Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Operadores θ-monótonos en espacios de Banach reflexivos

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

Edú PAREDES ROJAS

ASESOR

Dra. Yolanda Silvia SANTIAGO AYALA

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Paredes, E. (2021). *Operadores θ-monótonos en espacios de Banach reflexivos*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	**Edu Paredes Rojas**
Tipo de documento de identidad	**DNI**
Número de documento de identidad	**45775137**
URL de ORCID	**https://orcid.org/0000-0002-1981-2637**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	**Yolanda Silvia Santiago Ayala**
Tipo de documento de identidad	**DNI**
Número de documento de identidad	**06445705**
URL de ORCID	**https://orcid.org/0000-0003-2516-0871**
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	**Leonardo Henry Alejandro Aguilar**
Tipo de documento de identidad	**DNI**
Número de documento de identidad	**43069051**
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	**Alex Molina Sotomayor**
Tipo de documento de identidad	**DNI**
Número de documento de identidad	**06092720**
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	**Pedro Celso Contreras Chamorro**
Tipo de documento de identidad	**DNI**
Número de documento de identidad	**07699566**
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	**Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Análisis y Aplicaciones – GEDAAp**
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Ate Latitud: -12.019653 Longitud: -76.839480
Año o rango de años en que se realizó la investigación	**2016-2020**
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA APLICADA CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Siendo las 15:00 horas del día jueves siete de octubre de dos mil veintiuno, en la sala virtual meet.google.com/num-mjkx-mmb, el Jurado de Tesis conformado por los siguientes docentes:

PRESIDENTE	:	Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO	:	Mg. Alex Molina Sotomayor
MIEMBRO EXTERNO	:	Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
MIEMBRO ASESORA	:	Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: **«OPERADORES Θ-MONÓTONOS EN ESPACIOS DE BANACH REFLEXIVOS»** presentada por el Bachiller Edú Paredes Rojas, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

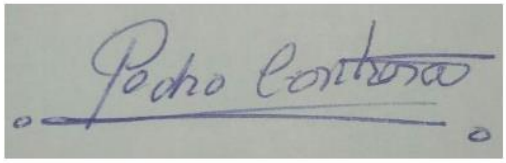
Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Bachiller Edú Paredes Rojas, el calificativo de **MUY BUENO y nota de DIECIOCHO (18)**.

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional al Bachiller Edú Paredes Rojas.**

Siendo las **16:35** horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE

Mg. Alex Molina Sotomayor
MIEMBRO



Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
MIEMBRO EXTERNO

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
MIEMBRO ASESOR

Agradecimientos

A mis padres Olinda Silvina Rojas Miguel y Julio Paredes Saavedra, por que sin ellos y sin todo el apoyo y guía brindados a lo largo de mi vida, no sería quien soy ahora, a ellos les debo todo, mi amor eterno y gratitud por todos los sacrificios que tuvieron que hacer para darnos una educación de calidad a mi y a mis hermanos Margarita y Aarón. Mejores hermanos no pude tener, siempre brindandome su apoyo incondicional y consejo.
A mi amada esposa Miriam Barrientos, mis princesas Emy y Zaory, por todo su apoyo y amor brindado en estos años, que es lo que me impulsa a seguir adelante.
A mis tíos Inocente y Rosa por su consejo, Alfredo, por esas largas noches de conversación sobre el cosmos, matemáticas y física por citar algunas.

A mi asesora, la Dra. Yolanda Santiago, el Dr. Contreras Chamorro, M.Sc. Neisser Pino y a un maestro y amigo Mg. Alex Molina que con sus críticas contribuyeron a preparar este manuscrito. A mi paisita, profesor y amigo, el maestro Gregorio Carhuamaca, que desde pregrado me aconsejó y guió para seguir creciendo profesionalmente.

Agradecer de forma especial a un viejo amigo Cristhian "Timmy" Gonzalo por ser el que me iniciara en este hermoso mundo de las matemáticas, como olvidar los fines de semana con Junior, Yorlan, Alex, Yan, Smith y William en nuestro grupo EMPATÍA. Por último y no por ello menos importante, agradecer a ese ser supremo que todo lo ve, por la vida y salud que nos concede día a día.

Índice general

Lista de figuras viii

Resumen x

Abstract xi

Introducción xii

1. Preliminares 1

1.1. Espacios Vectoriales 1

1.2. Espacios Métricos 13

1.3. Espacios de Banach 18

1.4. Espacios Topológicos 20

1.5. Teorema de Baire 29

1.6. Semicontinuidad inferior 36

1.7. Convexidad 40

2. Funciones Multivaluadas 55

2.1. Funciones Multivaluadas 55

2.2. Dominio, Rango y Gráfico 55

2.3. Orden en Aplicaciones Multivaluadas 62

2.4. Operaciones con Aplicaciones Multivaluadas 63

2.5. Aplicaciones Multivaluadas en Espacios Vectoriales 71

2.6. Aplicaciones Multivaluadas Acotadas 73

3. Operadores θ-monótonos **77**

3.1. Operadores Monótonos 77

3.2. De la monotonía a la θ-monotonía 80

3.3. Funciones θ 91

3.4. Operaciones con operadores θ-monótonos 101

3.5. Operadores acotados 108

3.6. Operadores θ-monótonos maximales 110

4. Una fórmula para encontrar θ en $\mathbb{R}^2$ **113**

4.1. Polinomios en dos variables 113

4.2. Una fórmula para θ en $\mathbb{R}^2$ 115

4.3. El algoritmo 125

4.4. Ejemplos 127

5. Bifunciones θ-monótonas **133**

5.1. Bifunciones 133

5.2. Bifunción θ-monótona 136

5.3. Bifunción θ-monótona maximal 142

5.4. Bifunciones localmente acotadas 145

6. Resultado principal **149**

6.1. Acotación local en dimensión infinita 149

7. Conclusiones y trabajos futuros **153**

7.1. Conclusiones 153

7.2. Trabajos futuros 154

Bibliografía **155**

A. **160**

B. 163

Lista de figuras

1.1. Gráfica de H. 37
1.2. Gráfica de m. 37
1.3. $B_1^s[(0,0,0)]$. 44
1.4. $B_1^s[(0,0)]$. 45
1.5. Cono de Helado en $\mathbb{R}^3$. 51

2.1. Gráfico de I. 57
2.2. Gráfico de Λ. 58
2.3. Gráfico de φ_-. 58
2.4. Gráfico de φ_+. 58
2.5. Gráfico de $\overline{\varphi}_-$. 59
2.6. Gráfico de $\overline{\varphi}_+$. 59
2.7. Gráfico de B para $n = 2$. 60
2.8. Gráfico de P. 64

3.1. Diagrama de inclusión de los tres tipos de operadores monótonos. 80
3.2. La θ-monotonía y todas las clases de operadores vistos hasta ahora. 87

4.1. $\theta_c(\vec{x},\vec{u}) = -6\|\vec{x}-\vec{u}\|$. 128
4.2. $\theta_c(\vec{x},\vec{u}) = -9\|\vec{x}-\vec{u}\|$. 128
4.3. $\theta_c(\vec{x},\vec{u}) = -\|\vec{x}-\vec{u}\|$. 129
4.4. $\theta_{1c}(\vec{x},\vec{u}) = -5\|\vec{x}-\vec{u}\|$. 129
4.5. $\theta_{2c}(\vec{x},\vec{u}) = -3\|\vec{x}-\vec{u}\|$. 129
4.6. $\theta_c(\vec{x},\vec{u}) = -3\|\vec{x}-\vec{u}\|$. 130

4.7. Gráfica de f y g. 130
4.8. $\theta_c(\vec{x},\vec{u}) = -6\|\vec{x}-\vec{u}\|$. 131
4.9. Gráfica de f y g. 131
4.10. $\theta_c(\vec{x},\vec{u}) = -\frac{1}{2}(|x|+|u|+1)\|\vec{x}-\vec{u}\|$. 132

RESUMEN

Operadores θ-Monótonos en Espacios de Banach Reflexivos

Edú Paredes Rojas

Asesora de la Tesis : Dr. Yolanda Silvia Santiago Ayala

En el presente trabajo, seguimos las ideas de [2] para operadores σ-monótonos, probamos la acotación local de un operador θ-monótono multivaluado en el contexto de los espacios de Banach reflexivos de dimensión infinita con ayuda de las bifunciones ([11]) y asumiendo la semicontinuidad inferior débil de $\theta(\cdot, y)$. Para esto mostramos que el uso de funciones multivaluadas es mucho más conveniente que las funciones en el sentido usual. Por otro lado, cabe resaltar que los operadores θ-monótonos definidos en [32] al ser una generalización de los operadores uniformemente monótonos, fuertemente monótonos, monótonos en el sentido de Minty-Browder, ε-monótonos, γ-monótonos, pre-monótonos, σ-monótonos y α-monótonos, todo resultado demostrado para un operador θ-monótono se puede aplicar directamente a los operadores mencionados. También, utilizando las ideas de [2], conseguimos hacer una demostración directa para la acotación local de un operador θ-monótono en $\mathbb{R}^n$, que fue demostrada de forma indirecta en [32], y para operadores σ-monótonos demostradas de forma indirecta en [22] y también de forma directa en [2]. Finalmente, se realiza un algoritmo y varios gráficos en 3D y 2D usando Geogebra para una versión geométrica de los ejemplos obtenidos.

Palabras clave. Operador Multivaluado, Operador θ-Monótono, Semicontinuidad inferior, Cuasiconvexidad, Operador Localmente Acotado, Espacio de Banach reflexivo.

ABSTRACT

θ-Monotone Operators in Reflexive Banach Spaces

Edú Paredes Rojas

Adviser : Dr. Yolanda Silvia Santiago Ayala

In the present work, we followed ideas of [2] for σ-monotone operators, tried local boundedness of an multivalued θ-monotone operator in the context of reflexive Banach spaces of infinite dimension with the help of the bifunctions ([11]) and assuming the weak lower semicontinuity of $\theta(\cdot, y)$. For this we show that the use of multivalued functions is much more convenient than functions in the usual sense. On the other hand, it should be noted that the θ-monotone operators defined in [32] being a generalization of uniformly monotone, strongly monotone, monotone operators in the sense of Minty-Browder, ε-monotone, γ-monotone, pre monotone, σ-monotone and α-monotone, every proven result for an θ-monotone operator can be applied directly to the operators mentioned. Also, using the ideas of [2], we managed to make a direct demonstration for the local boundedness of a θ-monotone operator in $\mathbb{R}^n$, which was indirectly demonstrated in [32], and for σ-monotone operators indirectly demonstrated in [22] and also directly in [2]. Finally, an algorithm and various 3D and 2D graphics are made using GeoGebra for a geometric version of the examples obtained.

Keywords. Multi-valued operator, θ Monotone operators, Lower semicontinuity, Quasiconvexity, Locally bounded operator, Reflexive Banach space

Introducción

En la actualidad el concepto de operador monótono es muy usado y hay muchos tipos de operadores monótonos conocidos en la literatura. En la década del 60 vieron la luz los operadores monótonos en el sentido de Minty-Browder o simplemente operadores monótonos (ver [35], [14], [15] y [16]), casi 30 años después aparecieron los operadores fuertemente monótonos (ver [42] y [44].), en el año 2000, de definen a los operadores uniformemente monótonos (ver [25]).

Desde mediados de la década del 90 y hasta la actualidad la tendencia es extender la definición de operador monótono en el sentido de Minty-Browder, apareciendo en 1998 el concepto de operador ε-monótono (ver [23] y [21].), 2 años antes de definieron los operadores γ-monótonos(ver [24] y [40]), considerando el caso particular de operador γ-monótono con $\gamma = 2$, tenemos al llamado operador C-monótono relajado (ver [44]). Estas dos clases de operadores, los ε-monótonos y los γ-monótonos tienen intersección no vacía, pero ninguno está contenido completamente en el otro.

Iusem, Kassay y Sosa, en el año 2009 publicaron un artículo donde se dio a conocer el concepto de operador pre-monótono(ver [22])que extiende la clase de operadores ε- monótonos, tres años después Alizadeh, Hadjisavvas y Roohi extienden los operadores pre-monótonos definiendo los operadores σ-monótonos(ver [2], [3], [4], [5]). Quedando así los operadores γ-monótonos sin extensión por el momento.

En 2012, László Szilard en [32] define a los operadores θ-monótonos que brindan una extensión para todos los tipos de operadores monótonos ya mencionados y

finalmente en el año 2015 M. Alimohammady y Ayed E. Hashoosh introducen en [1] el concepto de operador α-monótono(ver [19] y [18]) que es una extensión de los operadores θ-monótonos.

Todo lo anterior es una visión cronológica de los distintos tipos de operadores monótonos más relevantes para este trabajo.

László Szilard desarrolla y estudia los operadores θ-monótonos, obteniendo condiciones para que sea localmente acotado en el contexto de los espacios de Banach de dimensión finita. Dichos resultados son válidos para todos los tipos de operadores monótonos mencionados. La importancia de extender los operadores monótonos y estudiar la mayor extensión posible, radica en obtener resultados generales que sirvan para todos los tipos de monotonía mencionados.

Queremos mencionar que todos los gráficos presentes en esta tesis, tanto en 2D como 3D, fueron realizados íntegramente por el autor, usando en uno de ellos Matlab R2019a y el los demás, el software libre GeoGebra, ademásde ello, ponemos a disposición del lector, los enlaces directos a varias de esas gráficas para tener una visión geométrica más rica de los ejemplos generados.

El lector interesado en ver los gráficos entre otras cosas más, puede visitar el perfil del autor en GeoGebra:

geogebra.org/u/eduparedesrojas.

En cuanto a los ejemplos, la gran mayoría son inéditos y otros tomados y adaptados de las investigaciones mencionadas en las referencias, logrando encontrar un algoritmo que consiste en lo siguiente:

Dado un operador no necesariamente lineal en $\mathbb{R}^2$, nos genera una función θ que hace de este operador, un operador θ-monótono.

El presente trabajo está constituido por siete capítulos y un anexo:

El capítulo 1 recoge la teoría necesaria para desarrollar esta investigación, comenzando por los espacios vectoriales; el hecho de que en $\mathbb{R}^n$ dos normas cualesquiera

sean equivalentes contribuye a tener, en el capítulo 5, una prueba directa de la acotación local de un operador θ-monótono. Los espacios métricos y topológicos juntos con el Teorema de Baire y los conceptos de semicontinuidad inferior, convexidad así como la cuasiconvexidad son parte fundamental del resultado principal de este trabajo en el contexto de los espacios de Banach reflexivos de dimensión infinita, expuesto en el capítulo 6.

En el capítulo 2 se presentan a las funciones multivaluadas, ellas aparecen en gran medida en el análisis complejo, la función logaritmo y las funciones trigonométricas inversas, solo por mencionar algunas de ellas. El interés por las funciones multivaluadas aumentó con el libro Espaces topologiques, fonctions multivoques de Claude Berge en 1959(ver [10]). A ello se agregó el auge de las aplicaciones del análisis diferencial e integral de las funciones multivaluadas a una gran variedad de problemas en la teoría de optimización, cálculo de variaciones y análisis convexo. Se define su dominio, rango y grafo, además del orden y las operaciones que con ellas se pueden hacer. Terminamos el capítulo con los tres tipos de acotación para funciones multivaluadas, la global, ordinaria y local.

En el capítulo 3 se abordan distintos tipos de operadores monótonos como se mencionó al inicio de esta introducción y algunos ejemplos. Analizamos también las funciones θ que hacen que un operador T sea θ-monótono, mostrando su estructura y diversos ejemplos de ellas. Finalizamos este capítulo viendo las operaciones que pueden hacerce con los operadores θ-monótonos y otra vez el concepto de operador acotado y maximal.

En el capítulo 4, demostramos que todo operador $T : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ de tipo univaluado y polinomial es un operador θ-monótono, esta prueba además nos dice como encontrar la función θ que hace de un operador del tipo descrito, un operador θ-monótono, esto nos sirve también para diseñar un algoritmo de modo que sea

posible su implementación computacional. En la última sección de este capítulo comparamos los resultados de la implementación computacional con algunos de los ejemplos ya vistos en esta tesis y en [32].
El capítulo 5 nos introduce en el concepto de bifunción definido en [11], damos la definición de bifunción θ-monótona, θ-monótona maximal y el concepto de bifunción localmente acotada. Al final del capítulo mostramos una prueba directa para la acotación local de un operador θ-monótono en un espacio de Banach de dimensión finita, probado de manera indirecta en [32] para operadores θ-monótonos y en [22] para operadores pre-monótonos o σ-monótonos, de hecho la prueba dada en [32] es una adaptación de la mostrada en [22]. Por ese entonces, en [2] se dio a conocer una prueba directa para operadores σ-monótonos, ahora usaremos esas ideas y adaptaremos lo probado por [2] a operadores θ-monótonos.

El capítulo 6 está reservado para el resultado principal de esta tesis, la prueba de la acotación local de un operador θ-monótono en un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, para ello recurrimos a la topología débil y al Teorema 1.32, que afirma que la bola unitaria cerrada es compacta débilmente. Garantizada la compacidad de la bola unitaria cerrada y la semicontinuidad inferior de $\theta(\cdot, y)$ en la topología débil, se tiene acotación inferior o la existencia de un mínimo que es lo que necesitamos para concluir la prueba del teorema principal.

En el séptimo y último capítulo sugerimos algunos posibles trabajos futuros y exponemos la conclusión de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios Vectoriales

En esta sección presentamos al espacio dual y bidual algebraico, los espacios vectoriales con producto interno, norma, la cual nos servirá para definir a los conjuntos acotados y la continuidad de un operador entre espacios vectoriales, mostrando luego de ello el espacio dual topológico y el producto dualidad. Terminamos esta sección definiendo la convergencia de una sucesión y a las sucesiones de Cauchy. Omitiremos la mayoría de las pruebas, limitándonos en muchos casos solo a enunciar los teoremas o corolarios, pero el lector interesado puede consultar [8] o el libro Álgebra Lineal de Elon Lages [31] y [12], [28] y [43].

Definición 1.1. Espacio Vectorial

Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto, cuyos elementos son llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones: la suma, que a cada par de vectores $u, v \in V$ le hace corresponder un nuevo vector $u + v \in V$, llamado suma de u y v; y la multiplicación por un número real, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ y a cada vector $u \in V$ le hace corresponder un vector $\alpha \cdot u$ o αu, llamado producto de α por u. Estas operaciones deben satisfacer, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in V$ las siguientes condiciones o axiomas de espacio vectorial:

i) $u + v = v + u$;

ii) $(u+v)+w = u+(v+w)$;

iii) Existe un vector $0 \in V$, llamado vector nulo o vector cero, tal que $u+0 = 0+u = u$, para todo $u \in V$;

iv) Para cada vector $u \in V$ existe un vector $-u \in V$, llamado inverso aditivo de u, tal que $-u+u = u+(-u) = 0$;

v) $1 \cdot u = u$;

vi) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;

vii) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$;

viii) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.

En lugar de escribir $u+(-v)$ escribiremos $u-v$ y para abreviar la notación, escribiremos *e.v.* en lugar de *espacio vectorial* sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y V un *e.v.*, el producto cartesiano de V consigo mismo n-veces, es decir, $V^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in V, i = 1, 2, \ldots, n\} = \underbrace{V \times V \cdots \times V}_{n-veces}$, es un *e.v.* con las siguientes operaciones:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_2)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_2)$$

Para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
En particular, si $V = \mathbb{R}$, tenemos el espacio euclideo n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Si $n = 1$, tenemos la recta real, ya que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2. Espacio de funciones de A en V
Sea A un conjunto no vacío y V un espacio vectorial. Sean $f, g \in \mathcal{F}(A, V)$, definamos la suma de f y g como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y lo denotamos por $f+g : A \to V$. Es claro que para que $f(x)+g(x)$ exista, x debe pertenecer al dominio de f y también al dominio de g, entonces $Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$. Sea

ahora $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos el producto de α y f como $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ y lo denotamos por $\alpha f : A \to V$, en este caso evidentemente tenemos $Dom(\alpha f) = Dom(f)$. Con la suma de funciones y el producto de un número por una función, $\mathcal{F}(A, V)$ es un espacio vectorial.

Definición 1.2. Subespacio Vectorial Sea V un $e.v.$, un subespacio vectorial es un subconjunto $U \subseteq V$ que es a su vez un espacio vectorial con las mismas operaciones de suma y producto heredadas de V.

Ejemplo 1.3. Sea $v \in V$ un vector, el conjunto $U = \{\alpha v / \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial. Si en particular $v = 0$, se tiene el subespacio nulo $\{0\}$.

Ejemplo 1.4. Sea V un $e.v.$, Λ un conjunto de índices. Si para cada $\lambda \in \Lambda$, U_λ es un subespacio vectorial de V entonces la intersección $U = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo 1.5. Sea $X \subseteq V$ y sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subespacios de V que contienen a X, entonces $\mathcal{L}(X) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$ es un subespacio vectorial.
Si $X = \varnothing$, entonces $\mathcal{L}(\varnothing) = \{0\}$.

Definición 1.3. Sea $X \subseteq V$, si $\mathcal{L}(X) = V$, entonces se dice que X es un conjunto de generadores de V.

Ejemplo 1.6. Vectores canónicos
Los vectores $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ llamados vectores canónicos constituyen un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.4. Sea $w \in V$, w es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$, si existen escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

Definición 1.5. Sea $X \subseteq V$, se dice que X es linealmente independiente(L.I.) si ningún vector $v \in X$ es combinación lineal de otros vectores de X.
Si X es unitario, entonces X es L.I. Decimos que $X \subseteq V$ es linealmente dependiente(L.D.) si no es L.I.

Definición 1.6. Base de Hamel

Se dice que un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq V$ linealmente independiente es una base de Hamel de V si todo vector $v \in V$ puede expresarse de manera única como combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{B}$, es decir existen escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{R}$ y vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{B}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Observación 1.1. Usando el **Lema de Zorn**(ver Anexo A) se puede probar que todo espacio vectorial posee una base de Hamel.

Definición 1.7. Todas las bases de un espacio vectorial poseen la misma cardinalidad, y a ese número cardinal en común se le conoce como dimensión del espacio vectorial, que denotaremos con $dim(V)$. Si $\mathcal{B} \subseteq V$ es una base de V, se tiene $dim(V) = card(\mathcal{B})$, cuando $dim(V) < \infty$ se dice que el espacio es de dimensión finita, si $dim(V) = \infty$ se dice que V es de dimensión infinita.

Definición 1.8. Sean U y V *e.v.* y sea $f : U \to V$ una función, decimos que f es una transformación lineal, operador lineal o simplemente que f es lineal si $f(u + v) = f(u) + f(v)$ y $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ para todo $u, v \in V$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.7. Espacio de Aplicaciones Lineales

Sean U, V dos espacios vectoriales, entonces el conjunto

$$\mathcal{L}(U, V) = \{f : U \to V / f \text{ es lineal}\} = \{f \in \mathcal{F}(U, V) \ / \ f \text{ es lineal}\}$$

al ser un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(U, V)$, es también un espacio vectorial.

Ejemplo 1.8. Espacio Dual Algebraico

Sea U un *e.v.*, consideremos en el ejemplo anterior el caso $V = \mathbb{R}$, entonces $U' = \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial conocido como espacio dual algebraico de U. A los elementos de U' se les suele llamar funcionales lineales.

Ejemplo 1.9. Espacio Bidual Algebraico

Sea U un *e.v.*, el espacio bidual de U denotado por U'', el espacio dual de U', es decir $U'' = (U')'$.

Usualmente en un primer curso de algebra lineal, no se hace la distinción entre espacio dual algebraico y espacio dual, esto puede deberse principalmente a que se trabaja en el contexto de los espacios de dimensión finita, pero en dimensión infinita tenemos además del presentado, otro espacio dual, el espacio dual topológico, estos espacios son iguales en dimensión finita, pero no necesariamente en dimensión infinita.

Definición 1.9. Norma

Sea V un espacio vectorial, una norma en V es una función de V a $\mathbb{R}$, denotada por $\|u\|_V$ para todo $u \in V$, que satisface las siguientes propiedades:

i) $\|u\|_V \geqslant 0$ para todo $u \in V$.

ii) $\|u\|_V = 0$ si y solo si $u = 0$.

iii) $\|\alpha u\|_V = \alpha \|u\|_V$ para todo $u \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) $\|u + v\|_V \leqslant \|u\|_V + \|v\|_V$ para todo $u, v \in V$.(Desigualdad triangular)

Un $e.v.$ en el que se ha definido una norma recibe el nombre de espacio normado($e.n.$) Si no hay lugar a confusión, escribiremos $\| \ \|$ en lugar de $\| \ \|_V$.

Ejemplo 1.10. Sea $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ la norma usual o euclideana en $\mathbb{R}^n$ está definida como $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$, la norma de la suma como $\|u\|_s = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$ y finalmente, la norma del supremo $\|u\|_\infty = \sup_{i=1,\cdots,n} |u_i| = \max_{i=1,\cdots,n} |u_i|$.

Ejemplo 1.11. $\ell^2 = \{x = (x_n) \ : \ x_n \in \mathbb{R} \ , \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ es un espacio normado $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$.

Ejemplo 1.12. Sea $p > 1$, el conjunto $\ell^p = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, con la norma definida por $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$, es un $e.n.$

Ejemplo 1.13. El conjunto $\ell^1 = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$, con la norma definida por $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_n|$, es un $e.n.$.

Ejemplo 1.14. El conjunto $\ell^\infty = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{R},\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$, con la norma definida por $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$, es un *e.n.*.

Ejemplo 1.15. El subconjunto $c_0 = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{R},\ x_n \to 0\} \subset \ell^\infty$, con la norma heredada de ℓ^∞ es un *e.n.*

Teorema 1.1. ***Desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz***

Sea V un e.n. cuya norma proviene de un p.i. entonces $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$.

Definición 1.10. Normas equivalentes

Dos normas $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ en un espacio vectorial V son equivalentes si existen r, $s > 0$ tales que para todo $x \in V$ se tenga $r\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant s\|x\|_a$.

Ejemplo 1.16. Normas equivalentes en $\mathbb{R}^n$

Las tres normas en $\mathbb{R}^n$ definidas en el Ejemplo 1.10 son equivalentes. En efecto, sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, puesto que $\|x\|_\infty \geqslant |x_i|$ entonces $n\|x\|_\infty^2 = \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty^2 \geqslant \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|^2$ de donde $\|x\| \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$. También $\|x\|_\infty^2 \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|^2$, por tanto $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|$, así $\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$.
Por otra parte $\|x\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_s = \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty$, es decir $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_s \leqslant n\|x\|_\infty$, esto es , la norma de la suma es equivalente a la norma del supremo y esta a su vez es equivalente a la norma usual, lo que implica que la norma de la suma y la norma usual también son equivalentes. En efecto, de la desigualdad triangular $\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leqslant \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_s$. Consideremos ahora $\widetilde{x} = \sum_{i=1}^n |x_i| e_i$ y $y = \sum_{i=1}^n 1 \cdot e_i$, entonces por la desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz(Teorema 1.1):

$$\|x\|_s = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot 1 = |\langle \widetilde{x}, y\rangle| \leqslant \|\widetilde{x}\|\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |1|^2} = \|x\|\sqrt{n}$$

Por lo tanto $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_s \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_s$ o equivalentemente $\|x\| \leqslant \|x\|_s \leqslant \sqrt{n}\|x\|$.

Observación 1.2. Todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

Ejemplo 1.17. Bolas Abiertas, Cerradas y Esferas

Sea V un $e.n.$ y sea $r > 0$, dado $x \in V$, la bola abierta de radio r y centro en x es definida como $B_r(x) = \{y \in V / \|y - x\| < r\}$. La bola cerrada de centro x y radio r es denotada por $B_r[x] = \{y \in V / \|y - x\| \leqslant r\}$. La esfera de centro x y radio r es denotada por $S_r[x] = \{y \in V / \|y - x\| = r\}$.

Del Ejemplo 1.10, si $V = R^n$ según la norma usual tenemos:

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} < r\}$$

$$B_r[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} \leqslant r\}$$

$$S_r[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2 = r^2\}.$$

Para la norma de la suma en $\mathbb{R}^n$ se tiene:

$$B_r^s(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}|y_i - x_i| < r\}$$

$$B_r^s[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}|y_i - x_i| \leqslant r\}$$

$$S_r^s[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}|y_i - x_i| = r\}$$

En cuanto a la norma del supremo:

$$B_r^\infty(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1,\cdots,n}|y_i - x_i| < r\}$$

$$B_r^\infty[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1,\cdots,n}|y_i - x_i| \leqslant r\}$$

$$S_r^\infty[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1,\cdots,n}|y_i - x_i| = r\}$$

Observación 1.3. Del ejemplo anterior y por el Ejemplo 1.16, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $r > 0$ se tienen las siguientes inclusiones de bolas abiertas:

$$B_r(x) \subseteq B_r^\infty(x) \subseteq B_{\sqrt{n}r}(x),\ B_r^s(x) \subseteq B_r^\infty(x) \subseteq B_{nr}^s(x),\ B_r^s(x) \subseteq B_r(x) \subseteq B_{\sqrt{n}r}^s(x).$$

Las inclusiones anteriores se siguen cumpliendo para bolas cerradas, en el caso de la última inclusión, $B_{\sqrt{n}r}^s[x]$ es la bola cerrada(según la norma de la suma) mas pequeña en el sentido de la inclusión de conjuntos que contiene a $B_r[x]$.

Teorema 1.2. *Sea* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *dado* $r > 0$ *se tiene que* $B_r[x_0] \subseteq B^s_{\sqrt{n}r}[x_0]$ *y si* $B_r[x_0] \subseteq B^s_{\sqrt{n}\delta}[x_0]$ *entonces* $r \leqslant \delta$.

Prueba. Si $x_0 = \sum_{i=1}^n x_i^0 e_i$, dado $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in B_r[x_0]$ distinto de x_0 tenemos $\|y - x_0\| \leqslant r$, haciendo $x_i = y_i - x_i^0$ lo anterior equivale a $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant r^2$ y además existe $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $x_i \neq 0$. Asumamos sin perdida de generalidad que $x_n \neq 0$, luego $-\sqrt{r^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \leqslant |x_n| \leqslant \sqrt{r^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}$. Por otra parte:

$$\|y - x_0\|_s = \sum_{i=1}^{n} |y_i x_i^0| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sqrt{r^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|$$

Definamos $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ como $f(x_1, x_2, \cdots, n-1) = \sqrt{r^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|$ tenemos que las derivadas parciales satisfacen para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{-x_i}{\sqrt{r^2 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2}} + \frac{x_i}{|x_i|} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad r^2 = 2x_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} x_j^2$$

Entonces hallar los valores críticos de f será equivalente a resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 \\ r^2 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^2 \end{bmatrix}$$

Por inducción se prueba fácilmente que la matriz posee inversa y que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^2 \\ r^2 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^2 \end{bmatrix} = \frac{r^2}{n} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $x_i^2 = \dfrac{r^2}{n}$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n-1$, de donde f tiene los siguientes puntos críticos: $\widetilde{x} = (\pm\dfrac{r}{\sqrt{n}}, \pm\dfrac{r}{\sqrt{n}}, \cdots, \pm\dfrac{r}{\sqrt{n}}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.
Veamos ahora las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_i^2} = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} x_j^2 - r^2}{(r^2 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2)^{3/2}} \qquad , \qquad \frac{\partial f^2}{\partial x_j \, \partial x_i} = \frac{-x_i x_j}{(r^2 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2)^{3/2}}$$

Luego:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_i^2}(\widetilde{x}) = \frac{-2\sqrt{n}}{r} \qquad , \qquad \frac{\partial f^2}{\partial x_j \, \partial x_i}(\widetilde{x}) = \pm\frac{\sqrt{n}}{r}$$

De lo anterior la matriz Hessiana es:

$$Hf(\widetilde{x}) = \frac{\sqrt{n}}{r} \begin{bmatrix} -2 & \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \pm 1 & -2 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & -2 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \cdots & -2 \end{bmatrix}$$

Como $Hf(\widetilde{x})$ es definida negativa entonces f alcanza un máximo local en $\widetilde{x}$, a saber $f(\widetilde{x}) = \sqrt{n}r$, es decir $\|y - x_0\|_s \leqslant \sqrt{n}r$ y por tanto $y \in B^s_{\sqrt{n}r}[x_0]$.
Para la otra parte de la prueba solo basta ver que

$$y_0 = x_0 + (\pm\frac{r}{\sqrt{n}}, \pm\frac{r}{\sqrt{n}}, \cdots, \pm\frac{r}{\sqrt{n}}) \in S_r[x_0] \subseteq B_r[x_0]$$

Además si $\sqrt{n}\delta \geqslant \|y_0 - x_0\|_s = \sum_{i=1}^{n-1} |\pm\dfrac{r}{\sqrt{n}}| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |\frac{r}{\sqrt{n}}| = \frac{nr}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}r$ entonces $\delta \geqslant r$.

■

Definición 1.11. Continuidad

Sean U, V *e.n.* y sea $f : U \to V$, decimos que f es continua en $x \in U$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in U$ con $\|x - y\|_U < \delta$ se tenga $\|f(x) - f(y)\|_V < \epsilon$.

Ejemplo 1.18. Sea V un *e.n.* si definimos en $V \times V$ la norma $\|(u, v)\|_{V\times V} = \|u\|_V + \|v\|_V$ conocida como norma producto, entonces las aplicaciones suma y producto por un escalar definidas en $V \times V$ y $\mathbb{R} \times V$ respectivamente, son continuas.

Ejemplo 1.19. Espacio de Operadores Lineales Continuos

Sean U, V *e.n.* el conjunto $\mathcal{B}(U, V) = \{f : U \to V \ / \ f \ es \ lineal \ y \ continua\}$ al ser un subespacio de $\mathcal{L}(U, V)$ es también un espacio vectorial. Observemos que tenemos las inclusiones $\mathcal{B}(U, V) \subseteq \mathcal{L}(U, V) \subseteq \mathcal{F}(U, V)$. Definiendo para todo $f \in \mathcal{B}(U, V)$, la norma $\|f\|_{U,V} = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_V}{\|x\|_U}$, tenemos que $\mathcal{B}(U, V)$ es un espacio normado. Además $\|f\|_{U,V} = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_V}{\|x\|_U} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|_V = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|f(x)\|_V$. Se dice que un operador lineal es acotado cuando su norma es finita y se puede probar sin mucha dificultad que la continuidad de un operador es equivalente a ser acotado.

Definición 1.12. Sean U, V dos espacios normados y sea $f \in \mathcal{B}(U, V)$, decimos que f es una isometría lineal si $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in U$.

Definición 1.13. Sean U, V dos espacios normados, si existe $f : U \to V$ isometría lineal, entonces se dice que U está inmerso en V, es decir, se puede identificar a U con un subespacio de V, a saber $f(U) = Im(f)$. Cuando un espacio normado U esté inmerso en otro espacio normado V escribiremos $U \hookrightarrow V$.

Ejemplo 1.20. Espacio Dual Topológico

Sea U un espacio normado, considerando en el ejemplo anterior el caso $V = \mathbb{R}$, el espacio $U^* = \mathcal{B}(U, \mathbb{R})$ es conocido como el espacio dual topológico de U y es un espacio normado con la norma dual definida por $\|f\|_{U^*} = \sup_{x\neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|_U}$. Como en el ejemplo anterior: $\|f\|_{U^*} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|<1} |f(x)| = \sup_{\|x\|<1} f(x)$.

Definición 1.14. Producto Dualidad

Sea $f \in X^*$ y $x \in X$, en lugar de escribir $f(x)$ escribiremos $\langle f, x \rangle$. Se dice que $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto dualidad en X^*, X. Si hay lugar a confusión escribiremos $\langle\ ,\ \rangle_{X^*,X}$ para resaltar que es la dualidad en X^*, X.

Ejemplo 1.21. Espacio Bidual Topológico

Sea U un *e.n.*, el espacio bidual topológico de U denotado por U^{**}, el espacio dual topológico de U^*, es decir $U^{**} = (U^*)^*$. La norma en este espacio está dada por

$$\|w\|_{U^{**}} = \sup_{f \neq 0} \frac{|w(f)|}{\|f\|_{U^*}}$$

Respecto a los dos tipos de espacios dual tenemos $U^* \subseteq U'$ y $U^{**} \subseteq U''$. En adelante, cuando digamos espacio dual, nos estaremos refiriendo al espacio dual topológico y lo mismo con el espacio bidual, será el bidual topológico.

Teorema 1.3. *Sea U un e.n de dimensión finita, entonces $U^* = U'$.*

El teorema anterior no es cierto en espacios de dimensión infinita.

Definición 1.15. Sucesión Convergente

Sea V un *e.n.* y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si existe $x \in V$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$, entonces $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Definición 1.16. Sucesión de Cauchy

Sea V un *e.n.* y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geqslant n_0$, se tenga $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Es claro que toda sucesión convergente es de Cauchy, pero lo contrario no es cierto, es decir, una sucesión puede ser de Cauchy y no ser convergente, por ejemplo la sucesión $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ en $\mathbb{Q}$ es de Cauchy, pero no es convergente en $\mathbb{Q}$.
El siguiente teorema muestra lo comentado luego del Teorema 1.3.

Teorema 1.4. *Sea X un e.n. de dimensión infinita, entonces $X' \neq X^*$*

Prueba. Probaremos la existencia de un funcional lineal que no es acotado y por tanto no es continua. Sea $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Hamel de X, definiendo para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(e_n) = n$, tenemos la aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ definida para todo $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $m_i \in \mathbb{N}$ como:

$$f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{m_i}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(e_{m_i}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot m_i$$

f es lineal: Dados $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_{n_i}$, $y = \sum_{j=1}^{q} \beta_j e_{m_j} \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha \cdot x) = f(\sum_{i=1}^{p} \alpha\alpha_i e_{n_i}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha\alpha_i f(e_{n_i}) = \alpha \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot n_i = \alpha \cdot f(x)$$

Para expresar adecuadamente $x + y$, sean:

$$l = card(\{n_1, n_2, \cdots, n_p, m_1, m_2, \cdots, m_q\}) = card(\{n_i\}_{i=1}^{p} \cup \{m_j\}_{j=1}^{q})$$

$$r_1 = \text{mín}(\{n_i\}_{i=1}^{p} \cup \{m_j\}_{j=1}^{q}) \; ; \; r_k = \text{mín}((\{n_i\}_{i=1}^{p} \cup \{m_j\}_{j=1}^{q}) - \{r_i\}_{i=1}^{k-1}) \;\; , \;\; 2 \leqslant k \leqslant l$$

$$\delta_{ik}^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si: } r_k \neq n_i \\ 1 & \text{si: } r_k = n_i \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \delta_{kj}^{\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si: } r_k \neq m_j \\ 1 & \text{si: } r_k = m_j \end{cases}$$

Entonces:

$$x + y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_{n_i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j e_{m_j} = \sum_{k=1}^{l} (\sum_{i=1}^{p} \delta_{ik}^{\alpha} \cdot \alpha_i) e_{r_k} + \sum_{k=1}^{l} (\sum_{j=1}^{q} \delta_{kj}^{\beta} \cdot \beta_j) e_{r_k} = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k e_{r_k}$$

Donde $\lambda_k = \sum_{i=1}^{p} \delta_{ik}^{\alpha} \cdot \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \delta_{kj}^{\beta} \cdot \beta_j \;\; , \;\; 1 \leqslant k \leqslant l$. Así tenemos:

$$f(x+y) = f(\sum_{k=1}^{l} \lambda_k e_{r_k}) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k f(e_{r_k}) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \cdot r_k = \sum_{k=1}^{l} (\sum_{i=1}^{p} \delta_{ik}^{\alpha} \cdot \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \delta_{kj}^{\beta} \cdot \beta_j) \cdot r_k$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{p} \delta_{ik}^{\alpha} \cdot \alpha_i \cdot r_k + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{q} \delta_{kj}^{\beta} \cdot \beta_i \cdot r_k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot n_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \cdot m_j = f(x) + f(y)$$

Por tanto $f \in X'$, pero $f \notin X^*$ ya que $|f(e_n)| = |n| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

1.2. Espacios Métricos

En esta sección veremos las propiedades de los espacios métricos más relevantes para nuestro estudio. Una de las ventajas frente a los espacios normados o espacios con producto interno es que un espacio métrico no precisa tener una estructura algebraica en particular, es más puede no tenerla, solo es necesario que sea no vacío y una función que cumpla ciertas condiciones. Ver [29] y [36].

Definición 1.17. Métrica

Sea M un conjunto no vacío, una métrica en M es una función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $d(x, y) \geqslant 0$ para todo $x, y \in M$.

ii) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

iii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$.

iv) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M$.

Definición 1.18. Espacio Métrico

El par (M, d) es llamado espacio métrico, donde M es un conjunto no vacío y d es una métrica definida en $M \times M$. Cuando la métrica esté sobre entendida, escribiremos simplemente M en lugar de (M, d).

Un conjunto donde se tiene definida una métrica se llama espacio métrico(e.m.)

Ejemplo 1.22. Espacio Discreto

Sea M un conjunto no vacío y en $M \times M$ definamos:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si: } x \neq y \\ 0 & \text{si: } x = y \end{cases}$$

Entonces (M, d) es un espacio métrico.

Teorema 1.5. *Sea M un espacio normado, definiendo $d(x, y) = \|x - y\|$, tenemos que d es una métrica en M.*

Ejemplo 1.23. Espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico para todo $n \in \mathbb{N}$ con la métrica definida como:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Ejemplo 1.24. Espacio ℓ^p

Los espacios ℓ^p con $p \geqslant 1$ de los ejemplos 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15 son espacios métricos con la métrica definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|_p$$

Observemos que como todo espacio con producto interno es un espacio normado, en virtud del teorema anterior, también es un espacio métrico, pero no todo espacio métrico es un espacio normado, por ejemplo, si este espacio vectorial está provisto de la métrica discreta $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$; $d(x, y) = 0$, si $x = y$, entonces este espacio no es un espacio normado.

Definición 1.19. Bola abierta

Sea $x_0 \in M$ y $\varepsilon > 0$ el conjunto $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in M : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ es llamado bola abierta de centro x_0 y radio ε.

Definición 1.20. Conjunto abierto

Decimos que $A \subseteq M$ es abierto si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Definición 1.21. Punto de adherencia

Sea $A \subseteq M$ decimos que $x \in M$ es un punto de adherencia de M si para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$. El conjunto de puntos de adherencia de A es denotado por $\overline{A}$.

Definición 1.22. Conjunto cerrado

Sea $A \subseteq M$ decimos que A es cerrado si $M - A$ es abierto.

Teorema 1.6. *Sea $A \subseteq M$, entonces A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.*

Definición 1.23. Diámetro

Sea $\varnothing \neq A \subseteq M$ definimos $diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$ es el diámetro de A.

Teorema 1.7. *Sea $A \subseteq M$ entonces $diam(A) = diam(\overline{A})$.*

Definición 1.24. Conjunto acotado

Sea $A \subseteq M$, decimos que A es acotado si $diam(A) < \infty$, es decir, si existe $r > 0$ tal que $diam(A) \leqslant r$. En caso contrario, se dice ue A no es acotado.

Definición 1.25. Supespacio métrico

Sea A un subconjunto no vacío del espacio métrico (M, d) si consideramos la aplicación $d|_A : A \times A \to \mathbb{R}$ definida por $d|_A(x, y) = d(x, y)$ para todo $x, y \in A$ tenemos que $(A, d|_A)$ es un espacio métrico con la métrica heredada o inducida por la de M, en este caso se dice que $(A, d|_A)$ es un subespacio métrico de (M, d).

Definición 1.26. Sucesión Convergente

Sea M un *e.m.* y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M, decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si existe $x \in M$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Teorema 1.8. *Sea $A \subseteq M$ un conjunto cerrado, dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A y $x \in M$ tales que $x_n \to x$, entonces $x \in A$.*

Prueba. Procedamos por el absurdo, es decir supongamos que $x \notin A$, entonces $x \in M - A$ y puesto que A es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq M - A$. Por otra parte, como $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$, esto es $x_n \in B_\varepsilon(x) \subseteq M - A$ para todo $n \geqslant n_0$, lo que es absurdo ya que $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, $x \in A$. ■

Definición 1.27. Sucesión de Cauchy

Sea M un *e.m.* y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M, se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geqslant n_0$, se tenga $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definición 1.28. Espacio métrico completo

Sea M un *e.m.* decimos que M es un espacio métrico completo o simplemente completo si toda sucesión de Cauchy en M es convergente.

Ejemplo 1.25. Los espacios ℓ^p y el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ mencionados antes son espacios métricos completos.

Teorema 1.9. *Sea M un espacio métrico completo, dado $A \subseteq M$ un subconjunto cerrado, entonces el subespacio métrico A es completo.*

Prueba. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en A, como M es completo, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en M, entonces existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Puesto que A es cerrado entonces por el Teorema 1.8 tenemos que $x \in A$ y por tanto A es completo.

■

Ejemplo 1.26. Sea X un espacio métrico completo cuya métrica proviene de una norma, entonces todo subconjunto cerrado de X es un subespacio métrico completo de X con la métrica heredada de X. Veamos algunos ejemplos:

- **Bola cerrada**: $B_\varepsilon[x_0] = \{x \in X : d(x, x_0) \leqslant \varepsilon\} = \{x \in X : \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon\}$.
- **Esfera**: $S_\varepsilon[x_0] = \{x \in X : d(x, x_0) = \varepsilon\} = \{x \in X : \|x - x_0\| = \varepsilon\}$.
- **Conjuntos finitos**: Sea $A \subseteq X$ un conjunto finito, entonces A es cerrado y por tanto subespacio completo de X.
- **Clausura**: Sea $A \subseteq X$ entonces $\overline{A}$ al ser cerrado, es un subespacio métrico completo de X.

Veamos ahora una condición suficiente y necesaria para que un espacio métrico sea completo.

Teorema 1.10. *Sea M un espacio métrico, entonces M es completo si y solo si para toda familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados no vacíos tales que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $diam(A_n) \to 0$, existe $x_0 \in M$ de modo que $\{x_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

Prueba. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos cerrados no vacíos tales que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $diam(A_n) \to 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ como $A_n \neq \varnothing$ entonces existe $x_n \in A_n$ de donde tenemos definida la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$. Ahora, como $diam(A_n) \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $diam(A_n) < \varepsilon$, además si $m,\ n > n_0$ tenemos que $x_m \in A_m \subseteq A_{n_0}$ y también $x_n \in A_n \subseteq A_{n_0}$, luego $x_m,\ x_n \in A_{n_0}$ de donde se obtiene:

$$d(x_n, x_m) \leqslant diam(A_{n_0}) < \varepsilon\ , \quad \text{para todo } m,\ n > n_0$$

De lo anterior, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Si M es completo, entonces existe $x_0 \in M$ tal que $x_n \to x_0$, luego dado $p \in \mathbb{N}$, para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene $x_{p+m} \in A_p$, luego $(x_{p+m})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq A_p$ y como A_p es cerrado, por el Teorema 1.8, tenemos $x_{p+m} \to x \in A_p$ y puesto que p fue arbitrario, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Veamos ahora que la intersección es unitaria, para ello procedamos por el absurdo, esto es, supongamos que existe $\widetilde{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n - \{x_0\}$, entonces $x_0, \widetilde{x} \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego:

$$0 < diam(x_0, \widetilde{x}) \leqslant diam(A_n) \to 0$$

Que es absurdo, por tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x_0\}$.

Recíprocamente, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en M, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$, puesto que $\overline{X_{n+1}} \subseteq \overline{X_n}$ tenemos una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos. Además como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geqslant n_0$ implica $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, luego $diam(\overline{X_{n_0}}) = diam(X_n) = \sup_{n,m\geqslant n_0}(d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$, por tanto $diam(\overline{X_n}) \to 0$ y por hipótesis existe $x_0 \in M$ tal que $\{x_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n}$. Como para n se tiene que $x_0 \in \overline{X_n}$ y por tanto $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap X_n \neq \varnothing$, entonces existe $m_n \geqslant n$ tal que $x_{m_n} \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap X_n$, así tenemos una subsucesión $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo $d(x_{m_n}, x_0) < \frac{1}{n}$, de donde $x_{m_n} \to x_0$ y por tanto como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy se concluye que $x_n \to x_0$ resultanto así que M es un espacio métrico completo.

■

1.3. Espacios de Banach

En esta sección veremos a los espacios de Banach, el producto dualidad, que es lo más cercano que tenemos al producto interno en espacios de normados sin producto interno. Finalmente veremos el teorema de Hahn-Banach y algunas de sus consecuencias, entre ellas, el conjunto dualidad. Para ver las pruebas de los teoremas y corolarios no probados el lector interesado puede consultar [13], [12] , [28], [41] y [43].

Definición 1.29. Espacio de Banach

Sea X un espacio normado, se dice que X es un espacio de Banach si como espacio métrico(con la métrica inducida por la norma) es completo, es decir si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto de X. En este caso se dice también que la norma de X es completa.

Los espacios ℓ^p con $p \geqslant 1$ de los ejemplos 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15 y el espacio real $\mathbb{R}$ son espacios de Banach.

Teorema 1.11. *Sea X un espacio normado y sea Y un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

En adelante X representará a un espacio normado posiblemente de Banach, salvo que se indique lo contrario.

Ejemplo 1.27. Puesto que $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach, entonces para todo espacio normado U, el espacio dual U^* y el bidual U^{**} son espacios de Banach.

Teorema 1.12. ***Hahn-Banach***

Sea M subespacio de X. Sea $f \in M^*$, entonces existe $\widetilde{f} \in X^*$ tal que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in M$ y $\|\widetilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$.

Veamos ahora algunas consecuencias del teorema de Hahn-banach.

Teorema 1.13. *Sea M un subespacio de X. Sea $x_0 \in X - M$, entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \inf_{y \in M} \|x_0 - y\|$ y $f(x) = \langle f, x \rangle = 0 \ \ \forall x \in M$.*

En este teorema $\inf_{y\in M} \|x_0 - y\|$ representa la distancia de x_0 a M, que en adelante denotaremos por $d(x_0, M)$ y $\langle f, x\rangle$ es el producto dualidad.

Corolario 1.1. Si $x \in X - \{0\}$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\|_{X^*} = 1$ y $\langle f, x\rangle = \|x\|_X$.

