Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Físicas
Escuela Profesional de Física

Constricción de parámetros y análisis a nivel "background" del modelo cosmológico üΛCDM

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

AUTOR

Gustavo Andres CONCHA VALDEZ

ASESOR

Dr. Teófilo VARGAS AUCCALLA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Concha, G. (2024). *Constricción de parámetros y análisis a nivel "background" del modelo cosmológico üΛCDM*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Escuela Profesional de Física]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos del autor	
Nombres y apellidos	Gustavo Andres Concha Valdez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	77342293
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-1609-8116
Datos del asesor	
Nombres y apellidos	Teófilo Vargas Auccalla
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06532544
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-9833-3887
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Fulgencio Villegas Silva
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09202973
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	José Domingo Arbañil Vela
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	41345341
Datos de la investigación	
Línea de investigación	B.13.0.4 – Cosmología y Gravitación
Grupo de investigación	Grupo de Física Teórica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento

Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas 12°03'36.5"S 77°04'53.9"W de longitud y -12.060126, -77.081642 de latitud
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2022 – 2023
URL de disciplinas OCDE	1.03.08 – Astronomía http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.08 1.03.03 – Física de partículas, Campos de la Física http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.03 1.01.03 – Estadísticas, Probabilidad http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.03

UNMSM
Firmado digitalmente por SOLANO SALINAS Carlos Javier FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 20.12.2024 14:53:42 -05:00

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PRESENCIAL PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

Siendo las 10:00 horas del Jueves 19 de diciembre de 2024, en el Salón de Grados de la Facultad de Ciencias Físicas (Auditorio 109), bajo la Presidencia del Dr. Fulgencio Villegas Silva (Presidente), Dr. José Domingo Arbañil Vela (Miembro Titular), Dr. Teófilo Vargas Aucalla (Asesor) y Dr. Rafael Eduardo Carlos Reyes (Miembro Suplente), se dió inicio a la Sesión Pública de Sustentación de Tesis para optar el título de Licenciado en Física mediante la sustentación y aprobación de una tesis, del Bachiller:

GUSTAVO ANDRES CONCHA VALDEZ

Dando lectura al Resumen del Expediente, el Presidente del Jurado, invitó al bachiller Gustavo Andres Concha Valdez a realizar una exposición del Trabajo de Tesis titulada: "Constricción de parámetros y análisis a nivel "background" del modelo cosmológico üΛCDM".

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado, el Presidente, invitó al bachiller y al público a abandonar momentáneamente la Sala de Sesión, para dar paso a la deliberación y calificación por parte del Jurado.

Al término de la deliberación del Jurado el Dr. Fulgencio Villegas Silva, invitó al candidato y al público a pasar a la Sala de Sesión, para dar lectura al resultado de la deliberación. Ha obtenido la calificación de:

20	VEINTE	MAXIMOS HONORES
(NÚMERO)	(LETRAS	(MENCIÓN)

Finalmente, el Presidente del Jurado, propone al consejo de la Facultad que se le declare Licenciado en Física al bachiller Gustavo Andres Concha Valdez. Siendo las 11:00 horas, se levanta la sesión.

Dr. Fulgencio Villegas Silva
Presidente

Dr. José Domingo Arbañil Vela
Miembro Titular

UNMSM
Firmado digitalmente por SOLANO SALINAS Carlos Javier FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 20.12.2024 14:54:02 -05:00

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

Dr. Teófilo Vargas Auccalla
Asesor

Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes
Miembro Suplente

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú, Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

CALIFICACIÓN DEL JURADO

GUSTAVO ANDRES CONCHA VALDEZ

SUSTENTACIÓN DE TESIS

"Constricción de parámetros y análisis a nivel "background" del modelo cosmológico üΛCDM"

JURADO CALIFICADOR	NOTA	FIRMA
Dr. Fulgencio Villegas Silva PRESIDENTE	20	
Dr. José Domingo Arbañil Vela MIEMBRO TITULAR	20	
PROMEDIO FINAL	20.	

En caso de inasistencia del Miembro Titular del Jurado Examinador del Trabajo de Tesis, se deberá utilizar el siguiente cuadro:

Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes MIEMBRO SUPLENTE		
PROMEDIO FINAL		

CONDICIÓN :

HORA : 10:00 horas

FECHA : Jueves 19 de diciembre de 2024

Dirección: Calle Germán Amézaga N.º 375 - Lima
Facultad de Ciencias Físicas
Apartado Postal: 14-0149 – Lima 14 Perú

Escuela Profesional de Física
6197000 Anexo 3805
E-mail eapfis@unmsm.edu.pe

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Teófilo Vargas Auccalla en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal (COMITÉ DE GESTIÓN) No 123-EPF-FCF-24 de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es Constricción de parámetros y análisis a nivel "background" del modelo cosmológico üΛCDM, presentado por el bachiller/magíster/egresado/licenciado/estudiante Gustavo Andres Concha Valdez para optar el grado/título/especialidad de Licenciado en Física CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 6 % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor

DNI:06532544

Nombres y apellidos del asesor: Teófilo Vargas Auccalla

Huella digital

Resumen

En este trabajo se determina los parámetros libres considerados dentro del modelo cosmológico üΛCDM. También se ejecuta un análisis de los parámetros de desaceleración y jerk correspondientes al modelo. Se reporta valores de $h = 0.732^{+0.013}_{-0.013}$, $\Omega_{0\Lambda} = 0.689^{+0.006}_{-0.006}$ y $z_{\oplus} = 0.395^{+0.114}_{-0.137}$ para el parámetro libre de esta nueva teoría, como también un redshift de transición de $z_T = 0.752^{+0.064}_{-0.061}$. Además, se explora la posibilidad de explicar la expansión acelerada del universo en ausencia de una constante cosmológica, el modelo üCDM, para el cual se obtiene $h = 0.735^{+0.013}_{-0.013}$, $z_{\oplus} = 1.220^{+0.087}_{-0.081}$ y $z_T = 0.686^{+0.066}_{-0.061}$. El análisis muestra que, aunque los datos prefieren el modelo de correspondencia ΛCDM, über-gravity es capaz de asemejar la expansión causada por una constante cosmológica. Sin embargo, la incógnita respecto de la naturaleza de esta expansión queda abierta.

Palabras clave: cosmología de background, über-gravity, modelos cosmológicos.

Abstract

In this work the free parameters considered within the üΛCDM cosmological model are determined. An analysis of the deceleration and jerk parameters of the model is also executed. Values of $h = 0.732^{+0.013}_{-0.013}$, $\Omega_{0\Lambda} = 0.689^{+0.006}_{-0.006}$ and $z_{\oplus} = 0.395^{+0.114}_{-0.137}$, the new free parameter of this theory, are reported, as well as a transition redshift of $z_T = 0.752^{+0.064}_{-0.061}$. Moreover, the possibility of explaining the accelerated expansion of the universe in the abscence of a cosmological constant, the üCDM model, is explored, for which the values $h = 0.735^{+0.013}_{-0.013}$, $z_{\oplus} = 1.220^{+0.087}_{-0.081}$ and $z_T = 0.686^{+0.066}_{-0.061}$ are obtained. The analysis shows that, although the data prefer the correspondence model ΛCDM, über-gravity is able to resemble the expansion caused by a cosmological constant. However, the mystery regarding the nature of this expansion remains open.

Keywords: background cosmology, über-gravity, cosmological models.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, que me dio el apoyo, confianza y herramientas para prepararme para la universidad y estudiar una ciencia pura. Su respaldo y el objetivo de sacarnos adelante como proyecto familiar jugaron un rol importantísimo en el desarrollo de esta primera parte de mi carrera profesional.

Quiero agradecer a mi asesor, Dr. Teófilo Vargas Auccalla, quien me recibió en el Grupo de Física Teórica y me orientó en dicha rama de esta ciencia. El acompañamiento que supo darme, así como su gran dedicación al desarrollo de la física teórica en el país, fueron inspiración para seguir explorando más, formarme, investigar y tomar mejores decisiones. En esta misma línea, agradezco al profesor Fulgencio Villegas Silva por sus enseñanzas y entrega apasionada como docente y guía para los estudiantes.

Agradezco a mi coasesor, Dr. Miguel Ángel García Aspeitia, quien fue mi principal mentor al adentrarme en cosmología y principal guía en el presente proyecto. Las sesiones de clase y discusiones en torno al tema, y más aún durante la investigación desarrollada, me dejaron inolvidables aprendizajes, tanto a nivel académico como personal. Aprecio enormemente su apertura, disposición y su incondicional respaldo al presentarme a diferentes eventos académicos: un gran referente en esta etapa de mis estudios.

Agradezco a los otros miembros del equipo con el que se llevó a cabo la investigación de la cual forma parte este estudio: Claudia Quintanilla, Alberto Hernández Almada y Verónica Motta. Además de conocer de primera mano lo que significa realizar publicaciones y el camino que se sigue para construir un artículo, con ellos pude potenciar mis habilidades de investigación. Formar parte de este equipo me permitió, sin duda, abrir mi mente y replantear mi perspectiva con respecto a la labor científica.

Doy gracias también a los compañeros y compañeras con quienes pude compartir este primer nivel de instrucción superior, con quienes los estudios fueron más productivos y amenos. Los llevo conmigo en los siguientes pasos de mi formación, consciente de que seremos quienes sostengan el desarrollo de la física el día de mañana.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y a la Facultad de Ciencias Físicas por la formación de calidad que me dieron.

Índice general

Resumen I

Abstract II

Agradecimientos III

Índice general IV

Índice de figuras VI

1. Introducción **1**

1.1. Antecedentes 1

1.2. Objetivos 2

2. Relatividad General **4**

2.1. Relatividad especial 4

2.2. El tensor métrico 6

2.3. Geodésicas en el espacio-tiempo 7

2.4. Geometría del espacio-tiempo 8

2.5. Ecuación de campo de Einstein 9

3. Cosmología de "background" **11**

3.1. Tensor de energía-momento de un fluido ideal y sistema de referencia comóvil . 13

3.2. Coordenadas comóviles 13

3.3. Ecuación de Friedmann 15

3.4. El parámetro de Hubble y los parámetros de densidad 15

3.5. Ecuación de continuidad y ecuación de aceleración 16
3.6. El "redshift" cosmológico 17
3.7. Ley de Hubble 18
3.8. Los fluidos que componen el universo 19
3.9. Dinámica del universo 21
3.10. Parámetro de desaceleración, redshift de transición y "jerk" 21

4. Modelos cosmológicos über-gravity **25**
4.1. El modelo cosmológico üΛCDM 26
4.1.1. Cosmología en üΛCDM 27
4.1.2. Parámetro de desaceleración en üΛCDM 27
4.1.3. Parámetro jerk en üΛCDM 29
4.2. El modelo cosmológico üCDM 30
4.2.1. Cosmología en üCDM 31
4.2.2. Parámetro de desaceleración en üCDM 31
4.2.3. Parámetro jerk en üCDM 32

5. Datos y metodología **34**
5.1. Constricción de parámetros libres 34
5.1.1. Cronómetros cósmicos 34
5.2. Reconstrucción del parámetro de Hubble 35
5.3. Análisis de los parámetros de desaceleración y jerk 36
5.4. Un análisis complementario: comparación estadística con ΛCDM 36

6. Resultados **38**
6.1. Contornos de confianza para los parámetros libres 38
6.2. Parámetros cosmológicos y criterios de información 38

7. Conclusiones **42**

A. Estadística bayesiana en cosmología **44**
A.1. Definiciones 44
A.2. χ^2 y contornos de confianza 45

A.3. Cadena de Markov en Monte Carlo 46
A.3.1. Algoritmo de Metropolis-Hastings 46
A.3.2. Test de convergencia 47

Índice de figuras

3.1. Gráfico original obtenido por E. Hubble [13], que relaciona la velocidad a la que se alejan las galaxias y la distancia a la que se encuentran. 18

3.2. Evolución del parámetro de desaceleración en el modelo cosmológico estándar. Para la construcción se utilizó los valores $\Omega_{0m} = 0.3111$, $\Omega_{0r} = 10^{-5}$ y $\Omega_{0\Lambda} = 0.6889$ [3]. El redshift de transición, según estos valores, se sitúa en $z_T \simeq 0.64$. 23

3.3. Evolución del "jerk" con el redshift, tomando en cuenta $\Omega_{0m} = 0.3111$, $\Omega_{0r} = 10^{-5}$ y $\Omega_{0\Lambda} = 0.6889$. Su valor solo se desvía de $j = 1$ para el universo temprano, y es consecuencia de la presencia de radiación. 24

6.1. Distribuciones posteriores y contornos de confianza para los parámetros libres a 1σ (región interior) y 3σ (región exterior) en el modelo üΛCDM. 39

6.2. Distribuciones posteriores y contornos de confianza para los parámetros libres a 1σ (región interior) y 3σ (región exterior) en el modelo üCDM. 40

6.3. Recontrucción de $H(z)$ (columna izquierda), $q(z)$ (columna central) y $j(z)$ (columna derecha) para los modelos üΛCDM y üCDM. El punto sólido indicado sobre las gráficas señala el valor de $z_\oplus$ que mejor se ajusta a los datos observacionales. 40

Dedicado a mi familia.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Desde su surgimiento a inicios del siglo pasado, la teoría de la relatividad general ha cosechado grandes éxitos. Por mencionar algunos, el cálculo correspondiente a la precesión de la órbita del planeta mercurio, la deflexión de la luz provocada por cuerpos masivos o el corrimiento al rojo gravitacional. Más aun, en el marco de esta misma teoría, las observaciones realizadas por Riess [1] y Perlmutter [2], entre otros, ofrecieron evidencia de la expansión acelerada del universo, hecho también confirmado por la colaboración Planck [3].

