



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Matemáticas**

**Escuela Profesional de Matemática**

**El teorema del punto fijo de Kakutani unidimensional  
y aplicaciones**

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

**AUTOR**

Juan Carlos TORRES GASTELU

**ASESOR**

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2023



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Torres, J. (2023). *El teorema del punto fijo de Kakutani unidimensional y aplicaciones*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

## Metadatos complementarios

<b>Datos de autor</b>	
Nombres y apellidos	Juan Carlos Torres Gastelu
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10036681
URL de ORCID	<a href="https://orcid.org/0009-0006-9190-4524">https://orcid.org/0009-0006-9190-4524</a>
<b>Datos de asesor</b>	
Nombres y apellidos	Willy David BARAHONA MARTÍNEZ
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	<a href="https://orcid.org/0000-0001-9177-1561">https://orcid.org/0000-0001-9177-1561</a>
<b>Datos del jurado</b>	
<b>Presidente del jurado</b>	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
<b>Miembro del jurado 1</b>	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
<b>Datos de investigación</b>	
Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional

Grupo de investigación	EDOACBI
Agencia de financiamiento	Ninguna.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos Pais: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.059756 Longitud: -77.082092
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Mayo 2023 – octubre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras <a href="https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01">https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01</a> Matemáticas aplicadas <a href="https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02">https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02</a>



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú. Decana de América  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO  
PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA  
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023)  
MODALIDAD PRESENCIAL**

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:00 horas del viernes 03 de noviembre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: “**EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE KAKUTANI UNIDIMENSIONAL Y APLICACIONES**”, presentado por el señor **Bachiller JUAN CARLOS TORRES GASTELU**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación .....*sobresaliente*....., con un calificativo promedio de .....*diecisiete (17)*.....

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller JUAN CARLOS TORRES GASTELU** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 10:45 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda  
**PRESIDENTE**

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar  
**MIEMBRO**

Mg. Willy David Barahona Martínez  
**MIEMBRO ASESOR**



Yo Willy David, Barahona Martínez en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° 001670-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE KAKUTANI UNIDIMENSIONAL Y APLICACIONES, presentado por el bachiller JUAN CARLOS TORRES GASTELU para optar el título de Licenciado en Matemática. CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 17% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título de Licenciado en Matemática.

---

DNI N°. 10078450.

Mg. Willy David, BARAHONA MARTÍNEZ



# DEDICATORIA

Quiero dedicar mi tesis a mi madre, una fuente constante de apoyo y sabiduría, que me ha guiado mediante su propio ejemplo a enfrentar desafíos sin rendirme.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, expreso mi gratitud hacia mis progenitores, Ramón Torres y Victoria Gastelu, quienes siempre me respaldan y brindan el impulso necesario en los momentos cruciales. Agradezco a mis hermanos, Andrés, Luisa, Ana, Elizabeth y Arturo, por su apoyo cuando más lo necesité .

Quiero reconocer a mi orientador, el Magister Willy David Barahona Martínez por dedicar su tiempo y orientación, permitiéndome culminar con éxito mi tesis.

Agradezco a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por haberme aceptado como parte de su comunidad académica, así como a mis profesores, quienes me exigieron y contribuyeron en mi formación como profesional.

Por último, expreso mi agradecimiento a mis compañeros y amigos, cuya amistad y respaldo moral han sido fundamentales para avanzar paso a paso a lo largo de esta carrera y lograr terminarla.

# RESUMEN

El teorema del punto fijo de Kakutani unidimensional y aplicaciones

Juan Carlos, Torres Gastelu

Octubre - 2023

**Asesor** : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

**Título obtenido** : Licenciado en Matemática.

---

En el presente trabajo realizaremos el estudio pormenorizado del teorema del punto fijo de Kakutani unidimensional, partiendo de la idea inicial dada por Shizo Kakutani en el año 1941 en [1], para esto tomaremos como dominio principal al intervalo  $[0, 1]$ .

El teorema, además de las innumerables aplicaciones a la economía [2], también es estudiado como una generalización del teorema del punto fijo de Brouwer.

**Palabras clave:**

Teorema del punto fijo de Kakutani, Teorema de punto fijo de Brouwer, Cápsula convexa, Punto de equilibrio.

# ABSTRACT

Kakutani's one-dimensional fixed point theorem applications

Juan Carlos, Torres Gastelu

October - 2023

**Adviser** : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

**Obtained** : Graduate in Mathematics.

---

In the present work we will carry out a detailed study of the one-dimensional Kakutani fixed point theorem, starting from the initial idea given by Shizo Kakutani in 1941 in [1], for this we will take the interval  $[0, 1]$  as the main domain.

The theorem, in addition to the innumerable applications to economics [2], is also studied as a generalization of Brouwer's fixed point theorem.

**Keywords:**

Kakutani's fixed point theorem, Brouwer's fixed point theorem, Convex capsule, Equilibrium point.

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1. Definiciones Previas . . . . .	11
1.2. Una versión elemental del teorema de punto fijo de Kakutani unidimensional . . . . .	14
<b>2. Problema Principal</b>	<b>16</b>
2.1. El teorema del punto fijo de Kakutani unidimensional . . . . .	16
2.1.1. El teorema del punto fijo de Kakutani en $n$ dimensiones . . . . .	19
<b>3. Aplicaciones</b>	<b>22</b>
3.1. Una aplicación del TPFK al equilibrio en modelos económicos . . . . .	23
<b>4. Conclusiones y/o Sugerencias</b>	<b>28</b>
<b>5. Bibliografía</b>	<b>28</b>

# Introducción

Varios matemáticos han investigado sobre el teorema del punto fijo de Kakutani (TPFK) y sus aplicaciones a la teoría de juegos, análisis funcional y cálculo de variaciones. Algunos de los matemáticos destacados en este campo incluyen:

Shizuo Kakutani [1]. Matemático japonés que inicialmente formuló el TPFK en 1941. Su trabajo fue fundamental para el desarrollo de la teoría de juegos no cooperativos y la teoría de la elección social.

