Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Estudio de un problema cuasilineal con crecimiento en el gradiente

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Julio Cesar LANAZCA VARGAS

ASESOR

Dr. Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Lanazca, J. (2025). *Estudio de un problema cuasilineal con crecimiento en el gradiente*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Julio Cesar Lanazca Vargas
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	40140396
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0002-7993-7535
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Eugenio Cabanillas Lapa
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445518
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-8941-4394
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	1078450
Datos de investigación	
Línea de investigación	Ecuaciones Diferenciales Parciales

Grupo de investigación	
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Diciembre 2024 - Junio 2025
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 12.30 horas del viernes 13 de junio del 2025, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Dr. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO) y el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: ***" ESTUDIO DE UN PROBLEMA CUASILINEAL CON CRECIMIENTO EN EL GRADIENTE"*** *presentado por el señor Bachiller* ***Julio Cesar Lanazca Vargas****, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ... Sobresaliente con mención ... *con un calificativo promedio de* ... diecinueve ... (19..).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Carlos Alberto Peña Miranda, manifestó que el señor Bachiller ***Julio Cesar Lanazca Vargas****, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Siendo las 13:30 *horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.*

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE

Dr. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa en mi condición de asesor acreditado con Resolución Decanal N° 000301-2025-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es **"ESTUDIO DE UN PROBLEMA CUASILINEAL CON CRECIMIENTO EN EL GRADIENTE"**, presentado por el bachiller Julio Cesar Lanazca Vargas para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 18% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Lima, 27 de junio de 2025

Firma del Asesor 

Nombres y Apellidos del asesor: Eugenio Cabanillas Lapa

DNI: 06445518

Agradecimientos

Agradezco a mi familia: A mi madre, Áurea Vargas Faustino, por su ejemplo de lucha y perseverancia. A mis hermanas, Blanca, Nátaly, Mercedes y a mi sobrino Fabián; quienes gracias al amor y apoyo incondicional, me dan fuerzas para continuar.

Agradezco a los profesores de la Facultad de Ciencias Matemáticas, en especial al profesor Tomas Nuñez Lay, por sus conocimientos y por su gran didáctica. A mi orientador, el profesor Eugenio Cabanillas Lapa, por aceptar guiarme en este trabajo. Un agradecimiento póstumo al profesor Raúl Izaguirre, quien gracias a sus enseñanzas, me motivó a iniciar en el área del Análisis .

A mis amigos de la Facultad, con los cuales compartí momentos amenos, los cuales hicieron más ligeros los días de estudio: Carlos Mejía, Emerson Taipe, Giovanna Baldeón, Eduardo Huerto, Jhonatan Otrera, Pablo Rojas, Alfonso Oré.

A Raquel Schmidt, por los momentos constantes de fuerza y amistad. A Yenyffer Mirabal, por compartirme textos maravillosos y consejos llenos de sabiduría. A Juan Sulca, quien gracias a él, estoy en el camino de las Matemáticas.

Al personal administrativo de la Facultad de Ciencias Matemáticas, quienes siempre están con la mejor disposición en ayudar en resolver nuestras dudas.

A mi familia.

Resumen

En este trabajo, estudiamos la existencia de soluçiones para el problema cuasi lineal elíptico

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda h(x,u) + \beta f(x,u,\nabla u) & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde h y f son no linealidades continuas, satisfaciendo $0 \leq \omega_1(x)u^{q-1} \leq h(x,u) \leq \omega_2(x)u^{q-1}$, con $1 < q < p$ y $0 \leq f(x,u,v) \leq \omega_3(x)u^a|v|^b$, con $a, b > 0$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio suave y limitado, $N \geq 3$. Las funciones $\omega_i : \overline{\Omega} \to [0,\infty)$, $1 \leq i \leq 3$, son llamadas funciones peso y son no negativas y continuas en $\overline{\Omega}$. Probaremos que existe una región $\mathfrak{D}$ en el $\lambda\beta-$plano $\subset \mathbb{R}^2$, en el cual el problema de Dirichlet tiene al menos una solución positiva. La novedad en este trabajo es que este resultado es válido para no linealidades con crecimiento mayor que p en la variable gradiente.

Palabras claves: p-Laplaciano, solución positiva, Método de sub y súper solución.

Abstract

In this work, we study the existence of solutions for the quasilinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda h(x,u) + \beta f(x,u,\nabla u) & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where h and f are continuous nonlinearities satisfying $0 \leq \omega_1(x)u^{q-1} \leq h(x,u) \leq \omega_2(x)u^{q-1}$, with $1 < q < p$ and $0 \leq f(x,u,v) \leq \omega_3(x)u^a|v|^b$, with $a, b > 0$ and $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ is a bounded domain, $N \geq 3$. The functions $\omega_i : \overline{\Omega} \to [0,\infty)$, $1 \leq i \leq 3$, are nonnegative, continuous weights in $\overline{\Omega}$. We prove that there exists a region $\mathfrak{D}$ in the $\lambda\beta-$plano $\subset \mathbb{R}^2$, where the Dirichlet problem has at least one positive solution. The novelty in this work is that the result is valid for nonlinearities with growth higher than p in the gradient variable.

Keywords: p-Laplacian, positive solution, sub-and super-solutions method.

Lista de Símbolos

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$subconjunto abierto y acotado
- $\partial\Omega$ frontera de Ω.
- $\overline{\Omega}$ cerradura de Ω.
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ gradiente de la función u.
- $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad p > 1$ es el operador p-Laplaciano.
- $supp\, f$ soporte da función f.
- $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} u\,, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
- $C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{continuas en } \Omega\}$.
- $C(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{ continuas en } \overline{\Omega}\}$.
- $L^p(\Omega)$ espacio de funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con norma en L^p finita.
- $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$, norma del espacio $L_p(\Omega)$.
- $L^\infty(\Omega) = \{u \,\text{mensurable, tal que } u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ con } \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty\}$.
- $\|u\|_\infty = \text{ínf}\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$, norma en $L^\infty(\Omega)$.
- $C^1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{con derivadas continuas en } \Omega\}$.
- $C^1(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{con derivadas continuas en } \overline{\Omega}\}$.

- $C_0^1(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{con derivadas continuas en } \overline{\Omega}, \text{com soporte compacto}\}$.
- $C_0^\infty(\Omega) = \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{infinitamente diferenciables con soporte compacto}\}$.
- c.t.p. Casi en toda parte.
- $W^{k,p}(\Omega)$ espacio de Sobolev.
- $E_1 \hookrightarrow E_2$ imersión continua entre los espacios E_1 e E_2.
- $E_1 \overset{c}{\hookrightarrow} E_2$ imersión compacta entre los espacioes E_1 y E_2.
- E' espaço dual de E.
- $u_n \to u$ convergencia fuerte.
- $u_n \rightharpoonup u$ convergencia débil

Introducción

Los problemas relacionados a temas de optimización han aparecido frecuentemente en la historia de las Matemáticas, entre ellos, uno de los que obtuvo gran relevancia fue el problema de la Braquistócrona, el cual fue resuelto independientemente a fines del siglo XVII, por Newton, Leibniz, L'Hôpital y los hermanos Bernoulli. Este tipo de problema ganó gran relevancia, a partir del siglo XVIII, especialemente sobre el estudio de las Ecuaciones Diferenciales. Desde entonces, tenemos problemas que hoy pueden ser considerados problemas clásicos, como por ejemplo, problemas de la Ecuación de la Onda y del Calor.
Un operador que es común a la Ecuación de la Onda y a la Ecuación del Calor, es el operador Laplaciano. Este operador, además de tener relevancia en la Física, también tiene relevancia en otras áreas de las matemáticas, como en Geometría Diferencial. Una extención natural del operador Laplaciano, es el operador p-Laplaciano,

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad p > 1.$$

Notemos que el operador p-Laplaciano es igual al operador Laplaciano, en el caso cuando $p = 2$. Cuando $p \neq 2$, el operador p-Laplaciano es no lineal, este hecho hace su estudio más complicado, que en el caso del operador Laplaciano.

En este trabajo, estudiaremos un problema que involucra al operador p-Laplaciano, con dependencia del gradiente. Tal dependencia del término gradiente en problemas involucrando operadores cuasilineales, como es el caso del

p-Laplaciano, siempre han sido un desafío para los investigadores en EDP's elípticas, tanto en cuestiones de existencia como también de unicidad. Los métodos usados para resolver estos tipos de problemas son varios, por ejemplo, son usados métodos de cambio de variable, para así eliminar la dependencia del término gradiente. También podemos encontrar combinaciones de métodos topológicos, con argumentos del tipo blow-up, como se pueden ver en [5], [7], [11] y [14]. En pocas palabras, no existe un método general establecido para resolver estos tipos de problemas, esto es, problemas donde se considera un término gradiente. Vale destacar que en la literatura, al término gradiente también se le conoce como término convectivo o término de convección.

En este trabajo presentamos un estudio de un problema elíptico considerando la condición de Dirichlet en la frontera. El contenido del trabajo está basado en un artículo realizado por Grey Ercole y Hamilton Bueno, dado en [6].

La intención de este trabajo es mostrar cómo una técnica simple (Método de Sub y Súper-Solución, combinado con una estimativa global para el término gradiente) hace posible resolver algunos problemas cuasilineales, involucrando no linealidades con crecimiento en el término gradiente, que son, no linealidades donde el exponente de $|\nabla u|$ es mayor que p. Estos tipos de problemas son raros en la literatura. En contraste con otros trabajos del área, el método que aquí es presentado, nos permite usar hipótesis sencillas (vea (H_1) y (H_2)).