Corolario 1.2. Sea $x \in X$ no nulo. Entonces existe $f \in X^*$ no nulo tal que $\|f\|_{X^*} = \|x\|_X$ y $\langle f, x\rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2$.

Observación 1.4. Una consecuencia de este corolario es que el siguiente conjunto, llamado **conjunto dualidad** $J_x = \{f \in X^* / \ \langle f, x\rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$ es no vacío para todo $x \in X$.

Corolario 1.3. Para todo $x \in X$ se tiene $\|x\|_X = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |\langle f, x\rangle| = \max_{\|f\|_{X^*}=1} |\langle f, x\rangle|$.

Corolario 1.4. Sea $x_0 \in X$. Si $\langle f, x_0\rangle = 0$ para todo $f \in X^*$, entonces $x_0 = 0$.

Observemos que del Corolario 1.1, para cada $x \in X$ no nulo existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $\langle f, x\rangle = \|x\|$, además, en el caso que $x = 0$, se le puede asociar la función nula $0 \in X^*$, de esto, podemos definir $x^{**} : X^* \to \mathbb{R}$ para todo $f \in X^*$ como $\langle x^{**}, f\rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*,X}$. Se prueba sin mucha dificultad que $x^{**} \in X^{**}$ y $\|x^{**}\| = \|x\|$ para cada $x \in X$. Esto a su vez nos permite definir el operador lineal $J : X \to X^{**}$ definido para todo $x \in X$ como $J(x) = x^{**}$ y en términos del producto dualidad $\langle J(x), f\rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*,X}$ o $\langle x^{**}, f\rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*,X}$ para todo $x \in X$ y todo $f \in X^*$.
Este operador es una isometría lineal conocida como **inmersión canónica** ya que nos permite ver a X como un subespacio de X^{**}, es decir $X \hookrightarrow X^{**}$.

Teorema 1.14. *Si X es un espacio de Banach, entonces $J(X)$ es de Banach.*

Definición 1.30. Espacio Reflexivo
Sea X un $e.n$ decimos que es reflexivo si J es sobreyectiva, es decir si $J(X) = X^{**}$.

Los espacios de dimensión finita y los ℓ^p con $1 < p < \infty$ son espacios reflexivos. Por otro lado los espacios c_0, ℓ^1 y ℓ^∞ no son reflexivos.

Teorema 1.15. *Si X es reflexivo, entonces es un espacio de Banach.*

Teorema 1.16. *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo.*

Observación 1.5. El recíproco del teorema anterior, por los ejemplos anteriores, no es cierto.

1.4. Espacios Topológicos

Comenzamos esta sección definiendo lo que es una topología y espacio topológico, pasando por la topología de la norma a la topología débil y débil estrella mostrando algunos teoremas mas relevantes. Para mas detalles consultar las primeras páginas de [28], [41] y [36].

Definición 1.31. Espacio Topológico

Una topología sobre $X \neq \varnothing$ es una colección τ de subconjuntos de X tal que:

i) X y $\varnothing \in \tau$

ii) Si $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$ es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup_{i\in\Lambda} A_i \in \tau$

iii) Si $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ son elementos de τ, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

El par (X, τ) es llamado espacio topológico y los elementos de la topología son llamados **conjuntos abiertos**.

En adelante X representará a un espacio topológico.

Definición 1.32. Complemento

Sea $A \subseteq X$, su complemento es definido por $A^c = X - A$.

Definición 1.33. Conjunto Cerrado

Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado cerrado si A^c es abierto.

Definición 1.34. Vecindad

Sea $x \in X$, dado $V \subseteq X$, decimos que V es una vecindad abierta o entorno abierto de x si existe un conjunto abierto A en X tal que $x \in A \subseteq V$.

Definición 1.35. Punto de Acumulación

Sea $A \subseteq X$ y sea $x \in X$, decimos que x es un punto de acumulación de A si todo abierto conteniendo a x también contiene un elemento de $A - \{x\}$.

Definición 1.36. Conjunto Derivado

Es el conjunto de todos los puntos de acumulación de A y es denotado por A'.

Definición 1.37. Punto de Adherencia

Sea $A \subseteq X$, decimos que $x \in X$ es un punto de adherencia de A si todo abierto conteniendo a x tiene intersección no vacía con A.

Definición 1.38. Clausura o Cerradura

El conjunto de todos los puntos de adherencia de A es llamado clausura o cerradura de A y es denotado por $\overline{A}$.

Teorema 1.17. *Sea $A \subseteq X$ entonces $\overline{A} = A \cup A'$.*

Teorema 1.18. *Sea $\varnothing \neq A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.*

Definición 1.39. Frontera

La frontera de un conjunto $A \subseteq X$ es denotada y definida por $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Definición 1.40. Punto Interior

Sea $A \subseteq X$ decimos que $x \in A$ es un punto interior de A si existe un abierto conteniendo a x de modo que esté completamente incluido en A. Al conjunto de todos los puntos interiores a A lo denotamos por $int(A)$.

Definición 1.41. Conjunto Denso

Sea $A \subseteq X$, decimos que A es denso en X si $\overline{A} = X$.

Definición 1.42. Espacios de Hausdorff

Decimos que X es de Hausdorff si para todo par de elementos distintos $y, x \in X$, existen abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos tales que $y \in U$ y $x \in V$.

Definición 1.43. Convergencia

Sea (x_n) una sucesión de elementos de X, se dice que la sucesión converge a un punto $x \in X$ si para cada abierto U conteniendo a x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$(que depende de U) tal que $x_k \in U$ para todo $k \geqslant n_0$. En este caso escribiremos $x_n \to x$ en X.

Definición 1.44. Sucesión de Cauchy

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para todo abierto U conteniendo a x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geqslant n_0$, se tenga x_n, $x_m \in U$.

Teorema 1.19. *Sea $A \subseteq B \subseteq X$ entonces:*

i) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

ii) $int(A) \subseteq int(B)$.

Prueba.

i) Dado $x \in \overline{A}$, para todo abierto V_x conteniendo a x se tiene $\varnothing \neq V_x \cap A$ y puesto que $V_x \cap A \subseteq V_x \cap B$ tenemos que $x \in \overline{B}$.

ii) Dado $x \in int(A)$, existe V_x abierto tal que $x \in V_x \subseteq A \subseteq B$.

■

Teorema 1.20. *Sea $A \subseteq X$, entonces:*

i) $int(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

ii) A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

iii) A es abierto si y solo si $A = int(A)$.

iv) $\overline{A^c} \subseteq [int(A)]^c$.

v) $int(\overline{A}) = \varnothing$ *si y solo si* $\overline{A}^c$ *es denso en* X.

Prueba.

i) Por definición de interior y clausura de un conjunto.

ii) De lo anterior $A \subseteq \overline{A}$, luego si $x \in \overline{A}$ y $x \in A^c$, existe un abierto V_x tal que $x \in V_x \subseteq A^c$, entonces $V_x \cap A = \varnothing$ de donde tendríamos que $x \notin \overline{A}$.

Recíprocamente, dado $x \in A^c = \overline{A}^c$ existe un abierto V_x conteniendo a x tal que $V_x \cap A = \varnothing$, entonces $V_x \subseteq A^c$, luego $A^c = \bigcup_{x \in A^c} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A^c} V_x \subseteq A^c$, así $A^c = \bigcup_{x \in A^c} V_x$ de donde A^c es abierto y por tanto A es cerrado.

iii) De (i) tenemos $int(A) \subseteq A$. Sea $x \in A$ entonces $x \notin A^c = \overline{A^c} = A^c \cup (A^c)'$ de donde existe V_x(abierto conteniendo a x) tal que $\varnothing = V_x \cap A^c - \{x\} = V_x \cap A^c$, luego $V_x \subseteq A$, es decir $x \in int(A)$.

Por otro lado, si $A = int(A)$, para cada $x \in int(A)$ existe V_x abierto tal que $x \in V_x \subseteq A$ entonces $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} V_x \subseteq A$, por tanto A es abierto.

iv) Probaremos que $int(A) \subseteq \overline{A^c}^c$. En efecto, dado $x \in int(A)$ existe V_x abierto tal que $x \in V_x \subseteq A$, luego $V_x \cap A^c = \varnothing$, entonces $x \notin \overline{A^c}$ y por tanto $x \in \overline{A^c}^c$.

v) Sea $x \in X = \varnothing^c = int(\overline{A})^c$ entonces $x \notin int(\overline{A})$ de donde para todo abierto V_x conteniendo a x se tiene que $V \cap \overline{A} \neq \varnothing$ y esto implica que $x \in \overline{\overline{A}^c}$. Recíprocamente, si $\overline{A}^c$ es denso en X, supongamos que $int(\overline{A}) \neq \varnothing$ entonces existe $x \in \overline{A}$ y V_x abierto tal que $x \in V_x \subseteq \overline{A}$ luego $V_x \cap \overline{A}^c = \varnothing$ de donde $x \notin \overline{\overline{A}^c} = X$, lo que es absurdo, por lo tanto $int(\overline{A}) = \varnothing$.

■

Teorema 1.21. *Sea* $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una familia de subconjuntos de* X*, entonces:*

i) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$.

ii) $[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n]^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$.

iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} int(A_n) \subseteq int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.

Prueba.

i) Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, de (ii) en el Teorema 1.19 tenemos $\overline{A_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ luego $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$.

ii) Sea $x \in X$, entonces $x \in [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n]^c$ si y solo si $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ si y solo si paro todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x \notin A_n$ o en otras palabras $x \in A_n^c$ si y solo si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$.

iii) Sea $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} int(A_n)$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in int(A_n)$, de donde existe un abierto V_x satisfaciendo $x \in V_x \subseteq A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ por tanto $x \in int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.

■

Definición 1.45. Subespacio Topológico

Sea $Y \subseteq X$, decimos que Y es un subespacio topológico si Y es un espacio topológico con la topología heredada o inducida por X donde los conjuntos abiertos son de la forma $A \cap Y$, con $A \subseteq X$ abierto.

Definición 1.46. Abierto Relativo

Sea $Y \subseteq X$, dado un conjunto $B \subseteq Y$ diremos que B es un abierto relativo a Y si existe un abierto $A \subseteq X$ tal que $B = Y \cap A$.

Definición 1.47. Cerrado Relativo

Sea $Y \subseteq X$, dado un conjunto $B \subseteq Y$ diremos que B es cerrado relativo a Y si existe un conjunto A cerrado en X tal que $B = Y \cap A$.

Definición 1.48. Continuidad

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función, decimos que f es continua si $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo abierto U en Y.

Observe que la definición de continuidad de una función está ligada a las topologías de los conjuntos de partida y de llegada, entonces una función puede ser continua respecto a una topología y discontinua en otra topología.

Teorema 1.22. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y solo si para toda sucesión (x_n) en X tal que $x_n \to x$ en X se tenga $f(x_n) \to f(x)$ en Y.*

Definición 1.49. Topología Inicial

Sea Λ un conjunto de índices. Sea X un conjunto y sean $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. para cada $i \in \Lambda$, sea $f_i : X \to X_i$ una función. La topología inicial generada por las funciones f_i, $i \in \Lambda$ es $\tau_\Lambda = \{f_i^{-1}(U_i)/U_i \in \tau_i, i \in \Lambda\}$, esta es la topología **más fina** (en el sentido de la inclusión) que hace que todas las funciones f_i sean continuas.

Definición 1.50. Sea X un espacio topológico, y sea $\varnothing \neq K \subseteq X$. Una colección de conjuntos abiertos $\mathcal{F}$ es un recubrimiento abierto de K si $K \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$, un subrecubrimiento de K es un recubrimiento abierto de K de una subcolección de elementos de $\mathcal{F}$.

Definición 1.51. Conjunto Compacto

Sea $\varnothing \neq K \subseteq X$, decimos que K es compacto si todo recubrimiento abierto de K admite un subrecubrimiento finito.

Definición 1.52. Bases y Abiertos Básicos

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico (X, τ) es una familia de conjuntos abiertos en X tal que todo abierto en X es unión de elementos de $\mathcal{B}$. En ese caso se dice que la base $\mathcal{B}$ genera la topología τ, los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos básicos.

Definición 1.53. Topología Producto

Sean (X, τ_x) y (Y, τ_y) dos espacios topológicos cada uno provisto de una topología, si consideramos el producto cartesiano $X \times Y$, el siguiente conjunto:

$$\mathcal{B} = \{U \times V \subseteq X \times Y : U \in \tau_x, V \in \tau_y\}$$

Es una base para el espacio topológico $(X \times Y; \tau_{XY})$ llamado espacio producto. En este espacio topológico, un abierto básico es simplemente el producto cartesiano de dos conjuntos abiertos, uno en X y otro en Y.

Respecto a un espacio normado X, presentamos a continuación dos topologías que serán de nuestro interés, la fuerte y la débil.

Ejemplo 1.28. Topologia Fuerte o Topología de la Norma
Sea X un espacio vectorial normado, la familia de todas las bolas abiertas con centro en un elemento de X es una base para la topología de la norma, donde las bolas abiertas $B_r(x) = \{y \in X / \|x - y\| < r\}$ son los abiertos básicos.
Esta topología es llamada también topología fuerte y es denotatada por $\tau_{\|\cdot\|}$.
Dada una sucesión (x_n) en X y $x \in X$, decimos que $x_n \to x$ converge en norma o fuertemente en X, si y solo si $\|x_n - x\| \to 0$.

El ejemplo anterior nos dice que todo espacio normado y también todo espacio con producto interno es un espacio topológico con la topología de la norma.

Ejemplo 1.29. Topología Débil
Sea X un espacio normado y X^* su espacio dual topológico. La topología débil en X es la topología inicial que hace que todo elemento de X^* sea continuo. Esta topología denotada por $\sigma(X, X^*)$ es más fina que la topología fuerte, es decir $\sigma(X, X^*) \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$ y sus elementos, los conjuntos abiertos en la topología débil son llamados abiertos débiles.
Sea $x_0 \in X$, un abierto básico en la topología débil de X es de la forma:

$$\begin{aligned} B_{x_0} &= \{x \in X / |f_i(x - x_0)| < \varepsilon,\ f_i \in X^*, i = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \{x \in X / |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon,\ f_i \in X^*, i = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\ ]f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon[\ ). \end{aligned}$$

Dada una sucesión (x_n) en X y $x \in X$, decimos que (x_n) converge débilmente a x en X, si $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ para todo $f \in X^*$ y lo denotamos por $x_n \rightharpoonup x$.

Notemos que si X un espacio normado, su espacio dual topológico X^* también es un espacio normado, entonces tiene sentido analizar la topología fuerte y la topología débil en el espacio dual, pero como veremos en unos instantes, la topología débil no es la más fina que hace que los elementos del bidual sean continuos.

Ejemplo 1.30. Topologia Fuerte del Espacio Dual

Sea X un espacio normado y X^* su espacio dual, la familia de todas las bolas abiertas con centro en un elemento de X^* y radio mayor que cero es una base para la topología de la norma, donde las bolas abiertas $B_r(f) = \{g \in X^* / \|f-g\|_{X^*} < r\}$ son los abiertos básicos. Esta topología es denotatada por $\tau_{\|\cdot\|_{X^*}}$.

Dada una sucesión (f_n) en X^* y $f \in X^*$, decimos que $f_n \to f$ converge en norma o fuertemente en X^*, si y solo si $\|f_n - f\|_{X^*} \to 0$.

Ejemplo 1.31. Topología Débil del Espacio Dual

Sea X un espacio normado y X^* su espacio dual, entonces la topología débil en X^* es la topología inicial que hace que todo elemento de X^{**} sea continuo. Esta topología es denotada por $\sigma(X^*, X^{**})$.

Sea $f_0 \in X^*$, un abierto básico en la topología débil de X^* es de la forma:

$$\begin{aligned} B_{f_0} &= \{f \in X^* \ / \ |u_i(f - f_0)| < \varepsilon, \ u_i \in X^{**}, i = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \{f \in X^* \ / \ |u_i(f) - u_i(f_0)| < \varepsilon, \ u_i \in X^{**}, i = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} u_i^{-1}(\ ]u_i(f_0) - \varepsilon, u_i(f_0) + \varepsilon[\ ). \end{aligned}$$

Dada una sucesión (f_n) en X^* y $f \in X^*$, decimos que (f_n) converge débilmente a f en X^*, si $\langle u, f_n\rangle \to \langle u, f\rangle$ para todo $u \in X^{**}$ y lo denotamos por $f_n \rightharpoonup f$.

La topología débil en el espacio dual, al igual que en X, es más fina que la topología fuerte, es decir $\sigma(X^*, X^{**}) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_{X^*}}$.

Sea X un espacio normado y X^* su espacio dual, recordemos a la inmersión canónica lineal $J : X \to X^{**}$ que para cada $x \in X$ define $J(x) \in X^{**}$, es decir

$J(x) : X^* \to \mathbb{R}$ tal que para $f \in X^*$ se tiene $\langle J(x), f\rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*,X}$. Consideremos pues el espacio normado $J(X) \subseteq X^{**}$, que es de Banach si X es de Banach. Definamos ahora una nueva topología sobre X^*, incluso más fina que la topología débil en X^*.

Ejemplo 1.32. Topología Débil* en el Espacio Dual

Sea X un espacio de Banach, X^* su espacio dual, la topología débil* en X^* es la topología inicial que hace que todo elemento de $J(X)$ sea continuo, es decir la topología más fina que hace que todo funcional lineal $J(x)$ sea continuo.

Esta topología es denotada por $\sigma(X^*, X)$ y respecto a las otras topologías definidas en X^* se tiene $\sigma(X^*, X) \subseteq \sigma(X^*, X^{**}) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_{X^*}}$.

Sea $f_0 \in X^*$, un abierto básico en la topología débil* de X^* es de la forma:

$$\begin{aligned}
B^*_{f_0} &= \{f \in X^* \ / \ |\langle J(x_i), f - f_0\rangle| < \varepsilon, \ J(x_i) \in J(X), i = 1, 2, \cdots, n\} \\
&= \{f \in X^* \ / \ |\langle x_i^{**}, f - f_0\rangle| < \varepsilon, \ x_i \in X, i = 1, 2, \cdots, n\} \\
&= \{f \in X^* \ / \ |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon, \ x_i \in X, i = 1, 2, \cdots, n\} \\
&= \{f \in X^* \ / \ |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon, \ x_i \in X, i = 1, 2, \cdots, n\} \\
&= \{f \in X^* \ / \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \ x_i \in X, i = 1, 2, \cdots, n\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} x_i^{**-1}(\,]f_0(x_i) - \varepsilon, f_0(x_i) + \varepsilon[\,).
\end{aligned}$$

Dada una sucesión (f_n) en X^* y $f \in X^*$, decimos que (f_n) converge débil* a f en X^*, si $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ para todo $x \in X$ y lo denotamos por $f_n \xrightarrow{*} f$.

Teorema 1.23. *Sea X un espacio normado, si X es reflexivo, entonces la topología débil $\sigma(X^*, X^{**})$ y débil * $\sigma(X^*, X)$ coinciden.*

Prueba. Sean $u \in X^*$, $\varepsilon > 0$, $f \in X^{**} = J(X)$, entonces existe un único $x \in X$ tal que $f = J_x$, así el abierto:

$$\begin{aligned}
V_f &= f^{-1}(\langle f(u) - \varepsilon, f(u) + \varepsilon\rangle) \in \sigma(X^*, X^{**}) \\
&= J_x^{-1}(\langle J_x(u) - \varepsilon, J_x(u) + \varepsilon\rangle) \in \sigma(X^*, X)
\end{aligned}$$

Es decir, un conjunto V es abierto en $\sigma(X^*, X^{**})$ si y solo si es abierto en $\sigma(X^*, X)$. ■

Observación 1.6. El teorema anterior nos dice también que $u_n \rightharpoonup u$ si y solo si $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$.

1.5. Teorema de Baire

El Teorema de Baire suele darse en espacios métricos completos, en nuestro caso haremos las adaptaciones correspondientes para trabajar con espacios topológicos generales y en particular cuando la topología del espacio está dada por una norma terminando con los espacios de Banach. Ver [29], [12], [43] y [41].

Definición 1.54. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$, decimos que A es nunca denso en X si $int(\overline{A}) = \varnothing$ o equivalentemente, si $\overline{A}^c$ es denso en X(ver (v) en el Teorema 1.20).

Teorema 1.24. *La unión finita de conjuntos nunca densos es nunca denso.*

Prueba. Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ conjuntos nunca densos, entonces $\overline{A_i}^c$ es denso en X. Sea $x \in X$ y V_x abierto tal que $x \in V_x$ como $X = \overline{\overline{A_i}^c}$ entonces $V_x \cap \overline{A_i}^c \neq \varnothing$. Además por el Teorema 1.20(ii) tenemos que $\overline{A_i}$ es cerrado y por tanto $\overline{A_i}^c$ es abierto, entonces existen abiertos V_x^i tales que $x \in V_x^i \subseteq \overline{A_i}^c$ y $V_x^i \subseteq V_x$. Consideremos el abierto $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_x^i$ no vacío ya que $x \in V$ entonces $V \subseteq V_x^i \subseteq V_x$ y $V \subseteq V_x^i \subseteq \overline{A_i}^c$, por tanto $x \in V \subseteq V_x \cap \overline{A_i}^c$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, luego:

$$x \in V \subseteq (\bigcap_{i=1}^{i} V_x \cap \overline{A_i}^c) = V_x \cap [\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}^c]$$

Lo que implica que $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}^c$ es denso en X.

Finalmente, como $A_i \subseteq \overline{A_i}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ y como $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ es cerrado, por el Teorema 1.20(ii) se tiene:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

Luego

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right]^c \subseteq \left[\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right]^c$$

Así del Teorema 1.19(i) y 1.21(ii) tenemos:

$$X = \overline{\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}^c} \subseteq \overline{\left[\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right]^c} \subseteq \overline{\left[\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right]^c} \subseteq X$$

■

Definición 1.55. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$, decimos que A es un conjunto **magro o de primera categoría** en X si existen subconjuntos A_n $(n \in \mathbb{N})$ nunca densos en X tales que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Definición 1.56. Sea X un espacio topológico, decimos que $A \subseteq X$ es un conjunto **residual o de segunda categoría** si existen subconjuntos A_n $(n \in \mathbb{N})$ abiertos y densos en X tales que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Teorema 1.25. *La unión numerable de conjuntos magros es un conjunto magro.*

Prueba. Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos magros, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una familia $\{B_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ de conjuntos nunca densos tales que $A_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j^i$, luego $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j^i = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} B_j^i$ es magro en X.

■

Teorema 1.26. ***(Teorema de Baire)*** *Sea M un espacio métrico completo, entonces todo conjunto residual es denso en M.*

Prueba. Sea $A \subseteq M$ un conjunto residual, entonces existen A_n $(n \in \mathbb{N})$ subconjuntos abiertos y densos en M tales que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dado $B \subseteq M$ abierto no vacío, puesto que A_1 es abierto y denso, tenemos que $B \cap A_1 \neq \varnothing$ y además es abierto, de donde existen $x_1 \in B \cap A_1$ y $r > 0$ tales que $B_r(x_1) \subseteq B \cap A_1$, entonces para $r_1 < \frac{r}{2}$ se tiene $B_{r_1}[x_1] \subseteq B_r(x_1) \subseteq B \cap A_1$. Ahora, como $B_{r_1}(x_1)$ es abierto y A_2 es denso en M, como en el caso anterior, existen $x_2 \in B_{r_1}(x_1) \cap A_2$

y $0 < r_2 < \frac{r_1}{2} < \frac{r}{2^2}$ tales que $B_{r_2}[x_2] \subseteq B_{r_1}(x_1) \cap A_2$, de forma análoga existen $x_3 \in B_{r_2}(x_2) \cap A_3$ y $0 < r_3 < \frac{r_2}{2} < \frac{r}{2^3}$ de modo que $B_{r_3}[x_3] \subseteq B_{r_2}(x_2) \cap A_3$.

Procediendo por inducción:

Supongamos definidos $x_n \in B_{r_n}[x_n] \subseteq B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cap A_n$ y $0 < r_n < \frac{r_{n-1}}{2} < \frac{r}{2^n}$, puesto que $B_{r_n}(x_n)$ es abierto y A_{n+1} es denso en M, existe $x_{n+1} \in B_{r_n}(x_n) \cap A_{n+1}$ y $0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} < \frac{r}{2^{n+1}}$ tales que $B_{r_{n+1}}[x_{n+1}] \subseteq B_{r_n}(x_n) \cap A_{n+1}$. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $B_{r_{n+1}}[x_{n+1}] \subseteq B_{r_n}[x_n]$ y $diam(B_{r_n}[x_n]) = 2r_n < \frac{r}{2^{n-1}} \to 0$ es decir tenemos la siguiente sucesión decreciente de bolas cerradas:

$$B_{r_1}[x_1] \supseteq B_{r_2}[x_2] \supseteq B_{r_3}[x_3] \supseteq \cdots B_{r_n}[x_n] \supseteq \cdots B_{r_{n+m}}[x_{n+m}] \supseteq \cdots$$

Así para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_{n+m} \in B_{r_n}[x_n]$ entonces $d(x_{n+m}, x_n) = 2r_n < \frac{r}{2^{n-1}} \to 0$, es decir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en M, que es un espacio completo, por tanto existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$(ver el Teorema 1.10).

Afirmamos ahora que $x \in B \cap A$.

En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$ puesto que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_{n+m} \in B_{r_n}[x_n]$ que es cerrado y por tanto $x = \lim_{m\to\infty} x_{n+m} \in B_{r_n}[x_n]$ de donde se deduce que

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}[x_n] \subseteq B_{r_1}[x_1] \subseteq B_r(x_1) \subseteq B \cap A_1 \subseteq B$$

De forma análoga:

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}[x_n] \subseteq B_{r_n}[x_n] \subseteq B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cap A_n \subseteq A_n \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Entonces $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$ y por tanto $x \in A \cap B$, es decir $A \cap B \neq \varnothing$ lo que implica que A es denso en M.

■

Corolario 1.5. Sea M un espacio métrico, dado $A \subseteq M$ un conjunto magro se tiene que si M es completo entonces $int(A) = \varnothing$.

Prueba. Sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ un conjunto magro, esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos $A_n \subseteq M$ son nunca densos en M , luego $\overline{A_n}^c$ es abierto y denso en M y por el Teorema de Baire, el conjunto residual $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}^c$ es denso en M.

Recordemos que del Teorema 1.20(i) tenemos $A_n \subseteq \overline{A_n}$, luego:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$$

Ahora de la parte (iv) del mismo teorema se tiene $int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) \subseteq \overline{\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right]^c}^c$, así:

$$int(A) = int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \subseteq int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) \subseteq \overline{\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right]^c}^c = \left[\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}^c}\right]^c = M^c = \varnothing.$$

■

Corolario 1.6. Sea M un e.m. completo, entonces para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados en M con interior vacío se tiene $int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \varnothing$.

Prueba. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados en M con interior vacío, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un conjunto magro y por el corolario anterior $int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \varnothing$.

■

Corolario 1.7. Sea M un espacio métrico completo y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos cerrados en M de modo que $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(A_{n_0}) \neq \varnothing$.

Prueba. Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que A_n es cerrado, si suponemos que $int(A_n) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por el corolario anterior $\varnothing = int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, luego como $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ resultaría que $int(M) = \varnothing$, lo que es absurdo, por lo tanto debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(A_{n_0}) \neq \varnothing$.

■

Corolario 1.8. Sea $F \subseteq M$ un subconjunto cerrado del espacio métrico completo M y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos abiertos y densos en F, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en F.

Prueba. En efecto, del Teorema 1.9, el subespacio métrico F es completo y además $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ resulta ser un subconjunto residual del espacio métrico completo F, por lo tanto del Teorema de Baire se concluye que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en F.

■

Observación 1.7. Como un espacio de Banach es un espacio normado, dotado de una métrica(inducida por la norma) con la que es completo, entonces todos los resultados vistos en esta sección son validos para espacios de Banach.

Corolario 1.9. Sea X un e. Banach, entonces todo conjunto residual es denso en X.

Ejemplo 1.33. Bola Cerrada

Sea X un espacio de Banach, dado $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, como por el Teorema 1.9, la bola cerrada $B_\varepsilon[x_0]$ es un subespacio métrico completo de X, si $B_\varepsilon[x_0] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ donde para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $S_n \subseteq X$ es cerrado en $B_\varepsilon[x_0]$(y por tanto en M), entonces por el Corolario 1.7 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(S_{n_0}) \neq \varnothing$.

Una de las aplicaciones del teorema de Baire es el siguiente teorema, uno de los pilares del Análisis Funcional y su demostración se puede encontrar en muchos textos de dicho curso, por ejemplo ver [12].

Teorema 1.27. ***(Banach-Steinhaus o Teorema de la Acotación Uniforme)*** *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\Lambda_i : X \to Y$ lineal, continua(acotada), $\forall i \in I$, satisfaciendo la siguiente condición:*
$\forall x \in X$, $\{\Lambda_i(x)\}_{i\in I}$ es acotado, es decir para cada $x \in X, |\Lambda_i(x)| \leqslant C_x$, $\forall i \in I$.
Entonces, existe $c > 0$ tal que $\|\nabla_i\| \leqslant c$, $\forall i \in I$.

Teorema 1.28. ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *Sea X un espacio de Banach, entonces la bola unitaria $B_{X^*} = \{u \in X^*/\|u\| \leqslant 1\}$ es compacto en la topología débil * $\sigma(X^*, X)$.*

La prueba de este teorema podemos encontrarla en [12] y [41] .

Teorema 1.29. *Si X es un espacio normado reflexivo, entonces:*
$B_{X^*} = \{u \in X^*/\|u\| \leqslant 1\}$ es compacto en la topología débil $\sigma(X^*, X^{**})$.

Prueba. Del Teorema 1.28, $B_{X^*} = \{u \in X^*/\|u\| \leqslant 1\}$ es compacto en la topología débil *, y por el Teorema 1.23, si X es reflexivo, entonces $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. Por tanto B_{X^*} es débilmente compacto.

■

El recíproco del teorema anterior también es válido.

Teorema 1.30. *Sea X un espacio normado reflexivo, si $u_n \rightharpoonup u$ en X^* y $x_n \to x$, entonces $\langle u_n, x_n\rangle \to \langle u, x\rangle$*

Prueba. Puesto que $u_n \rightharpoonup u$, entonces por la observación anterior $u_n \xrightarrow{*} u$, luego $\langle u_n, x\rangle \to \langle u, x\rangle$, $\forall x \in X$. Es decir, para cada $x \in X$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x)$
Veamos que $(\|u_n\|)_{n\geqslant 1}$ está acotada:
En efecto, como, X es un espacio de Banach, además como u_n es lineal y continua $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces dado $x \in X$, para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 > |u_n(x) - u(x)| \geqslant |u_n(x)| - |u(x)|, \ \forall n \geqslant n_0.$$

Luego: $|u_n(x)| \leqslant 1 + |u(x)|$.
Sea

$$C_x = \text{máx}\{1 + |u(x); |u_1(x)|; \ldots; |u_{n_0}(x|)\}$$

Entonces $|u_n(x)| \leqslant C_x \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Luego por el Teorema de la Acotación Uniforme(Banach-Steinhaus), existe $c > 0$ tal que $\|u_n\| \leqslant c, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Así, para cada $n \in \mathbb{N}$:
$|\langle u_n, x_n\rangle - \langle u, x\rangle| = |\langle u_n, x_n\rangle - \langle u_n, x\rangle + \langle u_n, x\rangle - \langle u, x\rangle|$
$\leqslant |\langle u_n, x_n - x\rangle| + |\langle u_n, x\rangle - \langle u, x\rangle| \leqslant \|u_n\|\|x_n - x\| + |\langle u_n, x\rangle - \langle u, x\rangle|$
$\leqslant c\|x_n - x\| + |\langle u_n, x\rangle - \langle u, x\rangle|$
Finalmente tomando límite cuando $n \to +\infty$, probamos que $\langle u_n, x_n\rangle \to \langle u, x\rangle$.

■

Teorema 1.31. *Sea X un espacio normado. Si X es reflexivo, entonces X^* también es reflexivo.*

Prueba. En efecto, sea $g \in X^{**}$, entonces existe un único $x \in X$ tal que $g = J_x$. Sea $h \in X^{***}$, definamos $f(x) := h(J_x)$. Así $f : X \to \mathbb{R}$ es lineal y continua ya que $f = h \circ J$, entonces $f \in X^*$. Observemos que $f(x) = h(g)$.
Consideremos a $J^* : X^* \to X^{***}$, la isometría lineal del espacio dual, entonces:

$$\langle J^*{}_f, g\rangle = \langle g, f\rangle = \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle = \langle h, g\rangle \ \forall g \in X^{**}$$

Luego $h = J^*{}_f$, es decir J^* es sobreyectivo, por lo tanto X^* es reflexivo. ■

Teorema 1.32. *Sea X un espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y solo si $B_X = \{x \in X : \ \|x\| \leqslant 1\}$ es compacto en la topología débil $\sigma(X, X^*)$.*

Ver [12].

Corolario 1.10. Sea X un espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y solo si $B_\varepsilon[x_0] = \{x \in X : \ \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon\}$ es compacto en la topología débil $\sigma(X, X^*)$ para todo $\varepsilon > 0$.

Definición 1.57. Sea X un espacio topológico, si $A \subseteq X$, decimos que A es secuencialmente compacto si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente.

El siguiente teorema fue probado en 1940 por W. Lwowitsch Smulian y nos dice que en todo espacio de Banach se cumple que cada subconjunto que sea compacto para la topología débil es automáticamente secuencialmente compacto para dicha topología. El recíproco se hizo esperar hasta 1947, apareciendo de la mano de W. Frederick Eberlein y estableciendo el hoy conocido como:

Teorema 1.33. ***(Eberlein-Smulian)*** *Sea A un subconjunto de un espacio de Banach X, entonces A débilmente compacto si y solo si es débilmente secuencialmente compacto. Ver [12].*

1.6. Semicontinuidad inferior

Cuando en 1986 Baire da contra ejemplos para el Segundo Teorema Falso de Cauchy(una función que es contínua en cada una de sus variables, es continua), obtiene por primera vez funciones semicontinuas inferiormente y superiormente.

Definición 1.58. Sea $f : (X;\tau) \to \mathbb{R}$ una función, decimos que f es semicontinua inferior(s.c.i.) en $x_0 \in (X;\tau)$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad $V_{\varepsilon,x_0} \subseteq X$ de x_0 tal que $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x),\ \forall x \in V_{\varepsilon,x_0}$, es decir: $f(x_0) \leqslant \liminf_{x\to x_0} f(x)$, o en términos de sucesiones: $f(x_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$, $\forall x_n \to x_0$ en $(X;\tau)$.
Diremos que f es s.c.i. en $U \subseteq X$ si f es s.c.i. en x, $\forall x \in U$.

Notemos que en la definición anterior, la convergencia de $x_n \to x_0$ no es necesariamente la convergencia en norma, sino que esa convergencia depende de la topología de X, así cuando f sea s.c.i en X dotado de la topología débil, se dirá que f es débilmente semicontinua inferior.

Ejemplo 1.34. Sea $H : [-1;1] \times [-2;2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

H es acotada y discontinua pero continua respecto a cada una de sus variables.
Puesto que H es acotada, para cada $x \in [-1;1]$ existe $\sup_{y\in[-2;2]} H(x,y)$, esto nos permite considerar la función $m : [-1;1] \to \mathbb{R}$ definida como: $m(x) = \sup_{y\in[-2;2]} H(x,y)$.
Notemos que para $0 \in [-1;1]$ se tiene $m(0) = \sup_{y\in[-2;2]} H(0,y) = 0 = H(0,0)$.
Como en $(0,0)$, H es continua respecto a x, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x| < \delta$ se tiene $|H(0,0) - H(x,0)| < \varepsilon$.
Luego $-\varepsilon < H(0,0) - H(x,0) < \varepsilon$, en particular $H(0,0) - H(x,0) < \varepsilon$, reemplazando $m(0) = H(0,0)$, se tiene $m(0) - H(x,0) < \varepsilon$, es decir:

$$m(0) < H(x,0) + \varepsilon \leqslant \sup_{y\in[-2;2]} H(x,y) + \varepsilon = m(x) + \varepsilon$$

Así $m(0) - \varepsilon \leqslant m(x)$, para todo $|x| < \delta$. Por tanto m es s.c.i. en 0.

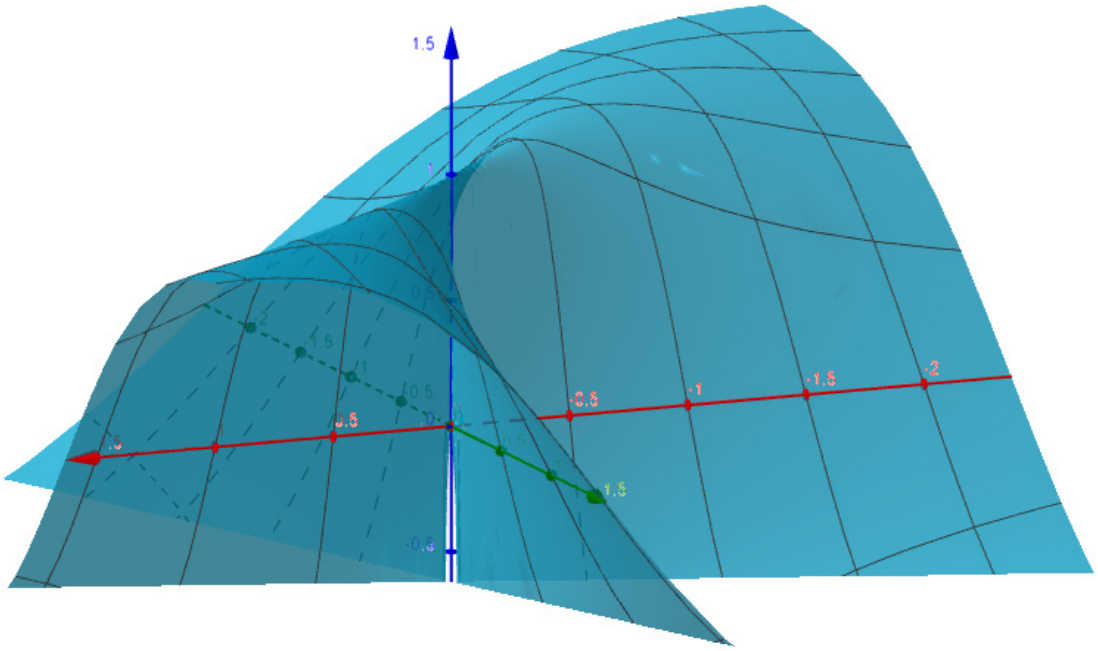


Figura 1.1: Gráfica de H.

geogebra.org/3d/hahb4ghq

Observación 1.8. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $0 \leqslant (x-y)^2$, luego $2xy \leqslant x^2+y^2$. Si $x \neq 0$, entonces $\frac{2xy}{x^2+y^2} \leqslant 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$ y en particular $\forall y \in [-2;2]$, así tenemos $m(x) = \sup_{y\in[-2;2]} H(x,y) \leqslant 1$.
Considerando $x = y \neq 0$, se tiene $\frac{2xy}{x^2+y^2} = 1$, por lo tanto:

$$m(x) = \begin{cases} 1; & si\ x \neq 0 \\ 0; & si\ x = 0 \end{cases}$$

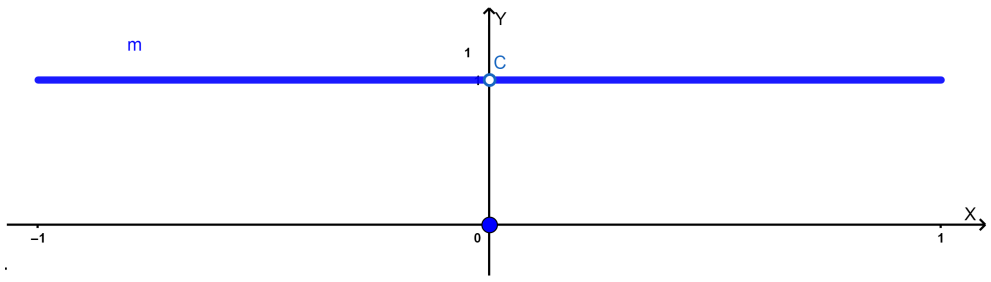


Figura 1.2: Gráfica de m.

geogebra.org/graphing/kmjjuu3u

Teorema 1.34. *Sea $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ y sea $U \subseteq X$ no vacío, entonces f es s.c.i. en U si y solo si para todo $r \in \mathbb{R}$, el conjunto $f_{r^-} = \{x \in U : f(x) \leqslant r\}$ es cerrado relativo en U.*

Prueba. Si f es s.c.i. en U, dado $r \in \mathbb{R}$, sea $x_0 \in \overline{f_{r^-}} \subseteq U$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f_{r^-}$ tal que $x_n \to x_0$. Notemos que $f(x_n) \leqslant r$ ya que $x_n \in f_{r^-}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $f(x_0) \leqslant \lim\inf_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant r$, es decir $x_0 \in f_{r^-}$ y por tanto f_{r^-} es cerrado.
Recíprocamente, si f_{r^-} es cerrado relativo a U para todo $r \in \mathbb{R}$, entonces existe U_r cerrado en (X, τ) tal que $f_{r^-} = U \cap U_r$. Sea $x_0 \in U$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \to x_0$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$A_n = \{f(x_n), f(x_{n+1}), f(x_{n+2}), \cdots\}$$

Claramente $A_{n+1} \subseteq A_n$, luego $\text{ínf}\, A_n \leqslant \text{ínf}\, A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde tenemos la sucesión no decreciente $(\text{ínf}\, A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, además si observamos que

$$\lim_{n\to\infty}\inf f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty}\text{ínf}\, A_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\text{ínf}\, A_n$$

Tenemos dos casos:
Si $(\text{ínf}\, A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{R}$, existe $L = \sup_{n\in\mathbb{N}}\text{ínf}\, A_n \in \mathbb{R}$, luego, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\text{ínf}\, A_n = \text{ínf}\{f(x_n), f(x_{n+1}), f(x_{n+2}), \cdots\} \leqslant L$, entonces existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geqslant n$ y $\text{ínf}\, A_n \leqslant f(x_{n_k}) \leqslant L$ resultando que

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = L$$

De la definición de límite, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $k \geqslant k_0$ se tenga $L - \varepsilon < f(x_{n_k}) < L + \varepsilon$ y por tanto $x_{n_k} \in f_{L+\varepsilon^-} = U \cap U_{L+\varepsilon}$. Ahora, puesto que $U_{L+\varepsilon}$ es cerrado en X y $x_{n_k} \to x_0$ se tiene que $x_0 \in U_{L+\varepsilon}$, entonces $x_0 \in f_{L+\varepsilon^-}$, es decir $f(x_0) \leqslant L + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, lo que implica que $f(x_0) \leqslant L$ y esto equivale a decir $f(x_0) \leqslant \lim\inf_{n\to\infty} f(x_n)$, obteniendo que f es s.c.i. en U.
Por otro lado, si $\sup_{n\in\mathbb{N}}\text{ínf}\, A_n = \infty$, es evidente que $f(x_0) \leqslant +\infty = \lim\inf_{n\to\infty} f(x_n)$.
■

Observación 1.9. En el teorema anterior, la topología de X es arbitraria, es decir el conjunto f_{r^-} es cerrado en la topología que se considere pertinente en X, no necesariamente la topología de la norma.

Teorema 1.35. *Sea $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferior en $dom(f)$ y sea $C \subseteq dom(f)$ compacto, entonces $f(C)$ está acotado inferiormente.*

Prueba. Supongamos que $f(C)$ no está acotado inferiormente, es decir para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in C$ tal que $f(x_n) < -n$, luego como C es compacto, existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $x_0 \in C$ tal que $x_{n_k} \to x_0$. Además, como f es s.c.i. en $x_0 \in dom(f)$ se tiene $f(x_0) \leqslant \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leqslant -\infty$, lo cual es absurdo, por tanto $f(C)$ está acotado inferiormente.

■

Corolario 1.11. Sea $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ una función s.c.i. en $dom(f)$ y sea $C \subseteq dom(f)$ compacto, entonces existe $\inf_{x\in C} f(x)$.

Teorema 1.36. ***(Weierstrass)*** *Sea $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ s.c.i. y sea $C \subseteq dom(f)$ compacto, entonces existe $x_0 \in C$ satisfaciendo $f(x_0) = \min_{x\in C} f(x)$. Ver [9].*

Prueba. Del corolario anterior sea $u = \inf_{x\in C} f(x)$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in C$ tal que:

$$u = \inf_{x\in C} f(x) \leqslant f(x_n) \leqslant u + \frac{1}{n}$$

Es decir, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ de modo que $u = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Además por la compacidad de C, existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $x_0 \in C$ tal que $x_{n_k} \to x_0$, por otra parte, como f es s.c.i. en x_0 tenemos:

$$f(x_0) \leqslant \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = u$$

Por lo tanto $f(x_0) = \min_{x\in C} f(x)$.

■

1.7. Convexidad

En esta sección veremos algunas de las propiedades más relevantes para nuestros propósitos de las funciones convexas, todo ello en el contexto de los espacios de Banach. Ver [9] y [37].

En adelante X representará a un espacio de Banach.

Definición 1.59. Segmento de recta:

Sean $x, y \in X$, el conjunto $[x, y] = \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$ es llamado segmento de recta que une los puntos x e y.

Definición 1.60. Conjunto Convexo:

Sea $A \subseteq X$, decimos que A es convexo si para cada par de puntos $x, y \in A$ se tiene que $[x, y] \subseteq A$.

Los conjuntos unitarios, $\varnothing$, X son ejemplos triviales de conjuntos convexos.

Ejemplo 1.35. Las bolas abiertas y cerradas en $\mathbb{R}^n$ según las normas descritas en el Ejemplo 1.10 son conjuntos convexos. Veamos el caso de las bolas cerradas. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, dados $x, y \in B_r[x_0] = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - x_0\| \leqslant r\}$ y $t \in [0, 1]$

$$\|tx + (1-t)y - x_0\| = \|tx + (1-t)y - tx_0 - (1-t)x_0\| = \|t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)\|$$

$$\leqslant \|t(x - x_0)\| + \|(1-t)(y - x_0)\| = t\|x - x_0\| + (1-t)\|y - x_0\| \leqslant t \cdot r + (1-t) \cdot r = r$$

Teorema 1.37. *La intersección arbritraria de conjuntos convexos es convexa.*

Prueba. Sea $\mathcal{F} = \{C_i\}_{i \in \Lambda}$ una familia de conjuntos convexos y sea $C = \bigcap_{i \in \Lambda} C_i$, si $C = \varnothing$ el resultado es evidente, si $C \neq \varnothing$, sean $x, y \in C = \bigcap_{i \in \Lambda} C_i$, entonces como $x, y \in C_i$, se tiene que $[x, y] \subseteq C_i$ para todo $i \in \Lambda$, luego $[x, y] \subseteq \bigcap_{i \in \Lambda} C_i$. ■

Definición 1.61. Envolvente Convexa:

Sea $A \subseteq X$, definimos la envolvente convexa o cápsula convexa de A como el conjunto $co(A) = \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{S}$, donde $\mathcal{C}(A) = \{\mathcal{S} \subseteq X : \mathcal{S} \text{ es convexo y } A \subseteq \mathcal{S}\}$.

La definición anterior nos dice que la envolvente convexa de un conjunto A, es el conjunto convexo más pequeño que contiene a A.

Teorema 1.38. *Sea $A \subseteq X$ un conjunto convexo, entonces $co(A) = A$.*

Prueba. Como $A \in \mathcal{C}(A)$ se tiene $co(A) = \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{S} \subseteq A \subseteq \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{S} = co(A)$. ■

Teorema 1.39. *Sean $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $co(A) \subseteq co(B)$.*

Prueba. Sea $\mathcal{S} \in \mathcal{C}(B)$, entonces $\mathcal{S}$ es convexo y $A \subseteq B \subseteq \mathcal{S}$, de donde $\mathcal{S} \in \mathcal{C}(A)$, esto es, $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$, por tanto $co(A) = \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{S} \subseteq \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{C}(B)} \mathcal{S} = co(B)$. ■

Definición 1.62. Combinación Convexa:
Sean $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq X$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}_0^+$ tal que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, el vector $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ es llamado combinación convexa de los vectores $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, donde $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty\rangle$.

Definición 1.63. Sea $A \subseteq X$, denotamos por $\sum(A)$ al conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A, es decir:

$$\sum(A) = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : \ \ x_i \in A,\ \alpha_i \geqslant 0\ ;\ i = 1, 2, \cdots, n;\ n \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$$

Teorema 1.40. *Sean $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $\sum(A) \subseteq \sum(B)$.*

Prueba. Dado $x \in \sum(A)$, existen $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq A$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}_0^+$ tal que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, pero como $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq A \subseteq B$, tenemos que $x \in \sum(B)$. ■

Teorema 1.41. *Sea $A \subseteq X$ entonces A convexo si y solo si $\sum(A) \subseteq A$.*

Prueba. Si A es convexo, dados x_1, $x_2 \in A$, sean α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ no negativos tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, tenemos $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = (1 - \alpha_2)x_1 + \alpha_2 x_2 \in [x_1, x_2] \subseteq A$. Supongamos que toda combinación convexa de n elementos de A está en A, con $n \in \mathbb{N}$. Sean $\{x_i\}_{i=1}^{n+1} \subseteq A$, dados $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}_0^+$ tales que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$, notemos que si $\alpha_i = 0$ para algún $i \in \{1, 2, \cdots, n, n+1\}$, entonces de la hipótesis inductiva, el resultado es evidente, por tanto, asumamos que $0 < \alpha_i < 1$ para

todo $i \in \{1, 2, \cdots, n, n+1\}$, en particular $0 < 1 - \alpha_{n+1} < 1$ y entonces podemos definir para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} > 0$. Notemos además que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} = \frac{1}{1-\alpha_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{1}{1-\alpha_{n+1}} \cdot (1-\alpha_{n+1}) = 1$$

Luego por hipótesis inductiva $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} x_i \in A$, finalmente:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1} = (1-\alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

$$= (1-\alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1} = (1-\alpha_{n+1}) x_0 + \alpha_{n+1} x_{n+1} \in A.$$

Recíprocamente, sean $x, y \in A$, como $\sum(A) \subseteq A$, en particular $(1-t)x + ty \in A$, para todo $t \in [0, 1]$, luego $[x, y] \subseteq A$ y por tanto A es convexo. ■

Teorema 1.42. *Sea $A \subseteq X$ entonces $\sum(A)$ es convexo.*

Prueba. Si $A = \varnothing$ es evidente que $\sum(A)$ es convexo, por el contrario, si $A \neq \varnothing$, sean $x, y \in \sum(A)$, entonces existen $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $\{y_j\}_{j=1}^{m} \subseteq A$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\beta_j\}_{j=1}^{m} \subseteq \mathbb{R}_0^+$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$.
Dado $t \in [0, 1]$, como $\sum_{i=1}^{n} (1-t)\alpha_i + \sum_{j=1}^{m} t\beta_j = (1-t) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + t \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$, se tiene $(1-t) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + t \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = \sum_{i=1}^{n} (1-t)\alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} t\beta_j x_j \in \sum(A)$.

