Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Ecuaciones de Hamilton Jacobi

TESINA

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

Modalidad Examen de Suficiencia Profesional

AUTOR

Veder Joel CARRIÓN LÁZARO

Lima, Perú

2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Veder Joel Carrión Lázaro

Hamilton-Jacobi , (Lima) 2018.

ix, 37 p., 28.7cm (UNMSM, Licenciatura en Matemática Pura, 2018)

Tesis. Universidad Nacional Mayor de San Marcos,

Facultad de Ciencias Matemáticas. Matemáticas 1.

UNMSM / FCM. Titulo (Serie)

Ecuación de Hamilton-Jacobi

Veder Joel Carrión Lázaro

Tesina sometida a la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del grado de Licenciado en Matemática Pura.

Aprobada por:

Dr.Carlos Alberto Peña Miranda

Mg. Victoriano Yauri Luque

Lima - Perú

2018

Agradecimentos

Dedico la realización de este trabajo a los seres que me apoyaron a lo largo de mi vida, mis padres.

Agradezco también a mis hermanos y amigos por siempre haber estado en los momentos que más los he necesitado y a todas aquellas personas que directa o indirectamente contribuyeron con sus sabios consejos para influir en mi persona de manera positiva.

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar la existencia y unicidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi dada por,

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases}$$

donde $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función llamada Hamiltoniano , $Du = (u_{x_1}, \dots\dots\dots, u_{x_n})$.

Para alcanzar el objetivo planteado, empleamos el cálculo variacional, las ecuaciones de Hamilton, la transformada de Legendre y la fórmula de Hopf-Lax.

Palabras llaves: ecuación de Hamilton-Jacobi, Hamiltoniano, transformada de Legendre, fórmula de Hopf-Lax, solución débil, función Lipschitz continua.

Abstract

In this work, we study the existence and uniqueness for the Hamilton - Jacobi equation given by

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases}$$

where $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ is a Hamiltonian function and $Du = (u_{x_1}, \ldots\ldots\ldots, u_{x_n})$.

Key Words: Hamilton-Jacobi equation, Hamiltonian, Legendre transform, Hopf-Lax formula, weak solution, Lipschitz continuous function.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Unas de las dificultades en las ecuaciones diferenciales parciales es el de poder dar solución a las ecuaciones diferenciales parciales del tipo no lineal, debido a lo complejo que estas son, dentro de estas ecuaciones no lineales podemos analizar en un primer momento las ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. Dentro de las cual se encuentra la ecuación de estudio en este trabajo que es la ecuación de Hamilton-Jacobi, la que estudiaremos y trataremos de dar solución para su forma particular

$$u_t + H(DU) = 0.$$

Las ecuaciones de Hamilton –Jacobi tienen su aplicación en la mecánica cuántica y mecánica relativista que permite estudiar ecuaciones de evolución o movimiento de ahí la importancia para el estudio de estas ecuaciones. Estudios de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en su forma general o referentes a esta ecuación lo podemos encontrar en [2], [5], [7] así como en [10] el cual a servido como base para el trabajo presentado.

Este trabajo consta de tres capítulos. En el primer capítulo vamos a deducir las ecuaciones características de la ecuación de Hamilton-Jacobi, a partir de la forma general de una EDP de primer orden no lineal.

En el segundo capítulo mostraremos la existencia y unicidad para la ecuacion de Hamilton-Jacobi. Para ello, empezaremos definiendo una función llamada Lagrangiano para definir el Hamiltoniano y mediante el cálculo variacional trataremos de conseguir una función candidata a ser solución para la ecuación de Hamilton-Jacobi estudiada, esta función será llamada la fórmula de Hopf-lax. Luego, presentaremos algunos resultados que nos permitarán mostrar que esta fórmula es, efectivamente, la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi estudiada, impondremos algunas condiciones para la unicidad del problema. Los resultados presentados están basados en [10].

Finalmente, estudiaremos algunas aplicaciones referente a este tipo de ecuaciones.

Capítulo 2

Preliminares

Espacios $L^p(\Omega)$

En este capítulo presentaremos algunos resultados clásicos que serán usados a lo largo del trabajo. Las demostraciones se pueden encontrar en [3], [20].

Sea Ω un abierto del $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, el espacio vectorial de las (clases de) funciones definidas en Ω con valores en K donde $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, tales que $|u|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue en Ω.

El espacio $L^p(\Omega)$ con norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

y

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|, \text{ para } p = +\infty,$$

es un espacio de Banach.

En el caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 2.0.1. *Si $u \in L^1(\Omega)$ entonces las integrales indefinidas de u son funciones continuas.*

Teorema 2.0.1. ***(Convergencia Dominada de Lebesque)**. Sea (f_p) una sucesión de funciones medibles sobre Ω que converge puntualmente a la función f y supongamos que existe una función F integrable sobre Ω tal que $|f_p| \leq F$ para todo p, entonces*

i) *f es integrable sobre Ω.*

ii) $\displaystyle\int_\Omega f = \lim \int_\Omega f_p$

TEOREMA 2.0.2. ***(Desigualdad de Jensen)***. *Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ integrable. Entonces,*

$$f\left(⨍_\Omega u dx\right) \leq ⨍_\Omega f(u)dx,$$

donde $\displaystyle ⨍_\Omega udx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega udx.$

DEFINICIÓN 2.0.1. *Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada convexa si cumple la siguiente propiedad:*

$$f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

TEOREMA 2.0.3. ***(Hiperplano de Apoyo)***. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe $r \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(y) \geq f(x) + r \cdot (y - x),$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 2.0.2. *Dadas dos funciones f y g absolutamente integrables en $\mathbb{R}$, la convolucion de f y g es dada por:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

TEOREMA 2.0.4. *Dadas dos funciones f y g absolutamente integrables en $\mathbb{R}$. Se cumple:*

$$f * g = g * f.$$

DEFINICIÓN 2.0.3. *i) Sea $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por*

$$\eta(x) := \begin{cases} C\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right) & si\ |x| < 1, \\ 0 & si\ |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde C es una constante positiva escogida de tal manera que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1.$$

η es llamada aproximación a la unidad estándar(standard mollifier).

ii) Para cada $\epsilon > 0$, definimos

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Las funciones $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ son llamadas sucesiones regularizantes y satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)dx = 1, \quad spt(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon).$$

Definición 2.0.4. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable. Se define la aproximación de f(mollification of f)como*

$$f^\epsilon = \eta_\epsilon * f \qquad en \ \Omega_\epsilon = \{x \in \Omega; \ dist(x, \partial\Omega) > \epsilon\}.$$

Teorema 2.0.5. *En la condiciones de la definición anterior se obtiene:*

i) $f^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

ii) $f^\epsilon \longrightarrow f$, *casi siempre, cuando* $\epsilon \longrightarrow 0$.

iii) *Si $f \in C(\Omega)$, entonces $f^\epsilon \longrightarrow f$ uniformemente en todo subconjunto compacto de Ω.*

Cálculo variacional

Definición 2.0.5. *Sea M un conjunto de funciones, entonces $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamado funcional.*

Definición 2.0.6. *El cálculo variacional es el campo de la matemática que se encarga de estudiar los métodos que permiten hallar los valores máximos y mínimos de un funcional.*

Capítulo 3

Introducción a la ecuación de Hamilton-Jacobi

3.1. Ecuaciones características para una EDP de primer orden no lineal

En esta parte deduciremos las ecuaciones características para una EDP de primer orden no lineal, cuya forma general es

$$F(Du, u, x) = 0, \tag{3.1}$$

con condición de frontera

$$u = g \quad \text{en} \quad \Gamma, \tag{3.2}$$

donde $x \in U$, $u : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, siendo U abierto en $\mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset \partial U$ (frontera de U) y $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ son dados.