Consideremos el siguiente problema de Dirichlet en los parámetros positivos λ y β :

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda h(x,u) + \beta f(x,u,\nabla u) \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

La hipótesis (H_2) sobre la función f, incluye no linealidades que dependen

del gradiente con un exponente mayor que p, y las aplicaciones de Métodos Variacionales (siempre en combinación con técnicas topológicas, ver [10]) no pueden ser utilizadas directamente. Las versiones conocidas del Método de Sub y Súper-Solución, desarrolladas para ecuaciones que dependen del gradiente, ver ([4], [8]) requieren de no linealidades que cuentan con crecimiento en el término del gradiente, como máximo p, esto es $|\nabla u|^p$.
Motivados por un clásico artículo de Ambrosetti, Brezis y Cerami [1], definimos un operador de punto fijo, para cada (λ, β) en la región $\mathcal{D}$ del $\lambda\beta$-plano y usamos una estimación global $C^{1,\alpha}$ en la solución de la ecuación de Poisson $-\Delta_p u = g$, con condiciones de Dirichlet en la frontera, sobre Ω, obteniendo un conjunto invariante para este operador. Por último, aplicando el Teorema del Punto Fijo de Schauder probamos la existencia de la menos una solución positiva para el problema de Dirichlet, si $(\lambda, \beta) \in \mathcal{D}$.

El desarrollo de este trabajo está dividido de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, se dan definiciones y enunciamos resultados que serán utilizados en la demostración del resultado principal.

En el Capítulo 2, presentamos el problema a ser estudiado, problema (P).
En la Sección 2.1 probamos y enunciamos el Lema 2.1, el cual nos permitirá obtener la regularidad de la solución $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema (P).
En la Sección 2.2, probaremos el Lema 2.2, el cual nos garantiza la existencia de una región $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ que depende de los parámetros λ y β.
En la Sección 2.3, enunciamos el teorema principal de este trabajo, Teorema 2.3 y damos la prueba de este resultado en cuatro pasos:
En el Paso 1, definimos el conjunto

$$\mathcal{F} := \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}) : \epsilon u_1 \leq u \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty} \right) \phi \quad \text{y} \quad \|\nabla u\|_\infty \leq \gamma M \right\} \subset C^1(\overline{\Omega}),$$

y para cada $u \in \mathcal{F}$, probamos que el problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p U &= F^u(x,U) & \text{en } \Omega, \\ U &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una única solución $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$. La unicidad es conseguida gracias a que $F^u(x,U)$ es sublineal. Para la existencia, probamos que existen $\underline{u}$ y $\overline{u}$, sub y súper-solución de este problema auxiliar, con

$$\underline{u} = \epsilon u_1 \leq U \leq \frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi = \overline{u}, \text{ en } \Omega,$$

y gracias al Teorema 1.12, Método de Sub y Súper-Solución, obtenemos el resultado de existencia.
En el Paso 2, es probado que la solución U, de este problema auxiliar, también pertenece al conjunto $\mathcal{F}$.
En el Paso 3, probamos la regularidad de la solución, esto es, $U \in C^{1,\alpha}$.
En el Paso 4, es definido un operador $T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, el cual es compacto e invariante $T(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. El Teorema 1.12, Teorema del Punto Fijo de Schauder, juntamente con los pasos anteriores, permitirán probar la existencia de solución para nuestro problema (P).

En el Capítulo 3, damos algunas conclusiones respecto al trabajo aquí presentado, donde enfatizamos que el resultado mostrado, además de permitirnos obtener solución para problemas que involucren el término gradiente en la no linealidad; este resultado también nos permite obtener solución para problemas que cuentan, además, con el término exponencial en la no linealidad.
También, concluimos que el teorema principal de este trabajo, Teorema 2.3, inclusive puede aplicarse para resolver un sistema de problemas de Dirichlet, $p-q$-Laplaciano.

En el Capítulo 4, presentamos una propuesta a ser estudiada. Enunciamos el problema de Dirichlet (A), el cual involucra el término gradiente elevado a una potencia fija b, $|\nabla u|^b$, donde b no depende de p, ni de la dimensión del espacio N. Además de encontrar solución para tal problema, nuestra propuesta pretende encontrar una convergencia uniforme, a menos de subsucesiones, de una familia de soluciones (u_p) del problema (A), tal que

$$\lim_{p\to\infty} u_p = d_\Omega,$$

donde d_Ω es la función distancia hasta la frontera $\partial\Omega$.

Por último, en el Apéndice A, son dados resultados generales, como también, hemos incluidos algunas desigualdades usadas en la prueba del Lema A.7.

Índice general

Lista de Símbolos VI

Introducción VIII

1. Preliminares 2

1.1. Espacios de Hölder 2

1.2. Definición de solución débil 3

1.3. Problema de Torsión 4

1.4. Principio de Comparación 4

1.5. Método de Sub y Súper-Solución 5

1.6. Teorema del punto fijo de Schauder 6

2. Existencia de una solución positiva 7

2.1. Resultado de regularidad 8

2.2. Existencia de una región $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ 12

2.3. Resultado principal 18

3. Conclusiones 27

4. Trabajos Futuros 29

A. Resultados auxiliares 31

A.1. Definiciones y resultados generales 31

A.2. Espacio de Sobolev 32

A.3. Propiedad del p-Laplaciano 35
A.4. Inmersiones Continuas, Inmersiones Compactas. Operadores Compactos 35
A.5. Resultados de Análisis Funcional 37
A.6. Unicidad de soluciones positivas para ciertas ecuaciones elípticas cuasi lineales 39
A.7. Resultados del Lema 2.2 41

Bibliografía **43**

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, enunciamos algunos resultados y definiciones aplicadas en el trabajo.

1.1. Espacios de Hölder

Definición 1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $0 < \gamma \leq 1$. Decimos que una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es **Hölder continua** con exponente γ, si existe una constante C, tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\gamma}, \forall x, y \in \Omega.$$

Denotemos por $C^{\gamma}(\Omega)$ al espacio de todas las funciones continuas de Hölder con exponente γ.

Definición 1.2 *Sea $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Para todo $k \geq 0$ entero, definimos las **funciones k-veces diferenciables**, esto es, definimos el espacio*

$$C^k(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C^k(\Omega) : D^{\alpha}u \text{ es limitada y uniformemente continua en } \Omega, \forall |\alpha| \leq k\right\}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ es un multi índice y $|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$.

Definición 1.3 *Para $k > 0$ entero definimos el* ***Espacio de Hölder***

$$C^{k,\gamma}(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \in C^{0,\gamma}(\Omega), \ \textit{para todo} |\alpha| = k \right\}, \ 0 < \gamma \leq 1.$$

En este espacio, para $k = 1$, $|\cdot|_{1,\gamma}$ denotará la norma del espacio $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ definida por

$$|u|_{1,\gamma} := \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \sum_{i=1}^{N} [u_{x_i}]_\gamma \tag{1.1}$$

donde

$$[u_{x_i}]_\gamma := \sup \left\{ \frac{|u_{x_i}(x) - u_{x_i}(y)|}{|x-y|^\gamma} : x, y \in \overline{\Omega} \ \text{ y } \ x \neq y \right\}$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

El siguiente lema fue probado por Liebermann [16] y Tolksdorff [20].

Lema 1.4 (Estimaciones $C^{1,\alpha}$, Tolksdorff, Liebermann) *Sea Ω un dominio limitado de classe $C^{2,\beta}$, para algún $\beta \in (0,1)$ y sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, tal que $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$. Entonces $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ y $|u|_{1,\alpha} \leq K_1$, para algún $\alpha \in (0,1)$ y una constante $K_1 > 0$. Las constantes α y K_1 únicamente dependen de $N, \Omega, p, \|u\|_\infty$ y $\|\Delta_p u\|_\infty$.*

1.2. Definición de solución débil

En la secciones siguientes, vamos a enunciar algunos resultados conocidos y definiciones que serán utilizados en las demostraciones de los teoremas y proposiciones, que ayudarán a probar la existencia de solución débil para el problema elíptico,

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda h(x,u) + \beta f(x,u,\nabla u) & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio suave y limitado, con $N \geq 3$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, define la **solución débil** del problema anterior, si $u(x) > 0$, casi siempre en Ω, satisface

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega h(x,u)v \, \mathrm{d}x + \beta \int_\Omega f(x,u,\nabla u)v \, \mathrm{d}x, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.3. Problema de Torsión

Denotamos por ϕ a la **función de torsión** asociada a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, esto es, ϕ es la solución débil, en el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, del **problema de torsión**

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= 1 \quad \text{en } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

De donde tenemos que,

$$\int_\Omega |\nabla \phi|^{p-2}\nabla \phi \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega v \, \mathrm{d}x, \, \forall \, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.4. Principio de Comparación

Teorema 1.5 *Sea Ω un dominio limitado en $\mathbb{R}^N$ con frontera suave. Sean $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaciendo (en el sentido débil)*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 &\leq -\Delta_p u_2 \quad \textit{en } \Omega, \\ u_1 &\leq u_2 \qquad \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces,

$$u_1 \leq u_2, \ \textit{en } \Omega.$$

Demostración: Ver [17], Lema A.0.7. ■

1.5. Método de Sub y Súper-Solución

Las definiciones seguientes se refieren al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= g(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

y pueden ser encontradas en [15]. Consideremos $p > 1$ y $q = \dfrac{p}{p-1}$ el conjugado de p.

Definición 1.6 *Sea $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $g(x,\underline{u}(x)) \in L^q(\Omega)$. Decimos que $\underline{u}$ es una **sub-solución** para el problema (1.3), si $\underline{u} \leq 0$ en $\partial\Omega$ y*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi dx \leq \int_\Omega g(x,\underline{u})\varphi dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \varphi \geq 0.$$

Escribimos $-\Delta_p \underline{u} \leq g(x,\underline{u})$.

