi \sqrt{-g}) d^4x = \int (\xi^\mu \nabla_\mu \psi + \psi \nabla_\mu \xi^\mu) \sqrt{-g} d^4x = \int \psi \xi^\mu d^3\chi_\mu, \quad (3.70)$$

donde ψ es un escalar construido a partir de los campos tensoriales, para la acción de Einstein-Hilbert $\psi \equiv R$.

Integrando la ecuación (3.68) por partes y usando la ley de gauss, tenemos

$$\delta S_{EH} = - \int G^{\mu\nu} \xi_\nu d^3\chi_\mu + \int \xi_\nu \nabla_\mu G^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.71)$$

Bajo reparametrización, la integral de frontera es nula, pero ξ_ν es arbitrario en la integral tetra-volumétrica; además $\delta S_{EH} = 0$. Esto implica una invariancia por difeomorfismo expresada por

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (3.72)$$

Analizando la ecuación (3.72), podemos concluir que se trata de la identidad de Bianchi y es una propiedad geométrica del tensor de Riemann.

Capítulo 4

Soluciones asintóticamente planas

Los diversos modelos cosmológicos resultan de las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales están dadas para diferentes distribuciones de materia como homogéneas, isotrópica y anisotrópicas. Las ecuaciones de Einstein presentan cierta complejidad en sus soluciones; por tanto, sus soluciones analíticas obedecen a ciertas condiciones, por ejemplo, que las distribuciones de masa o energía estén localizadas en regiones pequeñas del espacio-tiempo y que fuera de esta pequeña región predomine el vacío. En el caso de que la materia presente una densidad muy alta, nos encontramos con la formación de un agujero negro.

En cuanto a los agujeros de gusano, su estudio se remonta al año 1916, poco tiempo después de que Einstein publicara su TRG, cuando el físico Vienés Ludwig Flamm [69], analizó el agujero negro de Schwarzschild y descubrió que las ecuaciones de Einstein permitían una segunda solución, ahora conocida como agujero blanco, que se encuentra conectado a la entrada del agujero negro por un conducto de espacio tiempo. En el año de 1935 Einstein y Nathan Rosen publicaron un artículo [70] en el cual intentaban construir un modelo geométrico para partículas fundamentales, tal como electrones, en términos de túneles de espacio-tiempo unidos por líneas de fuerza eléctrica. Esto dio paso al nombre de puente de Einstein-Rosen al cual posteriormente el físico John Wheeler le llamaría Agujero de Gusano. En los años posteriores, el estudio de los agujeros de gusano se abandonó ya que su radio era demasiado pequeño, pues ni las partículas elementales podrían atravesarlos.

Tiempo después, el interés por los agujeros de gusano navegables tomó auge con el artículo publicado en 1987 por Michel Morris, Kip thorne y Uri Yertsever [44] en el cual se analiza la posibilidad de viajar a través de un agujero de gusano manteniendolo estable mediante el uso de materia con densidad negativa. Tal materia hipotética es denominada materia exótica.

En las soluciones a la TRG, se suele despreciar la curvatura del universo cuando se trata del estudio de métricas externas a los cuerpos gravitacionalmente aislados. Esto se debe a que los campos generados por los cuerpos deben tender a cero para distancias alejadas, donde el espacio-tiempo es de Minkowski. A las métricas que cumplen con estas condiciones, se les denomina soluciones asintóticamente planas. Un ejemplo clásico de este tipo de soluciones son la métrica de Schwarzschild y la de Reissner-Nordström, las cuales poseen la característica de ser asintóticamente planas.

En este capítulo, analizaremos las características de los agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström y también un análisis sucinto sobre agujeros de gusano.

4.1. Agujero negro de Schwarzschild

Los agujeros negros son regiones del espacio-tiempo en las cuales el campo gravitatorio es sumamente intenso. Se forman cuando la masa de un cuerpo se contrae a un tamaño menor que el llamado radio de Schwarzschild.

El concepto de agujero negro aparece aun en el marco de la física clásica. Fue el reverendo y geólogo John Michell quien estudió en 1783 la acción del campo gravitacional de una estrella masiva y su efecto cuando la velocidad de escape se iguala a la velocidad de la luz [33]. En aquella época, una de las teorías sobre la luz consideraba que estaba formada por pequeños corpúsculos. Michell concluyó que cualquier luz emitida se redireccionaría hacia el interior de la estrella y denominó a estos objetos ".Estrellas Oscuras". Por esa misma fecha, a finales del siglo XVIII, Laplace consideró por primera vez la posibilidad de que existiera un cuerpo totalmente oscuro que no dejaría escapar la luz de su superficie [34].

Durante más de un siglo, nadie se interesó por los efectos gravitacionales sobre la luz ni por las posibles estrellas oscuras.

El 25 de noviembre de 1915, Albert Einstein presentaba, ante la Academia de Ciencias de Prusia en Berlín, sus ecuaciones de la relatividad general. Un mes después, el 15 de diciembre, el físico alemán Karl Schwarzschild enviaba a Einstein la primera solución, no trivial, a las ecuaciones de la relatividad general. Einstein la presentó ante la Academia Prusiana de Berlín el 13 de enero de 1916, y una semana después hizo lo mismo con su solución interior.

Los agujeros negros de Schwarzschild son los más simples que pueden ser encontrados en el universo. La solución de Schwarzschild describe el espacio tiempo alrededor de un centro de atracción esféricamente simétrico, sin rotación y en el vacío. En esta sección, vamos a analizar las propiedades fundamentales de la solución de Schwarzschild, las geodésicas y las cantidades conservadas en este espacio-tiempo.

4.1.1. Métrica de Schwarzschild

Schwarzschild encontró una métrica que describe el espacio-tiempo curvado para una distribución esférica de masa; se percató de que el campo de tensores métricos representaba el campo gravitacional estático con simetría esférica en el espacio-tiempo vacío que rodea un cuerpo esférico masivo.

Para llegar a su solución, Schwarzschild hizo las siguientes suposiciones [35]:

1. El campo es estático, quiere decir que es un espacio-tiempo estático, equivale a que todos los componentes de la métrica resultante deben ser independientes de la coordenada tiempo.
2. El campo posee simetría esférica, es decir, que el espacio-tiempo es esféricamente simétrico, equivale a decir que es invariante bajo rotaciones.
3. El espacio-tiempo es vacío. Esto quiere decir que el Tensor de energía-momento es nulo en el punto donde estamos trabajando.

4. El espacio-tiempo es asintóticamente plano, entonces a grandes distancias, respecto del punto donde estamos trabajando, el tensor de Ricci es nulo.

Ahora demostraremos esta métrica que es el caso no trivial más simple: la solución estática esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein, llamada geometría de Schwarzschild. De acuerdo al criterio de simetría esférica, consideramos la métrica del espacio de Minkowski; la cual, en coordenadas esféricas, está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.1)$$

Multiplicando todos los términos de la métrica por coeficientes que sean funciones de r , planteamos un *ansatz*; que, de acuerdo a las suposiciones anteriores, será de la forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2, \quad (4.2)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ es la métrica sobre la esfera S^2 .

Por conveniencia, vamos a usar el cambio de coordenadas $r' = re^{\gamma(r)}$; de modo que la métrica dada por la ecuación (4.2) toma la forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma(r)}{dr}\right)^{-2} dr'^2 + r'^2 d\Omega^2. \quad (4.3)$$

Haciendo los cambios de variable

$$\begin{aligned} r' &\rightarrow r, \\ \left(1 + r \frac{d\gamma(r)}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} &\rightarrow e^{2\beta(r)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

la ecuación (4.3) presenta la forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.5)$$

donde las funciones $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son determinadas resolviendo las ecuaciones de Einstein. Los símbolos de Christoffel no nulos son calculados por la ecuación (2.23) y vienen dados por

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tr} &= \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r}, & \Gamma^r_{tt} &= e^{2\alpha(r)-2\beta(r)} \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r}, & \Gamma^r_{rr} &= \frac{\partial\beta(r)}{\partial r}, \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -e^{-2\beta(r)} r, & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -e^{-2\beta(r)} r \sin^2 \theta, & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \cot \theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Los seis tensores de curvatura independientes y no nulos son calculados mediante la ecuación (2.28) y presentan la forma

$$\begin{aligned}
R^t{}_{rtr} &= \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} \left(\frac{\partial\beta(r)}{\partial r} - \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2\alpha(r)}{\partial r^2}, \\
R^t{}_{\theta t\theta} &= -e^{-2\beta(r)} r \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r}, \\
R^t{}_{\phi t\phi} &= -e^{-2\beta(r)} r \sin^2\theta \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r}, \\
R^r{}_{\theta\theta r} &= -e^{-2\beta(r)} r \frac{\partial\beta(r)}{\partial r}, \\
R^r{}_{\phi r\phi} &= e^{-2\beta(r)} r \sin^2\theta \frac{\partial\beta(r)}{\partial r}, \\
R^\theta{}_{\phi\theta\phi} &= (1 - e^{-2\beta(r)}) \sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

A continuación, tenemos que calcular el tensor de Ricci usando la ecuación (2.32), que en función de los símbolos de Christoffel, sus componentes no nulas son

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{e^{2\alpha(r)-2\beta(r)} \left(r \frac{\partial^2\alpha(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} \left(r \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} - r \frac{\partial\beta(r)}{\partial r} + 2 \right) \right)}{r}, \\
R_{rr} &= -\frac{\partial^2\alpha(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} \left(\frac{\partial\beta(r)}{\partial r} - \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} \right) + \frac{2\frac{\partial\beta(r)}{\partial r}}{r}, \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta(r)} \left(-r \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} + r \frac{\partial\beta(r)}{\partial r} - 1 \right) + 1, \\
R_{\phi\phi} &= e^{-2\beta(r)} \sin^2\theta \left(e^{2\beta(r)} - r \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} + r \frac{\partial\beta(r)}{\partial r} - 1 \right).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

En este espacio-tiempo, el escalar de curvatura es calculado por la ecuación (2.34) y está dado por

$$R = \frac{e^{-2\beta(r)} \left(- (2e^{2\beta(r)}) + 2r \left(r \frac{\partial^2\alpha(r)}{\partial r^2} + \left(r \frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} + 2 \right) \left(\frac{\partial\alpha(r)}{\partial r} - \frac{\partial\beta(r)}{\partial r} \right) \right) + 2 \right)}{r^2}. \tag{4.9}$$

Usando la condición del espacio-tiempo vacío, notamos que todas las componentes del tensor de Ricci deben ser nulas; haciendo uso de las las componentes R_{tt} y R_{rr} , encontramos la relación $\alpha(r) + \beta(r) = 0$.

Ahora, tomando la componente $R_{\theta\theta} = 0$, encontramos que

$$e^{2\alpha(r)} = 1 + \frac{C}{r}, \tag{4.10}$$

donde C es una constante. Usando la relación $\alpha(r) = -\beta(r)$, la métrica dada por la ecuación (4.1.1) toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.11)$$

Sabiendo que, en el límite de campo débil, la componente g_{tt} tiene la forma

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right), \quad (4.12)$$

y que la métrica de Schwarzschild debe reducirse a este termino cuando $r \gg 2GM$, podemos identificar que

$$C = 2M. \quad (4.13)$$

Luego la métrica de Schwarzschild, en coordenadas esféricas tiene la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.14)$$

donde $d\Omega^2$ es la métrica sobre la esfera S^2 [36]; además hemos considerado $G = 1$.

La métrica de Schwarzschild dada por la ecuación (4.14) se puede expresar en coordenadas isotrópicas de tal manera que las coordenadas (r, θ, ϕ) posean el mismo factor; haciendo el cambio de variable

$$r = r' \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2, \quad (4.15)$$

entonces

$$dr = r' \left(1 + \frac{M^2}{4r'^2}\right), \quad 1 - \frac{2M}{r} = \frac{\left(1 - \frac{M}{2r'}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2}, \quad (4.16)$$

reemplazando (4.15) y (4.16) en la ecuación (4.14) y luego haciendo $r' \rightarrow r$, encontramos

$$ds^2 = - \frac{\left(1 - \frac{M}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (4.17)$$

la cual es conocida como la métrica isotrópica de Schwarzschild.

4.1.2. Geodésicas en la métrica de Schwarzschild

Toda geodésica en la TRG se puede considerar formada por segmentos de intervalos relativistas infinitesimales. Vamos a analizar, en el espacio-tiempo de Schwarzschild, las

geodésicas tipo-tiempo y tipo-luz.

1. Geodésicas tipo-tiempo

Las ecuaciones que describen las geodésicas son obtenidas a partir de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (4.18)$$

donde τ se refiere al tiempo propio de la partícula. En el espacio-tiempo de Schwarzschild la densidad lagrangiana \mathcal{L} viene dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[(r^2 \sin^2\theta) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right]. \quad (4.19)$$

Usando la ecuación (4.19) calculamos los momentos canónicos

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}, \quad p_r = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}, \quad p_\phi = r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}, \quad p_\theta = r^2 \dot{\theta}, \quad (4.20)$$

donde el punto significa la derivación respecto de la variable tiempo propio τ . Restringiendo el movimiento al plano ecuatorial y haciendo uso de las relaciones [31]

$$\frac{dp_t}{d\tau} = -\frac{d\mathcal{H}}{dt}, \quad \frac{dp_\phi}{d\tau} = \frac{d\mathcal{H}}{d\phi}, \quad (4.21)$$

obtenemos

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = E \quad (4.22)$$

$$p_\phi = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = L, \quad (4.23)$$

donde L es el momento angular. Reemplazando en la ecuación (4.19), encontramos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2}, \quad (4.24)$$

para geodésicas tipo-tiempo $\mathcal{L} = 1/2$; entonces las ecuaciones (4.23) y (4.24) toman la forma

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}, \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (4.26)$$

Si consideramos a r como función de ϕ , tenemos

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{L} \frac{dr}{d\tau}, \quad (4.27)$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{(E^2 - 1)r^4}{L^2} + \frac{2Mr^3}{L^2} - r^2 + 2Mr. \quad (4.28)$$

Para obtener la ecuación que describa la geodésica en el plano ecuatorial, hacemos el cambio de variable $u = r^{-1}$ en la ecuación (4.28), obteniéndose

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{2Mu}{L^2} - \frac{(1 - E^2)}{L^2}. \quad (4.29)$$

Anulando el momento angular en la ecuación (4.26), obtenemos una de las ecuaciones que describe la geodésica radial

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{r} - (1 - E^2). \quad (4.30)$$

Haciendo uso de la ecuación (4.23) la cual se puede escribir en la forma

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{Er}{r - 2M}, \quad (4.31)$$

la cual representa, juntamente con la ecuación (4.30), las trayectorias de las geodésicas radiales.

2. Geodésicas tipo-luz

Las geodésicas tipo-luz son descritas por partículas sin masa, y suceden para el caso $\mathcal{L} = 0$.

Haciendo uso de la ecuación (4.24), obtenemos

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}. \quad (4.32)$$

Considerando que r es función de ϕ , obtenemos

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{L} \frac{dr}{d\tau}, \quad (4.33)$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2 r^4}{L^2} - r^2 + 2Mr. \quad (4.34)$$

Haciendo el cambio de variable $u = r^{-1}$, podemos obtener la ecuación que describe las geodésicas en el plano ecuatorial

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{E^2}{L^2}. \quad (4.35)$$

Para determinar las geodésicas radiales, usamos la ecuación (4.32) considerando que el momento angular es nulo, obteniendose

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E \quad (4.36)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{Er}{r - 2M}. \quad (4.37)$$

Las dos ecuaciones anteriores describen las trayectorias de geodésicas radiales.

4.1.3. Cantidades conservadas

Las leyes de conservación están relacionadas con los vectores de Killing. Para el caso de un espacio-tiempo estacionario, al término $\xi_{(t)}^\alpha$ lo consideramos como un vector de Killing tipo-tiempo. Sea q la cantidad conservada, esta se define como [37]

$$q = \frac{1}{4\pi} \oint \nabla^\beta \xi_{(t)}^\alpha \eta_\alpha r_\beta \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (4.38)$$

donde η_α es el vector perpendicular a la hipersuperficie y r_β , un vector perpendicular a la frontera. Analizando el término de integración

$$\begin{aligned} \nabla^\beta \xi_{(t)}^\alpha \eta_\alpha r_\beta &= -\nabla^0 \xi^1 \\ &= -g^{00} \nabla_0 \xi^1 \\ &= -g^{00} (\partial_0 \xi^1 + \Gamma_{0\mu}^1 \xi^\mu) \\ &= -g^{00} \Gamma_{00}^1 \xi^0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

teniendo presente que

$$\eta_0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}, \quad r_1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \quad (4.40)$$

se reemplaza los valores en la ecuación (4.39)

$$\begin{aligned} \nabla^\beta \xi_{(t)}^\alpha \eta_\alpha r_\beta &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ &= \frac{M}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Por otro lado, sobre frontera en el espacio infinito se cumple que

$$\sigma_{ij}d\theta^i d\theta^j = r^2 d\Omega^2 \quad (4.42)$$

$$\sqrt{\sigma} = r^2 \text{sen}\theta. \quad (4.43)$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la expresión (4.38), obtenemos

$$q = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{M}{r^2} \right) r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi, \quad (4.44)$$

$$q = M. \quad (4.45)$$

Cabe indicar que no hay una definición aceptada de cantidades conservadas asociadas con el campo gravitacional. La dificultad radica en la expresión que define la parte energética del campo gravitacional [7]. Se cree que la energía del campo gravitatorio no es localizable, es decir, solo es posible definir la energía del campo gravitacional en toda la región del espacio-tiempo y no solo en una región pequeña. El concepto de energía total y momentum en el espacio-tiempo, asintóticamente plano, es aceptado unívocamente; sin embargo, la localización de estas cantidades físicas sigue siendo un problema cuando se incluye el campo gravitacional.

Un trabajo importante fue el realizado por Møller [38], quien construyó ciertas definiciones independientes del sistema de coordenadas para la energía-momento en el ámbito de la Relatividad General.

Møller definió el término Θ_i^k dado por

$$\Theta_i^k = \frac{1}{8\pi} \chi_{i,p}^{kp}, \quad (4.46)$$

donde

$$\chi_i^{kl} = \sqrt{-g} \left(\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{iq}}{\partial x^p} \right) g^{kq} g^{lp}. \quad (4.47)$$

Entonces la densidad de energía viene expresada como

$$E = \frac{1}{8\pi} \int \int \int \Theta_0^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (4.48)$$

o en su forma equivalente

$$E = \frac{1}{8\pi} \int \int \int \frac{\partial \chi_0^{0l}}{\partial x^l} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4.49)$$

Ahora usaremos el método de Møller para el análisis de la distribución de energía en el agujero negro de Schwarzschild.

En este análisis tenemos dos casos: el primer caso corresponde a la solución externa, en la cual, haciendo uso del superpotencial χ_i^{kl} , encontramos que

$$\chi_0^{01} = 2m \operatorname{sen} \theta \quad (4.50)$$

$$\chi_0^{02} = \chi_0^{03} = \chi_0^{00} = 0, \quad (4.51)$$

por lo tanto, la energía viene dada por

$$E = \frac{1}{8\pi} \int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_{0,\nu}^{0\nu} dr d\theta d\phi = 0, \quad (4.52)$$

es decir la energía fuera del sistema material es nula.

El segundo caso corresponde a la solución interna; en este caso, el campo está descrito por la métrica estática con simetría esférica [39] dada por

$$ds^2 = [A - B(1 - \frac{r^2}{R^2})^{1/2}]^2 dt^2 - (1 - \frac{r^2}{R^2})^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2), \quad (4.53)$$

donde

$$A = \frac{3}{2}(1 - \frac{a^2}{R^2})^{1/2} \quad B = 1/2 \quad (4.54)$$

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho} = \frac{a^3}{2m} \quad m = \frac{4}{3}\pi\rho a^3. \quad (4.55)$$

Este es el campo asociado con un sistema material esférico, compuesto de un fluido perfecto incompresible con densidad propia ρ . La constante a es el radio del sistema esférico.

De la métrica obtenemos

$$g = -[A - B(1 - \frac{r^2}{R^2})^{1/2}]^2 (1 - \frac{r^2}{R^2})^{-1} r^4 \operatorname{sen}^2 \theta \quad (4.56)$$

Haciendo uso del superpotencial χ_i^{kl} , encontramos que

$$\chi_0^{01} = \frac{2Br^3}{R^2} \operatorname{sen} \theta \quad (4.57)$$

$$\chi_0^{02} = \chi_0^{03} = \chi_0^{00} = 0. \quad (4.58)$$

Calculando la energía

$$E = \frac{1}{8\pi} \int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_{0,1}^{01} dr d\theta d\phi, \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{8\pi} \int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2Br^3 \text{sen}\theta}{R^2} \right) dr d\theta d\phi, \\ &= \frac{a^3 B}{R^2}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

sustituyendo las relaciones dadas en (4.54) y (4.55), obtenemos

$$E = mc^2. \quad (4.61)$$

Esto es, la energía es igual a la masa gravitacional m de acuerdo con el resultado de Einstein. El análisis detallado fue obtenido en [40].

4.1.4. Diagrama de Kruskal

Como se puede notar en la métrica de Schwarzschild, dada por la ecuación (??), esta presenta dos singularidades. Dado que el escalar de Kretschmann $\mathcal{L} = R^{abcd}R_{abcd}$ diverge para $r \rightarrow 0$ como M^2/r^6 , siendo $r = 0$ una singularidad intrínseca de la geometría de Schwarzschild. Para el caso $r = 2M$, que es el radio de Schwarzschild, la situación es diferente; y para su análisis haremos un cambio adecuado de coordenadas.