John Nash[2],[3]. El trabajo de Kakutani sobre conjuntos diagonales y sus aplicaciones en teoría de juegos fue una influencia importante en el desarrollo de la teoría de juegos no cooperativos. John Nash, ganador del Premio Nobel de Economía en 1994, amplió y generalizó el teorema de Kakutani para establecer la existencia de equilibrios de Nash en juegos no cooperativos.

David Gale [7]. Matemático estadounidense que trabajó en el campo de la teoría de juegos y el análisis matemático. Colaboró con Nash para desarrollar la teoría de juegos no cooperativos y formalizar el concepto de equilibrio de Nash. Su trabajo se basó en los resultados de Kakutani.

Michael Maschler [8]. Matemático israelí que contribuyó significativamente al campo de la teoría de juegos cooperativos. Utilizó el teorema de Kakutani en sus investigaciones sobre juegos cooperativos con coaliciones libres y estableció resultados importantes en este campo. William H. Fleming. Matemático estadounidense conocido por su tra-

bajo en cálculo de variaciones y control óptimo. Utilizó el teorema de Kakutani en su investigación sobre juegos estocásticos y problemas de control estocástico.

El TPFK es una herramienta matemática poderosa que tiene diversas aplicaciones en diferentes campos, incluyendo la economía. Una de esas aplicaciones es en el estudio del equilibrio en modelos económicos.

En economía, el equilibrio se refiere a un estado en el que todas las fuerzas económicas están balanceadas, y no hay incentivo para que ningún individuo o entidad, cambie su comportamiento o decisiones. Los modelos económicos intentan analizar varios aspectos de este estado de equilibrio, como los precios, las cantidades y las asignaciones de recursos.

El TPFK proporciona una forma de demostrar la existencia de equilibrio en ciertos modelos económicos, especialmente aquellos que involucran múltiples agentes e interacciones complejas. El teorema establece que si una asignación de conjuntos de un conjunto compacto y convexo en sí mismo cumple dos condiciones - hemicontinuidad superior (cada conjunto abierto en la imagen tiene una preimagen no vacía) y valiosidad convexa (la imagen de cualquier conjunto convexo es convexa) - entonces existe al menos un punto fijo en el conjunto.

En modelos económicos, la asignación de conjuntos puede representar las estrategias o decisiones disponibles para los agentes, y el punto fijo representa el estado de equilibrio en el que ningún agente tiene incentivo para desviarse de su estrategia elegida. Al cumplir las condiciones del TPFK, los economistas pueden demostrar la existencia de dichos puntos de equilibrio.

Por ejemplo, considere un modelo de equilibrio general donde hay múltiples compradores y vendedores interactuando en un mercado. La asignación de conjuntos puede representar las estrategias de los compradores y vendedores, como sus elecciones de cantidades demandadas y suministradas a diferentes precios. El TPFK puede ser utilizado para demostrar la existencia de un punto de equilibrio donde la demanda y el

suministro agregados son iguales, y no hay incentivo para que ningún comprador o vendedor cambie su estrategia.

Otro ejemplo se encuentra en la teoría de juegos, donde los modelos económicos a menudo involucran a múltiples jugadores tomando decisiones estratégicas. El TPFK puede ser utilizado para demostrar la existencia de un equilibrio de Nash, que es un concepto en la teoría de juegos donde ningún jugador tiene incentivo para cambiar unilateralmente su estrategia. La asignación de conjuntos representa las estrategias de los jugadores, y el punto fijo representa el equilibrio de Nash.

# 1 Preliminares

Presentamos una demostración completa y concisa del TPFK (1941) en una dimensión, la cual se basa en conceptos de teoría de juegos. Esta prueba sugiere la aparición de una nueva familia de algoritmos para aproximar puntos fijos, los cuales ofrecen ventajas en comparación con los métodos de subdivisión simpliciales. Además, se menciona la noción de un juego de imitación, que es un juego de dos personas donde ambos jugadores tienen los mismos espacios de estrategia y el segundo jugador busca elegir la misma estrategia que el primero.

Los teoremas del punto fijo se han demostrado extremadamente útiles en diversas áreas de las matemáticas. En particular, el TPFK tiene una amplia aplicabilidad, desde la demostración de la existencia de la medida de Haar hasta su uso en la teoría de juegos y la economía.

## 1.1. Definiciones Previas

**Definición 1. (Función No negativa).** Una función  $f$  es no negativa si  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \text{Dom}(f)$ .

El gráfico de  $f$  se encuentra arriba del eje  $x$  o sobre el eje  $x$ .

**Ejemplo 1.**  $f(x) = x^2$ , cuyo dominio es  $\mathbb{R}$ , es una función no negativa.

Conocemos que su gráfica es una parábola, sentada sobre el eje  $x$ .

**Definición 2. (Función Continua).** Una función  $f$  es **continua en  $a$** , si

- $f(a)$  está definida,
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe,
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Si alguna de estas tres condiciones no se cumple se dice que  $f$  no es continua en  $a$ .

Si  $f$  no es continua en  $a$ , decimos que  $f$  es **discontinua en  $a$** .