■

Corolario 1.12. Sea $A \subseteq X$, entonces $co(A) = \sum(A)$.

Prueba. Del teorema anterior, $\sum(A) \in \mathcal{C}(A)$, entonces $co(A) = \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{S} \subseteq \sum(A)$.
Por otra parte, como $A \subseteq co(A)$ y $co(A)$ es convexo, de los Teorema 1.40 y 1.41 tenemos $\sum(A) \subseteq \sum(co(A)) \subseteq co(A)$. Por lo tanto $co(A) = \sum(A)$.

■

Corolario 1.13. Sea $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, dado $r > 0$ definamos para cada $i = 1, 2, \cdots, 2n-1, 2n$ los siguientes vectores:

$$z_i = \begin{cases} x_0 + r e_{\frac{i+1}{2}} & , \text{si } \ i \text{ es impar.} \\ x_0 - r e_{\frac{i}{2}} & , \text{si } \ i \text{ es par.} \end{cases}$$

Donde $e_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ es el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$.
Entonces $co(\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_s \leqslant r\}$.

Prueba. En efecto, por el Ejemplo 1.35 $B_r^s[x_0] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_s \leqslant r\}$ es un conjunto convexo y $\|z_i - x_0\|_s = \|re_i\| = r$, es decir $\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\} \subseteq B_r^s[x_0]$ de donde $B_r^s[x_0] \in \mathcal{C}(\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\})$ y por tanto $co(\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\}) \subseteq B_r^s[x_0]$.
Por otra parte, dado $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B_r^s[x_0]$ se tiene $\|x - x_0\|_s \leqslant r$, luego si $x \in \sum(\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\})$ deben existir $\{\alpha_i\}_{i=1}^{2n} \subseteq \mathbb{R}_0^+$ tales que $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i = 1$ y

$$x = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i z_i = \sum_{i=1}^{n} [\alpha_{2i-1} z_{2i-1} + \alpha_{2i} z_{2i}] = \sum_{i=1}^{n} [\alpha_{2i-1}(x_0 + re_i) + \alpha_{2i}(x_0 - re_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(\alpha_{2i-1} + \alpha_{2i})x_0 + (\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i})re_i] = x_0 + r\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i})e_i$$

Entonces $x - x_0 = \sum_{i=1}^{n} r(\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i})e_i$ pero también $x - x_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)e_i$ luego para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ se tiene $r(\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i}) = x_i - x_i^0$ o lo que es equivalente $\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i} = \dfrac{x_i - x_i^0}{r} = \dfrac{x_i}{r} - \dfrac{x_i^0}{r}$. En este punto pese a que estemos tentados a definir $\alpha_{2i-1} = \dfrac{x_i}{r}$ y $\alpha_{2i} = \dfrac{x_i^0}{r}$ no podemos puesto que $\alpha_i \geqslant 0$.
Definamos ahora $(x_i - x_i^0)^+ = \text{máx}\{x_i - x_i^0; 0\}$ y $(x_i - x_i^0)^- = \text{máx}\{x_i^0 - x_i; 0\}$.
Notemos que dado $a \in \mathbb{R}$ se tiene $a^+ = \text{máx}\{a, 0\}$ y $a^- = \text{máx}\{-a, 0\}$, luego:
Si $a > 0$ entonces $a^+ - a^- = a - 0 = a$, si $a = 0$ entonces $a^+ - a^- = 0 - 0 = 0$ y finalmente, si $a < 0$ entonces $a^+ - a^- = 0 - (-a) = a$ por lo tanto $a = a^+ - a^-$ para todo $a \in \mathbb{R}$, además tanto a^+ como a^- son mayores o iguales a cero. De manera similar se puede verificar que $|a| = a^+ + a^-$.
Regresando ahora a lo nuestro y por el párrafo anterior:

$$\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i} = \frac{x_i - x_i^0}{r} = \frac{(x_i - x_i^0)^+}{r} - \frac{(x_i - x_i^0)^-}{r}$$

Pero $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_i^0)^+}{r} + \frac{(x_i - x_i^0)^-}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - x_i^0|}{r} = \frac{\|x - x_0\|_s}{r} \leqslant 1$ faltando en la suma $1 - \dfrac{\|x - x_0\|_s}{r}$ para que el resultado sea 1. Sin embargo, si escribimos:

$$\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i} = \frac{x_i - x_i^0}{r} = \frac{r - \|x - x_0\|_s}{2nr} + \frac{(x_i - x_i^0)^+}{r} - \frac{r - \|x - x_0\|_s}{2nr} - \frac{(x_i - x_i^0)^-}{r}$$

Podemos definir para cada $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\alpha_{2i-1} = \frac{r - \|x - x_0\|_s}{2nr} + \frac{(x_i - x_i^0)^+}{r} \qquad \alpha_{2i} = \frac{r - \|x - x_0\|_s}{2nr} + \frac{(x_i - x_i^0)^-}{r}$$

Por tanto $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i z_i = x_0 + r \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i}) e_i = x_0 + r \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_i^0}{r} e_i = x$. Además

$$\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i-1} + \alpha_{2i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r - \|x - x_0\|_s}{2nr} + \frac{(x_i - x_i^0)^+}{r} + \frac{r - \|x - x_0\|_s}{2nr} + \frac{(x_i - x_i^0)^-}{r}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{r - \|x - x_0\|_s}{nr} + \frac{(x_i - x_i^0)^+ + (x_i - x_i^0)^-}{r} = \frac{r - \|x - x_0\|_s}{r} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - x_i^0|}{r} = 1$$

Concluyendo que $B_r^s[x_0] \subseteq \sum(\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\})$ y como del corolario anterior $co(\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\}) = \sum(\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\})$ tenemos finalmente la igualdad

$$B_r^s[x_0] = co(\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\}).$$

■

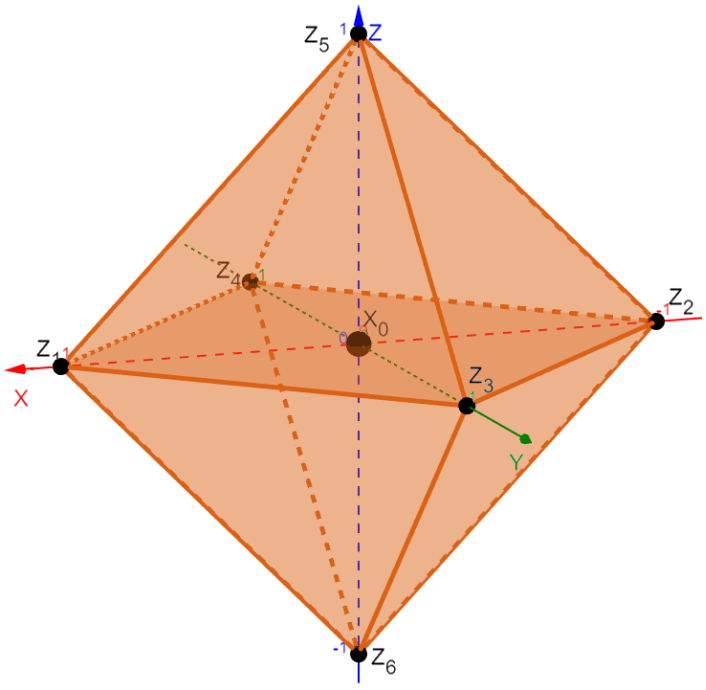


Figura 1.3: $B_1^s[(0, 0, 0)]$.

geogebra.org/3d/ug4tsh6v

El corolario anterior nos brinda una caracterización para las bolas cerradas según la norma de la suma en $\mathbb{R}^n$ como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.36. Considerando $x_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, $r = 1$, $(x,y) \in B_1^s[(0,0)]$ tenemos

$$\alpha_1 = \frac{1-|x|-|y|}{4} + x^+ \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1-|x|-|y|}{4} + x^-$$

$$\alpha_3 = \frac{1-|x|-|y|}{4} + y^+ \quad , \quad \alpha_4 = \frac{1-|x|-|y|}{4} + y^-$$

En particular para $(0{,}5; -0{,}1)$ tenemos $\alpha_1 = 0{,}6$; $\alpha_2 = 0{,}1$; $\alpha_3 = 0{,}1$ y $\alpha_4 = 0{,}2$ verificando $0{,}6(1;0) + 0{,}1(-1;0) + 0{,}1(0;1) + 0{,}2(0;-1) = (0{,}5; -0{,}1)$

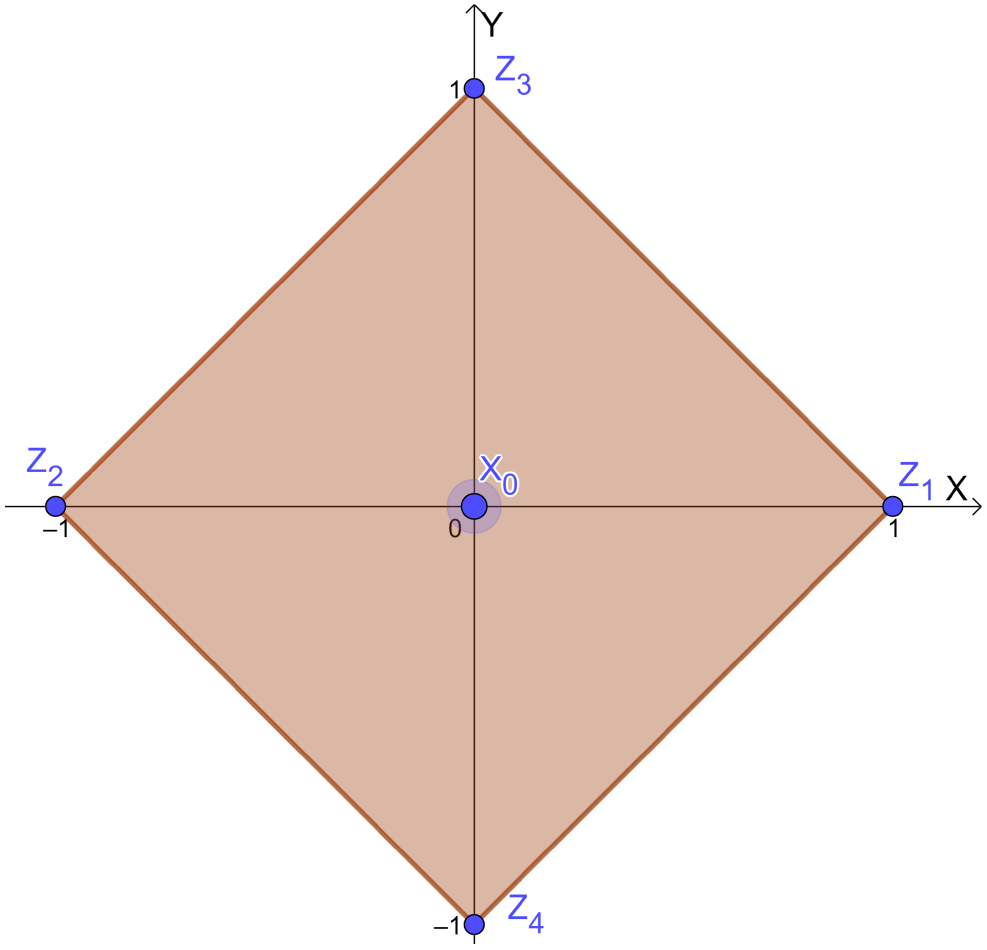


Figura 1.4: $B_1^s[(0,0)]$.

geogebra.org/classic/pp53tuhe

Enunciaremos a continuación dos versiones geométricas del teorema de Hahn-Banach conocidos como teoremas de separación. Las pruebas de dichos teoremas las podemos encontrar en [41]

Teorema 1.43. ***Primera forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach o Teorema de Separación:***

Sea X un espacio normado y sean A, $B \subseteq X$ conjuntos convexos no vacíos tal que A es abierto y $A \cap B = \varnothing$, entonces existe $u \in X^*$ y $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $u(x) \leqslant \delta \leqslant u(y)$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

Teorema 1.44. ***Segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach o Teorema de Separación Estricta:***

Sea X un espacio normado y sean A, $B \subseteq X$ conjuntos convexos no vacíos tal que A es cerrado, B es compacto y $A \cap B = \varnothing$, entonces existe $u \in X^*$ y $\delta \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $u(x) < \delta - \varepsilon < \delta < \delta + \varepsilon < u(y)$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

Corolario 1.14. Sea $C \subseteq X$ un conjunto convexo, entonces C es cerrado en norma si y solo si C es cerrado débilmente.

Prueba. Si C es vacío, el resultado es evidente, si $C \neq \varnothing$ es cerrado en norma, sea $x_0 \in C^c$, como $\{x_0\}$ es compacto, por el Teorema 1.44 existe $u \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $u(x) = \langle u, x\rangle < \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon < \langle u, x_0\rangle = u(x_0)$ para todo $x \in C$. Notemos que $u(x_0) \in \langle \alpha, +\infty\rangle$, luego $x_0 \in u^{-1}(\langle \alpha, +\infty\rangle)$, donde $u^{-1}(\langle \alpha, +\infty\rangle)$ es un abierto básico en la topología débil y por tanto C^c es abierto en la topología débil, es decir, C es cerrado débilmente.
Recíprocamente, si $C \subseteq X$ es un conjunto débilmente cerrado, entonces C^c es un abierto débil y puesto que $\sigma(X, X^*) \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$, tenemos que C es cerrado en norma.

■

Definición 1.64. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ y $C \subseteq dom(f)$ un conjunto convexo, decimos que f es una **función convexa** en C si:

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y) \text{ para todo } x, y \in C,\ t \in [0,1]\,.$$

Si $C = dom(f)$ diremos que f es convexa en su dominio.
Si $C = X$ diremos simplemente que f es convexa.

En adelante, C representará un subconjunto convexo de X y además $C \subseteq dom(f)$.

Definición 1.65. Sea $f : C \to \mathbb{R}$, el **epígrafo** de f respecto a C es el conjunto $epi_C f = \{(x, r) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant r\}$, si $C = X$, escribiremos solamente $epi f$.

Observación 1.10. Dado $(x, r) \in epi(f)$ se tiene que $f(x) \leqslant r$, es decir $x \in f_{r^-}$, por lo tanto $(x, r) \in epi(f)$ si y solo si $x \in f_{r^-}$.

El siguiente teorema suele ser usado como definición de función convexa. Ver Ro.

Teorema 1.45. *Sea $f : C \to \mathbb{R}$, entonces f es convexa si y solo si $epi_C f$ es convexo en $X \times \mathbb{R}$.*

Prueba. Sean (x, r), $(y, s) \in epi_C f \subseteq C \times \mathbb{R}$, para todo $t \in [0, 1]$ puesto que C es convexo y $x, y \in C$ se tiene que $(1 - t)x + ty \in C$, además, si f es convexa tenemos $f((1 - t)x + ty) \leqslant (1 - t)f(x) + tf(y) \leqslant (1 - t)r + ts$, por lo tanto $((1 - t)x + ty, (1 - t)r + ts) = (1 - t)(x, r) + t(y, s) \in epi_C f$.
Si $epi_C f$ es convexo, sean $x, y \in C$, dado $t \in [0, 1]$ como $(x, f(x)), (y, f(y)) \in epi_C f$ entonces $(1-t)(x, f(x))+t(y, f(y)) = ((1-t)x+ty, (1-t)f(x)+tf(y)) \in epi_C f$, luego $f((1 - t)x + ty) \leqslant (1 - t)f(x) + tf(y)$, de donde f es convexa en C.

■

Teorema 1.46. ***(Desigualdad de Jensen)***
Sea $f : C \to \mathbb{R}$, entonces f es convexa si y solo si para todo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \sum(C)$ se cumple $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.

Prueba. Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Los casos $n = 1$ y $n = 2$ se cumplen trivialmente puesto que f es convexa, supongamos ahora que la hipótesis sea cierta para $n > 2$ y veamos si se cumple para $n + 1$(Similar al Teorema 1.41).
Sea $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \in \sum(C)$. Asumamos que $0 < \alpha_i < 1$ para todo $i \in \{1, \cdots, n, n + 1\}$ y para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ definamos $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} > 0$. Como $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \in \sum(C)$, luego:

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i) = f((1-\alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leqslant (1-\alpha_{n+1}) f(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\leqslant (1-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(x_i)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha_{n+1})\beta_i f(x_i)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f(x_i).$$

■

Definición 1.66. Sea $f: C \to \mathbb{R}$, f es una **función cuasiconvexa** si:

$$f((1-t)x+ty) \leqslant \max\{f(x), f(y)\} \text{ para todo } x, y \in C,\ t \in [0,1].$$

Teorema 1.47. *Sea $f: C \to \mathbb{R}$, entonces f es cuasiconvexa si y solo si para todo $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \in \sum(C)$ se cumple $f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i) \leqslant \max\limits_{i=1,\cdots,n}\{f(x_i)\}$. Ver Teorema 1.46.*

Prueba. Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Los casos $n=1$ y $n=2$ son evidentes ya que f es cuasiconvexa, supongamos ahora que la hipótesis es cierta para $n>2$. Sea $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i \in \sum(C)$. Asumamos que $0<\alpha_i<1$ para todo $i \in \{1,\cdots,n,n+1\}$ y para cada $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ definamos $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} > 0$. Como $\sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1$ y $\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i \in \sum(C)$, tenemos $f(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i) \leqslant \max\limits_{i=1,\cdots,n}\{f(x_i)\}$, luego:

$$f(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i) = f((1-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i + \alpha_{n+1}x_{n+1}) \leqslant \max\{f(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i), f(x_{n+1})\}$$

$$\leqslant \max\{\max_{i=1,\cdots,n}\{f(x_i)\}, f(x_{n+1})\} = \max_{i=1,\cdots,n,n+1}\{f(x_i)\}.$$

■

Ahora mostramos una caracterización de función cuasiconvexa que nos será de mucha utilidad.

Teorema 1.48. *Sea $f: X \to \mathbb{R}$, entonces f es cuasiconvexa si y solo si para todo $r \in \mathbb{R}$ el conjunto f_{r^-} es convexo.*

Prueba. Si f es cuasiconvexa, dado $r \in \mathbb{R}$, sean $x, y \in f_{r^-}$ entonces $f(x) \leqslant r$, $f(y) \leqslant r$, luego dado $t \in [0,1]$ tenemos $f((1-t)x+ty) \leqslant \max\{f(x), f(y)\} \leqslant r$, esto implica que $(1-t)x+ty \in f_{r^-}$, es decir f_{r^-} es convexo.

Recíprocamente, sean $x, y \in dom(f)$ y consideremos $r_0 = \text{máx}\{f(x), f(y)\}$, evidentemente $x, y \in f_{r_0^-}$ y puesto que f_{r^-} es convexo para todo $r \in \mathbb{R}$, en particular lo es para $r_0 \in \mathbb{R}$, así dado $t \in [0,1]$ tenemos que $(1-t)x + ty \in f_{r_0^-}$, es decir

$$f((1-t)x + ty) \leqslant r_0 = \text{máx}\{f(x), f(y)\}$$

■

Teorema 1.49. *Si f es convexa entonces es cuasiconvexa.*

Prueba. Dados $x, y \in C$, basta observar que si $t \in [0,1]$ se tiene:

$$(1-t)f(x)+tf(y) \leqslant (1-t)\,\text{máx}\,\{f(x), f(y)\}+t\,\text{máx}\,\{f(x), f(y)\} = \text{máx}\,\{f(x), f(y)\}.$$

■

Teorema 1.50. *Sea $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$, entonces f es s.c.i. si y solamente si $epif$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$ dotado de la topología producto de la Definición 1.53.*

Prueba. Sea $(x_0, r_0) \in \overline{epif} \subseteq X \times \mathbb{R}$, si f es s.c.i. en x_0 entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $U_{\varepsilon,x_0} \in \tau$ tal que $x_0 \in U_{\varepsilon,x_0}$ y $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x)$ para todo $x \in U_{\varepsilon,x_0}$. Consideramos ahora el conjunto abierto $U_{\varepsilon,x_0} \times \langle r_0 - \varepsilon; r_0 + \varepsilon\rangle \subseteq X \times \mathbb{R}$, dado $(x, r) \in U_{\varepsilon,x_0} \times \langle r_0 - \varepsilon; r_0 + \varepsilon\rangle \cap epif$ se tiene $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant r < r_0 + \varepsilon$, de donde $f(x_0) < r_0 + 2\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Si suponemos que $(x_0, r_0) \notin epif$, entonces $f(x_0) > r_0$ y tomando $\varepsilon = \frac{f(x_0)-r_0}{2} > 0$ tenemos

$$f(x_0) < r_0 + 2\frac{f(x_0) - r_0}{2} = r_0 + f(x_0) - r_0 = f(x_0)$$

lo cual es absurdo, por tanto $f(x_0) \leqslant r_0$, es decir $(x_0, r_0) \in epif$.
Recíprocamente, si $epif$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$, sea $x_0 \in X$, dado $\varepsilon > 0$, como $(x_0, f(x_0) - \varepsilon) \notin epif$, entonces $(x_0, f(x_0) - \varepsilon) \in epif^c$ que es un conjunto abierto, de donde existe $U_{\varepsilon,x_0} \times V_{\varepsilon,x_0} \subseteq X \times \mathbb{R}$(abierto en la topología producto) tal que $(x_0, f(x_0) - \varepsilon) \in U_{\varepsilon,x_0} \times V_{\varepsilon,x_0} \subseteq epif^c$. Dado $x \in U_{\varepsilon,x_0}$, como $(x, f(x_0) - \varepsilon) \notin epif$, tenemos $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$, es decir f es s.c.i. en x_0.

■

Teorema 1.51. *Sea $f : C \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferior y cuasiconvexa. Entonces dado $x_0 \in int(dom(f))$, existe $r > 0$ tal que f está acotada superiormente en $B_r[x_0]$.*

Prueba. Si $x_0 \in int(dom(f))$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon[x_0] \subseteq B_{2\varepsilon}(x_0) \subseteq dom(f)$. Como nos interesa saber si f está acotada superiormente en alguna vecindad de x_0, es claro que esta vecindad debe estar incluida en $B_\varepsilon[x_0]$, definamos entonces:

$$S_n = \{x \in B_\varepsilon[x_0] : \ f(x) \leqslant n\} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Paso 1: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = B_\varepsilon[x_0]$

Es obvio que $S_n \subseteq B_\varepsilon[x_0]$ para todo $n \in N$, luego $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \subseteq B_\varepsilon[x_0]$. Para ver la otra inclusión, dado $x \in B_\varepsilon[x_0] \subseteq dom(f)$, existe un único $n_x \in \mathbb{Z}$ tal que $n_x = [\![f(x)\,]\!] \leqslant f(x) < n_x + 1$, de donde $x \in S_{n_x+1} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

En número n_x no es otro que el máximo entero de $f(x)$.

Paso 2: S_n es cerrado:

En efecto, sea $x \in \overline{S_n}$ entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap S_n$, es decir $\|x_k - x\| < \frac{1}{k}$ y $x_k \in S_n$ de donde $x_k \to x$ y $f(x_k) \leqslant n$, luego, como f es semicontinua inferior, $f(x) \leqslant \lim\inf_{n\to\infty} f(x_k) \leqslant n$ de donde se obtiene que $x \in S_n$ y por tanto $\overline{S_n} = S_n$, es decir S_n es cerrado.

Paso 3: El Teorema de Baire:

Del Ejemplo 1.33, como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = B_\varepsilon[x_0]$ y S_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in N$ tal que $int(S_{n_0}) \neq \varnothing$. Así dado $x_1 \in int(S_{n_0})$, existe $\delta > 0$ de modo que $B_\delta[x_1] \subseteq S_{n_0} \subseteq B_\varepsilon[x_0]$. Notemos además que $S_n \subseteq S_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego:

$$\varnothing \neq int(S_{n_0}) \subseteq int(S_n) \quad \text{para todo } n \geqslant n_0 \tag{1.1}$$

Paso 4: S_n es convexo:

Sean $x, y \in S_n$, dado $t \in [0, 1]$ sea $(1 - t)x + ty$, como f es cuasiconvexa se tiene $f((1-t)x+ty) \leqslant \text{máx}\{f(x), f(y)\} \leqslant n$ de donde $(1-t)x+ty \in S_n$. Observemos que el mismo resultado se obtiene si cambiamos la cuasiconvexidad por la convexidad de la función f.

Paso 5: En busca de la vecindad:

Sea $x_2 = 2x_0 - x_1$, entonces $\|x_2 - x_0\| = \|x_0 - x_1\| \leqslant \varepsilon$, además como $x_2 \in dom(f)$ tenemos de modo similar al Paso 1 que $[\![f(x_2)\,]\!] \leqslant f(x_2) < [\![f(x_2)\,]\!]+1$, definiendo $n_1 = 2\,\text{máx}\{n_0; [\![f(x_2)\,]\!] + 1\}$, se tiene $x_1,\ x_2 \in S_{n_1}$, y mejor aún, gracias a 1.1 se tiene que $x_1 \in int(S_{n_1})$. También de la convexidad de S_{n_1} resulta que $x_0 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in S_{n_1}$. Observemos que $B_\delta[x_1] \subseteq S_{n_0} \subseteq S_{n_1}$ de donde se deduce que para todo $x \in B_\delta[x_1]$ el segmento de recta $[x, x_2] \subseteq S_{n_1}$, así $\bigcup_{x \in B_\delta[x_1]} [x, x_2] \subseteq S_{n_1}$.

Paso 6: El cono de helado de una bola es convexo:

Al considerar la unión de segmentos de recta con un extremo en la bola $B_\delta[x_1]$ y el otro en x_2, obtenemos algo muy similar a un cono de helado de una bola infinito dimensional, como se aprecia en la siguiente figura:

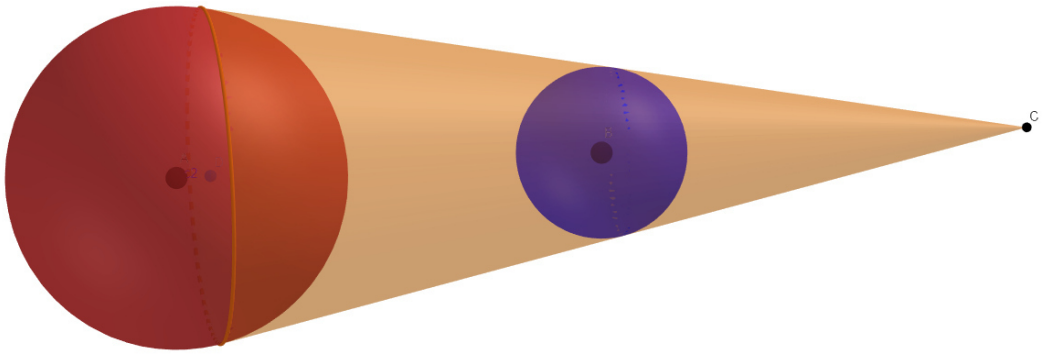


Figura 1.5: Cono de Helado en $\mathbb{R}^3$.

geogebra.org/3d/unbq8fdx

Sean $y, z \in \bigcup_{x \in B_\delta[x_1]} [x, x_2]$, entonces existen $x_y,\ x_z \in B_\delta[x_1]$ y $t_y,\ t_z \in [0, 1\rangle$ tales que $y = (1 - t_y)x_y + t_y x_2 \in [x_y, x_2]$ y $z = (1 - t_z)x_z + t_z x_2 \in [x_z, x_2]$.
Veamos que $[y, z] \subseteq \bigcup_{x \in B_\delta[x_1]} [x, x_2]$. En efecto, dado $t \in \langle 0, 1\rangle$ sea:

$$\begin{aligned} w_t &= (1-t)y + tz = (1-t)[(1-t_y)x_y + t_y x_2] + t[(1-t_z)x_z + t_z x_2] \\ &= (1-t)(1-t_y)x_y + t(1-t_z)x_z + [(1-t)t_y + tt_z]x_2 \end{aligned}$$

$$= (1-[(1-t)t_y+tt_z])\left(\frac{(1-t)(1-t_y)}{1-[(1-t)t_y+tt_z]}x_y+\frac{t(1-t_z)}{1-[(1-t)t_y+tt_z]}x_z\right)$$
$$+[(1-t)t_y+tt_z]x_2$$
$$= (1-[(1-t)t_y+tt_z])\underbrace{\left(\left[1-\frac{t(1-t_z)}{1-(1-t)t_y-tt_z}\right]x_y+\frac{t(1-t_z)}{1-(1-t)t_y-tt_z}x_z\right)}_{x_w}$$
$$+[(1-t)t_y+tt_z]x_2 \in [x_w,x_2] \subseteq \bigcup_{x\in B_\delta[x_1]}[x,x_2].$$

Paso 7: f está acotada superiormente en $B_{\frac{\delta}{2}}[x_0]$:

En efecto, dado $x \in B_{\frac{\delta}{2}}[x_0]$ consideremos $x_\delta = 2x - x_2$, entonces:

$$\|x_\delta - x_1\| = \|2x - x_2 - x_1\| = \|2x - 2x_0\| = 2\|x - x_0\| \leqslant 2(\frac{\delta}{2}) = \delta$$

Luego $x_\delta \in B_\delta[x_1]$ y además $x = \frac{1}{2}x_\delta + \frac{1}{2}x_2 \in [x_\delta, x_2] \subseteq \bigcup_{x\in B_\delta[x_1]}[x,x_2] \subseteq S_{n_1}$. Por lo tanto $B_{\frac{\delta}{2}}[x_0] \subseteq S_{n_1}$ y entonces $f(x) \leqslant n_1$ para todo $x \in B_{\frac{\delta}{2}}[x_0]$. Tomando $r = \frac{\delta}{2} > 0$ se tiene el teorema.

■

Teorema 1.52. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función cuasiconvexa y semicontinua inferiormente en $(X, \tau_{\|\cdot\|})$, entonces f es semicontinua inferiormente en $\sigma(X, X^*)$.*

Prueba. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ cuasiconvexa y s.c.i. en $(X, \tau_{\|\cdot\|})$, del Teorema 1.34 el conjunto $f_{r^-} = \{x \in X : \ f(x) \leqslant r\}$ es cerrado para todo $r \in \mathbb{R}$, pero además de ello afirmamos que también es convexo. En efecto, dados $x, y \in f_{r^-}$, para todo $t \in [0,1]$, puesto que f es cuasiconvexa se tiene $f((1-t)x+ty) \leqslant \text{máx}\{f(x), f(y)\} \leqslant r$ de donde $(1-t)x + ty \in f_{r^-}$ para todo $t \in [0,1]$, es decir $[x,y] \subseteq f_{r^-}$ para cada $x, y \in f_{r^-}$. Luego por el Corolario 1.14, como f_{r^-} es convexo y cerrado en norma, entonces es cerrado en la topología débil $\sigma(X, X^*)$ y del Teorema 1.34 se tiene que f es s.c.i. en la topología $\sigma(X, X^*)$.

■

Dadas ciertas funciones, con ellas se puede construir una nueva función que será de mucha importancia en la prueba del teorema principal de esta tesis.

Definición 1.67. Sea $\{f_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ una familia de funciones tales que $\bigcap_{i\in\Lambda} Dom(f_i) \neq \emptyset$. Claramente para cada $x \in \bigcap_{i\in\Lambda} Dom(f_i)$ el supremo de sus imágenes por f_i, es decir $\sup_{i\in\Lambda} f_i(x)$, puede que no sea finito, pero si consideramos la recta real extendida $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tiene sentido definir

$$\sup_{i\in\Lambda} f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

para cada $x \in \bigcap_{i\in\Lambda} Dom(f_i)$ como $(\sup_{i\in\Lambda} f_i)(x) = \sup_{i\in\Lambda} f_i(x)$.

El siguiente teorema nos permite ver que las propiedades como la semicontinuidad inferior, la convexidad y cuasiconvexidad de una familia de funciones son heredadas por la función supremo.

Teorema 1.53. *Sea $\{f_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ tal que $\bigcap_{i\in\Lambda} Dom(f_i) \neq \emptyset$, entonces:*

i) para todo $r \in \mathbb{R}$ se tiene $(\sup_{i\in\Lambda} f_i)_{r^-} = \bigcap_{i\in\Lambda}(f_{ir^-})$.

ii) $epi(\sup_{i\in\Lambda} f_i) = \bigcap_{i\in\Lambda} epi(f_i)$

iii) si f_i es s.c.i. para cada $i \in \Lambda$, la función $\sup_{i\in\Lambda} f_i$ también es s.c.i.

iv) si f_i es convexa para todo $i \in \Lambda$, la función $\sup_{i\in\Lambda} f_i$ es convexa.

v) si para cada $i \in \Lambda$, f_i es cuasiconvexa entonces $\sup_{i\in\Lambda} f_i$ es cuasiconvexa.

Prueba.

i) Dado $r \in \mathbb{R}$, sea $x \in (\sup_{i\in\Lambda} f_i)_{r^-}$ entonces $r \geqslant \sup_{i\in\Lambda} f_i(x) \geqslant f_i(x)$ de donde $x \in \bigcap_{i\in\Lambda}(f_{ir^-})$. Por otra parte, si $x \in \bigcap_{i\in\Lambda}(f_{ir^-})$ se tiene que $x \in f_{ir^-}$ es decir $f_i(x) \leqslant r$ para todo $i \in \Lambda$, así tomando supremo tenemos $\sup_{i\in\Lambda} f_i(x) \leqslant r$, lo que implica que $x \in (\sup_{i\in\Lambda} f_i)_{r^-}$. Por lo tanto $(\sup_{i\in\Lambda} f_i)_{r^-} = \bigcap_{i\in\Lambda}(f_{ir^-})$.

ii) De la Observación 1.10, dado $(x,r) \in X \times \{\mathbb{R} \cup +\infty\}$ tenemos que

$$(x,r) \in epi(c) \text{ si y solo si } x \in (\sup_{i\in\Lambda} f_i)_{r^-} = \bigcap_{i\in\Lambda}(f_{ir^-})$$

Lo que equivale a que $x \in f_{ir^-}$ para todo $i \in \Lambda$, esto es $(x,r) \in epi(f_i)$ para cada $i \in \Lambda$ y por consiguiente $(x,r) \in \bigcap_{i\in\Lambda} epi(f_i)$.

iii) Si f_i es semicontinua inferior, del Teorema 1.50 tenemos que $epi(f_i)$ es cerrado en $X \times \mathbb{R} \subseteq X \times \{\mathbb{R} \cup +\infty\}$ para todo $i \in \Lambda$, entonces $\bigcap_{i\in\Lambda} epi(f_i)$ es cerrado por ser intersección de cerrados, de donde se obtiene que $\bigcap_{i\in\Lambda} epi(f_i)$ es cerrado en $X \times \{\mathbb{R} \cup +\infty\}$ y por tanto $\sup_{i\in\Lambda} f_i$ es s.c.i.

iv) Puesto que f_i es una función convexa, por el Teorema 1.45, $epi(f_i)$ es convexo en $X \times \mathbb{R} \subseteq X \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ para todo $i \in \Lambda$, por tanto, gracias al Teorema 1.37, $epi(\sup_{i\in\Lambda} f_i) = \bigcap_{i\in\Lambda} epi(f_i)$ es convexo, es decir $\sup_{i\in\Lambda} f_i$ es una función convexa.

v) Como f_i es cuasiconvexa, por el Teorema 1.48, para todo $r \in \mathbb{R}$ tenemos que f_{ir^-} es convexa, luego por el Teorema 1.37 se tiene que $(\sup_{i\in\Lambda} f_i)_{r^-} = \bigcap_{i\in\Lambda} (f_{ir^-})$ es convexo, es decir $\sup_{i\in\Lambda} f_i$ es cuasiconvexa.

■

Capítulo 2

Funciones Multivaluadas

2.1. Funciones Multivaluadas

Definición 2.1. Si $T : A \to P(B)$ es una función no vacía, decimos que T es una función multivaluada de A en B y lo denotaremos por $T : A \rightrightarrows B$, esta notación fue empleada por Rockafellar en [38]. En particular, si $T(x)$ tiene como máximo un elemento para todo $x \in A$, diremos que T es una función univaluada. También, si $x \in A$, escribiremos Tx en lugar de $T(x)$, esto para tener presente que Tx es un conjunto y reservaremos el uso de $T(x)$ para las funciones en el sentido usual.

Ejemplo 2.1. Sean $A = \{0, 1\}$ y $B = \{1\}$, definiendo $T : A \rightrightarrows B$ como $T0 = \varnothing$ y $T1 = B$, tenemos que T es una función univaluada.

2.2. Dominio, Rango y Gráfico

Muchas de las definiciones e ideas presentadas en esta sección y la siguiente están inspiradas en las obras de Claude Berge [10], J.-P. Aubin & H. Frakowska [7], Ronald Cross [17].

Sea $T : A \rightrightarrows B$ una función multivaluada.

Definición 2.2. El **Dominio** de T es definido como $D(T) = \{x \in A / Tx \neq \varnothing\}$.

Definición 2.3. El **Rango**: $R(T) = \bigcup_{x \in D(T)} Tx = \{u \in B : \exists x \in D(T), u \in Tx\}$.
La imagen de $C \subseteq A$ por T, se define como $T(C) = \bigcup_{x \in D(T) \cap C} Tx$.

En particular, si $C = A$, se tiene $R(T) = T(A)$ y también $R(T) = T(D(T))$.

Definición 2.4. Decimos que T es **sobreyectiva** si $R(T) = B$ o $T(A) = B$.

Definición 2.5. El **Gráfico** de T es el conjunto: $G(T) = \{(x, u) \in A \times B / u \in Tx\}$.

Observación 2.1. La buena definición de una función multivaluada T puede interpretarse como: a conjuntos distintos($Tx \neq Ty$) le corresponden pre-imagenes distintas ($x \neq y$).

Observación 2.2. En general no se cumple que $Dom(T) = D(T)$, como se puede ver en el Ejemplo 2.1.

Observación 2.3. Es importante precisar que reservaremos el uso de letras mayúsculas y el símbolo "$\rightrightarrows$" para las funciones multivaluadas o univaluadas, dejando el uso de letras minúsculas y "$\rightarrow$" para las funciones en el sentido usual, salvo algunos casos especiales en los que usaremos letras minúsculas y "$\rightrightarrows$".

Teorema 2.1. *Sean $S, T : A \rightrightarrows B$, entonces $G(S) = G(T)$ si y solo si $S = T$.*

Prueba. En efecto, sea $x \in D(S)$, como $Sx \neq \varnothing$, existe $y \in Sx$, de esto $(x, y) \in G(S) = G(T)$, luego $y \in Tx$, entonces $x \in D(T)$. La otra inclusón es análoga, teniendo así que $D(S) = D(T)$ y $Sx = Tx$, por lo tanto $S = T$. La otra parte de la prueba es evidente, ya que si $S = T$, entonces $G(S) = G(T)$.

■

Ejemplo 2.2. Función, un caso particular de función multivaluada:
Sea $f : A \rightarrow B$ una función, si consideramos la función multivaluada $\mathcal{C}_f : A \rightrightarrows B$ definida como $\mathcal{C}_f x = \{f(x)\}$ para todo $x \in Dom(f)$ y $\mathcal{C}_f x = \varnothing$, si $x \notin Dom(f)$, se tiene que $D(\mathcal{C}_f) = Dom(f)$, $R(\mathcal{C}_f) = Ran(f)$ y $G(\mathcal{C}_f) = G(f)$. De esto se puede concluir que una función(en el sentido usual) es un caso particular de

función multivaluada o que las funciones multivaluadas son una generalización del concepto de función. Esto quiere decir que podemos escribir $f : A \rightrightarrows B$, donde el uso de la letra minúscula nos advierte que estamos identificando $\mathcal{C}_f$ con f, entonces $fx = \{f(x)\}$.

También escribiremos $D(f)$, $R(f)$ y $G(f)$ en lugar de $D(\mathcal{C}_f)$, $R(\mathcal{C}_f)$ y $G(\mathcal{C}_f)$ respectivamente.

Ejemplo 2.3. Aplicación vacía:

Definamos $\varnothing_{A,B} : A \rightrightarrows B$ tal que $\varnothing_{A,B}x = \varnothing$ para todo $x \in A$.

Ejemplo 2.4. Imagen inversa de una función:

Sean A y B conjuntos no vacíos, $f : A \to B$ una función, definamos $\mathcal{C}_f^{-1} : B \rightrightarrows A$ como $\mathcal{C}_f^{-1}b = f^{-1}\{b\}$, para todo $b \in B$. Así:

$$D(\mathcal{C}_f^{-1}) = Ran(f)$$

$$R(\mathcal{C}_f^{-1}) = Dom(f)$$

$$G(\mathcal{C}_f^{-1}) = \{(b,a) \in B \times A / a \in f^{-1}\{b\}\} = \{(b,a) \in B \times A / f(a) = b\}$$

Ejemplo 2.5. Aplicación Identidad:

Del Ejemplo 2.2, sea $B = A$, $f = I_A = I$, se define $I : A \rightrightarrows A$, tal que $Ix = \{x\}$. Al grafo de la función identidad se le conoce como diagonal en $A \times A$. Por ejemplo, si $A = \mathbb{R}$, tenemos $I : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$.

$D(I) = \mathbb{R}$

$R(I) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} = \mathbb{R}$

$G(I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$.

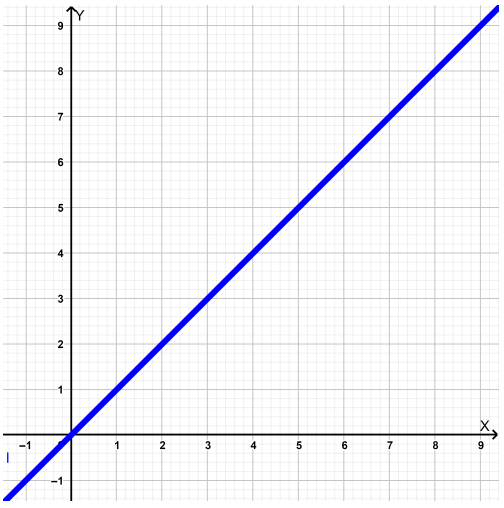


Figura 2.1: Gráfico de I.

geogebra.org/graphing/hwfsrxnm

Ejemplo 2.6. Conjuntos de índices de números naturales:

En matemática es usual trabajar con conjuntos de índices y en muchos textos, por ejemplo en [30], es común usar el símbolo I_n para denotar al conjunto de índices de números naturales menores o iguales a n, en esta oportunidad usaremos otro símbolo para no confundirlo con la aplicación identidad del ejemplo anterior. Definamos $\Lambda : \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{N}$, como: $\Lambda x = \{1, 2, \cdots, x\}$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

$D(\Lambda) = R(\Lambda) = \mathbb{N}$

$G(\Lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / y \leqslant x\}$.

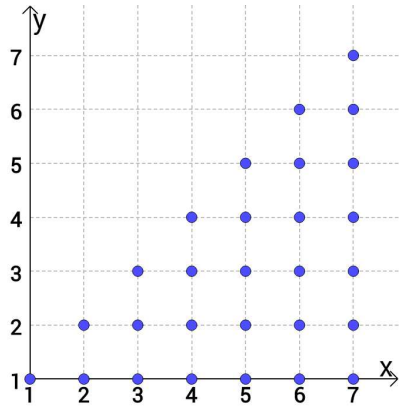


Figura 2.2: Gráfico de Λ.
geogebra.org/m/BBr437kW

Ejemplo 2.7. Intervalos infinitos abiertos por la derecha e izquierda:
Definamos $\varphi_- : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ como $\varphi_- x = \langle -\infty, x \rangle$ y $\varphi_+ : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ por $\varphi_+ x = \langle x, +\infty \rangle$. Entonces se tiene que $D(\varphi_-) = R(\varphi_-) = \mathbb{R} = D(\varphi_+) = R(\varphi_+)$ mientras que $G(\varphi_-) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < x\}$ y $G(\varphi_+) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$.

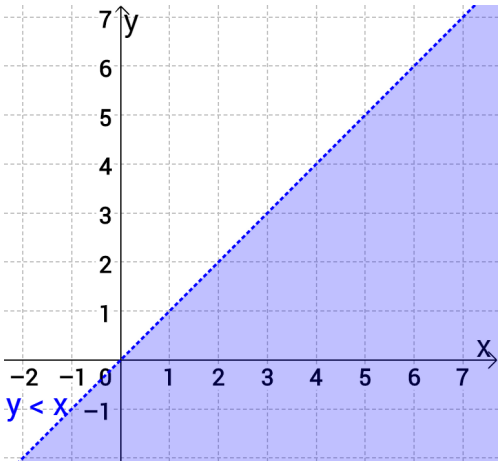


Figura 2.3: Gráfico de φ_-.
geogebra.org/m/PPQYbBQ9

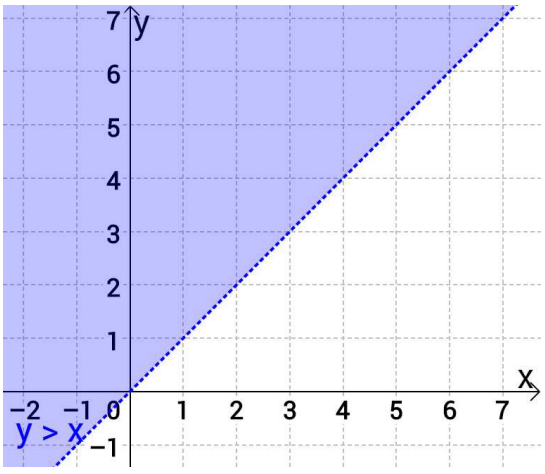


Figura 2.4: Gráfico de φ_+.
geogebra.org/m/F8WT8zMN

Ejemplo 2.8. Intervalos infinitos cerrados por la derecha e izquierda:
Definamos $\overline{\varphi}_- : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ como $\overline{\varphi}_- x = \langle -\infty, x]$ y $\overline{\varphi}_+ : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ por $\overline{\varphi}_+ x = [x, +\infty\rangle$.
Entonces se tiene que:

$$D(\overline{\varphi}_-) = R(\overline{\varphi}_-) = \mathbb{R} = D(\overline{\varphi}_+) = R(\overline{\varphi}_+)$$

Mientras que

$$G(\overline{\varphi}_-) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leqslant x\} \quad \text{y} \quad G(\overline{\varphi}_+) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geqslant x\}$$

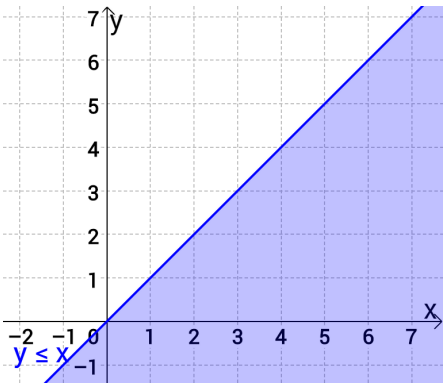


Figura 2.5: Gráfico de $\overline{\varphi}_-$.
geogebra.org/m/HQdwu8Zr

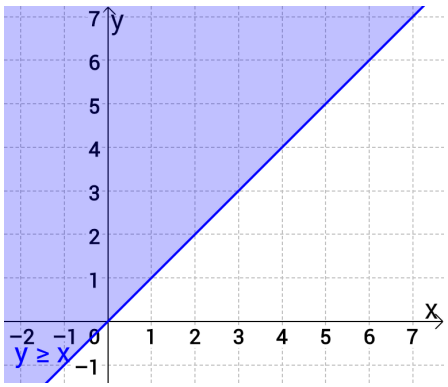


Figura 2.6: Gráfico de $\overline{\varphi}_+$.
geogebra.org/m/hqUbzhS6

Ejemplo 2.9. Composición función-operador-función :
Sean $T : A \rightrightarrows B$, $S : B \rightrightarrows A$, $f : B \to C$ y $g : C \to B$, definimos $f \circ T : A \rightrightarrows C$, $S \circ g : C \rightrightarrows A$ como $f \circ Ta = f(Ta)$ y $S \circ g(c) = Sg(c)$; $a \in A$, $c \in C$.
Luego:
$G(f \circ T) = \{(a, f(b)) \in A \times C / b \in Ta\}$, $G(S \circ g) = \{(c, a) \in C \times A / a \in Sg(c)\}$.
$D(f \circ T) = \{a \in A : Ta \cap Dom(f) \neq \varnothing\}$, $D(S \circ g) = \{c \in Dom(g) : g(c) \in D(S)\}$.
$R(f \circ T) = f(R(T))$, $R(S \circ g) = S(Ran(g))$.

Definición 2.6. Inversa: Sea $T : A \rightrightarrows B$, la aplicación multivaluada inversa de T es denotada por $T^{-1} : B \rightrightarrows A$ y definida como $T^{-1}b = \{a \in A / b \in Ta\}$.

Es evidente que $D(T^{-1}) = R(T)$, $R(T^{-1}) = D(T)$ y respecto al gráfico tenemos $G(T^{-1}) = \{(b, a) \in B \times A / b \in Ta\} = \{(b, a) \in B \times A / (a, b) \in G(T)\}$. Por tanto $(b, a) \in G(T^{-1})$ si y solo si $(a, b) \in G(T)$.

Ejemplo 2.10. Bolas abiertas con centro en el origen de coordenadas: Las bolas abiertas son usadas frecuentemente en topología. Veamos el caso particular de $\mathbb{R}^n$.

Sea $A = [0, 1]$, definimos $B : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ como $Bt = B_t(0)$.

Donde: $B_t(0) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < t\}$.