Partiendo de $ds^2 = 0$ [37], obtenemos

$$dt = \pm \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = \pm [r + 2M \ln(r - 2M)] = \pm r^*. \quad (4.62)$$

Definiendo las coordenadas

$$\begin{cases} u = t - r^* \\ v = t + r^*, \end{cases} \quad (4.63)$$

donde $-\infty < u, v < \infty$. por tanto la métrica se convierte en

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv, \\ ds^2 &= -\frac{2Me^{-r/2M}}{r} e^{(v-u)/4M} dvdu. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Introduciendo nuevas coordenadas, dadas por

$$\begin{cases} U = e^{-u/4M} \\ V = e^{v/4M}, \end{cases} \quad (4.65)$$

se obtiene

$$ds^2 = -\frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} dV dU. \quad (4.66)$$

Nuevamente, haciendo el siguiente cambio de coordenadas,

$$\begin{cases} T = \frac{U + V}{2} = \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{senh}\left(\frac{t}{4M}\right), \\ R = \frac{U - V}{2} = \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{cosh}\left(\frac{t}{4M}\right), \end{cases} \quad (4.67)$$

a partir de las cuales, obtenemos el elemento de línea

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} (-dT^2 + dR^2) + r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (4.68)$$

Esta es la solución de Schwarzschild expresada a través de las coordenadas de Kruskal. Se puede ver cómo en este caso $r = 2M$ ya no es una singularidad de la métrica. Para entender lo que realmente ocurre en el espacio-tiempo cuando $r = 2M$, expresamos la relación entre las coordenadas t, r y las nuevas coordenadas T, R

$$\begin{cases} \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{-\frac{r}{2M}} = R^2 - T^2 \\ \frac{t}{2M} = 2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{T}{R}\right), \end{cases} \quad (4.69)$$

por lo que, es obvio que las curvas $r = \text{constante}$ se convierten en hipérbolas de tipo $X^2 - T^2 = \text{constante}$ y la relación $t = \text{constante}$ se convierte en rectas $T = \text{constante}$. La geodésica nula (que es la trayectoria del fotón) para cada observador puede representarse en el plano R, T como una semirecta de 45° . Podemos así construir el llamado diagrama de Kruskal, como se muestra en la figura 4.1, en la cual se presentan cuatro zonas:

1. Las regiones I y III asintóticamente planas y no relacionadas causalmente.
2. La región II es denominada agujero negro. Cualquier observador dentro de esta región ya no puede salir de ella ya que la velocidad máxima en la que puede moverse

es la de la luz. Como se desprende del diagrama, esto significa permanecer dentro de la región con $r < 2M$. En particular, el observador introducido en la región II solo puede acercarse a la singularidad $r = 0$. Finalmente, llamaremos a la línea $r = 2Mt = \pm\infty$ el horizonte de eventos ya que un observador en la región I ya no puede recibir señales de un observador dentro de la región II.

3. La región IV es denominada agujero blanco. Cualquier observador dentro de esta región solo puede alejarse de la singularidad $r = 0$, dejando la región delimitada por el horizonte de eventos.

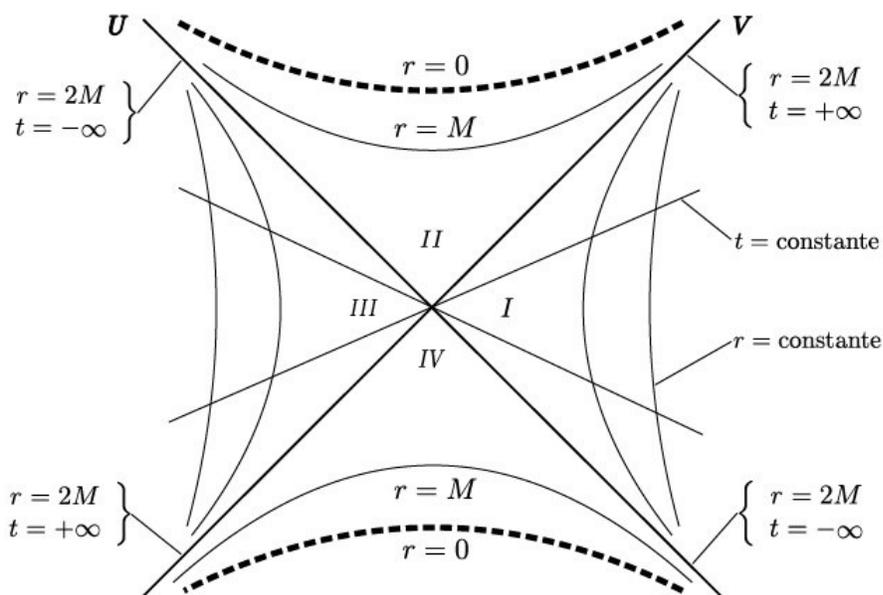


Figura 4.1: Diagrama de Kruskal para el espacio tiempo de Schwarzschild

4.2. Agujero negro de Reissner-Nordström

La métrica de Reissner-nordström es una solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein que describe el campo electromagnético de un cuerpo masivo y eléctricamente cargado. Esta métrica de Reissner-Nordström puede considerarse como una generalización de la métrica de Schwarzschild y bajo ciertas condiciones describe un agujero negro. El

agujero negro de Reissner-Nordström que es estático, con simetría esférica y con carga eléctrica Q , viene definido por dos parámetros: la masa M y la carga eléctrica Q .

En esta sección, discutiremos las propiedades y características de la solución de las ecuaciones de Einstein denominada métrica de Reissner-Nordström.

4.2.1. Métrica de Reissner-Nordström

En la TRG, una de las soluciones estáticas conocidas como las ecuaciones de campo de Einstein es la métrica de Reissner-Nordström que describe la geometría del espacio-tiempo y que rodea a un agujero negro esférico cargado sin rotación. En realidad, un agujero negro altamente cargado sería neutralizado por las interacciones con la materia en su vecindad y ; por lo tanto, tal solución no expresa situaciones astrofísicas realistas. Sin embargo, el agujero negro de Reissner-Nordström ilustra una serie de características importantes de situaciones más generales.

Para obtener las ecuaciones de campo correspondientes, tomamos la acción de Einstein-Hilbert dada por la ecuación (3.33), y adicionando la acción del campo electromagnético obtenemos la acción total

$$S = \int \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) dx^4, \quad (4.70)$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético. Luego realizamos la variación de esta acción con respecto a los campos y se obtiene el conjunto de ecuaciones de Einstein-Maxwell [25],

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} = 8\pi \left(F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \right), \quad (4.71)$$

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.72)$$

Para determinar la métrica del agujero negro cargado, supondremos un tensor métrico esféricamente simétrico que debe reducirse a la métrica de Schwarzschild cuando la carga eléctrica sea nula. Por todo ello, consideramos el siguiente *ansatz* para la métrica en coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \phi\}$

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.73)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ es la métrica sobre la esfera S^2 .

A partir de la ecuación (4.71), notamos que el tensor energía-momento está dado por el tensor electromagnético [36]

$$T_{\mu\nu} = \left(F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}, \right). \quad (4.74)$$

Este tensor debe satisfacer las condiciones de simetría gravitacional, por tanto, no puede ser función de θ y ϕ . Para una fuente estática, y considerando la ausencia de campo magnético, las únicas componentes diferentes de cero son $F_{tr} = -F_{rt} = E(r)$ referentes a un campo eléctrico radial [36].

Por tanto, las componentes del tensor electromagnético vienen dadas por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E(r) & 0 & 0 \\ -E(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

En el contexto de la métrica de Reissner-Nordström las ecuaciones fundamentales son las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} = 0, \quad (4.76)$$

$$\partial_{[\alpha}F_{\mu\nu]} = 0, \quad (4.77)$$

donde ∇ es la derivada covariante. La primera ecuación puede ser escrita como [31]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_{\nu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.78)$$

donde g es el determinante de la métrica.

Recurriendo a la ecuación (4.73) y al tensor $F_{\mu\nu}$, obtenemos

$$\frac{d}{dr}(e^{-(\alpha+\beta)/2}r^2E(r)) = 0, \quad (4.79)$$

donde se encuentra que

$$E(r) = e^{-(\alpha+\beta)/2}\frac{Q}{r^2}, \quad (4.80)$$

y Q es una constante.

Considerando el límite asintótico tipo Minkowski, se tiene

$$E(r)_{r \rightarrow \infty} \longrightarrow \frac{Q}{r^2}. \quad (4.81)$$

Luego, este debe ser el campo originado por una carga puntual, y Q debe tener el significado físico de una carga eléctrica centrada en el origen de un sistema de coordenadas [41].

Las componentes del tensor de Ricci son calculadas por la ecuación (2.33), y están dadas por

$$\begin{aligned} R_{tt} &= [\partial_t^2 \beta + (\partial_t \beta)^2 - \partial_t \alpha \partial_t \beta] + e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right], \\ R_{rr} &= - \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta - \frac{2}{r} \partial_r \beta \right] + e^{2(\beta-\alpha)} [\partial_t^2 \beta + (\partial_t \beta)^2 - \partial_t \alpha \partial_t \beta], \\ R_{tr} &= \frac{2}{r} \partial_t \beta, \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1, \\ R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta} \text{sen}^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Para las componentes del tensor electromagnético, usamos las ecuaciones (4.74) y la ecuación (4.75) obteniendose

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \frac{E^2(r)}{2} e^{-2\beta}, \\ T_{rr} &= -\frac{E^2(r)}{2} e^{-2\alpha}, \\ T_{tr} &= 0, \\ T_{\theta\theta} &= \frac{r^2 E^2(r)}{2} e^{-2(\alpha+\beta)}, \\ T_{\phi\phi} &= T_{\theta\theta} \text{sen}^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Usando las ecuaciones (4.76) y (4.77), se tiene que $R_{tr} = 0$, considerando este resultado y la ecuación (4.75), obtenemos que

$$e^{2\alpha} R_{rr} + e^{2\beta} R_{tt} = 0.$$

Redefiniendo la coordenada temporal en la ecuación (4.73) y haciendo $dt \longrightarrow e^{\text{constante}} dt$,

se encuentra que

$$\alpha(r) = -\beta(r). \quad (4.84)$$

Considerando la componente $\theta\theta$ en la ecuación de Einstein

$$R_{\theta\theta} = 8\pi T_{\theta\theta}, \quad (4.85)$$

obtenemos

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 1 - \frac{Q^2}{r^2}, \quad (4.86)$$

de donde se deduce que

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{\xi}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (4.87)$$

A fin de obtener la solución de Schwarzschild, en ausencia de cargas electricas, podemos concluir que

$$\xi = -2M. \quad (4.88)$$

Reemplazando en la ecuación (4.73), obtenemos la expresión

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.89)$$

la cual es denominada métrica de Reissner-Nordström.

La métrica tiene singularidades de coordenadas para

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0, \quad (4.90)$$

cuyas soluciones son

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (4.91)$$

Este resultado implica tres posibilidades:

1. Para $M^2 < Q^2$, ningún horizonte oculta la singularidad intrínseca en $r = 0$. Esta solución es descartada físicamente por la hipótesis de la censura cósmica de Penrose en el caso de un colapso gravitatorio llamado singularidad desnuda.
2. Para $M^2 = Q^2$, se tiene un agujero negro de Reissner-Nordström externo con un único horizonte de eventos en $r = M$.

3. Para $M^2 > Q^2$, existen dos horizontes de eventos en $r = r_{\pm}$. Cuanto mayor es la carga del agujero negro, los horizontes son más cercanos. Este es el caso de interés astrofísico.

Por otro lado, haciendo uso de las ecuaciones anteriores se puede determinar la métrica de Reissner-Nordström con constante cosmológica; para ello partimos de la ecuación (4.85) en la cual incluimos la constante cosmológica Λ , obteniéndose

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 1 - \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda r^2,$$

de donde se deduce que

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{\xi}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2,$$

donde ξ es una constante de integración; para estar de acuerdo con la solución de Schwarzschild consideramos $\xi = -2M$ y teniendo presente que $2\alpha = -2\beta$ reemplazamos en la ecuación (4.73), obtenemos la expresión

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.92)$$

la cual representa la métrica de Reissner-Nordström con constante cosmológica.

4.2.2. Geodésicas en la métrica de Reissner-Nordström

En la TRG, la curvatura del espacio-tiempo es caracterizado por un conjunto de ecuaciones diferenciales denominadas geodésicas. Estas determinan cómo la luz o cualquier objeto en caída libre se mueve en presencia de un campo gravitacional. En esta sección, analizaremos, en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström, las geodésicas tipo-tiempo y tipo-luz.

1. Geodésicas tipo-tiempo

Las ecuaciones que gobiernan las geodésicas tipo-tiempo en el espacio-tiempo de Reissner-

Nordström describen las trayectorias de partículas con masa y están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= \frac{Er^2}{(r^2 - 2Mr + Q^2)}, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{L}{r^2}, \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= E^2 - \frac{(r^2 - 2Mr + Q^2)}{r^2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right).\end{aligned}\quad (4.93)$$

Para analizar las propiedades de estas geodésicas, consideraremos que r sea función de ϕ , luego hacemos el cambio de variable $u = 1/r$; reemplazando en la ecuación (4.93), obtenemos

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = -Q^2u^4 + 2Mu^3 - \left(1 + \frac{Q^2}{L^2}\right)u^2 + \frac{2Mu}{L^2} - \frac{(1 - E^2)}{L^2} = f(u).\quad (4.94)$$

Desde el punto de vista geométrico, la diferencia entre las geodésicas en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström y Schwarzschild radica en las órbitas que cruzan el horizonte de eventos. En el espacio-tiempo de Reissner-Nordström, las órbitas terminan en algún punto del horizonte de cauchy, mientras que en el espacio-tiempo de Schwarzschild las órbitas alcanzan la singularidad.

Analizando las órbitas estables e inestables asociadas a órbitas circulares, las cuales están restringidas por las condiciones $f(u) = 0$ y $f'(u) = 0$, obtenemos

$$Q^2u^4 - 2Mu^3 + \left(1 + \frac{Q^2}{L^2}\right)u^2 - \frac{[2Mu - (1 - E^2)]}{L^2} = 0,\quad (4.95)$$

$$4Q^2u^3 - 6Mu^2 + 2u \left(1 + \frac{Q^2}{L^2}\right) - \frac{2M}{L^2} = 0\quad (4.96)$$

De las ecuaciones anteriores, deducimos que la energía y el momento angular vienen dadas por

$$E^2 = \frac{(1 - 2Mu_c + Q^2u_c^2)^2}{1 - 3Mu_c + 2Q^2u_c^2}\quad (4.97)$$

$$L^2 = \frac{M - Q^2u_c}{u_c(1 - 3Mu_c + 2Q^2u_c^2)},\quad (4.98)$$

donde $r_c = 1/u_c$ es el radio de la órbita circular.

2. Geodésicas tipo-luz

Las ecuaciones tipo-luz describen las trayectorias realizadas por partículas sin masa, y están dadas por

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \frac{(r^2 - 2Mr + Q^2)L^2}{r^4}, \quad (4.99)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{Er^2}{r^2 - 2Mr + Q^2}, \quad (4.100)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \quad (4.101)$$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = -Q^2u^4 + 2Mu^3 - u^2 + \frac{E^2}{L^2} = f(u). \quad (4.102)$$

Para el caso de geodésicas radiales, tenemos

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{Er^2}{r^2 - 2Mr + Q^2}, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad (4.103)$$

entonces usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dr}{d\tau} = \pm \frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r^2}. \quad (4.104)$$

El valor del parámetro de impacto $D = L/E$ para los cuales $f(u) = 0$ es determinado por las relaciones

$$f(u) = \frac{1}{D^2} - u^2(Q^2u^2 - 2Mu + 1) = 0, \quad (4.105)$$

$$f'(u) = -2u(1 - 3Mu + 2Q^2u^2) = 0. \quad (4.106)$$

Las soluciones de la ecuación (4.106) vienen dadas por

$$u = \frac{3M}{4Q^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right], \quad u = 0, \quad (4.107)$$

donde el punto mínimo de la función está dado por

$$u_c = \frac{3M}{4Q^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right],$$

$$r_c = \frac{3M}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right]. \quad (4.108)$$

En $r = r_c$, las órbitas circulares inestables son permitidas por las ecuaciones geodésicas.

4.2.3. Cantidades conservadas

Igual que para el agujero negro de Schwarzschild, las leyes de conservación están relacionadas con el vector de killing tipo tiempo $\xi_{(t)}^\alpha$.

Para la cantidad conservada q tenemos [37]

$$q = \frac{1}{4\pi} \oint \nabla^\beta \xi_{(t)}^\alpha \eta_\alpha r_\beta \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (4.109)$$

donde η_α es el vector perpendicular a la hipersuperficie y r_β un vector perpendicular a la frontera.

Analizando el término de integración

$$\begin{aligned} \nabla^\beta \xi_{(t)}^\alpha \eta_\alpha r_\beta &= -\nabla^0 \xi^1 \\ &= -g^{00} \nabla_0 \xi^1 \\ &= -g^{00} (\partial_0 \xi^1 + \Gamma_{0\mu}^1 \xi^\mu) \\ &= -g^{00} \Gamma_{00}^1 \xi^0, \end{aligned} \quad (4.110)$$

teniendo presente que

$$\eta_0 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{1/2}, \quad r_1 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1/2}, \quad (4.111)$$

reemplazando valores en la ecuación (4.110), obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla^\beta \xi_{(t)}^\alpha \eta_\alpha r_\beta &= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \\ &= \frac{M}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Por otro lado, tenemos que sobre la frontera, en el espacio infinito se cumple

$$\sigma_{ij} d\theta^i d\theta^j = r^2 d\Omega^2 \quad (4.113)$$

$$\sqrt{\sigma} = r^2 \text{sen}\theta. \quad (4.114)$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la expresión (4.109), obtenemos

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{M}{r^2} \right) r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi, \\ q &= M. \end{aligned} \quad (4.115)$$

4.2.4. Diagrama de Kruskal

Las coordenadas de kruskal (U_+, V_+) son obtenidas a partir de una transformación de coordenadas (u, v) de la forma

$$\begin{aligned} U_+ &= -e^{-k+u} & V_+ &= e^{k+v} & (r > r_+), \\ U_+ &= +e^{-k+u} & V_+ &= e^{k+v} & (r < r_+) \end{aligned} \quad (4.116)$$

donde

$$\begin{aligned} u &= t - r^*, & v &= t + r^*, \\ r^* &\simeq \frac{1}{2k_+} \ln |k_+(r - r_+) |, \\ K_+ &\equiv \frac{1}{2} f'(r_+), \\ f(r) &\simeq 2k_+(r - r_+). \end{aligned} \quad (4.117)$$

En el cual, el horizonte de eventos externo es la superficie $v - u = -\infty$. En las coordenadas (U_+, V_+) , la métrica es regular en el horizonte externo y tiene la forma

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{k_+^2} dU_+ dV_+ + r_+^2 d\Omega^2, \quad (4.118)$$

con

$$f \simeq -2U_+ V_+ \quad (r = r_+). \quad (4.119)$$

Las coordenadas de kruskal (U_+, V_+) son definidas apenas en una región del espacio-tiempo. o sea, en el intervalo $r_1 < r < \infty$, donde $r_1 > r_-$.

Realizado el mismo procedimiento, anteriormente descrito, las coordenadas de kruskal (U_-, V_-) son obtenidas a partir de una transformación de coordenadas (u, v) de la forma

$$\begin{aligned} U_- &= -e^{k-u} & V_- &= -e^{-k+v} & (r > r_-), \\ U_- &= +e^{k-u} & V_- &= -e^{-k+v} & (r < r_-) \end{aligned} \quad (4.120)$$

donde

$$\begin{aligned} r^* &\simeq -\frac{1}{2k_-} \ln |k_-(r - r_-) |, \\ K_- &\equiv \frac{1}{2} f'(r_-), \\ f(r) &\simeq 2k_-(r - r_-). \end{aligned} \quad (4.121)$$

Donde el horizonte de eventos externo es la superficie $v - u = -\infty$. En las coordenadas (U_-, V_-) , la métrica es regular en el horizonte externo y tiene la forma

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{k_-^2} dU_- dV_- + r_-^2 d\Omega^2, \quad (4.122)$$

con

$$f \simeq -2U_- V_- \quad (r = r_-). \quad (4.123)$$

Las coordenadas de Kruskal (U_-, V_-) son singulares en el horizonte de eventos externo. Analizaremos la trayectoria de un observador en el diagrama de kruskal mostrado en la

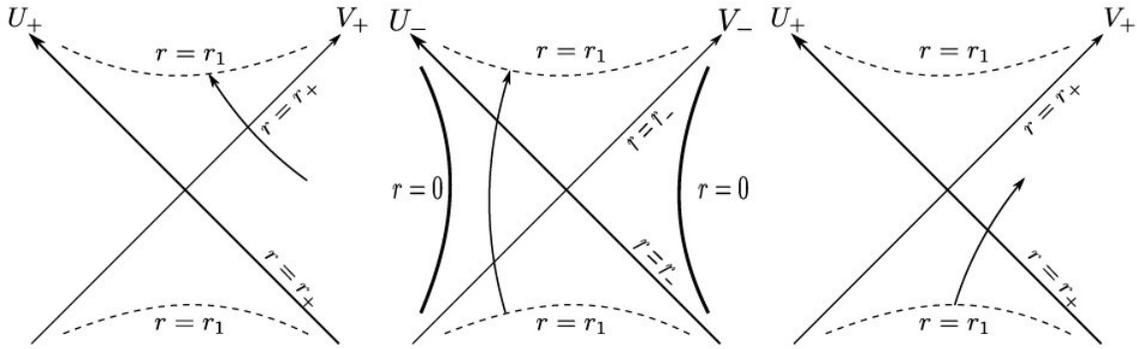


Figura 4.2: Diagramas de Kruskal para el espacio-tiempo de Reissner-Nordström

figura 4.2. En la región $r < r_-$, donde $g_{00} < 0$ la coordenada radial es tipo-espacio y, por lo tanto, un observador puede caer en la singularidad o puede evitarla.