Para deducir las ecuaciones características que soluciona el sistema (3.1)-(3.2), vamos a convertirlas en una EDO equivalente a (3.1)-(3.2). Supongamos que tenemos una función u que sea solución de (3.1), vamos a calcular u a lo largo de algunas curvas en U, uniendo un punto $x \in U$ con un punto $x^0 \in \Gamma$ y a lo largo del cual podamos hallar u. De (3.2), sabemos el valor de u en el final x^0. Por lo tanto, nuestro trabajo consistirá ahora en encontrar el valor de u en toda la curva, para ello buscaremos parametrizar dicha curva.

Sea

$$x(s) = \big(x^1(s), \cdots, x^n(s)\big) \tag{3.3}$$

la curva que describe las condiciones anteriormente especificada , donde el parámetro s está en un intervalo de $\mathbb{R}$.

Definamos

$$\begin{cases} z(s) = u(x(s)), \\ p^i(s) = u_{x_i}(x(s)), \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n), \end{cases} \tag{3.4}$$

donde $p(s) = (p^1(s), \ldots\ldots\ldots, p^n(s))$.
Debemos elegir una función $x(\cdot)$ de tal modo que podamos calcular $z(\cdot)$ y $p(\cdot)$. Para ello, diferenciemos la i-ésima componente de $p(\cdot)$ con respecto de s,

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j}(x(s))\dot{x}^j(s). \tag{3.5}$$

Esta expresión implica segunda derivadas, las cuales trataremos de eliminar. Derivando (3.1) con respecto a x_i obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F(Du, u, x)}{\partial p_j} u_{x_i x_j} \right) + \frac{\partial F(Du, u, x)}{\partial z} u_{x_i} + \frac{\partial F(Du, u, x)}{\partial x_i} = 0. \tag{3.6}$$

Escogemos x=$x(s)$, tal que

$$\dot{x}^j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s)). \tag{3.7}$$

Desde que $p(s) = Du(x(s))$, de (3.7) y evaluando (3.6) en x=$x(s)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{x}^j(s) u_{x_i x_j}(x(s)) \right) + \frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), x(s)) p^i(s) \\ + \frac{\partial F}{\partial x_i}(p(s), z(s), x(s)) = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Luego, de (3.4), se obtiene en (3.8) la siguiente identidad:

$$\dot{p}^i(s) = -\frac{\partial F}{\partial x_i}(p(s), z(s), x(s)) - \frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), x(s)), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.9}$$

De (3.4), obtenemos

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}(x(s))\dot{x}^j(s) = \sum_{j=1}^{n} p^j(s)\frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s)). \tag{3.10}$$

Por lo tanto, de (3.8), (3.9) y (3.10) obtenemos el siguiente sistema llamado *Ecuaciones Características para la EDP de primer orden no lineal* (3.1)

$$\begin{cases} (a) & \dot{p}(s) = -D_x F(p(s), z(s), x(s)) - D_z F(p(s), z(s), x(s))p(s), \\ (b) & \dot{z}(s) = D_p F(p(s), z(s), x(s)).p(s), \\ (c) & \dot{x}(s) = D_p F(p(s), z(s), x(s)). \end{cases} \tag{3.11}$$

Así, demostramos el siguiente teorema:

TEOREMA 3.1.1. *(Estructura de la Característica) Sea $u \in C^2(U)$ solución de* (3.1) *en U. Supongamos que $x(\cdot)$ resuelve la EDO* (3.11)*(c), donde*

$$p(\cdot) = Du(x(\cdot)),\ z(\cdot) = u(x(\cdot)).$$

Entonces, para cada s tal que $x(s) \in U$, $p(\cdot)$ resuelve la EDO (3.11)*(a) y $z(\cdot)$ resuelve la EDO* (3.11)*(b).*

3.2. Características de la ecuación de Hamilton-Jacobi

En esta sección, estudiaremos la siguiente ecuación llamada *ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \tag{3.12}$$

donde $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función llamada función Hamiltoniana , $Du = (u_{x_1}, \ldots\ldots\ldots, u_{x_n})$.

Denotemos

$$G(Du, u_t, u, x, t) = u_t + H(Du, x) = 0, \tag{3.13}$$

donde $Du = (u_{x_1}, \ldots\ldots\ldots, u_{x_n})$. De (3.4), considerando $q = (p, p_{n+1}), y = (x, t)$, se obtienen las siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
&G(q, z, y) = p_{n+1} + H(p, x),\\
&D_q G = (D_p H(p, x), 1), D_y G = (D_x H(p, x), 0), D_z G = 0.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Luego, de (3.11)(c) y (3.14) obtenemos

$$
\begin{cases}
\dot{x}^i(s) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p(s), x(s)), \quad (i = 1, \ldots, n)\\
\dot{x}^{n+1}(s) = 1.
\end{cases} \tag{3.15}
$$

En particular, podemos identificar el parámetro s con el tiempo t.

De (3.11)(a), se tiene

$$
\begin{cases}
\dot{p}^i(s) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(p(s), x(s)), \quad (i = 1, \ldots, n)\\
\dot{p}^{n+1}(s) = 0.
\end{cases} \tag{3.16}
$$

Además, de (3.11)(b), sigue que

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(s) &= D_p H(p(s), x(s)).p(s) + p^{n+1}(s)\\
&= D_p H(p(s), x(s)).p(s) - H(p(s), x(s)).
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Por lo tanto, de (3.16) y (3.17), se obtiene las siguientes ecuaciones características para la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$
\begin{cases}
(a) \quad \dot{p}(s) = -D_x H(p(s), x(s)),\\
(b) \quad \dot{z}(s) = D_p H(p(s), x(s)).p(s) - H(p(s), x(s)),\\
(c) \quad \dot{x}(s) = D_p H(p(s), x(s)),
\end{cases} \tag{3.18}
$$

donde, $p(\cdot) = (p^1(\cdot), \ldots, p^n(\cdot))$, $x(\cdot) = (x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot))$

La primera y tercera de estas ecuaciones son llamadas *ecuaciones de Hamilton*

$$
\begin{cases}
\dot{x} = D_p H(p, x),\\
\dot{p} = -D_x H(p, x).
\end{cases} \tag{3.19}
$$

Capítulo 4

Existencia y unicidad para la ecuación de Hamilton-Jacobi

4.1. Cálculo variacional para las ecuaciones de Hamilton

En esta sección, vamos a deducir las ecuaciones de Hamilton desde el punto de vista variacional.

Sea

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función suficientemente regular, que de ahora en adelante llamaremos *Lagrangiano* , $L = L(q, x) = L(q_1, \ldots, q_n, x_1, \ldots, x_n) \quad (q, x \in \mathbb{R}^n)$. Consideremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} D_q L &= (L_{q_1}, \ldots, L_{q_n}) \\ D_x L &= (L_{x_1}, \ldots, L_{x_n}) \end{aligned}$$

Ahora, fijemos dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ y un tiempo $t > 0$ y sea el siguiente conjunto llamado *Conjunto de valores admisibles:*

$$\mathcal{A} = \{w(\cdot) \in C^2([0, t]; \mathbb{R}^n); w(0) = y, \quad w(t) = x\}.$$

Para $w(\cdot) = (w^1(\cdot), \ldots, w^n(\cdot)) \in \mathcal{A}$, definimos la siguiente*" acción funcional"*

$$I[w(\cdot)] = \int_0^t L(\dot{w}(s), w(s))ds \qquad \left(\cdot = \frac{d}{ds}\right). \tag{4.1}$$