El ente, de naturaleza aún desconocida, responsable de esta aceleración es llamado energía oscura. La forma más aceptada de modelar la energía oscura es el uso de la constante cosmológica, Λ. Esta constante fue introducida por primera vez en las ecuaciones de campo por el mismo Einstein [4], aunque con motivaciones distintas.

El modelo cosmológico estándar actual es referido como ΛCDM. Λ refiere a la mencionada constante cosmológica, y se contempla, adicionalmente, un componente de materia oscura fría (CDM, "cold dark matter") en el universo. La sorprendente capacidad de este modelo de reproducir con precisión diversos datos observacionales lo establecen como el mejor candidato a la fecha, sin ningún potencial competidor a la altura. No obstante, las diversas limitaciones y/o inconsistencias de ΛCDM concentran los esfuerzos de los científicos en dilucidar de qué manera puede mejorarse el entendimiento que se tiene del universo a grandes escalas.

En este contexto, un problema abierto fundamental en la cosmología moderna es el cálculo

de la tasa de expansión actual del universo: la constante de Hubble H_0. Aunque años atrás podían coexistir, la continua reducción de errores ha hecho notar un agudo contraste en los valores obtenidos por las colaboraciones Planck [3] y SH0ES [5], con discrepancias por encima de los 4σ. Este conflicto es conocido como la *tensión de Hubble*.

Aunque una vía de solución que siguen muchos científicos es realizar ajustes en el modelo, también ha cobrado fuerza la idea de explorar más allá del mencionado ΛCDM.

La presente investigación se centra en una propuesta de esta índole: el modelo cosmológico üΛCDM. Este modelo se sostiene en la teoría gravitacional "über-gravity" [6] (de donde proviene la letra adicional ü en las siglas, aunque se mantiene la constante cosmológica y la caracterización de materia oscura fría), que, por un procedimiento inspirado en la física estadística, describe la gravedad como resultado de un promedio estadístico sobre teorías de gravitación $f(R)$ [7]. Si bien no es claro qué criterio se debe utilizar para asignar probabilidades a cada teoría (y en qué regímenes), las propiedades globales del modelo pueden ser estudiadas. En el contexto de üΛCDM, la tensión H_0 se interpreta como señal de una transición en la teoría gravitacional [8], potencialmente aliviando el problema.

1.2. Objetivos

El objetivo general de la presente tesis es determinar los valores adoptados por los parámetros libres del modelo cosmológico üΛCDM. Para esto se emplea métodos de la estadística bayesiana, recurriendo a datos observacionales del parámetro de Hubble ("observational Hubble data", OHD) obtenidos de cronómetros cósmicos por el método de edad diferencial y recopilados en [9]. Los objetivos secundarios son:

- Calcular el parámetro de desaceleración del modelo cosmológico üΛCDM, así como el redshift de transición (punto en el que la expansión del universo comienza a ser acelerada).
- Obtener el parámetro jerk del modelo cosmológico üΛCDM, con el fin de esclarecer la naturaleza de la aceleración.
- Determinar en qué medida el marco de über-gravity podría explicar la expansión acelerada del universo sin necesidad de utilizar una constante cosmológica para la descripción de

la energía oscura. Para esto, se calcula las cantidades mencionadas omitiendo a Λ en las ecuaciones.

El análisis se enmarca en el contexto de la cosmología de “background”.

Capítulo 2

Relatividad General

La teoría general de la relatividad está establecida como el paradigma actual que describe los fenómenos gravitatorios. Planteada por el físico alemán Albert Einstein en el año 1915, esta teoría concibe la gravitación como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. En esta sección se estudia los conceptos más importantes para su entendimiento, comenzando por una revisión de la relatividad especial y el espacio-tiempo plano para posteriormente analizar a física desde un espacio-tiempo curvo.

2.1. Relatividad especial

La teoría de la relatividad especial se construye estableciendo que las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales. Además, Einstein planteó la constancia de la velocidad de la luz, precisamente, como una ley de la física. La idea de que distintos observadores midan siempre la misma cantidad c, como suele denotarse a tal rapidez, sugiere que al pasar de un sistema de referencia a otro, las transformaciones adecuadas no son las galileanas, como se había llevado a cabo en la física newtoniana. Así, se determinó que la forma correcta de transformar las coordenadas entre un sistema inercial y otro estaba dada por las transformaciones de Lorentz.

La forma de las ecuaciones obtenidas significó un punto de quiebre significativo en la física de entonces, al notarse que el tiempo y el espacio son relativos al observador. El espacio y tiempo solo tienen sentido al interpretarlos como espacio-tiempo: una variedad de 4 dimensiones, tres

Transformación entre sistemas	
Galileo	Lorentz
$t' = t$	$t' = \gamma\,(t - vx)$
$x' = x - vt$	$x' = \gamma\,(x - vt)$
$y' = y$	$y' = y$
$z' = z$	$z' = z$

Cuadro 2.1: Transformaciones de Galileo y de Lorentz para un sistema de referencia que se mueve respecto de otro con velocidad v en la dirección x, considerando $c = 1$. En estos cálculos, $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$, donde $\beta = v$.

espaciales y una temporal, a menudo llamada "espacio-tiempo de Minkowski" en este marco. En adelante, se utiliza unidades tales que $c = \hbar = k_B = 1$, lo que se conoce como el sistema de unidades naturales.

Siguiendo esta misma línea, los vectores tridimensionales dejan de ser los más adecuados para codificar puntos en 4 dimensiones. En relatividad especial se recurre al uso de cuadrivectores, que incluyen una entrada temporal que permite pensar en un punto en el espacio-tiempo como un *evento*. En el espacio-tiempo de Minkowski un evento se representa mediante el cuadrivector de *posición* (en coordenadas cartesianas) dado por

$$x^\mu = (t, x, y, z)\,, \tag{2.1}$$

donde el superíndice μ asume valores de 0 a 3, donde el cero corresponde a la parte temporal. La trayectoria que sigue una partícula que evoluciona en el espacio-tiempo es llamada *línea de mundo*.

El intervalo espacio-temporal es una cantidad que manifiesta ser invariante de Lorentz. Se expresa como

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\,, \tag{2.2}$$

o, en su forma diferencial (llamada *elemento de línea* del espacio-tiempo),

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\,. \tag{2.3}$$

El caso en que el intervalo es nulo, $\Delta s^2 = 0$, da lugar al cono de luz, que es la superficie sobre la que descansan todas las líneas de mundo seguidas por rayos luminosos.

El hecho de que sea invariante ante las transformaciones de Lorentz garantiza que dos observadores diferentes podrán estar de acuerdo en su valor. En ese sentido, es una cantidad que resulta de interés, dado que permite medir "distancias" en el espacio-tiempo como enlace para conectar puntos de vista de diferentes observadores.

La relatividad especial es una poderosa teoría que fue capaz de resolver muchos problemas de la teoría electromagnética en su momento. Sin embargo, debido a que la gravedad de Newton no es invariante de Lorentz, su validez está restringida a la ausencia de campos gravitatorios o, en su defecto, a campos extremadamente débiles. Para contemplar la gravedad, es necesario plantear una teoría que sea capaz de resolver estos problemas.

2.2. El tensor métrico

La métrica es la herramienta que codifica la forma correcta de calcular distancias en el espacio-tiempo. Para un punto x sobre una variedad diferencial, la métrica se define mediante

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu\,, \tag{2.4}$$

donde es necesario colocar el intervalo en su forma diferencial para mayor precisión, pues la variedad es, en general, curva. En la notación utilizada se aplica la *notación de Einstein*, que implica que un superíndice y subíndice repetidos denotan una suma implícita, cubriendo todos los valores posibles que asumen.

En un espacio de tres dimensiones euclídeo las distancias se miden, en coordenadas cartesianas, como

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,. \tag{2.5}$$

Esta expresión puede extenderse convenientemente, de manera tal que sea posible observar

$$dl^2 = 1dxdx + 1dydy + 1dzdz + 0dxdy + 0dydx + 0dxdz + 0dzdx + 0dydz + 0dydz\,, \tag{2.6}$$

por lo que el tensor métrico puede representarse, en forma matricial, de la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{\mu\nu} \, . \tag{2.7}$$

Por otro lado, en coordenadas cilíndricas y esféricas, respectivamente, se tendría

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \, , \tag{2.8}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \, , \tag{2.9}$$

por lo que el tensor métrico se escribe, respectivamente, como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} . \tag{2.10}$$

Para el caso del espacio-tiempo de Minkowski, de geometría plana y con elemento de línea dado por la ecuación 2.3, el tensor métrico se representa matricialmente como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.11}$$

Así como en esta sección, la signatura $(-,+,+,+)$ se seguirá utilizando a lo largo de la presente tesis.

2.3. Geodésicas en el espacio-tiempo

No hay experimento que una persona que viaja en un cohete propulsado con una aceleración igual a la gravedad terrestre pueda realizar para discernir si se encuentra en reposo sobre la superficie de la tierra o, en efecto, viajando con el cohete. Este concepto, conocido como el principio de equivalencia, es una motivación esencial en la relatividad general. A través de esto se pasa a extender la invariancia de las leyes de la física a todo observador, independientemente de la inercialidad o no de su sistema de referencia. De aquí la necesidad de darle a las leyes

de la física forma tensorial, pues estos elementos son invariantes ante transformaciones de coordenadas.

La relatividad general propone que el movimiento "natural" que sigue toda partícula es la línea de mundo que se corresponda con una geodésica en el espacio-tiempo curvado. Se entiende geodésica como la curva más directa posible que une dos puntos de la trayectoria. Si una curva, parametrizada por medio del parámetro λ, lo es, la ecuación que ha de verificar es la *ecuación geodésica*, dada por

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0\,. \tag{2.12}$$

En esta expresión $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ es llamado símbolo de Christoffel o conexión afín, que cuantifica la componente μ del cambio del vector unitario $\hat{e}_\alpha$ (definido como un vector tangente a la curva estudiada. Una base de vectores unitarios viene dada escribiendo $\hat{e}_\alpha = \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$) debido a un desplazamiento infinitesimal dx^β, por unidad de distancia en la coordenada. En ese sentido, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ describe el cambio de $\hat{e}_\alpha$ con el cambio de posición y puede calcularse, en función del tensor métrico, como

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\partial_\alpha g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\beta}\right)\,. \tag{2.13}$$

Además, $g^{\mu\rho}$ son las componentes de la inversa del tensor métrico, indicadas convencionalmente con dos superíndices.

Adicionalmente, los símbolos de Christoffel permiten introducir la operación de la derivada covariante, una operación invariante bajo el cambio de coordenadas (en ese sentido, se transforma como tensor) y que es definida, al aplicarse sobre componentes contravariantes, como

$$\nabla_\alpha V^\beta = \partial_\alpha V^\beta + \Gamma^\beta_{\rho\alpha}V^\rho\,, \tag{2.14}$$

mientras que para componentes covariantes se escribe

$$\nabla_\alpha V_\beta = \partial_\alpha V_\beta - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}V_\rho\,. \tag{2.15}$$

2.4. Geometría del espacio-tiempo

La relatividad general interpreta la gravitación como consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo; en ese sentido, se debe abordar el problema desde un punto de vista geométrico.

Para determinar si el espacio está o no curvado es necesario recurrir al tensor de Riemann, cuyas componentes se calculan según

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} \,. \tag{2.16}$$

Este tensor codifica toda la información concerniente a las características geométricas de la variedad diferencial bajo estudio, en este caso, el espacio-tiempo. A partir del tensor de Riemann se construyen dos cantidades fundamentales en la geometría diferencial, tales como el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} \tag{2.17}$$

y el escalar de Ricci, que se obtiene contrayendo este último tensor de la forma

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} \,. \tag{2.18}$$

Es importante mencionar la interpretación geométrica de estas cantidades. El tensor de Ricci contiene información acerca del cambio en el volumen de una esfera que se desplaza en el espacio-tiempo. Si existe curvatura, la convergencia o divergencia de líneas geodésicas provocará que la esfera se contraiga o expanda en volumen. Cabe mencionar que este tensor únicamente detecta cambios en el tamaño de la esfera en cuestión, mas no los cambios en su forma.

Por otro lado, el escalar de Ricci codifica cómo el tamaño de una bola se desvía de su equivalente en geometría plana. Cuando la curvatura es positiva ($R > 0$), el espacio se deforma "comprimiendo" la bola, haciéndola más pequeña. En constraste, cuando la curvatura es negativa ($R < 0$) la bola se hace más grande que su contraparte plana. Una analogía frecuentemente usada para ilustrar ambos casos la de una esfera para el primer caso y una silla de montar para el segundo. [10]

2.5. Ecuación de campo de Einstein

La ecuación fundamental en la teoría de la relatividad general es la ecuación de campo de Einstein, que describe la dinámica del espacio-tiempo ante la presencia de materia. Si se denota $G_{\mu\nu}$ como el tensor de Einstein, se escribe

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \,. \tag{2.19}$$

En esta expresión, $R_{\mu\nu}$ y R son el tensor y escalar de Ricci (ecuaciones 2.17 y 2.18), $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, G es la constante de gravitación universal de Newton y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, que codifica los campos materiales.

La ecuación de campo, tomando en cuenta los grados de libertad, consta de 10 ecuaciones diferenciales no lineales y acopladas. Su complejidad es notable, en tanto son muy pocas las soluciones analíticas que se conocen. No obstante, es destacable la riqueza de esta ecuación, que en el lado izquierdo presenta elementos netamente geométricos del espacio-tiempo y los iguala, al lado derecho, con la materia que contiene dicho tejido.