Definición 1.7 *Sea $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $g(x,\overline{u}(x)) \in L^q(\Omega)$. Decimos que $\overline{u}$ es una **súper-solución** para el problema (1.3), si $\overline{u} \geq 0$ en $\partial\Omega$ y*

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, dx \geq \int_\Omega g(x,\overline{u})\varphi \, dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \ \varphi \geq 0.$$

Escribimos $-\Delta_p \overline{u} \geq g(x,\overline{u})$.

Definición 1.8 *Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $g(x,u(x))$ pertenece al espacio $L^q(\Omega)$. Entonces, decimos que u es una **solución débil** para (1.3) si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega g(x,u)v \, dx, \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observación 1.9 *Como $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,p}(\Omega)$, en la definición anterior, podemos considerar $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

El siguiente resultado de existencia es una versión simplificada del Teorema 2.1, de [15].

Teorema 1.10 *Sean $\underline{u}$ y $\overline{u}$ sub y súper-soluciones para (1.3), respectivamente. Supongamos que* $\max\{\|\underline{u}\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty\} \leq M$, *para alguna constante positiva M y para todo $x \in \overline{\Omega}$. Supongamos, incluso que $g(x,t) \in C\left(\overline{\Omega} \times [0,M]\right)$. Entonces el problema (1.3) posee una soluçión débil $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

1.6. Teorema del punto fijo de Schauder

Definición 1.11 *Decimos que un espacio topológico F tiene la* ***propiedad de punto fijo****, si toda aplicación continua $T : F \to F$ tiene un punto fijo. Esto es, si para toda aplicaçión continua $T : F \to F$, existe $x_0 \in F$, tal que $T(x_0) = x_0$.*

Teorema 1.12 *Sea F un espacio de Banach, y sea C conjunto convexo, cerrado y no vacío en F. Si $T : C \to C$ es una aplicación continua, tal que $T(C) \subset K$, donde K es un subconjunto compacto de C. Entonces, T tiene un punto fijo en K.*

Demostración: Ver [18] ■

Capítulo 2

Existencia de una solución positiva

En este capítulo, consideramos la existencia de soluciones positivas para el problema de Dirichlet para el p-Laplaciano en los parámetros positivos λ, β y en el dominio suave y limitado Ω de $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda h(x,u) + \beta f(x,u,\nabla u) & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

donde $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el operador p-Laplaciano, $p > 1$. Las no linealidades continuas h y f satisfacen,

(H_1) $0 \leq \omega_1(x)u^{q-1} \leq h(x,u) \leq \omega_2(x)u^{q-1}, 1 < q < p$;

(H_2) $0 \leq f(x,u,v) \leq \omega_3(x)u^a|v|^b$, $a, b > 0$,

donde $\omega_i : \overline{\Omega} \to [0,\infty)$, $1 \leq i \leq 3$, es una función continua no negativa, llamada función peso, con $\omega_i \not\equiv 0$, para cada $i = 1, 2, 3$.

2.1. Resultado de regularidad

Comenzamos estableciendo una versión de un resultado de regularidad para soluciones de problemas del p-Laplaciano, el cual fue probado por Tolksdorf [20] y Liebermann [16]. Daremos la prueba de este resultado, ya que en estos artículos, el resultado no está explícitamente establecido.

En esta sección, Ω denotará un dominio limitado de $\mathbb{R}^N$ con frontera de clase $C^{1,\tau}$, para algún $\tau \in (0,1)$.

Lema 2.1 *Sea Ω un dominio suave y limitado de $\mathbb{R}^N$ y $g \in L^\infty(\Omega)$. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es solución débil del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= g \quad \text{en } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Entonces, existe una constante positiva $\mathcal{K}$, dependiendo solamente de p, N y Ω, tal que

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \mathcal{K} \|g\|_\infty^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.2}$$

Demostración: En la prueba de este lema, vamos a considerar dos casos respecto a la norma de la función g.

i) Supongamos que $\|g\|_\infty = 1$:
Aplicando el Principio de Comparación, Teorema 1.5, podemos obtener que u, solución de problema (2.1), es estimada por la función de torsión $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Esto es, podemos probar que

$$|u| \leq \phi, \text{ en } \overline{\Omega}. \tag{2.3}$$

En efecto, del problema (2.1) y recordando que $g \leq \|g\|_\infty = 1$, tenemos que

$$-\Delta_p u = g \leq 1 = -\Delta_p \phi, \text{ en } \Omega, \quad \text{además} \quad u = \phi = 0, \text{ en } \partial\Omega. \tag{2.4}$$

Realizando el mismo razonamiento a la función $-u$, conseguimos un resultado análogo a la expresión (2.4). Luego, aplicando el Teorema 1.5, obtenemos

$$u(x) \leq \phi(x) \quad \text{y} \quad -\phi(x) \leq u(x), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

lo que nos permite probar (2.3).
De la expresión (2.3) obtenemos que, $|u| \leq \|\phi\|_\infty$, donde $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y por lo tanto,

$$\|u\|_\infty \leq L := \|\phi\|_\infty. \tag{2.5}$$

Debido a (2.5), por el resultado de regularidad de Lieberman, Lema 1.4, tenemos que existen constantes $\alpha \in (0,1)$ y $\mathcal{K} > 0$, tales que

$$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{y} \quad |u|_{1,\alpha} \leq \mathcal{K}. \tag{2.6}$$

Además, α y $\mathcal{K}$ dependem solamente de p, N y Ω. (En principio, esas constantes también podrían depender de L y $\|u\|_\infty$, pero como vemos, la desigualdad en (2.5), es uniforme con respecto a u, siempre que $\|g\|_\infty = 1$).
De la definición de norma $|\cdot|_{1,\alpha}$, dada en (1.1), tenemos que $\|\nabla u\|_\infty \leq |u|_{1,\alpha}$. Además, de la expresión (2.6), conseguimos

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \mathcal{K}. \tag{2.7}$$

ii) Supongamos que $0 < \|g\|_\infty \neq 1$:
Definamos,

$$v := \frac{u}{\|g\|_\infty^{\frac{1}{p-1}}} \quad \text{y} \quad \widetilde{g} := \frac{g}{\|g\|_\infty}.$$

En la Sección A.3 vimos que el operador p-Laplaciano Δ_p es $(p-1)-$homogéneo,

entonces

$$-\Delta_p v = -\Delta_p \left(\frac{u}{\|g\|_\infty^{\frac{1}{p-1}}} \right) = \frac{1}{\|g\|_\infty} (-\Delta_p u) = \frac{1}{\|g\|_\infty} g = \widetilde{g},$$

de donde vemos que la función $v = \dfrac{u}{\|g\|_\infty^{\frac{1}{p-1}}}$ satisface el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= \widetilde{g} \quad \text{en } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\|\widetilde{g}\|_\infty = 1$. Entonces, podemos usar el argumento anterior para finalmente obtener

$$\left\| \nabla \left(\frac{u}{\|g\|_\infty^{\frac{1}{p-1}}} \right) \right\|_\infty \leq \mathcal{K} \Leftrightarrow \|\nabla u\|_\infty \leq \mathcal{K} \, \|g\|_\infty^{\frac{1}{p-1}},$$

lo cual prueba (2.2), para cualquier $g \not\equiv 0$, donde $g \in L^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{K}$ es una constante positiva que depende solamente de p, N y Ω. Obviamente, la expresión (2.2) se mantiene válida para la misma constante $\mathcal{K}$, si $g \equiv 0$. ■

Ahora, recordemos nuestro problema principal (P)

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda h(x,u) + \beta f(x,u,\nabla u) \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

y sus respectivas hipótesis

(H_1) $0 \leq \omega_1(x) u^{q-1} \leq h(x,u) \leq \omega_2(x) u^{q-1}, 1 < q < p;$

(H_2) $0 \leq f(x,u,v) \leq \omega_3(x) u^a |v|^b$, $a, b > 0$.

Con la intención de facilitar la lectura de la prueba de la existencia de la región

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, de las hipótesis anteriores, definamos

$$r := a + b + 1, \quad \text{y} \quad \omega(x) := \max_{i\in[1,2,3]} \omega_i(x). \tag{2.8}$$

También, denotemos por λ_1 al primer autovalor, y por u_1, a la autofunción asociada al primer autovalor del problema de Dirichlet del p-Laplaciano, con peso ω_1, que es,

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 &= \lambda_1 \omega_1 u_1^{p-1} & \text{en } \Omega, \\ u_1 &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

donde u_1 es $L^\infty(\Omega)$ normalizada, esto es, $\|u_1\|_\infty = 1$.

Sea también $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi &= \omega & \text{en } \Omega, \\ \phi &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

y definamos

$$\gamma := \frac{\mathcal{K}\|\omega\|_\infty^{\frac{1}{p-1}}}{\|\phi\|_\infty}, \tag{2.11}$$

donde $\mathcal{K}$ satisface la expresión (2.2). Enfatizamos que γ depende solamente de ω, p, N y Ω.

2.2. Existencia de una región $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$

El siguiente lema nos permitirá probar la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que depende de los parámetros λ y β, el cual está contenido en el $\lambda\beta$-plano (plano de $\mathbb{R}^2$ de abscisas y ordenadas λ y β). La existencia de este subconjunto, es fundamental para obtener solución para el problema (P).

Lema 2.2 *Existe una región $\mathcal{D}$ en el $\lambda\beta-$plano, tal que si $(\lambda, \beta) \in \mathcal{D}$, entonces*

$$\lambda M^{q-1} + \beta\gamma^b M^{a+b} \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1}, \tag{2.12}$$

para alguna constante positiva M.