**Definición 3. (Espacio de funciones continuas sobre  $[a, b]$   $C([a, b])$ ).**

El espacio de funciones continuas definidas sobre el intervalo  $[a, b]$ , es denotada por

$$C([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua} \right\}$$

**Definición 4. (Punto fijo).**

Para cada conjunto  $X$ , un punto fijo de la función  $f : X \longrightarrow X$  es un punto  $x_0$  tal que

$$f(x_0) = x_0.$$

**Definición 5.** Una correspondencia en un conjunto  $X$  es una función de  $X$  al conjunto de subconjuntos de  $X$ . Esto es,  $f : X \longrightarrow \mathbb{P}(X)$ .

Existe una convención para permitir a  $\emptyset$  como valor posible para correspondencias; para descartarlo, se debe especificar que la correspondencia no tiene un valor vacío.

**Definición 6.** Se dice que  $x_0 \in X$  es un punto fijo de  $f : X \longrightarrow \mathbb{P}(X)$ , si y solo si  $x_0 \in f(x_0)$ .

**Ejemplo 2.** Sean  $X = [0, 1]$  y

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ [0, 1], & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Entonces,  $x_0 = \frac{1}{2}$  es un punto fijo de  $f$ .

El TPFK desarrolló con aplicaciones económicas, fue generalizando el TPF de Brouwer para manejar la correspondencia. Por ejemplo, la prueba de la existencia del equilibrio de Nash en juegos finitos se puede hacer simplemente usando el teorema del punto fijo de Brouwer, pero esa prueba requiere un poco de esfuerzo, ante esete inconveniente utiliza una construcción auxiliar que da origen al teorema del punto fijo de Kakutani.

Para evitar una complejidad adicional, exponemos el TPFK en su forma convexa original, y del mismo modo que, el TPF de Brouwer, la convexidad puede ser sustituida por un homeomorfismo sobre  $X$ .

**Definición 7.** Se dice que  $f$  tiene un valor convexo si y solo si para cada  $x \in X$ , el conjunto  $f(x)$  es convexo.

**Definición 8.** Una correspondencia  $f$  en  $X$  tiene un gráfico cerrado si y solo si el conjunto

$$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in X^2 : y \in f(x)\}$$

se cierra como un subconjunto de  $X^2$ . Cualquier función continua  $f$  tiene un gráfico cerrado.

Los ejemplos de inexistencia de un punto fijo bajo Brouwer proporcionan ejemplos de inexistencia bajo Kakutani cuando  $X$  no es compacto o la gráfica de  $f$  no es cerrado. La nueva condición fue introducido por Kakutani, la cual es que  $f$  tenga un valor convexo.

**Ejemplo 3.** Sea  $X = [0, 1]$  y sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ \{0, 1\}, & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ 0, & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.2)$$

No hay un punto fijo. En este caso  $X$  es compacto,  $f$  no tiene un valor vacío y tiene un gráfico cerrado, pero no tiene un valor convexo.

**Ejemplo 4.** Sea  $X = [0, 1]$  y

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ 0, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.3)$$

No hay un punto fijo. En este caso  $X$  es conexo y compacto pero  $f$  no es continua, además  $f$  es una correspondencia gráfica cerrada mientras que  $f$  en el ejemplo 1 era una función que no tenía un gráfico cerrado.

**Observación 1.** Muchos tratamientos de Kakutani se establecen en términos de que  $f$  es semicontinua superior y de valor cerrado en lugar de que  $f$  tenga un gráfico cerrado. Como

$$f : X \rightarrow X$$

y  $X$  es compacto.

## 1.2. Una versión elemental del teorema de punto fijo de Kakutani unidimensional

En 1950, John Nash utilizó el Teorema del punto fijo de Kakutani para demostrar la existencia del equilibrio de Nash en la teoría de juegos. En un juego con  $n$  jugadores, donde cada uno elige entre un conjunto finito de estrategias puras, se busca encontrar un punto de equilibrio de Nash, donde ninguna estrategia individual sea mejor que la elección de estrategias de los demás jugadores.

El teorema de Kakutani garantiza la existencia de dicho equilibrio al mostrar que la correspondencia entre estrategias forma una aplicación de punto a conjunto que preserva la convexidad, y las funciones de pago son continuas, lo que asegura la existencia de un punto de equilibrio de Nash.

### **Teorema 1. (Versión elemental Teorema de punto fijo de Kakutani).**

Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}([0, 1])$  una función continua tal que para todo  $x \in [0, 1]$ , la imagen  $f(x)$  es un intervalo en  $[0, 1]$ . Entonces existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $x \in f(x)$ .

#### **Demostración por contradicción.**

Para demostrar el TPFK unidimensional, utilizaremos el método de demostración por contradicción.

En efecto, supongamos que no existe ningún punto fijo en  $[0, 1]$  para la función  $f$ . Esto significa que para todo  $x \in [0, 1]$ , tenemos que  $x \notin f(x)$ .

Consideremos la unión de todos los intervalos en  $[0, 1]$  que forman la imagen de  $f$ . Sea  $A$  esta unión, es decir,  $A = \bigcup_{x \in [0, 1]} f(x)$ . Dado que  $f(x)$  es un intervalo para todo  $x \in [0, 1]$ , sabemos que  $A$  es una unión de intervalos. Además, dado que  $f$  es continua,  $A$  es un conjunto cerrado y acotado. Ahora, utilizando el hecho de que  $A$  es una unión de intervalos cerrados y acotados, podemos aplicar el teorema del valor extremo para

obtener que existe un mínimo y un máximo en  $A$ .