Por otro lado, si las ecuaciones de campo se contraen con $g^{\mu\nu}$, se tiene que

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 8\pi G g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\,. \tag{2.20}$$

Luego, ya que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$, al definir $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ se obtiene

$$R = -8\pi G T\,, \tag{2.21}$$

por lo que se puede escribir las ecuaciones de campo, de manera alternativa, como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\,, \tag{2.22}$$

que será una forma en que resulte más útil trabajar para los fines de la presente investigación.

Capítulo 3

Cosmología de "background"

Cuando se estudia el universo a las más grandes escalas se recurre al principio cosmológico, el cual implica dotarlo de dos cualidades esenciales con respecto a su parte espacial: homogeneidad e isotropía. Estos dos conceptos indican que no existen puntos ni direcciones privilegiadas en el cosmos, y se corresponde con lo que las observaciones revelan de él.

Cabe mencionar que el principio cosmológico es solo aplicable a escalas apropiadas: el universo manifiesta homogeneidad e isotropía cuando se trabaja por encima de los 100 Mpc. El pársec (pc) se define como la distancia obtenida por paralaje usando un ángulo de un segundo de arco y el radio de la órbita terrestre. Un pársec representa ~ 3.26 años luz.

La métrica más adecuada para la descripción del universo en tales regímenes es la de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), definida a través del elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right), \tag{3.1}$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ es el diferencial de ángulo sólido y la función temporal $a(t)$ es el *factor de escala*, que contempla la expansión del espacio. La cantidad k indica la curvatura del universo, de forma tal que $k = 0$ representa un espacio plano, $k = 1$, un espacio cerrado y $k = -1$, un espacio abierto. El tensor métrico correspondiente puede representarse matricialmente como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t)\frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

mientras que su inversa estaría dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} . \tag{3.3}$$

Es posible calcular los símbolos de Christoffel para esta métrica, para lo cual resulta práctico reescribir el elemento de línea 3.1 según [11]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j \, , \tag{3.4}$$

de forma que el término $\tilde{g}_{ij}$ contiene a la parte exclusivamente espacial e independiente del tiempo de la métrica, donde los índices en letras latinas asumen valores del 1 al 3.

Con esto, los símbolos de Christoffel no nulos se calculan como

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2}g^{i\alpha}\left(\partial_0 g_{\alpha j} + \partial_j g_{0\alpha} - \partial_\alpha g_{0j}\right) \, . \tag{3.5}$$

Luego,

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j \frac{\dot{a}}{a} = \Gamma^i_{j0} \, , \tag{3.6}$$

donde el punto indica una derivada temporal y la última igualdad es consecuencia de la simetría del símbolo de Christoffel.

Similarmente,

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}g^{0\alpha}\left(\partial_i g_{\alpha j} + \partial_j g_{i\alpha} - \partial_\alpha g_{ij}\right) \, , \tag{3.7}$$

$$\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \, , \tag{3.8}$$

$$\Gamma^0_{ij} = \tilde{g}_{ij}\dot{a}a \, . \tag{3.9}$$

Además,

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{i\alpha}\left(\partial_j g_{\alpha k} + \partial_k g_{j\alpha} - \partial_\alpha g_{jk}\right) \, , \tag{3.10}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2(t)}\tilde{g}^{im}a^2(t)\left(\partial_j \tilde{g}_{mk} + \partial_k \tilde{g}_{jm} - \partial_m \tilde{g}_{jk}\right) \, , \tag{3.11}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\left(\partial_j \tilde{g}_{mk} + \partial_k \tilde{g}_{jm} - \partial_m \tilde{g}_{jk}\right) = \tilde{\Gamma}^i_{jk} \tag{3.12}$$

señalan los coeficientes de la conexión que corresponden a la parte exclusivamente espacial.

Estos cálculos permiten obtener las componentes no nulas del tensor de Ricci, dando como resultado

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}\,, \tag{3.13}$$

$$R_{ij} = \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)\tilde{g}_{ij}\,. \tag{3.14}$$

Cabe mencionar que, debido a que la parte espacial del tensor métrico, codificada en $\tilde{g}_{ij}$, es diagonal, el tensor de Ricci asume una forma diagonal también.

3.1. Tensor de energía-momento de un fluido ideal y sistema de referencia comóvil

Cuando se estudia el universo por encima de los 100 Mpc, lo diluido que se considera que se encuentran sus diferentes componentes hace viable definir el tensor de energía-momento como aquel que modela un fluido perfecto [11], tomando en cuenta la materia, la radiación y la energía oscura, que se verán más a detalle posteriormente. El tensor $T_{\mu\nu}$ asume la forma

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p+\rho)u_\mu u_\nu\,, \tag{3.15}$$

donde p es la presión, ρ, la densidad de energía y u_μ, la 4-velocidad del fluido. Para este caso,

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = pg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + (\rho+p)g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu \tag{3.16}$$

y, por lo previamente descrito,

$$T = 4p - (\rho+p) = 3p - \rho\,. \tag{3.17}$$

3.2. Coordenadas comóviles

El tensor de energía-momento definido previamente es aquel referido a un sistema en reposo. Sin embargo, ¿qué sistema podría considerarse en reposo en un universo en expansión, si se supone que no existe tal cosa en relatividad general? Más aun, ¿a qué sistema coordenado refiere la coordenada t definida en la métrica? Estas aparentes inconsistencias se resuelven mediante la introducción del observador comóvil, lo cual se discute en la presente sección.

Para determinar las líneas geodésicas en un universo descrito por la métrica de FLRW se puede evaluar un ansatz sencillo: la constancia de las coordenadas espaciales. Sea una partícula con coordenadas $(q^t, q^r, q^\theta, q^\phi)$ que se mueve siguiendo un camino de tales características, es decir, desplazándose únicamente en la dirección temporal. Si se designa el parámetro λ para describir dicha trayectoria, las coordenadas quedarían descritas mediante $x^\mu(\lambda) = (q^t + \lambda, q^r, q^\theta, q^\phi)$.

Luego, para verificar si la trayectoria elegida es una geodésica se reemplaza en la ecuación escrita en 2.12. Sin embargo, ya que todas las segundas derivadas son nulas y solo la componente temporal contiene a λ, se tiene que

$$(0) + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 = 0\,, \tag{3.18}$$

de donde

$$\Gamma^\mu_{00} = 0\,. \tag{3.19}$$

Por la forma que adoptan los símbolos de Christoffel en la métrica FLRW, esta última expresión es siempre verdadera, ya que los términos con dos subíndices cero son nulos. Esto muestra que la trayectoria elegida es, en efecto, una línea geodésica.

Para medir longitudes propias se utiliza la expresión

$$l_0 = \int \left\| \frac{d}{d\lambda} \right\| d\lambda\,. \tag{3.20}$$

Suponiendo que se mide sobre la dirección radial, puede tomarse la coordenada r como parámetro, dando lugar a

$$l_0 = \int \left\| \frac{d}{dr} \right\| dr = \int \sqrt{\frac{d}{dr}\cdot\frac{d}{dr}}dr = \int \sqrt{g_{rr}}dr\,, \tag{3.21}$$

$$l_0 = \int \sqrt{\frac{a(t)}{1-kr^2}}dr\,. \tag{3.22}$$

Según los resultados observacionales más recientes obtenidos por la colaboración Planck, el universo se ajusta adecuadamente a una curvatura plana [3]. Si en la expresión anterior se hace $k = 0$, entonces

$$l_0 = a(t)r\,. \tag{3.23}$$

Así, el sistema de referencia comóvil se define como aquel que posee coordenadas espaciales que son constantes en toda línea de mundo. Un sistema de referencia comóvil es, en ese sentido,

uno en el que un observador no se mueve respecto del "fluido cosmológico" [12]. La parte temporal se conoce como *tiempo propio cosmológico*. Dado que las coordenadas espaciales son fijas, se tendrá que $u_i = 0$, mientras que $u_0 = -1$.

Adicionalmente, una consecuencia importante de 3.23 es que, si se toma la longitud propia como la medida entre dos crestas de un haz luminoso, es decir, su longitud de onda, esta evoluciona modificándose de manera proporcional al factor de escala. Este hecho será importante posteriormente.

3.3. Ecuación de Friedmann

Reemplazando los cálculos realizados en la ecuación 2.22, considerando la componente 00, se tiene que

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G\left(pg_{00} + (\rho + p)u_0u_0 - \frac{1}{2}g_{00}(3p - \rho)\right), \tag{3.24}$$

por lo que

$$3\ddot{a} = -4\pi Ga(3p + \rho)\,. \tag{3.25}$$

De manera análoga, para la componente ij se tiene que

$$\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)\tilde{g}_{ij} = 8\pi G\left(pg_{ij} + (p + \rho)u_iu_j - \frac{1}{2}g_{ij}(3p - \rho)\right), \tag{3.26}$$

$$\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)\tilde{g}_{ij} = 4\pi G(\rho - p)a^2\tilde{g}_{ij}\,. \tag{3.27}$$

Si se introduce lo calculado previamente en 3.25, se obtiene

$$a\left(-\frac{4}{3}\pi Ga(3p + \rho)\right) + 2\dot{a}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)a^2\,, \tag{3.28}$$

que, acomodando términos, da lugar a la *ecuación de Friedmann*:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho\,. \tag{3.29}$$

3.4. El parámetro de Hubble y los parámetros de densidad

En este punto es preciso definir el parámetro de Hubble como $H(t) = \dot{a}/a$, así como la constante de Hubble, $H_0 = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$, donde $t = t_0$ representa el tiempo actual. A continuación,

la ecuación de Friedmann, considerando más de un fluido, se puede escribir como

$$H^2(t) + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i \,, \tag{3.30}$$

Por otro lado, se define la densidad crítica como aquella que da lugar a un universo plano en la actualidad. En ese sentido, se requiere eliminar el término que posee a la curvatura k en la ecuación de Friedmann 3.29, por lo que

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \,. \tag{3.31}$$

Este concepto permite definir el *parámetro de densidad* de los diferentes fluidos que componen el universo como

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_i(t) \,. \tag{3.32}$$

3.5. Ecuación de continuidad y ecuación de aceleración

La ecuación de continuidad es una consecuencia de la conservación del tensor de energía-momento. Para su deducción se establece la igualdad

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \,. \tag{3.33}$$

Si se toma el caso $\nu = 0$, se tiene que

$$\nabla_\mu T^\mu_0 = \partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{0\mu} T^\mu_\lambda = 0 \,. \tag{3.34}$$

El desarrollo de esta ecuación da lugar a la *ecuación de continuidad*:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0 \,. \tag{3.35}$$

En caso de existir más de un fluido, se puede escribir como

$$\sum_i [\dot{\rho}_i + 3H(p_i + \rho_i)] = 0 \,. \tag{3.36}$$

Por otro lado, si se deriva temporalmente la ecuación de Friedmann 3.29 y se introduce el resultado de la ecuación de continuidad 3.35, se tiene que

$$\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} - \frac{2k\dot{a}}{a^3} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} \,, \tag{3.37}$$

que, tras operar, se reduce a la *ecuación de aceleración*:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho)\,. \tag{3.38}$$

Nótese que para que el universo acelere se requiere que $\ddot{a} > 0$, lo cual, trabajando con un único fluido, implica que $3p + \rho < 0$. Si se define la *ecuación de estado* de un fluido perfecto como $\omega \equiv p/\rho$, el universo se expande aceleradamente cuando $\omega < -1/3$. En particular, cuando $\omega = -1$ se dice que la expansión acelerada del universo se describe a través de una constante cosmológica.

3.6. El "redshift" cosmológico

Considérese una señal luminosa emitida con una longitud de onda λ_{em}. Si dicha señal se mide proveniente de una galaxia distante y se mide, desde la Tierra, λ_{obs}, el corrimiento al rojo de la galaxia, o "*redshift*", como se le llamará en adelante, se define como

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}}. \tag{3.39}$$

Se vio previamente, en la ecuación 3.23, que el cambio en la longitud de onda de un haz luminoso es proporcional a la evolución del factor de escala. En ese sentido,

$$\frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}} = \frac{a(t_{\text{obs}}) - a(t_{\text{em}})}{a(t_{\text{em}})} = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{em}})} - 1\,. \tag{3.40}$$

Si se toma $t_{\text{ahora}} = t_0$ como el tiempo de observación y $t = t_{\text{em}}$, se tiene que

$$z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)}\,. \tag{3.41}$$

Por convención, al factor de escala en el tiempo presente se le asigna el valor $a(t_0) = 1$. Esto conduce a la conocida expresión

$$\frac{1}{a} = z + 1\,. \tag{3.42}$$

Esta ecuación es muy importante, puesto que permite analizar la expansión del universo, codificada en el factor de escala, en términos del redshift, un observable físico.

3.7. Ley de Hubble

La ley de Hubble establece una importante relación entre la velocidad a la que se observa a las galaxias alejándose de un observador en la tierra y la distancia a la que se encuentran. El astrónomo Edwin Hubble [13] estableció una correlación entre el redshift y la distancia de una significativa muestra de galaxias, obteniendo una relación lineal:

$$z = \left(\frac{1}{c}\right) Hr = Hr\,, \tag{3.43}$$

donde r es la distancia a la que se encuentra la galaxia y H, el parámetro de Hubble.