Entonces, $D(B) = \langle 0, 1]$, $R(B) = B_1(0)$ y $G(B) = \{(t, x) \in \langle 0, 1] \times \mathbb{R}^n / \|x\| < t\}$.

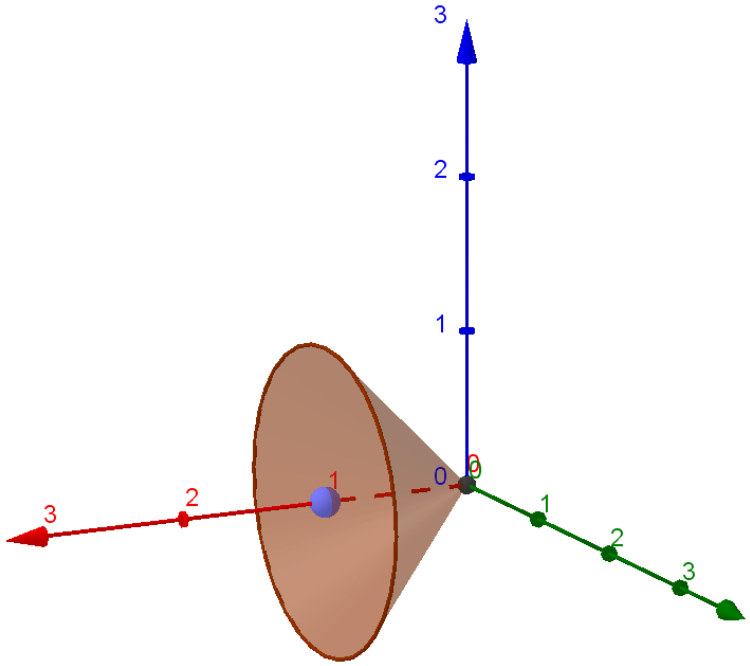


Figura 2.7: Gráfico de B para $n = 2$.

geogebra.org/3d/ahrc6zgt

Ejemplo 2.11. Consideremos la aplicación vacía del Ejemplo 2.3. Si denotamos por $\varnothing^{-1}_{A,B} : B \rightrightarrows A$ a la función multivaluada inversa de $\varnothing_{A,B}$, se tiene: $\varnothing^{-1}_{A,B} b = \{a \in A / b \in \varnothing_{A,B} a\} = \varnothing$, para todo $b \in B$. Por tanto $\varnothing^{-1}_{A,B} = \varnothing_{B,A}$.

Teorema 2.2. *Sea $T : A \rightrightarrows B$, entonces $(T^{-1})^{-1} = T$.*

Prueba. Es suficiente observar que $G((T^{-1})^{-1}) = \{(a, b) \in A \times B / a \in (T^{-1})^{-1} b\}$ $= \{(a, b) \in A \times B / b \in T^{-1} a\} = \{(a, b) \in A \times B / a \in Tb\} = G(T)$.

■

Teorema 2.3. *Sea $T : A \rightrightarrows B$, si $C \subseteq D \subseteq A$ entonces $T(C) \subseteq T(D)$.*

Prueba. Es evidente.

■

Ejemplo 2.12. Sean $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$ y $f : A \to B$ definida como $f(0) = f(1) = 1$, entonces $f : A \rightrightarrows B$ es tal que $f0 = \{1\} = f1$, es decir $fx = B$ para todo $x \in A$.
Observemos la función $f : A \to B$ es constante, entonces $f : A \rightrightarrows B$ también adoptará esa cualidad que definiremos luego de ver el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.13. Sean A, B conjuntos no vacíos, $\varnothing \neq C \subseteq A$ y $\varnothing \neq D \subseteq B$, definimos $D_C : A \rightrightarrows B$ como $D_C x = D$, si $x \in C$ y $D_C x = \varnothing$ si $x \notin C$. Para esta aplicación tenemos:

$$D(D_C) = C \ , \ R(D_C) = D \ y \ G(D_C) = C \times D$$

Hallemos ahora D_C^{-1}:
Como $D(D_C^{-1}) = R(D_C) = D$, si $y \in D$, dado $x \in C$ tenemos $y \in D_C x = D$ o, en otras palabras $x \in D_C^{-1}\ y$ para todo $x \in C$, luego $D_C^{-1}\ y = C$ para todo $y \in D$, por tanto $D_C^{-1} = C_D$.

Definición 2.7. Sea $T : A \rightrightarrows B$, decimos que T es constante si es vacía o si existe $\varnothing \neq D \subseteq B$ tal que $T = D_A$.

El Ejemplo 2.11 y el anterior, muestran que la inversa de una función constante también es constante.

Ejemplo 2.14. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, definamos $B_A : A \rightrightarrows B$ como $B_A x = B$ para todo $x \in A$, puesto que B_A es constante, tenemos:

$$D(B_A) = A \ , \ R(B_A) = B \ , \ G(B_A) = A \times B$$

Además $B_A^{-1} = A_B$.

2.3. Orden en Aplicaciones Multivaluadas

Sean A y B conjuntos no vacíos, el conjunto de todas las aplicaciones multivaluadas de A en B es denotado por:

$$\mathcal{T}(A,B) = \{T : A \rightrightarrows B \ / \ T \text{ es aplicación multivaluada}\}$$

Definamos en $\mathcal{T}(A,B)$ la siguiente relación:

$$S \preceq T \Leftrightarrow G(S) \subseteq G(T)$$

Teorema 2.4. *$\mathcal{T}(A,B)$ es un conjunto parcialmente ordenado por "$\preceq$"*

Prueba.

i) **Reflexividad:** Sean $T \in \mathcal{T}(A,B)$, entonces $G(T) \subseteq G(T)$, por tanto $T \preceq T$.

ii) **Antisimétría:** Sean $S, T \in \mathcal{T}(A,B)$. Si $S \preceq T \preceq S$, tenemos $G(S) \subseteq G(T)$ y $G(T) \subseteq G(S)$, luego $G(T) = G(S)$ y por el Teorema 2.1, $S = T$.

iii) **Transitividad:** Sean $R, S, T \in \mathcal{T}(A,B)$. Si $R \preceq S$ y $S \preceq T$, entonces $G(R) \subseteq G(S)$ y $G(S) \subseteq G(T)$, luego $G(R) \subseteq G(T)$ y por definición $R \preceq S$.

Tenemos así que $\mathcal{T}(A,B)$ es un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión de gráficas.

■

Observación 2.4. Sean A y B conjuntos, la aplicación vacía $\varnothing_{A,B}$ del Ejemplo 2.3 satisface $\varnothing_{A,B} \preceq T$ para toda $T \in \mathcal{T}(A,B)$, es decir la aplicación vacía $\varnothing_{A,B}$ es el primer elemento de $\mathcal{T}(A,B)$ mientras que la aplicación multivaluada B_A del Ejemplo 2.14 es el último elemento de $\mathcal{T}(A,B)$. Notemos también que $\varnothing_{A,B}$ es un elemento minimal y B_A es un elemento maximal de $\mathcal{T}(A,B)$, estos son ejemplos triviales de elemento mínimo y máximo que no aportarán muchas cosas interesantes a nuestro estudio, por ello, consideraremos el siguiente conjunto $\mathcal{T}_0(A,B) = \mathcal{T}(A,B) - \{\varnothing, B_A\}$, este conjunto sigue siendo parcialmente ordenado, pero ya que no cuenta con primer y último elemento ahora estudiar la existencia de elementos minimales o maximales será un tanto más interesante.

Teorema 2.5. *Sean $S, T : A \rightrightarrows B$, entonces $S \preceq T$ si y solo si $Sx \subseteq Tx$ para todo $x \in A$.*

Prueba. Asumiento que $S \preceq T$, por definición $G(S) \subseteq G(T)$. Dado $x \in D(S)$, sea $y \in Sx$, entonces $(x, y) \in G(S) \subseteq G(T)$, luego $y \in Tx$, así $x \in D(T)$ y $Sx \subseteq Tx$, si $x \in A - D(S)$, $Sx = \varnothing \subseteq Tx$, por tanto $Sx \subseteq Tx$ para todo $x \in A$. Notemos también que $D(S) \subseteq D(T)$ y $R(S) \subseteq R(T)$.
Por otra parte, sea $(x, y) \in G(S)$, entonces $y \in Sx \subseteq Tx$, así $(x, y) \in G(T)$, entonces $G(S) \subseteq G(T)$, es decir $S \preceq T$. ■

2.4. Operaciones con Aplicaciones Multivaluadas

Las aplicaciones multivaluadas llevan puntos en conjuntos, entonces, es natural pensar que las operaciones entre estas aplicaciones estén muy relacionadas con las operaciones entre conjuntos, y de hecho, eso es lo que ocurre en este caso, veremos como las operaciones entre conjuntos nos permitirán construir nuevas aplicaciones multivaluadas a partir de otras.

Sean $S : A \rightrightarrows B$ y $T : A \rightrightarrows B$ dos aplicaciones multivaluadas.

Definición 2.8. Unión de aplicaciones multivaluadas:
Definimos la unión de S y T como $S \cup T : A \rightrightarrows B$ tal que $(S \cup T)x = Sx \cup Tx$, para todo $x \in A$.

Es evidente que $D(S \cup T) = D(S) \cup D(T)$, en cuanto al rango tenemos $R(S \cup T) = \bigcup_{x \in D(S \cup T)} (S \cup T)x = \bigcup_{x \in D(S) \cup D(T)} Sx \cup Tx = \bigcup_{x \in D(S)} Sx \cup \bigcup_{x \in D(T)} Tx = R(S) \cup R(T)$.
Finalmente para el gráfico de la unión se tiene $G(S \cup T) = G(S) \cup G(T)$.

Ejemplo 2.15. Parábola con eje focal horizontal
Sea $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la función raíz cuadrada, como $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es un $e.v.$, consideremos $-g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ su inverso aditivo, entonces para todo $x \geqslant 0$, $g : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$, está definida como $gx = \{\sqrt{x}\}$ y $-g : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ como $-gx = \{-\sqrt{x}\}$ para todo

$x \geqslant 0$. Definamos $P : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ como $P = g \cup -g$, es decir $Px = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}$ para todo $x \geqslant 0$. Respecto a P tenemos: $D(P) = [0, +\infty\rangle$, $R(P) = \mathbb{R}$ y $G(P) = \{(x, -\sqrt{x}); (x, \sqrt{x}) \,/\, x \geqslant 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = x\}$.

En la figura de la derecha vemos la gráfica a dos colores de una parábola con vértice en el origen de coordenadas y eje focal en el eje X, la parte de color azul representa la gráfica de g y la parte de color rojo, la gráfica de $-g$. La unión de las dos gráficas forman la gráfica de P.

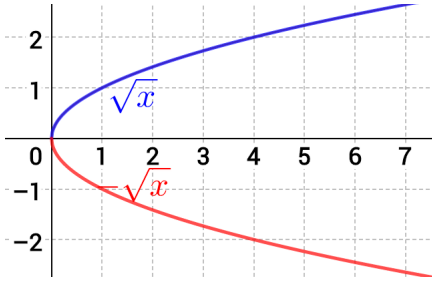


Figura 2.8: Gráfico de P.

geogebra.org/m/YEhFxccv

Definición 2.9. Intersección de aplicaciones multivaluadas:
La intersección de S y T es denotada por $S \cap T : A \rightrightarrows B$ y está definida para todo $x \in A$ como $(S \cap T)x = Sx \cap Tx$.
Como $(S \cap T)x \subseteq Sx$ y $(S \cap T)x \subseteq Tx$, para todo $x \in A$, del Teorema 2.5, $S \cap T \preceq S$ y $S \cap T \preceq T$, entonces $D(S \cap T) \subseteq D(S)$ y $D(S \cap T) \subseteq D(T)$, luego $D(S \cap T) \subseteq D(S) \cap D(T)$. En cuanto al rango también tenemos $R(S \cap T) \subseteq R(S) \cap R(T)$. Al igual que con el dominio, para el rango, la otra inclusión no siempre se cumple, sin embargo para el gráfico, se tiene $G(S \cap T) = G(S) \cap G(T)$.

Observemos que para todo $T \in \mathcal{T}(A, B)$ se cumple:

$$T \cup \varnothing_{A,B} = T = \varnothing_{A,B} \cup T \qquad y \qquad T \cup B_A = B_A = B_A \cup T$$

$$T \cap \varnothing_{A,B} = \varnothing_{A,B} = \varnothing_{A,B} \cap T \qquad y \qquad T \cap B_A = T = B_A \cap T$$

Ejemplo 2.16. Sea $A = \{0, 1, 2\}$, definamos:

$S : A \rightrightarrows A$ tal que $S0 = \{0\}$, $S1 = \{1\}$, $S2 = \varnothing$, entonces:
$D(S) = \{0, 1\}$, $R(S) = \{0, 1\}$ y $G(S) = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

$T : A \rightrightarrows A$ tal que $T0 = \varnothing$, $T1 = \{0\}$, $T2 = \{1\}$, entonces:
$D(T) = \{1, 2\}$, $R(T) = \{0, 1\}$ y $G(T) = \{(1, 0), (2, 1)\}$.

Veamos ahora como se comportan la unión e intersección de S y T.

Unión: $S \cup T : A \rightrightarrows A$
$(S \cup T)0 = \{0\}$, $(S \cup T)1 = \{0, 1\}$, $(S \cup T)2 = \{1\}$.
$D(S \cup T) = \{0, 1, 2\} = D(S) \cup D(T)$.
$R(S \cup T) = \{0, 1\} = R(S) \cup R(T)$.
$G(S \cup T) = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1)\} = G(S) \cup G(T)$.

Intersección: $S \cap T : A \rightrightarrows A$
$(S \cap T)0 = \varnothing$, $(S \cap T)1 = \varnothing$, $(S \cap T)2 = \varnothing$.
$D(S \cap T) = \varnothing \subset D(S) \cap D(T) = \{1\}$.
$R(S \cap T) = \varnothing \subset R(S) \cap R(T) = \{0, 1\}$.
$G(S \cap T) = \varnothing = G(S) \cap G(T)$.

De las definiciones de unión e intersección de aplicaciones multivaluadas se desprende el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Sean $S, T : A \rightrightarrows B$, entonces $S \cap T \preceq T$, $S \preceq S \cup T$.*

Prueba. Puesto que $(S \cap T)x = Sx \cap Tx \subseteq Tx \subseteq Sx \cup Tx = (S \cup T)x$ para todo $x \in A$, entonces $S \cap T \preceq T \preceq S \cup T$.
Análogamente, $(S \cap T)x = Sx \cap Tx \subseteq Sx \subseteq Sx \cup Tx = (S \cup T)x$ para todo $x \in A$, entonces $S \cap T \preceq S \preceq S \cup T$.

■

Hasta ahora hemos definido la unión e intersección de dos aplicaciones multivaluadas, veamos también el caso de la unión e intersección arbitraria de aplicaciones.

Definición 2.10. Unión arbitraria de aplicaciones multivaluadas:

Sea $\{T_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de aplicaciones multivaluadas de A en B, definamos la aplicación $\bigcup_{i\in\Lambda} T_i : A \rightrightarrows B$ como $(\bigcup_{i\in\Lambda} T_i)x = \bigcup_{i\in\Lambda}(T_i x)$.

Observación 2.5. Notemos que $T_j \preceq \bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ para todo $j \in \Lambda$, entonces, por el Teorema 2.5, para todo $j \in \Lambda$ se tiene $D(T_j) \subseteq D(\bigcup_{i\in\Lambda} T_i)$ y $R(T_j) \subseteq R(\bigcup_{i\in\Lambda} T_i)$, así $\bigcup_{i\in\Lambda} D(T_i) \subseteq D(\bigcup_{i\in\Lambda} T_i)$ y $\bigcup_{i\in\Lambda} R(T_i) \subseteq R(\bigcup_{i\in\Lambda} T_i)$.

Dominio: $D(\bigcup_{i\in\Lambda} T_i) = \bigcup_{i\in\Lambda} D(T_i)$

Sea $x \in D(\bigcup_{i\in\Lambda} T_i)$, entonces $\varnothing \neq \bigcup_{i\in\Lambda}(T_i x)$, lo que implica que existe $j \in \Lambda$ tal que $\varnothing \neq T_j x$, es decir $x \in D(T_j) \subseteq \bigcup_{i\in\Lambda} D(T_i)$. La otra inclusión ya se probó en la observación anterior.

Rango: $R(\bigcup_{i\in\Lambda} T_i) = \bigcup_{x\in\cup_{i\in\Lambda} D(T_i)} \bigcup_{i\in\Lambda}(T_i x) = \bigcup_{i\in\Lambda} \bigcup_{x\in\cup_{i\in\Lambda} D(T_i)} (T_i x) = \bigcup_{i\in\Lambda} R(T_i)$.

Definición 2.11. Intersección arbitraria de aplicaciones multivaluadas:

Sea $\{T_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de aplicaciones multivaluadas de A en B, definamos la aplicación $\bigcap_{i\in\Lambda} T_i : A \rightrightarrows B$ como $(\bigcap_{i\in\Lambda} T_i)x = \bigcap_{i\in\Lambda}(T_i x)$.

Observación 2.6. $\bigcap_{i\in\Lambda} T_i \preceq T_j$, $\forall j \in \Lambda$, por el Teorema 2.5, $D(\bigcap_{i\in\Lambda} T_i) \subseteq D(T_j)$ y $R(\bigcap_{i\in\Lambda} T_i) \subseteq R(T_j)$, por lo tanto

$$D(\bigcap_{i\in\Lambda} T_i) \subseteq \bigcap_{i\in\Lambda} D(T_i)$$

$$R(\bigcap_{i\in\Lambda} T_i) \subseteq \bigcap_{i\in\Lambda} R(T_i)$$

Observación 2.7. Si $T : A \rightrightarrows B$ y $\{T_i\}_{i\in\Lambda}$ es la familia de todas las funciones multivaluadas de A en B tal que $T \preceq T_i$ para todo $i \in \lambda$, es decir, la familia de todas las aplicaciones multivaluadas que contienen a T, se tiene evidentemente

que $T \preceq \bigcap_{i\in\Lambda} T_i \preceq \bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ o mejor aún $T = \bigcap_{i\in\Lambda} T_i \preceq \bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ ya que al cumplirse $T \preceq T$, entonces T debe pertenecer a dicha familia. Respecto a la unión, ¿ $\bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ será un elemento maximal?

Teorema 2.7. *Existen elementos maximales en* $\mathcal{T}_0(A, B)$.

Prueba. Sea $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i\in\Lambda}$ una cadena en $\mathcal{T}_0(A, B)$ es decir, un subconjunto de $\mathcal{T}_0(A, B)$ que es totalmente ordenado. Puesto que $T_j \preceq \bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ para todo $j \in \Lambda$, entonces $\bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ es una cota superior de $\mathcal{F}$. Notemos que la cadena $\mathcal{F}$ es arbitraria, luego toda cadena en $\mathcal{T}_0(A, B)$ posee cota superior, así, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal en $\mathcal{T}_0(A, B)$.

■

Corolario 2.1. Toda aplicación multivaluada $T \in \mathcal{T}_0(A, B)$ admite una extensión maximal.

La prueba de esto es una adaptación de otra similar dada en [9].

Prueba. Recordemos que S es una extensión de T si $T \preceq S$, consideremos el subconjunto parcialmente ordenado $\mathcal{T}_T = \{S \in \mathcal{T}_0(A, B) \ / \ T \preceq S\}$. Sea $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i\in\Lambda}$ una cadena en $\mathcal{T}_T$. Puesto que $T \preceq T_j \preceq \bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ para todo $j \in \Lambda$, entonces $\bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ es una cota superior de $\mathcal{F}$, luego, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $\widetilde{T} \in \mathcal{T}_T \subseteq \mathcal{T}_0(A, B)$.

■

Observación 2.8. La aplicación multivaluada definida en el Ejemplo 2.1 es maximal en $\mathcal{T}_0(A, B)$, pero las aplicaciones del Ejemplo 2.16 no lo son.

Ejemplo 2.17. En el Ejemplo 2.16 se tiene que $S \preceq S \cup T$ y $T \preceq S \cup T$, entonces $S \cup T$ es una extensión de S y también de T, pero no es maximal, ahora, en lugar de hallar una extensión maximal para S o T, hallaremos una extensión maximal no trivial de $S \cup T : A \rightrightarrows B$ que será también extensión maximal de S y T

Recordemos que $A = \{0, 1, 2\}$ y $(S \cup T)0 = \{0\}$, $(S \cup T)1 = \{0, 1\}$, $(S \cup T)2 = \{1\}$. Hallar tal extensión no resulta muy difícil si tenemos en mente que B_A es el último elemento de $\mathcal{T}(A, B)$, entonces, para que una extensión sea maximal en $\mathcal{T}_0(A, B)$, es suficiente relacionar a todo $x \in A$ menos uno, con B, tenemos así, cinco posibles extensiones maximales.

i) $(\widetilde{S \cup T})_{0,1}0 = \{0, 1\}$, $(\widetilde{S \cup T})_{0,1}1 = A$ y $(\widetilde{S \cup T})_{0,1}2 = A$.

ii) $(\widetilde{S \cup T})_{0,2}0 = \{0, 2\}$, $(\widetilde{S \cup T})_{0,2}1 = A$ y $(\widetilde{S \cup T})_{0,2}2 = A$.

iii) $(\widetilde{S \cup T})_{1,1}0 = A$, $(\widetilde{S \cup T})_{1,1}1 = \{0, 1\}$ y $(\widetilde{S \cup T})_{1,1}2 = A$,

iv) $(\widetilde{S \cup T})_{2,1}0 = A$, $(\widetilde{S \cup T})_{2,1}1 = A$ y $(\widetilde{S \cup T})_{2,1}2 = \{0, 1\}$.

v) $(\widetilde{S \cup T})_{2,2}0 = A$, $(\widetilde{S \cup T})_{2,2}1 = A$ y $(\widetilde{S \cup T})_{2,2}2 = \{1, 2\}$.

Notemos que $Card(A \times A) = 9$ y $Card(G(S \cup T)) = 4$ mientras que son 5 las posibles extensiones maximales, obviamente esas cantidades están relacionadas, pero ¿se cumplirá esa relación para casos finitos más generales?

Teorema 2.8. *Sean $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ dos conjuntos con n y m elementos respectivamente. Si $T \in \mathcal{T}_0(A, B)$, entonces:*

i) $Card(G(T)) = \sum_{i=1}^{n} Card(Ta_i)$

ii) El número de extensiones maximales de T es $nm - Card(G(T))$

Prueba.

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $P_i = Card(Ta_i)$, entonces, si $Ta_i = \varnothing$, tenemos $P_i = 0$, pero si $Ta_i \neq \varnothing$, escribamos $Ta_i = \{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{p_i}}\} \subseteq B$. Asumamos sin pérdida de generalidad que $D(T) = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, donde $1 \leqslant p \leqslant n$.

i) Como $G(T) = \{(a, b) \in A \times B / b \in Ta\} = \bigcup_{a \in D(T)} \bigcup_{b \in Ta} \{(a, b)\} = \bigcup_{a \in D(T)} a \times Ta$, en particular $G(T) = \bigcup_{i=1}^{n} a_i \times Ta_i = \bigcup_{i=1}^{p} a_i \times Ta_i$, por tanto $Card(G(T)) = Card(\bigcup_{i=1}^{p} a_i \times Ta_i) = \sum_{i=1}^{p} Card(a_i \times Ta_i) = \sum_{i=1}^{p} Card(Ta_i) = \sum_{i=1}^{n} Card(Ta_i)$.

ii) Dado $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, como $m - P_i = Card(B - Ta_i)$, se puede dar el caso que $m - P_i = 0$ o $m - P_i > 0$, es decir: $Ta_i = B$ o $\varnothing \neq Ta_i \subset B$.

a) Si $m - P_i > 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, sea $B - Ta_i = \{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{m-p_i}}\}$ entonces, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m - P_i\}$ definamos $\widetilde{T}_{i,k} : A \rightrightarrows B$ como:

$$\widetilde{T}_{i,k}a_j = \begin{cases} B & ; \quad \text{si } j \neq i \\ B - \{b_{i_k}\} & ; \quad \text{si } j = i \end{cases}$$

Veamos ahora que $T \preceq \widetilde{T}_{i,k}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, m - P_i\}$.

En efecto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, tenemos $B - Ta_i = \{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{m-p_i}}\}$, así para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m - P_i\}$ se tiene $b_{i_k} \notin Ta_i$, por lo tanto $Ta_i \subseteq B - \{b_{i_k}\} = \widetilde{T}_{i,k}a_i$. Si $j \neq i$, entonces $Ta_j \subseteq B = \widetilde{T}_{i,k}a_j$. Por último, si $a_j \notin D(T)$, entonces $\varnothing = Ta_j \subseteq B = \widetilde{T}_{i,k}a_j$. De todo ello $T \preceq \widetilde{T}_{i,k}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, m - P_i\}$.

Como $p \leqslant n$, entonces $p = n$ o $p < n$, veamos cada caso:

1) Si $p = n$, tenemos para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $m - P_i$ posibles extensiones maximales, es decir $\sum_{i=1}^{n}(m - P_i) = \sum_{i=1}^{n} m - \sum_{i=1}^{n} P_i = nm - Card(G(T))$ es el número de posibles extensiones maximales.

2) Si $p < n$, para cada $i \in \{p + 1, \ldots, n\}$ y cada $k \in \{1, 2, \ldots, m - P_i\} = \{1, 2, \ldots, m\}$ definamos $\widetilde{T}_{i,k} : A \rightrightarrows B$ como:

$$\widetilde{T}_{i,k}a_j = \begin{cases} B & ; \quad \text{si } j \neq i \\ B - \{b_k\} & ; \quad \text{si } j = i \end{cases}$$

Observando que si $i \in \{p + 1, \ldots, n\}$, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ entonces $Ta_i = \varnothing \subset B - \{b_k\} = \widetilde{T}_{i,k}a_i$ y si $j \neq i$, $Ta_j \subset B = \widetilde{T}_{i,k}a_j$. De donde se tiene $T \preceq \widetilde{T}_{i,k}$, teniendo así para cada $i \in \{p + 1, \ldots, n\}$, m pasibles extensiones maximales, es decir, $(n - p)m$, luego en total $pm - Card(G(T)) + (n - p)m = nm - Card(G(T))$.

b) Si $m - P_i = 0$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, asumamos sin pérdida de generalidad que $m - P_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$ con $q \leqslant p$.

1) Si $q = p$, entonces necesariamente $p < n$ ya que si $p = n$ tendríamos $q = p = n$ y $T = B_A$ lo cual contradice la hipótesis. Luego, para cada $i \in \{p+1, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ definamos $\widetilde{T}_{i,k} : A \rightrightarrows B$ como:

$$\widetilde{T}_{i,k}a_j = \begin{cases} B & ; \quad \text{si } j \neq i \\ B - \{b_k\} & ; \quad \text{si } j = i \end{cases}$$

Dado $i \in \{p+1, \ldots, n\}$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tenemos: $Ta_i = \varnothing \subseteq B - \{b_k\} = \widetilde{T}_{i,k}a_i$ y si $j \neq i$, $Ta_j \subseteq B = \widetilde{T}_{i,k}a_j$. Por tanto $T \preceq \widetilde{T}_{i,k}$ y tenemos $(n-p)m = nm - pm = nm - Card(G(T))$ posibles extensiones maximales.

2) Si $q < p$, entonces $m - P_i > 0$ para todo $i \in \{q+1, \ldots, p\}$ y basta aplicar el mismo procediemiento que se usó en a.

■

Observación 2.9. En el Ejemplo 2.17, mencionamos que las extensiones maximales de $S \cup T$ son extensiones maximales de S y T, pero lo contrario no es cierto en general, es decir, no toda extensión maximal de S o T será una extensión maximal de $S \cup T$. Esto lo podemos deducir del teorema anterior, pues como $G(S)$ y $G(T)$ tienen dos elementos cada uno, entonces son 7 las posibles extenciones maximales que poseen, a diferencia de las 5 extensiones maximales de $S \cup T$. Para mostrar ello, veamos las dos extensiones maximales de T que no son extensiones maximales de $S \cup T$.

$$\widetilde{T}_1\, 0 = \{1, 2\} \;\; , \;\; \widetilde{T}_1 1 = A \;\; , \;\; \widetilde{T}_1 2 = A$$

$$\widetilde{T}_2\, 0 = A \quad , \;\; \widetilde{T}_2 1 = \{0, 2\} \;\; , \;\; \widetilde{T}_2 2 = A$$

2.5. Aplicaciones Multivaluadas en Espacios Vectoriales

Hasta ahora hemos visto a las aplicaciones multivaluadas definidas en conjuntos genéricos, sin estructura algebraica alguna, salvo algunos ejemplos, pero el que los valores de una aplicación multivaluada pertenezcan a un conjunto donde, por ejemplo, sus elementos se puedan sumar o multiplicar por un número aportará, además de la union e intersección, nuevas formas de obtener aplicaciones multivaluadas a partir de otras ya conocidas.

Sea V un espacio vectorial, como en V está definida la suma de elementos de V, si A y B son subconjuntos de V entonces definimos $A+B = \{a+b/a \in A \ y \ b \in B\}$, si A o B son vacíos, evidentemente la suma también debe ser vacía. De igual manera, como en un espacio vectorial se tiene definida la multiplicación de un número por un vector, entonces podemos definir para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha A = \{\alpha a/a \in A\}$.
Sea U un conjunto no vacío y sean $T : U \rightrightarrows V$, $S : U \rightrightarrows V$.

Definición 2.12. Suma de aplicaciones multivaluadas
Dado $x \in U$, como Tx y Sx son subconjuntos de V, para que $Tx + Sx$ no sea vacío, tanto Tx y Sx no deben ser vacíos, es decir, x debe pertenecer al dominio de T y al dominio de S al mismo tiempo, en otras palabras debe pertenecer a la intersección de dominios. Con todo ello en mente definamos $T + R : U \rightrightarrows V$ como $(T + S)x = Tx + Sx$ para todo $x \in U$.

Claramente $D(T + S) = D(T) \cap D(S)$ y además como:

$$(T + S)x = Tx + Sx \subseteq R(T) + R(S)$$

Para todo $x \in U$, se tiene:

$$R(T + S) \subseteq R(T) + R(S)$$

Ejemplo 2.18. Aplicación Nula

La aplicación nula de U a V es denotada por $0_U : U \rightrightarrows V$ y definida para todo $x \in U$ como $0_U x = \{0\}$. Esta aplicación multivaluada es constante, entonces $D(0_U) = U$, $R(0_U) = \{0\}$, $G(0_U) = U \times \{0\}$. Además la inversa de la función nula $0_U^{-1} = U_0 : V \rightrightarrows U$ es definida como $U_0\ y = U$ si $y = 0$ y $U_0\ y = \varnothing$ si $y \neq 0$, entonces $D(U_0) = \{0\}$, $R(U_0) = U$, $G(U_0) = \{0\} \times U$.

Si no hay lugar a confusión, escribiremos simplemente 0 en lugar de $0_{U,V}$, También notemos que la aplicación nula es el elemento neutro en $\mathcal{T}(U, V)$ para la suma ya que $T + 0 = T = 0 + T$ para todo $T \in \mathcal{T}(U, V)$.

Definición 2.13. Escalar por una aplicación multivaluada

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, la multiplicación de α por una aplicación multivaluada T se denota por $\alpha T : U \rightrightarrows V$ y es definida para todo $x \in U$ como $(\alpha T)x = \alpha Tx$.

Es claro que si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $D(\alpha T) = D(T)$ y $R(\alpha T) = \alpha R(T)$.

En particular, si $\alpha = 0$, tenemos $0T = 0_{D(T),V}$; si $\alpha = 1$, evidentemente $1T = T$ y para $\alpha = -1$ escribiremos $-T$ en lugar de $-1T$, pero la aplicación $-T$ está muy lejos de ser el inverso aditivo de T como veremos a continuación.

Ejemplo 2.19. Definamos $T : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ como $Tx = \{1, 2\}$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $Tx = \{0\}$ en caso contrario. Entonces $-Tx = \{-1, -2\}$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $-Tx = \{0\}$, si $x \notin \mathbb{Q}$, luego, escribiendo $T - T$ en lugar de $T + (-T)$, tenemos definida $T - T : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ por $(T - T)x = \{-1, 0, 1\}$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $(T - T)x = \{0\}$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

Observación 2.10. El ejemplo anterior pone en evidencia que $T - T \neq 0$, es decir, no siempre existe el inverso aditivo de una aplicación multivaluada y por tanto el conjunto de todas las aplicaciones multivaluadas de U en V, con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas, no es un e.v.

Teorema 2.9. *Sea $T : U \rightrightarrows V$ no vacía, entonces $0_{D(T),V} \preceq T - T$.*

Prueba. En efecto, sea $x \in D(T)$, entonces $Tx \neq \varnothing$, dado $y \in Tx$, $-y \in -Tx$, luego $0_{D(T),V}\ x = \{0\} = \{y - y\} \subseteq Tx - Tx$, Por tanto $0_{D(T),V} \preceq T - T$.

■

2.6. Aplicaciones Multivaluadas Acotadas

Ahora conoceremos a las aplicaciones multivaluadas T cuyas imágenes son acotadas, es decir tales que Tx es acotado, entonces existirán algunas que posean también el rango acotado, pero para poder hablar de conjuntos acotados es necesario que en el conjunto de llegada esté definida una métrica o una norma, sin embargo, para el conjunto de partida no hay necesidad de tener definida una métrica o norma en el, solo bastará que sea un espacio topológico para poder definir otro concepto importante relacionado con la acotación, la acotación local.

Ejemplo 2.20. Si vemos a $\mathbb{N}$ como subespacio normado, con la norma usual heredada de $\mathbb{R}$ tenemos que en los ejemplos 2.5 y 2.6, los conjuntos $Ix = \{x\}$ y $\Lambda n = \{1, 2, \cdots, n\}$ son acotados paar todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \ N$, pero $R(I) = \mathbb{R}$ y $R(\Lambda) = \mathbb{N}$ no son acotados.

Ejemplo 2.21. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces en los ejemplos 2.7 y 2.8 tenemos que $\varphi_-(x)$, $\varphi_+(x)$, $\overline{\varphi}_-(x)$ y $\overline{\varphi}_+(x)$ no son acotados, y su rango tampoco lo es, pero esto no implica que $\varphi_-, \varphi_+, \overline{\varphi}_-, \overline{\varphi}_+$ sean lineales, pues de hecho no lo son.

Ejemplo 2.22. En el ejemplo 2.10, $Bt = B_t(0)$ es acotado $\forall t \in \langle 0, 1]$ y su rango $R(\varphi) = B_1(0)$ también lo es. Además, para cada $r \in [0, 1]$, dado $\varepsilon > 0$, sea $V_r = \langle r - \varepsilon, r + \varepsilon\rangle \cap [0, 1]$ una vecindad de r, entonces $B(V_r) = \bigcup_{t \in V_r} Bt = \bigcup_{t \in V_r} B_t(0) \subseteq B_1(0)$, es decir $B(V_r)$ es acotado.

Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un espacio normado y sea $T : X \rightrightarrows Y$.

Definición 2.14. Decimos que T es acotado si Tx es acotado en Y, para todo $x \in D(T)$, es decir, si para cada $x \in D(T)$, existe $r_x > 0$ tal que $\|u\| \leqslant r_x \ \forall u \in Tx$.

Definición 2.15. T es globalmente acotado si $T(X) = T(D(T)) = R(T)$ es acotado en Y, es decir, si existe $r > 0$ tal que $\|u\| \leqslant r$ para todo $u \in R(T)$.

Definición 2.16. Si X es un espacio topológico, decimos que T es localmente acotado en $x \in X$, si existe una vecindad de x, $V_x \subset X$ tal que $T(V_x)$ es acotado

en Y, es decir existe $r_x > 0$ tal que $\|u\| \leqslant r_x$ para todo $u \in T(V_x)$ Decimos que T es localmente acotado en X, si es localmente acotado para todo $x \in X$.

Observación 2.11. Del Ejemplo 2.20, I e Λ son acotadas pero no globalmente acotadas, sin embargo son localmente acotadas.

Observación 2.12. Las aplicaciones φ_-, φ_+, $\overline{\varphi}_-$, $\overline{\varphi_+}$, como ya lo habiamos notado en el Ejemplo 2.21, no son acotadas, por ende tampoco localmente ni globalmente acotadas.

Observación 2.13. La aplicación multivaluada B, del Ejemplo 2.22 es acotada, globalmente acotada y tambien es localmente acotada.

Estas definiciones de acotación de una función multivaluada están relacionadas.

Teorema 2.10. *Si $T : X \rightrightarrows Y$ se cumplen las siguientes implicaciones:*

a) T es globalmente acotada.

b) T es localmente acotada.

c) T es acotada.

Prueba.

- $(a \Rightarrow b)$ Puesto que T es globalmente acotado, entonces $T(D(T))$ es acotado. Sean $x \in D(T)$ y $V_x \subseteq X$ una vecindad de x, como $T(V_x) \subseteq T(X)$, se tiene que $T(V_x)$ es acotado y por tanto T es localmente acotado.
- $(b \Rightarrow c)$ Si T es localmente acotado, entonces dado $x \in X$, existe $V_x \subseteq X$, vecindad de x tal que $T(V_x)$ es acotado. Ya que $x \in V_x$, tenemos $Tx \subseteq T(V_x)$, luego Tx es acotado. Como x fue elegido arbitramiamente, T es acotado.

■

Observación 2.14. Se puede deducir del teorema anterior que si una aplicación no es acotada, entonces tampoco es globalmente ni localmente acotada.

Ejemplo 2.23. Imagen inversa de un funcional lineal:

Sea X un espacio de Banach de dimensión mayor o igual a 2, $f \in X^*$ no nula. Como en el Ejemplo 2.4 sea $T_f : \mathbb{R} \rightrightarrows X$ definida por $T_f r = f^{-1}\{r\}$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Para esta aplicación $D(T_f) = \mathbb{R}$ ya que si f es no nula, entonces es sobreyectiva, luego para todo $r \in \mathbb{R}$, se tiene $f^{-1}\{r\} \neq \varnothing$, para el rango tenemos $R(T_f) = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} T_f r = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} f^{-1}\{r\} = X$ y finalmente para el gráfico se tiene $G(T_f) = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times X / x \in f^{-1}\{r\}\} = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times X / \langle f, x\rangle = r\}$. Observemos que $0 \times \mathrm{Nuc}(f) \subseteq G(T_f)$.

Veamos ahora si T_f acotada, localmente acotada o globalmente acotada o no lo está.

Como f es sobreyectiva, existe $x_1 \in X$ tal que $\langle f, x_1\rangle = 1$, entonces evidentemente $\mathcal{L}(x_1) = \mathbb{R}$, luego si $r \in \mathbb{R}$ se tiene $\langle f, rx_1\rangle = r$, así dado $x \in T_f r = f^{-1}\{r\}$, tenemos que $r = f(x) = f(rx_1)$, de donde $x - rx_1 \in Nuc(f)$, es decir $x \in rx_1 + Nuc(f)$. Por otra parte, $\langle f, rx_1 + y\rangle = r$, $\forall y \in Nuc(f)$, entonces $x_1 + Nuc(f) \subseteq f^{-1}\{r\}$, por lo que obtenemos $f^{-1}\{r\} = rx_1 + Nuc(f)$ para todo $x_1 \in X$ tal que $\langle f, x_1\rangle = 1$ y esto nos permite concluir que $T_f r = rf^{-1}\{1\} + Nuc(f)$. Además ya que $dim(X) \geqslant 2$, la dimensión del núcleo debe ser mayor o igual a 1 y por ende $T_f r$ no sería acotado para todo $r \in \mathbb{R}$, lo que implica que tampoco sería globalmente ni localmente acotado.

El siguiente ejemplo es común verlo en un curso de Análisis Funcional como consecuencia del teorema de Hahn - Banach.

Ejemplo 2.24. Conjunto Dualidad:

Sea X un espacio de Banach, definamos la Aplicación u Operador Dualidad $J_X : X \rightrightarrows X^*$ como $J_X x = J_x = \{u \in X^* / \langle u, x\rangle = \|x\|^2 = \|u\|^2\}$ y gracias al Corolario 1.2, tenemos $D(J_X) = X$.

Para ver que J_X es acotada es suficiente observar que dado $x \in X$ se tiene $\|u\| = \|x\|$ para todo $u \in J_X x$, es decir J_X está incluida en la esfera de radio $\|x\|$ en X^*. En particular $J_X 0 = \{u \in X^* / \langle u, 0\rangle = \|0\|^2 = \|u\|^2\} = \{0\}$.

J_X no es globalmente acotada, para ver ello, procedamos por el absurdo, es decir, supongamos que J_X es globalmente acotada, entonces existe $r > 0$ tal que $\|u\| \leqslant r$ para todo $u \in R(J_X)$. Sea $x \in X$, dado $u \in J_X x \subseteq R(J_X)$ tenemos $\|u\| = \|x\| \leqslant r$, luego $\|x\| \leqslant r$ para todo $x \in X = D(J_X)$ lo cual es absurdo, por tanto J_X no es globalmente acotada.

Finalmente veamos si J_X es localmente acotada.

Sea $x \in X$, dado $r > 0$, consideremos $B_r(x)$ la bola abierta de radio r y centro x, para esta vecindad de x, probaremos que $J_X(B_r(x))$ es acotado.

En efecto, dado $u \in J_X(B_r(x)) = \bigcup_{y \in B_r(x)} J_X\ y$, existe $y_0 \in B_r(x)$ tal que $u \in J_X\ y_0$, de donde $\|u\| = \|y_0\|$ pero, como $y_0 \in B_r(x)$ tenemos $\|y_0 - x\| < r$, lo que implica que $\|y_0\| < \|x\| + r$, así tomando $r_x = \|x\| + r$, se tiene $\|u\| \leqslant r_x$ para todo $u \in J_X(B_r(x))$, es decir $J_X(B_r(x))$ es acotada y por tanto J_X es localmente acotado en $x \in X$, pero como x fue arbitrario se concluye que J_X es localmente acotada en X.

Capítulo 3

Operadores θ-monótonos

3.1. Operadores Monótonos

En adelante X representará a un espacio de Banach y obviamente X^* su espacio dual topológico, además, cuando escribamos $T : X \rightrightarrows X^*$, se debe entender que T es un operador multivaluado que va de X en X^* y en cuanto al producto dualidad, escribiremos $\langle\ ,\ \rangle$ en lugar de $\langle\ ,\ \rangle_{X^*,X}$.

Definición 3.1. Operador Monótono
Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, decimos que:

i) T es monótono si $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant 0$ para todo $(x, u), (y, v) \in G(T)$.

ii) T es estrictamente monótono si $\langle u - v, x - y\rangle > 0 \ \ \forall (x, u), (y, v) \in G(T)$ tal que $x \neq y$.

Este tipo de operadores monótonos aparecieron por la década del 60 y se conocen como operadores monótonos en el sentido de Minty-Browder o símplemente operadores monótonos. Ver [35], [14], [15] y [16].
Como se puede notar, la frase "en el sentido de" hace referencia a que no solo existe un tipo de operador monótono multivaluado y eso es verdad, en cierta forma. De hecho existen operadores que tienen propiedades muy similares a los operadores monótonos y los conoceremos en breve.

El siguiente ejemplo nos servirá como guía para buscar otros ejemplos.

Ejemplo 3.1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ univaluado tal que $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ donde $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$. Sean $(x, y), (u, v) \in D(T)$ entonces:

$$\begin{aligned}
&\langle T(x,y) - T(u,v), (x,y) - (u,v)\rangle \\
&= \langle (ax + by, cx + dy) - (au + bv, cu + dv), (x - u, y - v)\rangle \\
&= \langle (a(x - u) + b(y - v), c(x - u) + d(y - v)), (x - u, y - v)\rangle \\
&= a(x - u)^2 + b(x - u)(y - v) + c(x - u)(y - v) + d(y - v)^2 \\
&= a(x - u)^2 + (b + c)(x - u)(y - v) + d(y - v)^2
\end{aligned}$$

Claramente, si $b+c = 0$, $a \geqslant 0$ y $d \geqslant 0$, entonces T es monótono y es estrictamente monótono si $b + c = 0$, $a > 0$ y $d > 0$.

Ejemplo 3.2. Sean $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, sea $T_0 : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ un operador univaluado tal que $T_0(x, y) = (2ax + by, -bx + 2ay)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = D(T_0)$, del ejemplo anterior, T_0 es monótono ya que para todo $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2 = D(T_0)$ se tiene:

$$\langle T_0(x,y) - T_0(u,v), (x,y) - (u,v)\rangle = 2a(x-u)^2 + 2a(y-v)^2 \geqslant a\|(x,y) - (u,v)\|^2.$$

Este tipo de operador es conocido como fuertemente monótono. Ver [42] y [44].

Definición 3.2. Operador Fuertemente Monótono

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, decimos que T es fuertemente monótono si existe $r > 0$ tal que

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant r\|x - y\|^2 \ \text{ para todo } (x, u), (y, v) \in G(T)$$

Ejemplo 3.3. Operador Ortogonal

Sea $(\ \cdot\ )^{\perp} : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ definido como $(x, y)^{\perp} = (-y, x)$, este operador univaluado es conocido como el operador ortogonal. Considerando $a = d = 0$ y $b = -1 = -c$, del Ejemplo 3.1, tenemos

$$\big\langle (x,y)^{\perp} - (u,v)^{\perp}, (x,y) - (u,v)\big\rangle = 0$$

Por tanto, el operador ortogonal es monótono pero no es fuertemente monótono.

Observación 3.1. Dado $r > 0$, definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(t) = rt$, puesto que $r\|x-y\|^2 = r\|x-y\| \cdot \|x-y\|$, haciendo $t = \|x-y\|$ tenemos

$$r\|x-y\|^2 = f(\|x-y\|) \cdot \|x-y\|$$

Así, imponiendo algunas condiciones adicionales a f se obtiene el concepto de operador uniformemente monótono. Ver [25].

Definición 3.3. Operador Uniformemente Monótono
Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, decimos que T es uniformemente monótono si existe una función creciente $f : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$, tal que $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ satisfaciendo:

$$\langle u-v, x-y\rangle \geqslant f(\|x-y\|)\|x-y\|; \text{ para todo } (x,u),(y,v) \in G(T)$$

Los tres tipos de operadores monótonos vistos hasta ahora se encuentran relacionados por el siguiente:

Teorema 3.1. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado, entonces se cumplen las siguientes implicaciones:*

a) T es fuertemente monótono.

b) T es uniformemente monótono.

c) T es monótono.

Prueba. Asumiendo que T es fuertemente monótono se tiene que existe $r > 0$ tal que $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant r\|x-y\|^2$ para todo $(x,u),(y,v) \in G(T)$, luego por la Observación 3.1, T es uniformemente monótono. Supongamos ahora que T es uniformemente monótono, entonces existe $f : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ creciente, tal que para todo $(x,u),(y,v) \in G(T)$ se tiene

$$\langle u-v, x-y\rangle \geqslant f(\|x-y\|)\|x-y\| \geqslant 0$$

Entonces T es monótono. ■

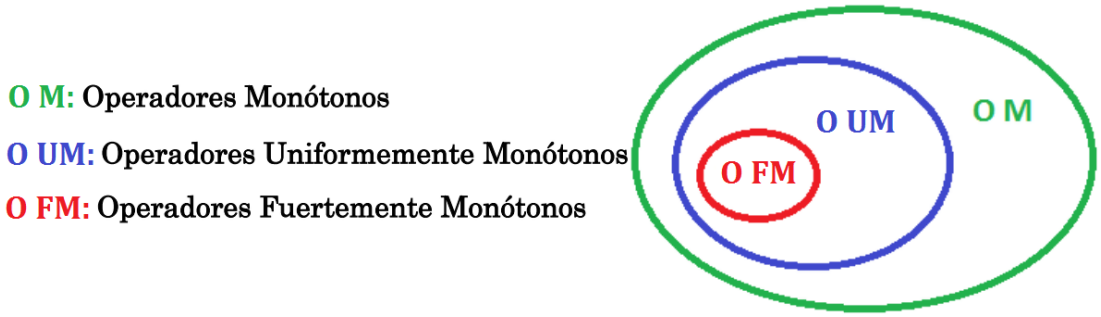


Figura 3.1: Diagrama de inclusión de los tres tipos de operadores monótonos.

3.2. De la monotonía a la θ-monotonía

Desde mediados de la década del 90 y hasta la actualidad, contrario a lo anterior, la tendencia es extender la definición de operador monótono en el sentido de Minty-Browder, apareciendo por ejemplo los operadores C-monótonos relajados. Ver [44].

Definición 3.4. Operador C- Monótono Relajado

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, dado $C > 0$ decimos que T es C-monótono relajado si

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant -C\|x - y\|^2 \text{ para todo } (x, u), (y, v) \in G(T)$$

Este tipo de operador agrupa una amplia variedad operadores.

Teorema 3.2. *Todo operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ es C-monótono relajado, para algún $C > 0$.*

Prueba. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ definido para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ donde $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$. Por el Ejemplo 3.1, tenemos:

$$\langle T(x, y) - T(u, v), (x, y) - (u, v)\rangle = a(x - u)^2 + (b + c)(x - u)(y - v) + d(y - v)^2$$

Haciendo $\alpha = x - u$ y $\beta = y - v$ en lo anterior se obtiene:

$$\langle T(x, y) - T(u, v), (x, y) - (u, v)\rangle = a\alpha^2 + (b+c)\alpha\beta + d\beta^2 \geqslant a\alpha^2 - |b+c||\alpha\beta| + d\beta^2$$

$$\geqslant a|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|b+c|(|\alpha|^2+|\beta|^2) + d|\beta|^2 = (a - \frac{1}{2}|b+c|)|\alpha|^2 + (d - \frac{1}{2}|b+c|)|\beta|^2$$

$$= (a - \frac{1}{2}|b+c|)\alpha^2 + (d - \frac{1}{2}|b+c|)\beta^2 \geqslant \min\{a - \frac{1}{2}|b+c|, d - \frac{1}{2}|b+c|\}(\alpha^2+\beta^2)$$

$$\geqslant -|\min\{a - \frac{1}{2}|b+c|, d - \frac{1}{2}|b+c|\}|\|(\alpha,\beta)\|^2$$

Entonces para todo $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$ se tiene:

$$\langle T(x,y) - T(u,v), (x,y) - (u,v)\rangle \geqslant -|\min\{a - \frac{1}{2}|b+c|, d - \frac{1}{2}|b+c|\}|\|(x,y) - (u,v)\|^2$$

Si $\min\{a - \frac{|b+c|}{2}, d - \frac{|b+c|}{2}\} = 0$, entonces T es C-monótono relajado $\forall\ C > 0$.
Si $\min\{a - \frac{|b+c|}{2}, d - \frac{|b+c|}{2}\} \neq 0$, tenemos que T es C-monótono relajado para $C = |\min\{a - \frac{|b+c|}{2}, d - \frac{|b+c|}{2}\}| > 0$.