Después de pasar por la segunda superficie $r = r_-$, el observador cruza la superficie $r = r_+$. Teniendo en cuenta que en la vecindad de $r = r_+$ la métrica puede ser extendida via coordenadas de kruskal (U_+, V_+) , el observador puede escojer entre quedarse en este nuevo universo o iniciar el ciclo nuevamente. En este sentido, puede decirse que la métrica de Reissner-Nordström describe un número infinito de universos asitóticamente planos conectados via agujeros negros [31].

4.3. Agujero de gusano atravesable de Morris-Thorne

Un agujero de gusano (AG) se puede considerar como un túnel estable y atravesable en el espacio-tiempo y las ecuaciones de Einstein están descritas por soluciones para un

contenido material con simetría esférica cuya energía o materia ha sido denominada exótica; es decir, un tipo de materia que produce repulsión en vez de atracción y que curva el espacio-tiempo de forma que permite generar una circunferencia de radio mínimo denominada garganta del agujero de gusano. Los túneles o puentes formados por materia ordinaria como los agujeros de gusano de Schwarzschild, o también denominados puentes de Einstein-Rosen, [42] son inestables y se estrangulan en la región de su garganta para, finalmente, dar lugar a un agujero negro y un agujero blanco [43].

Se pueden distinguir dos tipos de AG: aquellos que conectan nuestro universo con otro

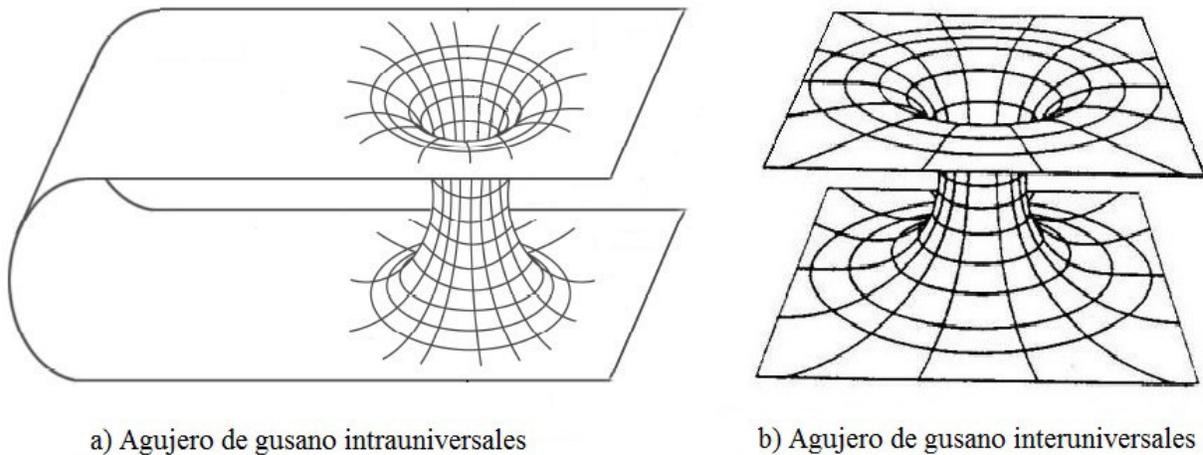


Figura 4.3: Tipos de agujeros de gusano

universo o dos universos distintos, denominados AG-interuniversales; y aquellos que conectan dos regiones distintas de un mismo universo, denominados AG-intrauniversales, como se muestran en la figura 4.3. Estos dos tipos de AG son totalmente equivalentes si estudiamos sus gargantas, pues localmente no existe ninguna distinción entre uno y otro. En esta sección, analizaremos las propiedades fundamentales de los agujeros de gusano atravesables de Morris-Thorne .

4.3.1. Propiedades de los agujeros de gusano atravesables

Las propiedades que un AG debe tener para ser atravesable fueron enunciadas por Morris-Thorne [44]. Estas son

1. La métrica debe ser esféricamente simétrica y estática. Este requerimiento es impuesto para simplificar los cálculos, ya que el AG podría ser inestable a perturbaciones no esféricas.
2. La solución debe obedecer las ecuaciones de Einstein. Se asume la acción correcta de la TRG.
3. No debe haber horizonte de eventos, ya que este impediría un viaje a través del AG.
4. La solución debe tener una garganta que conecte dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo.
5. Las fuerzas de marea experimentadas por el viajero deben ser considerablemente pequeñas.
6. El viajero debe ser capaz de cruzar a través del AG en un tiempo finito, en un tiempo propio razonablemente pequeño (por ejemplo menos de un año) medido no solo por él, sino también por observadores quienes lo esperan fuera del AG.
7. El tensor de energía-momento debe ser físicamente razonable.
8. La solución debe ser estable ante pequeñas perturbaciones.
9. Debe ser posible crear el agujero de gusano.

Las propiedades de la 1 a la 4 son denominados criterios básicos del AG; ya que se puede construir una solución de las ecuaciones de Einstein usando dichas propiedades y después ajustar los parámetros del AG buscando un balance con las otras condiciones.

4.3.2. Métrica del espacio-tiempo y ecuaciones de campo de Einstein

De acuerdo con la primera propiedad que deben cumplir los AG, las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein deben ser independientes del tiempo, no rotantes y puentes esféricamente simétricos entre universos; entonces debe existir un sistema de coordenadas en las cuales dichas soluciones son independientes del tiempo; más explícitamente, los elementos de la métrica no deben depender del tiempo. Del punto de vista matemático, podemos decir que un espacio-tiempo es estacionario si y solo si admite un campo vectorial de Killing tipo-tiempo.

En cuanto a la simetría esférica, consideramos la existencia de un punto privilegiado tal que el sistema sea invariante bajo rotaciones espaciales alrededor de dicho punto. Matemáticamente, un espacio-tiempo es esféricamente simétrico si admite tres campos vectoriales de Killing K^α tipo-espacio linealmente independientes, cuyas órbitas están cerradas y satisfacen [41]

$$[K^\alpha, K^\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} K^\gamma, \quad (4.124)$$

donde $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es el tensor antisimétrico de Levi-Civita.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, la métrica general que más aproxima a estas características presenta la forma [44]

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.125)$$

donde $\phi(r)$ toma un valor finito para todo valor de r . La función $b(r)$ determina la forma espacial del agujero de gusano, por tal razón, se le denomina *función de forma*; mientras que la función $\phi(r)$ determina el desplazamiento hacia el rojo gravitacional, por lo que se le denomina *función de desplazamiento al rojo*. La coordenada radial r cubre el rango $[r_0, +\infty >$ donde r_0 define el radio de la garganta del AG.

Ahora nuestro objetivo es calcular las ecuaciones de estado del AG, para ello, tenemos que realizar algunos cálculos previos para resolver la ecuación de Einstein. Los resultados serán presentados usando un conjunto de vectores ortonormales, es decir, usaremos un conjunto de observables en un marco de referencia propio quienes permanecen en reposo

con coordenadas (r, θ, ϕ) fijas. Simplificamos los resultados transformando la base al marco de referencia adecuado

$$\begin{aligned} e_t &\longrightarrow e^\phi \hat{e}_t, & e_r &\longrightarrow (1 - b/r)^{-1/2} \hat{e}_r, \\ e_\theta &\longrightarrow r \hat{e}_\theta, & e_\phi &\longrightarrow r \sin(\theta) \hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Para determinar las componentes del tensor de Riemann, hacemos uso de la ecuación (2.28), obteniéndose

$$\begin{aligned} \hat{R}_{trt}^t &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[-\phi'' - (\phi')^2\right] + \frac{1}{2r^2(b'r - b)} \phi', \\ \hat{R}_{\theta t \theta}^t &= \hat{R}_{\phi t \phi}^t = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{r}, \\ \hat{R}_{\theta r \theta}^r &= \hat{R}_{\phi r \phi}^r = \frac{1}{2r^3} (b'r - b), \\ \hat{R}_{\phi \theta \phi}^\theta &= \frac{b}{r^3}, \end{aligned} \quad (4.127)$$

donde el término primado denota diferenciación respecto de r .

Con estas expresiones, podemos calcular el tensor de Ricci R_{ab} y el escalar de curvatura R usando las ecuaciones (2.33) y (2.34) respectivamente.

Ahora el tensor de Einstein, en el marco de referencia ortonormal, se calcula usando la ecuación (??), la cual nos conduce a las siguientes componentes diferentes de cero:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{tt} &= \frac{b'}{r^2}, \\ \hat{G}_{rr} &= -\frac{b}{r^3} + 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r}, \\ \hat{G}_{\theta\theta} &= \hat{G}_{\phi\phi} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)} \Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)}\right) \end{aligned} \quad (4.128)$$

Un AG atravesable debe estar compuesto por materia con un tensor energía-momento diferente de cero. Usando la base ortonormal, asumimos que el tensor energía-momento tiene la forma

$$\hat{T}_{tt} = \rho(r), \quad \hat{T}_{rr} = -\tau(r), \quad \hat{T}_{\theta\theta} = \hat{T}_{\phi\phi} = p(r). \quad (4.129)$$

Donde $\rho(r)$ es la densidad total, $\tau(r)$ es la tensión radial, $p(r)$ es la presión lateral y todo valor mixto de T_{ab} es nulo. Esta elección es compatible con la expresión para el tensor de

Einstein, es decir, sus únicos componentes distintos de cero son diagonales. Haciendo uso de las expresiones para G_{ab} y T_{ab} en la ecuación de Einstein (??) obtenemos las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{b'}{8\pi r^2}, \\ \tau &= \frac{1}{8\pi r^2} \left[\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi' \right], \\ P(r) &= \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r-b}{2r(r-b)}\Phi' - \frac{b'r-b}{2r^2(r-b)} + \frac{\Phi'}{r} \right] \quad (4.130)\end{aligned}$$

Cabe hacer notar que analizando las ecuaciones de estado derivadas podemos manipular $b(r)$ y $\Phi(r)$ para obtener la métrica que describe el agujero de gusano.

4.3.3. Condiciones de transitabilidad

Consideremos un viajero en un universo inferior con distancia propia $l = -l_1$ y, al final, en el universo superior en $l = l_2$ en el cual se mueve con velocidad radial $v(r)$ medido por un observador estático en r ; la relación entre la distancia propia dl con el radio del viajero, el lapso de tiempo coordenado dt y el lapso de tiempo propio $d\tau$ viene dado por

$$v = e^{-\Phi} \frac{dl}{dt} = e^{-\Phi} \frac{dl}{dr} \frac{dr}{dt} = \pm e^{-\Phi} \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{-1/2} \frac{dr}{dt}, \quad (4.131)$$

$$v\gamma = \frac{dl}{d\tau} = \pm \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{-1/2} \frac{dr}{d\tau}, \quad (4.132)$$

donde $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$.

Para las estaciones espaciales, estableceremos ciertas condiciones:

1. En las estaciones, el espacio debe ser asintóticamente plano, $b/r \leq 1$.
2. El corrimiento al rojo gravitacional de las señales enviadas de las estaciones al infinito deben ser pequeñas, $\Delta \lambda/\lambda = e^{-\Phi} - 1 \approx -\Phi$, tal que $|\Phi| \ll 1$.
3. La aceleración gravitacional medida por $g \approx -\Phi'$ en las estaciones debe ser menor o igual a la aceleración gravitacional de la tierra, $|\Phi| \leq g_{\oplus}$.

Si el AG es atravesable, Morris y Thorne sugieren que el tiempo de viaje considerado sea de un año. Dicho tiempo debe ser medido tanto por el viajero como por un observador que se encuentra en las estaciones. Este tiempo viene expresado por

$$\Delta \tau_{propio} = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{v\gamma} \leq 1 \text{ año}, \quad (4.133)$$

$$\Delta t_{observador} = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{ve^\Phi} \leq 1 \text{ año}. \quad (4.134)$$

4.3.4. Aceleración que percibe el viajero

Si $v(r)$ es la velocidad del viajero, medido por un observador al pasar por la posición \vec{r} , el viajero posee una aceleración tetradimensional que en su marco de referencia propio viene expresada como $\hat{a}^\mu = \hat{U}^\nu \hat{U}_{;\nu}^\mu$, obtenemos la magnitud de la aceleración dada por

$$|\vec{a}| = \left| \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} e^{-\Phi} \frac{d}{dr} (\gamma e^\Phi) \right| \leq g_\oplus. \quad (4.135)$$

Para observadores que atraviesen el AG con velocidad constante, tendrán una aceleración nula.

Por otro lado, la aceleración de marea gravitacional que sentirá el viajero está definida como $\Delta \hat{a}^\mu = -\hat{R}_{\nu\alpha\beta}^\mu \hat{U}^\nu \hat{\eta}^\alpha \hat{U}^\beta$, donde \hat{U}^ν es la cuadvirvelocidad del viajero y $\hat{\eta}^\alpha$ es la separación entre dos partes arbitrarias del cuerpo del viajero. Haciendo uso de la ecuación (4.125), calculamos las componentes no nulas del tensor de Riemann

$$\hat{R}_{rtrt} = - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[-\Phi'' - (\Phi')^2 + \frac{b'r - b}{2r(r-b)\Phi'} \right], \quad (4.136)$$

$$\hat{R}_{\theta t \theta t} = \hat{R}_{\phi t \phi t} = \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[v^2 \left(b' - \frac{b}{r} \right) + 2(r-b)\Phi' \right]. \quad (4.137)$$

La condición $|\Delta \hat{a}^\mu| \leq g_\oplus$ nos proporciona las restricciones para la aceleración de marea medida por un viajero a través de un AG, obteniendose

$$a_{marea \ radial} = \left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r - b}{2r(r-b)\Phi'} \right] \right| |\hat{\eta}^1| \leq g_\oplus, \quad (4.138)$$

$$a_{marea \ lateral} = \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[v^2 \left(b' - \frac{b}{r} \right) + 2(r-b)\Phi' \right] \right| |\hat{\eta}^2| \leq g_\oplus. \quad (4.139)$$

La restricción de marea radial es una función de corrimiento y la restricción de marea lateral, restringe la velocidad con la cual el observador atraviesa el AG.

4.3.5. Materia exótica y condiciones de Energía

Consideramos la función $\xi = (\tau - \rho)/|\rho|$ [44]. Usando la ecuación (4.114), se tiene

$$\xi = \frac{b/r - b' - 2r(1 - b/r)\Phi'}{|b'|} \quad (4.140)$$

haciendo uso de la relación $(b/r - b') = 2b^2/r(d^2r/dz^2)$, obtenemos

$$\xi = \frac{2b^2}{r|b'|} \frac{dr^2}{dz^2} - 2r \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{|b'|}. \quad (4.141)$$

Para el caso de la garganta del AG $(1 - b/r)\Phi' \rightarrow 0$ obtenemos

$$\xi(r_0) = \frac{\tau_0 - \rho_0}{|b'|} > 0. \quad (4.142)$$

La condición $\tau_0 - \rho_0 > 0$ nos indica que la tensión radial en la garganta debe exceder la densidad de energía. Morris y Thorne [44] llamaron a la materia restringida por esta condición como *materia exótica*.

Dedido a que la materia exótica puede generar un AG, se puede condicionar la energía para determinados casos en los cuales el tensor energía-momento es diagonal $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$. Se considera que las formas de materia clásica obedecen las condiciones de energía; sin embargo, estas condiciones son violadas por ciertos campos cuánticos, por ejemplo, el efecto cassimir.

1. Condición de energía nula (CEN).- para cualquier vector nulo V^μ se cumple

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0. \quad (4.143)$$

2. Condición de energía débil (CED).- Para cualquier vector tipo-tiempo W^μ , el tensor energía-momento satisface

$$T_{\mu\nu}W^\mu W^\nu \geq 0. \quad (4.144)$$

3. Condición de energía Fuerte (CEF).- Para cualquier vector tipo-tiempo W^μ , se cumple

$$T_{\mu\nu}W^\mu W^\nu \geq \frac{1}{2}TW^\sigma W_\sigma, \quad (4.145)$$

donde T es la traza de $T_{\mu\nu}$.

4. Condición de energía dominante (CEDM).- Esta condición puede interpretarse como que ningún observador puede medir energías negativas y, además, el vector de flujo de energía local nunca es tipo-espacio

$$T_{\mu\nu}W^\mu W^\nu \geq 0 \quad y \quad T^{\mu\nu}W_\mu \text{ no es un vector tipo - espacio.} \quad (4.146)$$

Para el caso de un fluido perfecto $P_1 = P_2 = P_3 = P$, las condiciones de energía serán [45]

$$CEN \implies (\rho + p) \geq 0, \quad (4.147)$$

$$CED \implies \rho \geq 0 \quad y \quad (\rho + p) \geq 0, \quad (4.148)$$

$$CEF \implies (\rho + 3p) \geq 0 \quad y \quad (\rho + p) \geq 0, \quad (4.149)$$

$$CEDM \implies \rho \geq 0 \quad y \quad (\rho \pm p) \geq 0. \quad (4.150)$$

Se puede observar que las condiciones de energía son relaciones lineales entre la densidad ρ y la presión p de la materia o energía que curva el espacio-tiempo.

Capítulo 5

Universo de FLRW y solución de McVittie

La cosmología es la ciencia que estudia el Universo como un todo; estudia su origen, su naturaleza, su evolución y su fin. La evolución del universo es descrita por modelos cosmológicos, los cuales son construidos tomando como base la TRG.

Nuestro conocimiento actual del Universo está fundamentado en el Modelo Cosmológico Estándar, cuyo núcleo es la teoría del Big Bang. El Modelo Cosmológico Estándar explica la evolución del Universo desde su inicio hasta nuestros días de manera satisfactoria; asumiendo que el Universo a grandes escalas está descrito por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) espacialmente plana, la cual es isótropa y homogénea.

Dentro del contexto de los modelos cosmológicos, por el año de 1933, McVittie propuso una métrica que unifica la solución de Schwarzschild y el modelo de FLRW, abriendo así la posibilidad de analizar con dicha métrica una serie de estudios astrofísicos que toman en cuenta la evolución del universo.

5.1. El Principio Cosmológico

El principio cosmológico establece que, a escalas suficientemente grandes, el Universo es homogéneo e isotrópico [46]. La homogeneidad significa que diferentes lugares del Universo tienen las mismas propiedades físicas en promedio. Isotropía significa que no hay direcciones preferidas en el Universo. Existe evidencia observacional que verifica este principio ya que el Universo a escalas superiores a 10^9 pc se presenta como homogéneo e isotrópico [47]. No obstante, debemos tener presente que la homogeneidad no implica isotropía. Por otro lado, la isotropía sobre un lugar no garantiza la homogeneidad; sin embargo, la isotropía alrededor de dos lugares garantiza homogeneidad e isotropía en todos los lugares [48].

El principio cosmológico también nos permite definir una variable de tiempo universal, el tiempo cósmico, definido como el tiempo medido por los observadores en reposo con respecto a la materia en su vecindad. La homogeneidad del Universo asegura que los relojes de estos observadores fundamentales puedan sincronizarse con respecto a la evolución de la densidad homogénea universal. Elegimos el cero del tiempo cósmico para que coincida con el Big Bang; en este sentido, el tiempo cósmico se interpreta como la edad del Universo.

El principio cosmológico es trascendental para dar sentido al Universo, ya que nos permite dar un significado universal a nuestras mediciones locales. Además nos conduce a una elegante solución dinámica de las ecuaciones de Einstein. La principal dificultad radica en el hecho de que es imposible probar la homogeneidad del Universo sin asumir primero el principio copernicano, según el cual no existe un sitio privilegiado en el Universo. La razón es que cualquier observación solo tiene acceso a nuestro cono de luz pasado. Peor aún, no podemos movernos eficazmente en el espacio o el tiempo cósmico. Como resultado, nuestras observaciones mezclan el tiempo y el espacio de tal manera que no podemos distinguir la diferencia entre una distribución homogénea evolutiva de la materia y una no homogénea con una evolución temporal diferente [49].

Respecto a la homogeneidad, existen pruebas que muestran la distribución homogénea de galaxias a una escala superior a 140 Mpc [50]; en cuanto a la isotropía del universo, de forma similar, existen pruebas experimentales en las cuales se han considerado 4×10^4

fuentes de radio más brillantes que se encuentran aproximadamente a 200 Mpc, las cuales muestran una distribución isotópica [51]; otras observaciones relevantes son la isotropía del fondo cósmico de microondas [52] y la isotropía del fondo de rayos-x [53].

Otro principio básico de la cosmología relativista es el postulado de Weyl [54], el cual nos dice que la materia a escalas cosmológicas se comporta como un fluido perfecto, cuyas componentes se mueven a lo largo de geodésicas temporales, que no se intersectan, salvo en un punto en el pasado o en el futuro.

Con el postulado de Weyl la sincronización de relojes, en diferentes galaxias, es posible y tenemos un tiempo universal o cósmico que sirve de coordenada de referencia para el universo. Se podría decir que no se mueven las galaxias, sino que el espacio es el que se expande; es decir, gracias al postulado de Weyl se considera una clase de observadores privilegiados ya que estos estarían en reposo con respecto al fluido perfecto; y cuyo movimiento estaría determinado solamente por la evolución del universo. A estos observadores se les denomina comunmente como observadores comóviles.