Demostración: Para demostrar la existencia de la región $\mathcal{D}$, primero veamos una equivalencia para la desigualdad (2.12).
En la Afirmación A.22, fue probada la siguiente equivalencia para tal desigualdad

$$\lambda M^{q-1} + \beta\gamma^b M^{a+b} \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1} \Leftrightarrow \lambda A M^{q-p} + \beta B M^{r-p} \leq 1, \tag{2.13}$$

para alguna constante positiva M, donde los coeficientes,

$$A := \|\phi\|_\infty^{p-1} \quad \text{y} \quad B := \mathcal{K}^b \|\phi\|_\infty^{p-1-b} \|\omega\|_\infty^{\frac{b}{p-1}} \tag{2.14}$$

claramente dependen solo de ω, p y Ω.

Con la intención de probar el Lema 2.2, daremos condiciones suficientes a λ y β, para que sea satisfecha el lado derecho de la equivalencia dada en (2.13), lo que nos permitirá obtener un valor adecuado para la constante M. Recordando que definimos $r = a+b+1$, entonces, consideremos los casos cuando $r-p > 0$, $r-p = 0$ y cuando $r - p < 0$.

Caso 1: $r - p > 0$.

En este caso, exhibiremos una constante $M = M_1$, tal que para ciertos valores de λ y β, consiga satisfazer

$$\lambda A M_1^{q-p} + \beta B M_1^{r-p} \leq 1. \tag{2.15}$$

La desigualdad en la expresión (2.13) nos motiva la definición de la siguiente función real

$$\begin{aligned} \Phi_1 :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &t \longmapsto \Phi_1(t) := \lambda A t^{q-p} + \beta B t^{r-p}. \end{aligned}$$

De la hipótesis (H_1), $q - p < 0$, y como estamos considerando $r - p > 0$, tenemos que,

$$\lim_{t\to 0} \Phi_1(t) = \lim_{t\to+\infty} \Phi_1(t) = +\infty,$$

lo que implica que Φ_1 tiene un valor mínimo. Además, si hacemos $\Phi_1'(t_0) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_1'(t_0) = \lambda A(q-p)t_0^{q-p-1} + \beta B(r-p)t_0^{r-p-1} = 0 &\iff t_0^{r-q} = \frac{\lambda A(q-p)}{-\beta B(r-p)} \\ &\iff t_0 = \left(\frac{\lambda A(p-q)}{\beta B(r-p)}\right)^{\frac{1}{r-q}}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

con esto, definamos nuestra constante positiva

$$M_1 := \left(\frac{\lambda A(p-q)}{\beta B(r-p)}\right)^{\frac{1}{r-q}}, \tag{2.17}$$

que además, es el único punto crítico de la función Φ_1.

Considerando la constante M_1 en el lado derecho de la expresión (2.16), podemos

escribir

$$\lambda A = \frac{\beta B(r-p)M_1^{r-q}}{p-q}. \tag{2.18}$$

Evaluando la función Φ_1 en $t = M_1$, sustituyendo el valor de λA, dado en (2.18), y recordando que M_1 es el único punto crítico de Φ_1, tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_1(M_1) &= \lambda A M_1^{q-p} + \beta B M_1^{r-p} = \left(\frac{\beta B(r-p)M_1^{r-q}}{p-q}\right) M_1^{q-p} + \beta B M_1^{r-p} \\ &= \beta B M_1^{r-p}\left(\frac{r-q}{p-q}\right) \leq \Phi_1(t), \quad \forall t \geq 0,\end{aligned}$$

ahora, sustituyendo la definición de M_1, dada em (2.17),

$$\Phi_1(M_1) = \beta B\left(\frac{\lambda A(p-q)}{\beta B(r-p)}\right)^{\frac{r-p}{r-q}}\left(\frac{r-q}{p-q}\right) \leq \Phi_1(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Utilizando la definición Φ_1, vemos que la expresión (2.15) se puede escribir como

$$\Phi_1(M_1) \leq 1. \tag{2.19}$$

Entonces, para conseguir condiciones suficientes para los parámetros λ y β, y se cumpla la desigualdad (2.15), es suficiente analizar la expresión (2.19), esto es

$$\Phi_1(M_1) = \beta B\left(\frac{\lambda A(p-q)}{\beta B(r-p)}\right)^{\frac{r-p}{r-q}}\left(\frac{r-q}{p-q}\right) \leq 1. \tag{2.20}$$

Incluso, gracias a la Afirmación A.23, encontrarmos una expresión más simplificada, equivalente a la desigualdad (2.20), de donde finalmente tenemos

$$\lambda^{r-p}\beta^{p-q} \leq K, \tag{2.21}$$

donde $K := \left(\frac{p-q}{B}\right)^{p-q}\left(\frac{r-p}{A}\right)^{r-p}\frac{1}{(r-q)^{(r-q)}}$.

Observación: Notemos que la expresión (2.21) nos da las condiciones para que el

par $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$, nos permita obtener una constante $M = M_1$ que consiga satisfacer la desigualdad (2.12).

Caso 2: $r = p$.

En este caso, exhibiremos una constante $M = M_2$, tal que para ciertos valores de λ y β, consiga satisfacer

$$\lambda A M_2^{q-p} + \beta B \leq 1. \tag{2.22}$$

La expresión (2.22) nos motiva a definir la función real

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \Phi_2(t) := \lambda A t^{q-p} + \beta B, \end{aligned}$$

la función Φ_2 es positiva y por la hipótesis (H_1), $q - p < 0$, lo que implica que Φ_2 es estrictamente decreciente, pues

$$\Phi_2(t)' = \lambda(q-p)t^{q-p-1} < 0,$$

y además se cumple que

$$\lim_{t \to 0} \Phi_2(t) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \to +\infty} \Phi_2(t) = \beta B. \tag{2.23}$$

Análogamente al caso anterior, obtener la desigualdad (2.22) es equivalente a obtener $\Phi_2(M_2) \leq 1$, para alguna constante M_2. Para que esto suceda, vamos a imponer la condición que $\beta B < 1$, pues si suponemos que $\beta M \geq 1$, debido a que en la expresión (2.23) tenemos que βB es una asíntota de Φ_2, entonces no existiría M_2, tal que $\Phi_2(M_2) \leq 1$.

Así, si

$$\lambda > 0 \quad \text{y} \quad \beta < B^{-1}, \tag{2.24}$$

podemos tomar $M_2 > 0$, tal que $\Phi_2(M_2) = 1$, esto es

$$\lambda A M_2^{q-p} + \beta B = 1 \Longleftrightarrow M_2 = \left(\frac{\lambda A}{1-\beta B}\right)^{\frac{1}{p-q}}. \tag{2.25}$$

Caso 3: $r - p < 0$.

En este caso, exhibiremos una constante $M = M_3$, tal que para ciertos valores de λ y β, consiga satisfazer

$$\lambda A M_3^{q-p} + \beta B M_3^{r-p} \leq 1. \tag{2.26}$$

La desigualdad (2.26) nos motiva la definición de la siguiente función real

$$\begin{aligned} \Phi_3 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \Phi_3(t) := \lambda A t^{q-p} + \beta B t^{r-p}. \end{aligned}$$

De la hipótesis (H_1), $q - p < 0$, y como estamos considerando $r - p < 0$, tenemos que,

$$\lim_{t\to 0} \Phi_3(t) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t\to+\infty} \Phi_3(t) = 0.$$

Por lo tanto, para cualesquiera parámetros

$$\lambda > 0 \quad \text{y} \quad \beta > 0 \tag{2.27}$$

siempre existe $M_3 > 0$, tal que

$$\Phi_3(M_3) = \lambda A M_3^{q-p} + \beta B M_3^{r-p} = 1.$$

Así, luego de haber considerado los tres casos, y haber obtenido las condiciones para λ y β, dadas en (2.21), (2.24) y (2.27), hemos demostrado que existe uma constante positiva M satisfaciendo la desigualdad (2.12), siempre que el par de

parámetros (λ, β) pertenezca al subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, definido por

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{\lambda, \beta > 0 : \lambda^{r-p}\, \beta^{p-q} \leq K\}, & \text{si } r - p > 0, \\ \{\lambda, \beta > 0 : \beta < B^{-1}\}, & \text{si } r - p = 0, \\ \{\lambda, \beta > 0\}, & \text{si } r - p < 0, \end{cases} \tag{2.28}$$

donde las constantes K y B fueron definidas en (2.21) y (2.14), respectivamente.

■

2.3. Resultado principal

Antes de enunciar el teorema principal de este trabajo, daremos algunas notaciones y definiciones que nos ayudarán en la comprensión del teorema.

Para cada $u \in C^1(\overline{\Omega})$, definiremos la no linealidad continua

$$\begin{aligned} F^u : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \xi) &\longmapsto F^u(x, \xi) \end{aligned}$$

donde,

$$F^u(x,\xi) := \lambda\omega_1\xi^{q-1} + \lambda\left(h(x,u(x)) - \omega_1 u(x)^{q-1}\right) + \beta f(x,u(x),\nabla u(x)). \quad (2.29)$$

Notemos que para $\xi = u$, la expresión $F^u(x,u)$ coincide con la no linealidad del problema (P), esto es

$$F^u(x,u) = \lambda h(x,u) + \beta f(x,u(x),\nabla u(x)).$$

A continuación, daremos el resultado principal de este trabajo, que es un resultado de existencia de solución para el problema (P).

Teorema 2.3 *Supongamos que h y f sean funciones continuas satisfaciendo las hipótesis (H_1) y (H_2). Entonces, existe una región $\mathcal{D}$ en el $\lambda\beta$-plano, tal que si $(\lambda,\beta) \in \mathcal{D}$, el problema (P) tiene al menos una solución positiva u, satisfaciendo, para algunas constantes ϵ y M que*

$$\epsilon u_1 \leq u \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)\phi \quad y \quad \|\nabla u\|_\infty \leq \gamma M.$$

Demostración: En la demostración de este teorema, comenzaremos definiendo

un subconjunto de $C^1(\overline{\Omega})$ y demostraremos que se cumplen ciertas propiedades en tal subconjunto. Posteriormente, será definido un operador, el cual, satisfaciendo ciertas condiciones, nos permitirá aplicar resultados como el Teorema del Punto Fijo (ver Sección 1.6), para finalmente obtener la existencia de solución para el problema (P).