Sean  $a$  y  $b$  los valores mínimo y máximo de  $A$  respectivamente. Consideremos dos casos:

- 1) Si  $a = 0$  y  $b = 1$ , entonces sabemos que  $0 \in A$  y  $1 \in A$ . Esto implica que existen  $x_0$  y  $x_1$  en  $[0, 1]$  tales que  $0 \in f(x_0)$  y  $1 \in f(x_1)$ . Dado que  $0 \in f(x_0)$ , tenemos que  $x_0 \notin f(x_0)$ , lo cual es una contradicción. De manera similar, dado que  $1 \in f(x_1)$ , tenemos que  $x_1 \notin f(x_1)$ , lo cual también es una contradicción. Por lo tanto, este caso no es posible.
  
- 2) Si  $a < 0$  o  $b > 1$ , entonces existen  $x_2$  y  $x_3$  en  $[0, 1]$  tales que  $a \in f(x_2)$  y  $b \in f(x_3)$ . Dado que  $a \in f(x_2)$ , tenemos que  $x_2 \notin f(x_2)$ . De manera similar, dado que  $b \in f(x_3)$ , tenemos que  $x_3 \notin f(x_3)$ . Esto implica que  $a < x_2 < b$  y  $a < x_3 < b$ . Como  $f$  es continua, podemos aplicar el Teorema del Valor Intermedio y concluir que existe  $x_4 \in [0, 1]$  tal que  $f(x_4)$  contiene a  $a$  y  $b$ . Dado que  $a \in f(x_4)$ , tenemos que  $x_4 \notin f(x_4)$ , lo cual es una contradicción.

En ambos casos, llegamos a una contradicción.

Por lo tanto, nuestra suposición inicial de que no existe ningún punto fijo en  $[0, 1]$  para la función  $f$  es incorrecta. Concluimos entonces que existe al menos un punto fijo  $x \in [0, 1]$  tal que  $x \in f(x)$ .

## 2 Problema Principal

Otro teorema con aplicaciones económicas importantes es el TPF de Kakutani, dado por Shizuo Kakutani en 1941 como generalización del TPF de Brouwer aunque no es tan intuitivo como el de TPF de Brouwer ya que se trata de funciones de valor fijo y por tanto, es más difícil de visualizarlo, el teorema encontró popularidad en la economía matemática, especialmente después de que John Nash lo usó para probar la existencia de puntos de equilibrio en  $n$  juegos. Vamos a utilizar el teorema del punto fijo de Brouwer para demostrar el TPFK y luego usaremos este último resultado para demostrar la existencia de equilibrios en una economía pura de intercambio.

Antes de eso, primero comprendamos que se entiende por puntos fijos de valor fijo para funciones.

Recuerde que el TPF de Brouwer demuestra la existencia de puntos fijos para funciones de valor puntual. Veremos en esta parte que el TPF de Kakutani afirma la existencia de puntos fijos para funciones. A medida que avanzamos, encontraremos que el teorema anterior (el TPF de Brouwer) es útil para entender y demostrar este último resultado (el TPFK).

A continuación enunciamos y demostramos el TPFK en una dimensión.

### 2.1. El teorema del punto fijo de Kakutani unidimensional

**Teorema 2.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}([0, 1])$  una función continua tal que para todo  $x \in [0, 1]$ , la imagen  $f(x)$  es un intervalo en  $[0, 1]$ . Entonces existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $x \in f(x)$ .

**Demostración:**

**Notación 1.** asumimos que para cada  $x \in [0, 1]$ , su imagen es un intervalo  $[a, b]$ ,

$(a, b]$ ,  $[a, b)$  o  $(a, b)$  en  $[0, 1]$ . La importancia de esta suposición quedaría clara con la demostración.

Sea  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario. Se subdivide  $[0, 1]$  en  $n$  subintervalos de igual ancho  $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$  donde  $0 \leq j \leq n-1$  para cada  $\frac{j}{n}$ , donde  $j = 0, 1, \dots, n$ , elegimos un punto  $k_{j,n} \in f(\frac{j}{n})$ .

Se define una función puntual  $h_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $h_n(\frac{j}{n}) = k_{j,n}$ , donde  $h_n$  aplica linealmente a cada subintervalo  $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ .

Ver la siguiente figura: Es un ejemplo de construcción de  $g_n$  para  $n = 18$

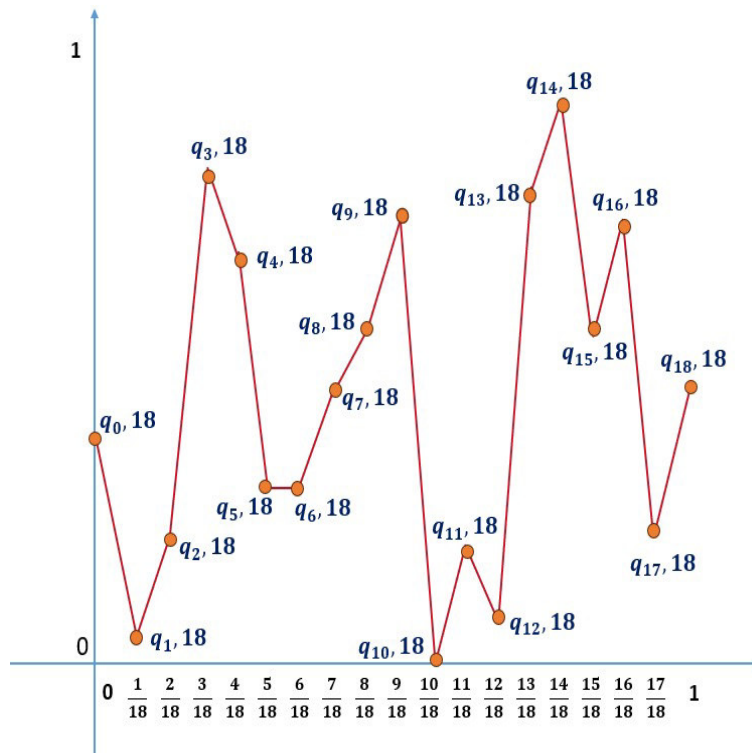


Figura 2.1:

Nótese que  $h_n$  es una función continua de valor puntual aplica de  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Entonces por el TPF de Brouwer unidimensional,  $h_n$  posee un punto fijo en  $x_n$ .

Supongamos:  $x_n \in [\frac{j_n}{n}, \frac{j_n+1}{n}]$ . Entonces

$x_n = \lambda_n (\frac{j_n}{n}) + (1 - \lambda_n) (\frac{j_n+1}{n})$  para algún  $\lambda_n \in [0, 1]$ .

Como  $h_n$  es un función lineal en subintervalos, se tiene :

$$h_n(x_n) = \lambda_n \left[ h_n \left( \frac{j_n}{n} \right) \right] + (1 - \lambda_n) \left[ h_n \left( \frac{j_n + 1}{n} \right) \right] \quad (2.1)$$

Recordar que

$$h_n\left(\frac{j_n}{n}\right) = k_{i_n,n} \quad \text{y} \quad h_n\left(\frac{j_n+1}{n}\right) = k_{j_n+1,n}$$

Se elige de tal manera que

$$k_{j_n,n} \in f\left(\frac{j_n}{n}\right) \quad \text{y} \quad k_{i_n+1,n} \in f\left(\frac{j_n+1}{n}\right)$$

Por la ecuación 2.1 , se obtiene:

$$h_n(x_n) = \lambda_n k_{j_n,n} + (1 - \lambda_n) k_{j_n+1,n} \quad (2.2)$$

Ahora  $x_n$  es un punto fijo de  $h_n$  y por tanto por la ecuación 2.2,

$$x_n = h_n(x_n) = \lambda_n k_{j_n,n} + (1 - \lambda_n) k_{j_n+1,n} \quad (2.3)$$

Combinamos las sucesiones  $(x_n)$ ,  $(\lambda_n)$ ,  $(k_{j_n,n})$  y  $(k_{j_n+1,n})$  en una sucesión

$$(x_n, \lambda_n, k_{j_n,n}, k_{j_n+1,n})$$

en  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

Esta es una sucesión en un espacio cerrado y acotado, por lo tanto tiene una sub-sucesión convergente, por simplicidad supongamos que la sucesión original converge. Asumimos que  $(x_n)$  converge a  $x \in [0, 1]$ ,  $(k_{j_n,n})$  converge a  $k_0 \in [0, 1]$ ,  $(k_{j_n+1,n})$  converge a  $k_1 \in [0, 1]$  y  $(\lambda_n)$  converge a  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Afirmación 1.**  $x$  es un punto fijo de  $f$ , es decir ,  $x \in f(x)$ .

Para probar la afirmación, empezamos tomando el límite en la ecuación 2.3 para obtener:

$$x = \lambda k_0 + (1 - \lambda) k_1. \quad (2.4)$$

Recordemos el teorema: Sean  $(x_n)$  y  $(y_n)$  sucesiones en  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $(x_n) \rightarrow x$  y  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$  luego  $(y_n) \rightarrow x$ .

En virtud al teorema mencionado, tenemos que

$$\left(\frac{j_n}{n}\right) \rightarrow x \quad \text{y} \quad \left(\frac{j_n+1}{n}\right) \rightarrow x$$

ya que  $x_n \in [\frac{j_n}{n}, \frac{j_{n+1}}{n}]$  y la longitud de los subintervalos  $[\frac{j_n}{n}, \frac{j_{n+1}}{n}]$  tiende a 0. Además como  $k_{j_n, n} \rightarrow k_0$  y  $k_{j_n, n} \in f(\frac{j_n}{n})$ , se sigue por la continuidad de  $f$  que  $k_0 \in f(x)$ . De manera similar,  $k_1 \in f(x)$ . Como  $f(x)$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ , resulta que

$$\lambda k_0 + (1 - \lambda)k_1 \in f(x) \quad (2.5)$$

En otras palabras,  $x \in f(x)$  como se afirma.

Por lo tanto,  $x$  es un punto fijo de  $f$  y esto demuestra el TPFK en una dimensión.

### 2.1.1. El teorema del punto fijo de Kakutani en $n$ dimensiones

Generalizando el teorema unidimensional de Kakutani tenemos el siguiente resultado en  $n$  dimensiones.

**Teorema 3.** Dado el standar  $n$ -simplex  $\Omega$  y una función continua de valor fijo  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{P}(\Omega)$  tal que  $f(x) \subset \Omega$  es convexa para todo  $x \in \Omega$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $\Omega$ .

#### Demostración:

Consideramos una función continua  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{P}(\Omega)$ , tal que  $f(x)$  es una función convexa subconjunto de  $\Omega$ , para todo  $x \in \Omega$ .

Para un simplex de  $n$ -dimensional, se toma cada vez, más y más subdivisiones

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_i, \dots$$

tales que el diámetro de cada sub-simplex tienda a 0 cuando  $i \rightarrow \infty$ .