En su forma más conocida, la ley de Hubble establece que una galaxia se aleja con una velocidad de valor proporcional a la distancia a la que se encuentra, donde el factor de proporcionalidad es el parámetro de Hubble. La forma más conocida de expresar esta ley, siendo v la velocidad (radial) de la galaxia, es

$$v = Hr = \frac{\dot{a}}{a} r\,. \tag{3.44}$$

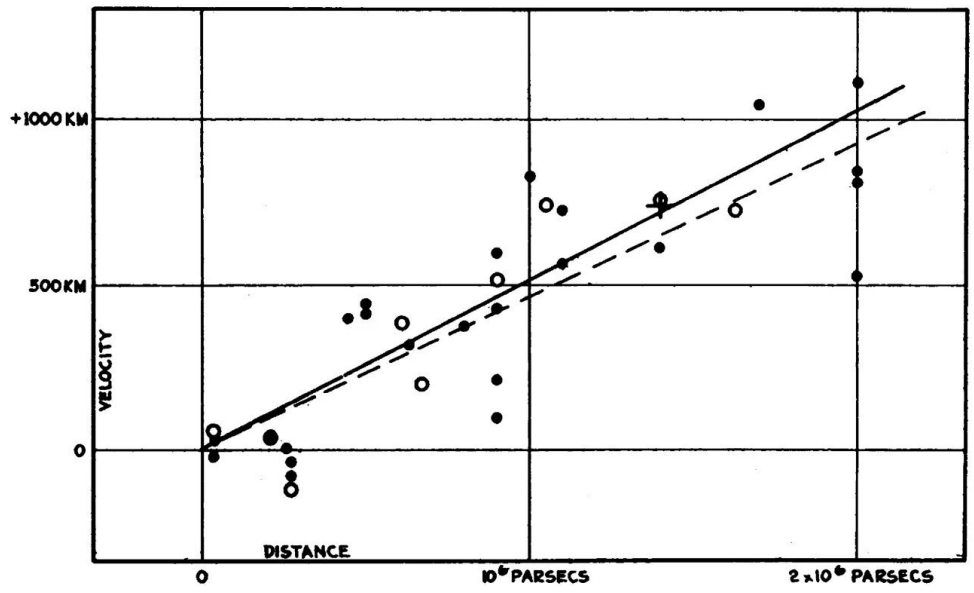

Figura 3.1: Gráfico original obtenido por E. Hubble [13], que relaciona la velocidad a la que se alejan las galaxias y la distancia a la que se encuentran.

3.8. Los fluidos que componen el universo

Los fluidos en el universo pueden escribirse a partir del tensor de energía-momento según su función de distribución [14], de la forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f P^\mu P^\nu \frac{d^3P}{E}\,, \tag{3.45}$$

donde g es el número de estados de espín, P^μ es el 4-momento comóvil y $f = f(t, \vec{x}, \vec{p})$ es la función de distribución del fluido. Además, en un sistema de referencia local se tiene que $T^{ij} = p\delta^{ij}$ y $T^{0i} = (p+\rho)v^i$, donde p y ρ son presión y densidad de energía, por lo que

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f E d^3P\,, \tag{3.46}$$

$$(p+\rho)\vec{v} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f \vec{P} d^3P\,, \tag{3.47}$$

$$p = \frac{g}{3(2\pi)^3} \int f P^2 \frac{d^3P}{E}\,. \tag{3.48}$$

Cuando las partículas bajo análisis no poseen masa, como sucede con los fotones en el caso de la radiación, entonces $E = P$. Esto, considerando la primera y tercera de las expresiones anteriores, lleva de inmediato a la relación

$$p = \frac{1}{3}\rho\,. \tag{3.49}$$

La función de distribución en el equilibrio termodinámico para una temperatura T adopta la forma

$$f(P) = \frac{1}{e^{(E(P)-\mu(T))/T} \pm 1}\,, \tag{3.50}$$

donde la suma indica la distribución de Fermi-Dirac y la resta, la distribución de Bose-Einstein.

Otro punto importante a estudiar es la evolución en la historia del universo de los distintos fluidos que lo componen. La radiación, compuesta por fotones y neutrinos, a los que, a estas escalas, se considera como partículas relativistas, verifica la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho}_r + 3H\left(\rho_r + \frac{1}{3}\rho_r\right) = 0\,, \tag{3.51}$$

donde se ha utilizado la relación 3.49. El subíndice r indica, precisamente, radiación. Resolver esta ecuación da como resultado

$$\rho_r = \rho_{0r} a^{-4} = \rho_{0r}(z+1)^4\,, \tag{3.52}$$

en donde ρ_{0r} indica la densidad de la radiación en la actualidad.

Para el estudio de la evolución de la materia, que contempla la materia bariónica y la materia oscura, se le considera de tipo polvo. Esto es, que la materia, a estas escalas, está compuesta por partículas no interactuantes. Los fluidos perfectos se modelan como polvo en el límite en que su presión tiende a cero [12]. Haciendo $p = 0$, la ecuación de continuidad de la materia se escribe como

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0\,. \tag{3.53}$$

La resolución de esta ecuación da lugar a

$$\rho_m = \rho_{0m} a^{-3} = \rho_{0m}(z+1)^3\,, \tag{3.54}$$

donde, análogamente a lo anterior, ρ_{0m} indica la densidad de materia en el presente.

Para estudiar la evolución de la energía oscura es conveniente colocar en la ecuación de continuidad la ecuación de estado. En ese sentido, se escribe

$$\dot{\rho}_{de} + 3H\left(\omega_{de} + 1\right)\rho_{de} = 0\,, \tag{3.55}$$

lo que da lugar a la expresión

$$\rho_{de} = \rho_{0de} a^{-3(\omega_{de}+1)}\,, \tag{3.56}$$

donde ρ_{0de} es su densidad en la actualidad. Para el caso de una constante cosmológica, lo que implica $\omega_{de} = \omega_\Lambda = -1$, se tiene que $\rho_\Lambda = \rho_{0\Lambda}$, es decir, la densidad de la constante cosmológica permanece constante.

Más aún, en la ecuación de Friedmann 3.29, para una constante cosmológica, se tiene que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{0\Lambda}\,, \tag{3.57}$$

de donde

$$a(t) = e^{t\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{0\Lambda}}}\,. \tag{3.58}$$

Así, bajo la influencia de una constante cosmológica el universo evoluciona expandiéndose de forma exponencial.

3.9. Dinámica del universo

Tomando en cuenta una curvatura plana en el universo, como también los cálculos realizados en la sección previa en la ecuación de Friedmann (en su forma planteada en 3.30), es posible condensar la cosmología del modelo ΛCDM en la siguiente ecuación:

$$H^2(z) = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{0r}(z+1)^4 + \rho_{0m}(z+1)^3 + \rho_{0\Lambda}\right) . \tag{3.59}$$

Al dividir entre H_0^2 y definiendo $E^2(z) \equiv H^2(z)/H_0^2$, la expresión anterior puede reescribirse como

$$E^2(z) = \Omega_{0r}(z+1)^4 + \Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0\Lambda} , \tag{3.60}$$

que se conoce como la *ecuación de Friedmann adimensional*. Adicionalmente, la *constricción de Friedmann* exige que

$$\Omega_{0r} + \Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda} = 1 . \tag{3.61}$$

La ecuación 3.61 asegura que basta determinar dos de los parámetros de densidad para obtener el tercero. En ese sentido, los *parámetros libres* en ΛCDM, a nivel "background", son dos de estos parámetros de densidad (queda a criterio del investigador cuál colocar en términos de los otros dos) y la constante de Hubble adimensional h, definida según

$$H_0 = 100\ h\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}. \tag{3.62}$$

Cabe señalar que cuando se estudia el universo tardío la radiación no juega un rol importante. Las observaciones actuales sitúan la densidad de la radiación alrededor de los 10^{-5}, por lo que es una cantidad que, usualmente, se ignora. Por ello, en la presente tesis se considera los parámetros libres h y $\Omega_{0\Lambda}$ en el contexto del modelo cosmológico estándar.

3.10. Parámetro de desaceleración, redshift de transición y "jerk"

Es posible tomar el factor de escala y expandirlo alrededor del tiempo presente. Para esto, resulta útil escribir

$$a(t) = a(t_0 - (t_0 - t)). \tag{3.63}$$

Si se conserva los cuatro primeros términos de la expansión, se tiene

$$a(t) \approx a(t_0) - (t_0 - t)\dot{a}(t_0) + \frac{1}{2}(t_0 - t)^2\ddot{a}(t_0) - \frac{1}{6}(t_0 - t)^3\dddot{a}(t_0) + ... \tag{3.64}$$

Factorizando $a(t_0)$, se puede reescribir la ecuación anterior como

$$a(t) \approx a(t_0)\left(1 - (t_0 - t)H(t_0) - \frac{1}{2}(t_0 - t)^2 q(t_0)H^2(t_0) - \frac{1}{6}(t_0 - t)^3 j(t_0)H^3(t_0) + ...\right). \tag{3.65}$$

Esta última expresión es de utilidad para definir los parámetros cosmológicos de interés.

Se define el parámetro de desaceleración como

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)H^2(t)}\,. \tag{3.66}$$

Para un universo en expasión acelerada, se espera que $q < 0$. En términos del redshift, el parámetro de desaceleración puede escribirse como

$$q(z) = \frac{(z+1)}{2E^2(z)}\frac{dE^2(z)}{dz} - 1\,, \tag{3.67}$$

que es una cantidad más sencilla de ser calculada. En el caso del modelo cosmológico estándar, ΛCDM, el parámetro de desaceleración tiene la forma

$$q(z) = \frac{4\Omega_{0r}(z+1)^4 + 3\Omega_{0m}(z+1)^3}{2\left[\Omega_{0r}(z+1)^4 + \Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0\Lambda}\right]} - 1\,, \tag{3.68}$$

cuya evolución con el redshift se ilustra en la figura 3.2. Para un adecuado análisis de esta gráfica, cabe señalar que, por convención, y en adelante, se toma el tiempo actual como $t_0 = 0$.

Cabe señalar que el parámetro de desaceleración establece un criterio para determinar el momento en que el universo pasa a tener una expansión de carácter acelerado. Para esto, solo es necesario obtener el redshift para el cual sucede el cambio de signo en q, conocido como *redshift de transición* z_T. Para su cálculo es necesario resolver $q(z_T) = 0$.

Por otro lado, el parámetro "jerk" es usado tradicionalmente como medio para probar modelos de energía oscura con geometría espacialmente plana [15]. Este parámetro se define como

$$j(t) \equiv \frac{\dddot{a}(t)}{a(t)H^3(t)}\,. \tag{3.69}$$

Si se escribe en términos del redshift y del parámetro de desaceleración, adopta la forma

$$j(z) = q(z)\,(2q(z) + 1) + (z+1)\,\frac{dq(z)}{dz}\,. \tag{3.70}$$

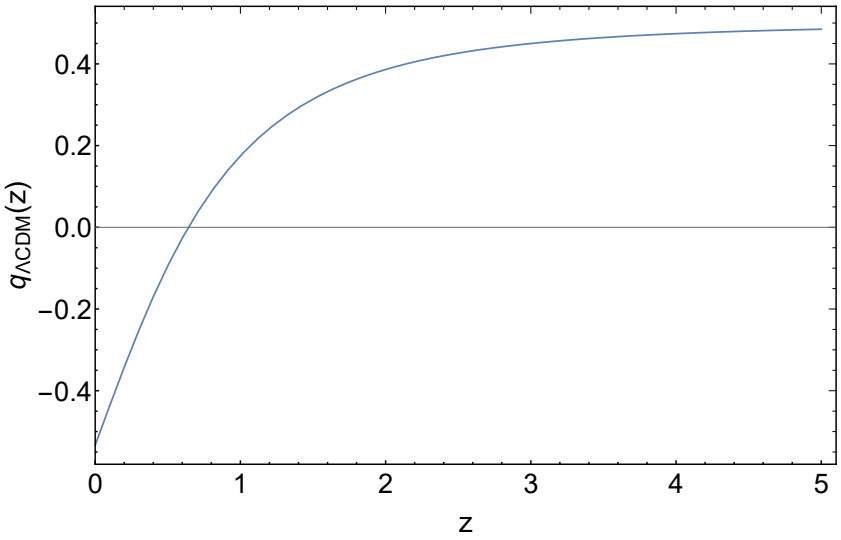

Figura 3.2: Evolución del parámetro de desaceleración en el modelo cosmológico estándar. Para la construcción se utilizó los valores $\Omega_{0m} = 0.3111$, $\Omega_{0r} = 10^{-5}$ y $\Omega_{0\Lambda} = 0.6889$ [3]. El redshift de transición, según estos valores, se sitúa en $z_T \simeq 0.64$.

En el modelo cosmológico estándar el parámetro "jerk" adopta la forma analítica

$$j(z) = \frac{\Omega_{0m}(z+1)^3 + 3\Omega_{0r}(z+1)^4 + \Omega_{0\Lambda}}{\Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0r}(z+1)^4 + \Omega_{0\Lambda}}\,, \tag{3.71}$$

cuya evolución se ilustra en la figura 3.3.

El "jerk" manifiesta una tendencia $j(0) = 1$, que se interpreta como indicador de que la aceleración del universo es causada por una constante cosmológica. Una característica a destacar es que en ΛCDM el parámetro "jerk" se mantiene pegado a $j = 1$ durante toda la época de dominación de la materia [16], modificando su valor muy ligeramente en redshifts posteriores.