■

Si extendemos la Definición 3.4 a un exponente distinto de 2 pero positivo, tenemos el concepto de operador γ-monótono. Ver [24] y [40]).

Definición 3.5. Operador γ- Monótono

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, dado $\gamma > 0$, T es γ- monótono si existe $C > 0$ tal que

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant -C\|x - y\|^\gamma \text{ para todo } (x,u),(y,v) \in G(T)$$

Ejemplo 3.4. Sean $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, sea $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ un operador univaluado tal que $T_1(x,y) = (-ax + by, -bx - ay)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 = D(T_1)$.
Como T_1 es lineal, por el Teorema 3.2 se tiene que es T_1 es a-monótono relajado o 2-monótono. Pero

$$\langle T_1(x,y) - T_1(u,v), (x,y) - (u,v)\rangle = -a(x-u)^2 - a(y-v)^2 \leqslant 0$$

Por tanto T_1 no es monótono.

En particular, si $\gamma = 1$, el operador es conocido como ε-monótono. Ver [23] y [21].

Definición 3.6. Operador ε-Monótono

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, dado $\varepsilon > 0$, decimos que T es ε-monótono si

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant -2\varepsilon\|x - y\| \text{ para todo } (x,u),(y,v) \in G(T)$$

Ejemplo 3.5. Dado $\varepsilon > 0$, $b \in \mathbb{R}$, sea $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ el operador univaluado definido como:

$$T_2(x,y) = \begin{cases} (x+by, -bx-y) & ;\text{Si } (x,y) \in [-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}] \times [-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}] \\ \varnothing & ;\text{ Si } (x,y) \notin [-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}] \times [-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}] \end{cases}$$

Veamos que T es ε-monótono. En efecto, del Ejemplo 3.1 tenemos:

$$\langle T_2(x,y) - T_2(u,v), (x,y) - (u,v) \rangle = (x-u)^2 - (y-v)^2 \geqslant -(x-u)^2 - (y-v)^2 \tag{3.1}$$

Si $z, w \in [-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}]$, entonces $|z-w| \in [0, \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}]$, luego $-(z-w)^2 \geqslant -2\varepsilon^2$, así: $-(x-u)^2 - (y-v)^2 \geqslant -4\varepsilon^2$, por lo cual $-\|(x,y) - (u,v)\| \geqslant -2\varepsilon$.
Luego en 3.1 tenemos:

$$-(x-u)^2 - (y-v)^2 = -\|(x,y) - (u,v)\|\|(x,y) - (u,v)\| \geqslant -2\varepsilon\|(x,y) - (u,v)\|$$

Por lo tanto:

$$\langle T_2(x,y) - T_2(u,v), (x,y) - (u,v) \rangle \geqslant -2\varepsilon\|(x,y) - (u,v)\| \quad \forall (x,y), (u,v) \in D(T)$$

Esto prueba que T_2 es ε-monótono pero no es monótono.

Observación 3.2. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ monótono, entonces $\forall (x,u), (y,v) \in G(T)$ se tiene $\langle u-v, x-y \rangle \geqslant 0 \geqslant -2\varepsilon\|x-y\|$ para todo $\varepsilon > 0$, es decir, el operador también es ε-monótono. Además de ello, tenemos que

$$\langle u-v, x-y \rangle \geqslant 0 \geqslant -C\|x-y\|^\gamma$$

para todo $C > 0$, $\gamma > 0$, luego el operador es γ-monótono. Esto muestra que todo operador monótono es ε-monótono o en general, γ-monótono, pero los dos últimos ejemplos ponen en evidencia que lo recíproco no es cierto, es decir, existen operadores que son ε-monótonos o γ-monótonos pero no son monótonos.

En el año 2009, Iusem, Kassay y Sosa publicaron un artículo donde se dió a conocer el concepto de operador pre-monótono. Ver [22].

Definición 3.7. Operador pre-Monótono

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, T es pre-Monótono si existe $\sigma : D(T) \to [0, +\infty\rangle$ tal que

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant -\sigma(y)\|x - y\| \text{ para todo } (x, u), (y, v) \in G(T)$$

Observación 3.3. Si T es ε-monótono, definiendo $\forall y \in D(T)$, $\sigma(y) = 2\varepsilon$, tenemos $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant -2\varepsilon\|x - y\| = -\sigma(y)\|x - y\|$, $\forall (x, u), (y, v) \in G(T)$, de donde tenemos que T es pre-monótono. De esto podemos decir que todo operador ε-monótono es pre-monótono, pero lo recíproco no es cierto como veremos en el siguiente ejemplo adaptado de [22].

Ejemplo 3.6. Dado $x > 0$, existe un único $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n_x - 1 = [\![\sqrt{x}\,]\!]$, es decir $n_x - 1 \leqslant \sqrt{x} < n_x$, luego $(n_x - 1)^2 \leqslant x < n_x^2$. Como

$$(n_x - 1)^2 = n_x^2 - n_x - (n_x - 1) \leqslant n_x^2 - n_x < n_x^2 - n_x + \frac{1}{2} \leqslant n_x^2$$

Se tiene que $(n_x - 1)^2 \leqslant x < n_x^2 - n_x + \frac{1}{2}$ o $n_x^2 - n_x + \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant n_x^2$.

Definamos $\varphi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ (univaluado) donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida para cada $x \in \mathbb{R}$ como:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & ;\text{Si } x \leqslant 0 \\ x - (n_x - 1)^2 & ;\text{ Si } (n_x - 1)^2 \leqslant x < n_x^2 - n_x + \frac{1}{2} \\ n_x^2 - x & ;\text{ Si } n_x^2 - n_x + \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant n_x^2 \end{cases}$$

Sea $x > 0$:

Si $(n_x - 1)^2 \leqslant x < n_x^2 - n_x + \frac{1}{2}$ entonces

$$0 \leqslant \varphi(x) = x - (n_x - 1)^2 \leqslant x$$

Si $n_x^2 - n_x + \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant n_x^2$ entonces

$$0 \leqslant \varphi(x) = n_x^2 - x \leqslant n_x^2 - (n_x^2 - n_x + \frac{1}{2}) = n_x - \frac{1}{2} \leqslant n_x^2 - n_x + \frac{1}{2} \leqslant x$$

Por tanto $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Notemos además que $\varphi(x) \geqslant 0$ y $x - \varphi(x) \geqslant 0$ para todo $x > 0$, esto nos lleva a definir la función $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $\sigma(y) = \text{máx}\{\varphi(y)\ , y - \varphi(y)\}$.

Observemos también que si $y \leqslant 0$, entonces por definición $\varphi(y) = 0$, de donde deducimos que $\sigma(y) \geqslant 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Veamos ahora que φ es pre-monótono.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:

i) Si $x, y \leqslant 0$: $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$, luego $\langle \varphi(x) - \varphi(y), x - y \rangle = 0 \geqslant -\sigma(y)\|x-y\|$.

ii) Si $x \leqslant 0$ y $y > 0$: $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(y) = y - (n_y - 1)^2$ o $\varphi(y) = n_y^2 - y$, entonces $\langle \varphi(x) - \varphi(y), x - y \rangle = \langle -\varphi(y), x - y \rangle > 0 \geqslant -\sigma(y)\|x - y\|$.

iii) Si $y \leqslant 0$ y $x > 0$: $\varphi(y) = 0$ y $\varphi(x) = x - (n_x - 1)^2$ o $\varphi(x) = n_x^2 - x$, entonces $\langle \varphi(x) - \varphi(y), x - y \rangle = \langle \varphi(x), x - y \rangle > 0 \geqslant -\sigma(y)\|x - y\|$.

iv) Si $x > 0$ y $y > 0$, analicemos tres casos:

   a) Si $x = y$: $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces $\langle \varphi(x) - \varphi(y), x - y \rangle = 0 \geqslant -\sigma(y)\|x-y\|$.

   b) Si $x > y$: $\varphi(x) - \varphi(y) \geqslant -\varphi(y) \geqslant -\operatorname{máx}\{\varphi(y), y - \varphi(y)\} = -\sigma(y)$, luego como $x > y$ se tiene $x - y > 0$, de donde $(\varphi(x) - \varphi(y)) \cdot (x - y) \geqslant -\sigma(y)(x - y)$, es decir $\langle \varphi(x) - \varphi(y), x - y \rangle \geqslant -\sigma(y)\|x - y\|$.

   c) Si $x < y$: $\varphi(y) - \varphi(x) \geqslant \varphi(y) - x > \varphi(y) - y$, multiplicando por -1 a la desigualdad anterior tenemos $\varphi(x) - \varphi(y) \leqslant y - \varphi(y) \leqslant \operatorname{máx}\{\varphi(y), y - \varphi(y)\} = \sigma(y)$. Además como $x - y < 0$, tenemos $(\varphi(x) - \varphi(y)(x - y) \geqslant -\sigma(y)(x - y)$ es decir $\langle \varphi(x) - \varphi(y), x - y \rangle \geqslant -\sigma(y)\|x - y\|$.

Por tanto, de todos los casos analizados concluimos que φ es pre-monótono.

Probaremos ahora que φ no es ε-monótono.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $x_n = n^2$ y $y_n = n^2 - n + \frac{1}{2}$, entonces como $\sqrt{x_n} = n = n_{x_n} - 1$, se tiene que $n_{x_n} = n+1$, así $x_n = (n_x - 1)^2$ de donde deducimos que $\varphi(x_n) = x_n - (n_x - 1)^2 = 0$. Por otra parte $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \leqslant n^2 - n \leqslant n^2 - n + \frac{1}{2} = y_n < n^2$, entonces $n - 1 \leqslant \sqrt{y_n} < n$, de donde tenemos $n_{y_n} = n$ y por tanto $y_n = n_{y_n}^2 - n_{y_n} + \frac{1}{2}$, así $\varphi(y_n) = n_{y_n}^2 - y = n_{y_n}^2 - (n_{y_n}^2 - n_{y_n} + \frac{1}{2}) = n_{y_n} - \frac{1}{2}$.

Procedamos por el absurdo y supongamos que φ es ε-monótono, entonces:

$\langle \varphi(x) - \varphi(y), x - y \rangle \geqslant -2\varepsilon \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, en particular para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\langle \varphi(x_n) - \varphi(y_n), x_n - y_n \rangle \geqslant -2\varepsilon \|x_n - y_n\|$, pero $\varphi(x_n) - \varphi(y_n) = 0 - (n - \frac{1}{2}) = -(n - \frac{1}{2})$ mientras que $x_n - y_n = n^2 - (n^2 - n + \frac{1}{2}) = n - \frac{1}{2}$. Como $\langle \varphi(x_n) - \varphi(y_n), x_n - y_n \rangle \geqslant -2\varepsilon \|x_n - y_n\|$ equivale a $-(n - \frac{1}{2}) \cdot (n - \frac{1}{2}) \geqslant -2\varepsilon(n - \frac{1}{2})$, tenemos que $2\varepsilon \geqslant n - \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, lo cual es absurdo. De donde φ no es ε-monótono.

Alizadeh, Hadjisavvas y Roohi, tres años después de aparecer los operadores pre-monótonos definen los operadores σ-monótonos(ver [2], [3], [4], [5]).

Definición 3.8. Operador σ-Monótono

Sean $T : X \rightrightarrows X^*$ y $\sigma : D(T) \to [0, +\infty\rangle$ una función, T es σ-Monótono si:

$$\langle u - v, x - y \rangle \geqslant -\min\{\sigma(x), \sigma(y)\} \|x - y\| \text{ para todo } (x, u), (y, v) \in G(T)$$

Teorema 3.3. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, T es σ-monótono si y solo si es pre-monótono.*

Prueba. Si T es σ-monótono, entonces $\langle u - v, x - y \rangle \geqslant -\min\{\sigma(x), \sigma(y)\} \|x - y\|$ para todo $(x, u), (y, v) \in G(T)$, donde $\sigma : D(T) \to [0, +\infty\rangle$ es una función, pero como $\min\{\sigma(x), \sigma(y)\} \leqslant \sigma(y)$ entonces $-\min\{\sigma(x), \sigma(y)\} \geqslant -\sigma(y)$ y por tanto $\langle u - v, x - y \rangle \geqslant -\sigma(y) \|x - y\|$, es decir, T es pre-monótono.
Por otra parte, si T es pre-monótono, existe $\sigma : D(T) \to [0, +\infty\rangle$ tal que:

$$\langle u - v, x - y \rangle \geqslant -\sigma(y) \|x - y\| \text{ para todo } (x, u), (y, v) \in G(T) \tag{3.2}$$

Sean $x, y \in X$, si $x = y$, entonces $\sigma(x) = \sigma(y) = \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ de donde T es σ-monótono. Por el contrario, si $x \neq y$, notemos que al intercambiar sus posiciones en 3.2 tenemos:

$$\langle v - u, y - x \rangle \geqslant -\sigma(x) \|y - x\| \text{ para todo } (y, v), (x, u) \in G(T) \tag{3.3}$$

luego, de 3.2 y 3.3 tenemos:

$$\frac{\langle u - v, x - y \rangle}{\|x - y\|} \geqslant -\sigma(y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\langle v - u, y - x \rangle}{\|y - x\|} \geqslant -\sigma(x)$$

o lo que es equivalente:

$$-\frac{\langle u-v, x-y\rangle}{\|x-y\|} \leqslant \sigma(y) \qquad \text{y} \qquad -\frac{\langle u-v, x-y\rangle}{\|x-y\|} \leqslant \sigma(x)$$

Entonces:

$$-\frac{\langle u-v, x-y\rangle}{\|x-y\|} \leqslant \text{mín}\{\sigma(x), \sigma(y)\}$$

Por lo que concluimos $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant -\text{mín}\{\sigma(x), \sigma(y)\}\|x-y\|$, es decir T es σ-monótono.

■

El teorema anterior nos dice que el concepto de operador pre-monótono y operador σ-monótono coinciden, por ello László Szilard en [32] menciona a los operadores pre-monótonos como σ-monótonos, pero además de ello define a los operadores θ-monótonos como una extensión o generalización de todas las clases de operadores ya mencionados.

Definición 3.9. Operador θ-Monótono

Sean $T : X \rightrightarrows X^*$ y $\theta : X^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $\theta(x, y) = \theta(y, x)$ para todo $x, y \in D(T)$, decimos que T es θ-Monótono si:

$$\langle u-v, x-y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x-y\| \text{ para todo } (x, u), (y, v) \in G(T)$$

Se dice que T es estrictamente θ-Monótono si:

$$\langle u-v, x-y\rangle > \theta(x, y)\|x-y\| \text{ para todo } (x, u), (y, v) \in G(T) \text{ con } x \neq y$$

Teorema 3.4. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, si T es fuertemente monótono, uniformemente monótono, monótono en el sentido de Minty-Browder, C-monótono relajado, γ-monótono, ε-monótono o σ-monótono, entonces T es θ-monótono.*

Prueba.

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador fuertemente monótono, entonces gracias al Teorema 3.1, T es uniformemente monótono y también monótono.

En forma explícita, si $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x-y\|$, $\forall (x, u), (y, v) \in G(T)$, definiendo $\theta(x, y) = r\|x-y\|$ $\forall x, y \in D(T)$; $r > 0$ tenemos el concepto de

fuertemente monótono; si $\theta(x,y) = f(\|x-y\|)$, para todo $x \neq y \in D(T)$ y $\theta(x,x) = 0,\ \forall x \in D(T)$, donde $f : [0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ es una función creciente tal que $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, tenemos el concepto de operador uniformemente monótono y obviamente definiendo $\theta(x,y) = 0,\ \forall x,y \in D(T)$ tenemos el concepto de operador monótono en el sentido de Minty-Browder.

De la Observación 3.3, si T es ε-monótono, entonces es pre-monótono. A su vez, por el Teorema 3.3, ser pre-monótono implica que existe $\sigma : D(T) \to [0,+\infty\rangle$ tal que $\forall\ (x,u),(y,v) \in G(T)$ se tenga $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant -\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\|x-y\|$, luego, al definir $\theta : X^2 \to \mathbb{R}$ como $\theta(x,y) = -\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$ se tiene que $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant \theta(x,y)\|x-y\|$, es decir T es θ-monótono. Finalmente dado $\gamma > 0$, si T es γ-monótono, existe $C > 0$ tal que para todo $(x,u),(y,v) \in G(T)$ se tenga $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant -C\|x-y\|^{\gamma}$ y definiendo $\theta : X^2 \to \mathbb{R}$ para todo $x,y \in D(T)$ como $\theta(x,y) = -C\|x-y\|^{\gamma-1}$ conluimos que T es θ-monótono.

■

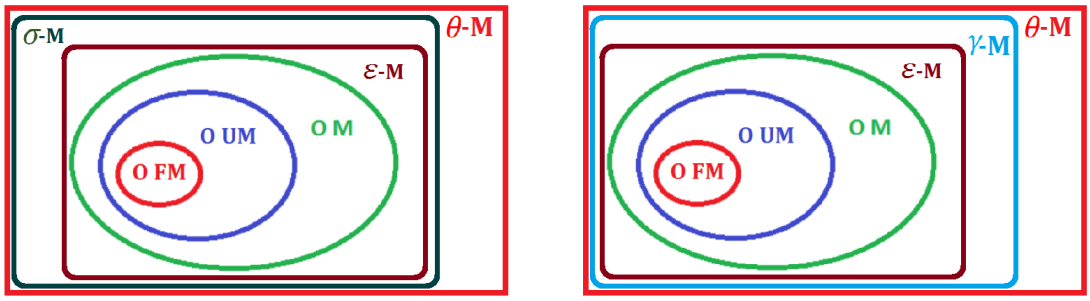


Figura 3.2: La θ-monotonía y todas las clases de operadores vistos hasta ahora.

El recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir, existen operadores que son θ-monótonos pero no son fuertemente monótonos, uniformemente monótonos, monótono, C-monótonos relajados, γ-monótonos, ε-monótonos o σ-monótonos. Pero de la Figura 3.2 notamos que es suficiente mostrar solo dos operadores θ-monótonos, uno que no sea σ-monótono y otro que no sea γ-monótono.

Los ejemplos mostrados a continuación fueron tomados y adaptado de [32].

Ejemplo 3.7. Sean $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, y $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ como en el Ejemplo 3.4, es decir, tal que $T_1(x, y) = (-ax + by, -bx - ay)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = D(T_1)$. Probaremos que este operador es θ-monótono pero no es σ-monótono.

T_1 **no es σ-monótono**:

Supongamos que T_1 es σ-monótono, entonces existe una función $\sigma : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty\rangle$ tal que para todo (x, y), $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle T_1(x, y) - T_1(u, v), (x, y) - (u, v)\rangle \geqslant -\sigma(u, v)\|(x, y) - (u, v)\|$$

Además $\langle T_1(x, y) - T_1(u, v), (x, y) - (u, v)\rangle = -a(x - u)^2 - a(y - v)^2$, luego :

$-a(x-u)^2-a(y-v)^2 \geqslant -\sigma(u, v)\|(x, y)-(u, v)\| = -\sigma(u, v)\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$

De donde :

$$\sigma(u, v) \geqslant \frac{a[(x - u)^2 + (y - v)^2]}{\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}} = a\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

Fijando $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y haciendo $y = v$, tenemos $\sigma(u, v) \geqslant a|x - u|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, luego si tomamos límites obtenemos $\sigma(u, v) \geqslant \lim\limits_{x\to+\infty} a|x-u| = +\infty$, lo que es absurdo, por tanto T_1 no es σ-monótono.

Finalmente, del Ejemplo 3.4, tenemos que T_1 es a-monótono relajado y por el Teorema 3.4 concluimos que T_1 **es θ-monótono**.

Recordemos que por el Teorema 3.2, todo operador lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es C-monótono relajado, para algún $C > 0$, pero esto no necesariamente ocurre cuando el operador no es lineal, como veremos enseguida.

Ejemplo 3.8. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ univaluado definido como $T(x, y) = (-y, x^2)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

T **no es C-monótono relajado**: Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&\langle T(x, y) - T(u, v), (x, y) - (u, v)\rangle = \big\langle(-y, x^2) - (-v, u^2), (x - u, y - v)\big\rangle \\
&= \big\langle(-y + v, x^2 - u^2), (x - u, y - v)\big\rangle = -(x - u)(y - v) + (y - v)(x^2 - u^2) \\
&= (x - u)(y - v)(x + u - 1).
\end{aligned}$$

Supongamos que existe $C > 0$ tal que T es C-monótono relajado, entonces:

$$(x-u)(y-v)(x+u-1) \geqslant -c\|(x,y)-(u,v)\|^2 = -c[(x-u)^2+(y-v)^2]$$

para todo $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$, en particular, si $(x,y) \neq (u,v)$, tenemos:

$$c \geqslant \frac{(x-u)(y-v)(1-x-u)}{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

Haciendo $x-u = y-v \neq 0$ en la expresión anterior tenemos $c \geqslant \frac{1}{2}(1-x-u)$ para todo $x \neq u \in \mathbb{R}$, en particular para $u = -2x$ se tiene $c \geqslant \frac{1}{2}(1+x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que es absurdo, por tanto, para ningún $C > 0$ se tiene que T es C-monótono relajado.

T **es θ-monótono**:

Como $\langle T(x,y)-T(u,v),(x,y)-(u,v)\rangle = (x-u)(y-v)(x+u-1)$ entonces:

$$\frac{\langle T(x,y)-T(u,v),(x,y)-(u,v)\rangle}{\|(x,y)-(u,v)\|} = \frac{(x-u)(y-v)(x+u-1)}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}$$

$$\geqslant \frac{-|(x-u)(y-v)(x+u-1)|}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}} = \frac{-|x-u||y-v||x+u-1|}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}|x+u-1| = -\frac{1}{2}|x+u-1|\|(x,y)-(u,v)\|$$

Luego, tomando

$$\theta((x,y);(u,v)) = -\frac{1}{2}|x+u-1|\|(x,y)-(u,v)\|$$

tenemos que

$$\frac{\langle T(x,y)-T(u,v),(x,y)-(u,v)\rangle}{\|(x,y)-(u,v)\|} \geqslant \theta((x,y);(u,v))$$

Es decir:

$$\langle T(x,y)-T(u,v),(x,y)-(u,v)\rangle \geqslant \theta((x,y);(u,v))\|(x,y)-(u,v)\|$$

Para todo $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto T es θ-monótono.

Tres años después de aparecer los operadores θ-monótonos, M. Alimohammady y Ayed E. Hashoosh en [1] introducen el concepto de operador α-monótono como una extensión de los operadores θ-monótonos. El lector interesado puede consultar además, [19] y [18]

Definición 3.10. Operador α-Monótono

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ y sea $\alpha : X^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$ para todo $x, y \in D(T)$, entonces decimos que T es α-monótono si:

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \alpha(x, y) \text{ para todo } (x, u), (y, v) \in G(T)$$

Se dice que T es estrictamente α-Monótono si:

$$\langle u - v, x - y\rangle > \alpha(x, y) \text{ para todo } (x, u), (y, v) \in G(T) \text{ con } x \neq y$$

Este nuevo tipo de operador aparentemente extiende el concepto de operador θ-monótono, pero en realidad tales conceptos son equivalentes.

Teorema 3.5. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, T es θ-monótono si y solo si T es α-monótono.*

Prueba. Si T es θ-monótono, entonces $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$ para todo $(x, u), (y, v) \in G(T)$, luego si definimos $\alpha : X^2 \to \mathbb{R}$ para todo $x, y \in X$ como $\alpha(x, y) = \theta(x, y)\|x - y\|$ se tiene $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \alpha(x, y)$, es decir T es α-monótono.

Por otra parte, si T es α-monótono, entonces se tiene $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \alpha(x, y)$ para todo $x, y \in D(T)$, en particular si $x = y$ tenemos $\langle u - v, 0\rangle = 0 \geqslant \alpha(x, x)$ de donde deducimos que $0 \geqslant \alpha(x, x)$ para todo $x \in D(T)$. Luego si definimos:

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(x, y)}{\|x - y\|}; & \text{si: } x \neq y \in X \\ \alpha(x, y); & \text{si: } x = y \in X \end{cases}$$

tenemos que T es θ-monótono.

■

3.3. Funciones θ

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado, de la Definición 3.9, decimos que T es θ-monótono, si existe $\theta : X^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(x, y) = \theta(y, x)$ para todo $x, y \in D(T)$, satisfaciendo $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$ para todo $(x, u), (y, v) \in G(T)$.
Notemos entonces que si $\theta' : X^2 \to \mathbb{R}$ es una función que satisface para todo

$$(x, y) \in X^2 \ : \ \theta'(x, y) = \theta'(y, x) \ , \ \theta(x, y) \geqslant \theta'(x, y)$$

Entonces obviamente T también será θ'-monótono. Pero estas condiciones pueden ser debilitadas sin que el resultado final se altere, solo basta con exigir que $\theta(x, y) \geqslant \theta'(x, y)$ para todo $x \neq y \in D(T)$ ya que si $x = y \in D(T)$, entonces para todo $u, v \in Tx$ tenemos $\langle u - v, x - x\rangle = 0 = \theta(x, x)\|x - x\|$, es decir, el valor de $\theta(x, x)$ es en verdad irrelevante. De igual manera sucede si x o y no pertenecen a $D(T)$, en este caso el valor de $\theta(x, y)$, para nuestros propósitos, nos tiene sin cuidado.
Analicemos ahora como deben ser las funciones θ para que T sea θ-monótono.
Para ello el conjunto donde debe estar bien definida la función θ es:

$$X_T^2 = \{(x, y) \in D(T)^2 \subseteq X^2 / x \neq y\}$$

Notemos que si $(x, y) \in X_T^2$, entonces $x, y \in D(T)$ con $x \neq y$, luego $(y, x) \in X_T^2$.
Por otra parte, el subconjunto de $\mathcal{F}(X^2, \mathbb{R})$ al que debe pertenecer θ es:

$$\mathcal{F}_S(X^2, \mathbb{R}) = \{f : X^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x, y) = f(y, x), \ \forall (x, y) \in D(T)^2\}$$

Teorema 3.6. *$\mathcal{F}_S(X^2, \mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(X^2, \mathbb{R})$*

Prueba. Como la función nula $0 : X^2 \to \mathbb{R}$ satisface $0(x, y) = 0 = 0(y, x)$, se tiene $0 \in \mathcal{F}_S(X^2, \mathbb{R})$. Sean ahora $f, g \in \mathcal{F}_S(X^2, \mathbb{R})$, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$(f + \alpha \cdot g)(x, y) = f(x, y) + \alpha \cdot g(x, y) = f(y, x) + \alpha \cdot g(y, x) = (f + \alpha \cdot g)(y, x).$$

■

Teorema 3.7. $\mathcal{F}_0(X^2,\mathbb{R}) = \{f : X^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = 0$ *para todo* $(x,y) \in X_T^2\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$

Prueba. Evidentemente $0 \in \mathcal{F}_0(X^2,\mathbb{R})$. Sean $f,g \in \mathcal{F}_0(X^2,\mathbb{R})$, dado $\alpha \in \mathbb{R}$: $(f+\alpha\cdot g)(x,y) = f(x,y)+\alpha\cdot g(x,y) = 0+\alpha\cdot 0 = 0$.

■

Denotemos por $\theta(X)$ al espacio cociente de $\mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$ por $\mathcal{F}_0(X^2,\mathbb{R})$, es decir:

$$\theta(X) = \frac{\mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})}{\mathcal{F}_0(X^2,\mathbb{R})} = \{[f] \ / f \in \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})\} = \{f+\mathcal{F}_0(X^2,\mathbb{R}) / f \in \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})\}$$

Recordemos que $[f] = [g]$ si y solo si $f-g \in \mathcal{F}_0(X^2,\mathbb{R})$, luego $(f-g)(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in X_T^2$ o lo que es equivalente $(f-g)|_{X_T^2} = 0$, de donde obtenemos que $[f] = [g]$ si y solo si $f|_{X_T^2} = g|_{X_T^2}$.
Sea $\theta_T(X) = \{h : X_T^2 \to \mathbb{R} \ / \ \exists f \in \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R}) : h = f|_{X_T^2}\}$, lo anterior nos permite definir $\Phi : \theta(X) \to \theta_T(X)$ como $\Phi([f]) = f|_{X_T^2}$.

Lema 3.1. $\theta_T(X)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{F}(X_T^2,\mathbb{R})$.

Prueba. Puesto que $0 \in \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$, entonces $0|_{X_T^2} = 0 \in \theta_T(X) \subseteq \mathcal{F}(X_T^2,\mathbb{R})$. Sean $h,l \in \theta_T(X)$, como existen $f,g \in \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$ tales que $h = f|_{X_T^2}$ y $l = g|_{X_T^2}$, entonces dado $\alpha \in \mathbb{R}$: $(h+\alpha\cdot l) = (f|_{X_T^2} + \alpha\cdot g|_{X_T^2}) = (f+\alpha\cdot g)|_{X_T^2} \in \theta_T(X)$.

■

Teorema 3.8. $\Phi : \theta(X) \to \theta_T(X)$ *es un isomorfismo.*

Prueba. Φ es lineal: sean $[f],[g] \in \theta(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\Phi([f]+\alpha\cdot[g]) = \Phi([f+\alpha\cdot g]) = (f+\alpha\cdot g)|_{X_T^2} = f|_{X_T^2} + \alpha\cdot g|_{X_T^2} = \Phi([f]) + \alpha\cdot\Phi([g])$.
Φ es inyectiva: sea $[f] \in Nuc(\Phi)$, entonces $0 = \Phi([f]) = f|_{X_T^2} = 0|_{X_T^2}$, así $[f] = [0]$, por tanto $Nuc(\Phi) = \{[0]\}$.
Φ es sobreyectiva: si $h \in \theta_T(X)$, existe $f \in \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$ tal que $h = f|_{X_T^2} = \Phi([f])$.

■

El teorema anterior nos permite identificar a los elementos de $\dfrac{\mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})}{\mathcal{F}_0(X^2,\mathbb{R})}$ con los elementos de $\theta_T(X)$, en otras palabras, podemos ver a la clase de equivalencia $[f]$ como una función.

Definición 3.11. Funciones θ:

Decimos que una función $f : X^2 \to \mathbb{R}$ es una función θ, si $f|_{X_T^2} \in \theta_T(X)$. Denotaremos por $\theta_T(X^2, \mathbb{R}) = \{f : X^2 \to \mathbb{R} \quad f|_{X_T^2} \in \theta_T(X)\}$ al conjunto de todas las funciones θ de X^2 en $\mathbb{R}$.

En adelante cuando escribamos $\theta : X^2 \to \mathbb{R}$, se entenderá que $\theta \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$

Ejemplo 3.9. Funciones θ-constanes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos $\theta_\alpha : X^2 \to \mathbb{R}$ como $\theta_\alpha(x, y) = \alpha$ para todo $(x, y) \in X^2$, entonces $\theta_\alpha(x, y) = \theta_\alpha(y, x)$ de donde $\theta_\alpha \in \mathcal{F}_S(X^2, \mathbb{R})$, además $\theta_\alpha|_{X_T^2} \in \theta_T(X)$, por tanto $\theta_\alpha \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$. En particular, para $\alpha = 0$, tenemos que la función nula $\theta_0 = 0 \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$.

Observación 3.4. Sea $f \in \mathcal{F}_0(X^2, \mathbb{R})$, entonces $f : X^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in X_T^2$. Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos $\theta_\alpha + f \in \mathcal{F}_S(X^2, \mathbb{R})$, de donde $(\theta_\alpha + f)|_{X_T^2} = \theta_\alpha|_{X_T^2} \in \theta_T(X)$, por tanto $\theta_\alpha + f \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$, esto se debe a que $\theta_\alpha + f \in [\theta_\alpha]$.

De igual manera, definiendo $\widetilde{\theta_\alpha} : X_T^2 \to \mathbb{R}$ por $\widetilde{\theta_\alpha}(x, y) = \alpha$ para todo $(x, y) \in X_T^2$, dado $f \in \mathcal{F}_0(X^2, \mathbb{R})$, definamos $\theta_{\alpha,f} : X^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\theta_{\alpha,f}(x, y) = \begin{cases} \widetilde{\theta_\alpha}(x, y) & \text{si: } (x, y) \in X_T^2 \\ f(x, y) & \text{si: } (x, y) \notin X_T^2 \end{cases}$$

Se tiene que $\theta_{\alpha,f} \in \mathcal{F}_S(X^2, \mathbb{R})$ y $\theta_{\alpha,f}|_{X_T^2} = \widetilde{\theta_\alpha} = \theta_\alpha|_{X_T^2} \in \theta_T(X)$, por tanto $\theta_{\alpha,f} \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$. De todo esto se deduce que $[\theta_\alpha] = [\theta_\alpha + f] = [\theta_{\alpha,f}]$, pero, por el isomorfismo Φ, podemos identificar a $[\theta_\alpha] = [\theta_\alpha + f] = [\theta_{\alpha,f}]$ con $\widetilde{\theta_\alpha}$. Concluyendo así que lo importante en una función θ, es tenerla bien definida en X_T^2. Por ello en muchas ocaciones será suficiente definir θ en X_T^2, fuera de X_T^2, por lo general θ será cero.

Definición 3.12. Funciones θ-iguales:

Decimos que dos funciones $\theta_1, \theta_2 \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$ son θ- iguales si $\theta_1|_{X_T^2} = \theta_2|_{X_T^2}$, de no haber lugar a confusión, escribiremos $\theta_1 =_\theta \theta_2$ o simplemente $\theta_1 = \theta_2$.

Teorema 3.9. *$\theta_T(X^2,\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$.*

Prueba. Sea $\theta \in \theta_T(X^2,\mathbb{R})$, entonces $\theta|_{X_T^2} \in \theta_T(X)$, de donde existe $f \in \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$ tal que $\theta|_{X_T^2} = f|_{X_T^2}$. Si $(x,y) \in X_T^2$ tenemos $\theta(x,y) = f(x,y) = f(y,x) = \theta(y,x)$, además, si $x = y$ evidentemente $\theta(x,y) = \theta(y,x)$, por lo que $\theta \in \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$, probando así que $\theta_T(X^2,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$. En el Ejemplo 3.9, vimos que $0 \in \theta_T(X^2,\mathbb{R})$, sean θ_1, $\theta_2 \in \theta_T(X^2,\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces existen $f, g \in \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$ tales que $\theta_1|_{X_T^2} = f|_{X_T^2}$ y $\theta_2|_{X_T^2} = g|_{X_T^2}$, luego $(\theta_1 + \alpha\cdot\theta_2)|_{X_T^2} = \theta_1|_{X_T^2} + \alpha\cdot\theta_2|_{X_T^2} = f|_{X_T^2} + \alpha\cdot g|_{X_T^2} = (f+\alpha\cdot g)|_{X_T^2}$, por tanto $\theta_1 + \alpha\cdot\theta_2 \in \theta_T(X^2,\mathbb{R})$.

■

Observación 3.5. De lo anterior, ya que $\theta_T(X^2,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_S(X^2,\mathbb{R})$, deducimos que si $\theta \in \theta(X^2,\mathbb{R})$, entonces $\theta(x,y) = \theta(y,x)$ para todo $x, y \in D(T)$.

En $\theta_T(X^2,\mathbb{R})$ definamos la siguiente relación:

$$f \succeq g \quad \text{si y solo si} \quad f(x,y) \geqslant g(x,y) \ \text{ para todo } (x,y) \in X_T^2$$

Teorema 3.10. *$\theta_T(X^2,\mathbb{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado por "$\succeq$" .*

Prueba. En efecto, sean $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \theta_T(X^2,\mathbb{R})$.

i) **Reflexividad:** Como $\theta_1(x,y) \geqslant \theta_1(x,y),\ \forall\ (x,y) \in X_T^2$, entonces $\theta_1 \succeq \theta_1$.

ii) **Antisimetría:** Si $\theta_1 \succeq \theta_2$ y $\theta_2 \succeq \theta_1$ entonces para todo $(x,y) \in X_T^2$ se tiene $\theta_1(x,y) \geqslant \theta_2(x,y)$ y $\theta_2(x,y) \geqslant \theta_1(x,y)$, por tanto $\theta_1(x,y) = \theta_2(x,y)$ para todo $(x,y) \in X_T^2$, es decir $\theta_1 =_\theta \theta_2$

iii) **Transitividad:** Si $\theta_1 \succeq \theta_2$ y $\theta_2 \succeq \theta_3$, entonces se tiene $\theta_1(x,y) \geqslant \theta_2(x,y)$ y $\theta_2(x,y) \geqslant \theta_3(x,y)$ para todo $(x,y) \in X_T^2$ lo que implica $\theta_1(x,y) \geqslant \theta_3(x,y)$, para todo $(x,y) \in X_T^2$, luego por definición $\theta_1 \succeq \theta_3$.

Tenemos así que $\theta_T(X^2,\mathbb{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado por "$\succeq$".

■

Es importante notar que esta relación en realidad no es una relación de orden en el sentido estricto de la palabra, tan solo es un preorden o cuasiorden, ya que en la antisimetría, no se logra alcanzar la igualdad en todo X^2, solo se tiene la θ-igualdad, esto sugiere que si definimos la misma relación en $\theta_T(X)$, el orden si será parcial, resultando así el siguiente:

Corolario 3.1. $\theta_T(X)$ es un conjunto parcialmente ordenado por " $\succeq$" .

Prueba. La reflexividad y transitividad son idénticas al teorema anterior. En cuanto a la antisimetría, sean $\theta_1, \theta_2 \in \theta_T(X) \subset \mathcal{F}(X_T^2, \mathbb{R})$ tales que $\theta_1 \succeq \theta_2$ y $\theta_2 \succeq \theta_1$, entonces $\theta_1(x,y) \geqslant \theta_2(x,y) \geqslant \theta_1(x,y)$ para todo $(x,y) \in X_T^2$, por tanto $\theta_1 = \theta_2$.

■

Observación 3.6. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado, diremos que T es θ-monótono, si existe $\theta \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$ tal que $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x,y)\|x - y\|$ para todo $(x,u),\ (y,v) \in G(T)$.

Teorema 3.11. *Sean $\theta,\ \theta' \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$ y sea $T : X \rightrightarrows X^*$, θ-monótono, si $\theta \succeq \theta'$, entonces T es θ'-monótono.*

Prueba. Como $\theta \succeq \theta'$, entonces $\theta(x,y) \geqslant \theta'(x,y)$ para todo $(x,y) \in X_T^2$, dados $(x,u),\ (y,v) \in G(T)$ con $x \neq y$, tenemos que:

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x,y)\|x - y\| \geqslant \theta'(x,y)\|x - y\|$$

Si $x = y$, la desigualdad anterior es obvia, por tanto $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta'(x,y)\|x - y\|$ para todo $(x,u),\ (y,v) \in G(T)$, es decir T es θ'-monótono.

■

Este teorema asegura que si $\theta'(x,y) = \theta'(y,x)$ y $\theta(x,y) \geqslant \theta'(x,y)$ para todo $x \neq y \in D(T)$, entonces T es θ'-monótono.

Corolario 3.2. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono y sea $\theta' : X^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $\theta'(x,y) = \theta'(y,x)$ y $\theta(x,y) \geqslant \theta'(x,y)$ para todo $(x,y) \in X^2$, es decir $\theta \geqslant \theta'$ entonces T es θ'-monótono.

Prueba. Como $\theta'(x,y) = \theta'(y,x)$ para todo $(x,y) \in X^2$, entonces $\theta' \in \mathcal{F}_S(X^2, \mathbb{R})$ y además $\theta(x,y) \geqslant \theta'(x,y)$ para todo $(x,y) \in X^2$, de donde $\theta \succeq \theta'$, luego, por el teorema anterior, T es θ'-monótono.

■

Corolario 3.3. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ_1-monótono y θ_2-monótono, entonces T es $\theta_{1,2}$-monótono, donde $\theta_{1,2} : X^2 \to \mathbb{R}$ se encuentra definida como $\theta_{1,2}(x,y) = \min\limits_{x,y \in X}\{\theta_1(x,y), \theta_2(x,y)\}$.

Prueba. Observando que en particular $\theta_1(x,y) \geqslant \min\limits_{x,y \in X}\{\theta_1(x,y), \theta_2(x,y)\}$ para todo $x, y \in X$, por el corolario anterior se tiene que T es $\theta_{1,2}$-monótono.

■

Corolario 3.4. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ_1-monótono y θ_2-monótono, entonces T es $\theta_{m1,2}$-monótono, donde $\theta_{m1,2} : X^2 \to \mathbb{R}$ se encuentra definida como $\theta_{m1,2}(x,y) = \max\limits_{x,y \in X}\{\theta_1(x,y), \theta_2(x,y)\}$.

Prueba.

Ya que T es θ_1 y θ_2-monótono, sean $x, y \in D(T)$ fijos, dados $u \in Tx$, $v \in Ty$ se tiene: $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta_1(x,y)\|x - y\|$ y $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta_2(x,y)\|x - y\|$ luego: $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \max\limits_{x,y \in X}\{\theta_1(x,y), \theta_2(x,y)\}\|x - y\|$, es decir, T es $\theta_{m1,2}$-monótono.

■

Ejemplo 3.10. Operador Nulo

Sea $\varnothing \neq A \subseteq X$, definamos $0_A : X \rightrightarrows X^*$ para todo $x \in A$ como $0_A x = \{0\}$, donde $0 \in X^*$ es el funcional nulo $0 : X \to \mathbb{R}$ tal que $0(x) = 0$ para todo $x \in X$. Entonces, puesto que:

$\langle u - v, x - y\rangle = \langle 0 - 0, x - y\rangle = 0$ para todo $(x,u), (y,v) \in G(0_A) = A \times \{0\}$

se tiene que 0_A es monótono, luego, definiendo

$\theta_0 : X^2 \to \mathbb{R}$ como $\theta_0(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in X^2$ se concluye que 0_A es θ_0-monótono.

Ejemplo 3.11. Operador Constante Univaluado

Sea $\varnothing \neq A \subseteq X$, dado $u \in X^*$, definamos $u_A : X \rightrightarrows X^*$ para todo $x \in A$ como $u_A x = \{u\}$. Entonces se tiene que $\langle u-u, x-y\rangle = \langle 0, x-y\rangle = 0$ para todo $(x,u),(y,v) \in G(u_A) = A \times \{u\}$, luego, como en el ejemplo anterior se tiene que u_A es monótono y por tanto u_A es θ_0-monótono.

Observación 3.7. En los dos ejemplos anteriores, si $\theta : X^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $0 = \theta_0 \geq \theta$, entonces por el Teorema 3.11, 0_A y u_A son θ-monótonos.

Ejemplo 3.12. Operador Constante

Sean $\varnothing \neq A \subseteq X$ y $\varnothing \neq B \subseteq X^*$ tal que B es acotado y con $card(B) \geqslant 2$, definamos $B_A : X \rightrightarrows X^*$ para todo $x \in A$ como $B_A x = B$ y $B_A x = \varnothing$, si $x \notin A$. Dados $x, y \in A = D(B_A)$, $u, v \in B$, como $|\langle u-v, x-y\rangle| \leqslant \|u-v\|\|x-y\|$, entonces $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant -\|u-v\|\|x-y\|$. Además, $diam(B) = \sup_{f,\, g \in B} \|f-g\| < \infty$, de donde $-\|u-v\| \geqslant -diam(B)$ para todo $u, v \in B$, por lo tanto se obtiene $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant -diam(B)\|x-y\|$, es decir, B_A es θ_d-monótono, con $\theta_d : X^2 \to \mathbb{R}$ definido como $\theta_d(x,y) = -diam(B)$.

Veamos ahora que B_A no es estrictamente monótono. En efecto, ya que para todo $x \neq y \in A$, se tiene $B_A x \cap B_A y = B$, en particular, para $u \in B$ tenemos

$$\langle u-u, x-y\rangle = 0 > -diam(B)\|x-y\|.$$

Teorema 3.12. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador constante. Si $T(X)$ es acotado, entonces T es θ_d-monótono y θ_r-monótono.*

Prueba. Si $T(X)$ es acotado, existe $r > 0$ tal que $\|u\| \leqslant r$, para todo $u \in T(X)$, luego $\|u-v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \leqslant 2r$, entonces $\sup_{u,v \in T(X)} \|u-v\| \leqslant 2r$, es decir, se tiene $-\theta_d(x,y) = diam(T(X)) \leqslant 2r$. Si ahora definimos $\theta_r : X^2 \to \mathbb{R}$ como $\theta_r(x,y) = -2r$ tenemos que $\theta_d(x,y) \geqslant \theta_r(x,y)$ y en virtud del Corolario 3.2, T es θ_r-monótono y θ_d-monótono.

■

En el teorema anterior notemos que $\theta_d \succeq \theta_r$, además para toda $\theta \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$ tal que $\theta_r \succeq \theta$, por el Teorema 3.11, se tiene que T es θ-monótono, pero si $\theta \succeq \theta_d$

¿cómo asegurar que T sea θ-monótono? y de ser así ¿existirá una función θ^T tal que $\theta^T \succeq \theta$ para toda función θ y que hace de T un operador θ-monótono?
Para responder a estas interrogantes analicemos el último ejemplo.
Sean $x, y \in D(B_A) = A$ fijos, como $-diam(B)\|x-y\| \leqslant \langle u-v, x-y\rangle$ para todo $u \in B_A x = B$, $v \in B_A y = B$, entonces $\{\langle u-v, x-y\rangle ; u, v \in B\}$ está acotado inferiormente por $-diam(B)\|x-y\|$, de donde existe $\inf\limits_{u,v\in B}\{\langle u-v, x-y\rangle\} \in \mathbb{R}$ satisfaciendo $-diam(B)\|x-y\| \leqslant \inf\limits_{u,v\in B}\{\langle u-v, x-y\rangle\} \leqslant \langle u-v, x-y\rangle$. En particular, si $x \neq y$ tenemos $-diam(B) \leqslant \dfrac{\inf_{u,v\in B}\{\langle u-v, x-y\rangle\}}{\|x-y\|}$, esto sugiere definir $\theta_i^{B_A} : X^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\theta_i^{B_A}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\inf_{u,v\in B}\{\langle u-v, x-y\rangle\}}{\|x-y\|} & \text{si: } (x,y) \in X^2_{B_A} \\ 0 & \text{si: } (x,y) \notin X^2_{B_A} \end{cases}$$

Así B_A es $\theta_i^{B_A}$-monótono. Ahora generalicemos este resultado:

Teorema 3.13. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, entonces T es θ-monótono si y solo si para cada $x, y \in D(T)$ se tiene $\inf\limits_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, x-y\rangle\} > -\infty$.*

Prueba. Si Tes θ-monótono, entonces $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant \theta(x,y)\|x-y\|$ para todo $(x,u), (y,v) \in G(T)$, si mantenemos a $x, y \in D(T)$ fijos se tiene que $\theta(x,y)\|x-y\|$ es una cota inferior para $\{\langle u-v, x-y\rangle ; u \in Tx, v \in Ty\}$, entonces:

$$\langle u-v, x-y\rangle \geqslant \inf_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, x-y\rangle\} \geqslant \theta(x,y)\|x-y\| > -\infty \tag{3.4}$$

Por otra parte si para cada $x, y \in D(T)$ se tiene $\inf\limits_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, x-y\rangle\} > -\infty$, definamos $\theta_i^T : X^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\theta_i^T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\inf\limits_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, x-y\rangle\}}{\|x-y\|} & \text{si: } (x,y) \in X^2_T \\ 0 & \text{si: } (x,y) \notin X^2_T \end{cases}$$

Sean $x, y \in D(T)$, si $x = y$, tenemos $\langle u-v, x-x\rangle = 0 = \theta_i^T(x,x)\|x-x\|$.
Si $x \neq y$, entonces $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant \inf\limits_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, x-y\rangle\} = \theta_i^T(x,y)\|x-y\|$.

Además:

$$\theta_i^T(x,y) = \frac{\inf\limits_{f\in Tx,\ g\in Ty}\{\langle f-g, x-y\rangle\}}{\|x-y\|} = \frac{\inf\limits_{g\in Ty,\ f\in Tx}\{\langle g-f, y-x\rangle\}}{\|y-x\|} = \theta_i^T(y,x)$$

Por lo tanto T es θ monótono con $\theta = \theta_i^T$.

■

Corolario 3.5. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, T es θ-monótono si y solo si T es θ_i^T-monótono.

Corolario 3.6. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, entonces $\theta_i^T \succeq \theta$.

Prueba. Si T es un operador θ-monótono, para $x \neq y \in D(T)$, de 3.4, tenemos $\theta_i^T(x,y) \geqslant \theta(x,y)$, para todo $(x,y) \in X_T^2$ por tanto $\theta_i^T \succeq \theta$.

■

Corolario 3.7. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono tal que $\theta \succeq \theta_i^T$, entonces $\theta =_\theta \theta_i^T$.

Prueba. Del corolario anterior $\theta_i^T \succeq \theta$, pero por hipótesis $\theta \succeq \theta_i^T$ luego por el Teorema 3.10, $\theta =_\theta \theta_i^T$, es decir, $\theta(x,y) = \theta_i^T(x,y)$ para todo $x \neq y \in D(T)$.

■

Observación 3.8. Los dos últimos corolarios muestran que la función θ_i^T es la "mayor" función que hace que T se θ-monótono. Por otro lado, cabe mencionar que calcular θ_i^T no siempre es sencillo, pero es un buen punto de partida para el cálculo de alguna función θ que haga de T un operador θ-monótono.