Sea  $\mathbb{V} = (v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n_i})$  el conjunto de todos los vértices del sub-simplex de  $\Omega$  en la  $i$ -ésima subdivisión.

Definimos  $f_i : \Omega \rightarrow \Omega$  de tal manera que  $f_i(v_{i,j}) \in f(v_{i,j}) \forall j$  y  $f_i$  se extiende linealmente sobre su sub-simplex. Como  $f_i$  es un punto continuo de la función aplicada de  $\Omega$  en si mismo, por lo tanto, por el TPF de Brouwer  $n$ -dimensional  $f_i$  tiene un

punto fijo  $x_i$  en  $\Omega$ .

Dado que  $x_i$  se encuentra en algún sub-simplex en la  $i$ -ésima subdivisión de  $\Omega$ , se puede expresar como

$$x_i = \lambda_{i,0} u_{i,0}, \dots, \lambda_{i,n} u_{i,n} \quad (2.6)$$

donde  $u_{i,0}, \dots, u_{i,n} \in \mathbb{V}$  son los vértices del sub-simplex que contiene a  $x_i$  para cada  $\lambda_{i,j} \in [0, 1]$  y

$$\sum_{j=0}^n \lambda_{i,j} = 1. \quad (2.7)$$

Sea  $f_i(u_{i,j}) = w_{i,j}$ ,  $u_{i,j} \in \mathbb{V}$ , por definición de  $f_i$ , se sigue que  $w_{i,j} \in f(u_{i,j})$ .

De la ecuación (2.6), obtenemos que

$$f_i(x_i) = \lambda_{i,0} f_i(u_{i,0}) + \dots + \lambda_{i,n} f_i(u_{i,n}) = \lambda_{i,0} w_{i,0} + \dots + \lambda_{i,n} w_{i,n} \quad (2.8)$$

puesto que  $f_i$  es una función lineal de sub-simplex en  $p_i$ . Además, sabemos que  $x_i$  es un punto fijo de  $f_i$  y por lo tanto,  $f_i(x_i) = x_i$ .

De este modo

$$x_i = \lambda_{i,0} w_{i,0} + \dots + \lambda_{i,n} w_{i,n}. \quad (2.9)$$

Tenemos sucesiones indexadas por  $i : (x_i)$  en  $\Omega$ ,  $(\lambda_{i,j})$  en  $[0, 1]$  para cada  $j$ ,  $(w_{i,j})$  en  $\Omega$  para cada  $j$ . Por nuestros argumentos de convergencia habituales, podemos encontrar subsucesiones de cada una de estas sucesiones que convergen simultáneamente a los límites para cada uno. Consideremos que las sucesiones anteriores convergen.

Supongamos que  $x_i \rightarrow x \in \Omega$ ,  $\lambda_{i,j} \rightarrow \lambda_j \in [0, 1]$ , para cada  $j$  y  $w_{i,j} \rightarrow w_j \in \Omega$  para cada  $j$ , entonces podemos afirmar que  $x$  es un punto fijo de  $f$ . i.e)  $x \in f(x)$ .

Primero observe que  $x_i$  está en la subdivisión simplex con vértices  $u_{i,0}, \dots, u_{i,n}$  y la subdivisión de simplex tiene diámetros que tienden a 0 cuando  $i$  tiende al infinito.

Por otro lado, tenemos que, cada sucesión  $(w_{i,j})$  también converge a  $x$  cuando  $i \rightarrow \infty$ , entonces para  $j$ ,  $w_{i,j} \in f(u_{i,j})$ ,  $w_{i,j} \rightarrow w_j$  y  $u_{i,j} \rightarrow x$ .

Por la continuidad de  $f$  se sigue que  $w_j \in f(x)$  para todo  $j$ .

Además, tomando el límite cuando  $i \rightarrow \infty$  en las ecuaciones 2.8 y 2.9, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (2.10)$$

$$x = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_n w_n \tag{2.11}$$

donde  $\lambda_k \in [0, 1]$  para todo  $k$ . Así, dado que cada  $w_k \in f(x)$  y  $f(x)$  es convexo, concluimos que  $x \in f(x)$ .

Por lo tanto,  $x$  es un punto fijo de  $f$  y así hemos demostrado el TPFK  $n$ -dimensional.

## 3 Aplicaciones

El TPFK es una herramienta matemática poderosa con diversas aplicaciones en campos como la economía. En economía, el equilibrio se refiere a un estado en el que todas las fuerzas económicas están en equilibrio, sin incentivos para cambiar el comportamiento o las decisiones. Los modelos económicos buscan analizar aspectos del equilibrio, como precios, cantidades y asignaciones de recursos.

El TPFK es útil para demostrar la existencia de equilibrio en ciertos modelos económicos, especialmente aquellos que involucran múltiples agentes e interacciones complejas. A su vez considera que, si una asignación de conjuntos verifica las condiciones: hemicontinuidad superior y valiosidad convexa sobre un conjunto compacto y convexo, entonces se garantiza la existencia de al menos un punto fijo en ese conjunto.

En modelos económicos, la asignación de conjuntos puede representar las estrategias o decisiones de los agentes, y el punto fijo representa el estado de equilibrio en el que ningún agente tiene incentivos para desviarse de su estrategia. Cumplir las condiciones del TPFK permite a los economistas demostrar la existencia de puntos de equilibrio.

Por ejemplo, en un modelo de equilibrio general con múltiples compradores y vendedores, este teorema se utiliza para demostrar la existencia de un punto de equilibrio donde la demanda y el suministro agregados son iguales, y ningún comprador o vendedor cuenta con motivaciones para cambiar su estrategia.