Nuestro problema consistirá en encontrar una curva $x(\cdot) \in \mathcal{A}$ tal que

$$I[x(\cdot)] = \min_{w(\cdot)\in\mathcal{A}} I[w(\cdot)] \tag{4.2}$$

En el caso de existir, dicha curva satiface

TEOREMA 4.1.1. ***(Ecuación de Euler-Lagrange).*** *La función $x(\cdot)$ es solución del "sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange"*

$$-\frac{d}{ds}(D_q L(\dot{x}(s), x(s))) + D_x L(\dot{x}(s), x(s)) = 0. \tag{4.3}$$

Demostración. Sea $v : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ suficientemente regular, tal que $v(0) = v(t) = 0$. Para $\tau \in \mathbb{R}$, definimos la función

$$\omega(\cdot) := x(\cdot) + \tau v(\cdot). \tag{4.4}$$

Claramente, $\omega \in \mathcal{A}$ y, por definición de x, obtenemos

$$I[x(\cdot)] \leq I[\omega(\cdot)].$$

Así, la función definida por

$$i(\tau) := I[x(\cdot) + \tau\omega(\cdot)] = \int_0^t L(\dot{x}(s) + \tau\dot{v}(s), x(s) + \tau v(s))ds \tag{4.5}$$

alcanza un mínimo en $\tau = 0$. Por la regla de Leibniz se tiene que

$$i'(\tau)$$
$$= \int_0^t [D_q L(\dot{x}(s) + \tau\dot{v}(s), x(s) + \tau v(s)) \cdot \dot{v}(s) + D_x L(\dot{x}(s) + \tau\dot{v}(s), x(s) + \tau v(s)) \cdot v(s)]\, ds$$

Luego,

$$0 = i'(0) = \int_0^t [D_q L(\dot{x}(s), x(s)) \cdot \dot{v}(s) + D_x L(\dot{x}(s), x(s)) \cdot v(s)]\, ds. \tag{4.6}$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $v(0) = v(t) = 0$ resulta

$$\int_0^t [D_q L(\dot{x}(s), x(s)) \cdot \dot{v}(s)]\, ds = \sum_{i=1}^n \int_0^t [D_{q_i} L(\dot{x}(s), x(s))\dot{v}_i(s)]\, ds$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^t \left(-\frac{d}{ds} D_{q_i} L(\dot{x}(s), x(s))\right) v_i(s) ds = \int_0^t \left(-\frac{d}{ds} D_q L(\dot{x}(s), x(s))\right) \cdot v(s) ds.$$

Reemplazando esta identidad en (4.6) sigue que

$$0 = \int_0^t \left(-\frac{d}{ds} D_q L(\dot{x}(s), x(s)) + D_x L(\dot{x}(s), x(s)) \right) \cdot v(s) ds,$$

para toda función $v : [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ suficientemente regular. Por lo tanto, se obtiene (4.3). □

Observación 4.1.1. *A cada minimizador $x(\cdot) \in \mathcal{A}$ de $I[\cdot]$, solución de* (4.3)*, lo llamaremos "punto crítico de $I[\cdot]$". Así, cada minimizador es punto crítico pero no necesariamente todo punto crítico es minimizador.*

4.2. Equivalencia entre la ecuación de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Hamilton

Ahora, convertiremos la ecuación de Euler-Lagrange (4.3) al sistema de ecuaciones de Hamilton (3.19), utilizando los minimizadores $x(\cdot) \in \mathcal{A}$, dadas en la observación 4.1.1, las cuales supondremos que son de clase C^2.
Sea

$$p(s) := D_q L(\dot{x}(s)), x(s)) \quad 0 \le s \le t; \tag{4.7}$$

$p(\cdot)$ es llamado *impulso generalizado en la posición $x(\cdot)$ y velocidad $\dot{x}(\cdot)$.*

Consideremos las siguientes hipótesis importantes:

$$\begin{cases} \text{Supongamos que para todo} \quad x, p \in \mathbb{R}^n, \text{la ecuación} \\ p = D_q L(q, x), \\ \text{puede ser resuelta de manera única para} \\ \quad q = q(p, x), \text{suficientemente regular.} \end{cases} \tag{4.8}$$

Definición 4.2.1. *El Hamiltoniano H asociado al Lagrangiano L es dado por*

$$H(p, x) = p.q(p, x) - L(q(p, x), x) \quad (x, p \in \mathbb{R}^n), \tag{4.9}$$

donde la función $q(\cdot, \cdot)$ está definida implícitamente por (4.8)*.*

Ejemplo 4.2.1. *El Hamiltoniano correspondiente al Lagrangiano*

$$L(q, x) = \frac{m|q|^2}{2} - f(x),$$

donde $m > 0$ es dado por

$$H(p,x) = \frac{m|q|^2}{2} + f(x).$$

Ahora, escribiremos las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de $p(\cdot)$ y $x(\cdot)$:

TEOREMA 4.2.1. ***(Derivación de las ecuaciones de Hamilton).*** *Las funciones $x(\cdot)$ y $p(\cdot)$ satisfacen las ecuaciones de Hamilton*

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = D_p H(p(s), x(s)) \\ \dot{p}(s) = -D_x H(p(s), x(s)). \end{cases} \tag{4.10}$$

para $0 \leq s \leq t$. Además, el mapeo

$$s \longmapsto H(p(s), x(s))$$

es constante.

Demostración. De (4.7) y (4.8) sigue que $\dot{x}(s) = q(p(s), x(s))$. Luego, utilizando (4.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} D_x H(p,x) &= p \cdot D_x q(p,x) - D_q L(q(p,x),x) \cdot D_x q(p,x) - D_x L(q(p,x),x) \\ &= (p - D_q L(q(p,x),x)) \cdot D_x q(p,x) - D_x L(q(p,x),x) \\ &= -D_x L(q(p,x),x) = -D_x L(\dot{x}(s), x(s)). \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.1.1 se obtiene que

$$D_x H(p(s), x(s)) = -D_x L(\dot{x}(s), x(s)) = -\frac{d}{ds} D_q L(\dot{x}(s), x(s)) = -\dot{p}(s).$$

Así, obtenemos la segunda ecuación de (4.10). La primera ecuación sigue de manera similar usando (4.8):

$$\begin{aligned} D_p H(p,x) &= q(p,x) + p \cdot D_p q(p,x) - D_q L(q(p,x),x) \cdot D_p q(p,x) \\ &= q(p,x) + (p - D_q L(q(p,x),x)) \cdot D_p q(p,x) \\ &= q(p,x) = \dot{x}(s). \end{aligned}$$

Finalmente, de lo anterior se tiene que

$$\frac{d}{ds}H(p(s),x(s)) = D_pH(p(s),x(s))\cdot\dot{p}(s) + D_xH(p(s),x(s))\cdot\dot{x}(s)$$

$$= D_pH(p(s),x(s))\cdot(-D_xH(p(s),x(s))) + D_xH(p(s),x(s))\cdot D_pH(p(s),x(s))$$

$$= 0.$$

□

4.3. Existencia de solución para la ecuación de Hamilton-Jacobi

Ahora, intentaremos establecer una relación entre la EDP de Hamilton-Jacobi y el problema de variaciones (4.1)-(4.3). Para simplificar los cálculos, supongamos que el Hamiltoniano dependa sólo de p, es decir, $H = H(p)$.

4.3.1. La Transformada de Legendre

Supongamos que el Lagrangiano $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

$$\text{el mapeo} \quad q \longmapsto L(q) \quad \text{es convexo} \tag{4.11}$$

y

$$\lim_{|q|\longrightarrow\infty} \frac{L(q)}{|q|} = \infty. \tag{4.12}$$

Siendo L convexo, entonces, L es continuo.