Sea $(\lambda, \beta) \in \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es la región definida en (2.28) y tomemos $M > 0$ que satisface la desigualdad (2.12) del Lema 2.2. Con esto, definamos el subconjunto cerrado y acotado

$$\mathcal{F} := \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}) : \epsilon u_1 \leq u \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty} \right) \phi \quad \text{y} \quad \|\nabla u\|_\infty \leq \gamma M \right\} \subset C^1(\overline{\Omega}), \tag{2.30}$$

donde u_1 es la primera autofunción asociada al primer autovalor λ_1 del problema (2.9) y

$$0 < \epsilon \leq \text{mín} \left\{ \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{p-q}}, \frac{M\lambda^{-\frac{1}{p-1}}}{\|\phi\|_\infty} \right\}. \tag{2.31}$$

Con la finalidad de facilitar la comprensión, daremos la prueba de este teorema en cuatro pasos.

Paso 1. En este paso, demostraremos que para cada $u \in \mathcal{F}$, existe una única solución positiva U del problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p U &= F^u(x, U) & \text{en } \Omega, \\ U &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

que satisface

$$\epsilon u_1 \leq U \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty} \right) \phi.$$

En efecto, primero probaremos la unicidad de la solución. Ésta sigue directa-

mente de la Sección A.6, donde para cada $u \in \mathcal{F}$ fijado, el problema (P_1) es un problema sublinear en U. Recordemos que fue definido

$$F^u(x,t) = \lambda\omega_1 t^{q-1} + \lambda\left(h(x,u) - \omega_1 u^{q-1}\right) + \beta f(x,u,\nabla u),\ x \in \overline{\Omega} \text{ y } t \geq 0.$$

y denotando por $\tilde{h}(x) := \lambda\left(h(x,u) - \omega_1 u^{q-1}\right) + \beta f(x,u,\nabla u)$, la unicidad de problema (P_1) la obtenemos del Teorema A.20, escribiendo la no linealidad

$$F^u(x,t) = \lambda\omega_1 t^{q-1} + \tilde{h}(x),$$

la cual es sub lineal, pues por la hipótesis (H_1), $q < p$, con $\tilde{h} \in L^\infty(\Omega)$, $\tilde{h} \geq 0$.

Ahora, para demostrar la existencia, definiremos dos funciones $\underline{u}, \overline{u}$ y de acuerdo con las definiciones dadas en la Sección 1.5, probaremos que son, súper-solución y sub-solución de (P_1), respectivamente. Además, gracias al Teorema 1.5, Principio de Comparación Débil, demostraremos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω.

• $\underline{u} := \epsilon u_1$ **es sub-solución:**
Tenemos que $\underline{u} = \epsilon u_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$, pues $u_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$. Además, por la propiedad de homogenización del p-Laplaciano (Sección A.3) y por el problema del autovalor (2.9), tenemos

$$\begin{aligned}
-\Delta_p \underline{u} &= -\Delta_p(\epsilon u_1) = \epsilon^{p-1}\left(-\Delta_p u_1\right) = \epsilon^{p-1}\left(\lambda_1\omega_1 {u_1}^{p-1}\right) \\
&= \lambda_1\omega_1\epsilon^{p-1}u_1^{p-1} = \lambda_1\omega_1\epsilon^{p-q+q-1}u_1^{p-q+q-1} \\
&= \lambda_1\omega_1\epsilon^{p-q}\left(\epsilon u_1\right)^{q-1}u_1^{p-q} \leq \lambda_1\omega_1\epsilon^{p-q}\underline{u}^{q-1}\|u_1\|_\infty^{p-q} \qquad (2.32) \\
&\leq \lambda\omega_1\underline{u}^{q-1} \leq F^u(x,\underline{u}). \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Notemos que en la desigualdad (2.32), usamos el hecho que la autofunción u_1 fue definida $L^\infty(\Omega)-$normalizada, esto es $\|u_1\|_\infty = 1$ y de (H_1), $p - q > 0$. Además,

en la desigualdad (2.33) usamos la restricción para ϵ, dada en (2.31), de donde se desprende que

$$\epsilon \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p-q}} \Longleftrightarrow \lambda_1 \epsilon^{p-q} \leq \lambda.$$

Así, de la Definición 1.6, tenemos que $\underline{u} := \epsilon u_1$ es sub-solución del problema (P_1).

• $\overline{u} := \left(\dfrac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)\phi$ **es súper-solución:**

Tenemos que $\overline{u} = \left(\dfrac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)\phi = 0$ sobre $\partial\Omega$, pues $\phi = 0$ sobre $\partial\Omega$. Además, por la propiedad de homogenización del p-Laplaciano (Sección A.3), y por las hipótesis (H_1) y (H_2), conseguimos

$$\begin{aligned}
F^u(x,\overline{u}) &= \lambda\omega_1\overline{u}^{q-1} + \lambda\left(h(x,u) - \omega_1 u^{q-1}\right) + \beta f(x,u,\nabla u) \\
&\leq \lambda\omega_1\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi\right)^{q-1} + \lambda\left(\omega_2 - \omega_1\right)u^{q-1} + \beta\left(\omega_3 u^a |\nabla u|^b\right) \\
&\leq \lambda\omega_1 M^{q-1} + \lambda(\omega_2 - \omega_1)M^{q-1} + \beta\omega_3 M^a \gamma^b M^b \qquad (2.34) \\
&\leq \lambda\omega M^{q-1} + \beta\omega\gamma^b M^{a+b} = \left(\lambda M^{q-1} + \beta\gamma^b M^{a+b}\right)\omega \\
&\leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1}\omega = \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1}(-\Delta_p\phi) \qquad (2.35) \\
&= -\Delta_p\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi\right) = -\Delta_p\overline{u}.
\end{aligned}$$

Notemos que en la desigualdad (2.34), hemos aplicado la definición del subconjunto $\mathcal{F}$, dado en (2.30),

$$u \leq \frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi \leq M \quad \text{y} \quad |\nabla u| \leq \|\nabla u\|_\infty \leq \gamma M. \qquad (2.36)$$

También, en la desigualdad (2.35), aplicamos el Lema 2.2 y el hecho que ϕ es solución del problema (2.10).

Así, de la Definición 1.7, tenemos que $\overline{u} := \left(\dfrac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)\phi$ es súper-solución del problema (P_1).

• $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$.

Por los resultados de Principio de Comparación, expuestos en la Sección 1.4, necesitamos probar que $-\Delta_p \underline{u} \leq -\Delta_p \overline{u}$. Con efecto,

$$\begin{aligned} -\Delta_p \underline{u} = -\Delta_p(\epsilon u_1) = \epsilon^{p-1}\left(-\Delta_p u_1\right) = \epsilon^{p-1}\left(\lambda_1 \omega_1 {u_1}^{p-1}\right) \leq \lambda_1 \epsilon^{p-1}\omega_1 \\ \leq \lambda_1 \epsilon^{p-1}\omega \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1}\omega = \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1}\left(-\Delta_p \phi\right) \\ = -\Delta_p\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi\right) = -\Delta_p \overline{u}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Además, de acuerdo con las definiciones de $\underline{u}$ y $\overline{u}$, tenemos que $\underline{u} = \overline{u} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Así, del Teorema 1.5, tenemos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ en Ω.

Notemos que en la desigualdad (2.37) hemos aplicado la desigualdad

$$\epsilon < \frac{M}{\lambda_1^{p-1}\|\phi\|_\infty} \Longleftrightarrow \epsilon^{p-1}\lambda_1 \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1},$$

que fue obtenida de la condición para ϵ, dada en (2.31). También fue usado el hecho que ϕ es solución del problema (2.10).

Por lo tanto, debido al Teorema 1.10, tenemos que existe una solución $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema (P_1) satisfaciendo

$$\underline{u} = \epsilon u_1 \leq U \leq \frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi = \overline{u}, \text{ en } \Omega.$$

Paso 2. En este paso probaremos que la solución $U \in \mathcal{F}$.

En el paso anterior hemos probado que $\epsilon u_1 \leq U \leq \dfrac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi$, para concluir la prueba de este paso, probaremos que $\|\nabla U\|_\infty \leq \gamma M$.

Con la intención de usar el Lema 2.1, comenzaremos probando que $F^u \in L^\infty(\Omega)$. Recordemos que para cada $u \in \mathcal{F}$ fijo, fue definida en (2.29) la no linealidad F^u. Además, de la definición del conjunto $\mathcal{F}$,

$$u \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)\phi \quad \text{y} \quad |\nabla u| \leq \gamma M. \tag{2.38}$$

Aplicando las hipótesis (H_1), (H_2) y las desigualdades (2.38), en la definición de F^u, tenemos que

$$\begin{aligned}
F^u(x,U) &= \lambda\omega_1 U^{q-1} + \lambda\left(h(x,u) - \omega_1 u^{q-1}\right) + \beta f(x,u,\nabla u)\\
&\leq \lambda\omega_1 U^{q-1} + \lambda\left(\omega_2 - \omega_1\right)u^{q-1} + \beta\left(\omega_3 u^a |\nabla u|^b\right)\\
&\leq \lambda\omega_1\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi\right)^{q-1} + \lambda\left(\omega_2-\omega_1\right)\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi\right)^{q-1} + \beta\omega_3\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi\right)^a |\nabla u|^b\\
&\leq \lambda\omega_2\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi\right)^{q-1} + \beta\omega_3\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi\right)^a (\gamma M)^b\\
&\leq \omega\left(\lambda M^{q-1} + \beta M^{a+b}\gamma^b\right) \qquad (2.39)\\
&\leq \|\omega\|_\infty\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1} = \left(\frac{\gamma\|\phi\|_\infty}{\mathcal{K}}\right)^{p-1}\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1} \qquad (2.40)\\
&= \left(\frac{\gamma M}{\mathcal{K}}\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$0 \leq F^u(x,U) \leq \left(\frac{\gamma M}{\mathcal{K}}\right)^{p-1}, \tag{2.41}$$

de donde $F^u \in L^\infty(\Omega)$.