A continuacioón veremos una manera equivalente de llegar a θ_i^T, usando el supremo en lugar del ínfimo.
Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, dados $x, y \in D(T)$ fijos se tiene que $\langle u-v, x-y\rangle \geqslant \theta(x,y)\|x-y\|$ o equivalentemente $\langle u-v, y-x\rangle \leqslant -\theta(x,y)\|x-y\|$ es decir $-\theta(x,y)\|x-y\|$ es una cota superior para $\{\langle u-v, y-x\rangle : u \in Tx, v \in Ty\}$, entonces para cada $u \in Tx$, $v \in Ty$ tenemos:

$$\langle u-v, y-x\rangle \leqslant \sup_{f\in Tx,\ g\in Ty}\{\langle f-g, y-x\rangle\} \leqslant -\theta(x,y)\|x-y\| < \infty$$

Luego:

$$\langle u-v, x-y\rangle \geqslant -\sup_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, y-x\rangle\} \geqslant \theta(x,y)\|x-y\|$$

Corolario 3.8. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, entonces T es θ-monótono si y solo si para cada $x, y \in D(T)$ se tiene $\sup_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, x-y\rangle\} < \infty$.

Prueba. Puesto que $\inf_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, x-y\rangle\} = -\sup_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, y-x\rangle\}$, del Teorema 3.13 tenemos:

$$\theta_i^T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-\sup\limits_{f\in Tx,\, g\in Ty}\{\langle f-g, x-y\rangle\}}{\|x-y\|} & \text{si: } (x,y)\in X_T^2 \\ 0 & \text{si: } (x,y)\notin X_T^2 \end{cases}$$

Por tanto la prueba es idéntica.

■

Ejemplo 3.13. Conjunto Dualidad:

Consideremos el operador dualidad definido en el Ejemplo 2.24, $J_X : X \rightrightarrows X^*$ donde $J_X x = J_x = \{u \in X^* / \langle u, x\rangle = \|x\|^2 = \|u\|^2\}$.

Sean $x, y \in D(J_X)$ fijos, dados $u \in J_X x$, $v \in J_X y$ se tiene:

$$\langle u-v, x-y\rangle = \langle u, x\rangle - \langle v, x\rangle - \langle u, y\rangle + \langle v, y\rangle = \|x\|^2 - \langle v, x\rangle - \langle u, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\geqslant \|x\|^2 - \|v\|\|x\| - \|u\|\|y\| + \|y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|\|x\| - \|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| - \|y\|)^2$$

Luego:

$$\inf_{u\in Tx, v\in Ty}\{\langle u-v, x-y\rangle\} \geqslant \inf_{u\in Tx, v\in Ty}\{(\|x\| - \|y\|)^2\} = (\|x\| - \|y\|)^2 > -\infty$$

Por lo tanto definiendo $\theta_i : X^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\theta_i(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\|x\| - \|y\|)^2}{\|x-y\|} & \text{si: } x \neq y \in X \\ 0 & \text{si: } x = y \in X \end{cases}$$

se concluye que $\theta_i^{J_X} \geq \theta_i \geq 0$ y por los Teoremas 3.13 y 3.11, J_X es θ_i-monótono.

3.4. Operaciones con operadores θ-monótonos

En esta sección veremos, en los casos que sea posible, algunas operaciones como la unión, intersección, suma y resta de operadores θ-monótonos, intersándonos los casos en que el operador resultante también sea θ-monótono, no necesariamente para la misma función θ.

Unión de operadores θ-Monótonos

Sean $S, T : X \rightrightarrows X^*$ operadores θ-monótonos tales que $S \preceq T$, entonces por el Teorema 2.5, $Sx \subseteq Tx$ para todo $x \in X$, luego $Sx \cup Tx = Tx$, de donde $S \cup T = T$ y por tanto $S \cup T$ es θ-monótono.

Teorema 3.14. *Sea Λ un conjunto de índices, para cada $i \in \Lambda$ sean $T_i : X \rightrightarrows X^*$ operadores θ-monótonos tales que si $i \neq j$ se tiene que $T_i \preceq T_j$ o $T_j \preceq T_i$, entonces $T = \bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ es θ-monótono.*

Prueba.

Sean $(x, u),\ (y, v) \in G(T)$, entonces $u \in Tx = \bigcup_{i\in\Lambda} T_i x$ y $v \in Ty = \bigcup_{i\in\Lambda} T_i y$, de donde existen $j, k \in \Lambda$ tales que $u \in T_k x$ y $v \in T_j y$.

Si $j = k$, como T_j es θ-monótono, tenemos $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$.

Si $j \neq k$, asumamos que $T_k \preceq T_j$, es decir $G(T_k) \subseteq G(T_j)$.

Puesto que $u \in T_k \subseteq Tj$ tenemos $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$. Al asumir que $T_j \preceq T_k$ se obtiene un resultado análogo por lo que concluimos que $\bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ es θ-monótono.

■

Intersección de operadores θ-Monótonos

Sean $S, T : X \rightrightarrows X^*$ operadores θ-monótonos tales que $D(S) \cap D(T) \neq \varnothing$, dados $x_1, x_2 \in D(S \cap T) \subseteq D(T)$, sean $u_i \in (S \cap T)x_i = Sx_i \cap Tx_i \subseteq Tx_i$, $i = 1, 2$, entonces $\langle u_1 - u_2, x_1 - x_2\rangle \geqslant \theta(x_1, x_2)\|x_1 - x_2\|$, por lo tanto la intersecc\'on de operadores θ-monótonos es también θ-monótono.

Teorema 3.15. *Sea Λ un conjunto de índices, para cada $i \in \Lambda$ sean $T_i : X \rightrightarrows X^*$ operadores θ-monótonos tales que $\bigcap_{i\in\Lambda} D(T_i) \neq \varnothing$, entonces $\bigcap_{i\in\Lambda} T_i$ es θ-monótono.*

Prueba. Sea $j \in \Lambda$ fijo pero arbitrario y sean $x, y \in D(\bigcap_{i\in\Lambda} T_i) = \bigcap_{i\in\Lambda} D(T_i) \subseteq D(T_j)$, dados $u \in \bigcap_{i\in\Lambda} T_i x \subseteq T_j$, $v \in \bigcap_{i\in\Lambda} T_i y \subseteq T_j$, como T_j es θ-monótono se tiene $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in\Lambda} T_i$ es θ-monótono.

■

Observación 3.9. Puesto que para todo $(x, u), (y, v) \in G(T) \subseteq X \times X^*$:

$$|\langle u - v, x - y\rangle| \leqslant \|u - v\|\|x - y\| \leqslant \sup_{f\in Tx,\, g\in Ty} \|f - g\|\|x - y\|$$

Entonces: $-\sup_{f\in Tx,\, g\in Ty} \|f - g\|\|x - y\| \leqslant \langle u - v, x - y\rangle \leqslant \sup_{f\in Tx,\, g\in Ty} \|f - g\|\|x - y\|$

De donde deducimos el siguiente teorema.

Teorema 3.16. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, si $\sup_{u\in Tx,\, v\in Ty} \|u-v\| < +\infty$ para todo $x, y \in D(T)$ entonces T es θ_s^T-monótono, con θ_s^T definido en X^2 como:*

$$\theta_s^T(x, y) = \begin{cases} -\sup_{u\in Tx,\, v\in Ty} \|u - v\|; & si:\ x, y \in D(T) \\ 0 & si:\ x \ o\ y \notin D(T) \end{cases}$$

Prueba. Por la observación anterior, para $(x, u_0), (y, v_0) \in G(T)$ tenemos:
$\langle u_0 - v_0, x - y\rangle \geqslant -\sup_{u\in Tx,\, v\in Ty} \|u - v\|\|x - y\| = \theta_s(x, y)\|x - y\|$.

■

Corolario 3.9. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, si $\sup_{u,v\in Tx\cup Ty} \|u - v\| = diam(Tx \cup Ty) < +\infty$ para todo $x, y \in D(T)$, entonces T es θ_{su}^T-monótono, donde:

$$\theta_{su}^T(x, y) = \begin{cases} -\sup_{u,v\in Tx\cup Ty} \|u - v\| & \text{si:}\ x, y \in D(T) \\ 0 & \text{si:}\ x \text{ o } y \notin D(T) \end{cases}$$

Prueba. Es suficiente notar que $\sup_{u\in Tx,\, v\in Ty} \|u - v\| \leqslant \sup_{u,v\in Tx\cup Ty} \|u - v\|$ para todo $x, y \in D(T)$, es decir $\theta_s^T \geq \theta_{su}^T$, luego, por el Teorema 3.11 concluimos que T es θ-monótono. ■

Corolario 3.10. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono tal que para todo $x, y \in D(T)$ se tenga $\sup_{u\in Tx, v\in Ty} \|u-v\| < +\infty$, entonces T es $\theta_{s\theta}$-monótono, donde:

$$\theta_{s\theta}(x, y) = \min_{x,y\in X}\{\theta(x, y), \theta_s^T(x, y)\}$$

Prueba. Como T es θ_s^T-monótono, del Corolario 3.3, T es $\theta_{s\theta}$-monótono.

■

Corolario 3.11. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono tal que para todo $x, y \in D(T)$ se tenga $\sup_{u\in Tx, v\in Ty} \|u - v\| < +\infty$, entonces T es $\theta_{ms\theta}$-monótono, donde:

$$\theta_{ms\theta}(x, y) = \max_{x,y\in X}\{\theta(x, y), \theta_s^T(x, y)\}$$

Prueba. Como T es θ_s^T-monótono, del Corolario 3.4, T es $\theta_{ms\theta}$-monótono.

■

Corolario 3.12. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ_s^T-monótono, es decir, tal que para todo $x, y \in D(T)$ se tenga $\sup_{u\in Tx, v\in Ty} \|u - v\| < +\infty$, entonces $-T$ es θ_s^T-monótono.

Prueba. Sean $x, y \in D(-T) = D(T)$, dados $u_0 \in -Tx$, $v_0 \in -Ty$, se tiene que $-u_0 \in Tx$, $-v_0 \in Ty$, luego, por el Teorema 3.16 y la Observación 3.9 tenemos:

$$-\sup_{u\in Tx,\, v\in Ty} \|u - v\|\|x - y\| \leqslant \langle -u_0 - (-v_0), x - y\rangle \leqslant \sup_{u\in Tx,\, v\in Ty} \|u - v\|\|x - y\|$$

Si multiplicamos por -1 a la desigualdad anterior tenemos:

$$-\sup_{u\in Tx,\, v\in Ty} \|u - v\|\|x - y\| \leqslant \langle u_0 - v_0, x - y\rangle \leqslant \sup_{u\in Tx,\, v\in Ty} \|u - v\|\|x - y\|$$

Luego:

$$\langle u_0 - v_0, x - y\rangle \geqslant -\sup_{u\in Tx,\, v\in Ty} \|u - v\|\|x - y\| = \theta_s^T(x, y)\|x - y\|$$

Por lo tanto $-T$ es θ_s^T-monótono. Además de ello, notemos que $-T = -1 \cdot T$.

■

Veamos ahora si rT, con $r \in \mathbb{R}$, es un operador θ-monótono.

Teorema 3.17. ***Escalar por un operador θ-monótono***

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, si $r \geqslant 0$, entonces rT es $r\theta$-monótono.

Prueba. Veamos dos casos:

Si $r = 0$: sea $x \in D(T)$, entonces $0Tx = \{0 \cdot u \ / \ u \in Tx\} = \{0\}$, por tanto $0 \cdot T = 0_{D(T)}$, además como el operador $0_{D(T)}$ es θ_0-monótono y $0 \cdot \theta = \theta_0$, entonces concluimos que $0 \cdot T$ es θ_0-monótono.

Si $r > 0$: sean $(x, u), (y, v) \in G(rT)$, como $u \in rTx$ y $v \in rTy$ entonces existen $u_1 \in Tx$ y $v_1 \in Ty$ tales que $u = ru_1$ y $v = rv_1$, además, puesto que T es θ-monótono, se tiene $\langle u_1 - v_1, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$. Ahora, si multiplicamos por r a la desigualdad anterior tenemos $\langle ru_1 - rv_1, x - y\rangle \geqslant r\theta(x, y)\|x - y\|$, luego

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant r\theta(x, y)\|x - y\|$$

Por tanto rT es $r\theta$-monótono.

■

Corolario 3.13. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ_s^T-monótono, si $r > 0$, entonces $-rT$ es $r\theta_s^T$-monótono.

Prueba. Del Corolario 3.12, tenemos que $-T$ es θ_s^T-monótono, luego por el teorema anterior $r(-T) = -rT$ es $r\theta_s^T$-monótono.

■

Veremos ahora la suma y resta de operadores θ-monótonos, donde, obviamente nos interesaremos en el caso que la suma o resta también sean θ-monótonos.

Suma de operadores θ-Monótonos

Sean $T_1, T_2 : X \rightrightarrows X^*$ operadores θ-monótonos tales que $D(T_1) \cap D(T_2) \neq \varnothing$, dados $x, y \in D(T_1 \cap T_2)$, sean $w_1 \in (T_1 + T_2)x$ y $w_2 \in (T_1 + T_2)y$, entonces para cada $i = 1, 2$ existen $u_i \in T_i x$, $v_i \in T_i y$, tales que $w_1 = u_1 + u_2$ y $w_2 = v_1 + v_2$, luego:

$$\langle u_1 - v_1, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\| \quad \text{y} \quad \langle u_2 - v_2, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|.$$

Sumando ambas desigualdades concluimos que $T_1 + T_2$ es 2θ-monótono:

$$\langle (u_1 + u_2) - (v_1 + v_2), x - y \rangle = \langle w_1 - w_2, x - y \rangle \geqslant 2\theta(x, y)\|x - y\|$$

En lo anterior, ambos operadores T_1 y T_2, eran operadores θ-monótonos, pero si generalizamos esto a funciones distintas θ_1 y θ_2 definidas de X^2 en $\mathbb{R}$, tenemos el siguiente:

Teorema 3.18. *Sean $T_1, T_2 : X \rightrightarrows X^*$ operadores θ_1 y θ_2-monótonos respectivamente tales que $D(T_1) \cap D(T_2) \neq \varnothing$, entonces $T_1 + T_2$ es $\theta_1 + \theta_2$-monótono.*

Prueba. Como $\theta_1,\ \theta_2 \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$, por el Teorema 3.9, $\theta_1 + \theta_2 \in \theta_T(X^2, \mathbb{R})$. Dados $x, y \in D(T_1) \cap D(T_2)$, sean $u \in (T_1 + T_2)x$, $v \in (T_1 + T2)y$, entonces para cada $i = 1, 2$ existen $u_i \in T_i x$, $v_i \in T_i y$ tales que $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$. Además, como T_i es θ_i-monótono tenemos:

$$\langle u_1 - v_1, x - y \rangle \geqslant \theta_1(x, y)\|x - y\| \text{ y } \langle u_2 - v_2, x - y \rangle \geqslant \theta_2(x, y)\|x - y\|$$

Sumando ambas desigualdades:

$$\langle (u_1 + u_2) - (v_1 + v_2), x - y \rangle \geqslant [\theta_1(x, y) + \theta_2(x, y)]\|x - y\|$$

Lo que implica: $\langle u - v, x - y \rangle \geqslant (\theta_1 + \theta_2)(x, y)\|x - y\|$
Por lo tanto $T_1 + T_2$ es $\theta_1 + \theta_2$-monótono.

■

Corolario 3.14. Sean $T_1 : X \rightrightarrows X^*$, $T_2 : X \rightrightarrows X^*$ operadores θ_1 y θ_2 - monótonos. Si $D(T_1) \cap D(T_2) \neq \varnothing$, entonces para todo $p_1, p_2 \geqslant 0$, el operador $p_1T_1 + p_2T_2$ es θ-monótono. Con $\theta = p_1\theta_1 + p_2\theta_2$ definido en $D(T_1) \cap D(T_2)$.

Prueba. Del Teorema 3.17, p_iT_i es $p_i\theta_i$-monótono y por el teorema anterior $p_1T_1 + p_2T_2$ es $p_1\theta_1 + p_2\theta_2$-monótono.

■

El corolario anterior fue probado directamente en [32], ahora veremos que esto se sigue cumpliendo en toda suma finita.

Corolario 3.15. Sea $n \in \mathbb{N}$, si para $i = 1, 2, \cdots, n$, los operadores $T_i : X \rightrightarrows X^*$ son θ_i-monótonos y además $\bigcap_{i=1}^{n} D(T_i) \neq \varnothing$, entonces para todo $p_i \geqslant 0$, el operador $\sum_{i=1}^{n} p_i T_i$ es $\sum_{i=1}^{n} \theta_i$-monótono.

Prueba. Por inducción sobre n:

Para $n = 1$ es trivial y para el caso $n = 2$ ya se probó en el corolario anterior.

Ahora, suponiendo valido el enunciado para $n = h$, para $n = h + 1$ tenemos:

Sean $T_1, \cdots, T_h, T_{h+1}$ operadores $\theta_1, \cdots, \theta_h, \theta_{h+1}$-monótonos respectivamente.

Dados $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_h,\ p_{h+1}$, por hipótesis inductiva $\sum_{i=1}^{h} p_i T_i$ es $\sum_{i=1}^{h} \theta_i$-monótono, luego:

$$\sum_{i=1}^{h+1} p_i T_i = \sum_{i=1}^{h} p_i T_i + p_{h+1} T_{h+1} \ \text{ es } \ \sum_{i=1}^{h} \theta_i + p_{h+1}\theta_{h+1} = \sum_{i=1}^{h+1} \theta_i - \ \text{ monótono.}$$

■

Corolario 3.16. Resta de operadores θ-Monótonos

Sean $S : X \rightrightarrows X^*$ y $T : X \rightrightarrows X^*$ operadores θ y θ_s^T-monótonos respectivamente, entonces $S - T$ es $\theta + \theta_s^T$-monótono.

Prueba. Por el Corolario 3.12 $-T$ es θ_s^T-monótono, luego del Teorema 3.18, $S + (-T) = S - T$ es $\theta + \theta_s^T$-monótono.

■

Corolario 3.17. Sea T es θ y θ_s^T-monótono , entonces $T - T$ es $\theta + \theta_s^T$-monótono

Prueba. Tomar $S = T$ en el corolario anterior.

■

Teorema 3.19. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador tal que Tx es acotado para todo $x \in X$, entonces $T - T$ es θ_{d^+}-monótono, con*

$$\theta_{d^+}(x, y) = -(diam(Tx) + diam(Ty))$$

Prueba. Sean $x, y \in D(T)$, dados $u \in (T-T)x$ y $v \in (T-T)y$, existen $u_1, u_2 \in Tx$ y $v_1, v_2 \in Ty$ tales que $u = u_1 - u_2$ y $v = v_1 - v_2$, además:

$$|\langle u-v, x-y\rangle| \leqslant \|u-v\|\|x-y\| \leqslant (\|u\|+\|v\|)\|x-y\| = (\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)\|x-y\|$$

$$\leqslant (\sup_{f,\, g \in Tx} \|f-g\| + \sup_{f,\, g \in Ty} \|f-g\|)\|x-y\| = (diam(Tx) + diam(Ty))\|x-y\|.$$

Luego definiendo:

$$\theta_{d^+}(x,y) = \begin{cases} -(diam(Tx) + diam(Ty)) & \text{si: } x, y \in D(T) \\ 0 & \text{si: } x \text{ o } y \notin D(T) \end{cases}$$

Se tiene que $T-T$ es θ_{d^+}-monótono.

De la misma manera, si ahora definimos:

$$\theta_{d^x}(x,y) = \begin{cases} -2\,\text{máx}\{diam(Tx), diam(Ty)\} & \text{si: } x, y \in D(T) \\ 0 & \text{si: } x \text{ o } y \notin D(T) \end{cases}$$

Como $\theta_{d^+} \geqslant \theta_{d^x}$, por el Corolario 3.2 entonces $T-T$ también es θ_{d^x}-monótono.

Por otra parte, como:

$$\sup_{f,\, g \in Tx} \|f-g\| + \sup_{f,\, g \in Ty} \|f-g\| \leqslant \sup_{f,\, g \in Tx} \|f\| + \|g\| + \sup_{f,\, g \in Ty} \|f\| + \|g\|)$$

$$\leqslant 2 \sup_{f \in Tx} \|f\| + 2 \sup_{g \in Ty} \|g\| = 2(\sup_{f \in Tx} \|f\| + \sup_{g \in Ty} \|g\|) \leqslant 4\,\text{máx}\{\sup_{f \in Tx} \|f\|, \sup_{g \in Ty} \|g\|\}.$$

Definiendo:

$$\theta^T_{s^+}(x,y) = \begin{cases} -(\sup_{f \in Tx} \|f\| + \sup_{g \in Ty} \|g\|) & \text{si: } x, y \in D(T) \\ 0 & \text{si: } x \text{ o } y \notin D(T) \end{cases}$$

Además, si:

$$\theta^T_{s^{++}}(x,y) = \begin{cases} -2\,\text{máx}\{\sup_{f \in Tx} \|f\|, \sup_{g \in Ty} \|g\|\} & \text{si: } x, y \in D(T) \\ 0 & \text{si: } x \text{ o } y \notin D(T) \end{cases}$$

Concluimos que $T-T$ es $2\theta^T_{s^+}$ y $2\theta^T_{s^{++}}$-monótono.

■

3.5. Operadores acotados

En el Teorema 3.12 vimos que un operador constante globalmente acotado es θ-monótono, luego en el Teorema 3.19 mostramos que si T es acotado, entonces $T-T$ es θ-monótono. En esta sección veremos que los operadores acotados, globalmente acotados y localmente acotados también son θ-monótonos e intentaremos dar condiciones en la medida de lo posible para que se cumpla lo recíproco.

Teorema 3.20. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador acotado, entonces T es $\theta^T_{s^+}$ y $\theta^T_{s^{++}}$-monótono.*

Prueba. Como T es acotado, para todo $x \in D(T)$ existe $\sup_{f\in Tx} \|f\| < \infty$, luego, si $(x,u),(y,v) \in G(T)$ tenemos:

$$|\langle u-v, x-y\rangle| \leqslant \|u-v\|\|x-y\| \leqslant (\|u\|+\|v\|)\|x-y\|$$

$$\leqslant (\sup_{f\in Tx}\|f\| + \sup_{g\in Ty}\|g\|)\|x-y\| \leqslant 2\,\text{máx}\{\sup_{f\in Tx}\|f\|, \sup_{g\in Ty}\|g\|\}\|x-y\|$$

Pero, del Teorema 3.19:

$$-\theta^T_{s^+}(x,y) = \sup_{f\in Tx}\|f\| + \sup_{g\in Ty}\|g\| \quad \text{y} \quad -\theta^T_{s^{++}}(x,y) = 2\,\text{máx}\{\sup_{f\in Tx}\|f\|, \sup_{g\in Ty}\|g\|\}$$

Entonces:

$$\langle u-v, x-y\rangle \geqslant \theta^T_{s^+}(x,y)\|x-y\| \quad \text{y} \quad \langle u-v, x-y\rangle \geqslant \theta^T_{s^{++}}(x,y)\|x-y\|$$

Es decir, T es $\theta^T_{s^+}$ y $\theta^T_{s^{++}}$-monótono.

■

Podemos encontrar una prueba parecida del teorema anterior en [32].

Corolario 3.18. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador globalmente acotado o localmente acotado. Entonces T es $\theta^T_{s^+}$ y $\theta^T_{s^{++}}$-monótono

Prueba. Si T es globalmente acotado o localmente acotado, del Teorema 2.10, T es acotado, luego, del teorema anterior, T es $\theta^T_{s^+}$ y $\theta^T_{s^{++}}$-monótono ■

Observación 3.10. En el corolario anterior, si T es globalmente acotado, entonces existe $r > 0$ tal que $\|u\| \leqslant r$ para todo $u \in T(X) = T(D(T))$, así, para todo $x \in D(T)$ se tiene $\sup_{u \in Tx} \|u\| \leqslant r$ y por tanto $2\,\text{máx}\{\sup_{f \in Tx} \|f\|, \sup_{g \in Ty} \|g\|\} \leqslant 2r$. Luego, si definimos $\theta_r^T(x,y) = -2r$ para todo $x, y \in X$ tenemos que $\theta_{s^{++}}^T(x,y) \geqslant \theta_r^T(x,y)$, así, gracias al Corolario 3.2, T es θ_r^T-monótono. Ver [32] para otra prueba.

Observación 3.11. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, entonces si existen θ_s^T, $\theta_{s^+}^T$, $\theta_{s^{++}}^T$, θ_r^T, se cumple $\theta_s^T \geqslant \theta_{s^+}^T \geqslant \theta_{s^{++}}^T \geqslant \theta_r^T$.

Teorema 3.21. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, T es acotado si y solo si T es θ_s^T-monótono.*

Prueba. Si T es acotado, sean $x, y \in D(T)$ fijos, dados $u \in Tx$ y $v \in Ty$, como $\|u - v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \leqslant \sup_{f \in Tx} \|f\| + \sup_{g \in Ty} \|g\| = -\theta_{s^+}^T(x,y) < \infty$. Entonces, existe $\sup_{u \in Tx,\, v \in Ty} \|u - v\| \leqslant -\theta_{s^+}^T(x,y) < \infty$ y del Teorema 3.16, T es θ_s^T-monótono. Por otra parte, si T es θ_s^T-monótono, entonces $\sup_{u \in Tx,\, v \in Ty} \|u - v\| < \infty$ para todo $x, y \in D(T)$, en particular, para $x = y$, tenemos $diam(Tx) = \sup_{u,v \in Tx} \|u - v\| < \infty$. Por lo tanto Tx es acotado para todo $x \in D(T)$, es decir, T es acotado.

■

Corolario 3.19. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador globalmente acotado o localmente acotado. Entonces T es θ_s^T-monótono.

Prueba. Del Teorema 2.10, T es acotado y por tanto es θ_s^T-monótono.

■

Ejemplo 3.14. Conjunto Dualidad:

Sea $J_X : X \rightrightarrows X^*$ el operador dualidad definido en el Ejemplo 2.24, como J_X es acotado y localmente acotado, entonces es θ_s^T, $\theta_{s^+}^T$ y $\theta_{s^{++}}^T$-monótono, donde en particular $\theta_{s^+}^T(x,y) = -(\sup_{u \in J_X x} \|u\| + \sup_{v \in J_X y} \|v\|) = -(\|x\| + \|y\|)$.
Además $\theta_{s^{++}}^T(x,y) = -2\,\text{máx}\{\sup_{u \in J_X x} \|u\|, \sup_{v \in J_X y} \|v\|\} = -2\,\text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$.

Finalmente recordemos que en el Ejemplo 3.13, J_X también es θ_i-monótono, donde $\theta_i \geq 0$ y por lo anterior $0 \geq \theta_s^T \geq \theta_{s^+}^T \geq \theta_{s^{++}}^T$, así $\theta_i^T \geq \theta_i \geq 0 \geq \theta_s^T \geq \theta_{s^+}^T \geq \theta_{s^{++}}^T$.

3.6. Operadores θ-monótonos maximales

En la sección 2.3 vimos que $\mathcal{T}(X, X^*)$ está parcialmente ordenado por "$\preceq$. Sea $\mathcal{T}_\theta(X, X^*) = \{T : X \rightrightarrows X^* \ / \ T \text{ es } \theta - \text{ monótono}\}$ evidentemente también está parcialmente ordenado por la relación de orden heredada de $\mathcal{T}(X, X^*)$. Por otra parte, en el Teorema 2.7 se probó la existencia de elementos maximales en $\mathcal{T}_0(X, X^*)$ y en el Corolario 2.1 que todo operador multivaluado admite una extensión maximal, ahora veremos estos resultados en operadores θ-monótonos.

Definición 3.13. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, decimos que T es θ-monótono maximal si para cada operador θ-monótono $T' : X \rightrightarrows X^*$ tal que $T \preceq T'(\ G(T) \subseteq G(T'))$ se tenga $T = T'$.

Teorema 3.22. *Existen elementos maximales en* $\mathcal{T}_\theta(X, X^*)$

Prueba. Sea $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i\in\Lambda}$ una cadena no decreciente en $\mathcal{T}_\theta(X, X^*)$, definiendo $T = \bigcup_{i\in\Lambda} T_i$, del Teorema 2.7, T es una cota superior de $\mathcal{F}$ y además, por el Teorema 3.14, T es θ-monótono, de donde $T = \bigcup_{i\in\Lambda} T_i \in \mathcal{T}_\theta(X, X^*)$. Para finalizar, puesto que la cadena $\mathcal{F}$ es arbitraria, concluimos que toda cadena en $\mathcal{T}_\theta(X, X^*)$ posee cota superior en $\mathcal{T}_\theta(X, X^*)$, luego por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal en $\mathcal{T}_\theta(X, X^*)$. En adelante, salvo que se trate de un espacio de Banach en particular, escribiremos $\mathcal{T}_\theta = \mathcal{T}_\theta(X, X^*)$. ■

Corolario 3.20. Para todo $T \in \mathcal{T}_\theta$ existe una extensión θ-monótona maximal.

Prueba. Sea $T \in \mathcal{T}_\theta$, definamos $\mathcal{T}_T = \{S \in \mathcal{T}_\theta \ / \ T \preceq S\}$, sea $\mathcal{F}_T = \{T_i\}_{i\in\Lambda}$ una cadena no decreciente en $\mathcal{T}_T$, por el teorema anterior $\widetilde{T} = \bigcup_{i\in\Lambda} T_i$ es θ-monótono y una cota superior de $\mathcal{F}$, además puesto que $T \preceq \widetilde{T}$, entonces $\widetilde{T} \in \mathcal{T}_T$. Por lo anterior y el Lema de Zorn, existe $T' \in \mathcal{T}_T$ elemento maximal. Supongamos ahora que T' no es maximal en $\mathcal{T}_\theta$, dado $M \in \mathcal{T}_\theta$ un elemento maximal, definamos $M_T = M \cup T' \in \mathcal{T}_\theta$, entonces $M \preceq M_T$ y como M es maximal, $M = M_T$. Por otra parte, es evidente que $T \preceq T' \preceq M$, de donde $M \in \mathcal{T}_T$ y puesto que T' es maximal en $\mathcal{T}_T$, se concluye que $M = T'$, lo cual es absurdo. ■

Teorema 3.23. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, θ-monótono, entonces T es maximal si y solo si para todo operador $T' : X \rightrightarrows X^*$, θ'-monótono tal que $T \preceq T'$ y $\theta' \succeq \theta$, se tiene $T = T'$.*

Prueba. Si $T \in \mathcal{T}_\theta$ es maximal, dado $T' : X \rightrightarrows X^*$, θ'-monótono tal que $T \preceq T'$ y $\theta' \succeq \theta$, por el Teorema 3.11, T' es θ-monótono, es decir $T' \in \mathcal{T}_\theta$ y puesto que T es maximal en $\mathcal{T}_\theta$, se tiene que $T = T'$. Recíprocamente, si para todo operador $T' \in \mathcal{T}_{\theta'}$ tal que $T \preceq T'$ y $\theta' \succeq \theta$ se tiene que $T = T$, entonces T es maximal ya que por el Teorema 3.11, T' también es θ-monótono. ■

Corolario 3.21. Sea $T \in \mathcal{T}_\theta$ maximal, entonces T es θ_i^T-monótono maximal.

Prueba. Del Teorema 3.13 y Corolario 3.6 si T es θ-monótono, T es θ_i^T-monótono y $\theta_i^T \succeq \theta$, luego del teorema anterior, T es θ_i^T-monótono maximal. ■

Definición 3.14. Dos pares (x, u), $(y, v) \in X \times X^*$ están θ-monótonamente relacionados si $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$.

Teorema 3.24. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$, θ-monótono, entonces T es maximal si y solo si para todo $(z, w) \in X \times X^*$ que esté θ-monótonamente relacionado a todo $(y, u) \in G(T)$ se cumple que $w \in Tz$.*

Prueba. Sea $T \in \mathcal{T}_\theta$ es maximal, dado $(z, w) \in X \times X^*$ tal que $\langle w - v, z - y\rangle \geqslant \theta(z, y)\|z - y\|$ para todo $(y, u) \in G(T)$, definamos $T' : X \rightrightarrows X^*$ como:

$$T'x = \begin{cases} Tx & ;\text{si } x \neq z \\ Tz \cup \{w\} & ;\text{ si } x = z \end{cases}$$

Claramente $(z, w) \in G(T')$, T' es θ-monótono y $T \preceq T'$, luego como T es maximal, se tiene que $T = T'$, de donde $w \in Tz$. Por otra parte, sea $S \in \mathcal{T}_\theta$ tal que $T \preceq S$, sea $(x, u) \in G(S)$, dado $(y, v) \in G(T) \subseteq G(S)$ tenemos $\langle u' - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x-y\|$, es decir (x, u) está θ-monótonamente relacionado a todo elemento de $G(T)$ y de la hipótesis $u \in Tx$ o lo que es equivalente $(x, u) \in G(T)$, concluyendo así que $T = S$ y por tanto T es maximal. ■

Corolario 3.22. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono maximal. Entonces Tx es convexo y cerrado para todo $x \in D(T)$.

Prueba. Sea $x \in D(T)$.

Tx **es convexo:** Sean $u, v \in Tx$ y sea $t \in \langle 0, 1\rangle$, entonces para todo $(y, w) \in G(T)$ se tiene $\langle u - w, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$ y $\langle v - w, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$, luego:

$$\langle (1-t)u + tv - w, x - y\rangle = \langle (1-t)u + tv - (1-t)w - tw, x - y\rangle$$

$$= \langle (1-t)(u-w) + t(v-w), x - y\rangle = (1-t)\langle u - w, x - y\rangle + t\langle v - w, x - y\rangle$$

$$\geqslant (1-t)\theta(x, y)\|x - y\| + t\theta(x, y)\|x - y\| = \theta(x, y)\|x - y\|$$

De donde $(x, (1-t)u+tv)$ está θ-monótonomente relacionada a todo $(y, v) \in G(T)$ luego, por el teorema anterior, $(1-t)u + tv) \in Tx$.

Tx **es cerrado:** Sea $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq Tx$ tal que $u_k \to u$ en X^*, dado $(y, v) \in G(T)$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos $\langle u_k - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x-y\|$, luego tomando límite $\langle u - v, x - y\rangle \geqslant \theta(x, y)\|x - y\|$ se tiene que (x, u) está θ-monótonamente relacionado a todo $(y, v) \in G(T)$. Luego como T es maximal, por el teorema anterior $u \in Tx$, por lo tanto, Tx es cerrado. ■

Capítulo 4

Una fórmula para encontrar θ en $\mathbb{R}^2$

En el capítulo anterior, vimos algunas maneras de encontrar la función θ dado un operador $T : X \rightrightarrows X^*$ de modo que T resulte ser θ-monótono. Ahora en este capítulo mostraremos una fórmula para encontrar la función θ en el caso particular de un operador univaluado $T : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ donde p y q son dos funciones polinomiales. Esta fórmula será usada para comprobar algunos ejemplos dados en el capítulo anterior como también en [32].

4.1. Polinomios en dos variables

Veamos ahora una representación para un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$.
Sea $p(x, y)$ un polinomio de grado n en dos variables, entonces:

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{n-i,j} x^{n-i-j} y^j$$

Donde $\alpha_{n-i,j} \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ y $j \in \{0, 1, 2, \cdots, n - i\}$, además, si que $x^0 = y^0 = x^0 y^0 = 1$, tenemos que $\alpha_{0,0}$ es el término independiente(T.I.).
Veamos ahora de forma extendida a p según la representación elegida.

Para $i = 0 : \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j} x^{n-j} y^j$ tenemos $n + 1$ términos de grado n.

$$\alpha_{n,0} x^n + \alpha_{n,1} x^{n-1} y + \alpha_{n,2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \alpha_{n,n-2} x^2 y^{n-2} + \alpha_{n,n-1} x^1 y^{n-1} + \alpha_{n,n} y^n$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Para } i=1: \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n-1,j} x^{n-1-j} y^j \quad \text{tenemos } n \text{ términos de grado } n-1. \\
&\alpha_{n-1,0} x^{n-1} + \alpha_{n-1,1} x^{n-2} y + \cdots + \alpha_{n-1,n-2} x^1 y^{n-2} + \alpha_{n-1,n-1} y^{n-1} \\
&\text{Para } i=2: \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{n-2,j} x^{n-2-j} y^j \quad \text{tenemos } n-1 \text{ términos de grado } n-2. \\
&\qquad = \alpha_{n-2,0} x^{n-2} + \alpha_{n-2,1} x^{n-3} y + \cdots + \alpha_{n-2,n-2} y^{n-2} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\text{Para } i=n-2: \sum_{j=0}^{2} \alpha_{2,j} x^{2-j} y^j \quad (\text{ 3 términos de grado 2}) \\
&\qquad = \alpha_{2,0} x^2 + \alpha_{2,1} xy + \alpha_{2,2} y^2 \\
&\text{Para } i=n-1: \sum_{j=0}^{1} \alpha_{1,j} x^{1-j} y^j = \alpha_{1,0} x + \alpha_{1,1} y \quad (\text{ 2 términos de grado 1}) \\
&\text{Para } i=n: \sum_{j=0}^{0} \alpha_{0,j} x^{-j} y^j = \alpha_{0,0} \quad (\text{ 1 término de grado 0})
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
p(x,y) = \; & \alpha_{n,0} x^n + \alpha_{n,1} x^{n-1} y + \cdots + \alpha_{n,n-2} x^2 y^{n-2} + \alpha_{n,n-1} x^1 y^{n-1} + \alpha_{n,n} y^n \\
& + \alpha_{n-1,0} x^{n-1} + \alpha_{n-1,1} x^{n-2} y + \cdots + \alpha_{n-1,n-2} x^1 y^{n-2} + \alpha_{n-1,n-1} y^{n-1} \\
& + \alpha_{n-2,0} x^{n-2} + \alpha_{n-2,1} x^{n-3} y + \cdots + \alpha_{n-2,n-2} y^{n-2} \\
& \qquad \vdots \\
& + \alpha_{2,0} x^2 + \alpha_{2,1} xy + \alpha_{2,2} y^2 \\
& + \alpha_{1,0} x + \alpha_{1,1} y \\
& \underbrace{+\alpha_{0,0}}_{j=0} \quad \underbrace{\uparrow}_{j=1} \quad \underbrace{\uparrow}_{j=2} \quad \cdots \quad \underbrace{\uparrow}_{j=n-2} \quad \underbrace{\uparrow}_{j=n-1} \quad \underbrace{\uparrow}_{j=n}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

De 4.1 tenemos las siguientes expresiones para p:

$$p(x,y) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-i}\alpha_{n-i,j}x^{n-i-j}y^j + \underbrace{\sum_{j=0}^{1}\alpha_{1,j}x^{1-j}y^j + \underbrace{\alpha_{0,0}}_{\text{grado n } = 0}}_{\text{grado n } \leqslant 1}}_{\text{grado n } \geqslant 2} \tag{4.3}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\alpha_{n-i,j}x^{n-i-j}y^j}_{\text{aparecen xy}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{n-i,0}x^{n-i}}_{\text{polinomio en x}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{n-i,n-i}y^{n-i}}_{\text{polinomio en y}} + \underbrace{\alpha_{0,0}}_{\text{T.I.}} \tag{4.4}$$

Observación 4.1. En 4.3 vemos que la primera sumatoria estará presente si el polinomio es de grado mayor o igual a dos, la ausencia de esta sumatoria será un indicador de que el polinomio es de grado menor o igual a uno, y por último, si solo aparece el último término, entonces el polinomio será constante.

Observación 4.2. La expresión dada en 4.4 fue obtenida de 4.2, en ella podemos identificar cuatro partes importantes, la primera sumatoria, donde aparecen las dos variables, xy, está conformada por términos de grado mayor o igual a dos, entonces si p es de grado menor o igual a 1, esta sumatoria no estará presente. En la segunda sumatoria vemos que solo aparece la variable x y en la tercera solo la variable y, en ambos casos, estas sumatorias representan a polinomios en una sola variable, sin término independiente, es decir, polinomios de grado mayor o igual a 1. Finalmente, la cuarta y última parte de esta expresión está reservada para el término independiente.

4.2. Una fórmula para θ en $\mathbb{R}^2$

En esta sección usaremos las observaciones anteriores para encontrar una fórmula que permita calcular la función θ en el caso de un operador univaluado de tipo polinomial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ de tal forma que este resulte ser θ-monótono.

Teorema 4.1. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *definida para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *como*

$$T(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$$

Si p *y* q *son funciones polinomiales, entonces* T *es* θ*-monótono.*

Prueba. Sea $n = \text{máx}\{Gr(p), Gr(q)\} \in \mathbb{N}$ entonces para simplificar los cálculos escribamos ambos polinomios como si se fueran polinomios de grado n, aunque eso no suceda para ambos:

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{n-i,j} x^{n-i-j} y^j \qquad , \qquad q(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \beta_{n-i,j} x^{n-i-j} y^j$$

Donde $\alpha_{n-i,j}, \beta_{n-i,j} \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ y $j \in \{0, 1, 2, \cdots, n-i\}$. Para todo $(x, y); (u, v) \in \mathbb{R}^2$ definamos:

$$p_1(x, y, u, v) = p(x, y) - p(u, v) \quad , \quad q_1(x, y, u, v) = q(x, y) - q(u, v)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\langle T(x, y) - T(u, v), (u, v) - (x, y) \rangle \\
&= \langle (p(x, y), q(x, y)) - (p(u, v), q(u, v)), -(x - u, y - v) \rangle \\
&= \langle (p(x, y) - p(u, v), q(x, y) - q(u, v)), -(x - u, y - v) \rangle \\
&= \langle (p_1(x, y, u, v), q_1(x, y, u, v)), -(x - u, y - v) \rangle \\
&= -(x - u) p_1(x, y, u, v) - (y - v) q_1(x, y, u, v)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Calculemos ahora una forma explícita para p_1 y de ello también para q_1:

$$p_1(x, y, u, v) = p(x, y) - p(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{n-i,j} x^{n-i-j} y^j - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{n-i,j} u^{n-i-j} v^j$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{n-i,j} (x^{n-i-j} y^j - u^{n-i-j} v^j) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{n-i,j} (x^{n-i-j} y^j - u^{n-i-j} v^j) \tag{4.6}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{n-i,j} (x^{n-i-j} y^j - u^{n-i-j} v^j) + \sum_{j=0}^{1} \alpha_{1,j} (x^{1-j} y^j - u^{1-j} v^j) \tag{4.7}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \alpha_{n-i,j}(x^{n-i-j}y^j - u^{n-i-j}v^j) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i,0}(x^{n-i} - u^{n-i}) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i,n-i}(y^{n-i} - v^{n-i}) \tag{4.8}$$

Luego

$$p_1(x,y,u,v) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \alpha_{n-i,j}(x^{n-i-j}y^j - u^{n-i-j}v^j) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i,0}(x^{n-i} - u^{n-i}) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i,n-i}(y^{n-i} - v^{n-i})$$

De manera análoga

$$q_1(x,y,u,v) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \beta_{n-i,j}(x^{n-i-j}y^j - u^{n-i-j}v^j) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-i,0}(x^{n-i} - u^{n-i}) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-i,n-i}(y^{n-i} - v^{n-i})$$

Notemos que en 4.6 se tiene que $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Esta ausencia del valor n en el conjunto anterior se debe a que p_1 y por tanto q_1 carecen de término independiente. Entonces, si $n = 0$, es decir, si p y q son polinomios constantes, entonces p_1 y q_1 son ambos nulos y por tanto T será θ-monótono, con $\theta = 0$. Pero si p y q son de grado mayor o igual a uno, entonces p_1 y q_1 también serán de grado mayor o igual a uno, es natural entonces preguntarse que pasa en el caso particular $n = 1$. Pues bien, si $n = 1$, por lo menos uno de los polinomios p o q son de grado uno y si alguno de ellos, por ejemplo q, fuese constante, entonces como vimos en el caso anterior $q_1 = 0$, quedando solo por analizar p_1, por esto, aunque uno de ellos sea constante, usaremos 4.7 para escribir p_1 y q_1 como polinomios de primer grado. Pero, por la Observación 4.1 la primera sumatoria no estará presente.

$$p_1(x,y,u,v) = \sum_{j=0}^{1} \alpha_{1,j}(x^{1-j}y^j - u^{1-j}v^j) = \alpha_{1,0}(x-u) + \alpha_{1,1}(y-v)$$

$$q_1(x,y,u,v) = \sum_{j=0}^{1} \beta_{1,j}(x^{1-j}y^j - u^{1-j}v^j) = \beta_{1,0}(x-u) + \beta_{1,1}(y-v)$$

Entonces, de 4.5 se tiene:

$$\begin{aligned}
&\langle T(x,y) - T(u,v), (u,v) - (x,y)\rangle = -(x-u)p_1(x,y,u,v) - (y-v)q_1(x,y,u,v)\\
&= -(x-u)(\alpha_{1,0}(x-u) + \alpha_{1,1}(y-v)) - (y-v)(\beta_{1,0}(x-u) + \beta_{1,1}(y-v))\\
&= -[(x-u)^2\alpha_{1,0} + (x-u)(y-v)(\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}) + (y-v)^2\beta_{1,1}]\\
&\qquad\qquad (\text{Haciendo } \ r = x-u \ \ , \ \ s = y-v)\\
&= -[r^2\alpha_{1,0} + rs(\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}) + s^2\beta_{1,1}]
\end{aligned}$$

Luego, dividiendo por $\|(r,s)\| = \sqrt{r^2+s^2} = \|(x-u, y-v)\|$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\langle T(x,y) - T(u,v), (u,v) - (x,y)\rangle}{\|(x-u,y-v)\|} = -\frac{r^2\alpha_{1,0} + rs(\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}) + s^2\beta_{1,1}}{\|(r,s)\|}\\
&\leqslant \frac{|r^2\alpha_{1,0} + rs(\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}) + s^2\beta_{1,1}|}{\|(r,s)\|}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

La expresión anterior es relativamente sencilla y hay pocas variables a analizar, entonces será posible encontrar varias funciones θ, dependiendo de que camino tomemos, veamos algunas de ellas.

De 4.9:

$$\begin{aligned}
&\frac{|r^2\alpha_{1,0} + rs(\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}) + s^2\beta_{1,1}|}{\|(r,s)\|} \leqslant \frac{r^2|\alpha_{1,0}|}{\|(r,s)\|} + \frac{|rs||\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}|}{\|(r,s)\|} + \frac{s^2|\beta_{1,1}|}{\|(r,s)\|}\\
&\leqslant \|(r,s)\||\alpha_{1,0}| + \frac{\|(r,s)\|}{2}|\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}| + \|(r,s)\||\beta_{1,1}|
\end{aligned}$$

$$= \frac{\|(r,s)\|}{2}\left[2|\alpha_{1,0}| + |\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}| + 2|\beta_{1,1}|\right] \tag{4.10}$$

$$\leqslant \frac{\|(r,s)\|}{2}\left[2|\alpha_{1,0}| + |\alpha_{1,1}| + |\beta_{1,0}| + 2|\beta_{1,1}|\right] \tag{4.11}$$

Definiendo:

$$\theta_1((x,y),(u,v)) = -\frac{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}{2}\left[2|\alpha_{1,0}| + |\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}| + 2|\beta_{1,1}|\right]$$

$$\theta_2((x,y),(u,v)) = -\frac{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}{2}\left[2|\alpha_{1,0}| + |\alpha_{1,1}| + |\beta_{1,0}| + 2|\beta_{1,1}|\right]$$

Tenemos que T es θ_1 y θ_2-monótono, además de 4.10 y 4.11 se tiene $\theta_1 \geqslant \theta_2$. Si ahora consideramos en $\mathbb{R}^2$ la norma de la suma, del Ejemplo 1.16 en 4.10 y 4.11 obtenemos que T es θ_{1s} y θ_{2s}-monótono, con $\theta_1 \geqslant \theta_{1s}$ y $\theta_2 \geqslant \theta_{2s}$, donde:

$$\theta_{1s}((x,y),(u,v)) = -\frac{|x-u|+|y-v|}{2}\left[2|\alpha_{1,0}| + |\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}| + 2|\beta_{1,1}|\right]$$

$$\theta_{2s}((x,y),(u,v)) = -\frac{|x-u|+|y-v|}{2}\left[2|\alpha_{1,0}| + |\alpha_{1,1}| + |\beta_{1,0}| + 2|\beta_{1,1}|\right]$$

Si ahora usamos la equivalencia de normas en $\mathbb{R}^2$, del Ejemplo 1.16 en 4.9:

$$\begin{aligned}
&\frac{|r^2\alpha_{1,0} + rs(\alpha_{1,1}+\beta_{1,0}) + s^2\beta_{1,1}|}{\|(r,s)\|} \\
&= \frac{|(r+s)(\alpha_{1,0}r + \beta_{1,1}s) + rs(\alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} + \beta_{1,0} - \beta_{1,1})|}{\|(r,s)\|} \\
&\leqslant \frac{|(r+s)(\alpha_{1,0}r + \beta_{1,1}s)|}{\|(r,s)\|} + \frac{|rs||\alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} + \beta_{1,0} - \beta_{1,1}|}{\|(r,s)\|} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{2}|r+s|}{|r|+|s|}|\alpha_{1,0}r + \beta_{1,1}s| + \frac{\|(r,s)\|}{2}|\alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} + \beta_{1,0} - \beta_{1,1}| \\
&\leqslant \sqrt{2}|\alpha_{1,0}r + \beta_{1,1}s| + \frac{\|(r,s)\|}{2}|\alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} + \beta_{1,0} - \beta_{1,1}| \\
&\leqslant \sqrt{2}|\alpha_{1,0}r + \beta_{1,1}s| + \frac{\|(r,s)\|}{2}(|\alpha_{1,1} - \alpha_{1,0}| + |\beta_{1,1} - \beta_{1,0}|) \\
&\leqslant \sqrt{2}|\alpha_{1,0}r + \beta_{1,1}s| + \frac{\|(r,s)\|}{2}(|\alpha_{1,1}| + |\alpha_{1,0}| + |\beta_{1,0}| + |\beta_{1,1}|)
\end{aligned}$$

De lo anterior si definimos:

$$\begin{aligned}
\theta_{s1}((x,y),(u,v)) = &-\sqrt{2}|\alpha_{1,0}(x-u) + \beta_{1,1}(y-v)| \\
&- \frac{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}{2}|\alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} + \beta_{1,0} - \beta_{1,1}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{s2}((x,y),(u,v)) = &-\sqrt{2}|\alpha_{1,0}(x-u) + \beta_{1,1}(y-v)| \\
&- \frac{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}{2}(|\alpha_{1,1} - \alpha_{1,0}| + |\beta_{1,0} - \beta_{1,1}|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{s3}((x,y),(u,v)) = &-\sqrt{2}|\alpha_{1,0}(x-u) + \beta_{1,1}(y-v)| \\
&- \frac{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}{2}(|\alpha_{1,1}| + |\alpha_{1,0}| + |\beta_{1,0}| + |\beta_{1,1}|)
\end{aligned}$$

Entonces T será θ_{s1}, θ_{s2} y θ_{s3}-monótono donde $\theta_{s1} \geqslant \theta_{s2} \geqslant \theta_{s3}$.