DEFINICIÓN 4.3.1. *Definimos la transformada de Legendre de L, como*

$$L^*(p) = \sup_{q\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot q - L(q)\}. \tag{4.13}$$

Por lo tanto, de ahora en adelante, escribiremos

$$H = L^*. \tag{4.14}$$

Así, de (4.13), podemos obtener el Hamiltoniano H del Lagrangiano L.

Ahora hacemos la pregunta inversa: dada H, ¿cómo calculamos L?

TEOREMA 4.3.1. ***(Dualidad convexa del Hamiltoniano y el Lagrangiano).***
Supongamos que L satisface (4.11) *y* (4.12) *y definimos H mediante* (4.13) *y* (4.14).

(i) Entonces, el mapeo

$$p \longmapsto H(p)$$

es convexo y

$$\lim_{|p| \longrightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty.$$

(ii) Además,

$$L = H^*. \tag{4.15}$$

OBSERVACIÓN 4.3.1. *Así, H es la transformada de Legendre de L y viceversa:*

$$L = H^*, \quad H^* = L.$$

Decimos que H y L son funciones duales convexas.

Demostración. ***(i)*** Sean $\tau \in [0,1]$ y $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$H(\tau p_1 + (1-\tau)p_2) = L^*(\tau p_1 + (1-\tau)p_2) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{(\tau p_1 + (1-\tau)p_2) \cdot q - L(q)\}$$

$$\leq \tau \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{p_1 \cdot q - L(q)\} + (1-\tau) \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{{}_2p \cdot q - L(q)\}$$

$$= \tau H(p_1) + (1-\tau) H(p_2).$$

Por lo tanto, H es un mapeo convexo. Ahora, tomemos $p \neq 0$ y $\lambda > 0$. Para $q_0 = \lambda \dfrac{p}{|p|}$ obtenemos,

$$H(p) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - L(q)\} \geq \lambda |p| - L\left(\lambda \frac{p}{|p|}\right)$$

$$\geq \lambda |p| - \max_{q \in B(0,\lambda)} L(q).$$

Así,

$$\liminf_{|p| \longrightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} \geq \lambda.$$

Desde que $\lambda > 0$ es arbitrario, se tiene que

$$\lim_{|p| \longrightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty.$$

(ii) De la definición de la transformada de Legendre sigue que, para todo $p, q \in \mathbb{R}^n$:

$$H(p) + L(q) \geq p \cdot q,$$

en particular,

$$L(q) \geq \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - H(p)\} = H^*(q).$$

Por otro lado

$$H^*(q) = L^{**}(q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - L^*(p)\} = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - \sup_{r \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot r - L(r)\}\}$$

$$= \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \left\{ \inf_{r \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot (q - r) + L(r)\} \right\} \tag{4.16}$$

Siendo L convexa, por el Teorema 2.0.3, existe $s \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$L(r) \geq L(q) + s \cdot (r - q).$$

Finalmente, para $p = s$ en (4.16) se obtiene que

$$H^*(q) \geq \inf_{r \in \mathbb{R}^n} \{s \cdot (q - r) + L(r)\} \geq L(q).$$

□

4.3.2. Fórmula de Hopf-Lax

Retornando al problema de valor inicial (3.12), objetivo de nuestro estudio, para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, trataremos de minimizar la acción

$$\int_0^t L(\dot{w}(s))ds,$$

sobre el conjunto de funciones $w : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfacen $w(t) = 0$. Pero, ¿qué valor debería tener w(0)? Como de alguna manera debemos tener en cuenta la condición inicial de nuestra EDP, vamos a modificar la acción incluyendo una función g evaluada en $w(0)$:

$$\int_0^t L(\dot{w}(s))ds + g(w(0))$$

Ahora, vamos a construir un candidato para solución del problema de valor inicial de Hamilton-Jacobi (3.12), en términos del principio variacional que implique la acción modificada.
Definimos

$$u(x,t) := inf\{\int_0^t L(\dot{w}(s))ds + g(y); w(0) = y, \quad w(t) = x\}, \tag{4.17}$$

el ínfimo de todas las $w(\cdot)$ de clase C^1 con $w(t) = x$.
Investigaremos ahora la razón por la que definimos la función $u(x,t)$ de esta manera y si es solución de (3.12). Recordemos que H es suficientemente regular. Además, satisface

$$\begin{cases} p \longmapsto H(p) \quad \text{es convexo,} \\ \text{lím}_{|p| \longrightarrow \infty} \dfrac{H(p)}{|p|} = +\infty. \end{cases} \tag{4.18}$$

De aquí en adelante, supondremos que:

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{es lipschitz continua,} \tag{4.19}$$

es decir,

$$Lip(g) := sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} < \infty.$$

Lo primero que vamos hacer es simplificar la ecuación para la función $u(x,t)$ definida en (4.17). Se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. ***(Fórmula de Hopf-Lax)*** *Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$. Entonces, la solución $u(x,t)$ del problema (4.17) es dada por*

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\}. \tag{4.20}$$

Demostración. Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$w(s) := y + \frac{s}{t}(x-y), \quad 0 \leq s \leq t.$$

Luego,

$$\int_0^t L(\dot{w}(s))ds = tL\left(\frac{x-y}{t}\right).$$

Así, de (4.17), obtenemos

$$u(x,t) \leq tL(\frac{x-y}{t}) + g(y),$$

es decir,

$$u(x,t) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\}. \tag{4.21}$$

Por otro lado, si $w(\cdot)$ es de clase C^1 con $w(t) = x$, de la desigualdad de Jensen, se obtiene que

$$L\left(\frac{1}{t}\int_0^t L(\dot{w}(s))ds\right) \leq \frac{1}{t}\int_0^t L(\dot{w}(s))ds. \tag{4.22}$$

Tomando $y = w(0)$, obtenemos en (4.22) la siguiente desigualdad:

$$tL(\frac{x-y}{t}) + g(y) \leq \int_0^t L(\dot{w}(s))ds + g(y).$$

Luego,

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\} \leq u(x,t). \tag{4.23}$$

Por lo tanto, de (4.21) y (4.23) resulta

$$u(x,t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\}. \tag{4.24}$$

Con la finalidad de demostrar que el ínfimo es realmente el mínimo, tomando $y = x$ en (4.24) se obtiene que

$$u(x,t) \leq tL(0) + g(x). \tag{4.25}$$

De (4.12), existe una constante positiva A, tal que

$$L(q) \geq 2(Lip(g)+1)|q|, \quad \text{para todo} \quad |q| \geq A.$$

Luego, si $\mid x - y \mid \geq tA$, de (4.25) y de la desigualdad arriba obtenemos la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned} tL(\frac{x-y}{t}) + g(y) &\geq 2(Lip(g)+1)|x-y| + g(y) \\ &\geq (Lip(g)+2)|x-y| + g(x) \\ &\geq (Lip(g)+2)|x-y| - tL(0) + u(x,t). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Finalmente, de la desigualdad anterior, para $\mid x - y \mid \geq tB$, donde

$$B = \text{máx}\left\{A, \frac{L(0)}{Lip(g)+1}\right\},$$

resulta

$$tL(\frac{x-y}{t}) + g(y) \geq +u(x,t),$$

obteniendose (4.20).

□

Ahora estudiaremos varias propiedades para la función u definida en (4.20).

Lema 4.3.1. ***(Identidad funcional).*** *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $0 \leq s \leq t$, tenemos*

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s)\right\}. \tag{4.27}$$

Demostración. Fijamos $y \in \mathbb{R}^n 0 \leq s \leq t$ y escogemos $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u(y,s) = sL\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z). \tag{4.28}$$

Como

$$\frac{x-z}{t} = \left(1-\frac{s}{t}\right)\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + \frac{s}{t}\left(\frac{y-z}{s}\right),$$

y siendo L convexo, se obtiene

$$L\left(\frac{x-z}{t}\right) \leq \left(1-\frac{s}{t}\right) L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + \frac{s}{t} L\left(\frac{y-z}{s}\right).$$

Así, de (4.20), (4.28) y la desigualdad anterior, obtenemos para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$$u(x,t) \leq tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z) \leq (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + sL\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z)$$

$$= (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s). \tag{4.29}$$

Afirmación: El mapeo

$$y \longmapsto u(y,s) \tag{4.30}$$

es continuo.