En la teoría de juegos, también se aplica, se utiliza para garantizar la existencia de un equilibrio de Nash, donde ningún jugador se siente motivado para cambiar su estrategia unilateralmente. En este caso, la asignación de conjuntos representa las estrategias de los jugadores, y el punto fijo representa el equilibrio de Nash.

### 3.1. Una aplicación del TPFK al equilibrio en modelos económicos

Recuerde que un equilibrio es un estado de reposo donde las fuerzas opuestas se equilibran. En modelos económicos, el equilibrio en un mercado de bienes se refiere a un punto donde la oferta de bienes satisface la demanda de los mismos. En esta etapa, no hay tendencia dentro del mercado para que el precio cambie. Por lo que, el equilibrio de la oferta y la demanda permanece constante y en equilibrio, a menos que se vea afectada por fuerzas externas. En esta parte, usamos el TPFK para demostrar la existencia de equilibrios en una economía de intercambio, es decir, una economía donde no hay producción.

Supongamos que la economía es de intercambio puro. Todos los agentes económicos son consumidores y tienen una dotación inicial de bienes, así, la cantidad total de cada bien en la economía es fija y el consumo depende de dotaciones iniciales, así como el intercambio (comercio) entre los consumidores.

Supongamos que hay  $m$  consumidores y  $n$  bienes en la economía, cada consumidor está dotado de un paquete de bienes.

Sea el paquete de bienes propiedad de la  $i$ -ésima persona:

$$a^i = (a_1^i, a_2^i, a_3^i, \dots, a_n^i)$$

donde  $a_j^i$  representa la cantidad del bien  $j$  que el  $i$ -ésimo consumidor tiene.

Como no hay producción, la oferta de bienes en la economía es fija y se puede encontrar sumando los paquetes de bienes que posee cada consumidor, entonces el vector de oferta fijo es

$$r = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) \text{ donde } r_k = \sum_{i=1}^n a_k^i \forall k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

donde cada bien tiene un precio o valor relativo  $p_k$  asociado a ella. Asumimos los precios no negativos ( $p_k \geq 0$ ) y están normalizados para sumar 1, esto es

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1$$

es decir, en este último sentido, son precios relativos.

Llamamos al vector  $p = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  vector de precios, y el conjunto de vectores de precios forman un  $(n-1)$ -simplex  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  con vértice  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, \dots, 1)$ .

En una economía de intercambio, la riqueza de los  $i$ -ésimos consumidores  $u^i$  es completamente determinado por el valor de los bienes de su propiedad. Se define por

$$u^i = a^i \cdot p. \quad (3.2)$$

El vector de demanda para el  $i$ -ésimo individuo es de la forma

$$b^i(p) = (b_1^i(p), b_2^i(p), b_3^i(p), \dots, b_n^i(p))$$

donde  $b_k^i$  es la demanda del bien  $k$  por cada parte del  $i$ -ésimo el consumidor y es una función de los precios de todos los bienes. En nuestro análisis, estamos haciendo el supuesto razonable de que la demanda de un bien por parte de un consumidor no es una cantidad mínima y máxima del bien que quiere. Sin embargo, dado que la riqueza de cada consumidor es fija (depende de la dotación), cuando un consumidor demanda más de un bien, automáticamente tiene que exigir menos de otro bien. Por tanto la restricción presupuestaria unida con el rango de preferencias del  $i$ -ésimo consumidor da lugar a un conjunto de demanda vectores.  $B^i(p)$  entre los que puede elegir, correspondientes a un precio dado vector  $p$ .

Eso es

$$B^i(p) = \{b^i(p) \mid b^i(p) = (b_1^i(p), b_2^i(p), b_3^i(p), \dots, b_n^i(p))\}. \quad (3.3)$$

Llamaremos a  $B^i(p)$  al conjunto de demanda (para el consumidor  $i$  al precio  $p$ ). dado que cada consumidor no puede exigir más de lo que puede pagar, el valor de cada vector demanda es igual a la riqueza del consumidor, así, para cada  $b^i \in B^i(p)$ ,

$$b^i \cdot p = a^i \cdot p. \quad (3.4)$$

Cada  $B^i(p)$  tiene un valor fijo. Dado el precio  $p$ ,  $B^i(p)$  representa los diferentes fajos de mercancías del  $i$ -ésimo consumidor, el consumidor puede permitirse y sería

igualmente feliz provisto de ello, sería indiferente entre estos paquetes.

Suponemos que la aplicación de  $p$  al conjunto  $B^i(p)$  es continuo, reflejando que un pequeño cambio en  $p$  debería dar como resultado solo un pequeño cambio en la demanda.

Dados cualesquiera dos vectores de demanda  $v_1$  y  $v_2$  en el conjunto  $B^i(p)$  afirmamos que el consumidor acepta toda combinación lineal de ambos vectores de demanda, en otras palabras, cualquier  $v$  tal que

$$v = tv_1 + (1 - t)v_2; t \in [0, 1]$$

Para demostrar esta afirmación, de la ecuación 3.4 obtenemos que

$$v_1 \cdot p = a^i \cdot p = v_2 \cdot p$$

y por tanto, usando la ecuación 3.2 tenemos

$$v \cdot p = tv_1 \cdot p + (1 - t)v_2 \cdot p = ta^i \cdot p + (1 - t)a^i \cdot p = a^i \cdot p = u^i$$

Por lo tanto, el consumidor puede permitirse cualquier combinación lineal de dos vectores de demanda.