Notemos que en la desigualdad (2.39) hemos aplicado la expresión (2.12) del Lema 2.2. Además, en la expresión (2.40) fue usada la definición de γ, dada en (2.11). Así, por el Lema 2.1, conseguimos

$$\|\nabla U\|_\infty^{p-1} \leq \mathcal{K}^{p-1}\|F^u(x,U)\|_\infty. \tag{2.42}$$

De las expresiones (2.42) y (2.41),

$$\|\nabla U\|_\infty^{p-1} \leq \mathcal{K}^{p-1}\|F^u(x,U)\|_\infty \leq (\gamma M)^{p-1},$$

con lo que concluimos la prueba de $U \in \mathcal{F}$.

Paso 3. Ahora probaremos la regularidad de la solución U.
En el paso anterior probamos que $U \in \mathcal{F}$, de donde, gracias a la expresión (2.36) conseguimos

$$0 < U \leq M \quad \text{y} \quad |\nabla U| \leq \gamma M,$$

obteniendo así que $U \in L^\infty(\Omega)$. También tenemos que $\Delta_p U \in L^\infty(\Omega)$, pues debido a las hipótesis (H_1), (H_2) y procediendo analogamente a lo realizado en las desigualdades (2.39) y (2.40), conseguimos

$$\begin{aligned} -\Delta_p U = \lambda h(x,U) + \beta f(x,U,\nabla U) &\leq \omega\left(U^{q-1} + U^a|\nabla u|^b\right) \\ &\leq \|\omega\|_\infty\left(M^{q-1} + \gamma^b M^{a+b}\right) \leq \left(\frac{\gamma M}{\mathcal{K}}\right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Así, por el Lema 1.4, obtenemos que $U \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algún $\alpha \in (0,1)$.

Enfatizamos que las cotas, tanto para U, cuanto para $|\nabla U|$, son determinadas por la constante M, que a su vez está determinada por el par $(\lambda,\beta) \in \mathcal{D}$.

Paso 4. En este paso probaremos que el operador $T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ es compacto y que $T(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$.
Con este último paso completaremos la prueba del Teorema 2.3. Para esto, definiremos el operador T, el cual será compacto e invariante por $\mathcal{F}$ y aplicaremos resultados de la Sección 1.6 (Teorema del Punto Fijo de Schauder).

Definamos el operador T, el cual asigna a cada elemento del subconjunto $\mathcal{F} \subset$

$C^1(\overline{\Omega})$, un único elemento del espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$. Esto es,

$$\begin{aligned} T : \mathcal{F} &\longrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega}) \\ u &\longmapsto T(u) \end{aligned}$$

donde $T(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es la única función satisfaciendo

$$\begin{cases} -\Delta_p\left(T(u)\right) &= \lambda\omega_1 \left(T(u)\right)^{q-1} + \lambda\left(h(x,u) - \omega_1 u^{q-1}\right) + \beta f(x,u,\nabla u) & \text{en } \Omega, \\ T(u) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.43}$$

Así, para cada $u \in \mathcal{F}$, la función $T(u) := U$ es la única solución débil en el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= F^u(x,v) & \text{en } \Omega, \\ v &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.44}$$

donde la no linealidad $F^u(x,t)$ es dada por la expresión

$$F^u(x,t) := \lambda\omega_1 t^{q-1} + \lambda\left(h(x,u) - \omega_1 u^{q-1}\right) + \beta f(x,u,\nabla u), \ x \in \overline{\Omega} \ \text{ e } t \geq 0. \tag{2.45}$$

Ahora probaremos que el operador T es invariante por $\mathcal{F}$ y compacto.

• **T es invariante por $\mathcal{F}$**

Se cumple que $T(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Con efecto, vimos en el Paso 2 que, para cada $u \in \mathcal{F}$, tenemos que $T(u) := U \in \mathcal{F}$.

• **T es compacto**

Del Teorema A.15 tenemos que la inmersión $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ es compacta, esto es, todo subconjunto acotado en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, tendrá su cerradura compacta en $C^1(\overline{\Omega})$. Luego, como T mapea $\mathcal{F}$ en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ y $\mathcal{F}$ es acotado en $C^1(\overline{\Omega})$, entonces la imagen $T(\mathcal{F})$ es relativamente compacta en $C^1(\overline{\Omega})$.

Además, podemos verificar fácilmente que el conjunto $\mathcal{F}$ es convexo. Con efecto, sean $u, v \in \mathcal{F}$ y $0 \leq \tau \leq 1$, entonces

$$\tau\epsilon u_1 \leq \tau u \leq \tau\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi \quad \text{y} \quad (1-\tau)\epsilon u_1 \leq (1-\tau)v \leq (1-\tau)\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi,$$

y sumando ambas expresiones, conseguimos

$$\epsilon u_1 \leq \tau u + (1-\tau)v \leq \frac{M}{\|\phi\|_\infty}\phi.$$

También, como $u, v \in \mathcal{F}$ tenemos que $|\nabla u| \leq \gamma M$ y $|\nabla v| \leq \gamma M$, entonces

$$\begin{aligned} |\nabla(\tau u + (1-\tau)v)| &= |\tau\nabla u + (1-\tau)\nabla v| \leq \tau|\nabla u| + (1-\tau)|\nabla v| \\ &\leq \tau\gamma M + (1-\tau)\gamma M = \gamma M, \end{aligned}$$

de donde

$$\tau u + (1-\tau)v \in \mathcal{F}.$$

Por lo tanto, son satisfechas las condiciones del Teorema 1.12 (Teorema del Punto Fijo de Schauder), lo que nos garantiza la existencia de un punto fijo $u \in \mathcal{F}$, tal que $T(u) = u$. Consecuentemente, escribiendo $T(u) = u$ en el problema (P_1), tenemos

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F^u(x,u) = \lambda h(x,u) + \beta f(x,u,\nabla u) & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.46}$$

■

Capítulo 3

Conclusiones

El resultado principal de este trabajo, Teorema 2.3, nos permite encontrar solución a problemas de Dirichlet para el p-Laplaciano, con término gradiente en la no linealidad. Podemos concluir que este resultado, no solo se puede aplicar para problemas que cuentan con el término gradiente, sino que también es aplicable para problemas que cuentan (además del término gradiente) con el término exponencial en la no linealidad. También, este resultado se puede aplicar para encontrar solución para un sistemas de problemas de Dirichlet.

Notemos que en el problema (P) estamos considerando la condición $p > 1$, donde p no tiene ninguna dependencia con la dimensión N. Esta no dependencia de p, puede ser utilizada para resolver problemas de Dirichlet, donde, bajo ciertas condiciones, es posible encontrar una solución $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$, para cada $p > 1$.

Por ejemplo en [9], los autores, motivados por el Teorema 2.3, prueban la existencia de una familia soluciones $(u_p) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, para el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q-1} + \beta u^{a-1} |\nabla u|^b + m u^{l-1} e^{\alpha u^s} & \text{en} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio suave y acotado, con $N \geq 2$ y $p > 1$. Además, prueban que esta familia converge uniformemente, a menos de subsucesiones, esto es, prueban que

$$\lim_{p\to\infty} u_p = d_\Omega, \tag{3.1}$$

donde d_Ω es la función distancia hasta la frontera $\partial\Omega$.
En el problema (P_3), debido a que se cuenta que un término exponencial, la región que permite obtener solución es el subconjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, donde para $(\lambda, \beta, m) \in \mathcal{D}$, se cumple que

$$\lambda M^{q-1} + \beta M^{a-1}\left(\frac{k_p M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^b + m M^{l-1} e^{\alpha M^s} \leq \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1},$$

para alguna constante $M > 0$.

También, el teorema principal de este trabajo, es aplicable para probar la existencia de solución para un sistema cuasi lineal, involucrando el término gradiente. Por ejemplo, en [19], motivados por el Teorema 2.3, es estudiado el sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda h(x,u) + \beta f(x,u,\nabla u) & \text{en } \Omega, \\ -\Delta_q u &= \lambda k(x,u) + \beta(x,u,\nabla u) & \text{en } \Omega, \\ u &= v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_4}$$

y el autor encuentra solución $(u, v) \in W$, donde $W = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$. En este caso, la región que permite obtener solución para el sistema, es el subconjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, donde para $(\lambda, \beta) \in \mathcal{D}$, se cumple que

$$\lambda M^{r-1} + \beta\gamma^b M^{a+b} \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1}$$
$$\lambda M^{r-1} + \beta\gamma^c M^{c+d} \leq \left(\frac{M}{\|\Phi\|_\infty}\right)^{p-1}$$

para alguna constante positiva M.

Capítulo 4

Trabajos Futuros

Un trabajo que tenemos interés de estudiar, es el comportamiento límite de una familia de soluciones del problema de Dirichlet del $p-$Laplaciano con término de convección (término gradiente) con exponente fijado. Es decir, queremos estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones u_p del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q-2}u + \mu |u|^{a-2}u\,|\nabla u|^b & \text{en} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{A}$$

donde Ω es un dominio de Lipschitz acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, con q, a y b fijos, y

$$q < p \quad \text{y} \quad a + b < p,$$

donde $q, a \geq 1$, $b > 0$, $\lambda, \mu > 0$ y $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el operador $p-$Laplaciano.