Supongamos probada la afirmación. Entonces, de (4.29) se tiene que

$$u(x,t) \leq \min_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s)\right\}. \tag{4.31}$$

Ahora, elegimos w tal que

$$u(x,t) = tL\left(\frac{x-w}{t}\right) + g(w), \tag{4.32}$$

y tomando

$$y = \frac{s}{t}x + (1-\frac{s}{t})w,$$

se obtiene,

$$\frac{x-y}{t-s} = \frac{x-w}{t} = \frac{y-w}{s}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(y,s) &\geq tL\left(\frac{x-w}{t}\right) + g(w) - \left[sL\left(\frac{y-w}{s}\right) + g(w)\right] \\ &= tL\left(\frac{x-w}{t}\right) - sL\left(\frac{y-w}{s}\right) \\ &= (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Por lo tanto, de (4.33) obtenemos

$$u(x,t) \geq \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s) \right\}. \tag{4.34}$$

□

En seguida, demostraremos a afirmación.

Lema 4.3.2. ***(Lipschitz continua).***
La función u es Lipschitz continua en $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$.
Adémas,

$$u = g \quad en \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \tag{4.35}$$

Demostración. Fijamos $t > 0$, $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$, escogemos $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u(x,t) = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y).$$

Entonces,

$$u(\overline{x},t) - u(x,t) = \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{\overline{x}-z}{t}\right) + g(z) \right\} - tL\left(\frac{x-y}{t}\right) - g(y)$$

$$\begin{aligned} &\leq tL\left(\frac{\overline{x}-(\overline{x}-x-y)}{t}\right) + g(\overline{x}-x-y) - tL\left(\frac{x-y}{t}\right) - g(y) \\ &= g(\overline{x}-x-y) - g(y) \leq Lip(g) \mid x - \overline{x} \mid . \end{aligned} \tag{4.36}$$

Intercambiando $\overline{x}$ por x, se obtiene

$$\mid u(x,t) - u(\overline{x},t) \mid \leq Lip(g) \mid x - \overline{x} \mid . \tag{4.37}$$

Ademas,

$$\begin{aligned} u(x,t) - g(x) &= \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) - g(x) \right\} \\ &\geq \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) - Lip(g) \mid x-y \mid \right\} = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \{ tL(z) - tLip(g) \mid z \mid \} \\ &= -t \max_{z \in \mathbb{R}^n} \{ Lip(g) \mid z \mid - L(z) \} = -t \max_{w \in B_{Lip(g)}(0)} \max_{z \in \mathbb{R}^n} \{ w.z - L(z) \} \\ &= -t \max_{w \in B_{Lip(g)}(0)} H(w). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Así, de (4.25) y (4.38) sigue que

$$|u(x,t) - g(x)| \leq Ct, \tag{4.39}$$

donde,

$$C = \max\left\{|L(0)|, \max_{w\in B_{Lip(g)}(0)} H(w)\right\}. \tag{4.40}$$

De (4.37), obtenemos, $Lip(u(\cdot,t)) \leq Lip(g)$.

Ahora, sean $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \overline{t} < t$. Tomando $y = x$ en (4.27), se obtiene la siguiente estimativa

$$u(x,t) \leq (t-\overline{t})L(0) + u(x,\overline{t}). \tag{4.41}$$

Por otra parte, de (4.27) y haciendo los mismos cálculo para obtener la desigualdad (4.38), resulta

$$u(x,t) - u(x,\overline{t}) \geq -(t-\overline{t}) \max_{w\in B_{Lip(g)}(0)} H(w). \tag{4.42}$$

Por lo tanto, de (4.41) y (4.42) concluímos que

$$|u(x,t) - u(x,t)| \leq C|t-t|,$$

donde C es dado por (4.40). $\square$

Ahora, el teorema de Rademacher afirma que una función de Lipschitz es diferenciable casi siempre. En consecuencia, por el lema (4.3.2), la función definida por (4.3.2), es direnciable c.s.

El siguiente teorema afirma que de hecho resuelve la ecuación de Hamilton-Jacobi, si u es diferenciable.

TEOREMA 4.3.3. *Supongamos que $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ y u definida en el Teorema (4.3.2) sea diferenciable en $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Entonces,*

$$u_t(x,t) + H(Du(x,t)) = 0. \tag{4.43}$$

Demostración. Fijemos $q \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$. Luego, en el lema (4.3.1), tenemos

$$u(x+hq, t+h) = \min_{y\in\mathbb{R}n}\left\{hL\left(\frac{x+hq-y}{h}\right) + u(y,t)\right\}$$

$$\leq hL(q) + u(x,t),$$

y, por lo tanto,

$$\frac{u(x+hq,t+h)-u(x,t+h)}{h}+\frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h}\leq L(q).$$

Esta desigualdad es válida para todo $q\in\mathbb{R}^n$ y, desde que $H=L^*$, tomando límite cuando $h\longrightarrow 0^+$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$u_t(x,t)+H(Du(x,t))=u_t(x,t)+\max_{q\in\mathbb{R}^n}\{q.Du(x,t)-L(q)\}\leq 0. \quad (4.44)$$

Ahora, escogemos $z\in\mathbb{R}^n$, tal que

$$u(x,t)=tL\left(\frac{x-z}{t}\right)+g(z),$$

y, para $h>0$ fijo, consideremos

$$s=t-h, \quad y=\frac{s}{t}x+(1-\frac{s}{t})z.$$

Entonces,

$$\frac{x-y}{t-s}=\frac{x-z}{t}=\frac{y-z}{s}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(x,t)-u(y,s) \geq & tL\left(\frac{x-z}{t}\right)+g(z)-\left[sL\left(\frac{y-z}{s}\right)+g(z)\right] \\ &= (t-s)L\left(\frac{x-z}{t}\right); \end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{u(x,t)-u((1-\frac{h}{t})x+\frac{h}{t}z,t-h)}{h}\geq L\left(\frac{x-z}{t}\right).$$

Tomando límite cuando $h\longrightarrow 0^+$, se obtiene

$$u_t(x,t)+\frac{x-z}{t}.Du(x,t)\geq L\left(\frac{x-z}{t}\right).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + H(Du(x,t)) &= u_t(x,t) + \max_{q\in\mathbb{R}^n}\{q.Du(x,t) - L(q)\} \\ &\geq u_t(x,t) + \frac{x-z}{t}.Du(x,t) - L\left(\frac{x-z}{t}\right) \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.45}$$

De (4.44) y (4.45) se obtiene el resultado. □

En resumen, de los resultados obtenidos se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 4.3.4. ***(La Fórmula de Hopf-Lax como solución)*** *La función u definida por la fórmula de Hopf-Lax* (4.20) *es Lipschitz continua y diferenciable c.s. en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ y resuelve el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & c.s \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \tag{4.46}$$

4.4. Unicidad de solución para la ecuación de Hamilton-Jacobi

4.4.1. Semiconcavidad

Comenzaremos examinando algunas propiedades más de la fórmula de Hopf-Lax, estableciendo más conexiones entre la función u, definida por la fórmula y el problema de valor inicial dado. Primero, damos una definición de semiconcavidad.