Para terminar el análisis del caso $n = 1$, es importante mencionar que las funciones θ calculadas no son las únicas que hacen de T un operador θ-monótono, ya que este cálculo fue hecho sin conocer la naturaleza de los coeficientes de p y q, por tal motivo, al conocer esos valores explícitamente, saldrán a la luz nuevas funciones θ y otros métodos para calcularlas, como el los Ejemplos 3.1, 3.2, 3.3 y 3.7, pero estos son casos particulares y el objetivo de este capítulo es encontrar una fórmula general para el caso de polinomios.

Ahora veremos el caso más general, el caso $n \geqslant 2$, para esto usaremos 4.8 en 4.5.

$$
\begin{aligned}
&\langle T(x,y) - T(u,v), (u,v) - (x,y)\rangle = -(x-u)p_1(x,y,u,v) - (y-v)q_1(x,y,u,v)\\
&= -(x-u)\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\alpha_{n-i,j}(x^{n-i-j}y^j - u^{n-i-j}v^j) - (x-u)\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{n-i,0}(x^{n-i} - u^{n-i})\\
&- (x-u)\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{n-i,n-i}(y^{n-i} - v^{n-i}) - (y-v)\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\beta_{n-i,j}(x^{n-i-j}y^j - u^{n-i-j}v^j)\\
&- (y-v)\sum_{i=0}^{n-1}\beta_{n-i,0}(x^{n-i} - u^{n-i}) - (y-v)\sum_{i=0}^{n-1}\beta_{n-i,n-i}(y^{n-i} - v^{n-i})\\
&= -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}(x^{n-i-j}y^j - u^{n-i-j}v^j)\underbrace{[\alpha_{n-i,j}(x-u) + \beta_{n-i,j}(y-v)]}_{r_{i,j}}\\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1}(x^{n-i} - u^{n-i})\underbrace{[\alpha_{n-i,0}(x-u) + \beta_{n-i,0}(y-v)]}_{r_{i,0}}\\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1}(y^{n-i} - v^{n-i})\underbrace{[\alpha_{n-i,n-i}(x-u) + \beta_{n-i,n-i}(y-v)]}_{r_{i,n-i}}\\
&= -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}(x^{n-i-j}y^j - u^{n-i-j}v^j)r_{i,j} - \sum_{i=0}^{n-1}(x^{n-i} - u^{n-i})r_{i,0} + (y^{n-i} - v^{n-i})r_{i,n-i}\\
&= -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}r_{i,j}(x^{n-i-j}[y^j - v^j] + v^j[x^{n-i-j} - u^{n-i-j}])\\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1}r_{i,0}(x-u)\sum_{k=0}^{n-i-1}x^{n-i-1-k}u^k - \sum_{i=0}^{n-1}r_{i,n-i}(y-v)\sum_{k=0}^{n-i-1}y^{n-i-1-k}v^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} r_{i,j}\left(x^{n-i-j}[y-v]\sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k}v^k + v^j[x-u]\sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k}u^k\right)\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-1} r_{i,0}(x-u)\sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k}u^k - \sum_{i=0}^{n-1} r_{i,n-i}(y-v)\sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k}v^k\\
&= -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} [\alpha_{n-i,j}(x-u)+\beta_{n-i,j}(y-v)]x^{n-i-j}[y-v]\sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k}v^k\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} [\alpha_{n-i,j}(x-u)+\beta_{n-i,j}(y-v)]v^j[x-u]\sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k}u^k\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{n-i,0}(x-u)+\beta_{n-i,0}(y-v)](x-u)\sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k}u^k\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{n-i,n-i}(x-u)+\beta_{n-i,n-i}(y-v)](y-v)\sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k}v^k\\
&= -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} [\alpha_{n-i,j}(x-u)(y-v)+\beta_{n-i,j}(y-v)^2]x^{n-i-j}\sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k}v^k\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} [\alpha_{n-i,j}(x-u)^2+\beta_{n-i,j}(x-u)(y-v)]v^j\sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k}u^k\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{n-i,0}(x-u)^2+\beta_{n-i,0}(x-u)(y-v)]\sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k}u^k\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{n-i,n-i}(\underbrace{x-u}_{r})(\underbrace{y-v}_{s})+\beta_{n-i,n-i}(y-v)^2]\sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k}v^k\\
&= -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} [\alpha_{n-i,j}rs+\beta_{n-i,j}s^2]x^{n-i-j}\sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k}v^k\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} [\alpha_{n-i,j}r^2+\beta_{n-i,j}rs]v^j\sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k}u^k\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{n-i,0}r^2+\beta_{n-i,0}rs]\sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k}u^k\\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{n-i,n-i}rs+\beta_{n-i,n-i}s^2]\sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k}v^k\\
&= -rs\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\left(\alpha_{n-i,j}x^{n-i-j}\sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k}v^k + \beta_{n-i,j}v^j\sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k}u^k\right)\\
&\quad -r^2\left(\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\alpha_{n-i,j}v^j\sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k}u^k + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{n-i,0}\sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k}u^k\right)
\end{aligned}
$$

$$- s^2 \left(\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \beta_{n-i,j} x^{n-i-j} \sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k} v^k + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-i,n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k} v^k \right)$$
$$- rs \sum_{i=0}^{n-1} \left(\alpha_{n-i,n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k} v^k + \beta_{n-i,0} \sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k} u^k \right)$$

Dividiendo por $\|(r,s)\| = \sqrt{r^2+s^2} = \|(x-u, y-v)\|$ tenemos:

$$\frac{\langle T(x,y) - T(u,v), (u,v) - (x,y) \rangle}{\|(x-u, y-v)\|}$$
$$= \frac{-rs}{\|(r,s)\|} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \left(\alpha_{n-i,j} x^{n-i-j} \sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k} v^k + \beta_{n-i,j} v^j \sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k} u^k \right)$$
$$- \frac{r^2}{\|(r,s)\|} \left(\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \alpha_{n-i,j} v^j \sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k} u^k + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i,0} \sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k} u^k \right)$$
$$- \frac{s^2}{\|(r,s)\|} \left(\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \beta_{n-i,j} x^{n-i-j} \sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k} v^k + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-i,n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k} v^k \right)$$
$$- \frac{rs}{\|(r,s)\|} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\alpha_{n-i,n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k} v^k + \beta_{n-i,0} \sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k} u^k \right)$$
$$\leqslant \frac{|rs|}{\|(r,s)\|} \left| \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \left(\alpha_{n-i,j} x^{n-i-j} \sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k} v^k + \beta_{n-i,j} v^j \sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k} u^k \right) \right|$$
$$+ \frac{r^2}{\|(r,s)\|} \left| \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \alpha_{n-i,j} v^j \sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k} u^k + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i,0} \sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k} u^k \right|$$
$$+ \frac{s^2}{\|(r,s)\|} \left| \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \beta_{n-i,j} x^{n-i-j} \sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k} v^k + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-i,n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k} v^k \right|$$
$$+ \frac{|rs|}{\|(r,s)\|} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\alpha_{n-i,n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k} v^k + \beta_{n-i,0} \sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k} u^k \right) \right|$$
$$\leqslant \frac{\|(r,s)\|}{2} \left| \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \left(\alpha_{n-i,j} x^{n-i-j} \sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k} v^k + \beta_{n-i,j} v^j \sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k} u^k \right) \right|$$
$$+ \|(r,s)\| \left| \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \alpha_{n-i,j} v^j \sum_{k=0}^{n-i-j-1} x^{n-i-j-1-k} u^k + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i,0} \sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k} u^k \right|$$
$$+ \|(r,s)\| \left| \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \beta_{n-i,j} x^{n-i-j} \sum_{k=0}^{j-1} y^{j-1-k} v^k + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-i,n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k} v^k \right|$$
$$+ \frac{\|(r,s)\|}{2} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\alpha_{n-i,n-i} \sum_{k=0}^{n-i-1} y^{n-i-1-k} v^k + \beta_{n-i,0} \sum_{k=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-k} u^k \right) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\|(r,s)\|}{2}\left[\left|\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\left(\alpha_{n-i,j}x^{n-i-j}\sum_{k=0}^{j-1}y^{j-1-k}v^k+\beta_{n-i,j}v^j\sum_{k=0}^{n-i-j-1}x^{n-i-j-1-k}u^k\right)\right|\right.\\
&\quad+2\left|\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\alpha_{n-i,j}v^j\sum_{k=0}^{n-i-j-1}x^{n-i-j-1-k}u^k+\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{n-i,0}\sum_{k=0}^{n-i-1}x^{n-i-1-k}u^k\right|\\
&\quad+2\left|\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\beta_{n-i,j}x^{n-i-j}\sum_{k=0}^{j-1}y^{j-1-k}v^k+\sum_{i=0}^{n-1}\beta_{n-i,n-i}\sum_{k=0}^{n-i-1}y^{n-i-1-k}v^k\right|\\
&\quad\left.+\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha_{n-i,n-i}\sum_{k=0}^{n-i-1}y^{n-i-1-k}v^k+\beta_{n-i,0}\sum_{k=0}^{n-i-1}x^{n-i-1-k}u^k\right)\right|\right]\\
&= \frac{\|(r,s)\|}{2}\left[\left|\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{j-1}\alpha_{n-i,j}x^{n-i-j}y^{j-1-k}v^k\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{n-i-j-1}\beta_{n-i,j}x^{n-i-j-1-k}u^kv^j\right|\\
&\quad+\left|\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{n-i-j-1}2\alpha_{n-i,j}x^{n-i-j-1-k}u^kv^j+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}2\alpha_{n-i,0}x^{n-i-1-k}u^k\right|\\
&\quad+\left|\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{j-1}2\beta_{n-i,j}x^{n-i-j}y^{j-1-k}v^k+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}2\beta_{n-i,n-i}y^{n-i-1-k}v^k\right|\\
&\quad\left.+\left|\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}\alpha_{n-i,n-i}y^{n-i-1-k}v^k+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}\beta_{n-i,0}x^{n-i-1-k}u^k\right|\right]\\
&\leqslant \frac{\|(r,s)\|}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{j-1}|\alpha_{n-i,j}||x|^{n-i-j}|y|^{j-1-k}|v|^k\right.\\
&\qquad+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{n-i-j-1}|\beta_{n-i,j}||x|^{n-i-j-1-k}|u|^k|v|^j\\
&\qquad+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{n-i-j-1}2|\alpha_{n-i,j}||x|^{n-i-j-1-k}|u|^k|v|^j\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}2|\alpha_{n-i,0}||x|^{n-i-1-k}|u|^k+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{j-1}2|\beta_{n-i,j}||x|^{n-i-j}|y|^{j-1-k}|v|^k\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}2|\beta_{n-i,n-i}||y|^{n-i-1-k}|v|^k+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}|\alpha_{n-i,n-i}||y|^{n-i-1-k}|v|^k\\
&\quad\left.+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}|\beta_{n-i,0}||x|^{n-i-1-k}|u|^k\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\|(r,s)\|}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{j-1}(|\alpha_{n-i,j}|+2|\beta_{n-i,j}|)|x|^{n-i-j}|y|^{j-1-k}|v|^k\right.$$
$$+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{n-i-j-1}(2|\alpha_{n-i,j}|+|\beta_{n-i,j}|)|x|^{n-i-j-1-k}|u|^k|v|^j$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}(2|\alpha_{n-i,0}|+|\beta_{n-i,0}|)|x|^{n-i-1-k}|u|^k$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}(|\alpha_{n-i,n-i}|+2|\beta_{n-i,n-i}|)|y|^{n-i-1-k}|v|^k\right]$$

Considerando lo anterior definamos $\theta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$\theta((x,y),(u,v))$$
$$= -\frac{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{j-1}(|\alpha_{n-i,j}|+2|\beta_{n-i,j}|)|x|^{n-i-j}|y|^{j-1-k}|v|^k\right.$$
$$+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}\sum_{k=0}^{n-i-j-1}(2|\alpha_{n-i,j}|+|\beta_{n-i,j}|)|x|^{n-i-j-1-k}|u|^k|v|^j$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}(2|\alpha_{n-i,0}|+|\beta_{n-i,0}|)|x|^{n-i-1-k}|u|^k$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i-1}(|\alpha_{n-i,n-i}|+2|\beta_{n-i,n-i}|)|y|^{n-i-1-k}|v|^k\right]$$

De esto

$$\frac{\langle T(x,y)-T(u,v),(u,v)-(x,y)\rangle}{\|(x-u,y-v)\|} \leqslant -\theta((x,y),(u,v))$$

O lo que es equivalente

$$\langle T(x,y)-T(u,v),(x,y)-(u,v)\rangle \geqslant \theta((x,y),(u,v))\|(x,y)-(u,v)\|$$

■

Observación 4.3. La última fórmula encontrada para θ en el caso $n \geqslant 2$ muestra que en realidad continúa siendo válida para los casos $n = 0$ y $n = 1$, para ello notemos que si $n = 0$, entonces todas las sumatorias presentes desaparecerían por no contener ningún sumando y por tanto $\theta = 0$. Algo similar sucede en el caso

$n = 1$, donde las primeras dos sumatorias desaparecerían, quedando solamente las últimas dos sumatorias, de donde

$$\begin{aligned}
\theta((x,y),(u,v)) &= -\frac{\|(r,s)\|}{2}\left[\sum_{i=0}^{1-1}\sum_{k=0}^{1-i-1}(2|\alpha_{1-i,0}|+|\beta_{1-i,0}|)|x|^{1-i-1-k}|u|^k\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{i=0}^{1-1}\sum_{k=0}^{1-i-1}(|\alpha_{1-i,1-i}|+2|\beta_{1-i,1-i}|)|y|^{1-i-1-k}|v|^k\right]\\
&= -\frac{\|(r,s)\|}{2}\left[\sum_{i=0}^{0}\sum_{k=0}^{-i}(2|\alpha_{1-i,0}|+|\beta_{1-i,0}|)|x|^{-i-k}|u|^k\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{i=0}^{0}\sum_{k=0}^{-i}(|\alpha_{1-i,1-i}|+2|\beta_{1-i,1-i}|)|y|^{-i-k}|v|^k\right]\\
&= -\frac{\|(r,s)\|}{2}\left[\sum_{k=0}^{0}(2|\alpha_{1,0}|+|\beta_{1,0}|)|x|^{-k}|u|^k+\sum_{k=0}^{0}(|\alpha_{1,1}|+2|\beta_{1,1}|)|y|^{-k}|v|^k\right]\\
&= -\frac{\|(r,s)\|}{2}\left[(2|\alpha_{1,0}|+|\beta_{1,0}|)|x|^0|u|^0+(|\alpha_{1,1}|+2|\beta_{1,1}|)|y|^0|v|^0\right]\\
&= -\frac{\|(x-u,y-v)\|}{2}\left[2|\alpha_{1,0}|+|\beta_{1,0}|+|\alpha_{1,1}|+2|\beta_{1,1}|\right]
\end{aligned}$$

De esta manera, si consideramos la norma euclideana, tenemos que $\theta = \theta_2$ y si consideramos la norma de la suma se tiene $\theta = \theta_{2s}$.

4.3. El algoritmo

Ahora veremos el pseudocódigo del teorema anterior, cuya implementación computacional en **C**++ mostramos en el Anexo B y será usada para comparar sus resultados con lo obtenido de forma manual en algunos ejemplos anteriores y en [32]. Cabe mencionar que las diferencias entre el pseudocódigo y el código en **C**++ se debe en gran parte a la estética del mismo en cuanto a lo mostrado en pantalla. Además de ello, hay un procedimiento que es opcional en el código, este es "void muestraCerosEnPolinomio", cuya finalidad es solo instructiva, pues nos muestra

a los dos polinomios como si tuvieran el mismo grado, esto se logra llenando de ceros los coeficientes faltantes.

Sean $p(x,y)$ y $q(x,y)$ dos polinomios tales que:

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p-i} \alpha_{p-i,j} x^{p-i-j} y^j \qquad , \qquad q(x,y) = \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{q-i} \beta_{q-i,j} x^{q-i-j} y^j$$

Inicio

Leer grado de $p(x,y) = p$;

Leer grado de $q(x,y) = q$;

Si $p - q >= 0$

Entonces $n \leftarrow p$;

Si no $n \leftarrow q$;

Escribir "Consideramos que $p(x,y)$ y $q(x,y)$ tienen el mismo grado : " n;

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{n-i,j} x^{n-i-j} y^j \qquad , \qquad q(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \beta_{n-i,j} x^{n-i-j} y^j$$

Leer coeficientes de $p(x,y)$ y $q(x,y)$

Para $i = 0$ hasta n

Para $j = 0$ hasta $n - i$

Leer coeficiente $a_{n-i,j}$ de $x^{n-i-j}y^j = a[n-i][j]$;

Leer coeficiente $b_{n-i,j}$ de $x^{n-i-j}y^j = b[n-i][j]$;

FinPara

FinPara

Escribir "La función θ es "$-\dfrac{\|(x-u, y-v)\|}{2}$."

Para $i = 0$ hasta $n = 2$

Para $j = 0$ hasta $n - i - 1$

Para $k = 0$ hasta $j - 1$

Escribir $+(|a[n-i][j]| + 2|b[n-i][j]|)|x|^{n-i-j}|y|^{j-1-k}|v|^k;$

FinPara

Para $k = 0$ hasta $j - 1$

Escribir $+(2|a[n-i][j]| + |b[n-i][j]|)|x|^{n-i-j-1-k}|u|^k|v|^j;$

FinPara

FinPara

FinPara

Para $i = 0$ hasta $n - 1$

Para $k = 0$ hasta $n - i - 1$

Escribir $+(2|a[n-i][0]| + |b[n-i][0]|)|x|^{n-i-1-k}|u|^k;$

FinPara

FinPara

Para $i = 0$ hasta $n - 1$

Para $k = 0$ hasta $n - i - 1$

Escribir $+(|a[n-i][n-i]| + 2|b[n-i][n-i]|)|y|^{n-i-1-k}|v|^k;$

FinPara

FinPara

Fin

4.4. Ejemplos

En los siguientes ejemplos se uso el complidador en línea onlinegdb.com con el lenguaje de programación **C++**, cuyo código se puede encontrar en el Anexo B. Usaremos $\vec{x} = (x, y)$ y $\vec{u} = (u, v)$ como abreviación y la función θ_c será la función θ encontrada con el código en **C++**.

Ejemplo 4.1. Del Ejemplo 3.1 si $a = 2$, $b = -3$, $c = 3$ y $d = 1$: $T(x, y) = (2x - 3y, 3x + y)$ es θ-monótono, donde $\theta(\vec{x}, \vec{u}) = 0$ y en la figura de la derecha $\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -6\|\vec{x} - \vec{u}\|$.
Resulta evidente que $\theta \geqslant \theta_c$ y por tanto T es θ_c-monótono.

```
Sea T(x,y) = ( p(x,y) , q(x,y) )

Si el grado de p(x,y) es 1
Entonces p(x,y) = a[1][0]x + a[1][1]y + a[0][0]
Ingrese los coeficientes de p(x,y) :

Coef de     x     ==>  a[1][0] = 2
Coef de     y     ==>  a[1][1] = -3
T. Indpndient es  ==>  a[0][0] = 0

Si el grado de q(x,y) es 1
Entonces q(x,y) = b[1][0]x + b[1][1]y + b[0][0]
Ingrese los coeficientes de q(x,y) :

Coef de     x     ==>  b[1][0] = 3
Coef de     y     ==>  b[1][1] = 1
T. Indpndient es  ==>  b[0][0] = 0

Entonces
T(x,y) = ( + 2x -3y ; + 3x + 1y )
       = ( 2x -3y + 0 ; 3x + 1y + 0 )

La función teta está definida como:

-1/2[|(x - u , y - v )|] ( + 7 + 5  )
```

Figura 4.1: $\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -6\|\vec{x} - \vec{u}\|$.

Ejemplo 4.2. Del Ejemplo 3.2 si $a = 2$ y $b = 1$ entonces $T(x, y) = (4x + y, -x + 4y)$ es θ-monótono: $\theta(\vec{x}, \vec{u}) = 2\|\vec{x} - \vec{u}\|$
En la figura de la derecha $\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -9\|\vec{x} - \vec{u}\|$.
Como $\theta \geqslant \theta_c$, T es θ_c-monótono.

```
Sea T(x,y) = ( p(x,y) , q(x,y) )

Si el grado de p(x,y) es 1
Entonces p(x,y) = a[1][0]x + a[1][1]y + a[0][0]
Ingrese los coeficientes de p(x,y) :

Coef de     x     ==>  a[1][0] = 4
Coef de     y     ==>  a[1][1] = 1
T. Indpndient es  ==>  a[0][0] = 0

Si el grado de q(x,y) es 1
Entonces q(x,y) = b[1][0]x + b[1][1]y + b[0][0]
Ingrese los coeficientes de q(x,y) :

Coef de     x     ==>  b[1][0] = -1
Coef de     y     ==>  b[1][1] = 4
T. Indpndient es  ==>  b[0][0] = 0

Entonces
T(x,y) = ( + 4x + 1y ; -1x + 4y )
       = ( 4x + 1y + 0 ; -1x + 4y + 0 )

La función teta está definida como:

-1/2[|(x - u , y - v )|] ( + 9 + 9  )
```

Figura 4.2: $\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -9\|\vec{x} - \vec{u}\|$.

Ejemplo 4.3. Del Ejemplo 3.3
$T(x,y) = (-y, x)$ es
θ-monótono con $\theta(\vec{x}, \vec{u}) = 0$
En la figura de la derecha
$\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -\|\vec{x} - \vec{u}\|$.
Como $\theta \geqslant \theta_c$, T es θ_c-monótono.

```
Sea T(x,y) = ( p(x,y) , q(x,y) )

Si el grado de p(x,y) es 1
Entonces p(x,y) = a[1][0]x + a[1][1]y + a[0][0]
Ingrese los coeficientes de p(x,y) :

Coef de     x     ==>  a[1][0] = 0
Coef de     y     ==>  a[1][1] = -1
T. Indpndient es  ==>  a[0][0] = 0

Si el grado de q(x,y) es 1
Entonces q(x,y) = b[1][0]x + b[1][1]y + b[0][0]
Ingrese los coeficientes de q(x,y) :

Coef de     x     ==>  b[1][0] = 1
Coef de     y     ==>  b[1][1] = 0
T. Indpndient es  ==>  b[0][0] = 0

Entonces
T(x,y) = ( -1y ; + 1x )
       = ( 0x -1y + 0 ; 1x + 0y + 0 )

La función teta está definida como:

-1/2[|(x - u , y - v )|] ( + 1 + 1  )
```

Figura 4.3: $\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -\|\vec{x} - \vec{u}\|$.

Ejemplo 4.4. Del Ejemplo 3.4 y 3.7 si consideramos $a = 2$, $b = -1$ y $a = 1$, $b = 1$ tenemos que $T_1(x,y) = (-2x - y, x - 2y)$ y $T_2(x,y) = (-x + y, -x - y)$ son θ_1 y θ_2-monótonos con $\theta_1(\vec{x}, \vec{u}) = -2\|\vec{x} - \vec{u}\|$ y $\theta_2(\vec{x}, \vec{u}) = -\|\vec{x} - \vec{u}\|$. De las figuras abajo, $\theta_1 \geqslant \theta_{1c}$ y $\theta_2 \geqslant \theta_{2c}$ entonces T_1 y T_2 son θ_{1c} y θ_{2c}-monótonos.

```
Sea T(x,y) = ( p(x,y) , q(x,y) )

Si el grado de p(x,y) es 1
Entonces p(x,y) = a[1][0]x + a[1][1]y + a[0][0]
Ingrese los coeficientes de p(x,y) :

Coef de     x     ==>  a[1][0] = -2
Coef de     y     ==>  a[1][1] = -1
T. Indpndient es  ==>  a[0][0] = 0

Si el grado de q(x,y) es 1
Entonces q(x,y) = b[1][0]x + b[1][1]y + b[0][0]
Ingrese los coeficientes de q(x,y) :

Coef de     x     ==>  b[1][0] = 1
Coef de     y     ==>  b[1][1] = -2
T. Indpndient es  ==>  b[0][0] = 0

Entonces
T(x,y) = ( -2x -1y ; + 1x -2y )
       = ( -2x -1y + 0 ; 1x -2y + 0 )

La función teta está definida como:

-1/2[|(x - u , y - v )|] ( + 5 + 5  )
```

Figura 4.4: $\theta_{1c}(\vec{x}, \vec{u}) = -5\|\vec{x} - \vec{u}\|$.

```
Sea T(x,y) = ( p(x,y) , q(x,y) )

Si el grado de p(x,y) es 1
Entonces p(x,y) = a[1][0]x + a[1][1]y + a[0][0]
Ingrese los coeficientes de p(x,y) :

Coef de     x     ==>  a[1][0] = -1
Coef de     y     ==>  a[1][1] = 1
T. Indpndient es  ==>  a[0][0] = 0

Si el grado de q(x,y) es 1
Entonces q(x,y) = b[1][0]x + b[1][1]y + b[0][0]
Ingrese los coeficientes de q(x,y) :

Coef de     x     ==>  b[1][0] = -1
Coef de     y     ==>  b[1][1] = -1
T. Indpndient es  ==>  b[0][0] = 0

Entonces
T(x,y) = ( -1x + 1y ; -1x -1y )
       = ( -1x + 1y + 0 ; -1x -1y + 0 )

La función teta está definida como:

-1/2[|(x - u , y - v )|] ( + 3 + 3  )
```

Figura 4.5: $\theta_{2c}(\vec{x}, \vec{u}) = -3\|\vec{x} - \vec{u}\|$.

Ejemplo 4.5. En el Ejemplo 4.12 de [32] se da el operador $T(x,y) = (x-y, x-y)$ y la función $\theta(\vec{x},\vec{u}) = -\sqrt{2}|x-u+y-v|$ que hace de T un operador θ-monótono Si ahora definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x,y) = -\sqrt{2}|x+y|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(x,y) = -3\sqrt{x^2+y^2}$, es evidente que $f(x,y) \geqslant g(x,y)$, por tanto la función $\theta_c(\vec{x},\vec{u}) = -3\|\vec{x}-\vec{u}\|$ de la figura de la derecha hace de T un operador θ_c-monótono, ya que $\theta \geqslant \theta_c$.

```
Sea T(x,y) = ( p(x,y) , q(x,y) )

Si el grado de p(x,y) es 1
Entonces p(x,y) = a[1][0]x + a[1][1]y + a[0][0]
Ingrese los coeficientes de p(x,y) :

Coef de     x     ==>  a[1][0] = 1
Coef de     y     ==>  a[1][1] = -1
T. Indpndient es  ==>  a[0][0] = 0

Si el grado de q(x,y) es 1
Entonces q(x,y) = b[1][0]x + b[1][1]y + b[0][0]
Ingrese los coeficientes de q(x,y) :

Coef de     x     ==>  b[1][0] = 1
Coef de     y     ==>  b[1][1] = -1
T. Indpndient es  ==>  b[0][0] = 0

Entonces
T(x,y) = ( + 1x -1y ; + 1x -1y )
       = ( 1x -1y + 0 ; 1x -1y + 0 )

La función teta está definida como:

-1/2[|(x - u , y - v )|] ( + 3 + 3  )
```

Figura 4.6: $\theta_c(\vec{x},\vec{u}) = -3\|\vec{x}-\vec{u}\|$.

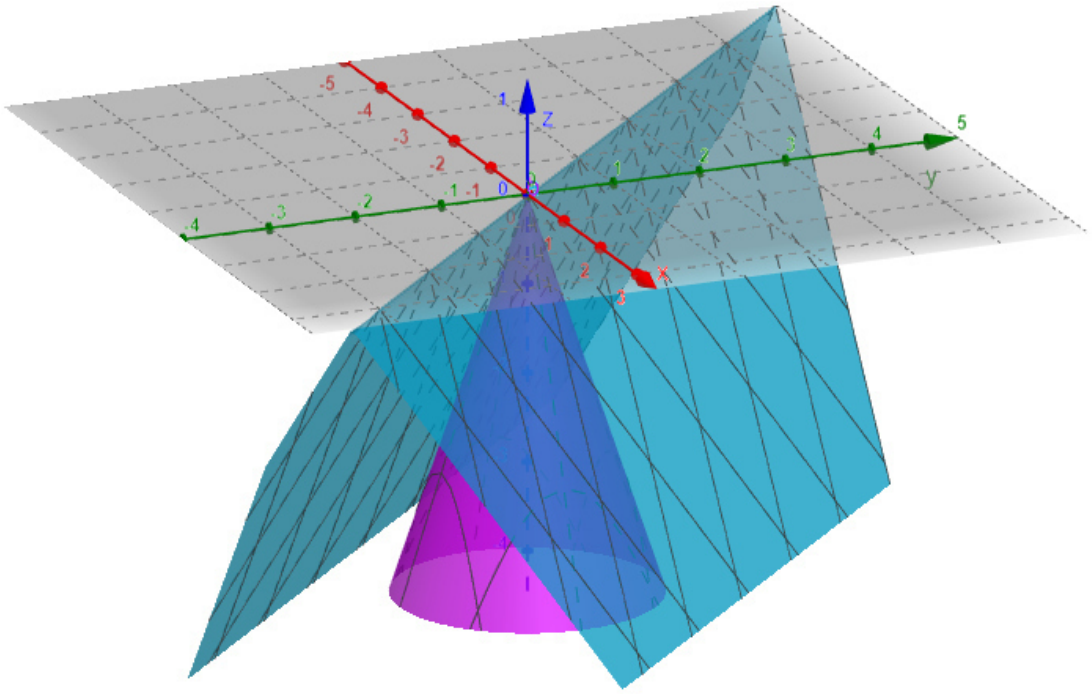


Figura 4.7: Gráfica de f y g.

geogebra.org/3d/r9ypj7pr

Ejemplo 4.6. Del Ejemplo 4.13 en [32] el operador $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 3y)$ es θ-monótono, con

$\theta(\vec{x}, \vec{u}) = -\sqrt{2}|(x - u) + 3(y - v)|$

Si como en el ejemplo anterior, definimos

$f(x, y) = -\sqrt{2}|x + 3y|$

$g(x, y) = -6\sqrt{x^2 + y^2}$

Tenemos que $f(x, y) \geqslant g(x, y)$, por tanto T un operador θ_c-monótono con $\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -6\|\vec{x} - \vec{u}\|$

```
Sea T(x,y) = ( p(x,y) , q(x,y) )

Si el grado de p(x,y) es 1
Entonces p(x,y) = a[1][0]x + a[1][1]y + a[0][0]
Ingrese los coeficientes de p(x,y) :

Coef de     x     ==>  a[1][0] = 1
Coef de     y     ==>  a[1][1] = 2
T. Indpndient es  ==>  a[0][0] = 0

Si el grado de q(x,y) es 1
Entonces q(x,y) = b[1][0]x + b[1][1]y + b[0][0]
Ingrese los coeficientes de q(x,y) :

Coef de     x     ==>  b[1][0] = 2
Coef de     y     ==>  b[1][1] = 3
T. Indpndient es  ==>  b[0][0] = 0

Entonces
T(x,y) = ( + 1x + 2y ; + 2x + 3y )
       = ( 1x + 2y + 0 ; 2x + 3y + 0 )

La función teta está definida como:

-1/2[|(x - u , y - v )|] ( + 4 + 8  )
```

Figura 4.8: $\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -6\|\vec{x} - \vec{u}\|$.

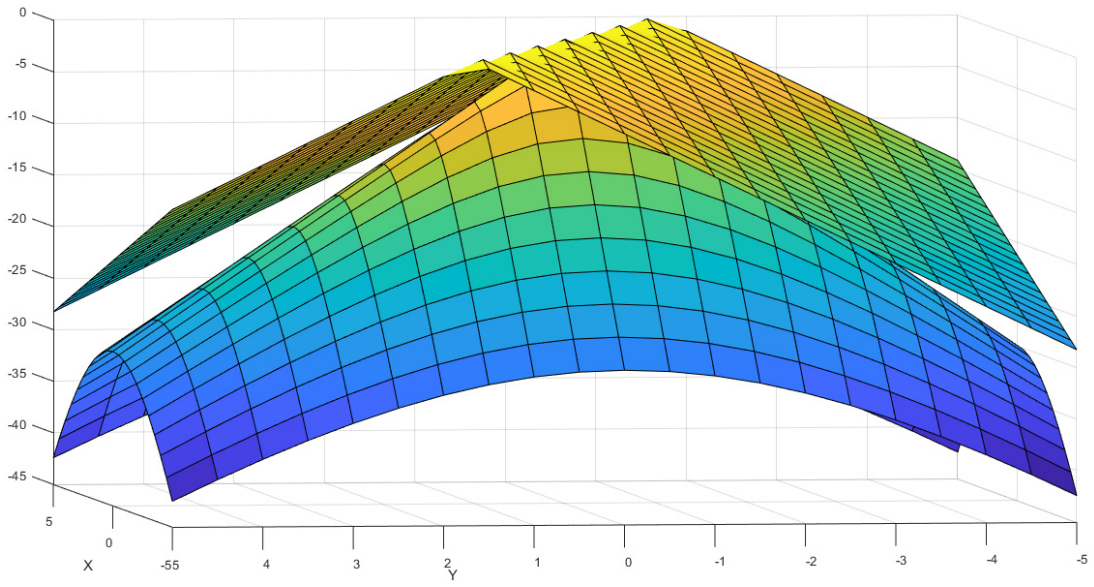


Figura 4.9: Gráfica de f y g.

La figura anterior fue obtenida en Matlab R2019a y no en Geogebra por razones estéticas.

Ejemplo 4.7. Por el Ejemplo 3.8 que fue tomado del Ejemplo 4.14 en [32], el operador $T(x, y) = (-y,\ x^2)$ es θ-monótono, con

$$\theta((x, y), (u, v)) = -\frac{|x + u - 1|}{2}\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

o expresado de otra forma $\theta(\vec{x}, \vec{u}) = -\frac{1}{2}|x + u - 1|\|\vec{x} - \vec{u}\|$ mientras que en la figura de abajo se tiene $\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -\frac{1}{2}(|x| + |u| + 1)\|\vec{x} - \vec{u}\|$.

```
Sea T(x,y) = ( p(x,y) , q(x,y) )

Si el grado de p(x,y) es 1
Entonces p(x,y) = a[1][0]x + a[1][1]y + a[0][0]
Ingrese los coeficientes de p(x,y) :

Coef de     x     ==>  a[1][0] = 0
Coef de     y     ==>  a[1][1] = -1
T. Indpndient es  ==>  a[0][0] = 0

Si el grado de q(x,y) es 2
Entonces q(x,y) = b[2][0]x^2 + b[2][1]xy + b[2][2]y^2 + b[1][0]x + b[1][1]y + b[0][0]
Ingrese los coeficientes de q(x,y) :

Coef de    x^2    ==>  b[2][0] = 1
Coef de     xy    ==>  b[2][1] = 0
Coef de    y^2    ==>  b[2][2] = 0
Coef de     x     ==>  b[1][0] = 0
Coef de     y     ==>  b[1][1] = 0
T. Indpndient es  ==>  b[0][0] = 0

Entonces
T(x,y) = ( -1y ; + 1x^2 )
       = ( 0x^2 + 0xy + 0y^2 + 0x -1y + 0 ; 1x^2 + 0xy + 0y^2 + 0x + 0y + 0 )

La función teta está definida como:

-1/2[|(x - u , y - v )|] ( + 1|x| + 1|u| + 1  )
```

Figura 4.10: $\theta_c(\vec{x}, \vec{u}) = -\frac{1}{2}(|x| + |u| + 1)\|\vec{x} - \vec{u}\|$.

Definiendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x, y) = |x|+|y|+1$, $g(x, y) = |x+y-1|$ obtenemos que $f \geqslant g$, lo que implica que $\theta \geqslant \theta_c$, es decir T es θ_c-monótono.

Capítulo 5

Bifunciones θ-monótonas

El desarrollo y las bases para los problemas de equilibrio dados por Eugen Blum y W. Oettli en [11] dieron nuevas luces sobre las bifunciones y su importancia muchas áreas de la matemática, como por ejemplo, la optimización convexa y no convexa, equilibrio en juegos no cooperativos de Nash, problemas de punto fijo y las desigualdades variacionales, entre otros. Usando estas herramientas ahora daremos al final del capítulo una prueba directa para la acotación local de un operador θ-monótono en un espacio de Banach de dimensión finita, probado de manera indirecta en [32] para operadores θ-monótonos y en [22] para operadores pre-monótonos o σ-monótonos, de hecho la prueba dada en [32] es una adaptación de la mostrada en [22]. Por ese entonces, en [2] se dio a conocer una prueba directa para operadores σ-monótonos, ahora usaremos esas ideas y adaptaremos lo probado por [2] a operadores θ-monótonos.

5.1. Bifunciones

El siguiente teorema fue probado en [22] para operadores σ-monótonos y en [32] para operadores θ-monótonos.

Teorema 5.1. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ - monótono, entonces*

$$\sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle \leqslant (\inf_{v\in Ty}\|v\| - \theta(x,y))\|x-y\|$$

Prueba. Sean $x, y \in D(T)$, dados $f \in Tx,\ g \in Ty$ se tiene:

$\theta(x,y)\|x-y\| \leqslant \langle f-g, x-y\rangle = \langle f, x-y\rangle - \langle g, x-y\rangle = \langle g, y-x\rangle - \langle f, y-x\rangle$

Entonces $\langle f, y-x\rangle \leqslant \langle g, y-x\rangle - \theta(x,y)\|x-y\|$, luego si fijamos $g \in Ty$ tenemos:

$$\langle f, y-x\rangle \leqslant \sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle \leqslant \langle g, y-x\rangle - \theta(x,y)\|x-y\| \tag{5.1}$$

Ordenando: $\sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle + \theta(x,y)\|x-y\| \leqslant \langle g, y-x\rangle$, de donde:

$$\sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle + \theta(x,y)\|x-y\| \leqslant \inf_{v\in Ty}\langle v, y-x\rangle \leqslant \inf_{v\in Ty}\|v\|\|y-x\|$$

Por tanto $\sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle \leqslant (\inf_{v\in Ty}\|v\| - \theta(x,y))\|x-y\|$ ■

Si intercambiamos de posición a los valores de x y y en el teorema anterior tenemos:

$$\sup_{v\in Ty}\langle v, x-y\rangle \leqslant (\inf_{u\in Tx}\|u\| - \theta(y,x))\|y-x\|$$

Sumando ambas desigualdades, resulta:

$$\sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle + \sup_{v\in Ty}\langle v, x-y\rangle \leqslant (\inf_{v\in Ty}\|v\| + \inf_{u\in Tx}\|u\| - 2\theta(x,y))\|x-y\|$$

Luego: $-\sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle - \sup_{v\in Ty}\langle v, x-y\rangle \geqslant (2\theta(x,y) - \inf_{v\in Ty}\|v\| - \inf_{u\in Tx}\|u\|)\|x-y\|$.

Definiendo $\theta_{ii}^T : X \to X$ como:

$$\theta_{ii}^T(x,y) = \begin{cases} 2\theta(x,y) - \inf_{v\in Ty}\|v\| - \inf_{u\in Tx}\|u\| & ,\text{si } (x,y) \in D(T)\times D(T) \\ 0 & ,\text{si } (x,y) \notin D(T)\times D(T) \end{cases}$$

La desigualdad anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$-\sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle - \sup_{v\in Ty}\langle v, x-y\rangle \geqslant \theta_{ii}^T(x,y)\|x-y\| \tag{5.2}$$

Definamos ahora $sT : D(T)\times D(T) \to \mathbb{R}$ como $sT(x,y) = \sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle$.

Evidentemente $sT(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle$ para todo $u \in Tx$, de forma análoga al intercambiar x e y tenemos $sT(y,x) \geqslant \langle v, x-y\rangle$ para todo $v \in Ty$, luego en 5.2:

$$\langle u-v, x-y\rangle = \langle u, x-y\rangle - \langle v, x-y\rangle \geqslant -sT(x,y) - sT(y,x) \geqslant \theta_{ii}^T(x,y)\|x-y\|$$

Sea $\theta_{ss}^T : X \times X \to \mathbb{R}$ definida como:

$$\theta_{ss}^T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-sT(x,y) - sT(y,x)}{\|x-y\|} & , \text{si } \ (x,y) \in X_T^2. \\ 0 & , \text{si } \ (x,y) \notin X_T^2. \end{cases}$$

De donde se obtiene:

$$\langle u - v, x - y \rangle \geqslant \theta_{ss}^T(x,y)\|x-y\| \geqslant \theta_{ii}^T(x,y)\|x-y\|$$

Probando así el siguiente corolario.

Corolario 5.1. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, entonces T es es θ_{ss}^T y θ_{ii}^T-monótono, además $\theta_{ss}^T \geq \theta_{ii}^T$.

La función sT definida lineas arriba nos lleva a definir de manera natural el concepto de bifunción.
En adelante X será un espacio de Banach y A un subconjunto no vacío de X.

Definición 5.1. Una aplicación $F : A \times A \to \mathbb{R}$ tal que $F(x,x) \geqslant 0$ para todo $x \in A$ es llamada bifunción.

Ejemplo 5.1. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, sea $A = D(T)$, entonces $sT : D(T) \times D(T) \to \mathbb{R}$ definida como $sT(x,y) = \sup_{u \in Tx} \langle u, y - x \rangle$ es evidentemente una bifunción.

El siguiente ejemplo por inofensivo que parezca, es muy usado en una de las aplicaciones de las bifunciones, la optimización.

Ejemplo 5.2. Dado $\varphi : A \to \mathbb{R}$, definamos $F_\varphi : Dom(\varphi) \times Dom(\varphi) \to \mathbb{R}$ como $F_\varphi(x,y) = \varphi(y) - \varphi(x)$, entonces F_φ es una bifunción.

Una de las aplicaciones más relevantes de las bifunciones es la siguiente:

Definición 5.2. Problema de equilibrio:(Ver [11])
Sea $K \subseteq X$ un conjunto cerrado convexo y sea $F : K \times K \to \mathbb{R}$ una bifunción, un problema de equilibrio consiste en:

$$\text{Hallar } x_0 \in X \text{ tal } \text{ que } x_0 \in K \text{ y para todo } y \in K \text{ se tenga } F(x_0, y) \geqslant 0.$$

Ejemplo 5.3. Optimización: Sea $K \subseteq X$ un conjunto cerrado convexo y sea $\varphi : K \to \mathbb{R}$. El problema de encontrar el mínimo de la función φ, es decir $\min_{y \in K} \varphi(y)$, consiste en hallar $x_0 \in K$ tal que $\varphi(x_0) \leqslant \varphi(y)$ para todo $y \in K$, pero, si consideramos la bifunción dada en el Ejemplo 5.2 notamos que este problema de minimización es equivalente a hallar $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in K$ y $F_\varphi(x_0, y) \geqslant 0$ para todo $y \in K$, esto significa que estamos frente a un problema de equilibrio.

Ejemplo 5.4. Puntos silla: Sean K_1, $K_2 \subseteq X$ conjuntos cerrados convexos y sea $\psi : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$. Definamos $F_\psi : (K_1 \times K_2) \times (K_1 \times K_2) \to \mathbb{R}$ como:

$$F_\psi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \psi(y_1, x_2) - \psi(x_1, y_2)$$

Entonces, un problema de equilibrio para la bifunción F_ψ es equivalente al problema de encontrar un punto silla para ψ,

Así como los dos ejemplos anteriores, se pueden encontrar muchos más en [11], todos ellos equivalentes a resolver un problema de equilibrio.

5.2. Bifunción θ-monótona

En [11], se dice que una bifunción $F : A \times A \to \mathbb{R}$ es monótona si para todo $x, y \in A$ se tiene $F(x, y) + F(y, x) \leqslant 0$, pero esto es equivalente a $-F(x, y) - F(y, x) \geqslant 0$. Ahora generalizaremos este concepto a la θ-monotonía.

Definición 5.3. Sea $\theta : X^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(x, y) = \theta(y, x)$ para todo $x, y \in A$, sea $F : A \times A \to \mathbb{R}$ una bifunción, decimos que F es θ-monótono si:

$$-F(x, y) - F(y, x) \geqslant \theta(x, y)\|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in A$$

Resulta evidente que toda bifunción monótona es θ-monótona.

Observación 5.1. Si $F : A \times A \to \mathbb{R}$ es una bifunción θ-monótona, entonces para $x = y$, tenemos que $0 \geqslant F(x, x)$ y puesto que $F(x, x) \geqslant 0$ por ser F una bifunción, entonces $F(x, x) = 0$ para todo $x \in A$.

Ejemplo 5.5. Consideremos la bifunción F_φ del Ejemplo 5.2, como:

$$-F_\varphi(x,y) - F_\varphi(y,x) = -(\varphi(y) - \varphi(x)) - (\varphi(x) - \varphi(y)) = 0 \geqslant 0\|x-y\|$$

Entonces F_φ es θ-monótona, con $\theta = \theta_0$.

Ejemplo 5.6. Tomando ahora la bifunción F_ψ del Ejemplo 5.4, esta también es θ-monótona. En efecto

$$-F_\psi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) - F_\psi((y_1,y_2),(x_1,x_2))$$

$$= -(\psi(y_1,x_2) - \psi(x_1,y_2)) - (\psi(x_1,y_2) - \psi(y_1,x_2)) = 0 \geqslant 0\|x-y\|$$

Ejemplo 5.7. Sea $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $F(x,y) = sen(x-y)^2 + (x-y)^2$, entonces:

$$F(x,y) + F(y,x) = (sen(x-y)^2 + (x-y)^2) + (sen(y-x)^2 + (y-x)^2)$$

$$= 2sen(x-y)^2 + 2(x-y)^2 \leqslant 4(x-y)^2 = -\theta(x,y)\|x-y\|$$

Pero esto equivale a $-F(x,y) - F(y,x) \geqslant \theta(x,y)\|x-y\|$ con $\theta(x,y) = -4\|x-y\|$, es decir, F es una bifunción θ-monótona.

Ejemplo 5.8. Sea $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|y|} - \dfrac{1}{|x|} & ,\text{si } \ x \neq 0\ ,\ y \neq 0 \\ x & ,\text{si } \ x \neq 0\ ,\ y = 0. \\ -y & ,\text{si } \ x = 0\ ,\ y \neq 0. \end{cases}$$

Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces $F(x,y) + F(y,x) = \dfrac{1}{|y|} - \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|x|} - \dfrac{1}{|y|} = 0$.
Si $x = 0$ y $y \neq 0$, entonces $F(0,y) + F(y,0) = -y + y = 0$.
Si $x \neq 0$ y $y = 0$, entonces $F(x,0) + F(0,x) = x - x = 0$.
Si $x = 0$ y $y = 0$, entonces $F(0,0) + F(0,0) = 0 - 0 = 0$.
Por tanto, $-F(x,y) - F(y,x) = 0 \geqslant \theta(x,y)\|x-y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, de donde F es una bifunción θ-monótona, con $\theta(x,y) = 0$.

Ejemplo 5.9. Consideremos el funcional lineal discontinuo del Teorema 1.4 y definamos $F_f : X \times X \to \mathbb{R}$ como $F_f(x,y) = \langle f, y - x\rangle$, entonces:
$-F_f(x,y) - F_f(y,x) = -\langle f, y-x\rangle - \langle f, x-y\rangle = -\langle f, y-x\rangle + \langle f, y-x\rangle = 0$
Así, F_f es una bifunción θ-monótona, con $\theta(x,y) = 0$.

Ejemplo 5.10. De 5.2, en el Teorema 5.1, como

$$-sT(x,y) - sT(y,x) \geqslant \theta_{ii}^{T}(x,y)\|x-y\|$$

Entonces sT es una bifunción θ_{ii}^{T}-monótona. Observemos además que del Corolario 5.1, T es un operador θ_{ii}^{T}-monótono.

Observación 5.2. Sería interesante si en el ejemplo anterior, ambos; bifunción y operador fuesen θ-monótonos, pero eso lo veremos después. Por otra parte, dado $x \in D(T)$, si $u \in Tx$ entonces $sT(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle$ para todo $y \in D(T)$, de esto podemos deducir la siguiente inclusión:

$$Tx \subseteq \{u \in X^* : sT(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle \ , \text{ para todo } y \in D(T)\} \tag{5.3}$$

Lo que permite definir el operador multivaluado $T^{sT} : X \rightrightarrows X^*$ como:

$$T^{sT}x = \begin{cases} \{u \in X^* : sT(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle \ , \text{ para todo } y \in D(T)\} & , \text{si } x \in D(T). \\ \varnothing & , \text{si } x \notin D(T). \end{cases}$$

Respecto a este operador se tiene lo siguiente:

$\boldsymbol{D(T) = D(T^{sT})}$ **:** En efecto, si $x \notin D(T)$ entonces $x \notin D(T^{sT})$ y esto equivale a $D(T^{sT}) \subseteq D(T)$. Además como para todo $x \in D(T)$ tenemos $\varnothing \neq Tx \subseteq T^{sT}x$ se deduce que $D(T) \subseteq D(T^{sT})$.

$\boldsymbol{R(T) \subseteq R(T^{sT})}$ **:** Es evidente por cuanto $Tx \subseteq T^{sT}x$ para todo $x \in D(T)$.

$\boldsymbol{G(T) \subseteq G(T^{sT})}$ **:** De lo anterior y por el Teorema 2.5 se tiene $T \preceq T^{sT}$.

Finalmente T^{sT} también es θ_{ii}^{T}-monótono.

Generalizando esto a una bifunción θ-monótona cualquiera y veamos si sigue cumpliendo que el nuevo operador asociado a la bifunción también es θ-monótono.