Definición 4.1 *Decimos que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es **solución débil** del problema de Dirichlet (A), si*

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \nabla v\,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega |u_p|^{q-2}u_p v\,\mathrm{d}x + \mu \int_\Omega |u_p|^{a-2}u_p\,|\nabla u_p|^b\, v\,\mathrm{d}x,\ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

El resultado principal presentado, Teorema 2.3, nos permitirá obtener solución positiva para el problema (A).

Como trabajo futuro, además de demostrar este resultado de existencia, estamos interesados en el comportamiento de una familia de soluciones (u_p) del problema (A). Esto es, considerando (u_p), una familia arbitraria de soluciones positivas del problema (A), probaremos que a menos de subsucesiones, u_p converge uniformemente a la función distancia d_Ω.

Teorema 4.2 *Supongamos que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una solución débil positiva del problema de Dirichlet (A), entonces*

$$\lim_{p\to\infty} u_p = d_\Omega, \textit{ uniformemente en } \overline{\Omega}. \tag{4.1}$$

Apéndice A

Resultados auxiliares

Con la intención de agilizar la lectura, en esta sección vamos a presentar algunos resultados que fueron utilizados en capítulos anteriores.

A.1. Definiciones y resultados generales

A continuación, presentaremos algunas definiciones, como espacios de Sobolev, sub y súper-solución, entre otros. También presentaremos algunos resultados conocidos indicando la bibliografía, donde pueden ser encontrados estos resultados, caso el lector lo desee.

Definición A.1 *Un conjunto A* ***está contenido de forma compacta*** *en Ω, si $A \subset \bar{A} \subset \Omega$ y $\bar{A}$ es compacto en $\mathbb{R}^N$. Lo cual denotamos por $A \subset\subset \Omega$.*

En la siguiente definición consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, abierto y no vacío y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una función.

Definición A.2 *Definimos el conjunto $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$, llamado* ***Soporte*** *de la funcion f, denotado por supp f.*

A.2. Espacio de Sobolev

Al estudiar ecuaciones que involucran el p-Laplaciano, es natural trabajar en el espacio de Sobolev $W^{k,p}$ (Para más detalles de este espacio, ver [3]) , cuya definición será dada en esta sección, para esto primero daremos las siguientes definiciones y notaciones.

Consideremos $K \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto, con $K \neq \emptyset$. Definimos la función

$$1_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in K \\ \\ 0, & \text{si} \quad x \notin K, \end{cases}$$

llamada **función característica** del subconjunto K.

Definición A.3 *Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$, si $f1_K \in L^p(\Omega)$, para cualquier compacto $K \subset \Omega$, con $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$, donde cada α_i es un entero no negativo. Llamamos a α **multi-índice** de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$.*

Entonces, considerando un multi-índice α, definimos

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definición A.4 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, α un multi-índice y $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. La función g es la α-**ésima derivada débil** de f en Ω y escribimos $D^\alpha f = g$, si*

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\phi dx, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definición A.5 *Definimos el **Espacio de Sobolev** $W^{k,p}(\Omega)$, como el espacio de funciones $v \in L^p(\Omega)$, tal que toda derivada débil de v, hasta el orden k, es una función de $L^p(\Omega)$, donde k es un entero no negativo y $1 \leq p \leq \infty$. Esto es,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k\}.$$

En particular, cuando $k = 1$, tenemos la siguiente definición

Definición A.6 *Sea Ω subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y sea $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el* ***Espacio de Sobolev*** *$W^{1,p}(\Omega)$ por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \text{ tal que existen } \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), j = 1, \dots, N \right\},$$

donde, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ la j-ésima derivada débil de u es denotada por $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, esto es

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, \mathrm{d}x, \, \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Antes de definir la norma del espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, recordemos que la norma estándar del espacio de Lebesgue $L^t(\Omega)$, es denotada por $\| \cdot \|_t$, para $1 \leq t \leq \infty$.

El espacio de Sobolev está dotado con la siguiente norma

$$\|u\|_{1,p} := \begin{cases} \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty, & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Con esta norma $\| \cdot \|_{1,p}$, el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Dada la función $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definimos el gradiente de u,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

y con esta notación, también el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ puede ser escrito como

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \text{ tal que } |\nabla u| \in L^p(\Omega) \right\},$$

dotada de la norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p.$$

Teorema A.7 (Desigualdad de Poincaré) *Sea Ω un dominio limitado en una dirección. Entonces, existe una constante $C = C(p, \Omega)$, tal que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p.$$

Observación A.8 *De la desigualdad de Poincaré tenemos que las normas $\|u\|_{1,p}$ y $\|\nabla u\|_p$ son equivalentes en $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Definición A.9 *Consideremos $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. La sucesión (u_n) converge a la función u en $W^{1,p}(\Omega)$, si*

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{1,p} = 0.$$

Denotamos esta convergencia por $u_n \to u$, en $W^{1,p}(\Omega)$

Definición A.10 *Definimos el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$, esto es*

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Esta última definición nos dice que tener una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ es equivalente a tener una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$, tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Entonces, el espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ podemos interpretarlo como el conjunto de funciones $u \in W^{k,p}(\Omega)$, que satisfacen

$$D^\alpha u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ para todo } |\alpha| \leq k-1.$$

A.3. Propiedad del p-Laplaciano

El operador p-Laplaciano $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 1$, donde $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, es $(p-1)-$homogéneo, esto es:

$$\Delta_p(t\,u) = t^{p-1}\Delta_p u, \text{ donde } t > 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\Delta_p(tu) &= \operatorname{div}(|\nabla(tu)|^{p-2}\,\nabla(tu)) = \operatorname{div}\left(\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(tu),\cdots,\frac{\partial}{\partial x_N}(tu)\right)\right|^{p-2} t\,\nabla u\right)\\ &= \operatorname{div}\left(t^{p-2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}\right)^{p-2} t\,\nabla u\right) = \operatorname{div}\left(t^{p-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\\ &= t^{p-1}\Delta_p u.\end{aligned}$$

Notemos que en la última igualdad fue aplicada la linealidad del operador divergente.

A.4. Inmersiones Continuas, Inmersiones Compactas. Operadores Compactos

Definición A.11 *Consideremos U y V espacios normados. El espacio U es una* ***inmersión continua*** *en el espacio V, lo cual denotamos por $U \hookrightarrow V$, si se satisface:*

(i) $U \subset V$ es un subespacio de V.

(ii) El operador identidad $I : U \to V$, definido por $Ix = x$, $\forall\, x \in U$, es continuo.

Como el operador I es un operador lineal, entonces la condición (ii) es equivalente a decir que existe una constante c, tal que

$$\|Ix\|_V \leq c\|x\|_U, \quad \forall\, x \in U.$$

Definición A.12 *Consideremos U y V espacios normados. Un operador lineal $T : U \to V$ es dicho* ***compacto****, si el operador T es continuo y T lleva conjuntos limitados en conjuntos relativamente compactos, es decir, si $A \subseteq U$ es un conjunto limitado, se tiene que $\overline{T(A)} \subseteq V$ es compacto.*

Definición A.13 *Consideremos U y V espacios normados. El espacio U es una* ***inmersión compacta*** *en el espacio V, lo cual denotamos por $U \overset{c}{\hookrightarrow} V$, si se cumple que $U \subset V$ y el operador identidad $I : U \to V$ es un operador compacto.*

Teorema A.14 *Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ conjunto abierto de clase C^1, con frontera limitada y $1 \leq p \leq \infty$. Luego,*

(i) Si $1 \leq p < N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

(ii) Si $p = N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [p, +\infty)$.

(iii) Si $p > N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demostración: Vea [3], Teorema 9.14. ■

Teorema A.15 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todo $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ valen las seguientes inmersiones:*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$
$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$
$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k.\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Si Ω es limitado, entonces las dos últimas inmersiones son compactas y si Ω es convexo y limitado, todas las tres inmersiones son compactas.

Demostración: Ver [2], Teorema 9.6. ■

Teorema A.16 ***(Rellich-Kondrachov).*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto y limitado de clase $C^1(\Omega)$ y $N \geq 2$. Entonces,*

(i) Si $p < N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*[$, donde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

(ii) Si $p = N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$.

(iii) Si $p > N$, sigue $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demostración: Vea [3], Teorema 9.16. ■

A.5. Resultados de Análisis Funcional

En esta sección, enunciaremos algunos resultado de Análisis Funcional, que son usadas en el trabajo.

Teorema A.17 ***(Desigualdad de Hölder).*** *Consideremos las funciones $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, donde $0 < p < \infty$. Entonces se cumple que*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ y } \int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración: Vea [3], Teorema 4.6. ■

Teorema A.18 *Consideremos la sucesión $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ y la función $u \in L^p(\Omega)$, tales que $u_n \to u$. Entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) y también existe $h \in L^p(\Omega)$, tales que*

(i) $u_{n_k} \to u$, c.t.p. en Ω,

(ii) $|u_{n_k}| \leq h$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ y c.t.p en Ω.

Demostración: Vea [3], Teorema 4.9. ■

Definición A.19 *(Ver [13, Definición 1.1.1]). Consideremos* $1 < p < \infty$ *y* $q = p/(p-1)$. *Decimos que una sucesión* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ ***converge débilmente*** *para* $u \in L^p(\Omega)$, *si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v = \int_\Omega uv, \quad \textit{para toda } v \in L^q(\Omega),$$

lo cual escribimos

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \textit{en} \quad L^p(\Omega).$$

A.6. Unicidad de soluciones positivas para ciertas ecuaciones elípticas cuasi lineales

En [12], Díaz e Saa estudiaron la existencia y unicidad de soluciones positivas para el seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u), \quad u \geq 0 \quad \text{e} \quad u \not\equiv 0 \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, limitado, suave e $f(x,r) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisface:

(A_1) Para casi todo $x \in \Omega$, la función $r \mapsto f(x,r)$ es continua en $[0,\infty)$. Además, para todo $r \geq 0$, la función $x \mapsto f(x,r)$ pertenece a $L^\infty(\Omega)$;

(A_2) Para casi todo $x \in \Omega$, la función $r \mapsto \dfrac{f(x,r)}{r^{p-1}}$ es estrictamente decreciente en $(0,\infty)$;

(A_3) Existe $C > 0$, tal que $f(x,r) \leq C(r^{p-1}+1)$,para casi todo punto $x \in \Omega$ y para todo $r \geq 0$.