DEFINICIÓN 4.4.1. *Diremos que una función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es semicóncava, si existe una constante C, tal que para todo $x, z \in \mathbb{R}^n$, la siguiente desigualdad es satisfecha:*

$$g(x+z) - 2g(x) + g(x-z) \leq C|z|^2. \tag{4.47}$$

Una amplia descripción general de las funciones semicóncavas y sus aplicaciones se da en [5]. El término "semiçoncavidad proviene de algunas de las propiedades de las funciones. El corolario 2.1.3 en [5] demuestra que cualquier función semicóncava puede representarse como una suma de una función suave y una función cóncava. Por lo tanto, para sorpresa, una función estrictamente convexa, como x^2 se puede ver como un ejemplo de una función semicóncava, que no es cóncava.

LEMA 4.4.1. *Sea g semicóncava. Entonces, la función u definida por la fórmula de Hopf-Lax* (4.20) *es semicóncava.*

Demostración. Escogemos $y \in \mathbb{R}^n$ un minimizador en la fórmula de Hopf-Lax, es decir:

$$u(x,t) = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y).$$

Ahora, estimando $u(x+z,y)$ y $u(x-z,t)$ mediante la fórmula de Hopf-Lax, obtenemos

$$u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq \left[tL\left(\frac{x+z-(y+z)}{t}\right) + g(y+z)\right]$$

$$-2\left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)\right] + \left[tL\left(\frac{x-z-(y-z)}{t}\right) + g(y-z)\right]$$

$$= g(y+z) - 2g(y) + g(y-z) \leq C|z|^2$$

□

El segundo paso será establecer la conexión entre H y u. Vamos a suponer que g es semicóncava y consideremos H uniformemente convexa. Sucede que esta propiedad es suficiente para asegurar la semiconcavidad de la solución u para cualquier $t > 0$ fijo. Nuevamente, primero damos una definición.

DEFINICIÓN 4.4.2. *Una función $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa, de clase $C^2(\mathbb{R}^n)$ es llamada uniformemente convexa con constante $\theta > 0$, si la siguiente desigualdad es satisfecha para todo $p, \xi \in \mathbb{R}^n$:*

$$\xi^T \nabla^2 H(p)\xi \geq \theta|\xi|^2. \tag{4.48}$$

LEMA 4.4.2. *Sean H uniformemente convexa (con constante θ) y u definida por la fórmula de Hopf-Lax* (4.20). *Entonces,*

$$u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq \frac{1}{\theta t}|z|^2, \tag{4.49}$$

para todo $x, z \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Demostración. Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$. Por la fórmula de Taylor, obtenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} H(p_1) &= H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) + \nabla H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right).\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^T.\nabla^2 H(\widehat{p_1}).\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(p_2) &= H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) + \nabla H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right).\left(\frac{p_2-p_1}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^T.\nabla^2 H(\widehat{p_2}).\left(\frac{p_2-p_1}{2}\right), \end{aligned}$$

donde $\widehat{p_1}$ y $\widehat{p_2}$ son los puntos medios que corresponden al término restante en la forma de Lagrange. Sumando las identidades anteriores y por (4.48) se obtiene que

$$2H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) \leq H(p_1) + H(p_2) - \frac{\theta}{4}|p_1-p_2|^2.$$

Ahora, sean $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Escogemos $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$H(p_1) = p_1.q_1 - L(q_1), \quad H(p_2) = p_2.q_2 - L(q_2).$$

Así,

$$L(q_1) + L(q_2) \leq p_1.q_1 + p_2.q_2 - 2H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) - \frac{\theta}{4}|p_1-p_2|^2. \tag{4.50}$$

Por la defincíón de transformada de Legendre, obtenemos

$$H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) \geq \frac{1}{4}(p_1+p_2).(q_1+q_2) - L\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right). \tag{4.51}$$

Combinando las desigualdades (4.50) y (4.51) se tiene

$$L(q_1) + L(q_2) \leq \frac{1}{2}(p_1-p_2).(q_1-q_2) + 2L\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right) - \frac{\theta}{4}|p_1-p_2|^2. \tag{4.52}$$

Notamos que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\theta}{4}|p_1-p_2|^2-\frac{1}{2}(p_1-p_2).(q_1-q_2)+\frac{1}{4\theta}|q_1-q_2|^2\\
&\geq \frac{\theta}{4}|p_1-p_2|^2-2\left(\frac{\sqrt{\theta}}{2}|p_1-p_2|\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{\theta}}|q_1-q_2|\right)+\frac{1}{4\theta}|q_1-q_2|^2\\
&=\left(\frac{\sqrt{\theta}}{2}|p_1-p_2|-\frac{1}{2\sqrt{\theta}}|q_1-q_2|\right)^2\geq 0. \qquad (4.53)
\end{aligned}
$$

Luego, de las desigualdades (4.52) y (4.53) obtenemos

$$
L(q_1)+L(q_2)\leq 2L\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)+\frac{1}{4\theta}|q_1-q_2|^2. \qquad (4.54)
$$

Finalmente, elegimos y un minimizador en la fórmula de Hopf-Lax para $u(x,t)$, y luego usando el mismo valor para estimar $u(x+z,t)$ y $u(x-z,t)$, para $q_1=\frac{x+z-y}{t}$ y $q_2=\frac{x-z-y}{t}$ en (4.54), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&u(x+z,t)-2u(x,t)+u(x-z,t)\leq\left(tL\left(\frac{x+z-y}{t}\right)+g(y)\right)\\
&-2\left(tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right)+\left(tL\left(\frac{x-z-y}{t}\right)+g(y)\right)\\
&=t\left(L\left(\frac{x+z-y}{t}\right)+L\left(\frac{x-z-y}{t}\right)-2L\left(\frac{x-y}{t}\right)\right)\\
&\leq t\frac{1}{4\theta}\left|\frac{2z}{t}\right|^2=\frac{1}{\theta t}|z|^2
\end{aligned}
$$

□

4.4.2. Soluciones débiles. Unicidad

En esta sección, estudiaremos la unicidad de la ecuacion de Hamilton-Jacobi (3.12). Vamos a combinar los lemas previos para introducir una definición adecuada de solución débil.

Definición 4.4.3. *Una función $u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ es llamada* ***solución débil*** *del problema de valor inicial* (3.12) *si satisface:*

(a) $u(x,0)=g(x) \qquad (x\in\mathbb{R}^n)$,

(b) *$u_t(x,t) + H(Du(x,t)) = 0$ para casi todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,*

(c) *$u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq C(1+\frac{1}{t})|z|^2$ para alguna constante $C \geq 0$ y para todo $x, z \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.*

TEOREMA 4.4.1. ***(Unicidad de las soluciones débiles).***
Sean H de clase $C^2(\mathbb{R}^n)$ y g que satisfacen (4.18) y (4.19) respectivamente. Entonces, existe a lo más una solución débil para la ecuación (3.12).