5.2. Ley de Hubble

Edwin Hubble, en 1929, descubrió una correlación lineal entre la distancia r y la velocidad recesional v de las galaxias [14]; anunció su descubrimiento indicando que, en cualquier dirección que se observe, las galaxias se alejan de nosotros. Hubble había observado distintas líneas espectrales conocidas en diferentes galaxias y se había percatado de que siempre aparecían desplazadas hacia la parte roja del espectro, lo que se conoce como el corrimiento o desplazamiento al rojo del espectro (redshift). Además, había una correlación inversa entre el brillo de la galaxia y la magnitud del desplazamiento al rojo, lo que implicaba que las galaxias más lejanas se desplazan a mayor velocidad de nosotros, es decir,

$$v = H_0 r, \tag{5.1}$$

donde al término H_0 se le denomina *Parámetro de Hubble* y el subíndice indica que la medida se ha realizado hoy.

Esta relación empírica proporcionó la evidencia directa acerca de la expansión de nuestro

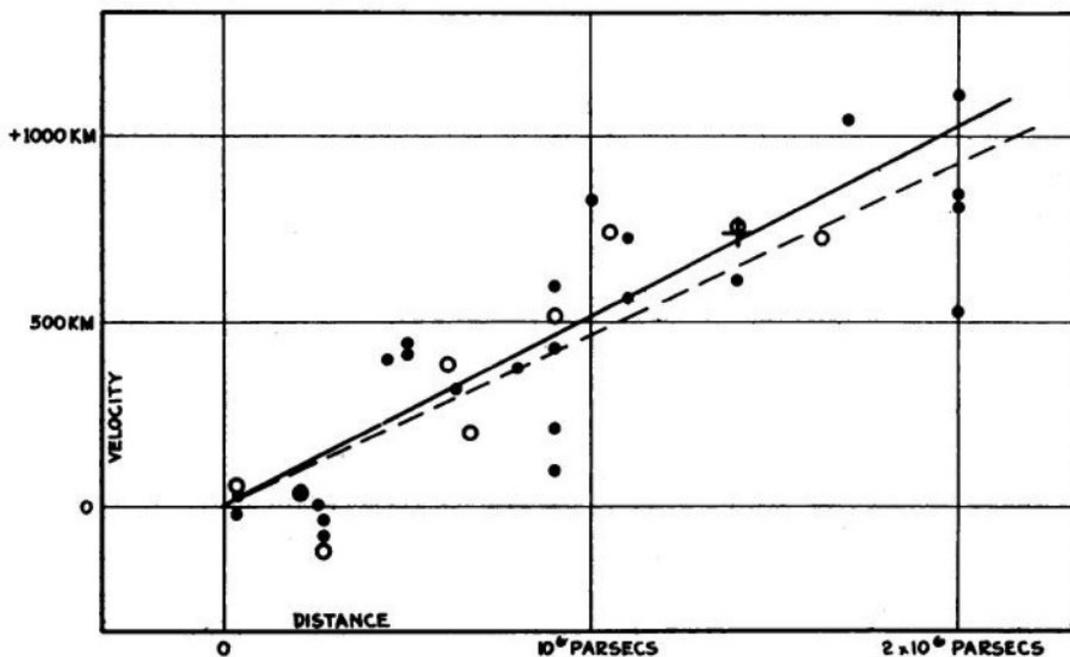


Figura 5.1: Diagrama original de Hubble, en el cual se muestra que las velocidades de recesión y las distancias de 46 objetos galácticos presentan una correlación lineal [14]

universo. El parámetro de Hubble, llamado también constante de Hubble, es una medida de la tasa de expansión actual del universo. Su valor determinado originalmente por Hubble es de $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. El tiempo necesario τ_0 para que dos galaxias, inicialmente juntas, se hayan separado hasta la distancia actual r es

$$\tau_0 = \frac{r}{v} = \frac{1}{H_0}, \quad (5.2)$$

esta cantidad recibe el nombre de tiempo de Hubble.

El valor actual del parámetro de Hubble medido hoy es

$$H_0^{-1} = 9,7778h^{-1} \times 10^9 \text{ años}, \quad (5.3)$$

donde $h = H_0/(100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$, y su valor experimental medido es [55]

$$h = 0,696 \pm 0,007. \quad (5.4)$$

En la práctica, la velocidad de recesión se puede determinar con precisión usando el redshift z de las galaxias; este parámetro experimental viene dado por

$$z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} - 1 = \left(\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} - 1 \right), \quad (5.5)$$

donde λ_{obs} y λ_{emit} se refieren a las longitudes de onda observadas y emitidas, respectivamente. En el caso de que las velocidades sean muy pequeñas, comparadas con la velocidad de la luz $v/c \ll 1$, obtenemos

$$v = cz. \quad (5.6)$$

De las ecuaciones (5.1) y (5.6), encontramos que

$$z = H_0 \frac{r}{c}. \quad (5.7)$$

Como resultado del principio cosmológico, es factible modelar la expansión del universo por medio de un factor de escala temporal $R(t)$, cuya función depende del tiempo pero no de la posición [56]. Esta función nos permite determinar distancias en el universo para cualquier instante. Si la distancia a una determinada galaxia es r_1 en el instante t_1 , en el instante t esta distancia vendrá dada por

$$r(t) = \frac{R(t)}{R(t_1)} r_1. \quad (5.8)$$

La velocidad en la que esta galaxia se aleja del observador viene expresada como

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{R(t)}{R(t_1)} r_1 \right) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t_1)} r_1 = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} r(t). \quad (5.9)$$

Para el instante actual t_0 , la expresión anterior quedará

$$v(t_0) = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} r(t_0). \quad (5.10)$$

La relación (5.7) nos representa la ley de Hubble. Haciendo uso de la ecuación (5.1), obtenemos

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}, \quad (5.11)$$

donde H_0 es el valor actual del parámetro de Hubble, es decir, la constante de Hubble.

Es habitual representar como $a(t)$ el cociente entre $R(t)$ y su valor actual $R(t_0)$, es decir,

$$a(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)}, \quad (5.12)$$

donde al término $a(t)$ se le denomina *factor de escala cósmica* o simplemente *factor de escala*, de tal modo que $a(t_0) = 1$.

Notamos que las distancias cambian directamente proporcional a $a(t)$ de la siguiente manera:

$$r(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)}x = a(t)x \quad (5.13)$$

donde a r se le conoce como *coordenadas físicas* y a x como *coordenadas comóvil*. A partir de estas definiciones, la velocidad vendrá expresada por

$$v = \frac{dr(t)}{dt} = \dot{a}(t)x = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) r. \quad (5.14)$$

En general, podemos desarrollar en serie de Taylor $a(t)$ alrededor del momento actual $t \rightarrow t_0$, obteniéndose

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots, \quad (5.15)$$

Haciendo el cambio de variable

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{H_0^2}, \quad (5.16)$$

podemos escribir $a(t)$ como

$$a(t) = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2}\ddot{a}(t_0)H_0^2(t - t_0)^2 + \dots, \quad (5.17)$$

donde hemos introducido el parámetro adimensional q_0 denominado *desaceleración cósmica*.

5.3. Universo de Friedmann - Lemaitrê - Robertson - Walker

El modelo cosmológico estándar describe la evolución de nuestro universo: la visión que tenemos actualmente de él se basa en un conjunto de soluciones de la ecuación de campo

de Einstein llamado modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), habitualmente conocido como el modelo del Big Bang. Por tal razón, la métrica de FLRW es un modelo adecuado para el estudio a gran escala de nuestro universo. Este modelo está basado en las ecuaciones de Friedmann-Lemaître y su geometría está dada por la métrica de Robertson-Walker.

5.3.1. Métrica de FLRW

Pretendemos construir un modelo esféricamente simétrico en cada punto, por tal razón, transformaremos nuestras hipótesis físicas en términos matemáticos.

Homogeneidad.- Un espacio-tiempo M es homogéneo si existe una familia uniparmétrica de hipersuperficies espaciales Σ_t foliando el espacio-tiempo M , de modo que para cada valor de t y para cada valor de puntos $p, q \in \Sigma_t$, existe siempre una isometría f de la métrica $g_{\mu\nu}$ tal que $f(p) = q$.

Isotropía.- Un espacio-tiempo es isotrópico si existe una descomposición en las curvas tipo-tiempo (observadores isotrópicos), con vectores tangentes n^a , tal que, dado un punto genérico p y dos vectores s_1 y s_2 ortogonales a n^a en p , existe siempre una isometría de $g_{\mu\nu}$ que deja p y u^a fijos pero rota s_1 en s_2 .

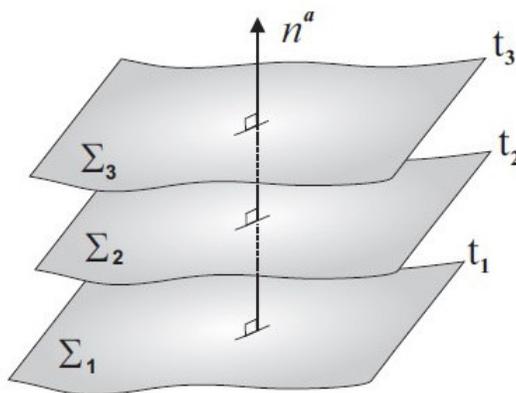


Figura 5.2: Foliación del espacio-tiempo por medio de hipersuperficies espaciales Σ_t

En un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico las hipersuperficies Σ_t son perpendiculares a n^a ; por tanto, la métrica $g_{\mu\nu}$ induce una métrica $h_{\mu\nu}$ sobre cada hipersuperficie Σ_t .

Si un universo satisface el principio cosmológico, entonces es posible demostrar que dicho universo debe tener una curvatura k constante. Eisenhart demostró en 1949 [57] que un espacio de curvatura constante con signatura n es isométrico con

1. un espacio hiperbólico n -dimensional H^n si $k < 0$.
2. un espacio euclidiano n -dimensional E^n si $k = 0$.
3. una esfera n -dimensional S^n si $k > 0$.

De lo expuesto, podemos concluir que la geometría espacial del universo solo puede ser hiperbólica, plana o esférica.

La métrica de FLRW cumple con el principio cosmológico. Para deducirla, hacemos las siguientes suposiciones:

1. El espacio-tiempo se puede foliar por hipersuperficies de tiempo constante, las cuales son homogéneas e isotrópicas.
2. Los observadores se encuentran en reposo con respecto al promedio de las galaxias.

Consideremos un espacio-tiempo como $R \times \Sigma$, donde R representa la dirección temporal y Σ una variedad tridimensional homogénea e isotrópica. Esto implica que Σ es un espacio máximamente simétrico [15]. Por tanto, una variedad con tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.18)$$

induce en una hipersuperficie espacial $\Sigma_{t=t_0}$ un tensor métrico h_{ij} donde el elemento de línea viene dado por

$$ds_{t_0}^2 = -h_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.19)$$

donde h_{ij} es función de t_0 y de las coordenadas espaciales x^k .

Para un tiempo $t_1 > t_0$ y debido a la isotropía y homogeneidad de la hipersuperficie, la métrica espacial debe tener la forma

$$ds_{t_1}^2 = -f(t_0, t_1) h_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.20)$$

esto implica que dos hipersuperficies difieren únicamente en una función temporal $f(t_0, t_1)$, ya que para que exista isotropía y homogeneidad espacial la función f no debe depender de coordenadas espaciales. Entonces para un t cualquiera, la métrica inducida en las hipersuperficies puede expresarse como

$$ds_t^2 = -R^2(t)h_{ij}(x^k)dx^i dx^j, \quad (5.21)$$

donde $R(t)$ es una función completamente temporal.

La métrica espacio-temporal vendrá dada por

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{0i}dtdx^i - R(t)h_{ij}(x^k)dx^i dx^j. \quad (5.22)$$

Debido a que la variedad se puede foliar en hipersuperficies a tiempo t constante, entonces g_{tt} no debe depender de ninguna variable: por tal razón, consideramos $g_{tt} = 1$. Por otro lado, debido a la isotropía, la evolución temporal de una hipersuperficie debe ser perpendicular a todas las direcciones, por tanto $g_{ti} = 0$; entonces la métrica espacio-temporal será

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)h_{ij}(x^k)dx^i dx^j. \quad (5.23)$$

Debido a que las hipersuperficies a t constante son isotrópicas deben poseer simetría esférica; también sabemos que las métricas de variedades Riemannianas con simetría esférica, pueden expresarse en coordenadas esféricas como

$$dl^2 = e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (5.24)$$

donde $e^{2\beta(r)}$ es un factor que determinaremos.

Por lo tanto, la métrica final tendrá la forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) (e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.25)$$

En cuanto a la métrica h_{ij} , se puede demostrar que el tensor de Riemann, para un espacio tridimensional máximamente simétrico, puede ser escrito como [15]

$$R_{ijkl}^{(3)} = K (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \quad (5.26)$$

donde K es una constante asociada a la curvatura de la hipersuperficie Σ y el índice superior (3) en el tensor de Riemann indica que él está relacionado con la métrica tridimensional espacial h_{ij} .

Para determinar el parámetro $\beta(r)$, analizaremos la ecuación (5.24); para obtener una métrica espacial homogénea e isotrópica el tensor de Ricci debe cumplir

$$R_{jl} = 2Kh_{ij}, \quad (5.27)$$

donde h_{ij} es la métrica únicamente espacial definida en (5.21).

Calculamos las componentes del tensor de Ricci, obteniéndose

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{2}{r}\partial_r\beta, \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta}(r\partial_r\beta - 1) + 1, \\ R_{\phi\phi} &= [e^{-2\beta}(r\partial_r\beta - 1) + 1]\sin^2\theta, \end{aligned} \quad (5.28)$$

usando la ecuación (5.27), obtenemos

$$\beta = -\frac{1}{2}\ln(1 - Kr^2). \quad (5.29)$$

Reemplazando, en la expresión (5.25), la métrica toma la forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right) \quad (5.30)$$

Usamos los siguientes cambios de variable para expresar el factor de escala,

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}, \quad (5.31)$$

$$r \rightarrow R_0 r, \quad (5.32)$$

$$k = \frac{K}{R_0}, \quad (5.33)$$

donde k es la curvatura del espacio, reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación (5.30) obtenemos la *métrica de FLRW*

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right), \quad (5.34)$$

donde r ahora representa la coordenada adimensional independiente del factor de escala. El parámetro k puede tomar valores de $-1, 0, +1$ donde -1 corresponde a un espacio-tiempo

abierto o hiperbólico, 0 a un espacio-tiempo plano y +1 a un espacio-tiempo cerrado o esférico.

El significado físico de estos casos se vuelve más evidente al redefinir la coordenada radial de la siguiente manera:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sen}^{-1}(r\sqrt{k}) \Leftrightarrow d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (5.35)$$

Integrando

$$r = f_k(\chi), \quad (5.36)$$

donde

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \operatorname{senh}\chi, & k = -1 \\ \chi, & k = 0, \\ \operatorname{sen}\chi, & k = 1 \end{cases} \quad (5.37)$$

Tal que

$$ds^2 = [d\chi^2 + f_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (5.38)$$

5.3.2. Ecuaciones de Friedmann-Lemaitre

Las ecuaciones de Friedmann forman un conjunto de ecuaciones que describen la expansión del universo y se basan en modelos de un universo homogéneo e isotrópico dentro del contexto de la TRG. De esta manera, la cosmología relativista se fundamenta en tres hipótesis:

1. **El principio Cosmológico**, fundamentado por el elemento de línea de Robertson-Walker dado por la ecuación (5.34).
2. **El postulado de Weyl**, que introduce el fluido perfecto. El tensor de energía momento está dado en términos de las coordenadas por la ecuación (3.7).
3. **La Teoría de la Relatividad General** como herramienta matemática. Las ecuaciones de campo vienen dadas por la ecuación (3.22).

Para determinar las componentes del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, es necesario determinar primero las componentes del tensor de Ricci que viene dadas por la ecuación (2.33), luego determinar el escalar de curvatura mediante la ecuación (2.34) para finalmente determinar

las componentes del tensor de energía-momento mediante la expresión (3.7).

Partiendo de la métrica de FLRW, dada por la ecuación (5.34), calculamos las componentes del escalar de Ricci, las cuales vienen dadas por

$$R_{tt} = \frac{-3\ddot{a}}{a}, \quad (5.39)$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (5.40)$$

$$R_{\theta\theta} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (5.41)$$

$$R_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \quad (5.42)$$

Con los datos obtenidos, calculamos el escalar de curvatura que viene dado por

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (5.43)$$

El postulado de Weyl intrduce el fluido perfecto. El tensor de energía momento esta dado por la expresión (3.7) y sus componentes no nulas vienen dadas por

$$T_{tt} = \rho, \quad (5.44)$$

$$T_{ii} = -pg_{ii}; \quad i = r, \theta, \phi. \quad (5.45)$$

Y las componentes del tensor de Einstein vienen dadas por

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2}, \\ G_{rr} &= \frac{\dot{a}^2 + k + 2a\ddot{a}}{r^2k - 1}, \\ G_{\theta\theta} &= -r^2(\dot{a}^2 + k + 2a\ddot{a}), \\ G_{\phi\phi} &= -r^2(\dot{a}^2 + k + 2a\ddot{a}) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Sustituyendo los resultados encontrados en las ecuaciones de campo de Einstein, obtenemos las componentes no nulas para $\mu = \nu$; las cuales son

$$1. G_{tt} = 8\pi T_{tt}.$$

De donde se obtiene

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} = 8\pi\rho. \quad (5.47)$$

Definiendo

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (5.48)$$

2. $G_{rr} = 8\pi T_{rr}$.

De donde se obtiene

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi p. \quad (5.49)$$

Usando la ecuación (5.47), obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(3p + \rho). \quad (5.50)$$

3. $G_{\theta\theta} = 8\pi T_{\theta\theta}$.

De donde se obtiene

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi p. \quad (5.51)$$

Expresión ya obtenida para el caso de la componente $\mu\nu = rr$.

4. $G_{\phi\phi} = 8\pi T_{\phi\phi}$.

De donde se obtiene

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi p. \quad (5.52)$$

Notamos que las componentes $G_{\theta\theta}$ y $G_{\phi\phi}$ son equivalentes a la componente G_{rr} .

Por lo tanto, las ecuaciones de Friedmann son

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (5.53)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(3p + \rho). \quad (5.54)$$

Es factible relacionar la ecuación (5.47) a un modelo newtoniano como la energía del sistema con respecto al sistema comóvil; en cambio la ecuación (5.54) se relaciona con la aceleración con respecto al sistema comóvil; a esta última ecuación también se le conoce como *ecuación de Raychauduri*.

La solución dada por la métrica de FLRW describe un universo lleno de un fluido ideal con densidad y presión dadas por las ecuaciones de Friedmann. Es una solución de las ecuaciones de campo de Einstein cuando el tensor energía-momento describe un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico.

5.4. Solución de McVittie

Como hemos notado en los capítulos anteriores, las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein se han desarrollado en dos direcciones diferentes: por un lado, el estudio de sistemas simples que permitieron la verificación y el análisis de objetos masivos aislados cuyo campo gravitacional externo es modelado por soluciones asintóticamente planas; por otro lado, modelos de universo a gran escala o modelos de forma global, que puedan predecir la evolución y el origen del universo como la métrica FLRW. Sin embargo, es interesante considerar una tercera dirección, aquella que estima mantener las dos direcciones anteriores juntas. Analizando, desde este punto de vista, cómo los sistemas locales están influenciados por la evolución a gran escala del espacio-tiempo en el que están inmersos. La métrica que cumple con estos requisitos fue encontrada por McVittie en 1933 [16] y es la solución principal a las ecuaciones de Einstein que intentan explorar los fenómenos locales y globales en una métrica unificada.

5.4.1. Solución de McVittie sin curvatura

El espacio-tiempo de McVittie es una solución esféricamente simétrica a la ecuación de Einstein con un tensor de energía-momento de un fluido perfecto, y describe el campo externo de una masa cuasi-aislada que asintóticamente tiende al universo de FLRW.

I. Hipótesis planteadas por McVittie

Para determinar una métrica que contenga a las métricas de Schwarzschild y FLRW, McVittie tomó en cuenta las siguientes consideraciones [58]:

1. En coordenadas isotrópicas en las cercanías del campo, el límite es la métrica de Schwarzschild.
2. Lejos del campo, el espacio-tiempo está descrito por el espacio-tiempo de FLRW.
3. El tensor de energía-momento tiene la forma de un fluido perfecto.
4. No debe existir términos cruzados en el tensor energía-momento.

McVittie, para encontrar una solución a las ecuaciones de Einstein, analizó el caso de un cuerpo masivo en el origen de coordenadas de nuestro sistema de referencia, considerando lo siguiente [16] :

- a. La materia contenida en el universo se distribuye con simetría esférica alrededor de la singularidad en el origen.
- b. No existe flujo de materia o radiación desde o hacia el cuerpo central.
- c. La presión es isotrópica en cualquier punto desde el origen.

De acuerdo a las condiciones anteriormente descritas, se trata de buscar una métrica general isotrópica en el espacio de coordenadas y que exprese la condición de simetría alrededor del origen. Usando coordenadas comóviles, planteamos como métrica más general el ansatz usado por McVittie

$$ds^2 = e^{\xi(r,t)} dt^2 - e^{\nu(r,t)} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (5.55)$$

las funciones ξ y ν la determinaremos usando las ecuaciones de Einstein.