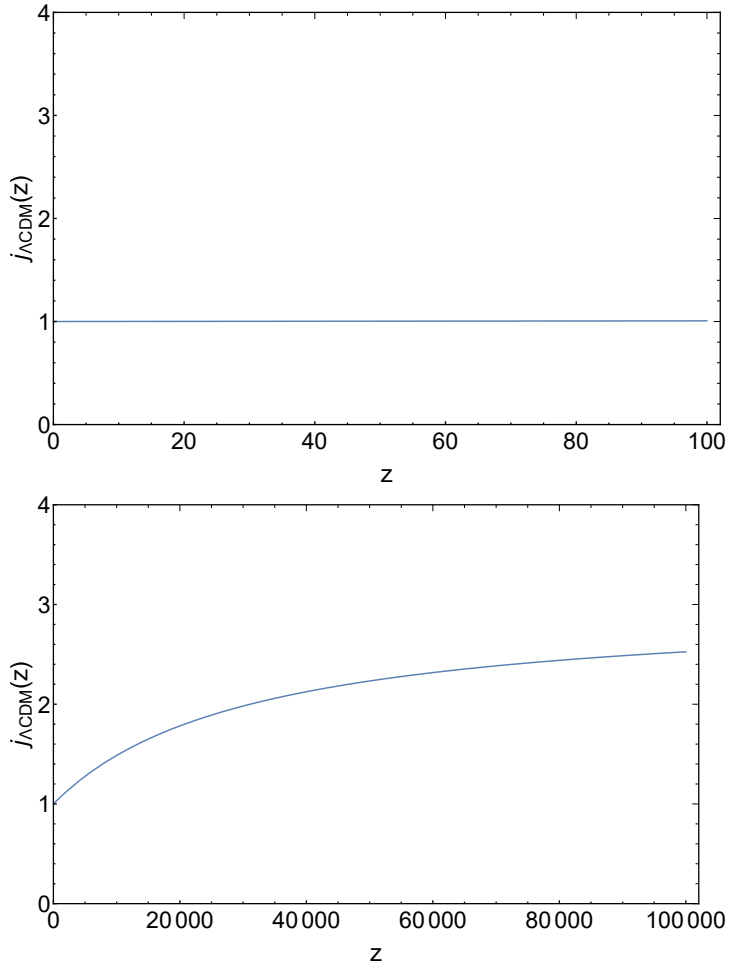

Figura 3.3: Evolución del "jerk" con el redshift, tomando en cuenta $\Omega_{0m} = 0.3111$, $\Omega_{0r} = 10^{-5}$ y $\Omega_{0\Lambda} = 0.6889$. Su valor solo se desvía de $j = 1$ para el universo temprano, y es consecuencia de la presencia de radiación.

Capítulo 4

Modelos cosmológicos über-gravity

Un problema latente de la cosmología moderna es el de la constante cosmológica. Como se mencionó previamente, tal constante es la forma más adecuada en que hoy en día se sabe modelar al ente responsable de la expansión acelerada del universo. Concretamente, el problema es la amplia discrepancia entre su valor observacional y la predicción teórica. Tomando en cuenta que la cosmología es, después de todo, una solución a las ecuaciones de campo de Einstein, una de las posibles formas de abordar este problema es la modificación de la relatividad general misma, es decir, cómo se entiende la interacción gravitacional.

En este contexto, la propuesta del científico Nima Khosravi resulta atractiva. Además de que propone una modificación a la relatividad general, lo cual podría arrojar cierta luz en la búsqueda de respuestas, también ha mostrado ser prometedora en cuanto al problema de la tensión H_0, recurriendo a una transición de fase para ello [17].

Se sostiene que, en lugar de buscar una teoría gravitacional que gobierne los fenómenos gravitatorios, debería reconocerse los logros de cada una en los regímenes en los que mejor éxito tienen. Para construir el lagragiano adecuado se lleva a cabo un promedio estadístico, considerando cada teoría como un microestado del sistema compuesto por todas las teorías de gravitación basadas en el escalar de Ricci: la familia $f(R)$. Como su autor lo señala, la idea se motiva en la teoría cuántica de campos Wilsoniana y la teoría de cuerdas [7].

El lagrangiano planteado por Khosravi viene dado por

$$\mathcal{L} = \left(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}_i e^{-\beta \mathcal{L}_i} \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{N} e^{-\beta \mathcal{L}_i} \right), \tag{4.1}$$

donde el subíndice i refiere a la i-ésima teoría tomada en cuenta y N es la dimensión del espacio

de modelos gravitacionales. El parámetro libre β asigna probabilidades a cada teoría. Siguiendo el procedimiento que indica Khosravi, se señala que este lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{d\beta} \ln \mathcal{Z} \,, \tag{4.2}$$

donde

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=1}^{N} e^{-\beta \mathcal{L}_n} \,, \tag{4.3}$$

lo cual recuerda a una función de partición proveniente de la mecánica estadística.

El autor sugiere que se puede generalizar este punto de vista [6], escribiendo

$$\mathcal{Z} = \sum_{f(R)} e^{-\beta f(R)} \,, \tag{4.4}$$

donde $f(R)$ representa una función analítica del escalar de Ricci. Esto plantea una posible ruta de solución a los problemas vigentes de la cosmología moderna por medio de una modificación a la teoría gravitacional misma.

4.1. El modelo cosmológico üΛCDM

En [8] se muestra que mediante un cambio de base adecuado es posible hacer β adimensional y reescribir el lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_{\text{über}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{R}^n - 2\Lambda) e^{-\beta(\bar{R}^n - 2\Lambda)} \right) \Big/ \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta(\bar{R}^n - 2\Lambda)} \right) . \tag{4.5}$$

donde n es un entero y Λ es la constante cosmológica. En esta expresión, para la cual $\bar{R} \equiv R/R_0$, donde R es el escalar de Ricci, se observa un nuevo parámetro libre de la teoría. El modelo üΛCDM puede resumirse según

$$\text{Cosmología} = \begin{cases} R = R_0, & \rho < \rho_{\text{über}} \\ \Lambda\text{CDM}, & \rho > \rho_{\text{über}} \,. \end{cases} \tag{4.6}$$

Por lo tanto, en el caso en que la densidad de materia sea $\rho < \rho_{\text{über}}$ el desarrollo del universo se ajusta a la teoría de la relatividad general con una constante cosmológica, mientras que para $\rho < \rho_{\text{über}}$ se tiene una métrica en que el escalar de Ricci es constante (R_0). La densidad para la cual ocurre la transición, $\rho_{\text{über}}$, puede asociarse con un redshift crítico, escrito en la literatura ligada a este modelo como $z_{\oplus}$. Este es, finalmente, el nuevo parámetro libre que sirve de eje para distinguir el régimen en que es válida cada región de interés. La radiación se desprecia en este proceso porque muestra no tener una contribución [8].

4.1.1. Cosmología en üΛCDM

Se plantea en [8], asumiendo una métrica FLRW espacialmente plana, que la ecuación de Friedmann adimensional 3.60 asume la forma

$$E^2(z)_{\text{üΛCDM}} = \begin{cases} \Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0\Lambda}, & z > z_\oplus \\ \frac{1}{2}\bar{R}_0 + (1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4, & z < z_\oplus \,, \end{cases} \tag{4.7}$$

donde se define $\bar{R}_0 \equiv R_0/6H_0^2$. Además, al exigir que $E(z)$ y su primera derivada $E'(z)$ sean continuas en $z = z_\oplus$, se obtiene las relaciones

$$\Omega_{0m}(1+z_\oplus)^3 + \Omega_{0\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z_\oplus)^4 \,, \tag{4.8}$$

y también

$$\Omega_{0m}(1+z_\oplus)^3 = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z_\oplus)^4 \,. \tag{4.9}$$

A partir de estas expresiones, es posible escribir

$$\Omega_{0m} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z_\oplus) \,. \tag{4.10}$$

Ahora, reemplazando en 4.36, se tiene

$$\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z_\oplus)^4 + \Omega_{0\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z_\oplus)^4 \,, \tag{4.11}$$

que permite escribir a $\bar{R}_0$ en términos de los parámetros libres $\Omega_{0\Lambda}$ y $z_\oplus$ como

$$\frac{\bar{R}_0}{2} = \frac{(z_\oplus+1)^4 + 3\Omega_{0\Lambda}}{3 + (z_\oplus+1)^4} \,. \tag{4.12}$$

Luego, reemplazando esto en 4.37, se tiene que

$$\Omega_{0m} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{6\Omega_{0\Lambda} + 2(1+z_\oplus)^4}{3 + (1+z_\oplus)^4}\right)\right)(1+z_\oplus) \,, \tag{4.13}$$

de donde, finalmente, el parámetro de densidad de materia puede escribirse según

$$\Omega_{0m} = \frac{4(1-\Omega_{0\Lambda})(1+z_\oplus)}{3 + (1+z_\oplus)^4} \,. \tag{4.14}$$

4.1.2. Parámetro de desaceleración en üΛCDM

Se busca poder obtener una expresión analítica para el parámetro de desaceleración. Para esto, considerando diferentes valores del redshift, se hace uso de la definición dada en 3.67.

Para $z > z_{\oplus}$:

$$q(z) = \frac{(z+1)}{2(\Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0\Lambda})} \frac{d(\Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0\Lambda})}{dz} - 1\,, \tag{4.15}$$

$$q(z) = \frac{(z+1)}{2(\Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0\Lambda})} 3\Omega_{0m}(z+1)^2 - 1\,, \tag{4.16}$$

con lo que

$$q(z) = \frac{\Omega_{0m}(z+1)^3 - 2\Omega_{0\Lambda}}{2(\Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0\Lambda})}\,. \tag{4.17}$$

Por otro lado, cuando $z < z_{\oplus}$, se tiene que

$$\frac{dE^2(z)}{dz} = 4\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^3\,. \tag{4.18}$$

Luego, en 3.67,

$$q(z) = \frac{(1+z)}{2\left[\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^4\right]} \left[4\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^3\right] - 1\,, \tag{4.19}$$

$$q(z) = \frac{2\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^4} - 1\,, \tag{4.20}$$

de donde, finalmente,

$$q(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^4 - \frac{1}{2}\bar{R}_0}{\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^4 + \frac{1}{2}\bar{R}_0}\,. \tag{4.21}$$

Uniendo las expresiones obtenidas, el parámetro de desaceleración en el modelo cosmológico üΛCDM puede sintetizarse como

$$q(z)_{\text{üΛCDM}} = \begin{cases} \frac{3\Omega_{0m}(z+1)^3}{2[\Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0\Lambda}]} - 1, & z > z_{\oplus} \\ \\ \frac{2(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + (1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4} - 1, & z < z_{\oplus}\,, \end{cases} \tag{4.22}$$

con $\bar{R}_0$ y Ω_{0m} escritos en función de otros parámetros como se indica en las ecuaciones 4.12 y 4.14, respectivamente.

Con esto calculado, es posible hallar valores para el redshift de transición z_T, cuyo valor representa el punto en que la expansión del universo entra en fase de aceleración. Para esto, basta considerar que $q(z_T) = 0$. Desarrollando esta condición, para $z > z_{\oplus}$, se tiene que

$$\frac{3\Omega_{0m}(z_T+1)^3}{2[\Omega_{0m}(z_T+1)^3 + \Omega_{0\Lambda}]} - 1 = 0\,, \tag{4.23}$$

por lo cual

$$z_T = \sqrt[3]{\frac{2\Omega_{0\Lambda}}{\Omega_{0m}}} - 1\,. \tag{4.24}$$

Ya que el parámetro de densidad de la materia en üΛCDM se puede escribir según lo determinado en 4.14, z_T puede reescribirse, en función de los parámetros libres del modelo, como

$$z_T = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{0\Lambda}(3+(1+z_\oplus)^4)}{2(1-\Omega_{0\Lambda})(1+z_\oplus)}} - 1\,. \tag{4.25}$$

Por otro lado, si se toma la región $z < z_\oplus$, se replantea los cálculos a partir de

$$\frac{2(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z_T+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + (1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z_T+1)^4} - 1 = 0\,, \tag{4.26}$$

lo cual lleva a concluir que

$$z_T = \sqrt[4]{\frac{\bar{R}_0}{2-\bar{R}_0}} - 1\,. \tag{4.27}$$

Considerando la expresión hallada para $\bar{R}_0$ en 4.12, se reescribe

$$z_T = \sqrt[4]{\frac{(z_\oplus+1)^4 + 3\Omega_{0\Lambda}}{1-\Omega_{0\Lambda}}} - 1\,. \tag{4.28}$$

En síntesis,

$$z_T = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{\Omega_{0\Lambda}(3+(1+z_\oplus)^4)}{2(1-\Omega_{0\Lambda})(1+z_\oplus)}} - 1, & z > z_\oplus \\ \\ \sqrt[4]{\frac{(z_\oplus+1)^4+3\Omega_{0\Lambda}}{1-\Omega_{0\Lambda}}} - 1, & z < z_\oplus. \end{cases} \tag{4.29}$$

4.1.3. Parámetro jerk en üΛCDM

De manera similar a la realizada en la subsección anterior, se calcula el parámetro jerk analizando los casos aislados.

Para $z > z_\oplus$, en la definición 3.70:

$$j(z) = \frac{(\Omega_{0m}(z+1)^3 - 2\Omega_{0\Lambda})}{2(\Omega_{0m}(z+1)^3+\Omega_{0\Lambda})}\left(\frac{2(\Omega_{0m}(z+1)^3 - 2\Omega_{0\Lambda}}{2(\Omega_{0m}(z+1)^3+\Omega_{0\Lambda})} + 1\right) + (1+z)\frac{d}{dz}\left(\frac{\Omega_{om}(z+1)^3 - 2\Omega_{0\Lambda}}{2(\Omega_{0m}(z+1)^3+\Omega_{0\Lambda}}\right), \tag{4.30}$$

cuyo desarrollo conduce a

$$j(z) = 1\,, \tag{4.31}$$

que es lo que naturalmente se espera en un universo gobernado por ΛCDM en el que se desprecia la contribución de la radiación.