Demostración. Supongamos que u_1 y u_2 sean dos soluciones de (3.12), escribiremos $w = u_1 - u_2$ y tomemos un punto (y,s) donde u_1 y u_2 son diferenciables. Luego,

$$\begin{aligned}
&w_t(y,s) = u_{1,t}(y,s) - u_{2,t}(y,s) = -H(Du_1(y,s)) + H(Du_2(y,s))\\
&= -\int_0^1 \frac{d}{dr} H(rDu_1(y,s) + (1-r)Du_2(y,s))dr\\
&= -\int_0^1 D_pH(rDu_1(y,s) + (1-r)Du_2(y,s))dr.(Du_1(y,s) - Du_2(y,s))\\
&== -b(y,s).Dw(y,s)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

donde,

$$b(y,s) := \int_0^1 D_pH(rDu_1(y,s) + (1-r)Du_2(y,s))dr.$$

Consecuentemente, de (4.55), obtenemos

$$w_t(y,s) + b(y,s).Dw(y,s) = 0 \qquad \text{c.s.} \tag{4.56}$$

Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty >$ una función suficientemente regular.
Denotemos

$$v(t) := \varphi(w(t)) \geq 0.$$

Multiplicando por $\varphi'(w)$ a la identidad anterior resulta

$$v_t + bDv = \varphi'(w)w_t(y,s) + b(y,s).(\varphi'(w)Dw(y,s)) = 0 \qquad \text{c.s.} \tag{4.57}$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y $\eta_\epsilon : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ aproximación a la unidad estándar (standard mollifier) en la variables x y t.
Denotemos por

$$u_i^\epsilon := \eta_\epsilon * u_i \qquad (\text{aproximación de } u_i, \quad i = 1,2.)$$

Ahora, vamos a establecer algunos hechos, usando las propiedades de convolución. Primero, desde que $u_i^\epsilon \in C^\infty$, entonces Du_i^ϵ existe y, además, siendo u_i Lipschitz continua, obtenemos:

$$\left|\frac{u_i^\epsilon(x+he,t)-u_i^\epsilon(x,t)}{h}\right|$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} \eta_\epsilon(y,r)\left(\frac{u_i(x+he-y,t-r)-u_i(x-y,t-r)}{h}\right) d_y d_r\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} \eta_\epsilon(y,r)\left|\frac{u_i(x+he-y,t-r)-u_i(x-y,t-r)}{h}\right| d_y d_r$$

$$\leq Lip(u_i)|e|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(y,r) d_y = Lip(u_i),$$

donde aquí, e denota un vector unitario. Tomando límite cuando $h \longrightarrow 0$, se obtiene

$$|Du_i^\epsilon| \leq Lip(u_i). \tag{4.58}$$

La propiedad

$$Du_i^\epsilon(x,t) = \eta_\epsilon * Du_i,$$

ímplica que Du_i^ϵ es una aproximación de Du_i, por lo tanto,

$$Du_i^\epsilon \longrightarrow Du_i \qquad \text{c.s cuando} \quad \epsilon \longrightarrow 0 \quad (i=1,2). \tag{4.59}$$

Dado $\epsilon > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$ y $s > 2\epsilon$ se obtiene la siguiente estimativa:

$$D^2 u_i^\epsilon(y,s) \leq C\left(1+\frac{1}{s}\right) I, \tag{4.60}$$

donde I denota la matriz identidad. En efecto, sea $z > 0$, $|z| \leq 1$. Por el item (c) en la definición de solución débil, sigue que

$$\frac{u_i(y+ze_j,s)-2u_i(y,s)+u_i(y-ze_j,s)}{h} \leq C\left(1+\frac{1}{s}\right)|z|^2 \leq C\left(1+\frac{1}{s}\right).$$

Haciendo $h \longrightarrow 0$, obtenemos (4.60).
Denotemos

$$b_\epsilon(y,s) := \int_0^1 DH(rDu_1^\varepsilon(y,s) + (1-r)Du_2{}^\epsilon(y,s))dr. \tag{4.61}$$

Así, de (4.57), obtenemos que

$$v_t + b_\epsilon.Dv = (b_\epsilon - b)Dv, \quad c.s.$$

y, por lo tanto,

$$v_t + \operatorname{div}(vb_\epsilon) = (\operatorname{div} b_\epsilon)v + (b_\epsilon - b)Dv \quad c.s. \tag{4.62}$$

De (4.58) y (4.60), es claro que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} b_\epsilon &= \int_0^1 \sum_{k,l=1}^n H_{p_k p_l}(rDu_1^\varepsilon + (1-r)Du_2{}^\epsilon)(ru_{1,x_l x_k}^\varepsilon + (1-r)u_{2,x_l x_k}^\epsilon)dr \\ &\leq C(1 + \frac{1}{s}). \end{aligned} \tag{4.63}$$

Fijamos $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 > 0$ y definimos

$$R := \text{máx}\{|DH(p)|; \quad |p| \leq \text{máx}\{Lip(u_1), Lip(u_2)\}\}$$

y

$$C = \{(x,t): \quad 0 < t < t_0, \quad |x - x_0| \leq R(t - t_0)\}.$$

Denotemos

$$e(t) = \int_{B(x_0, R(t-t_0))} v(x,t)dx,$$

calculando para casi todo $t > 0$, y utilizando (4.58)-(4.63) se obtiene

$$\dot{e}(t) = \int_{B(x_0,R(t-t_0))} v_t dx - R \int_{\partial B(x_0,R(t-t_0))} vdS$$

$$= \int_{B(x_0,R(t-t_0))} -\text{div}(vb_\epsilon) + (\text{div}b_\epsilon)v + (b_\epsilon - b).Dvdx$$

$$- R \int_{\partial B(x_0,R(t-t_0))} vdS$$

$$= - \int_{\partial B(x_0,R(t-t_0))} v(b_{\epsilon}..v + R)dS + \int_{B(x_0,R(t-t_0))} (\text{div}b_\epsilon)v + (b_\epsilon - b).Dvdx$$

$$\leq \int_{B(x_0,R(t-t_0))} (\text{div}b_\epsilon)v + (b_\epsilon - b).Dvdx$$

$$\leq C(1 + \frac{1}{t})e(t) + \int_{B(x_0,R(t-t_0))} (b_\epsilon - b).Dvdx. \tag{4.64}$$

Haciendo $\epsilon \longrightarrow 0$ y por el Teorema de la Convergencia Dominada, obtenemos

$$\dot{e}(t) \leq C(1 + \frac{1}{t})e(t), \quad \text{para casi todo} \quad 0 < t < t_0. \tag{4.65}$$

Ahora, fijamos $0 < \epsilon < r < t$ y escogemos una función $\varphi(z) \geq 0$ tal que

$$\varphi(z) = 0, \quad \text{si} \quad |z| \leq \epsilon \left(Lip(u_1) + Lip(u_2) \right).$$

Desde que $u_1 = u_2$ en $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$, entonces

$$v = \varphi(w) = \varphi(u_1 - u_2) = 0, \quad \text{en} \quad t = \epsilon.$$

Por lo tanto, $e(\epsilon) = 0$.
Luego, de (4.65) y por la desigualdad de Gronwall, se tiene

$$e(r) \leq e(\epsilon) \exp \left(\int_\epsilon^r C(1 + \frac{1}{s})ds \right) = 0.$$

Así,

$$|u_1 - u_2| \leq \epsilon\,(Lip(u_1) + Lip(u_2)) \quad \text{en} \quad B(x_0, R(t - t_0)),$$

para todo $\epsilon > 0$, en particular, $u_1(x_0, t_0) = u_2(x_0, t_0)$ $\square$

Como consecuencia directa de los Lemas 4.4.1, 4.4.2 y el Teorema 4.4.1 se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 4.4.2. ***(La fórmula de Hopf-Lax es una solución débil.)*** *Sean H de clase $C^2(R^n)$ que satisface* (4.18) *y g una función que satisface* (4.19). *Si g es semiconcava o H es uniformemente convexa, entonces*

$$u(x,t) = \min_{y \in R^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$$

es la única solución débil del problema de valor inicial (3.12) *para la ecuación de Hamilton-Jacobi.*

Capítulo 5

Aplicaciones y algunas conclusiones

5.1. Aplicaciones

Aplicación 1. Consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}|Du|^2 = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = |x| & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Notemos que $H(p) = \dfrac{1}{2}|p|^2$. Luego,

$$\begin{aligned} &q = D_pH = p, \\ &L(q) = p \cdot q - H(p) = q \cdot q - H(q) = |q|^2 - \frac{1}{2}|q|^2 = \frac{1}{2}|q|^2. \end{aligned}$$

Así, la fórmula de Hopf-Lax para la única solución débil de (5.1) es dada por

$$u(x,t) = \min_{y \in R^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + |y| \right\} = \min_{y \in R^n} \left\{ \frac{|x-y|^2}{2t} + |y| \right\}. \tag{5.2}$$

Asumiendo $|x| > t$. Entonces,

$$D_y\left(\frac{|x-y|^2}{2t} + |y|\right) = \frac{y-x}{t} + \frac{y}{|y|} \quad (|y| \neq 0),$$

y esta expresión es igual a cero si $x = y + \dfrac{y}{|y|}t$, $y = (|x| - t)\dfrac{x}{|x|} \neq 0$.