Seguidamente, procedemos a calcular las componentes de la ecuación de Einstein. Por tal razón, a partir de la métrica dada por la ecuación (5.55), calculamos las componentes del tensor de Ricci, las cuales están dadas por la ecuación (2.33). El escalar de Ricci se calcula por la relación (2.34); luego teniendo presente el tensor de energía-momento que está dado por la expresión (3.7), resolveremos la ecuación de Einstein para la distribución de densidad y presión, la cual está dada por [16]

$$G_{ik} - \Lambda g_{ik} = k(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T), \quad (5.56)$$

donde G_{ik} es el tensor de Einstein; Λ es la constante cosmológica; T_{ik} el tensor de energía-momento; T la densidad propia y k una constante relacionada con la constante gravitacional $k = 8\pi G$.

Teniendo en cuenta que las variables $\xi(r, t)$ y $\nu(r, t)$ son funciones de r y t , las componentes

del tensor de Einstein vienen dadas por

$$G_{tt} = \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 - \frac{3}{4} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\} - e^{\xi-\nu} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right\} \quad (5.57)$$

$$G_{rr} = -e^{\nu-\xi} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right\} \quad (5.58)$$

$$G_{\theta\theta} = -r^2 e^{\nu-\xi} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\} + r^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{3}{2r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right\} \quad (5.59)$$

$$G_{\phi\phi} = -r^2 e^{\nu-\xi} \text{sen}^2 \theta \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\} + r^2 \text{sen}^2 \theta \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{3}{2r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right\} \quad (5.60)$$

$$G_{tr} = \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial r}. \quad (5.61)$$

Por otro lado, las componentes del tensor energía-momento son

$$T_t^t = \rho; \quad T_r^r = -p_1; \quad T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -p_2; \quad (5.62)$$

tal que

$$T = \rho - p_1 - 2p_2. \quad (5.63)$$

Reemplazando las expresiones anteriores, en la ecuación de Einstein (5.56), obtenemos

$$e^{-\xi} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 - \frac{3}{4} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\} - e^{-\nu} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right\} = -\frac{k}{2} (\rho + p_1 + 2p_2) + \Lambda, \quad (5.64)$$

$$-e^{-\xi} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\} + e^{-\nu} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right\} = -\frac{k}{2} (\rho + p_1 - 2p_2) + \Lambda, \quad (5.65)$$

$$-e^{\xi} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\} + e^{-\nu} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{3}{2r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{4} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right\} = -\frac{k}{2} (\rho - p_1) + \Lambda, \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial r} = -k T_{rt}. \quad (5.67)$$

Tomando en cuenta las consideraciones (b) y (c) acerca del flujo de materia y la isotropía de la presión, deducimos que

$$T_{rt} = 0, \quad p_1 = p_2. \quad (5.68)$$

Reemplazando las expresiones dadas por la ecuación (5.68) en las ecuaciones (5.65) y (5.66) y luego igualandolas, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \nu}{\partial r} \right] - \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \right] = 0, \quad (5.69)$$

y la ecuación (5.67) presenta la forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial r \partial t} = 0. \quad (5.70)$$

II. Solución de las ecuaciones

Partiendo de la ecuación (5.70), luego dividiendola por $d\nu/dt$, nos permite determinar la

función $\nu(r, t)$ la cual tiene la forma

$$\nu(r, t) = \int dt a(t) e^{\frac{1}{2}\xi(r,t)} + a(r), \quad (5.71)$$

donde $a(r)$ es una función independiente de t .

Considerando

$$\nu(r, t) = \beta(t) e^{\frac{1}{2}\xi(r)} + a(r) \quad (5.72)$$

donde

$$\beta(t) = \int a(t) dt. \quad (5.73)$$

Reemplazando en la ecuación (5.71) obtenemos dos posibilidades:

I. Si β es constante.

En este caso, solamente llegamos al caso estático de Schwarzschild.

II. Si β es arbitraria.

Entonces ξ es constante y $a(r)$ está dada por

$$\frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da}{dr} - \frac{1}{2} \left(\frac{da}{dr} \right) = 0, \quad (5.74)$$

siendo su solución

$$a(r) = -2 \ln \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right) \quad (5.75)$$

donde R es el radio del universo, este resultado conduce a la solución de FLRW.

Ahora resolveremos la ecuación (5.71) para la condición $a(r) = 0$. Comenzaremos expresando ξ y ν como una serie de potencias en términos de $1/r$, entonces

$$e^{\frac{1}{2}\xi(r,t)} = \gamma(r, t) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s(t) u^{m_s}(r), \quad (5.76)$$

donde las constantes a_s son funciones que dependen de t , $u(r) = \frac{1}{r}$ y m_s nos indica la potencia de $u(r)$ en orden ascendente. Sustituyendo la ecuación (5.76) en la ecuación (5.72), obtenemos

$$\nu(r, t) = \beta(t) + \sum_{s=1}^{\infty} u^{m_s}(r) \beta_s(t), \quad (5.77)$$

donde

$$\beta(t) = \int a(t) dt, \quad (5.78)$$

$$\beta_s(t) = \int a(t)a_s(t) dt. \quad (5.79)$$

Haciendo un cambio de variable $r \rightarrow u(r)$ y sustituyendo ξ en términos de $\gamma(r, t)$, podemos obtener los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial r} &= -u^2 \frac{\partial \nu}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} &= u^2 \left[2u \frac{\partial \nu}{\partial u} + u^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial u^2} \right], \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} &= -\frac{2u^2}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} &= 2u^2 \left[\frac{2u}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial u} + \frac{u^2}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2} - \frac{u^2}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial u} \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right]. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (5.69), multiplicando por el factor γ/u^3 , obtenemos

$$\gamma \left(u \frac{\partial^2 \nu}{\partial u^2} + 3 \frac{\partial \nu}{\partial u} \right) + 2u \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2} + \left(6 - 2u \frac{\partial \nu}{\partial u} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \frac{\gamma u}{2} \left(\frac{\partial \nu}{\partial u} \right)^2 = 0. \quad (5.81)$$

Para resolver la ecuación (5.81), usaremos el método de serie de potencias; sin embargo, debido a que el último término de la ecuación es de segundo grado, tendremos una serie infinita al cuadrado. Para salvar este percance procedemos como lo hizo McVittie, consideraremos que la solución se comporta de forma idéntica con los primeros términos de la serie, es decir, evaluar los términos hasta $s = 2$ y extrapolaremos su comportamiento a toda la serie.

Reemplazando la expresión (5.77) en la ecuación (5.81), se obtiene

$$\begin{aligned} &(1 + \sum_{s=1} a_s u^{m_s}) \left[(u \sum_{s=1} \beta_s m_s (m_s - 1) u^{m_s - 2}) + 3 \sum_{s=1} \beta_s m_s u^{m_s - 1} \right] \\ &+ 2u \sum_{s=1} a_s m_s (m_s - 1) u^{m_s - 2} + \left[6 - 2u \left(\sum_{s=1} \beta_s m_s u^{m_s - 1} \right) \right] \sum_{s=1} a_s m_s u^{m_s - 1} \\ &- \frac{1}{2} u \left[1 + \sum_{s=1} a_s u^{m_s} \right] \left(\sum_{s=1} \beta_s m_s u^{m_s - 1} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.82)$$

ahora expandemos las series hasta $s = 2$, obteniéndose

$$\begin{aligned}
& (1 + a_1 u^{m_1} + a_2 u^{m_2}) [u\beta_1 m_1 (m_1 - 1) u^{m_1-2} + u\beta_2 m_2 (m_2 - 1) u^{m_2-1}] \\
& + (1 + a_1 u^{m_1} + a_2 u^{m_2}) [3\beta_1 m_1 u^{m_1-1} + 3\beta_2 m_2 u^{m_2-1}] \\
& + 2ua_1 m_1 (m_1 - 1) u^{m_1-2} + 2ua_2 m_2 (m_2 - 1) u^{m_2-2} \\
& + 6 [6 - 2u (\beta_1 m_1 u^{m_1-1} + \beta_2 m_2 u^{m_2-1})] \times [a_1 m_1 u^{m_1-1} + a_2 m_2 u^{m_2-1}] \\
& - \frac{1}{2} u [1 + a_1 u^{m_1} + a_2 u^{m_2}] [\beta_1 m_1 u^{m_1-1} + \beta_2 m_2 u^{m_2-1}]^2 = 0; \tag{5.83}
\end{aligned}$$

seguidamente, agrupamos los términos correspondientes a las primeras potencias de u como u^{m_1-1} , u^{2m_1-1} y u^{m_2-1} , obteniendo la expresión

$$\begin{aligned}
& [\beta_1 m_1 (m_1 - 1) + 3\beta_1 m_1 + 2a_1 m_1 (m_1 - 1) + 6a_1 m_1] u^{m_1-1} + \\
& + [a_1 \beta_1 m_1 (m_1 - 1) + 3a_1 \beta_1 m_1 - 2a_1 \beta_1 m_1^2 - \frac{1}{2} \beta_1^2 m_1^2] u^{2m_1-1} + \\
& + [\beta_2 m_2 (m_2 - 1) + 3\beta_2 m_2 + 2a_2 m_2 (m_2 - 1) + 6a_2 m_2] u^{m_2-1} + \\
& + \mathcal{O}(u) = 0 \tag{5.84}
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}(u)$ corresponde a los términos de orden superior proporcionales a $u^{m_1+m_2-1}$, $u^{m_1+m_2-2}$, u^{2m_2-1} , u^{2m_1-1} , u^{2m_2-1} , $u^{m_1+m_2}$, u^{3m_1-1} , $u^{m_1+2m_2-1}$, $u^{2m_1+m_2}$, $u^{2m_1+m_2-1}$, u^{3m_2-1} , $u^{m_1+m_2}$. Notamos que la potencia más baja de u corresponde al término u^{m_1-1} . Al igualar su coeficiente a cero obtenemos

$$m_1(m_1 + 2)(2a_1 + \beta_1) = 0. \tag{5.85}$$

Las siguientes dos potencias de u son u^{2m_1-1} y u^{m_2-1} . Igualando exponentes, para permitir que la serie sea consistente, obtenemos

$$\begin{aligned}
2m_1 - 1 &= m_2 - 1 \\
m_2 &= 2m_1. \tag{5.86}
\end{aligned}$$

Esta condición es posible extenderla a toda la serie, cumpliéndose $m_s = sm_1$. Por otro lado, deseamos que la métrica que estamos buscando contenga la solución de Schwarzschild, entonces debe poseer un término correspondiente a $1/r$ para asegurar la singularidad de un agujero negro; esto se consigue haciendo $m_1 = 1$.

Analizando la ecuación (5.84), concluimos que todos los coeficientes de sus términos deben ser nulos. Por tal razón, el coeficiente asociado al término u^{m_1-1} debe ser nulo, es decir,

$$2a_1 + \beta_1 = 0, \quad (5.87)$$

y su derivada de primer orden igual a

$$\frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d\beta}{dt}. \quad (5.88)$$

Sumando los coeficientes de los términos u^{2m_1-1} y u^{m_2-1} correspondientes a la ecuación (5.84) obtenemos

$$a_1\beta_1 [m_1(m_1 - 1) + 3m_1] - (2a_1\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_1^2)m_1 + (\beta_2 + 2a_2)m_2(m_2 - 1) + (6a_2 + 3\beta_2)m_2 = 0,$$

teniendo presente que anteriormente se consideró $m_1 = 1$ y usando la ecuación (5.86) la expresión anterior toma la forma

$$a_1\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_1^2 + 8\beta_2 + 16a_2 = 0,$$

luego usando la relación (5.87) obtenemos

$$2a_2 + \beta_2 = \frac{a_1^2}{2}.$$

En la ecuación anterior podemos notar que el primer término es directamente proporcional a a_1^2 y el factor de proporcionalidad depende, en general, del término que se asocia en la serie de potencias.

Generalizando la expresión anterior con un factor de proporcionalidad c_2 obtenemos

$$2a_2 + \beta_2 = c_2 a_1^2. \quad (5.89)$$

Ahora derivamos la expresión anterior y obtenemos la ecuación diferencial

$$2 \frac{da_2}{dt} + \frac{2}{a_1} \frac{da_1}{dt} \beta_2 = 2c_2 a_1 \frac{da_1}{dt}, \quad (5.90)$$

usando las ecuaciones (5.87) y (5.89) se obtiene

$$a_2 = c_2 a_1^2; \quad (5.91)$$

usando la relación (5.89), encontramos el valor de β_2

$$\beta_2 = -c_2 a_1^2. \quad (5.92)$$

Generalizando para cualquier valor de a y β y para $n > 1$, se tiene

$$\begin{aligned} a_n &= c_n a_1^n, \\ \beta_n &= -\frac{2c_n}{n} a_1^n. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Haciendo el cambio de variable $a_1 = \mu(t)$, en las ecuaciones (5.76), (5.77) y teniendo en cuenta que $u(r) = 1/r$, obtenemos

$$\gamma(r, t) = 1 + \sum_s a_s u^s = 1 + \sum_s c_s a_1^s \left(\frac{1}{r}\right)^s = 1 + \sum_s c_s \left(\frac{\mu(t)}{r}\right)^s, \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \nu(r, t) &= \beta(t) + \sum_s u^s \beta_s = \beta(t) - 2 \sum_s u^s c_s \frac{a_1^s}{s} \\ &= \beta(t) - 2 \sum_s \frac{c_s}{s} \left(\frac{\mu(t)}{r}\right)^s, \end{aligned} \quad (5.95)$$

haciendo el cambio de variable $a_1 = \mu(t)$, resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}. \quad (5.96)$$

Las ecuaciones (5.94) y (5.95) pueden expresarse en la forma

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} = \frac{2}{r} (\gamma - 1) \quad (5.97)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dt} \gamma. \quad (5.98)$$

De la ecuación (5.98), aplicando la segunda derivada, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \nu(r, t)}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2(\gamma - 1)}{r} \right) = \frac{2}{r} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial r} r - (\gamma - 1) \right]. \quad (5.99)$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = 2 \ln \gamma$ y calculando sus derivadas respecto de r obtenemos

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = 2 \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r}, \quad (5.100)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = \frac{2}{\gamma} \left[\frac{-1}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} \right], \quad (5.101)$$

reemplazando las relaciones anteriores en la ecuación (5.70) luego multiplicando por el factor $\gamma r^2/2$ obtenemos

$$r^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} - r(\gamma - 1) \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \gamma(\gamma^2 - 1) = 0. \quad (5.102)$$

Para resolver la ecuación (5.102), hacemos el cambio de variable $r = e^x$, se obtiene

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \gamma(\gamma^2 - 1) = 0. \quad (5.103)$$

Una primera integral particular es

$$\frac{d\gamma}{dx} = \gamma^2 - 1, \quad (5.104)$$

haciendo $z = \gamma^2 - 1$ donde w es una función arbitraria que depende de las variables x, z y que resulta como consecuencia de la integral indefinida; entonces

$$\frac{d\gamma}{dx} = z(1 + w), \quad (5.105)$$

calculando las siguientes derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 2\sqrt{z^2 + 1}z(1 + w), \quad (5.106)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 2\sqrt{z^2 + 1}z(1 + w) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (5.107)$$

reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación (5.103), queda como

$$z \frac{dw}{dz} = -\frac{w(2w + 3)}{2(1 + w)}, \quad (5.108)$$

integrando la ecuación anterior, obtenemos

$$w^2(2w + 3) = \frac{A^3}{z^3} \quad (5.109)$$

o su equivalente

$$\left(\frac{d\gamma}{dx} - \gamma^2 + 1 \right)^2 \left(2\frac{d\gamma}{dx} + \gamma^2 - 1 \right) = A^3, \quad (5.110)$$

considerando el factor

$$2\frac{d\gamma}{dx} + \gamma^2 - 1 = 0, \quad (5.111)$$

integrando, nos reproduce

$$\gamma = \frac{1 - \frac{\mu}{2}e^{-x}}{1 + \frac{\mu}{2}e^{-x}}, \quad (5.112)$$

siendo $u/2$ una constante de integración. Revirtiendo la variable r , obtenemos

$$\gamma = \frac{1 - \frac{\mu(t)}{2r}}{1 + \frac{\mu(t)}{2r}}. \quad (5.113)$$

Reemplazando la ecuación (5.113) en la ecuación (5.98) se obtiene

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{2}{r} \left(\frac{\frac{\mu(t)}{2r}}{1 + \frac{\mu(t)}{2r}} \right), \quad (5.114)$$

integrando, obtenemos

$$\nu(r, t) = \beta(t) + 4 \ln \left(1 + \frac{\mu(t)}{2r} \right). \quad (5.115)$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación (5.76), obtenemos

$$e^{\xi(r,t)} = \frac{\left(1 - \frac{\mu(t)}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu(t)}{2r}\right)^2}. \quad (5.116)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.115) y (5.116) en la ecuación (5.55), obtenemos

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{\mu(t)}{2r}}{1 + \frac{\mu(t)}{2r}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\mu(t)}{2r} \right)^4 e^{\beta(t)} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (5.117)$$

Sin embargo, debemos tener presente que la métrica (5.117) debe reducirse a la métrica de Schwarzschild y FLRW; por tanto, para ser compatible con esos modelos consideramos

$$e^{\beta} = a^2(t), \quad (5.118)$$

con esta condición la métrica de McVittie resulta

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{\mu(t)}{2r}}{1 + \frac{\mu(t)}{2r}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\mu(t)}{2r} \right)^4 a^2(t) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (5.119)$$

considerando los límites respectivos:

1. Cuando $a(t) \rightarrow cte.$ y $\mu(t) \rightarrow m.$

La métrica se reduce a la métrica de Schwarzschild compatible con la ecuación (4.17).

2. Cuando $\mu(t) \rightarrow 0.$

La métrica se reduce a la métrica de FLRW compatible con la ecuación (5.34).

Podemos reescribir la ecuación (5.119) en función explícita de la masa. Integrando la ecuación (5.96), encontramos que

$$\beta = -2\ln\mu + q_1, \quad (5.120)$$

$$e^\beta = \frac{q_2^2}{\mu^2}, \quad (5.121)$$

donde q_1 y q_2 son constantes.

De acuerdo a la ecuación (5.118), obtenemos

$$\mu(t) = \frac{q_2}{a(t)}. \quad (5.122)$$

Identificando a q_2 como la masa, es decir, $q_2 = m$ se tiene

$$\mu(t) = \frac{m}{a(t)}, \quad (5.123)$$

reemplazando en la ecuación (5.119), obtenemos

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{m}{2ra(t)}}{1 + \frac{m}{2ra(t)}} \right)^2 dt^2 - a^2(t) \left(1 + \frac{m}{2ra(t)} \right)^4 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (5.124)$$

5.4.2. Solución de McVittie con curvatura

El resultado obtenido en (5.119) corresponde para el caso sin curvatura, donde se restringió $\nu(r, t)$ con $a(r) = 0$. Sin embargo, la solución (5.119) se puede generalizar teniendo en cuenta la curvatura del espacio-tiempo, es decir, para el caso $a(r) \neq 0$. Para Generalizar la relación (5.115) adicionamos a $\nu(r, t)$ el término $a(r)$. Por tanto, la función $\nu(r, t)$ tomará la forma

$$\nu(r, t) = \beta + 4 \ln(1 + y(r, t)) + a(r), \quad (5.125)$$

donde $w(r)$ está dada por la ecuación (5.75) y $\mu(t)/2r \rightarrow y(r, t)$. Con estas condiciones, generalizamos la solución obtenida en (5.113) de la forma

$$e^{\frac{1}{2}\xi(r,t)} = \gamma(r, t) = \frac{1 - y(r, t)}{1 + y(r, t)}, \quad (5.126)$$

reemplazando en (5.81), se obtiene

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} - \frac{3}{y} \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial y}{\partial r} \left(\frac{1}{r} + \frac{dw}{dr} \right) = 0. \quad (5.127)$$

Integramos sobre r a la ecuación anterior y teniendo presente que $w(r) = -2\ln(1 + \frac{r^2}{4R^2})$, obtenemos

$$\frac{1}{y^3} \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right) = \frac{B(t)r}{\left(1 + \frac{kr^2}{4R^2}\right)^2}, \quad (5.128)$$

donde R es el radio del universo y $k = +1, 0, -1$ define la curvatura intrínseca del subespacio tridimensional con $t=\text{constante}$. Integrando la ecuación anterior, obtenemos

$$\frac{1}{y} = C(t) + \frac{4R^2 B(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4R^2}\right)}, \quad (5.129)$$

donde $B(t)$ y $C(t)$ son constantes de integración dependientes del tiempo. Para determinar estas constantes, necesitamos calcular previamente $y(r, t)$ tal que cuando la proporción r/R sea despreciable debido a que ($r/R \ll 1$) podamos recuperar el valor de

$$y(r, t) = \frac{\mu(t)}{2r}. \quad (5.130)$$

Por lo tanto, conseguimos esta solución considerando

$$C(t) = \frac{16R^2}{\mu^2(t)}, \quad (5.131)$$

$$B(t) = \frac{-4}{\mu^2(t)}, \quad (5.132)$$

entonces la ecuación (5.129) quedará de la forma

$$y(r, t) = \frac{\mu(t)}{2r} \left(1 + \frac{kr^2}{4R^2} \right). \quad (5.133)$$

Reemplazamos en la ecuación (5.126), despejamos $\xi(r, t)$ y reemplazamos en la ecuación (5.125), obteniéndose

$$\nu(r, t) = \beta(t) + 4 \ln \left[1 + \frac{\mu(t)}{2r} \left(1 + \frac{kr^2}{4R^2} \right)^{1/2} \right] - 2 \ln \left(1 + \frac{kr^2}{4R^2} \right), \quad (5.134)$$

$$\xi(r, t) = 2 \ln \left[\frac{1 - \frac{\mu(t)}{2r} \left(1 + \frac{kr^2}{4R^2}\right)^{1/2}}{1 + \frac{\mu(t)}{2r} \left(1 + \frac{kr^2}{4R^2}\right)^{1/2}} \right]. \quad (5.135)$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la ecuación (5.55), obtenemos la ecuación

$$ds^2 = \left[\frac{1 - \frac{\mu(t)}{2r} \left(1 + \frac{kr^2}{4R^2}\right)^{1/2}}{1 + \frac{\mu(t)}{2r} \left(1 + \frac{kr^2}{4R^2}\right)^{1/2}} \right]^2 dt^2 - \frac{\left[1 + \frac{\mu(t)}{2r} \left(1 + \frac{kr^2}{4R^2}\right)^{1/2}\right]^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4R^2}\right)^2} e^{\beta(t)} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (5.136)$$

donde el parámetro k puede tomar valores de $-1, 0, +1$ para un espacio-tiempo hiperbólico, plano y esférico respectivamente [59]. La expresión (5.136) es una generalización de la métrica de McVittie y es válida para cualquier curvatura. Sin embargo, cabe indicar que es posible otro tipo de generalización para la métrica de McVittie, considerando una masa variable en el tiempo $m = m(t)$. Así escribimos la métrica (5.124) como [60]

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{m(t)}{2ra(t)}}{1 + \frac{m(t)}{2ra(t)}} \right)^2 dt^2 - a^2(t) \left(1 + \frac{m(t)}{2ra(t)} \right)^4 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (5.137)$$

Analizando la métrica anterior, notamos al igual que las métrica (5.119), esta se reduce a la métrica de Schwarzschild cuando se fijan: $k = 0$, $a(t)$ constante y a la métrica FLRW ordinaria en el límite $m(t) \rightarrow 0$.