Teorema A.20 *([12], Théorèm 1) Bajo las hipótesis (A_1), (A_2) y (A_3) el problema (A.1) admite, a lo máximo, una solución.*

Corolario A.21 *Sean $1 < q < p$, $\lambda > 0$ y $h \in L^\infty(\Omega)$, $h \geq 0$. El problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda\omega_1 u^{q-1} + h \quad \textit{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\quad \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

admite, a lo máximo, una solución.

Demostración: Con efecto:

(A_1) Para casi todo $x \in \Omega$, la función $r \mapsto F^u(x,r) := \lambda\omega_1(x) r^{q-1} + h(x)$ es continua en $[0,\infty)$ y, para todo $r \geq 0$, la función $x \mapsto F^u(x,r) = \lambda\omega_1(x) r^{q-1} + h(x)$ pertenece a $L^\infty(\Omega)$;

(A_2) Para casi todo $x \in \Omega$, la función $r \mapsto \dfrac{F^u(x,r)}{r^{p-1}} = \dfrac{\lambda\omega_1(x)}{r^{p-q}} + \dfrac{h(x)}{r^{p-1}}$ es estrictamente decreciente en $(0,\infty)$, pues derivando la última expresión con respecto a r, tenemos

$$\left(\frac{F^u(x,r)}{r^{p-1}}\right)' = \lambda\omega_1(x)(q-p)r^{q-p-1} + (1-p)r^{-p}h(x) < 0$$

(A_3) Como $1 < q < p$ y $r \in [0,\infty)$, el cociente

$$\frac{F^u(x,r)}{r^{p-1}+1} \leq \frac{\lambda\omega_1(x)r^{q-1} + \|h\|_\infty}{r^{p-1}+1} \leq \frac{\lambda\|\omega\|_\infty r^{p-1} + \|h\|_\infty}{r^{p-1}} \leq \lambda\|\omega\|_\infty + \|h\|_\infty$$

es limitado. Por lo tanto, existe $C := \lambda\|\omega\|_\infty + \|h\|_\infty > 0$, tal que

$$F^u(x,r) \leq C(r^{p-1}+1).$$

■

A.7. Resultados del Lema 2.2

Para facilitar la lectura del Lema 2.2, en esta sección incluiremos algunos resultados de la demostración de dicho lema.

Afirmación A.22 *La desigualdad (2.12) , dada en el Lema 2.2 es equivalente a*

$$\lambda A M^{q-p} + \beta B M^{r-p} \leq 1.$$

Demostración: Con efecto, multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por $\left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{-(p-1)}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda M^{q-1} + \beta\gamma^b M^{a+b} \leq \left(\frac{M}{\|\phi\|_\infty}\right)^{p-1} &\Leftrightarrow \lambda M^{q-p}\|\phi\|_\infty^{p-1} + \beta\gamma^b M^{r-p}\|\phi\|_\infty^{p-1} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \lambda M^{q-p}\|\phi\|_\infty^{p-1} + \beta\left(\frac{\mathcal{K}\|\omega\|_\infty^{\frac{1}{p-1}}}{\|\phi\|_\infty}\right)^b M^{r-p}\|\phi\|_\infty^{p-1} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \lambda M^{q-p}\|\phi\|_\infty^{p-1} + \beta\mathcal{K}^b\|\omega\|_\infty^{\frac{b}{p-1}} M^{r-p}\|\phi\|_\infty^{p-1-b} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \lambda A M^{q-p} + \beta B M^{r-p} \leq 1.
\end{aligned}$$

■

Afirmación A.23 *Se cumple la siguiente equivalencia:*

$$\beta B\left(\frac{\lambda A(p-q)}{\beta B(r-p)}\right)^{\frac{r-p}{r-q}}\left(\frac{r-q}{p-q}\right) \leq 1 \iff \lambda^{r-p}\beta^{p-q} \leq K,$$

donde

$$K = \left(\frac{p-q}{B}\right)^{p-q}\left(\frac{r-p}{A}\right)^{r-p}\frac{1}{(r-q)^{(r-q)}}$$

.

Demostración: En efecto, denotemos por $\tilde{a} := r-p,\ \tilde{b} := r-q,\ \tilde{c} := p-q$, donde

$\tilde{b}-\tilde{a}=\tilde{c}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\beta B\left(\frac{\lambda A\tilde{c}}{\beta B\tilde{a}}\right)^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}\frac{\tilde{b}}{\tilde{c}}\leq 1 &\iff \beta\,\frac{\lambda^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}}{\beta^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}}\leq\frac{\tilde{c}}{\tilde{b}}\,\frac{B^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}\;a^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}}{B\,A^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}\;c^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}}}\\
&\iff \lambda^{\tilde{a}}\beta^{\tilde{b}-\tilde{a}}\leq\frac{(\tilde{b}-\tilde{a})^{(\tilde{b}-\tilde{a})}\;\tilde{a}^{\tilde{a}}}{B^{\tilde{b}-\tilde{a}}\;A^{\tilde{a}}\;\tilde{b}^{\tilde{b}}}\\
&\iff \lambda^{\tilde{a}}\beta^{\tilde{b}-\tilde{a}}\leq\left(\frac{\tilde{b}-\tilde{a}}{B}\right)^{\tilde{b}-\tilde{a}}\left(\frac{\tilde{a}}{A}\right)^{\tilde{a}}\left(\frac{1}{\tilde{b}^{\tilde{b}}}\right)\\
&\iff \lambda^{r-p}\beta^{p-q}\leq\left(\frac{p-q}{B}\right)^{p-q}\left(\frac{r-p}{A}\right)^{r-p}\frac{1}{(r-q)^{(r-q)}}
\end{aligned}$$

y definiendo $K:=\left(\frac{p-q}{B}\right)^{p-q}\left(\frac{r-p}{A}\right)^{r-p}\frac{1}{(r-q)^{(r-q)}}$, tenemos el resultado. ■

Bibliografía

[1] AMBROSETTI, A. BREZIS, H. and CERAMI, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems.* J. Functional Analysis 122 (1994), 519-543.

[2] BIEZUNER, R. *Equações diferenciais parciais i/ii.* Notas de Aula, UFMG, 2010.

[3] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations.* Springer-NewYork. Math, 2010.

[4] BOCCARDO, L. MURAT, F and PUEL, J.-P. *Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 11 (1984), no 2, 213-235.

[5] BROCK, F. ITURRIAGA, L. and UBILLA, P. *Semi-linear singular elliptic equations with dependence on the gradient.* Nonlinear Anal. 65 (2006), no. 3, 601-614.

[6] BUENO, H., ERCOLE, G. *A quasilinear problem with fast growing gradient.* Applied Mathematics Letters **26** (2013) 520–523.

[7] BUENO, H. ERCOLE, G. FERREIRA, W. M. and ZUMPANO, A. *Existence of positive solutions for the p-Laplacian with dependence on the gradient.* Nonlinearity 25 (2012), 1211-1234.

[8] CUESTA, M. *Existence results for quasilinear problems via ordered sub and supersolutions.* Ann. Fac. Sci. Toulouse 6 (1997), no 4, 591-608.

[9] DE ARAUJO, A. L, ERCOLE, G. J.C. LANAZCA VARGAS, J.C. *The limiting behavior of solutions to p-Laplacian problems with convection and exponential term.* Topological Methods in Nonlinear Analysis, 64 (2024), 339-359

[10] DE FIGUEIREDO, D. GIRARDI, M. and MATZEU, M. *Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain-pass techniques.* Differential Integral Equations 17 (2004), no. 4, 119-126.

[11] DE FIGUEIREDO, D. SÁNCHEZ, J. and UBILLA, P. *Quasilinear equations with dependence on the gradient.* Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 10, 4862-4868.

[12] DÍAZ, J y SAA, J *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires.* C.R. Acad. Sci., Paris **305** (Série I) (1987) 521–524.

[13] EVANS, L. *Partial Diferential Equations.* Berkeley. American Mathematical Society, 1997.

[14] ITURRIAGA, L. LORCA, S. and SÁNCHEZ, J. *Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a p-gradient term.* NoDEA Nonlinear Diff. Equations Appl. 15 (2008), no. 6, 729-743.

[15] LEON, M. *Existence resuts for quasilinear problems via ordered sub and supersolutions.* Ann. Fac. Sciences Toulouse. **6** (1997), 591-608.

[16] LIEBERMAN, G. *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Anal. **12** (1988) 1203–1219.

[17] PERAL, I. *Multiplicity of Solutions for thep-Laplacian, Second school of nonlinear functional analysis and applications to differential equation.* Miramare-

Trieste: International center for theoretical physics, 21 de abril - 9 de maio. 1997.

[18] SMART, D. *Fixed point theorems* .Cambridge University Press, New York, 1974.

[19] TAVARES, L. *Existence of Solutions for a Quasilinear System with Gradient Terms*. Contemporary Mathematics. v.2, p. 239-246, 2021.

[20] TOLKSDORF, P. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations.* J. Differential Equations **51**(1984), 126-150.

[21] WILLEM, M. *Minimax Theorems: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, vol. 24, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1996.