Luego, para $z < z_{\oplus}$, la expresión está dada por

$$j(z) = \left(\frac{2\left(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4} - 1 \right)\left(\frac{4\left(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4} - 1 \right) + (z+1)\frac{d}{dz}\left(\frac{2\left(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4} - 1 \right), \quad (4.32)$$

lo que da como resultado la expresión

$$j(z) = \frac{2\left(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4} + 1\,. \quad (4.33)$$

Uniendo ambos resultados, es posible escribir el parámetro jerk del modelo como

$$j(z)_{\ddot{u}\Lambda\mathrm{CDM}} = \begin{cases} 1, & z > z_{\oplus} \\ \\ \frac{2(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0+(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4} + 1, & z < z_{\oplus}\,. \end{cases} \quad (4.34)$$

Como puede observarse, el comportamiento de este parámetro describe una constante cosmológica en la región $z > z_{\oplus}$. Para $z < z_{\oplus}$, su evolución es regida por über-gravity.

4.2. El modelo cosmológico üCDM

La descripción de la energía oscura por medio de una constante cosmológica deja abierta la incógnita respecto de la naturaleza de esta entidad. El planteamiento del modelo üCDM busca explorar la capacidad de über-gravity de explicar la expansión acelerada del universo en ausencia de la cantidad Λ en las ecuaciones. Retirar la constante cosmológica de las ecuaciones reduce el número de parámetros libres del modelo, indicador a menudo valorado positivamente al ponerlo a prueba bajo métodos estadísticos. En esta sección se calcula las cantidades de interés en la investigación presente para este modelo alternativo.

4.2.1. Cosmología en üCDM

La ecuación adimensional de Friedmann se replantea de la forma

$$E^2(z)_{\ddot{u}\Lambda\text{CDM}} = \begin{cases} \Omega_{0m}(z+1)^3, & z > z_\oplus \\ \frac{1}{2}\bar{R}_0 + (1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4, & z < z_\oplus\,, \end{cases} \tag{4.35}$$

y se impone nuevamente la continuidad de $E(z)$ y $E'(z)$ en $z = z_\oplus$. Consecuentemente, se obtiene las relaciones

$$\Omega_{0m}(1+z_\oplus)^3 = \frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z_\oplus)^4 \tag{4.36}$$

y también

$$\Omega_{0m}(1+z_\oplus)^3 = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z_\oplus)^4. \tag{4.37}$$

A partir de esto se logra expresar $\bar{R}_0$ en términos de $z_\oplus$ como

$$\frac{\bar{R}_0}{2} = \frac{(1+z_\oplus)^4}{3+(1+z_\oplus)^4}. \tag{4.38}$$

Luego, tras reemplazar en 4.37, se puede escribir Ω_{0m} como

$$\Omega_{0m} = \frac{4(1+z_\oplus)}{3+(1+z_\oplus)^4}. \tag{4.39}$$

4.2.2. Parámetro de desaceleración en üCDM

Se lleva a cabo un cálculo análogo al de la sección anterior. En ese sentido, para $z > z_\oplus$, se tiene que

$$q(z) = \frac{(z+1)}{2(\Omega_{0m}(z+1)^3)}\frac{d(\Omega_{0m}(z+1)^3)}{dz} - 1, \tag{4.40}$$

$$q(z) = \frac{(z+1)}{2\Omega_{0m}(z+1)^3}3\Omega_{0m}(z+1)^2 - 1, \tag{4.41}$$

lo que conduce a

$$q(z) = \frac{1}{2}. \tag{4.42}$$

Para $z < z_\oplus$:

$$\frac{dE^2(z)}{dz} = 4\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^3. \tag{4.43}$$

Luego, en la expresión para $q(z)$,

$$q(z) = \frac{(1+z)}{2\left[\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^4\right]}\left[4\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^3\right] - 1, \tag{4.44}$$

de donde, finalmente,

$$q(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^4 - \frac{1}{2}\bar{R}_0}{\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(1+z)^4 + \frac{1}{2}\bar{R}_0}. \tag{4.45}$$

Sintetizando,

$$q(z)_{\text{uCDM}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & z > z_\oplus \\ \\ \frac{2(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + (1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4} - 1, & z < z_\oplus \end{cases} \tag{4.46}$$

A continuación, se busca la forma que adquiere el redshift de transición. Por la forma que tiene el parámetro de desaceleración se concluye que esta transición ocurre solo en la región $z < z_\oplus$. Por lo tanto, se plantea

$$\frac{2(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0)(z_T+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + (1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0)(z_T+1)^4} - 1 = 0, \tag{4.47}$$

lo que conduce a

$$z_T = \sqrt[4]{\frac{\bar{R}_0}{2 - \bar{R}_0}} - 1. \tag{4.48}$$

Ya que $\bar{R}_0$ puede ponerse en términos de $z_\oplus$ según 4.38, la última expresión queda escrita como

$$z_T = \frac{1 + z_\oplus}{\sqrt[4]{3}} - 1. \tag{4.49}$$

4.2.3. Parámetro jerk en üCDM

Evaluando para los diferentes z, se tiene, para $z > z_\oplus$, recurriendo a la definición dada en 3.70,

$$j(z) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right) + (1+z)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\right), \tag{4.50}$$

que implica

$$j(z) = 1. \tag{4.51}$$

Por otro lado, en $z < z_\oplus$, la expresión adopta la forma

$$j(z) = \left[\frac{2\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4} - 1\right]\left[\frac{4\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4} - 1\right] + (z+1)\frac{d}{dz}\left[\frac{2\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4} - 1\right], \tag{4.52}$$

que lleva al resultado

$$j(z) = \frac{2\left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\bar{R}_0\right)(z+1)^4} + 1. \tag{4.53}$$

El parámetro jerk, por lo tanto, se escribe en este contexto como

$$j(z)_{\text{uCDM}} = \begin{cases} 1, & z > z_\oplus \\ \\ \frac{2(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4}{\frac{1}{2}\bar{R}_0+(1-\frac{1}{2}\bar{R}_0)(z+1)^4} + 1, & z < z_\oplus. \end{cases} \tag{4.54}$$

Con esto se concluye el fundamento teórico que da base al subsecuente contraste con datos observacionales.

Capítulo 5

Datos y metodología

5.1. Constricción de parámetros libres

Para determinar los valores que asumen los parámetros libres en üΛCDM se debió contrastar el modelo con una muestra de datos observacionales. Esta parte de la investigación describe los datos utilizados y los métodos a los que se recurrió.

5.1.1. Cronómetros cósmicos

Los cronómetros cósmicos son las llamadas galaxias rojas grandes ("large red galaxies" en la literatura). Se trata de las galaxias más masivas para cada redshift (cuya evolución se da de manera "pasiva", según [18]), y sirven como referencia para rastrear el envejecimiento del universo con dicha cantidad.

Una técnica eficiente de medir el ritmo de expansión del universo es usar el método de edad diferencial. Este enfoque consiste en aprovechar el hecho de que, tan solo considerando una métrica de FLRW, el parámetro de Hubble puede escribirse en la forma

$$H(z) = \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{z+1}\frac{dz}{dt}\,. \tag{5.1}$$

Al utilizar la aproximación $\frac{dz}{dt} \approx \frac{\Delta z}{\Delta t}$, el análisis espectroscópico permite medir de manera muy precisa las cantidades Δz y Δt (esta última llamada"edad diferencial"), con lo que se obtiene un cálculo del parámetro de Hubble que, además, es independiente del modelo cosmológico en uso [19]. En ese sentido, utilizar datos obtenidos por este método resulta ideal al momento de poner

a prueba modelos novedosos, al evitar que los valores sean influenciados por un determinado paradigma.

La herramienta computacional utilizada para determinar las distribuciones que mejor se ajustan a los parámetros que contienen los modelos bajo análisis fue el paquete `emcee` del lenguaje de programación Python. Este paquete permite ejecutar un análisis bayesiano de cadena de Markov en Monte Carlo, MCMC en adelante ("Markov Chain Monte Carlo").

Se asignó un "prior" gaussiano para el parámetro h, tomando como base el valor $h = 0.7403 \pm 0.0142$ obtenido en [20] (en ese sentido, es un prior inclinado a los resultados de la colaboración SH0ES). Para $\Omega_{0\Lambda}$ y $z_\oplus$ el "prior" seleccionado fue plano, permitiendo una variación entre [0,1] y [0,2], respectivamente. Se generó 3000 cadenas con 250 pasos en total, y para garantizar la convergencia se recurrió a la función de autocorrelación.

La muestra utilizada para los fines de esta tesis consta de 31 medidas realizadas del parámetro de Hubble (OHD) a diferentes valores del redshift z, recopiladas en [9]. Por otro lado, la función χ^2, necesaria para el análisis estadístico, se construye según

$$\chi^2_{\mathrm{CC}} = \sum_{i=1}^{31} \left(\frac{H_t(z_i) - H_{obs}(z_i)}{\sigma^i_{obs}} \right)^2 , \tag{5.2}$$

donde CC refiere a cronómetros cósmicos y i, al i-ésimo punto en consideración. El sufijo t señala el valor teórico ($H_t(z_i)$ se obtiene a partir de las ecuaciones 4.7 y 4.35, según qué modelo se esté analizando) y el sufijo obs, el valor observado. Además, σ indica la desviación estándar correspondiente.

5.2. Reconstrucción del parámetro de Hubble

Reconstruir la evolución del parámetro de Hubble en üΛCDM y üCDM permite enriquecer el análisis, de forma tal que pueda observarse en qué medida las observaciones se ajustan o no a las predicciones de los modelos. Se obtuvo una gráfica de $H(z)$ con los 31 puntos utilizados de referencia para los cálculos también incluidos, tomando en cuenta sus respectivos σ para una mejor visualización y análisis.

5.3. Análisis de los parámetros de desaceleración y jerk

Se obtuvo previamente las expresiones analíticas que adoptan los parámetros de desaceleración y jerk, que pueden graficarse para obtener una mayor claridad en su evolución. Las gráficas mencionadas en esta sección y la anterior se construyeron con las herramientas ofrecidas por Python.

Adicionalmente, resulta de interés determinar el redshift de transición z_T que predicen üΛCDM y üCDM. Esto se obtuvo utilizando los valores preferidos por los modelos tras el análisis MCMC.

5.4. Un análisis complementario: comparación estadística con ΛCDM

Aunque por medio de los modelos derivados de la propuesta über-gravity se consiga reproducir datos observacionales, es necesario tener en cuenta el número de parámetros libres que aquellos requieren para hacerlo. Para la evaluación de la eficiencia de los modelos üCDM y üΛCDM respecto del modelo cosmológico estándar se utilizó el criterio de información de Akaike corregido (AICc) [21] y el criterio de información bayesiana (BIC) [22]. Respectivamente, estos se definen como

$$\mathrm{AICc} = \chi^2_{\mathrm{min}} + 2k + \frac{2(k^2+k)}{N-k-1} \tag{5.3}$$

y

$$\mathrm{BIC} = \chi^2_{\mathrm{min}} + k\log(N), \tag{5.4}$$

donde χ^2_{min} es el mínimo valor de χ^2, k es el número de grados de libertad (número de parámetros libres del modelo) y N es la cantidad de puntos (datos).

Estos criterios de información penalizan el uso de un mayor número de parámetros para describir los datos, tomando en cuenta el tamaño de la muestra analizada. En general, un modelo es preferido por sobre otro si los valores de AICc y BIC son menores. Como se desea comparar con ΛCDM, se calcula también los valores de AICc y BIC para este modelo y se construye las cantidades $\Delta\mathrm{AICc} \equiv \mathrm{AICc} - \mathrm{AICc}^{\Lambda\mathrm{CDM}}$ y $\Delta\mathrm{BIC} \equiv \mathrm{BIC} - \mathrm{BIC}^{\Lambda\mathrm{CDM}}$.

Si se verifica que $|\Delta\text{AICc}| < 4$, se dice que ambos modelos son equivalentes a nivel estadístico. Por otro lado, si $4 < |\Delta\text{AICc}| < 10$, se dice que, aunque los datos pueden explicarse con el nuevo modelo, existe preferencia por el estándar, ΛCDM (el "modelo de correspondencia"). Por último, $|\Delta\text{AICc}| > 10$ es prueba de que el modelo no es respaldado por los datos observacionales.

En cuanto al criterio de información bayesiana, si se verifica que $\Delta\text{BIC} < 2$, se entiende que las observaciones no manifiestan evidencia en contra del modelo. Si se encuentra que $2 < \Delta\text{BIC} < 6$, aunque no determinante, existe cierta evidencia moderada en contra del modelo. Para $\Delta\text{BIC} > 10$ se tiene que la evidencia en contra del modelo es de lo más robusta.

Capítulo 6

Resultados

Dado que la presente tesis desarrolla parte de la investigación llevada a cabo en [23], las gráficas obtenidas se han señalado dentro del conjunto de datos evaluados en dicho trabajo. El cuadro verde en las figuras mostradas en este capítulo indica la muestra correspondiente a cronómetros cósmicos.

6.1. Contornos de confianza para los parámetros libres

Mediante el proceso MCMC se pudo determinar los regiones de confianza de los parámetros libres bajo estudio, mostrados en las figuras 6.1 y 6.2, a dos dimensiones. Los gráficos se construyeron a 1σ y 3σ, asociados con niveles de confianza del 68 % y 99.7 %, respectivamente. En estas mismas gráficas se aprecia las distribuciones posteriores de cada parámetro.

Los valores óptimos calculados para cada parámetro se adjuntan en la tabla 6.1, con sus respectivas incertidumbres incluidas.

6.2. Parámetros cosmológicos y criterios de información

Se graficó los parámetros de Hubble, de desacaleración y jerk para ambos modelos en la figura 6.3. Para un mejor análisis visual, se incluyó el valor medido para el redshift crítico $z_{\oplus}$.