Capítulo 6

Solución de McVittie con partícula cargada y constante cosmológica negativa

La métrica de McVittie [16] es la primera solución a las ecuaciones de Einstein con el objetivo de describir una partícula esféricamente simétrica en un universo en expansión. El estudio de la métrica de McVittie con carga es importante porque nos permite estudiar el comportamiento del agujero negro cargado en un universo en expansión [80]. Por otro lado, estudiar la solución de McVittie con constante cosmológica negativa ($\Lambda < 0$) es trascendente ya que la correspondencia entre el espacio Anti-de Sitter (AdS) y la teoría conforme (CFT), conocida como correspondencia AdS/CFT, nos indica que para el caso $\Lambda < 0$ su análisis es digno de consideración. El espacio Anti-de Sitter corresponde a una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa [83], y es una teoría clásica de la gravedad; mientras que la teoría conforme es una teoría cuántica. Esta correspondencia entre una teoría clásica de la gravedad y una cuántica es de mucha importancia en Física Teórica ya que puede ser una posibilidad para cuantizar la gravedad. La dualidad AdS/CFT [61] propone la equivalencia entre ciertas teorías de campos conforme (CFT) en d dimensiones y el estudio de teorías de gravedad en espacios Anti-de Sitter (AdS) en $d + 1$ dimensiones. En particular, relaciona el límite fuertemente acoplado de

la teoría de campos con el límite clásico de la teoría de super-gravedad y viceversa. En este capítulo nos proponemos determinar una métrica de McVittie cargada que incluya el término cosmológico y luego analizar esta solución con constante cosmológica negativa.

6.1. Métrica de McVittie con carga

La solución de McVitte, desde que fue propuesta en 1933, ha sido sujeta a muchos estudios [62]. La versión cargada de la métrica de McVittie fue inicialmente propuesta en 1968 por Shah y Vaidya [63], luego fue generalizada en 1979 por Mashhoon y Partovi [64]. Sin embargo, la solución cargada de McVittie fue redescubierta por Gao y Zhang [65], quienes también generalizaron dicha solución a dimensiones más altas.

6.1.1. Ecuaciones de campo

Teniendo en cuenta coordenadas comoving, consideramos un elemento de línea que presente simetría esférica de la forma

$$ds^2 = -e^{\alpha(r,t)} dt^2 + e^{\beta(r,t)} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (6.1)$$

Usando la métrica (6.1) y las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales están dadas por la ecuación (3.22), calculamos las componentes no nulas, las cuales son

$$8\pi T_t^t = e^{-\beta} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \beta}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) - \frac{3}{4} e^{-\alpha} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} 8\pi T_r^r &= e^{-\beta} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \beta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \right) \\ &- e^{-\alpha} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} 8\pi T_\theta^\theta &= 8\pi T_\phi^\phi = e^{-\beta} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \right) \\ &- e^{-\alpha} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$8\pi T_r^t = e^{-\alpha} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial t \partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right), \quad (6.5)$$

$$8\pi T_t^r = -e^{-\beta} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial t \partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right). \quad (6.6)$$

Para el espacio alrededor de la partícula cargada que contiene un fluido perfecto con campo electromagnético, el tensor de energía-momento T_i^k toma la misma forma

$$T_i^k = M_i^k + E_i^k, \quad (6.7)$$

donde M_i^k es el tensor de energía-momento asociado a materia y E_i^k es el tensor de energía momento asociado al campo electromagnético, cuyas expresiones están dadas por

$$M_i^k = (p + \rho)v_i v^k - p\delta_i^k, \quad (6.8)$$

con $v^i = 0$, $v_i v^i = 1$ y

$$4\pi E_i^k = -F^{ka} F_{ia} + \frac{1}{4} \delta_i^k F^{ab} F_{ab}, \quad (6.9)$$

donde F_{ik} satisface las ecuaciones de Maxwell

$$F_{[ij;k]} = 0 \quad (6.10)$$

$$F_{;k}^{ik} = 4\pi J^i. \quad (6.11)$$

Para un campo eléctrico esféricamente simétrico, consideramos a la componente F_{rt} como la única componente no nula.

Considerando que el espacio, alrededor de la partícula cargada, está lleno de un fluido perfecto cargado, entonces en coordenadas comoving el vector densidad de corriente J^i tendrá como componentes $(0, 0, 0, J^t)$. De la ecuación (6.11), tenemos

$$F_{;t}^{rt} = 4\pi J^r = 0, \quad (6.12)$$

integrando, obtenemos

$$F_{rt} = f(r)e^{(\alpha-\beta)/2}. \quad (6.13)$$

donde $f(r)$ es una función arbitraria.

Si, además, el fluido no está cargado, tendremos que J^t es igual a cero, entonces

$$F_{;r}^{tr} = 4\pi J^t = 0, \quad (6.14)$$

o en un su forma equivalente

$$\partial_r [\sqrt{-g}F^{tr}] = 4\pi\sqrt{-g}J^t = 0,$$

donde $g = -e^{\alpha+3\beta}r^4 \text{sen}^2\theta$.

Integrando la expresión anterior, se tiene

$$F_{rt} = \frac{\psi(t)}{r^2} e^{(\alpha-\beta)/2}, \quad (6.15)$$

donde $\psi(t)$ es una función a determinar. de las ecuaciones (6.13) y (6.15), tenemos

$$f(r) = \frac{Q}{r^2}, \quad (6.16)$$

donde $\psi(t) = Q$, Q es una constante arbitraria.

Poniendo el tensor T_i^k en términos de g_{ik} y reemplazando en las expresiones (6.2) hasta (6.6), obtenemos

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial t\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial\beta}{\partial t} \frac{\partial\alpha}{\partial r} = 0, \quad (6.17)$$

$$e^\beta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2\beta}{\partial r^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial\beta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial\beta}{\partial r} \frac{\partial\alpha}{\partial r} \right) - \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial\beta}{\partial r} + \frac{\partial\alpha}{\partial r} \right) = 2f^2(r). \quad (6.18)$$

6.1.2. Solución de las ecuaciones de campo

Resolviendo la ecuación (6.17), tenemos

$$e^{\alpha/2} = \phi(t) \frac{\partial\beta}{\partial t}, \quad (6.19)$$

donde $\phi(t)$ es una función por determinar.

Reemplazando (6.19) en (6.18), obtenemos

$$e^\beta \left[\frac{\frac{\partial^3\beta}{\partial t\partial^2 r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\beta}{\partial t\partial r} - \frac{\partial^2\beta}{\partial t\partial r} \frac{\partial\beta}{\partial r}}{\frac{\partial\beta}{\partial t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\beta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\beta}{\partial r} \right)^2 \right) \right] = 2f^2(r). \quad (6.20)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\chi(r, t) = \frac{\partial^2\beta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\beta}{\partial r} \right)^2. \quad (6.21)$$

Diferenciando respecto al tiempo la expresión anterior y reemplazando en (6.20), obtenemos

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial t} \chi = 2f^2(r) \frac{\partial \beta}{\partial t} e^{-\beta}. \quad (6.22)$$

Integrando esta ecuación y usando la relación (6.21), obtenemos

$$e^{\beta/2} \left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial r} \right)^2 \right] = -4f^2(r) e^{-\beta/2} + F(r), \quad (6.23)$$

donde $F(r)$ es una función por determinar.

Si consideramos $f(r) = 0$ en la ecuación (6.23), obtenemos la solución de McVittie [16] que describe el campo gravitacional de una partícula de masa sin carga inmersa en un universo en expansión. En este caso, la función arbitraria $F(r)$ toma los siguientes valores

$$F(r) = \begin{cases} \frac{6m}{r^3} & \text{cuando } k = 0. \\ \frac{6m}{r^3(1+kr^2)^{5/2}} & \text{cuando } k \neq 0. \end{cases} \quad (6.24)$$

donde μ es una constante y k es la curvatura del espacio tridimensional del universo homogéneo. Haciendo los siguientes cambios de variable

$$e^{\beta/2} = (1+kr^2)y, \quad y = y(x,t), \quad x = \frac{\sqrt{1+kr^2}}{r}, \quad (6.25)$$

y reemplazando los cambios de variable anteriores en la ecuación (6.23), obtenemos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{dy}{dx} = 2f^2 x^6 (x^2 - k)^{-5} y^3 - \frac{1}{2} F x^4 (x^2 - k)^{-4} y^2. \quad (6.26)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. Al resolver esta ecuación, suelen surgir singularidades removibles que pueden dificultar la solución. Para evitar tal dificultad y obtener la singularidad en $r = 0$ solamente, elegimos los siguientes pares de valores para las dos funciones arbitrarias f y F .

Caso 1.

$$\begin{aligned} f &= Q(x^2 - k) = \frac{Q}{r^2}, \\ F &= 6m(x^2 - k)^{3/2} = \frac{6m}{r^2}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Caso 2.

$$\begin{aligned} f &= \frac{Q(x^2 - k)^{5/2}}{x^3} = \frac{Q}{r^2(1 + kr^2)^{5/2}} \\ F &= 6m \frac{(x^2 - k)^4}{x^5} = \frac{6m}{r^3(1 + kr^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Estos dos pares de los valores de f y F , dados en los dos casos anteriores, son las condiciones necesarias para obtener la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden libre de singularidades removibles [66]. Para nuestro propósito, analizaremos el caso 1.

Sustituyendo las ecuaciones dadas en (6.27) en la ecuación diferencial (6.26), obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{dy}{dx} = 2Q^2x^6(x^2 - k)^{-3}y^3 - 3mx^4(x^2 - k)^{-5/2}y^2. \quad (6.29)$$

No es posible encontrar solución a esta ecuación diferencial, a menos que consideremos $k = 0$. Haciendo $k = 0$ en (6.29), obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{dy}{dx} = 2Q^2y^3 - \frac{3m}{x}y^2, \quad (6.30)$$

Haciendo el cambio de variables

$$y = x^{-1}z, \quad x = e^\sigma, \quad (6.31)$$

reemplazando (6.31) en la ecuación (6.30), luego integrando, se obtiene

$$\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 = z^2 - 2mz^3 + Q^2z^4 + c(t), \quad (6.32)$$

donde $c(t)$ es una función arbitraria. Para nuestro propósito, consideramos $c(t) = 0$ y obtenemos

$$\frac{dz}{z\sqrt{1 - 2mz + Q^2z^2}} = \pm d\sigma. \quad (6.33)$$

Haciendo $\frac{1}{z} = u(\sigma, t)$. Reemplazando en la ecuación (6.33) e integrando obtenemos una expresión para u de la forma

$$u = m + e^{\pm\sigma + \lambda/2} + \frac{m^2 - Q^2}{4} e^{\pm\sigma - \lambda/2}, \quad (6.34)$$

donde $\lambda = \lambda(t)$ es una función a determinar. Reponiendo las variables $y = e^{-\beta/2}$ y r , tenemos

$$e^{\beta/2} = e^{\lambda/2} \left(1 + \frac{m}{r} e^{-\lambda/2} + \frac{m^2 - Q^2}{4r^2} e^{-\lambda} \right), \quad (6.35)$$

en la expresión anterior consideramos $e^\lambda = a^2(t)$ para que nuestros resultados sean compatibles con los encontrados en el capítulo anterior, entonces $e^{-\lambda/2} = 1/a(t)$. Por tanto, la ecuación (6.35) toma la forma

$$e^\beta = a^2(t) \left[1 + \frac{m}{ar} + \frac{m^2 - Q^2}{4a^2r^2} \right]^2 = a^2(t) \left[\left(1 + \frac{m}{2ar} \right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2} \right]^2 \quad (6.36)$$

De la ecuación (6.19), usando la relación dada por (6.36), obtenemos

$$e^\alpha = \frac{\left[1 - \frac{(m^2 - Q^2)}{4a^2r^2} \right]^2}{\left[\left(1 + \frac{m}{2ar} \right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2} \right]^2}, \quad (6.37)$$

donde hemos elegido la función $\phi(t)$ de la ecuación (6.19) de manera que $\phi^2(t)(d\lambda/dt)^2 = 1$. Reemplazando en la ecuación (6.1), obtenemos la métrica de McVittie con carga, la cual presenta la forma

$$ds^2 = - \frac{\left[1 - \frac{(m^2 - Q^2)}{4a^2r^2} \right]^2}{\left[\left(1 + \frac{m}{2ar} \right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2} \right]^2} dt^2 + a^2(t) \left[\left(1 + \frac{m}{2ar} \right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2} \right]^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (6.38)$$

6.2. Métrica de McVittie cargada y término de Hubble

En esta sección, introduciremos el término de Hubble H en la métrica de McVittie.

Haciendo los siguientes cambios de variable

$$R = ar \left[\left(1 + \frac{m}{2ar} \right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2} \right]^2 = m + ar + \frac{m^2 - Q^2}{4ar}, \quad (6.39)$$

$$2ar = R - m + \sqrt{R^2 + Q^2 - 2mR} = f(R), \quad (6.40)$$

donde R es conocido como el radio areal [62].

Seguidamente, analizaremos cada uno de los términos de la métrica de McVittie cargada; y mediante una serie de artificios matemáticos buscaremos la posibilidad de introducir el término de Hubble

$$H = \frac{\dot{a}}{a},$$

donde $a = a(t)$ es el parámetro de escala y el punto sobre a representa la diferenciación respecto del tiempo.

1. Analizando el término temporal de la métrica de McVittie cargada dada por (6.38)

$$\begin{aligned} \frac{\left[1 - \frac{(m^2 - Q^2)}{4a^2r^2}\right]^2}{\left[\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2} &= \frac{\left[ar - \frac{(m^2 - Q^2)}{4ar}\right]^2}{\left[\left(\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right) ar\right]^2} \\ &= \frac{\left[\frac{f(R)}{2} - (R - m - ar)\right]^2}{R^2} \\ &= \frac{(m - R + f(R))^2}{R^2} \end{aligned} \quad (6.41)$$

2. Analizando el término

$$\begin{aligned} a^2 \left[\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2 dr^2 &= \left\{ar \left[\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2\right\}^2 \left(\frac{dr}{r}\right)^2 \\ &= R^2 \left(\frac{dr}{r}\right)^2. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Para calcular dr/r , debemos calcular primero

$$dr = \frac{\partial R}{\partial t} dt + \frac{\partial R}{\partial r} dr. \quad (6.43)$$

2.1 Calculando $\partial R/\partial t$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(m + ar + \frac{m^2 - Q^2}{4ar}\right) = \dot{a}r - \frac{m^2 - Q^2}{4ar} H, \\ &= \left(ar - \frac{m^2 - Q^2}{4ar}\right) H = (2ar - R + m) H, \\ &= (m + f(R) - R) H. \end{aligned} \quad (6.44)$$

2.2 Calculando $\partial R/\partial r$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(m + ar + \frac{m^2 - Q^2}{4ar} \right) = a - \frac{1}{r} (R - m - ar), \\ &= \frac{2ar - R + m}{r}, \\ &= \frac{f(R) - R + m}{r}.\end{aligned}\tag{6.45}$$

Remplazando (6.44) y (6.45) en (6.43), obtenemos

$$dR = (m + f(R) - R) H dt + \frac{f(R) - R + m}{r} dr\tag{6.46}$$

entonces

$$\frac{dr}{r} = \frac{dR - (m + f(R) - R) H dt}{f(R) - R + m}.\tag{6.47}$$

Reemplazando (6.39) y (6.41) en la métrica (6.38) tenemos

$$ds^2 = \frac{(m - R + f(R))^2}{R^2} dt^2 + \frac{R^2}{r^2} (dr^2 + r^2 d\Omega^2),\tag{6.48}$$

reemplazando la expresión (6.47) en el segundo término de la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}ds^2 = & - \left[\frac{(m - R - f(R))^2}{R^2} - R^2 H^2 \right] dt^2 + \frac{R^2}{(f(R) - R + m)^2} dR^2 \\ & - \left(\frac{2R^2 H}{f(R) - R + m} \right) dR dt + R^2 d\Omega^2.\end{aligned}\tag{6.49}$$

La expresión anterior resulta ser la métrica de McVittie cargada y expresada en función del parámetro de Hubble; la carga se encuentra inmersa en la función $f(R)$. La expresión dada en la ecuación (6.49) constituye uno de los resultados importantes que hemos obtenido.

6.3. Métrica de McVittie cargada y $\Lambda < 0$

En las secciones anteriores, hemos determinado la Métrica de McVittie cargada y su representación en función del término de Hubble. En esta sección, analizaremos dicha solución de McVittie con término cosmológico negativo.

Considerando la métrica (6.38), determinamos el escalar de Ricci R_a^a , el cual viene dado

por [62]

$$R_a^a = 12H^2(t) + \frac{6\dot{H}(t)}{\sqrt{1 - \frac{2m}{R} + \frac{Q^2}{R^2}}}, \quad (6.50)$$

donde R es el radio arrial dado por la ecuación (6.39).

En la expresión anterior podemos notar posibles singularidades cuando $H(t)$ diverge, y en la región del espacio-tiempo donde

$$h(R) = 1 - \frac{2m}{R} + \frac{Q^2}{R^2} = 0, \quad (6.51)$$

es decir, para

$$R = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}, \quad (6.52)$$

la cual, en términos de la coordenada original r , sería

$$ra(t) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - Q^2}. \quad (6.53)$$

En el caso ($m^2 < Q^2$), la función $h(R)$ no tiene raíces reales y la singularidad está en $R = 0$, es decir cuando $ra(t) = -(m \pm Q)/2$.

Para el caso particular, donde $m = Q = 0$ la ecuación (6.50) que corresponde al escalar de Ricci, se reduce al escalar de Ricci correspondiente al universo plano de FLRW.

Ahora procederemos a hacer un análisis de nuestra métrica considerando una constante cosmológica negativa. Empezaremos considerando el caso de un fluido perfecto con densidad ρ y presión isotrópica p , la condición de energía fuerte está dada por la ecuación (4.148), la cual presenta la forma

$$\rho + 3p \geq 0. \quad (6.54)$$

Para un universo de FLRW con factor de escala $a(t)$, respecto a la ecuación (6.54), las ecuaciones de Einstein con $\Lambda < 0$ nos permiten obtener [68].

$$3\frac{\ddot{a}}{a} \leq \Lambda < 0, \quad (6.55)$$

teniendo presente que

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \quad (6.56)$$

la ecuación (6.55) se puede escribir como

$$3(\dot{H} + H^2) \leq \Lambda < 0, \quad (6.57)$$

de donde podemos deducir que

$$\dot{H} < 0, \quad (6.58)$$

Nuestro interés es ahora expresar la densidad ρ y la presión isotrópica en función de H ; para ello, determinamos las ecuaciones de Einstein con $\Lambda < 0$.