Por lo tanto,

$$u(x,t) = |x| - \frac{t}{2} \quad \text{si} \quad |x| > t.$$

Si $|x| \leq t$, el mínimo de (5.2) es alcanzado en $y = 0$. Consecuentemente,

$$u(x,t) = \begin{cases} |x| - \dfrac{t}{2} & \text{si} \quad |x| > t, \\ \\ \dfrac{|x|^2}{2t} & \text{si} \quad |x| \leq t. \end{cases}$$

Observe que la solución se vuelve semicóncava en $t > 0$, aún cuando la función inicial $g(x) = |x|$ no sea semicóncava. Esto concuerda con el Lema 4.4.2.

Aplicación 2. Examinaremos el problema con condición inicial invertida:

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}|Du|^2 = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = -|x| & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Por lo hecho anteriormente obtenemos,

$$u(x,t) = \min_{y \in R^n} \left\{ \frac{|x-y|^2}{2t} - |y| \right\}. \tag{5.4}$$

Ahora,

$$D_y \left(\frac{|x-y|^2}{2t} - |y| \right) = \frac{y-x}{t} - \frac{y}{|y|} \quad (|y| \neq 0),$$

y esta expresión es igual a cero si $x = y - \dfrac{y}{|y|}t$, $y = (|x| + t)\dfrac{x}{|x|} \neq 0$.

Así,

$$u(x,t) = -|x| - \frac{t}{2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0).$$

La función inicial $g(x) = -|x|$ es semicóncava y, por lo tanto, la solución también es semicóncava para $t > 0$.

Aplicación 3. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{(u_x)^2}{2} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \\ u = x^2 & \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{5.5}$$

De la aplicación 1, para $t > 0$, se obtiene que la fórmula de Hopf-Lax para la única solución débil de (5.5) es

$$u(x,t) == \min_{y \in R^n} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} + y^2 \right\}. \tag{5.6}$$

Para encontrar un mínimo para algún valor de y fijo, primero derivamos la expresión anterior respecto a y. Luego, igualando a cero y despejando obtenemos que el mínimo se alcanza cuando

$$y = \frac{x}{2t+1}.$$

Así, en (5.6), se obtiene que la solución de (5.5) es dada por

$$u(x,t) = \frac{\left(x - \dfrac{x}{2t+1}\right)^2}{2t} + \left(\frac{x}{2t+1}\right)^2 = \frac{x^2}{2t+1}$$

Aplicación 4. Sea $\mathcal{E}$ un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t + |Du|^2 = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \\ u = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{E}, \\ \infty & \text{si } x \notin \mathcal{E}, \end{cases} & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Se tiene que

$$H(p) = |p|^2, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{E}, \\ \infty & \text{si } x \notin \mathcal{E}. \end{cases}$$

Siendo, $D^2H(p) = 2I$ semidefinida positiva, se tiene que H es convexa. Además,

$$\lim_{|p|\longrightarrow+\infty} \frac{H(p)}{|p|} = \lim_{|p|\longrightarrow+\infty} |p| = +\infty.$$

Así,

$$L(v) = \max_{p\in\mathbb{R}^n}\{v \cdot p - H(p)\}.$$

Supongamos que este máximo se alcanza en $p' \in \mathbb{R}^n$. Siendo, en particular, p' punto crítico, obtenemos:

$$v = DH(p') = 2p'.$$

Luego,

$$L(v) = 2p' \cdot p' - |p'|^2 = |p'|^2 = \frac{|v|^2}{4}.$$

Como estamos suponiendo que podemos aplicar la fórmula de Hopf-Lax, entonces la solución de (5.7) es dada por

$$u(x,t) = \min_{y\in R^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\} = \min_{y\in R^n} \left\{ \frac{|x-y|^2}{4t} + g(y) \right\}. \tag{5.8}$$

Ahora, si $y \notin \mathcal{E}$, entonces

$$\frac{|x-y|^2}{4t} + g(y) \longrightarrow +\infty.$$

Por lo tanto, de (5.8), la solución de (5.7) viene a ser dada por la siguiente expresión:

$$u(x,t) = \min_{y\in\mathcal{E}} \left\{ \frac{|x-y|^2}{4t} \right\} = \frac{1}{4t} \min_{y\in\mathcal{E}} \left\{ |x-y|^2 \right\} = \frac{1}{4t} d^2(x, \mathcal{E}).$$

5.2. Algunas conclusiones

- La fórmula de Hopf-Lax nos permite hallar una solución para la ecuación de Hamilton-Jacobi

  $$u_t + H(Du) = 0,$$

  aunque no asegura unicidad para esta ecuación.

- Para poder obtener unicidad en este tipo de ecuaciones, tenemos que imponer condiciones tanto a la función inicial g como al Hamiltoniano H.

- Las condiciones para la función g de semiconcavidad o del Hamiltoniano H uniformemente convexa son las que me permite mostrar que la fórmula de Hopf-Lax es la única solución débil de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Bibliografía

[1] Arnold V., *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*, Springer, 1986

[2] Benton S., *The Hamilton-Jacobi Equation: A Global Approach*, Academic Press, 1977.

[3] Brezis H., *Analyse Fonctionnelle*, Mason, 1983.

[4] Carathéodory C., *The Calculus of Variations and Partial Differential Equations of First Order*, Chelsea, 1982.

[5] Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L.,*Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 282 (1984) 487-502.

[6] Crandall M.G., Lions P.-L.,*Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp., 43 (1984), n. 167, 1-19.

[7] Crandall M.G., Ishii H., Lions P.-L., *User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1992) 1-67.

[8] Crandall M.G., Lions P.-L.,*Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983) 1-42.

[9] Evans L.C.,*On Solving Certain Nonlinear Partial Differential Equations by Accretive Operator Methods*, Israel Journal of Mathematics, 36/3 (1980), 225247.

[10] Evans L.C.,*Partial Differential Equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[11] Friedman A.,*The Cauchy problem for first order partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. 23, 27-40 (1973).

[12] Goldstein H.,*Classical Mechanics*, Addison Wesley, 2002.

[13] Hamilton, W. R., *On a general method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function*, Philosophical Transactions of the Royal Society, p. 247-308, 1834.

[14] Hamilton, W. R.,*Second essay on a general method in dynamics*, Philosophical Transactions of the Royal Society, p. 95-144, 1835.

[15] Hopf E.,*Generalized solutions of nonlinear equations of first order*, J. Math. Mech. 14 (1965) 951-973.

[16] Kao, C., Osher, S., Qian, J.,*Lax-Friedrichs Sweeping Scheme for Static Hamilton-Jacobi Equations*, UCLA CAM report (2003).

[17] Lax P.D., *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Commun. Pure Appl. Math., 10 (1957) 537-566.

[18] Lax P.D.,*Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Approximation*, Comm. Pure Appl. Math., 7 (1954), 159-193.

[19] J-L. Lions and E. Magenes, *Problém̀s aux limites non homogènes et applications*. Vol 1, Travaux et Recherches Mathemátiques, No. 17, Dunod, Paris, 1968.

[20] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* McGraw Hill, 2da edição, 1974(traducción al español, Alabama 1979).