A un nivel cualitativo, puede observarse que los OHD se ajustan de manera bastante adecuada a la gráfica obtenida para los modelos en discusión, dentro de lo que las incertidumbres asociadas a las observaciones permiten. Por otro lado, la gráfica de la evolución del parámetro

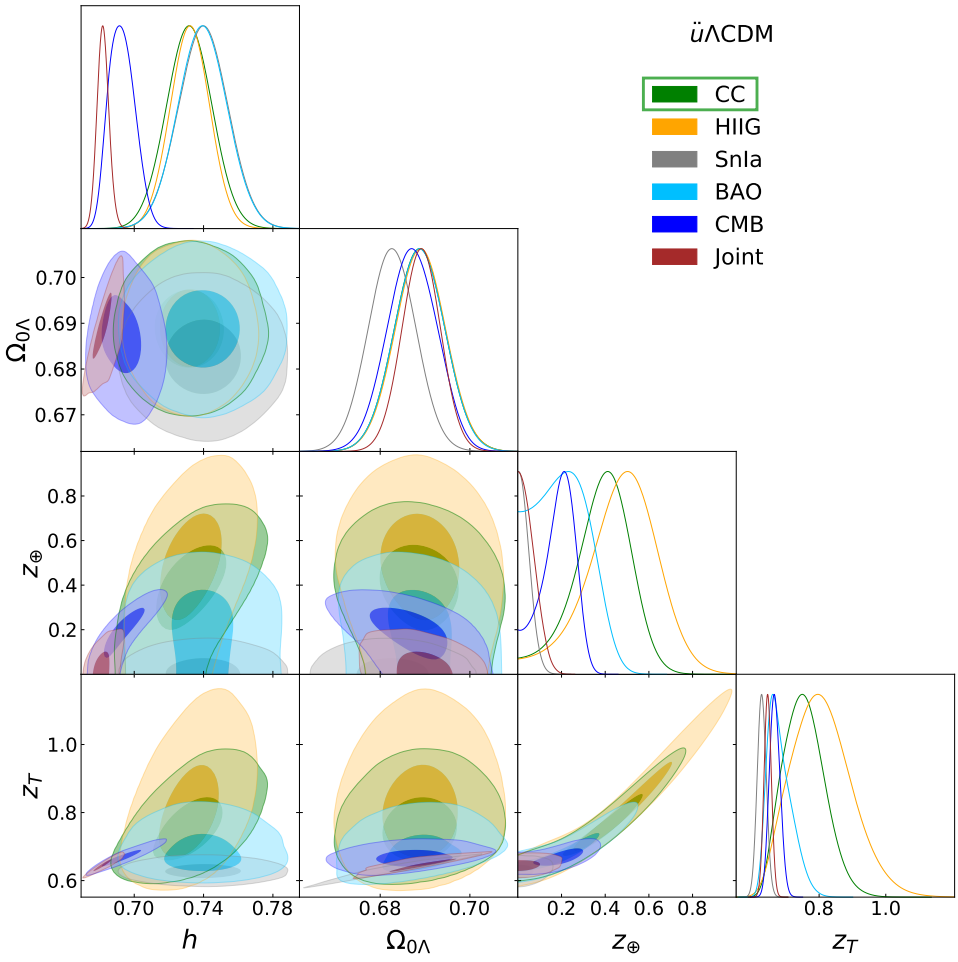

Figura 6.1: Distribuciones posteriores y contornos de confianza para los parámetros libres a 1σ (región interior) y 3σ (región exterior) en el modelo üΛCDM.

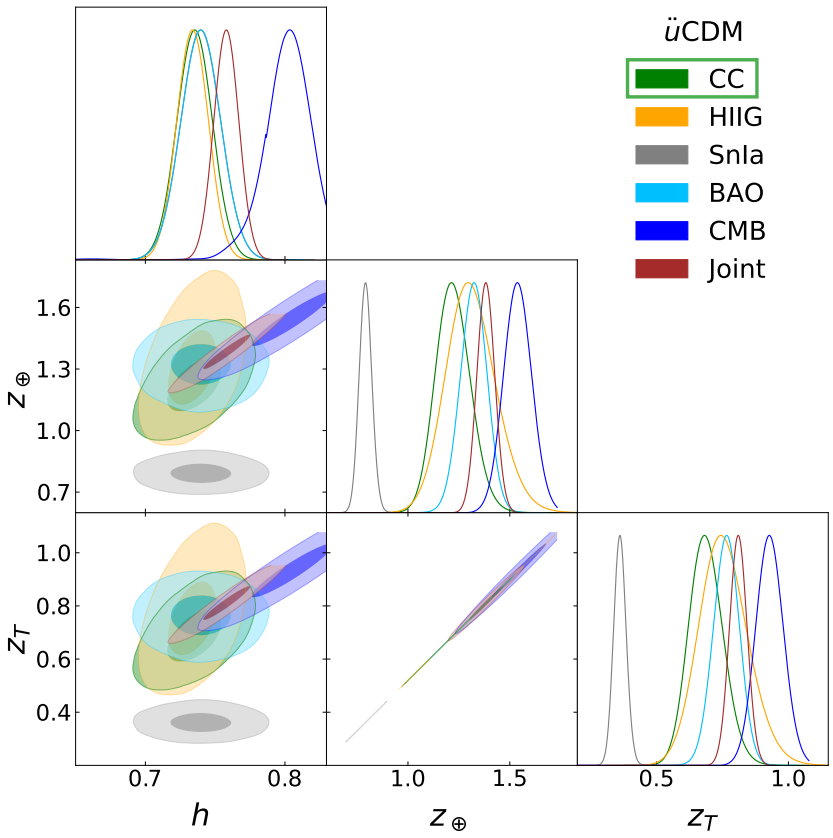

Figura 6.2: Distribuciones posteriores y contornos de confianza para los parámetros libres a 1σ (región interior) y 3σ (región exterior) en el modelo üCDM.

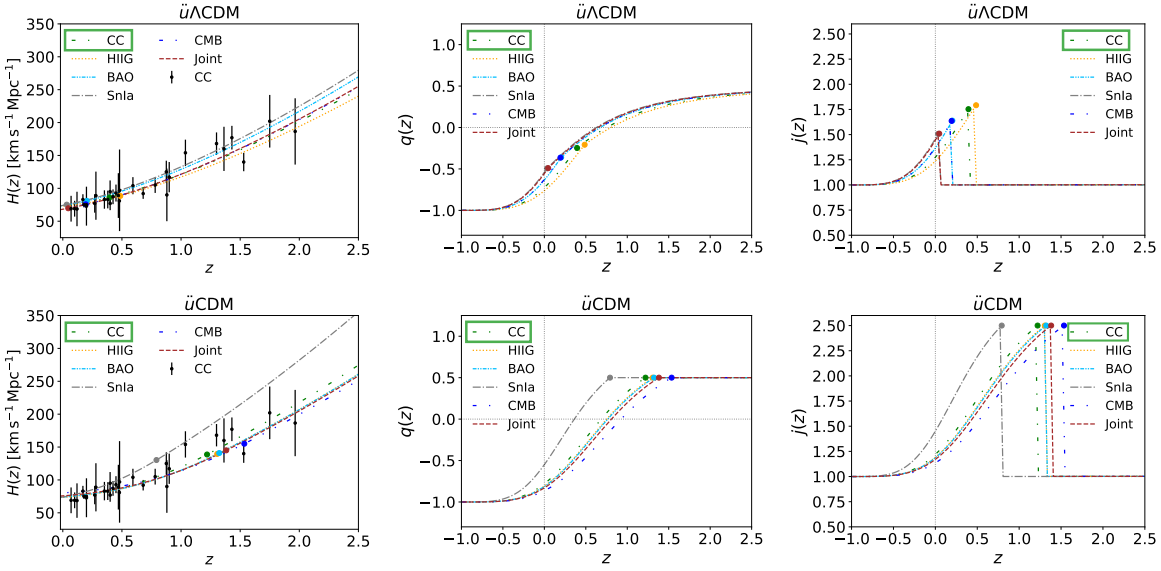

Figura 6.3: Recontrucción de $H(z)$ (columna izquierda), $q(z)$ (columna central) y $j(z)$ (columna derecha) para los modelos üΛCDM y üCDM. El punto sólido indicado sobre las gráficas señala el valor de $z_\oplus$ que mejor se ajusta a los datos observacionales.

de desaceleración en über-gravity, aunque es continua, se vuelve apreciablemente puntiaguda en el punto de transición hacia ΛCDM. Esta transición es aún más abrupta en el parámetro jerk, cuyo valor cae y se vuelve contante en ambos escenarios.

En particular, se observa el cambio de signo en $q(z)$ para el modelo üCDM. Esto es indicador de que este punto de vista da lugar a la aceleración del universo sin recurrir a una constante cosmológica. Análisis posteriores permiten evaluar en qué medida puede esto ser llamado un éxito para über-gravity.

El valor encontrado para el redshift de transición z_T en ambos modelos se incluye en la tabla 6.1, al igual que su incertidumbre asociada.

Por otro lado, en cuanto a los criterios de información estadística, para el modelo cosmológico estándar se calculó los valores $\mathrm{AICc}^{\Lambda\mathrm{CDM}} = 22.07$ y $\mathrm{BIC}^{\Lambda\mathrm{CDM}} = 24.51$. Estas cantidades se utilizaron para la comparación estadística entre modelos. Los valores determinados para ΔAICc y ΔBIC se adjuntan también en la tabla 6.1.

Sample	$\chi^2_{\min}$	h	$\Omega_{0\Lambda}$	$z_\oplus$	z_T	AICc	ΔAICc	BIC	ΔBIC
				üΛCDM					
CC	16.24	$0.732^{+0.013}_{-0.013}$	$0.689^{+0.006}_{-0.006}$	$0.395^{+0.114}_{-0.137}$	$0.752^{+0.064}_{-0.061}$	23.13	1.06	26.54	2.03
HIIG	436.64	$0.732^{+0.011}_{-0.011}$	$0.689^{+0.006}_{-0.006}$	$0.486^{+0.145}_{-0.167}$	$0.803^{+0.094}_{-0.086}$	442.78	2.06	452.24	5.19
SnIa	2011.90	$0.740^{+0.014}_{-0.014}$	$0.683^{+0.005}_{-0.005}$	$0.033^{+0.034}_{-0.023}$	$0.628^{+0.014}_{-0.013}$	2017.91	15.5	2034.22	20.94
BAO	2.81	$0.739^{+0.014}_{-0.014}$	$0.689^{+0.006}_{-0.006}$	$0.203^{+0.127}_{-0.133}$	$0.675^{+0.045}_{-0.029}$	32.81	19.99	7.64	1.60
CMB	15.37	$0.693^{+0.008}_{-0.007}$	$0.687^{+0.006}_{-0.006}$	$0.194^{+0.064}_{-0.090}$	$0.667^{+0.016}_{-0.015}$	27.37	3.57	21.61	0.05
Joint	2494.24	$0.682^{+0.003}_{-0.003}$	$0.689^{+0.004}_{-0.004}$	$0.046^{+0.047}_{-0.032}$	$0.646^{+0.011}_{-0.011}$	2500.25	7.00	2516.93	12.56
				üCDM					
CC	15.67	$0.735^{+0.013}_{-0.013}$	—	$1.220^{+0.087}_{-0.081}$	$0.686^{+0.066}_{-0.061}$	20.10	-1.97	22.54	-1.97
HIIG	436.10	$0.734^{+0.011}_{-0.011}$	—	$1.306^{+0.125}_{-0.114}$	$0.751^{+0.095}_{-0.087}$	440.17	-0.55	446.50	-0.55
SnIa	2017.91	$0.740^{+0.014}_{-0.014}$	—	$0.792^{+0.031}_{-0.030}$	$0.361^{+0.023}_{-0.023}$	2021.92	19.51	2032.79	19.51
BAO	2.59	$0.740^{+0.014}_{-0.014}$	—	$1.323^{+0.064}_{-0.066}$	$0.765^{+0.049}_{-0.050}$	12.59	-0.23	5.81	-0.23
CMB	26.05	$0.803^{+0.007}_{-0.007}$	—	$1.535^{+0.023}_{-0.024}$	$0.925^{+0.018}_{-0.019}$	32.45	8.65	30.21	8.65
Joint	2748.84	$0.758^{+0.006}_{-0.006}$	—	$1.382^{+0.020}_{-0.021}$	$0.809^{+0.015}_{-0.016}$	2752.85	259.6	2763.97	259.6

Cuadro 6.1: Valores de mejor ajuste y sus incertidumbres a 1σ para los parámetros libres de los modelos üΛCDM y üCDM. Adicionalmente, se agrega también los valores calculados para AICc, BIC, $\Delta\mathrm{AICc} \equiv \mathrm{AICc} - \mathrm{AICc}^{\Lambda\mathrm{CDM}}$ y $\Delta\mathrm{BIC} \equiv \mathrm{BIC} - \mathrm{BIC}^{\Lambda\mathrm{CDM}}$ en ambos casos.

Capítulo 7

Conclusiones

Se llevó a cabo un análisis exhaustivo de los modelos cosmológicos derivados de la teoría gravitacional über-gravity, constrastándolos con datos observacionales del parámetro de Hubble. Métodos de la estadística bayesiana, ejecutados por medio del análisis MCMC, permitieron determinar los valores asumidos por los parámetros libres involucrados, como se buscaba.

Comenzando con el marco de üΛCDM, se obtuvo $\Omega_{0\Lambda} \simeq 0.689$, valor que se condice con el modelo cosmológico estándar [3]. Los cronómetros cósmicos ubican el redshift crítico en $z_{\oplus} \simeq 0.395$, lo que supone un inicio relativamente tardío del régimen de ΛCDM; por esto, über-gravity sería dominante a un redshift detectable.