Las componentes del tensor de energía-momento vienen dadas por

$$T_t^t = -\rho + \frac{1}{8\pi} F^{rt} F_{rt}, \quad (6.59)$$

$$T_r^r = p + \frac{1}{8\pi} F^{rt} F_{rt}, \quad (6.60)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = p - \frac{1}{8\pi} F^{rt} F_{rt}. \quad (6.61)$$

Por otro lado, las componentes del tensor de Einstein están expresadas como

$$G_t^t = -\frac{Q^2}{R^4} + 3H^2, \quad (6.62)$$

$$G_r^r = \frac{Q^2}{R^4} + 3H^2 + \frac{2\dot{H}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{2m}{R}}}, \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} G_\theta^\theta &= G_\phi^\phi \\ &= -\frac{Q^2}{R^4} + 3H^2 + \frac{2\dot{H}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{2m}{R}}}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein vienen dadas por

$$8\pi\rho - F^{rt} F_{rt} = -\frac{Q^2}{R^4} + 3H^2 - \Lambda, \quad (6.65)$$

$$-8\pi p - F^{rt} F_{rt} = \frac{Q^2}{R^4} + 3H^2 + \frac{2\dot{H}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{2m}{R}}} - \Lambda, \quad (6.66)$$

$$-8\pi p + F^{rt} F_{rt} = -\frac{Q^2}{R^4} + 3H^2 + \frac{2\dot{H}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{2m}{R}}} - \Lambda. \quad (6.67)$$

De las ecuaciones (6.66) y (6.67), se obtiene

$$F^{rt}F_{rt} = -\frac{Q^2}{R^4}. \quad (6.68)$$

Reformulando las ecuaciones de Einstein quedan

$$8\pi\rho = -\frac{2Q^2}{R^4} + 3H^2 - \Lambda, \quad (6.69)$$

$$-8\pi p = 3H^2 + \frac{2\dot{H}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{2m}{R}}} - \Lambda. \quad (6.70)$$

Tomando en consideración la ecuación (6.58), podemos indicar que estos modelos cosmológicos mantienen características generales [68], que son

- I. $\rho \geq 0$,
- II. $\rho + p \geq 0$,

Por tal razón, las condiciones de energía nula y débil, dadas por las ecuaciones (4.143) y (4.144), siempre se cumplen.

Ahora reemplazaremos las ecuaciones de Einstein dadas por (6.69) y (6.70) en la condición de energía fuerte dada por la expresión (6.54), de donde tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{2Q^2}{R^4} - 6H^2 - \frac{6\dot{H}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{2m}{R}}} + 2\Lambda &\geq 0 \\ \frac{Q^2}{R^4} + 3H^2 + \frac{3\dot{H}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{2m}{R}}} &\leq \Lambda < 0, \end{aligned} \quad (6.71)$$

o, en su forma equivalente, sería

$$\frac{Q^2}{3R^4} + H^2 + \frac{\dot{H}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{2m}{R}}} \leq \frac{\Lambda}{3} < 0. \quad (6.72)$$

De acuerdo a la ecuación (4.149), la condición de energía dominante establece, para la presión, el siguiente rango

$$-\rho \leq p \leq \rho. \quad (6.73)$$

Analizando las ecuaciones (6.58), (6.69), (6.70) y (6.73), se deduce de la ecuación (6.73) que la desigualdad $-\rho \leq p$, generalmente, se cumple; en cambio la desigualdad $p \leq \rho$ requiere la siguiente restricción

$$-\frac{\dot{H}}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{2m}{R}}} + \frac{Q^2}{R^4} < 3H^2 - \Lambda. \quad (6.74)$$

Ahora analizaremos con más detalle una forma específica para la determinación de H . De acuerdo con [68] estamos interesados en modelos donde $a(0) = a(t_f) = 0$, $\dot{a}(t_0) = 0$, siendo $0 < t_0 < t_f$. Por otro lado, la función H debe cumplir que: $H(0 < t < t_0) > 0$, $H(t_0) = 0$ y $H(t_0 < t < t_f) < 0$.

Definimos [68] la siguiente relación

$$H_0^2 \equiv -\frac{\Lambda}{3}, \quad T \equiv 3H_0 t, \quad (6.75)$$

tomamos en consideración que $H_0 > 0$.

Para nuestro análisis, tomando en cuenta las observaciones anteriores, consideramos el factor de escala $a(t)$, un universo sin curvatura con $\Lambda < 0$ y usando las ecuaciones (20) y (25) del paper de P.Landry, M. Abdelqader y K.Lake [68] se deduce que

$$H^2 = \frac{8\pi\rho + \Lambda}{3} = \frac{H_0^2 \text{sen}^2 T}{(1 - \text{cos} T)^2}.$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación (6.69), se obtiene

$$H = \sqrt{\frac{H_0^2 \text{sen}^2 T}{(1 - \text{Cos} T)^2} + \frac{2Q^2}{3R^4}}. \quad (6.76)$$

Derivando, obtenemos

$$\dot{H} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{H_0^2 \text{sen}^2 T}{(1 - \text{Cos} T)^2} + \frac{2Q^2}{3R^4}}} \frac{3H_0^3}{(1 - \text{Cos} T)^2} \text{sen} T. \quad (6.77)$$

Cabe indicar que estas expresiones son mucho más generales que las calculadas por P.Landry, M. Abdelqader y K.Lake [68] para el caso de la métrica de McVittie con constante cosmologica negativa, las cuales presentan la forma

$$H = \frac{H_0 \text{sen}(T)}{1 - \text{Cos}(T)}, \quad \dot{H} = -\frac{3H_0^2}{1 - \text{cos}(T)}. \quad (6.78)$$

De nuestras ecuaciones anteriores, podemos notar que la característica dominante en nuestro análisis es el desarrollo de una gran implosión; es decir, un gran colapso más comúnmente conocido como un Big Crunch; donde esta gran implosión ocurrirá con $\Lambda < 0$ siempre que se mantenga la condición de energía fuerte descrita por la ecuación (4.149).

Capítulo 7

Agujeros de gusano en el universo de McVittie

En este capítulo, consideraremos como objeto de investigación el agujero de gusano transitable de Morris-Thorne, al cual modificaremos considerando el término de forma $b(r) = b_0^m/r^{m-1}$ con el fin de obtener un modelo de agujero de gusano transitable, inmerso en un universo de FLRW como caso particular del universo de McVittie, el cual será comparado con el modelo de agujero de gusano en el universo de FLRW propuesto por Sung-Won Kim [72] con el objetivo de analizar la equivalencia entre dichos modelos. Al final del capítulo, analizaremos el caso de un agujero de gusano más general usando la métrica de McVittie; donde el agujero de gusano está modelado por una delgada capa esférica que acrecenta el fluido de quinta esencia.

El espacio-tiempo de McVittie es una solución esféricamente simétrica a la ecuación de Einstein con un tensor de energía-momento de un fluido perfecto, y describe el campo externo de una masa cuasi-aislada que asintóticamente tiende al universo de FLRW.

7.1. Agujeros de Gusano Atravesable en el Universo de FLRW

Para desarrollar este tema, aplicamos el método descrito en el paper de Chang Shuang [71] y el paper de Mirza-Eshaghi-Dehdashti [82] con el fin de obtener una nueva solución para la evolución del agujero de gusano. Consideramos la métrica, para un agujero de gusano esféricamente simétrico y estático, descrita por M. Morris y K. Thorne [44], la cual presenta la forma

$$ds^2 = -e^{-2\phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (7.1)$$

donde $\phi(r)$ es la función de desplazamiento al rojo y $b(r)$ es la función de forma.

Para nuestro análisis, consideramos un modelo donde la función desplazamiento al rojo y la función de forma están dadas por

$$\phi(r) = 0, \quad b(r) = \frac{b_0^m}{r^{m-1}}, \quad b_0^m = 2b^m, \quad (7.2)$$

donde b_0 es el radio de la garganta del agujero de gusano, m es un número real positivo y b un parámetro arbitrario.

De acuerdo a las condiciones anteriormente expuestas, tenemos

$$b(r) = \frac{2b^m}{r^{m-1}}. \quad (7.3)$$

Entonces la métrica (7.1) toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2b^m/r^m} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (7.4)$$

Haciendo los siguientes cambios de variable [82]

$$s = 2^{-1/m}l, \quad t = 2^{-1/m}v, \quad r = \frac{x}{2^{1/m}}(1 + b^m/x^m)^{2/m}, \quad (7.5)$$

reemplazando en la métrica (7.3), conseguimos reescribir dicha métrica en coordenadas isotrópicas, la cual presenta la forma

$$dl^2 = -dv^2 + \left(1 + \frac{b^m}{x^m}\right)^{4/m}(dx^2 + x^2d\theta^2 + x^2\sin^2\theta d\phi^2). \quad (7.6)$$

Por otro lado, la forma isotrópica de la métrica de FRW viene dada por la expresión

$$dl^2 = -dv^2 + \frac{a^2(v)}{(1 + kx^2/4)^2}(dx^2 + x^2d\theta^2 + x^2\text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (7.7)$$

Al comparar las expresiones (7.6) y (7.7), establecemos la métrica para un agujero de gusano inmerso en el universo de FRW de la siguiente manera:

$$dl^2 = -A^2(v, x)dv^2 + B^2(v, x)(dx^2 + x^2d\theta^2 + x^2\text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (7.8)$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} g_{vv} &= -A^2(v, x), & g_{xx} &= B^2(v, x), & g_{\theta, \theta} &= B^2(v, x)x^2, \\ g_{\phi, \phi} &= B^2(v, x)x^2\text{sen}^2\theta, \end{aligned} \quad (7.9)$$

de la ecuación de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}, \quad (7.10)$$

deducimos que $G_{01} = G_{vx} = 0$, de donde deducimos que

$$A(v, x) = f(v)\frac{\dot{B}}{2B}, \quad (7.11)$$

comparando las ecuaciones (7.6) y (7.8), consideramos una posible forma para B como

$$B(v, x) = (w(v, x) + q(v)/x^m)^{2/m}, \quad (7.12)$$

calculando $\dot{B} = dB/dv$ y reemplazando en la ecuación (7.11), determinamos que

$$A(v, x) = \frac{f}{m}\left(\frac{\dot{w} + \dot{q}/x^m}{w + q/x^m}\right). \quad (7.13)$$

En el caso de que v sea constante y las condiciones asintóticamente planas, debe ser reducido al término $\sqrt{-g_{00}}$.

Comparando las ecuaciones (7.6) y (7.13) para el término g_{00} , obtenemos

$$f\dot{w} = mw, \quad f\dot{q} = mq, \quad (7.14)$$

definiendo a $q(v) = b^m d^m(v)$, encontramos que

$$f = \frac{d}{d}, \quad (7.15)$$

donde $d(v)$ es una función arbitraria, que está relacionada con el factor de escala del universo.

Para los dos casos limitantes de valores de x pequeños y grandes, la ecuación (7.8) se reduce a las ecuaciones (7.6) y (7.7), respectivamente, por lo que podemos identificar la forma de $w(v, x)$ que es similar a la solución exacta que ya se ha obtenido para los agujeros negros [5].

Identificando $w(v, x)$, tenemos:

$$w(v, x) = \frac{d^m(v)}{(1 + kx^2/4)^{m/2}}. \quad (7.16)$$

La forma final de la métrica para un agujero de gusano atravesable en el fondo del universo FLRW se obtiene reemplazando (7.12) en (7.8) y está dada por

$$dl^2 = -dv^2 + a^2(v) \left[\frac{1}{(1 + kx^2/4)^{m/2}} + \frac{b^m}{x^m} \right]^{4/m} (dx^2 + x^2 d^2\Omega), \quad (7.17)$$

donde $a^2(v) = d^4(v)$ es el factor de escala.

Dentro de la literatura científica, existe otro modelo para estudiar los agujeros de gusano en el universo de FLRW, como se indica en la referencia [72] el elemento de línea viene dado por

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2 - b(r)/r} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (7.18)$$

Haciendo los cambios de variable dados por las ecuaciones (7.2) y (7.3), la métrica anterior toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2 - \frac{2b^m}{r^m}} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (7.19)$$

Teniendo en cuenta los cambios de variable dados por la ecuación (7.5), se obtiene una métrica de la forma

$$dl^2 = -dv^2 + R^2(t) \left(1 + \frac{b^m}{x^m} \right)^{4/m} (dx^2 + x^2 d\theta^2 + x^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (7.20)$$

haciendo $R(t) \equiv a(v)$, se tiene

$$dl^2 = -dv^2 + a^2(v) \left(1 + \frac{b^m}{x^m}\right)^{4/m} (dx^2 + x^2 d\theta^2 + x^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2), \quad (7.21)$$

tomando en cuenta el siguiente cambio de variable $a^2(v) \left(1 + \frac{b^m}{x^m}\right)^{4/m} \equiv B^2(v, x)$ obtenemos

$$dl^2 = -dv^2 + B^2(v, x) (dx^2 + x^2 d\theta^2 + x^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (7.22)$$

Comparando las expresiones (7.22) y (7.7), establecemos la métrica para un agujero de gusano inmerso en el universo de FLRW de la siguiente forma:

$$dl^2 = -A^2(v, x)dv^2 + B^2(v, x)(dx^2 + x^2 d\theta^2 + x^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (7.23)$$

Notamos que las expresiones (7.8) y (7.23) son idénticas, lo que nos indica que las métricas (7.1) y (7.18), para los cambios de variable dados por las ecuaciones (7.2), (7.3) y (7.5), son equivalentes para la descripción de un agujero de gusano en el universo de FLRW.

7.2. Agujeros de Gusano en el universo de McVittie

En la actualidad, varias observaciones astronómicas y cosmológicas, provenientes tanto de las medidas de las anisotropías del fondo de microondas [73] como de observaciones en supernovas distantes de tipo Ia [74], muestran que el Universo está experimentando una fase acelerada de expansión. A la energía causante de esta expansión, se le ha denominado energía oscura. A la fecha, existen muchos modelos responsables de esta expansión. Entre ellos, son la constante cosmológica positiva [68], los campos de quinta esencia [75], modelos de gas de Chaplygin generalizado [76] y modelos de energía fantasma [77], entre otros. Pero la energía fantasma es, precisamente, el tipo de energía que se necesita para formar agujeros de gusano transitables, lo que indicaría la probable existencia de estos objetos, y por tanto, la existencia de vías interestelares o intergalácticas en el universo.

En la sección anterior, hemos considerado el agujero de gusano en el universo de FLRW; sin embargo, en nuestro análisis hemos supuesto de que el agujero de gusano considerado no perturba el entorno de FLRW. Esta suposición debe corresponder a una masa gravitacional

nula para el agujero de gusano [78]. Por tal razón, el agujero de gusano considerado adolece de la limitación de que la superficie del agujero de gusano se ajusta para que no perturbe el fondo cosmológico circundante. En esta sección, analizaremos el caso de un agujero de gusano más general usando la métrica de McVittie; donde el agujero de gusano está modelado por una delgada capa esférica que acrecenta el fluido de quinta esencia, nuestro anaálisis estará basado en el paper de Faroni [78] .

Partiendo de la métrica de McVittie, dada por la ecuación (5.119), la cual tiene la forma

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{\mu(t)}{2r}}{1 + \frac{\mu(t)}{2r}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\mu(t)}{2r} \right)^4 a^2(t) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (7.24)$$

Haciendo los siguientes cambios de variable

$$A(r, t) = 1 + \frac{\mu(t)}{2r}; \quad B(r, t) = 1 - \frac{\mu(t)}{2r}, \quad (7.25)$$

la métrica de McVittie toma la forma

$$ds^2 = - \left(\frac{B(r, t)}{A(r, t)} \right)^2 dt^2 + a^2(t) A^4(r, t) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (7.26)$$

Para modificar la métrica de FLRW, consideramos que esta es causada por la capa esférica Σ del agujero de gusano localizada en determinada posición; con esta consideración más la introducción de una función no nula $\mu(t)$, es posible eliminar la variable r de la métrica de McVittie; por tal razón, consideramos que la capa delgada Σ se encuentra localizada en el radio dado por [78]

$$r = r_\Sigma(t) = \frac{R(t)}{a(t)A^2(t, r_\Sigma)}, \quad (7.27)$$

donde $R(t)$ es el radio comoving de la capa delgada y esférica del agujero de gusano.

Reemplazando (7.27) en (7.26), tenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{B^2}{A^2} dt^2 + \left(a^2 A^4 \frac{dr^2}{dt^2} \right) dt^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -\frac{B^2}{A^2} \left(1 - \frac{a^2 A^6}{B^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) dt^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -\frac{B^2}{A^2} \left[1 - \left(\frac{a A^3}{B} \frac{dr}{dt} \right)^2 \right] dt^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\tanh\chi = \frac{a(t)A^3(r_\Sigma, t)}{B(r_\Sigma, t)} \frac{dr_\Sigma}{dt}, \quad (7.29)$$

reemplazando (7.29) en (7.28)

$$ds^2|_\Sigma = -\frac{B^2}{A^2} [1 - \tanh^2\chi] dt^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (7.30)$$

obteniéndose finalmente la expresión [78]

$$ds^2|_\Sigma = -\left(\frac{B(r, t)}{A(r, t)} \operatorname{sech}\chi\right)^2 dt^2 + R^2(t) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (7.31)$$

la cual es una métrica tridimensional en Σ únicamente en coordenadas (t, θ, ϕ) .

Las métricas tridimensionales para el estudio de la geometría de los agujeros de gusano no solo aparecen en la métrica de McVittie, también aparecen en el modelo de Morris y Thorne al considerar que la garganta tiene una simetría toroidal [79], la cual fue sugerida para intentar solucionar el problema de la construcción de una máquina del tiempo.

Ahora procederemos a calcular la ecuación dinámica de la capa esférica del agujero de gusano.

Partiendo de la ecuación (7.27), tenemos

$$\frac{R}{a} = r_\Sigma A^2, \quad (7.32)$$

derivando la expresión anterior

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{R}{a} \right) = A^2 \frac{dr_\Sigma}{dt} + 2Ar_\Sigma \frac{dA}{dt}. \quad (7.33)$$

Usando una de las relaciones dadas por (7.25)

$$A = 1 + \frac{\mu}{2r_\Sigma}, \quad (7.34)$$

de donde se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{a} \right) &= A^2 \frac{dr_\Sigma}{dt} + A \frac{d\mu}{dt} - \frac{A\mu}{r_\Sigma} \frac{dr_\Sigma}{dt}, \\ &= A \left(A - \frac{\mu}{r_\Sigma} \right) \frac{dr_\Sigma}{dt} + A \frac{d\mu}{dt}, \\ &= A \left(1 - \frac{\mu}{2r_\Sigma} \right) \frac{dr_\Sigma}{dt} + A \frac{d\mu}{dt}, \\ &= AB \frac{dr_\Sigma}{dt} + A \frac{d\mu}{dt}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

despejando dr/dt de la expresión anterior, obtenemos

$$\frac{dr_\Sigma}{dt} = \frac{1}{AB} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{R}{a} \right) - A \frac{d\mu}{dt} \right]. \quad (7.36)$$

De la ecuación anterior, despejando el término $d(r/a)/dt$, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{R}{a} \right) - A \frac{d\mu}{dt} = AB \frac{dr_\Sigma}{dt}, \quad (7.37)$$

teniendo presente que la velocidad tridimensional de la capa delgada, relativa al fluido cósmico se define como [78]

$$v = \tanh\chi(t) = \frac{a(t)A^3(r_\Sigma, t)}{B(r_\Sigma, t)} \frac{dr_\Sigma}{dt}, \quad (7.38)$$

de donde obtenemos

$$\frac{dr_\Sigma}{dt} = \frac{vB}{aA^3}, \quad (7.39)$$

reemplazando (7.39) en (7.37), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{R}{a} \right) - A \frac{d\mu}{dt} = \frac{v}{a} \left(\frac{B}{A} \right)^2. \quad (7.40)$$

Analizando la ecuación anterior, para el caso en que $v \leq 1$, tenemos que la ecuación (7.40) se reduce a la ecuación asintótica que presenta la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{R}{a} \right) = A \frac{d\mu}{dt}. \quad (7.41)$$

Haciendo uso de la relación (7.27), se obtiene $\frac{dr_\Sigma}{dt} = 0$, cuya solución es $r_\Sigma = C$, siendo C una constante. Finalmente, calculamos la expresión para $R(t)$ dada por

$$R(t) = a(t) \left(C + \mu(t) + \frac{\mu^2(t)}{4C} \right). \quad (7.42)$$

Cabe hacer notar que la expresión encontrada para $R(t)$, mediante la métrica de McVittie, es mucho más general que la calculada usando la métrica de FLRW [78] la cual presenta la forma

$$R(t) = a(t)e^{\alpha_0}, \quad (7.43)$$

donde α_0 es una constante. También es importante mencionar que los resultados que hemos encontrado en esta sección, mediante el modelo cosmológico de McVittie, son soluciones exactas y nos permiten analizar la dinámica de la capa delgada de agujeros de gusano en un contexto más general, dependiendo solo de tres parámetros independientes: $a(t)$, $\mu(t)$ y $R(t)$.

Capítulo 8

Conclusiones

En el transcurso de esta tesis doctoral, desde el comienzo en los primeros capítulos, hemos revisado algunos conceptos físicos y matemáticos importantes para el entendimiento y desarrollo del trabajo de investigación que nos habíamos propuesto. Hemos realizado una revisión de algunos aspectos matemáticos importantes para encontrar y comprender las ecuaciones de la relatividad general. Comenzamos presentando algunas características de las variedades diferenciables, de los espacios curvos; también mostramos como realizar transformaciones de coordenadas generales y encontramos una derivada que posee carácter tensorial denominada derivada covariante. Haciendo uso de la derivada covariante, obtuvimos los símbolos de Christoffel y su relación con el tensor métrico y también con el tensor de Riemann. Seguidamente, hicimos una revisión de la TRG, presentamos el principio de equivalencia y haciendo uso del principio variacional encontramos las ecuaciones de campo de Einstein. Posteriormente, se estudió las soluciones asintóticamente planas; dando énfasis en el estudio del agujero negro de Schwarzschild y Reissner-Nordström, se determinó su métrica, sus geodésicas, sus cantidades conservadas y sus diagramas de Kruskal; seguidamente, se analizó el agujero de gusano de Morris-Thorne donde hemos determinado las condiciones de transitabilidad.