Suponemos que si el consumidor prefiere dos paquetes de bienes, entonces el consumidor estará igualmente satisfecho con una combinación lineal de dos paquetes. Según esta suposición, cualquier combinación lineal de dos vectores de demanda, también es un vector de demanda al precio  $p$ , en otras palabras, cada  $B^i(p)$  es convexo.

La suposición de que  $B^i(p)$  es un conjunto convexo será útil más adelante estableciendo la premisa para el TPFK, para un precio dado  $p$  la demanda agregada en la economía se puede encontrar sumando todas las demandas individuales posibles sobre todos los  $n$  consumidores. Por lo tanto, definimos la demanda total

$$B(p) = \left\{ \sum_{i=1}^m b_j \mid b^i \in B^i(p) \text{ para cada } i \right\} \quad (3.5)$$

Como cada  $B^i(p)$  es un conjunto convexo, podemos ver que  $B(p)$  es convexo en  $\mathbb{R}^n$ .

El exceso de demanda de un bien es la diferencia entre su demanda en un precio y la oferta. Así, el exceso de demanda es una función de precio. Por un precio  $p$  el exceso de demanda es el conjunto

$$D(p) = d : d = b - r; b \in B(p). \quad (3.6)$$

consideramos que  $D(p) \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto convexo, ya que el vector oferta es fijo y  $B(p)$  es un conjunto convexo para cada  $p$ . En la ecuación 3.4, sumando todos los  $m$  consumidores. obtenemos que para cada  $p \in B(p)$ ,

$$p \cdot b = p \cdot r. \quad (3.7)$$

Así para cada  $d \in D(p)$ ,

$$p \cdot d = 0 \quad (3.8)$$

Hablando geoméricamente, cada  $d \in D(p)$  es ortogonal a  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ . Esto es conocida como la ley de Walrasian, esto significa que, el valor del exceso de demanda en la economía es siempre cero, haya o no equilibrio en la economía, entonces la suma de los valores del exceso de demanda en todos los bienes debe ser cero, es decir, si existe un exceso de demanda positivo para algunos bienes, entonces debe existir un exceso de demanda negativo de otros bienes para equilibrarlo debido a limitaciones presupuestarias.

El equilibrio en la economía existe a un precio  $p$  para el cual existe  $b \in B(p)$  tal que  $b_k \leq r_k$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ . A este precio, la demanda total de cada bien no es más que la oferta de ese bien en la economía, por lo que se puede satisfacer la demanda. Por lo tanto, no habrá tendencia a que el precio cambie dentro del mercado y la economía estaría en reposo, este precio  $p$  se llama vector de precios de equilibrio de la economía. Usamos el TPFK para probar la existencia de un vector de equilibrio de precios para una economía tal como el descrito anteriormente.

**Teorema 4.** Considerando una economía de intercambio pura con  $n$  bienes y  $m$  consumidores, y tenemos  $p$ ,  $B^i(p)$  y  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  como se definió anteriormente. En particular, supongamos que  $B^i(p)$  tiene un valor fijo y es continuo tal que  $B^i(p)$  es convexo. Entonces la economía posee un vector de precios de equilibrio.

Así, el TPFK nos permite garantizar un equilibrio de precios en una economía de intercambio puro. Dado el vector de precio de equilibrio es un punto fijo de la función  $F(p)$  como se define arriba, es posible tener un vector de precios de equilibrio donde la economía está en reposo y hay un vector de demanda a ese precio que es satisfecho por la oferta.

## 4 Conclusiones y/o Sugerencias

- 1) El TPFK es estudiado como una generalización del teorema del punto fijo de Brouwer.
- 2) Empleamos el TPF de Kakutani sobre el punto fijo para validar la presencia de un equilibrio en un contexto económico en el que  $m$  consumidores poseen una cantidad fija de  $n$  bienes que pueden intercambiar entre sí. La existencia de un equilibrio en esta economía de intercambio no es evidente a simple vista. Sin embargo, el teorema nos proporciona la herramienta necesaria para establecer que los valores pueden organizarse de manera que cada jugador pueda satisfacer su demanda, teniendo en cuenta la oferta disponible.
- 3) El TPFK es importante en la modelización económica, especialmente para garantizar la presencia de puntos de equilibrio en sistemas económicos complejos que involucran múltiples agentes e interacciones estratégicas. Al cumplir las condiciones del teorema, los economistas pueden proporcionar garantías matemáticas de que existe un equilibrio en estos modelos, lo que ayuda a analizar y comprender los fenómenos económicos.

# Bibliografía

- [1] Kakutani, S. (1941). A generalization of Brouwer's fixed point theorem.
- [2] Nash Jr, J. F. (1950). Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the national academy of sciences, 36(1), 48-49.
- [3] Nash, J. F., Shapley, L. S., & Bohnenblust, H. F. (1950). A simple three-person poker game (Vol. 24). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [4] Brouwer, L. E. J. (1911). Uber abbildung von mannigfaltigkeiten. Mathematische annalen, 71(1), 97-115.
- [5] Shapley, L.,& Vohra, R. (1991). On Kakutani's fixed point theorem, the KKMS theorem and the core of a balanced game. Economic Theory, 1, 108-116.
- [6] Maliwal, A. (2016). Sperner's Lemma, The Brouwer Fixed Point Theorem, the Kakutani Fixed Point Theorem, and Their Applications in Social Sciences.
- [7] Gale, D. (1989). The theory of linear economic models. University of Chicago press.
- [8] Davis, M., & Maschler, M. (1965). The kernel of a cooperative game. Naval Research Logistics Quarterly, 12(3), 223-259.