Con ayuda del parámetro de desaceleración se logró determinar el redshift de transición en $z_T \simeq 0.752$, un valor que se halla por encima de lo predicho por el modelo estándar. Además, un análisis del parámetro jerk permite notar que, aunque el comportamiento de la aceleración no se asemeja en el presente al descrito por una constante cosmológica, tiende a serlo eventualmente. Esto no sorprende, dado que en este modelo aún se recurre a Λ para describir la energía oscura.

Por otro lado, en el modelo üCDM el responsable de la expansión acelerada es el parámetro libre introducido, para el cual se encontró el valor $z_{\oplus} \simeq 1.220$. Su presencia empieza antes en comparación con üΛCDM. Asimismo, la transición a la fase acelerada, dada por el valor $z_T \simeq 0.686$, comienza muy ligeramente después de la calculada en el modelo previo, acercándose un poco más al valor predicho en ΛCDM.

El comportamiento de los parámetros de desaceleración y jerk es un poco más abrupto en üCDM, según lo que las gráficas manifiestan. El retiro de Λ no afecta los valores tardíos del

jerk, en tanto se observa que $j = 1$ en la región $z > z_{\oplus}$. Además, la caída de valor en el jerk hace notar un brusco cambio en la evolución del universo; sin embargo, por la tendencia observada alrededor de $z = -1$, puede observarse que la aceleración recupera la dinámica descrita por una constante cosmológica de manera natural, similarmente al caso anterior. Esto llama la atención en este segundo modelo, pues la aceleración no se describe mediante constante cosmológica. Así, el parámetro $z_{\oplus}$, que sería responsable de la aceleración en este contexto, eventualmente asemeja el rol de Λ.

Cabe mencionar la diferencia entre los valores de $z_{\oplus}$ obtenidos en ambos modelos. Ya que en üCDM este nuevo parámetro es no solo responsable de la transición a über-gravity, sino también de la expansión acelerada, puede esperarse que esta discrepancia sea consecuencia de su actuar similar al de la constante cosmológica.

El análisis de los modelos por los criterios de información AICc y BIC muestran que ambos son bastante consistentes con ΛCDM. Vale mencionar que, según la muestra seleccionada en el presente estudio, existe mayor evidencia favorable a üCDM por sobre üΛCDM.

Las conclusiones de la presente sección corresponden a un desarrollo parcial de la investigación publicada en [23].

Apéndice A

Estadística bayesiana en cosmología

Este apéndice tiene como finalidad desarrollar algunos puntos relevantes acerca de los métodos de estadística bayesiana útiles en la cosmología moderna. Además de las definiciones pertinentes, en esta sección se menciona los recursos y algoritmos computacionales que fueron usados en la presente tesis.

El algoritmo y criterios que se mencionan a continuación se llevan a cabo desde el paquete `emcee` de Python, que tiene ya compilados tales procedimientos.

A.1. Definiciones

Para una variable aleatoria x y su correspondiente distribución de probabilidad $P(x)$ se sabe que

$$P(x) \geq 0 \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1\,. \tag{A.1}$$

Además, para dos eventos x_1 y x_2 se tiene

$$P(x_1 \cap x_2) = P(x_1)P(x_2|x_1)\,, \tag{A.2}$$

que indica que la probabilidad de que ocurran ambos eventos es igual al producto de la probabilidad de que ocurra x_2 *dado que ha ocurrido* x_1, por la probabilidad de que ocurra, precisamente, x_1. Esto se conoce como probabilidad condicional.

La posibilidad de conmutar x_1 y x_2 en la ecuación A.2 conduce directamente al teorema de

Bayes, el cual se escribe como

$$P(x_1|x_2) = \frac{P(x_1)P(x_2|x_1)}{P(x_2)} \,. \tag{A.3}$$

Para desarrollar estadística bayesiana es necesario introducir un modelo para describir los datos observados. Un modelo H es un conjunto de medidas de probabilidad P_θ. θ indica un parámetro (o conjunto de ellos) del modelo. Los datos medidos por observación se representan por D.

Desde el punto de vista de la estadística bayesiana, las probabilidades están asociadas al conocimiento que se tiene del fenómeno bajo estudio. En ese sentido, a los parámetros del modelo se asocia también distribuciones de probabilidad. Así, P_θ se interpreta como la distribución de D dado el valor θ de un parámetro: $D|\theta$ [24].

El teorema de Bayes se reescribe, en este contexto, para una hipótesis H, de la forma

$$P(\theta|D, H) = \frac{P(D|\theta, H)P(\theta|H)}{P(D|H)} \,. \tag{A.4}$$

En esta expresión, $P(\theta|D, H)$ es la *probabilidad posterior* del modelo (o solo "posterior"), que se procura actualizar constantemente. $P(D|\theta, H) = L(D|\theta, H)$ es la *verosimilitud* o "likelihood", mientras que $P(\theta|H)$ es la *distribución a priori* o "prior", que representa el conocimiento inicial que se tiene del modelo. Por último, $P(D|H)$ se denomina *evidencia bayesiana*. Aumentar la cantidad de datos medidos, así como reducir sus incertidumbres, permite plantear una mejor conjetura para acercarse a la distribución real de los datos.

A.2. χ^2 y contornos de confianza

Existe una relación de proporcionalidad entre la distribución posterior y el "likelihood". Por ello, suponiendo que el resto de cantidades es constante, maximizar el "likelihood" es útil para obtener los valores óptimos de los parámetros.

Si se toma el logaritmo del "likelihood" y se lleva a cabo una expansión de Taylor alrededor de θ_0, tomando este como el "verdadero valor del parámetro", se obtiene [25]

$$\ln L(D|\theta) = \ln L(D|\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{0i})\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i \partial\theta_j}(\theta_j - \theta_{0j}) + \dots \,, \tag{A.5}$$

lo que implica la posibilidad de escribirlo como

$$L(D|\theta) \approx L(D|\theta_0) \exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{0i})H_{ij}(\theta_j - \theta_{0j})\right\}, \tag{A.6}$$

donde $H_{ij} = -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i \partial\theta_j}$ es la matriz Hessiana asociada.

La función chi cuadrada χ^2 se define mediante

$$\chi^2 \equiv (\theta_i - \theta_{0i})H_{ij}(\theta_j - \theta_{0j})\,. \tag{A.7}$$

De esto se observa que maximizar el "likelihood" es equivalente a minimizar la función χ^2 (principalmente en distribuciones gaussianas, aunque el teorema del límite central permite aproximar, en su defecto, a distribuciones gaussianas multivariables).

Por otro lado, los contornos de confianza, herramientas que se utilizaron en el presente estudio, se contruyen dibujando regiones marcadas por líneas de χ^2 constante. Las regiones se construyen determinando variaciones sobre el valor de χ^2; convencionalmente los elegidos para este tipo de gráficas son 1σ, 2σ o 3σ.

A.3. Cadena de Markov en Monte Carlo

Por sus siglas en inglés, y en adelante, MCMC, este es un método numérico que utiliza una serie de puntos (cadena) para evaluar la distribución posterior. El eslabón $(i + 1)$-ésimo de la cadena depende únicamente del i-ésimo. Eventualmente, debe llegarse a la convergencia.

Las densidades de probabilidad se obtienen con el uso de funciones delta [25], de la forma

$$p(\theta) \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta(\theta - \theta_i)\,, \tag{A.8}$$

lo que a su vez permite aproximar cualquier otra integral como

$$\langle f(\theta)\rangle \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\,. \tag{A.9}$$

A.3.1. Algoritmo de Metropolis-Hastings

El algoritmo de Metropolis-Hastings [26, 27] es el más básico que establece un criterio para aceptar un punto nuevo en la cadena. Sea un punto inicial cualquiera θ_i, con una distribución

asociada $p_i = p(\theta_i|D, H)$. Un nuevo punto θ_n se extrae de una distribución auxiliar $q(\theta_i, \theta_n)$, generadora de nuevos pasos aleatorios. Para esta situación,

$$\text{probabilidad de aceptación} = min\left(1, \frac{p_n q(\theta_n, \theta_i)}{p_i q(\theta_i, \theta_n)}\right) = min\left(1, \frac{p_n}{p_i}\right), \tag{A.10}$$

donde la última igualdad se verifica cuando la distribución auxiliar escogida es simétrica (usualmente se trabaja con una gaussiana también). Cada nuevo punto debe pasar por este procedimiento hasta que la cadena sea lo suficientemente grande.

A.3.2. Test de convergencia

El método utilizado en esta investigación es el de la función de autocorrelación. Esta se define como [28]

$$\rho_k = \frac{cov(X_i, X_{i+k})}{\sqrt{var(X_i)var(X_{i+k})}}, \tag{A.11}$$

donde var refiere a la varianza y cov, a la matriz de covarianza. X_i es el i-ésimo punto de la cadena, que se busca correlacionar consigo misma. La independencia de los puntos acaba por devolver un valor muy cercano a cero para la autocorrelación, lo cual sucede cuando se logra la convergencia. Para esta situación, el programa consigue encontrar la distribución posterior, que es la que se grafica al lado de los contornos de confidencia en las figuras 6.2 y 6.1.

Bibliografía

[1] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., et al. (1998). Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, *116*(3), 1009. http://stacks.iop.org/1538-3881/116/i=3/a=1009

[2] Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R. A., Nugent, P., Project, T. S. C., et al. (1999). Measurements of and from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, *517*(2), 565. http://stacks.iop.org/0004-637X/517/i=2/a=565

[3] Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartolo, N., Basak, S., Battye, R., Benabed, K., Bernard, J. .-., Bersanelli, M., Bielewicz, P., Bock, J. J., Bond, J. R., Borrill, J., . . . Zonca, A. (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters., *641*, Artículo A6, A6. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910

[4] Einstein, A. (1922). Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitäts- theorie. En *Das Relativitätsprinzip: Eine Sammlung von Abhandlungen* (pp. 130-139). Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-663-16170-7_9

[5] Riess, A. G., et al. (2021). A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km/s/Mpc Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team.

[6] Khosravi, N. (2018). Über-gravity and the cosmological constant problem. *Phys. Dark Univ.*, *21*, 21-26. https://doi.org/10.1016/j.dark.2018.05.003

[7] Khosravi, N. (2016). Ensemble Average Theory of Gravity. *Phys. Rev. D*, *94*(12), 124035. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.124035

[8] Khosravi, N., Baghram, S., Afshordi, N., & Altamirano, N. (2019). H_0 tension as a hint for a transition in gravitational theory. *Phys. Rev. D*, *99*(10), 103526. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.103526

[9] Magaña, J., Amante, M. H., Garcia-Aspeitia, M. A., & Motta, V. (2018). The Cardassian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and type Ia supernova data. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, *476*(1), 1036-1049. https://doi.org/10.1093/mnras/sty260

[10] D'Inverno, R., & Vickers, J. (2022). *Introducing Einstein's Relativity: A Deeper Understanding*. Oxford University Press. https://books.google.com.pe/books?id=oCtzzgEACAAJ

[11] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley; Sons.

[12] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P., & Lasenby, A. N. (2006). *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511790904

[13] Hubble, E. (1929). A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *15*(3), 168-173. https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168

[14] Dodelson, S. (2003). *Modern Cosmology*. Academic Press.

[15] Zhang, M.-J., Li, H., & Xia, J.-Q. (2017). What do we know about cosmography. *Eur. Phys. J. C*, *77*(7), 434. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5005-4

[16] Sahni, V., Saini, T. D., Starobinsky, A. A., & Alam, U. (2003). Statefinder—A new geometrical diagnostic of dark energy. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, *77*(5), 201-206.

[17] Di Valentino, E., Linder, E. V., & Melchiorri, A. (2020). H0 ex machina: Vacuum metamorphosis and beyond H0. *Physics of the Dark Universe*, *30*, 100733. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.dark.2020.100733

[18] Jimenez, R., & Loeb, A. (2002). Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages. *The Astrophysical Journal*, *573*(1), 37. https://doi.org/10.1086/340549

[19] Moresco, M., Pozzetti, L., Cimatti, A., Jimenez, R., Maraston, C., Verde, L., Thomas, D., Citro, A., Tojeiro, R., & Wilkinson, D. (2016). A 6 % measurement of the Hubble parameter at $z \sim 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *JCAP*, *1605*(05), 014. https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/05/014

[20] Riess, A. G., Casertano, S., Yuan, W., Macri, L. M., & Scolnic, D. (2019). Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1 % Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond ΛCDM. *Astrophys. J.*, *876*(1), 85. https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab1422

[21] Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *19*, 716-723.

[22] Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *Ann. Statist.*, *6*(2), 461-464. https://doi.org/10.1214/aos/1176344136

[23] Valdez, G. A. C., Quintanilla, C., García-Aspeitia, M. A., Hernández-Almada, A., & Motta, V. (2023). Constraining über gravity with recent observations and studying the $$H_0$$problem. *The European Physical Journal C*, *83*(5), 442. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11596-7

[24] Padilla, L. E., Tellez, L. O., Escamilla, L. A., & Vazquez, J. A. (2021). Cosmological Parameter Inference with Bayesian Statistics. *Universe*, *7*(7), 213. https://doi.org/10.3390/universe7070213

[25] Heavens, A. (2009). Statistical techniques in cosmology. *arXiv preprint arXiv:0906.0664*.

[26] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, *21*(6), 1087-1092. https://doi.org/10.1063/1.1699114

[27] Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, *57*(1), 97-109. https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.97

[28] Geweke, J. (1992). Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculations of posterior moments. In Bernardo, J. et. al. (eds), *Bayesian statistics*, *4*, 641-649.