Los resultados principales de esta tesis se componen de dos partes. En la primera parte hemos obtenido soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que describen el campo gravitacional de una partícula cargada inmersa en el universo de McVittie; dicha solución

la hemos expresado en función del término de Hubble y, finalmente, mediante las ecuaciones de campo de Einstein, la hemos relacionado con la constante cosmológica negativa. Hacemos notar que la solución corresponde para el caso de una constante de curvatura nula de acuerdo a la ecuación (6.37). En este caso, la partícula cargada está en el origen y, a medida que nos alejamos de esta partícula, el campo eléctrico, las perturbaciones en la densidad y presión del fluido cósmico disminuyen; y, finalmente, a grandes distancias de la partícula cargada, obtenemos la estabilidad del universo homogéneo e isotrópico como es la característica del universo de McVittie que se desenvuelve dentro del principio cosmológico. Para el caso de la métrica de McVittie, hemos logrado encontrar una expresión general válida para cualquier curvatura, la cual está dada por la ecuación (5.137). La métrica de McVittie cargada posee características similares que la métrica de McVittie no cargada, al menos cuando el parámetro $H(t)$ del Hubble es asintótico a una constante cuando $t \rightarrow 0$. Tal solución tiene un horizonte de eventos y representa un agujero negro en un Universo en expansión como se muestra en la ecuación (6.49).

Motivados por la correspondencia Ads/CFT, analizamos la solución de McVittie cargada con una constante cosmológica negativa $\Lambda < 0$. Del análisis de las ecuaciones (6.74), (6.75), (6.76) y (6.77), se desprende que la característica dominante es el colapso de un Big Crunch, el cual ocurriría con $\Lambda < 0$ siempre y cuando se mantenga la condición de energía fuerte. Esto conllevaría a que, en un momento dado, el universo dejará de expandirse, se frenaría y comenzaría el proceso inverso, es decir, el universo empezaría a comprimirse.

En la segunda parte de esta tesis, estudiamos el agujero de gusano en el universo de McVittie, comenzamos con el reemplazo de una masa cuasi-estática por el agujero de gusano estático de donde hemos obtenido la métrica para un agujero de gusano atravesable en el universo de FLRW como un caso particular del universo de McVittie. El modelo que hemos obtenido ha sido verificado, siguiendo el mismo procedimiento, con otro modelo presente en la literatura científica, comprobándose su veracidad y equivalencia para la descripción de agujeros de gusano inmersos en el universo de FLRW como se muestra en la ecuación (7.23).

Posteriormente, hemos calculado un agujero de gusano más general en el universo de

McVittie, donde el agujero de gusano está modelado por una delgada capa esférica que acrecenta el fluido de quinta esencia. Considerando la posición de la capa delgada y esférica del agujero de gusano, se pudo eliminar la variable r de la métrica de McVittie y así poder calcular una métrica tridimensional únicamente en función de las coordenadas (t, θ, ϕ) . En este análisis, hemos calculado la dinámica de esta capa delgada como función de los parámetros de McVittie dados en la ecuación (7.25), considerando pequeña la velocidad de la capa delgada, del orden de $v \leq 1$, calculamos el radio comoving de la capa delgada, solamente en función de los parámetros $a(t)$, $\mu(t)$ y $R(t)$, el cual es mucho más general que el calculado usando la métrica de FLRW. Nuestro estudio nos ha permitido encontrar una solución cosmológica en modelo de quinta esencia, la cual es mostrada en la ecuación (7.31).

Finalmente, concluimos que la métrica de McVittie es apropiada para estudiar una serie de sistemas locales, influenciados por la evolución del universo; así mismo nos permite estudiar tanto los agujeros negros como los agujeros de gusano en un universo en expansión. Para el caso de la métrica de McVittie cargada, resulta ser una solución general, si consideramos $a(t) \equiv 1$; el elemento de línea, dado por la ecuación (5.124) se reduce a la métrica de Reissner-Nordström, dada por la ecuación (4.89), en coordenadas isotrópicas; mientras que para valores grandes de r , se reduce a la métrica FLRW plana mostrada en la ecuación (5.34). Si $m = Q = 0$, la métrica dada por la ecuación (5.124), se convierte en un espacio-tiempo de FLRW plano, como se indica en la ecuación (5.34). También avances considerables hacia la comprensión de tal métrica han demostrado [80] que un objeto central satisface las condiciones necesarias y suficientes para ser caracterizado como un agujero negro, siempre que el elemento de línea sea asintótico a la métrica Schwarzschild-de Sitter en un tiempo muy grande. Por otro lado, se ha establecido que la métrica posee una singularidad que yace en el pasado de cada trayectoria causal, el Big Bang de McVittie. Además, estos resultados han demostrado ser válidos para una versión generalizada de la métrica de McVittie [81], al menos para algunas masas dependientes del tiempo.

En resumen, podemos indicar que nuestras conclusiones son: por un lado, hemos demostrado detalladamente la métrica de McVittie y la métrica de McVittie cargada. Se ha

expresado la métrica de McVittie cargada en función del término de Hubble y las condiciones que debe cumplir dicha métrica para no violar las condiciones de energía; así mismo, se ha demostrado que el universo de McVittie cargado con constante cosmológica negativa implosionará en un colapso Big Crunch siempre que se mantenga la condición de energía fuerte. Por otro lado, hemos determinado un modelo de agujero de gusano transitado en el universo de FLRW. También se ha calculado, en el universo de McVittie, el radio en función del tiempo de la garganta del agujero de gusano, que es expandida por la presencia de materia exótica.

Apéndice A

Componentes del tensor de Einstein para la métrica de McVittie

Partiendo de la métrica más general usada por McVittie, la cual esta dada por la ecuación (5.56), presenta la forma

$$ds^2 = e^{\xi(r,t)} dt^2 - e^{\nu(r,t)} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \quad (\text{A.1})$$

Consideramos la notación en que el punto y la coma sobre una determinada variable indican la diferenciación respecto de t y de r respectivamente.

A.1. Componentes del tensor de Ricci

$$R_r^r = -\frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[\nu' e^\xi \xi' r + 3e^\nu \dot{\nu}^2 r - e^\nu \dot{\nu} r \dot{\xi} - \xi'^2 r e^\xi - 4\nu'' r e^\xi + 2e^\nu \ddot{\nu} r \right] - \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[-2\xi'' r e^\xi - 4\nu' e^\xi \right]. \quad (\text{A.2})$$

$$R_r^t = -\frac{1}{2} e^{-\xi} \left[-\xi' \dot{\nu} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \nu \right]. \quad (\text{A.3})$$

$$R_\theta^\theta = \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[e^\nu \dot{\nu} r \dot{\xi} + \nu' e^\xi \xi' r + 3\nu''^2 r e^\xi - 3e^\nu \dot{\nu}^2 r - 2e^\nu \ddot{\nu} r \right] + \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[2e^\xi \xi' + 6\nu' e^\xi \right]. \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
 R_{\phi}^{\phi} &= \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[e^{\nu} \dot{\nu} r \dot{\xi} + \nu' e^{\xi} \xi' r + 3\nu''^2 r e^{\xi} - 3e^{\nu} \dot{\nu}^2 r - 2e^{\nu} \ddot{\nu} r \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[2e^{\xi} \xi' + 6\nu' e^{\xi} \right]. \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_t^t &= \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[3e^{\nu} \dot{\nu} r \dot{\xi} + \xi'^2 r e^{\xi} + \nu' e^{\xi} \xi' r - 3e^{\nu} \dot{\nu}^2 r - e^{\nu} \ddot{\nu}^2 r \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[2\xi''^2 r e^{\xi} + 4e^{\xi} \xi' \right]. \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

A.2. Escalar de Ricci

$$\begin{aligned}
 R &= -\frac{1}{2} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[6e^{\nu} \dot{\nu}^2 r - 3e^{\nu} \dot{\nu} r \dot{\xi} - \xi''^2 r e^{\xi} - \nu' e^{\xi} \xi' r - \nu'^2 r e^{\xi} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[6e^{\nu} \ddot{\nu} r - 4\nu'' r e^{\xi} - 2\xi'' r e^{\xi} - 4e^{\xi} \xi' - 8\nu' e^{\xi} \right]. \tag{A.7}
 \end{aligned}$$

A.3. Componentes del tensor de Einstein

$$G_r^r = \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[3e^{\nu} \dot{\nu}^2 r - 2e^{\nu} \dot{\nu} r \dot{\xi} - 2\nu' e^{\xi} \xi' r - \nu'^2 r e^{\xi} + 4e^{\nu} \ddot{\nu} r - 4e^{\xi} \xi' - 4\nu' e^{\xi} \right]. \tag{A.8}$$

$$G_r^t = \frac{1}{2} e^{-\xi} \left[\xi' \dot{\nu} - 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \nu \right]. \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
 G_{\theta}^{\theta} &= \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[3e^{\nu} \dot{\nu}^2 r - 2e^{\nu} \dot{\nu} r \dot{\xi} - \xi'^2 r e^{\xi} + 4e^{\nu} \ddot{\nu} r - 2\nu'' r e^{\xi} - 2\xi'' r e^{\xi} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[2e^{\xi} \xi' - 2\nu' e^{\xi} \right]. \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{\phi}^{\phi} &= \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[3e^{\nu} \dot{\nu}^2 r - 2e^{\nu} \dot{\nu} r \dot{\xi} - \xi'^2 r e^{\xi} + 4e^{\nu} \ddot{\nu} r - 2\nu'' r e^{\xi} - 2\xi'' r e^{\xi} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[2e^{\xi} \xi' - 2\nu' e^{\xi} \right]. \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

$$G_t^t = \frac{1}{4} \frac{e^{-\gamma-\xi}}{r} \left[3e^{\nu} \dot{\nu}^2 r - \nu''^2 r e^{\xi} - 4\nu'' r e^{\xi} - 8\nu' e^{\xi} \right]. \tag{A.12}$$

Apéndice B

Componentes tensoriales para la métrica de FLRW

En este apéndice, consideramos una métrica de FLRW de la forma

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right), \quad (\text{B.1})$$

donde $N(t)$ es la función lapse.

B.1. Componentes de las conexiones afin

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \frac{\dot{N}}{N}, & \Gamma_{rr}^t &= \frac{a\dot{a}}{N^2(1 - kr^2)}, & \Gamma_{\theta\theta}^t &= \frac{r^2 a\dot{a}}{N^2}, \\ \Gamma_{tr}^r &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{rr}^r &= \frac{kr}{(1 - kr^2)}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - kr^2), \\ \Gamma_{t\theta}^\theta &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\text{sen}\theta\text{cos}\theta, & \Gamma_{t\phi}^\phi &= \frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \text{cotg}\theta, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r(1 - kr^2)\text{sen}^2\theta. \\ \Gamma_{\phi\phi}^t &= \frac{a\dot{a}r^2\text{sen}^2\theta}{N^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

B.2. Componentes del tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
 R_{tt} &= -3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{N}\dot{a}}{Na} \right], \\
 R_{rr} &= \left[\frac{2\dot{a}^2}{N^2} + \frac{a\ddot{a}}{N^2} - \frac{a\dot{a}\dot{N}}{N^3} + 2k \right] \frac{1}{(1-kr^2)}, \\
 R_{\theta\theta} &= \left(\frac{a\ddot{a}}{N^2} + \frac{2\dot{a}^2}{N^2} - \frac{a\dot{a}\dot{N}}{N^3} + 2k \right) r^2, \\
 R_{\phi\phi} &= \left(\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{N^2} + 2k - \frac{a\dot{a}\dot{N}}{N^3} \right) r^2 \text{sen}^2\theta.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

B.3. Escalar de Ricci

$$R = \frac{6}{a^2 N^3} \left[N (\ddot{a}a + \dot{a}^2) - \dot{a}\dot{N}a + KN^3 \right]. \tag{B.4}$$

Bibliografía

- [1] Einstein, A., Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 844 (1915).
- [2] A. Einstein, Jahrb. Radioakt. u. Elektronik **4** (1907) 411.
- [3] A. Einstein, Ann. Physik **35** (1911) 898.
- [4] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915** (1915) 844.
- [5] Schwarzschild, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, **1916**, Seite 189-196, v.1,p.189-196,(1916).
- [6] Schwarzschild, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *arXiv preprint physics/9905030*, (1999). Translation and foreword by S. Antoci and A. Loinger.
- [7] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. Gravitation. Macmillan, 1973.
- [8] W. Dyson, A. S. Eddington, C. R. Davidson, *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Solar eclipse of May 29, 1919*, Philosophical Transactions of the Royal Society A **220** (571-581): 291-333 (1920).
- [9] LIGO, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).

-
- [10] Einstein, A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeine Relativitätstheorie, *Sitzungsberichte der königlichen preussischen Akademie der Wissenschaften*, **1917**, pp. 142-152
- [11] De Sitter, W. On the relativity of inertia; remarks concerning Einstein's latest hypothesis. *Koninklijke van Wetenschappen te Amsterdam*, 19, **1917**, pp. 1.2171.225.
- [12] A. Friedmann: *Über die Krümmung des Raumes*, *Zeitschrift für Physik* **10** (1922), 377–386.
- [13] Lemaître, G. Un Univers de masse constante et de rayon croissant, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, **1927**, pp.49-59; existe traducción al inglés en *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 91, **1931**, pp. 483-490.
- [14] Hubble, E. A relation between distance an radial velocity among extra-gaïnactic nebulae. *proceedings of the National Academy of Sciences*, **15**(3), 168-173,(1929).
- [15] Weinberg, S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity, tomo 67, Wiley New York, (1972).
- [16] McVittie, G. C. The mass-particle in an expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **93**, 325-339, (1933)
- [17] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish 1999.
- [18] Lang, S. *Differential manifolds*, Addison Wesley, London. (1972).
- [19] Isham,C. *Modern Differential Geometry for Physicists*, World Scientific, Singapore, (1999).
- [20] Torres del Castillo, G *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach*, Springer Science and Business Media, (2011).
- [21] Nakahara,M. *Geometry, Topology, and Physics*, Academic Press, (1983).

-
- [22] Hazewinkel, M. *Killing form*, Springer, (2001).
- [23] Cepa, J. *Cosmología Física*, Ediciones AKAL, (2007).
- [24] Sarbach, O. *Relatividad General*, Instituto de Física y matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, (2011).
- [25] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, (2006).
- [26] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles Applications of the General Theory of Relativity*. [S.l.]: Wiley India Pvt. Limited, (2008).
- [27] Goldstein, H., Poole, C.J., & Jonh Safko. *Classical mechanics*. Reverté, 3ra. Edición, (2002).
- [28] Hawking, Stephen & Reyner Ellis, George Francis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambrigde University Press. (1973).
- [29] Tejeiro, J.M., Notas de Clase, Principios de Relatividad General, Universidad Nacional de Colombia, (2005).
- [30] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Action Integrals And Partition Functions In Quantum Gravity*, Phys. Rev. D. 15 (1977):2752.
- [31] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit - The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, (2004).
- [32] Fulgencio Villegas Silva y Teófilo Vargas Auccalla, *Formulación ADM de la Relatividad General*, Revista de Investigación de Física 19, 161902351 (2016).
- [33] J. Michell, Phil. Trans. Roy. Soc., 74, 35-57 (1784).
- [34] Pierre-Simon, Marquis de Laplace, *Exposition du système du Monde*, (1796).
- [35] Fernández Álvarez, D., *Introducción a la relatividad general*, UAM, Madrid (2008)

-
- [36] S. Carroll, *An Introduction to General Relativity spacetime and geometry*, Chicago University Press, Chicago, Illinois, (2003).
- [37] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago U.S.A, (1984).
- [38] C. Möller, *Ann. Phys.*, **NY** 4,347 (1958).
- [39] R.C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford Univ. Press, (1934).
- [40] Fulgencio Villegas Silva y Teófilo Vargas Auccalla, *Energía de Möller para las métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman*, Revista de Investigación de Física 20, 172001351 (2017).
- [41] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press Inc., New York, (1992).
- [42] A. Einstein y N. Rosen. *Phys. Rev.*, 48:73, (1935).
- [43] S.W. Hawking. *The brief history of time*. (Barton Books, N.Y., USA, (1988).
- [44] M. Morris, K. Thorne. *Wormholes in Spacetime and their use for Interstellar Travel: A Tool for Teaching General Relativity*, *Am. J. Phys.* 56, 395 (1988)
- [45] J. Earman. *Bangs, Crunches, Whimpers and Shrieks. Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*. Oxford University Press.(1995)
- [46] Liddle, A. *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [47] Kristian, J. & Sachs, R. K., *Observations in Cosmology*. *Astrophysical Journal*, vol. 143, p. 379, (1966).
- [48] Peacock J.A., *Cosmological physics*. Cambridge University Press, Cambridge. (1999).

-
- [49] Maartens, R. (2011) *Is the universe homogeneous?*, Roy Soc Lond Philos Trans Ser A 369:5115–5137. doi:10.1098/rsta. (2011). 0289. Obtenido el 21, 10, 2017, desde <https://arxiv.org/abs/1104.1300>.
- [50] Pandey, B. & Sarkars., *Testing homogeneity in the Sloan Digital Sky Survey Data Release Twelve with Shannon entropy*, MNRAS. 454(3): 2647-2656, (2015).
- [51] Condon, J.J., *Very large radio surveys of the sky*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. Vol. 96, pp. 4756-4758, (1999).
- [52] Bennett, C.L., Banday, A.J., Gorski, K.M., Hinshaw, G., Jackson, P., Keegstra, P., Kogut, A., Smoot, G.F., Wilkinson, D.T., Wright, E.L., *Four-year COBE DMR cosmic microwave background observations: maps and basic results*. Astrophys J Lett 464:L1+, 1996. doi:10.1086/310075. Obtenido el 22, 10, (2017), desde <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9601067>.
- [53] Scharf, C.A., Jahoda, K., Treyer, M., Lahav, O., Boldt, E., Piran, T., (2000) *The 2–10 keV X-ray background dipole and its cosmological implications*. Astrophys J 544:49–62. doi:10.1086/ 317174. Obtenido el 22, 10, (2017), desde <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9908187>.
- [54] Weyl, H., Phys. ZS. 24,230 (1923).
- [55] Roos, M., *Introduction to Cosmology*, John Wiley & Sons Ltd., (2015).
- [56] Galadí, E. R., Marco, S. E., Martínez, G. V., Miralles, T. J., *Astronomía fundamental*, Universitat de Valencia, (2011).
- [57] Eisenhart, L. P., *Riemann Geometry*, Princeton University Press,(1926). Princeton
- [58] Raychaudhuri, A. K., *Theoretical Cosmology*, (1979).
- [59] Gautreau, R., Phys. Rev. D **29**, 2 (1984).
- [60] V. Faroni, A. Jacques. Cosmological expansion on local physics. *Physical Review D* 76(063510), (2007).

-
- [61] J.M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998), [hep-th/9711200].
- [62] V. Faraoni, A. F. Zambrano Moreno, and Angus Prain, Phys. Rev. D **89**, 103514 (2014).
- [63] Y. P. Shah and P. C. Vaidya, Tensor 19, 191 (1968).
- [64] B.Mashhoon and M.H. Partovi, Phys. Rev. D 20, 2455 (1979).
- [65] C. J. Gao and S. N. Zhang, Phys. Lett. B 595, 28 (2004).
- [66] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, first edition, Dover publication, Inc., 326, 333.
- [67] M. L. McClure and C. C. Dyer, Classical Quantum Gravity 23, 1971 (2006).
- [68] P. Landry, M. Abdelqader and K. Lake Phys. Rev. D 86, 084002 (2012).
- [69] L. Flamm, *Comments on Einstein's Theory of Gravity*, Physikalishe Zeitschrift 17, 448 (1916).
- [70] A. Einstein and N. Rosen, *The particle problem in the General Theory of Relativity*. Phys. Rev. **48** (1935) 73-77.
- [71] Chang Shuang, *Phys. Lett.*, B595, 28 (2004)
- [72] Sung-Won Kim, Phys. Rev. D 53, 6889 (1996).
- [73] Max Tegmark et al. *Cosmological parameters from sdss and wmap*. Phys.Rev., D69:103501, (2004).
- [74] S. Perlmutter et al. Measurements of omega and lambda from 42 high red shift supernovae. Astrophys. J., 517:565586 (1999).
- [75] R. R. Caldwell, Rahul Dave, y Paul J. Steinhardt. *Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state*. Phys. Rev. Lett. **80**:15821585, (1998).

-
- [76] L. Amendola, Fabio Finelli, C. Burigana, y D. Carturan. *Wmap and the generalized chaplygin gas*. JCAP, 0307:005, (2003).
- [77] Juan M. Aguirregabiria, Luis P. Chimento, y Ruth Lazkoz. Phantom kessence cosmologies. Phys. Rev., D70:023509, (2004).
- [78] V. Faraoni and W. Israel, Phys. Rev. D **71**, 064017 (2005).
- [79] P. F. González-Díaz, *Ringholes and closed timelike curves*, Phys. Rev. D **54**, 6122 (1996).
- [80] N. Kaloper, M. Kleban, and D. Martin, Phys. Rev.D **81**, 104044 (2010)
- [81] D. C. Guariento, M. Fontanini, A. M. da Silva, and E. Abdalla, Phys. Rev. D **86**, 124020 (2012).
- [82] B.Mirza, M. Eshaghi and S. Dehdashti, International Journal of Modern Physics D, Vol.15, **8** (2006).
- [83] Tirthabir Biswas and Anupam Mazumdar, Phys. Rev.D **80**, 023519 (2009).