Definición 5.4. Sea $F : A \times A \to \mathbb{R}$ es una bifunción θ-monótona, el operador multivaluado asociado a F es denotado por $T^F : X \rightrightarrows X^*$ y definido como:

$$T^F x = \begin{cases} \{u \in X^* : F(x,y) \geqslant \langle u, y - x\rangle \ , \text{ para todo } y \in A\} & , \text{si } x \in A. \\ \varnothing & , \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Notemos que de la definición anterior se tiene $D(T^F) \subseteq A$.

Teorema 5.2. *Si $F : A \times A \to \mathbb{R}$ es θ-monótona, entonces T^F es θ-monótono.*

Prueba. Sean $x, y \in D(T^F) \subseteq A$, dados $u \in T^F x$, $v \in T^F y$, para todo $z \in A$: $F(x,z) \geqslant \langle u, z - x\rangle$ y $F(y,z) \geqslant \langle v, z - y\rangle$. En particular, si $z = y$ en la primera desigualdad y $z = x$ en la segunda desigualdad tenemos:

$$F(x,y) \geqslant \langle u, y - x\rangle \quad \text{y} \quad F(y,x) \geqslant \langle v, x - y\rangle$$

De donde:

$$\langle u - v, x - y\rangle = -\langle u, y - x\rangle - \langle v, x - y\rangle \geqslant -F(x,y) - F(y,x) \geqslant \theta(x,y)\|x - y\|$$

Por tanto T^F es θ-monótono.

■

Ejemplo 5.11. Sea $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, si calculamos el operador multivaluado asociado a F_φ del Ejemplo 5.2, para $x \in D(F_\varphi) = Dom(\varphi)$:

$$\begin{aligned} T^{F_\varphi} x &= \{u \in X^* : F_\varphi(x,y) \geqslant \langle u, y - x\rangle \ , \text{ para todo } y \in Dom(\varphi)\} \\ &= \{u \in X^* : \varphi(y) - \varphi(x) \geqslant \langle u, y - x\rangle \ , \text{ para todo } y \in Dom(\varphi)\} \\ &= \{u \in X^* : \varphi(y) \geqslant \langle u, y - x\rangle + \varphi(x) \ , \text{ para todo } y \in Dom(\varphi)\} \\ &= \partial\varphi(x). \end{aligned}$$

En la última igualdad, $\partial\varphi(x)$ es el subdiferencial de φ en $x \in Dom(\varphi)$ y por el teorema anterior, como F_φ es θ-monótona, entonces $T^{F_\varphi} = \partial\varphi$ también es θ-monótono.

Ejemplo 5.12. Calculemos el operador multivaluado asociado a la bifunción F del Ejemplo 5.8:

Si $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, tenemos $T^F x = \{u \in X^* : F(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle \ , \text{ para todo } y \in \mathbb{R}\}$.

En particular, para $y = -x$, se tiene:

$$0 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{|y|} - \frac{1}{|x|} = F(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle = u * (-x-x) = -2xu$$

De lo anterior, $u \geqslant 0$.

Consideremos ahora $y = 2x$, se tiene:

$$\frac{-1}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{|y|} - \frac{1}{|x|} = F(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle = u * (2x-x) = xu$$

De lo anterior $0 > \dfrac{-1}{2x^2} \geqslant u$, de donde $0 > u \geqslant 0$ y por tanto $T^F x = \varnothing$.

Si $\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$, tenemos $T^F x = \{u \in X^* : F(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle \ , \text{ para todo } y \in \mathbb{R}\}$.

En particular, para $y = -x > 0$, se tiene:

$$0 = \frac{1}{-x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{|y|} - \frac{1}{|x|} = F(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle = u * (-x-x) = -2xu$$

De lo anterior, $0 \geqslant u$.

Considerando, como en el caso anterior, $y = 2x < 0$, tenemos:

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{-2x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{|y|} - \frac{1}{|x|} = F(x,y) \geqslant \langle u, y-x\rangle = u * (2x-x) = xu$$

De lo anterior $0 < \dfrac{1}{2x^2} \leqslant u$, de donde $0 \geqslant u > 0$ y por tanto $T^F x = \varnothing$.

Si $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, tenemos $T^F 0 = \{u \in X^* : F(0,y) \geqslant \langle u, y\rangle \ , \text{ para todo } y \in \mathbb{R}\}$.

Entonces $-y = F(0,y) \geqslant \langle u, y\rangle = uy$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Si $y > 0$, entonces $-1 \geqslant u$, si $0 > y$, tenemos $u \geqslant -1$ y por tanto $T^F 0 = \{-1\}$.

Concluimos así que $D(T^F) = \{0\}$ y $R(T^F) = \{-1\}$.

Observemos que al ser T^F un operador constante, entonces es θ-monótono, con $\theta = 0$.

Por otra parte, dado $T : X \rightrightarrows X^*$ operador θ-monótono, en el Ejemplo 5.10 vimos que sT era θ_{ii}^T-monótona, pero como veremos a continuación, sT también es θ-monótona.

Teorema 5.3. *Si $T : X \rightrightarrows X^*$ es θ-monótono, entonces sT es θ-monótona.*

Prueba. Sean $x, y \in D(T)$, dados $f \in Tx$, $g \in Ty$ como T es θ-monótono tenemos

$$\theta(x,y)\|x-y\| \leqslant \langle f-g, x-y\rangle = \langle g, y-x\rangle - \langle f, y-x\rangle$$

Siguiendo los pasos del Teorema 5.1 hasta la ecuación 5.1 se tiene:

$$\sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle \leqslant \langle g, y-x\rangle - \theta(x,y)\|x-y\|$$

Ordenando se obtiene $\langle g, x-y\rangle \leqslant -\theta(x,y)\|x-y\| - \sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle$ para todo $g \in Ty$, luego tomando supremo

$$\sup_{v\in Ty}\langle v, x-y\rangle \leqslant -\theta(x,y)\|x-y\| - \sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle$$

De esto

$$-\sup_{u\in Tx}\langle u, y-x\rangle - \sup_{v\in Ty}\langle v, x-y\rangle \geqslant \theta(x,y)\|x-y\|$$

O equivalentemente

$$-sT(x,y) - sT(y,x) \geqslant \theta(x,y)\|x-y\| \text{ para todo } x, y \in D(T).$$

Por tanto sT es θ-monótona.

■

Corolario 5.2. Si $T : X \rightrightarrows X^*$ es θ-monótono, entonces T^{sT} es θ-monótono.

Prueba. Del teorema anterior sT es θ-monótona, luego usar el Teorema 5.2.

■

5.3. Bifunción θ-monótona maximal

En la sección anterior, vimos que a una bifunción F, θ-monótona, se le puede asociar un operador T^F el cual es también θ-monótono, esto nos permite relacionar las propiedades de los operadores θ-monótonos con las bifunciones θ-monótonas y tener por ejemplo, lo siguiente:

Definición 5.5. Sea $F : A \times A \to \mathbb{R}$ es una bifunción θ-monótona, decimos que F es θ-monótona maximal si $T^F : X \rightrightarrows X^*$ es θ-monótono maximal.

Corolario 5.3. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono maximal, entonces $T^{sT} = T$ y por tanto $sT : D(T) \times D(T) \to \mathbb{R}$ es θ-monótono maximal.

Prueba. Del corolario anterior T^{sT} es θ-monótono y de la Observación 5.2, $T \preceq T^{sT}$, luego por la maximalidad de T se tiene $T = T^{sT}$, es decir T^{sT} es θ-monótono maximal y por lo tanto sT es θ-monótono maximal.

■

Ejemplo 5.13. Sea $T : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definida como $Tx = \{0\}$, si $x \in [0, +\infty\rangle$ y $Tx = \varnothing$, si $x \in \langle -\infty, 0\rangle$. Al ser T un operador constante, del Ejemplo 3.11, T es θ_0-monótono. Consideremos ahora el operador $S : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definido como $Sx = \{0\}$, si $x \in \langle 0, +\infty\rangle$; $Sx = \{-1, 0\}$, si $x = 0$ y $Sx = \varnothing$, si $x \in \langle -\infty, 0\rangle$. Para ambos operadores se tiene $D(T) = D(S) = [0, +\infty\rangle$ y evidentemente $T \preceq S$, es decir S es una extensión de T y por tanto, T no es maximal. Notemos además que S también es θ_0-monótono. En efecto, como $Tx = Sx$, si $x \neq 0$, dado $y > 0$, consideremos $x = 0$, luego: $\langle u - 0, 0 - y\rangle = -uy \geqslant 0$ para todo $u \in T0 = \{-1, 0\}$. Sean $x, y \geqslant 0$, entonces $sT(x, y) = \sup_{u \in Tx} \langle u, y - x\rangle = \sup_{0 \in Tx} \langle 0, y - x\rangle = 0$.
Calculemos ahora $T^{sT} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$:
Si $x > 0$:
$T^{sT}x = \{u \in \mathbb{R} : sT(x, y) \geqslant \langle u, y - x\rangle \ , \ y \geqslant 0\} = \{u \in \mathbb{R} : 0 \geqslant u(y - x) \ , \ y \geqslant 0\}$.
En particular, si $y = 2x$ se tiene $0 \geqslant u(2x - x) = ux$, entonces $0 \geqslant u$. Si $y = \frac{x}{2}$, tenemos $0 \geqslant u(\frac{x}{2} - x) = -\frac{ux}{2}$, luego $0 \leqslant u$ y por tanto $u = 0$. De esto $T^{sT}x = \{0\}$.

Si $x = 0$:

$T^{sT}0 = \{u \in \mathbb{R} : 0 \geqslant \langle u, y - 0\rangle \ , \ y \geqslant 0\} = \{u \in \mathbb{R} : 0 \geqslant uy \ , \ y \geqslant 0\} = \langle -\infty, 0]$.

$$\text{De todo lo anterior: } T^{sT}x = \begin{cases} \varnothing & , \text{si } x < 0. \\ \langle -\infty, 0] & , \text{si } x = 0. \\ \{0\} & , \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Del Corolario 5.2, T^{sT} es θ_0-monótono, veamos ahora que es θ-monótono maximal. Supongamos que existe $T' : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ operador θ_0-monótono tal que $T^{sT} \preceq T'$ con $T^{sT} \neq T'$, entonces existe $x_0 \geqslant 0$ tal que $T^{sT}x_0$ está incluido propiamente en $T'x_0$, esto es, existe $u_0 \in T'x_0$ pero que $u_0 \notin T^{sT}x_0$. Puesto que $0 \in T^{sT}x \subseteq T'x$ para todo $x \geqslant 0$, resulta obvio que $u \neq 0$.

Analicemos dos casos:

Si $x_0 > 0$, consideremos $y = 2x_0 > 0$, entonces como T' es θ_0-monótono:

$0 \leqslant \langle u_0 - 0, x_0 - 2x_0\rangle = u_0(-x_0)$ de donde $u_0 \geqslant 0$. Si ahora tomamos $y = \frac{x_0}{2}$:

$0 \leqslant \left\langle u_0 - 0, x_0 - \frac{x_0}{2}\right\rangle = \frac{u_0 x_0}{2}$ obteniendose $0 \leqslant u_0$, por lo tanto $u_0 = 0$.

Si $x_0 = 0$, como $u_0 \notin T^{sT}0$ entonces $u_0 > 0$, luego tomando $y = 1$ tenemos: $0 \leqslant \langle u_0 - 0, 0 - 1\rangle = -u_0$, es decir $0 \geqslant u_0$, hecho que también es absurdo. Quedando probado que T^{sT} es θ-monótono maximal y por tanto sT es θ-monótono maximal, sin embargo T no es maximal de donde se deduce que $T \neq T^{sT}$.

El ejemplo anterior muesta recíproco del Corolario 5.3 no es cierto en general.

Teorema 5.4. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, entonces $sT(x, \cdot)$ es convexa en $D(T)$ para todo $x \in D(T)$.*

Prueba. Dado $x \in D(T)$, sean $y_0, y_1 \in D(T)$, $t \in [0, 1]$, para cada $w \in Tx$:

$$\langle w, (1-t)y_0 + ty_1 - x\rangle = \langle w, (1-t)y_0 + ty_1 - ((1-t)x + tx)\rangle$$

$$= \langle w, (1-t)(y_0 - x) + t(y_1 - x)\rangle = (1-t)\langle w, y_0 - x\rangle + t\langle w, y_1 - x\rangle$$

$$\leqslant (1-t)\sup_{u \in Tx}\langle u, y_0 - x\rangle + t\sup_{u \in Tx}\langle u, y_1 - x\rangle = (1-t)sT(x, y_0) + tsT(x, y_1)$$

Entonces de la Definición 1.64, $sT(x\cdot)$ es convexa ya que:

$$sT(x,(1-t)y_0+ty_1)=\sup_{u\in Tx}\langle u,(1-t)y_0+ty_1-x\rangle\leqslant(1-t)sT(x,y_0)+tsT(x,y_1).$$

■

Corolario 5.4. Sea $T:X\rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, entonces $sT(x,\cdot)$ es cuasiconvexa en $D(T)$ para todo $x\in D(T)$.

Prueba. Del Teorema 1.49, como sT es convexa, entonces es cuasiconvexa.

■

Teorema 5.5. *Sea $T:X\rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, entonces $sT(x,\cdot)$ es semicontinua inferior en $int(D(T))$ para todo $x\in D(T)$.*

Prueba. Sea $x\in D(T)$, dado $y_0\in int(D(T))$ se tiene que existe $\delta_1>0$ tal que $B_{\delta_1}(y_0)\subseteq D(T)$. Dado $u_0\in Tx\subseteq X^*$ se tiene $\langle u_0,y_0-x\rangle\leqslant\sup_{u\in Tx}\langle u,y_0-x\rangle$ además, como u_0 es lineal y continua en X, en particular lo es en $y_0-x\in X$, luego dado $\epsilon>0$, existe $\delta_1>\delta>0$ de modo que si $z\in B_\delta(y_0-x)$ entonces $|\langle u_0,z\rangle-\langle u_0,y_0-x\rangle|<\epsilon$, de donde $\langle u_0,y_0-x\rangle-\epsilon<\langle u_0,z\rangle$.
Por otra parte, como para cada $y\in B_\delta(y_0)$ se tiene $z=y-x\in B_\delta(y_0-x)$ entonces $\langle u_0,y_0-x\rangle-\epsilon<\langle u_0,y-x\rangle\leqslant\sup_{u\in Tx}\langle u,y-x\rangle$, para todo $u_0\in Tx$, de esto $\sup_{u\in Tx}\langle u,y_0-x\rangle<\sup_{u\in Tx}\langle u,y-x\rangle+\epsilon$, es decir $sT(x,y_0)-\epsilon<sT(x,y)$ para todo $y\in B_\delta(y_0)$.

■

Corolario 5.5. Sea $T:X\rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono, entonces para todo $x\in D(T)$, dado $y_0\in int(D(T))$ existe $\varepsilon>0$ tal que $sT(x,\cdot)$ está acotada superiormente en $B_\varepsilon[y_0]$.

Prueba.
Dado $x\in D(T)$, del Corolario 5.4 y Teorema 5.5, $sT(x,\cdot)$ es cuasiconvexa y semicontinua inferior en $int(D(T))$, luego por el Teorema 1.51, dado $y_0\in int(D(T))$ existe $\varepsilon>0$ tal que $sT(x,\cdot)$ está acotada superiormente en $B_\varepsilon[y_0]$.

■

Teorema 5.6. *Sea X un espacio de Banach reflexivo, $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono con $D(T) = X$ y tal que Tx es convexo y cerrado para todo $x \in X$. Si $sT : D(T) \times D(T) \to \mathbb{R}$ es θ-monótono maximal, T es θ-monótono maximal.*

Prueba. Si sT es θ-monótono maximal entonces T^{sT} es θ-monótono maximal. Sea $(x, u_0) \in G(T^{sT})$ y supongamos que $u_0 \notin Tx$, como $\{u_0\}$ es compacto y Tx es convexo cerrado, por el Teorema de Hanh-Banach(versión geométrica) existe $z^{**} \in X^{**}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\langle z^{**}, u\rangle < \alpha < \langle z^{**}, u_0\rangle$ para todo $u \in Tx$ o equivalentemente $\langle u, z\rangle < \alpha < \langle u_0, z\rangle$ para todo $u \in Tx$. Considerando $y = x + z \in D(T) = X$ se tiene $\langle u, y - x\rangle < \alpha < \langle u_0, y - x\rangle$ para todo $u \in Tx$, de donde:
$\sup_{u\in Tx} \langle u, y - x\rangle \leqslant \alpha < \langle u_0, y - x\rangle \leqslant \sup_{u\in Tx} \langle u, y - x\rangle$, algo que es absurdo, por lo tanto $u_0 \in Tx$, es decir $(x, u_0) \in G(T)$, por lo que concluimos que $T = T^{sT}$ es θ-monótono maximal.

■

5.4. Bifunciones localmente acotadas

En el capítulo 2 conocimos a las aplicaciones localmente acotadas, ahora daremos una definición similar para las bifunciones. Ver [2].

Definición 5.6. Sea $F : A\times A \to \mathbb{R}$ una bifunción, decimos que F está localmente acotada en $(x_0, y_0) \in X \times X$ si existen U_{x_0}, $V_{y_0} \subseteq X$ (vecindades de x_0 e y_0 respectivamente) y $r \in \mathbb{R}$ tal que $F(x, y) \leqslant r$ para todo $(x, y) \in U_{x_0} \times V_{y_0} \cap A \times A$. En particular, si $x_0 = y_0$, diremos que F está localmente acotada en x_0.

Observación 5.3. En la definición anterior, si F está localmente acotada en x_0, entonces existe una vecindad $U_{x_0} \subseteq X$ de x_0 y $r \in \mathbb{R}$ tal que $F(x, y) \leqslant r$ para todo $x, y \in U_{x_0}$. Luego, en particular si $x = y \in U_{x_0}$ tenemos que $0 \leqslant F(x, x) \leqslant r$.

Definición 5.7. Sea $F : A \times A \to \mathbb{R}$ una bifunción, F está localmente acotada en $U \times V \subseteq X \times X$ si está localmente acotada en todo $(x, y) \in U \times V$. Decimos que F está localmemte acotada en U si F está localmente acotada en $U \times U$.

El siguiente teorema fue probado en [32] de manera indirecta y luego en [2] se dio una prueba directa para el caso de operadores pre-monótonos, en esta ocación adapatamos ambas pruebas para el caso de operadores θ-monótonos en un espacio finito dimensional.

Teorema 5.7. *Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador θ-monótono tal que $\theta(x, x) = 0$ para todo $x \in D(T)$ y además $\theta(\cdot, y)$ es s.c.i. en $int(D(T))$ para todo $y \in int(D(T))$, entonces T está localmente acotado en $int(D(T))$.*

Prueba. Probaremos este teorema en varios pasos.

Paso 1: Minimizando en la Bola cerrada compacta.

Sea $x_0 \in int(D(T))$ entonces existe $r > 0$ tal que por el Teorema 1.2 y la Observación 1.3 se tienen las siguientes inclusiones:

$$B_{\frac{r}{\sqrt{n}}}[x_0] \subseteq B_r^s[x_0] \subseteq B_r[x_0] \subseteq B_{2r}(x_0) \subseteq D(T) \tag{5.4}$$

Sean $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{2n} \in \mathbb{R}^n$ tal que: $z_i = \begin{cases} x_0 + re_{\frac{i+1}{2}} & ,\text{si } \ i \text{ es impar.} \\ x_0 - re_{\frac{i}{2}} & ,\text{si } \ i \text{ es par.} \end{cases}$

Del Corolario 1.13 tenemos $co\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}\} = B_r^s[x_0]$ y por el Teorema 5.5 para cada $i \in \{1, 2, \cdots, 2n\}$ se tiene que $sT(z_i, \cdot) : D(T) \to \mathbb{R}$ es s.c.i. en $int(D(T))$. Además, como $B_r[x_0]$ es compacto, del Teorema 1.36 existe $y_i \in B_r[x_0]$ tal que:

$$sT(z_i, y_i) = \min_{y \in B_r[x_0]} sT(z_i, y) \leqslant sT(z_i, z_i) = 0 \tag{5.5}$$

De igual manera, como $\theta(\cdot, z_i)$ es s.c.i. en $int(D(T))$, existe $x_i \in B_r[x_0]$ tal que:

$$\theta(x_i, z_i) = \min_{x \in B_r[x_0]} \theta(x, z_i) \leqslant \theta(z_i, z_i) = 0 \tag{5.6}$$

De 5.5 y 5.6 para todo $x, y \in B_r[x_0]$ se tiene:

$$-sT(z_i, y) \leqslant -sT(z_i, y_i) \qquad -\theta(x, z_i) \leqslant -\theta(x_i, z_i). \tag{5.7}$$

Donde $-sT(z_i, y_i)$ y $-\theta(x_i, z_i)$ son no negativos.

Paso 2: $sT(B_{\frac{r}{\sqrt{n}}}(x_0) \times B_{\frac{r}{\sqrt{n}}}(x_0))$ está acotado.

Sean $x, y \in B_{\frac{r}{\sqrt{n}}}(x_0) \subseteq B_{\frac{r}{\sqrt{n}}}[x_0]$, de 5.4 y el Corolario 1.13 existen $\{\alpha_i\}_1^n \subseteq \mathbb{R}$ tales que $y = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i z_i$ y $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i = 1$, además del Corolario 5.4 tenemos que $sT(x, \cdot)$ es cuasiconvexa, luego por el Teorema 1.47 se tiene:

$$sT(x,y) = sT(x, \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i z_i) \leqslant \max_{i=1,\cdots,2n} sT(x, z_i) \leqslant \max_{i=1,\cdots,2n} -\theta(x, z_i)\|x - z_i\| - sT(z_i, x)$$

$$\leqslant \max_{i=1,\cdots,2n} \{-\theta(x_i, z_i)\} \cdot \sup_{i=1,\cdots,2n} \{\|x - z_i\|\} + \max_{i=1,\cdots,2n} \{-sT(z_i, y_i)\}$$

$$\leqslant \max_{i=1,\cdots,2n} \{-\theta(x_i, z_i)\} \cdot \sup_{i=1,\cdots,2n} \{ \sup_{z \in B_r^s[x_0]} \|z - z_i\} + \max_{i=1,\cdots,2n} \{-sT(z_i, y_i)\}$$

$$\leqslant \max_{i=1,\cdots,2n} \{-\theta(x_i, z_i)\} \cdot \sup_{z,\, w \in B_r^s[x_0]} \|z - w\| + \max_{i=1,\cdots,2n} \{-sT(z_i, y_i)\}$$

$$= \max_{i=1,\cdots,2n} \{-\theta(x_i, z_i)\} \cdot diam(B_r^s[x_0]) + \max_{i=1,\cdots,2n} \{-sT(z_i, y_i)\}$$

$$= \max_{i=1,\cdots,2n} \{-\theta(x_i, z_i)\} \cdot 2r + \max_{i=1,\cdots,2n} \{-sT(z_i, y_i)\}$$

$$= 2r \max_{i=1,\cdots,2n} \{-\theta(x_i, z_i)\} + \max_{i=1,\cdots,2n} \{-sT(z_i, y_i)\}$$

Paso 3: $T^{sT}(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0))$ está acotado.

En efecto, dado $u_0 \in T^{sT}(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0))$, existe $x \in B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0)$ tal que $u_0 \in T^{sT}x$, luego $\langle u_0, y - x\rangle \leqslant \sup_{u \in Tx} \langle u, y - x\rangle = sT(x, y)$ para todo $y \in D(T)$. En particular:

$$\langle u_0, y - x\rangle \leqslant \sup_{u \in Tx} \langle u, y - x\rangle = sT(x, y) \quad \text{para todo } y \in B_{\frac{r}{\sqrt{n}}}(x_0).$$

Dado $z \in B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ consideremos $y_z = x + \frac{r}{2\sqrt{n}} z$, entonces $y_z \in B_{\frac{r}{\sqrt{n}}}(x_0)$ ya que $\|y_z - x_0\| = \|x + \frac{r}{2\sqrt{n}} z - x_0\| = \|x - x_0 + \frac{r}{2\sqrt{n}} z\| \leqslant \|x - x_0\| + \|\frac{r}{2\sqrt{n}} z\| < \frac{r}{2\sqrt{n}} + \frac{r}{2\sqrt{n}} = \frac{r}{\sqrt{n}}$. Así para todo $z \in B_1(0)$, del Paso 1 se tiene:

$$2r \max_{i=1,\cdots,2n} \{-\theta(x_i, z_i)\} + \max_{i=1,\cdots,2n} \{-sT(z_i, y_i)\} \geqslant sT(x, y_z) = \sup_{u \in Tx} \langle u, y_z - x\rangle$$

$$\geqslant \langle u_0, y_z - x\rangle = \left\langle u_0, x + \frac{r}{2\sqrt{n}} z - x \right\rangle = \left\langle u_0, \frac{r}{2\sqrt{n}} z \right\rangle = \frac{r}{2\sqrt{n}} \langle u_0, z\rangle$$

Luego para todo $z \in B_1(0)$:

$$\langle u_0, z\rangle \leqslant 4\sqrt{n} \max_{i=1,\cdots,2n} \{-\theta(x_i, z_i)\} + \frac{2\sqrt{n}}{r} \max_{i=1,\cdots,2n} \{-sT(z_i, y_i)\}$$

Tomando supremo, del Ejemplo 1.20 se tiene:

$$\|u_0\| = \sup_{\|z\|<1} \langle u_0, z\rangle \leqslant 4\sqrt{n} \max_{i=1,\cdots,2n}\{-\theta(x_i, z_i)\} + \frac{2\sqrt{n}}{r} \max_{i=1,\cdots,2n}\{-sT(z_i, y_i)\}$$

Como $u_0 \in T^{sT}(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0))$ es arbitrario, tenemos que $T^{sT}(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0)$ está acotado.

Paso 4: $\boldsymbol{T(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0))}$ está acotado.

Esta última parte es la más sencilla de todas, solo basta recordar que de la Observación 5.2, $Tx \subseteq T^{sT}x$ para todo $x \in D(T)$, lo que implica:

$$T(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0)) \subseteq T^{sT}(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0))$$

Por tanto como $T^{sT}(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0))$ esta acotado, se conluye que $T(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0))$ también está acotado. Finalmente puesto que $x_0 \in int(D(T))$ fue tomado arbitrariamente, T está localmente acotado en $int(D(T))$.

■

Observación 5.4. El Paso 2 del Teorema anterior también puede ser probado usando el Teorema 5.1 con $x \in B_{\frac{r}{\sqrt{n}}}(x_0)$ y $z_i \in B_r^s[x_0]$:

$$sT(x, z_i) = \sup_{u\in Tx} \langle u, z_i - x\rangle \leqslant (\inf_{v\in Tz_i} \|v\| - \theta(x, z_i))\|x - z_i\|$$

$$\leqslant (\inf_{v\in Tz_i} \|v\| - \theta(x_i, z_i)) \sup_{z,w\in B_r^s[x_0]} \|z - w\| = 2r(\inf_{v\in Tz_i} \|v\| - \theta(x_i, z_i))$$

Luego:

$$sT(x, y) = sT(x, \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i z_i) \leqslant \max_{i=1,\cdots,2n} sT(x, z_i) \leqslant 2r \max_{i=1,\cdots,2n} (\inf_{v\in Tz_i} \|v\| - \theta(x_i, z_i))$$

En este caso tendríamos para todo $u \in T(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0)) \subseteq T^{sT}(B_{\frac{r}{2\sqrt{n}}}(x_0))$:

$$\|u\| \leqslant 4\sqrt{n}(\max_{i=1,\cdots,2n} (\inf_{v\in Tz_i} \|v\|) + \max_{i=1,\cdots,2n} (-\theta(x_i, z_i))$$

Capítulo 6

Resultado principal

En este último capítulo generalizaremos el Teorema 5.7 dado en el capítulo anterior para el caso de un operador θ-monótono de un espacio de Banach reflexivo en su dual, siendo este nuestro principal resultado.
Por otra parte, notemos que el Teorema 5.7 se logró probar de manera directa gracias a la semicontinuidad inferior de $\theta(\cdot, y)$ que jugó un papel crucial en la acotación inferior debido a la compacidad de la bola unitaria en un espacio finito dimensional.

6.1. Acotación local en dimensión infinita

En el caso de dimensión infinita con la topología de la norma, la bola unitaria cerrada no es compacta, pero si dotamos a X de la topología débil, gracias al Teorema 1.32, para que la bola unitaria cerrada sea compacta es necesario y suficiente que el espacio X sea reflexivo.
Garantizada la compacidad de la bola unitaria cerrada en la topología débil, notemos que la semicontinuidad inferior en norma de $\theta(\cdot, y)$ no es suficiente para tener acotación inferior o la existencia de un mínimo, pero si la s.c.i. se da en la topología débil otra es la historia. Ver [2].

Teorema 6.1. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ-monótono tal que $\theta(\cdot, y)$ es débilmente semicontinua inferior en $int(D(T))$ para todo $y \in int(D(T))$, entonces T está localmente acotada en $int(D(T))$.*

Prueba.

Paso 1: Minimizando en la bola cerrada débilmente compacta.

Sea $x_0 \in int(D(T))$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{2\varepsilon}(x_0) \subseteq D(T)$, además del Teorema 5.5 y del Corolario 5.4 tenemos que para cada $y \in D(T)$, la bifunción $sT(y, \cdot)$ es s.c.i. y cuasiconvexa en $int(D(T))$, así del Teorema 1.52, $sT(y, \cdot)$ es débilmente semicontinua inferiormente en $int(D(T))$ al igual que por hipótesis, $\theta(\cdot, y)$ es débilmente semicontinua inferior. Observemos también que por el Corolario 1.10, la bola cerrada $B_\varepsilon[x_0]$ es compacta en la topología $\sigma(X, X^*)$, luego por el Teorema 1.36(Weiertrass) existen $x_y, x_{y\theta} \in B_\varepsilon[x_0]$ tal que para todo $z \in B_\varepsilon(x_0)$ tenemos:

$$sT(y, x_y) = \min_{x \in B_\varepsilon[x_0]} sT(y, x) \leqslant sT(y, z) \quad , \quad \theta(x_{y\theta}, y) = \min_{x \in B_\varepsilon[x_0]} \theta(x, y) \leqslant \theta(z, y)$$

Así, dado $y \in B_\varepsilon(x_0)$ existen $x_y, x_{y\theta} \in B_\varepsilon[x_0]$ tal que para $x \in B_\varepsilon(x_0)$ se tiene:

$$-sT(y, x) \leqslant -sT(y, x_y) \quad , \quad -\theta(x, y) \leqslant -\theta(x_{y\theta}, y) \tag{6.1}$$

En particular, si $x = y \in B_\varepsilon(x_0)$ como $sT(y, y) = 0$ y $\theta(y, y) = 0$, entonces de 6.1 se deduce que $0 \leqslant -sT(y, x_y)$ y $0 \leqslant -\theta(x_{y\theta}, y)$.

Sean $x, y \in B_\varepsilon(x_0)$, entonces como $sT(\cdot, \cdot)$ es θ-monótona se tiene:

$$sT(x, y) + sT(y, x) \leqslant -\theta(x, y)\|x - y\|$$

Luego de 6.1, $sT(x, y) \leqslant -sT(y, x) - \theta(x, y)\|x - y\| \leqslant -sT(y, x_y) - \theta(x_{y\theta}, y) \cdot (2\varepsilon)$

Por tanto para cada $y \in B_\varepsilon(x_0)$ se tiene:

$$sT(x, y) \leqslant -sT(y, x_y) - 2\varepsilon\theta(x_{y\theta}, y) \quad \text{para todo } x \in B_\varepsilon(x_0)$$

Entonces existe $\sup_{x\in B_\varepsilon(x_0)} sT(x,y) \leqslant -sT(y,x_y) - 2\varepsilon\theta(x_{y\theta}, y)$.

Paso 2: $\sup_{x\in B_\varepsilon(x_0)} sT(x,\cdot)$ está acotada superiormente.

Recordemos que para cada $x \in B_\varepsilon(x_0)$, por los Teoremas 5.4 y 5.5 la función $sT(x,\cdot)$ es convexa (por tanto cuasiconvexa) y s.c.i en $int(D(T))$, luego por el Teorema 1.53 se tiene que $\sup_{x\in B_\varepsilon(x_0)} sT(x,\cdot)$ es convexa, cuasiconvexa y s.c.i. Además como $x_0 \in int(D(T))$, del Teorema 1.51 existe $r > 0$ tal que $\sup_{x\in B_\varepsilon(x_0)} sT(x,\cdot)$ está acotada superiormente en $B_r[x_0]$, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$\sup_{x\in B_\varepsilon(x_0)} sT(x,y) \leqslant M \text{ para todo } y \in B_r[x_0]$$

Tomemos $\delta = \min\{r, \varepsilon\} > 0$, entonces para todo $x, y \in B_\delta(x_0)$ tenemos:

$$sT(x,y) \leqslant \sup_{x\in B_\varepsilon(x_0)} sT(x,y) \leqslant M$$

De esto se tiene que la bifunción sT está localmente acotada en x_0.

Notemos que si $x = y$, en lo anterior $0 = sT(x,x) \leqslant \sup_{x\in B_\varepsilon(x_0)} sT(x,y) \leqslant M$.

Paso 3: $T^{sT}(B_\delta(x_0))$ está acotado.

En efecto, dado $u_0 \in T^{sT}(B_\delta(x_0))$ existe $x \in B_\delta(x_0)$ tal que $u_0 \in T^{sT}x$, luego dado $y \in B_\delta(x_0)$ tenemos:

$$\langle u_0, y - x\rangle \leqslant \sup_{u\in Tx} \langle u, y - x\rangle = sT(x,y) \leqslant M$$

Para cada $z \in X$ tal que $\|z\| < 1$ considerando $y_z = x + \frac{\delta}{2}z \in B_\delta(x_0)$ se tiene que:

$$M \geqslant sT(x,y_z) \geqslant \langle u_0, y_z - x\rangle = \left\langle u_0, x + \frac{\delta}{2}z - x \right\rangle = \left\langle u_0, \frac{\delta}{2}z \right\rangle = \frac{\delta}{2}\langle u_0, z\rangle$$

Entonces

$$\langle u_0, z\rangle \leqslant \frac{2M}{\delta} \text{ para todo } z \in X \text{ tal que } \|z\| < 1$$

Tomando supremo

$$\|u_0\| = \sup_{\|z\|<1} \langle u_0, z\rangle \leqslant \frac{2M}{\delta}$$

Como u_0 fue tomado arbitrariamente en $T^{sT}(B_\delta(x_0))$ se deduce que $\|u\| \leqslant \frac{2M}{\delta}$ para todo $u \in T^{sT}(B_\delta(x_0))$, es decir $T^{sT}(B_\delta(x_0))$ está acotado.

Paso 4: $T(B_\delta(x_0))$ está acotado.

De la Observación 5.2, $Tx \subseteq T^{sT}x$ para todo $x \in D(T)$, lo que implica si T^{sT} está acotado en $B_\delta(x_0)$ también T está acotado en $B_\delta(x_0)$. Finalmente puesto que $x_0 \in int(D(T))$ fue tomado arbitrariamente, T está localmente acotado en $int(D(T))$.

■

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. Conclusiones

i) El uso de funciones multivaluadas es más conveniente que las funciones en el sentido usual ya que , como lo muestra el Ejemplo 2.2, una función se puede ver como un caso particular de función multivaluada, además de una mayor cantidad de operaciones que con ellas se pueden realizar.

ii) El concepto que generaliza y contiene a todos los tipos de operadores monótonos mencionados en este trabajo es el de operador θ-monótono, puesto que el Teorema 3.5 muestra que α-monótono y θ-monótono son equivalentes.

iii) Se desprende de lo anterior y del Teorema 3.4, que todo lo probado para un operador θ-monótono también seguirá siendo válido para los otros tipos de operadores monótonos.

iv) La prueba directa de la acotación local de un operador θ-monótono en $\mathbb{R}^n$ se obtiene rápidamente con la hipótesis de semicontinuidad inferior respecto a la primera variable de $\theta(\cdot,\cdot)$ en el interior del dominio del operador, si consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma de la suma.

v) El resultado anterior se puede tener en dimensión infinita si cambiamos la

semicontinuidad inferior por la semicontinuidad inferior débil, esto es que $\theta(\cdot,\cdot)$ sea semicontinua inferiormente en su primera variable en el interior del dominio del operador respecto a la topología débil de un espacio de Banach reflexivo.

7.2. Trabajos futuros

i) Profundizando aun más se podría encontrar una prueba para la acotación local de un operador θ-monótono en un espacio de Banach no necesariamente reflexivo, para ello es útil considerar, por ejemplo, el subdiferencial como un operador θ-monótono.

ii) Bajo ciertas condiciones en el teorema principal se puede conseguir la existencia de la inversa del operador, que para nuestro placer también sería θ-monótono, para una función θ adecuada, además la existencia del operador inverso la podemos usar en teoria de semigrupos, esta vez con operadores multivaluados y notemos que como todo espacio de Hilbert es un espacio reflexivo, los resultados encontrados en este trabajo también son válidos para espacios de Hilbert.

iii) Si trabajamos con espacios de Hilbert, surge de forma natural el operador Identidad que sería θ-monótono, este operador no es posible en espacios de Banach que no sean de Hilbert, a menos que podamos identificar de alguna manera el espacio con su dual. La ventaja de trabajar con espacios de Hilbert se nota al encontrase por ejemplo con que el operador T o $T + \lambda I$ sean suryectivos como operadores θ-monótonos.

iv) Si en lo anterior, el operador $T : H \rightrightarrows H$ es maximal y existe la inversa del operador $T+\lambda I$ se podría hablar del Teorema de Hille-Yosida para operadores θ-monótonos y entrar al campo de la teoría de semigrupos.

Bibliografía

[1] Alimohammady M. y Hashoosh, A. E.(2015), *Existence Theorems For $\alpha(u,v)$-monotone of nonstandard Hemivariational Inequality.* Journal of Advances in Mathematics, 10(2), 3205-3212. Recuperador de: cirworld.com/index.php/jam/article/view/10-2-1460.

[2] Alizadeh M.H., Hadjisavvas N. y Roohi M.(2012), *Local boundedness properties for generalized monotone operators*, J. Convex Anal., 19(1), 49-61. Recuperado de: heldermann.de/JCA/JCA19/jca19.htm.

[3] Alizadeh M.H. y Roohi M.(2017), *Some results on pre-monotone operators*, Bull. Iran.Math. Soc. 43(6), 2085-2097. Recuperado de: researchgate.net/publication/323599957.

[4] Alizadeh M.H.(2018), *Fitzpatrick function for generalized monotone operators*. Recuperado de: researchgate.net/publication/322517708.

[5] Alizadeh M.H.(2018), *On generalized convex functions and generalized subdifferential*, Optimization Letters. 1-13. Doi: 10.1007/s11590-018-1326-y.

[6] Apostol, T. M. (1999). *Calculus Vol.1* . Barcelona, España:Reverté.

[7] Aubin, J.-P. y Frakowska, H. (1990). *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser Boston. Doi: 10.1007/978-0-8176-4848-0.

[8] Bartle, R. G. (1990). *Introdución al Análisis Matemático.* México D.F., México: Editorial Limusa S.A.

[9] Bauschke, H. H. y Combettes, P.L. (2017). *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Space.*(2da. ed.) Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-48311-5.

[10] Berge, C. (1959). *Espaces topologiques: Fonctions multivoques.*(2da. ed.), Dunod, Francia, Paris.

[11] Blum, E. y Oettli, W (1993). *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems.*, Math. Stud. 36, 1-23.

[12] Brezis, H. (1984), *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial Madrid.

[13] Brezis, H. (2010), *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, USA, New York. Doi: 10.1007/978-0-387-70914-7.

[14] Browder, F. E.(1965), *Multi-Valued Monotone Nonlinear Mappings and Duality Mappings in Banach Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, 118, 338-351. Doi: 10.2307/1993964.

[15] Browder, F. E.(1968), *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Math. Ann.,175(2), 89-113. Doi: 10.1007/BF01418765.

[16] Browder, F. E.(1968), *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann., 177(4), 283-301. Doi: 10.1007/BF01350721.

[17] Cross, R. (1998). *Multivualed Linear Operators*, Marcel Dekker, USA, New York.

[18] Hashoosh, A. E. y Alimohammady M.(2016), *On Well-Posedness Of Generalized Equilibrium Problems Involving α-Monotone Bifunction.*, Journal of Hyperstructures, 5(2), 151-168. Recuperado de: jhs-uma.com/index.php/JHSMS/article/view/225.

[19] Hashoosh, A. E., Alimohammady M. y Kalleji, M.K.(2016), *Existence Results for Some Equilibrium Problems Involving α-Monotone Bifunction.*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 2016, Article ID 2093026, 1-5. Doi: 10.1155/2016/2093026.

[20] Halmos, P. R. (1967). *Teoría Intuitiva de los Conjuntos*, México DF, México: Compañía Editorial Continental.

[21] Ioffe A., Reich S. y Shafrir I.(1999), *Calculus of Variations and Differential Equations, Technion 1998*, Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics. Recuperado de: crcpress.com.

[22] Iusem A., Kassay G. y Sosa W.(2009), *An existence result for equilibrium problemswith some surjectivity consequences*, Journal of Convex Analysis, 16(3&4), 807-826. Recuperado de: heldermann.de/JCA/JCA16/jca16.htm.

[23] Jofré, A., Luc, D.T. y Théra, M.(1998), *ε-Subdifferential and ε-monotonicity.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 33(1), 71-90. Doi: 10.1016/s0362-546x(97)00511-7.

[24] Jourani A.(1996), *Subdifferentiability and subdifferential monotonicity of γ-paraconvex functions.* Control Cybern, 25(4), 721-737. Recuperado de: jourani.perso.math.cnrs.fr/jourani-subdiff.pdf.

[25] Kassay G. y Kolumban J.(2000), *Multivalued Parametric Variational Inequalities with α-Pseudomonotone Maps.* Journal of Optimization Theory and Applications, 107(1), 35-50. Doi: 10.1023/A:1004600631797.

[26] Kassay G. y Pintea C., *On preimages of a class of generalized monotone operators*, Journal of Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 73(11) (2010), pp. 3537 - 3545.

[27] Kassay G., Pintea C. y László S., *Monotone operators and closed countable sets*, Optimization,A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 60(8-9) (2011), pp. 1059 - 1069.

[28] Kesavan, S. (2009), *Functional Analysis*, India: Hindustan Book Agency. Doi: 10.1007/978-93-86279-42-2.

[29] Lages Lima, E. (1983). *Espacos Métricos*, 2da Edición.

[30] Lages Lima, E. (1991). *Curso de análisis Matemático I*, Barcelona, España: Edunsa.

[31] Lages Lima, E. (1998). *Algebra Lineal*, Lima, Perú: IMCA.

[32] László S.(2012), *θ-Monotone Operators and θ-convex functions.*, Taiwanese J. Math, 16(2),733-759. Doi: 10.11650/twjm/1500406612.

[33] Marian D., Peter I. R. y Pintea C., *A class of generalized monotone operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 421(2) (2015), pp. 1827 - 1843.

[34] Minty, G. J.(1960), *Monotone Networks. Proceedings of the Royal Society A*, Mathematical and Physical Sciences, 297(1289),194-212. Doi: 10.1098/rspa.1960.0144.

[35] Minty, G. J.(1962), *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces*, Duke Math.J., 29(3),341-346. Doi: 10.1215/s0012-7094-62-02933-2.

[36] Munkres, J. R.(2002), *Topology, 2da Edición*, Madrid, España: Prentice Hall.

[37] Rockafellar, R.T. (1996). *Convex Analysis,* Princeton University Press, Princeton Landmarks in Mathematics and Physics Número 28 de Princeton Mathematical Series.

[38] Rockafellar, R.T. y Wets, R.J-B. (2009). *Variational Analysis,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Doi: 10.1007/978-3-642-02431-3.

[39] Rojo, A. (1976). *Álgebra I.* Buenos Aires, Argentina: El Ateneo.

[40] Rolewicz S.(1999), *On $\alpha(\cdot)$-monotone multifunctions and differentiability of γ-paraconvex functions.* Studia Mathematica, 133(1), 29-37. Recuperado de: matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/sm/sm133/sm13313.pdf.

[41] Santiago, Y. S. (2014), *Tópicos de Análisis Funcional. Fundamentos y Aplicaciones*, Editorial Académica Española.

[42] Showalter R. E.(1997), *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Amer. Math. Soc., Providence,49. Doi: 10.1090/surv/049.

[43] Vera, A. y Alegría P. (1997), *Un curso de análisis funcional: Teoría y problemas*, Leioa, Espaã: Editorial AVL.

[44] Verma, R. U.(2006), *A-Monotonicity and Its Role in Nonlinear Variational Inclusions.* Journal of Optimization Theory and Applications, 129(3), 457-467. Doi: 10.1007/s10957-006-9079-7.

Anexo A

Definición A.1. Relación

Sean A y B conjuntos no vacíos, una relación R entre A y B es un subconjunto de $A \times B$, pero es común escribir aRb en lugar de $(a, b) \in R$.

Sea A un conjunto no vacío y $R \subseteq A^2$ una relación.

Definición A.2. Reflexividad

R es reflexiva si y solo si para todo $a \in A$ se tiene $(a, a) \in R$.

Definición A.3. Simetría

R es simétrica si y solo si para todo $a, b \in A$ se tiene que $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$.

Definición A.4. Antisimetría

R es antisimétrica si y solo si para todo $a, b \in A$ se tiene que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ implica $a = b$.

Definición A.5. Transitividad

R es transitiva si y solo si para todo $a, b, c \in A$ tales que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, se tiene $(a, c) \in R$.

Definición A.6. Relación de orden y preorden

R es una relación de orden en A si y solo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En la práctica, si R sea una relación de orden se suele escribir $a \preceq b$ y no aRb o $(a, b) \in R$. Si la antisimetría falla, la relación es un preorden o cuasiorden.

Definición A.7. Orden parcial y total

Sea R una relación de orden en A.

i) R es de orden parcial si y solo si existen elementos incomparables, es decir, si existen $a, b \in A$ tal que $(a, b) \notin R$ y $(b, a) \notin R$.

ii) El orden es total en caso contrario, es decir, si $a \neq b$ implica $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

Sea A un conjunto ordenado por la relación $\preceq$, entonces pueden existir algunos elementos de A que merecen ser citados por su importancia.

Definición A.8. Primer Elemento: El elemento $a \in A$ es el primer elemento de A si y solo si $a \preceq x$, para todo $x \in A$.

Definición A.9. Último Elemento: El elemento $b \in A$ es el último elemento de A si y solo si $x \preceq b$, para todo $x \in A$.

Definición A.10. Elementos Minimales: El elemento $m \in A$ es un elemento minimal si para todo $x \in A$ tal que $x \preceq m$, se tenga que $x = m$.

Definición A.11. Elementos Maximales: El elemento $n \in A$ es un elemento maximal si para todo $x \in A$ tal que $n \preceq x$, se cumpla que $n = x$.

Sea $X \subseteq A$.

Definición A.12. Cotas inferiores: El elemento $a \in A$ es una cota inferior de X si para todo $x \in X$ se tiene $a \preceq x$.

Definición A.13. Cotas superiores: El elemento $b \in A$ es una cota superior de X si para todo $x \in X$ se tiene $x \preceq b$.

Definición A.14. Ínfimo: El ínfimo es la mayor cota inferior.

Definición A.15. Supremo: El supremo es la menor cota superior.

Definición A.16. Cadena: Si $X \neq \varnothing$ es totalmente ordenado, decimos que X es una cadena en A.

Lema de Zorn:

Si A es un conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena en A tenga una cota superior, entonces A posee un elemento máximo.

Anexo B

```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <string.h>

using namespace std;

void d(int ,int ,int ,string );
void e(int ,int ,int ,string );
void f(int ,int ,int ,string ,float [100][100]);
void g(int ,int ,int ,int ,float [100][100]);
void h(int ,int ,int ,float [100][100],float [100][100]);
void leePolinomio(int , float [100][100], string , string );
void muestraPolinomio(int , float [100][100]);
void llenaCerosPolinomio(int , float [100][100]);
void muestraCerosEnPolinomio(int , float [100][100]);
int llenaCerosUnPolinomio(int , int , float [100][100], float [100][100]);
int gradoMuestraCoefPol(int ,string ,string );

int main()
{   int i,j,k,p,q,n,suma;
    float a[100][100],b[100][100];
    string aa="a",bb="b",pp="p" ,qq="q";
    cout<<"Sea T(x,y) = ( p(x,y) , q(x,y) )\n";
        p=gradoMuestraCoefPol(p, aa, pp);
    leePolinomio(p, a, aa, pp);
        q=gradoMuestraCoefPol(q, bb, qq);
    leePolinomio(q, b, bb, qq);
        cout<<endl<<"Entonces"<<endl<<"T(x,y) = (";
            muestraPolinomio(p, a);
            cout<<" ;";
            muestraPolinomio(q, b);
            cout<<" )"<<endl<<"       = ( ";
        n=llenaCerosUnPolinomio(p, q, a, b);
            muestraCerosEnPolinomio(n, a);
            cout<<" ; ";
            muestraCerosEnPolinomio(n, b);
            cout<<" )";
suma=0;
cout<<endl<<"\nLa función teta está definida como:\n"<<endl;//Funcion teta
cout<<"-1/2[|(x - u , y - v )|] (";
for(i=0;i<=n-2;i++)
    {for(j=1;j<=n-i-1;j++)
        {for(k=0;k<=j-1;k++){/////////INICIO PRIMERA SUMATORIA
if(n-i-j==0)
    {if(j-1-k==0)
        {if(k==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);}}
    else if(k==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|v|";}}
              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|v|^"<<k;}}}
    else if(j-1-k==1)
        {if(k==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|y|";}}
    else if(k==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|yv|";}}
              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|y||v|^"<<k;}}}
    else{if(k==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|y|^"<<j-1-k;}}
    else if(k==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|y|^"<<j-1-k<<"|v|";}}
              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|y|^"<<j-1-k<<"|v|^"<<k;
    }}}}
else if(n-i-j==1)
    {if(j-1-k==0)
        {if(k==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|";}}
    else if(k==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|xv|";}}
```

```
61              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x||v|^"<<k;}}}
62 else if(j-1-k==1)
63         {if(k==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|xy|";}}
64     else if(k==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|xyv|";}}
65              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|xy||v|^"<<k;}}}
66     else{if(k==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x||y|^"<<j-1-k;}}
67     else if(k==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x||y|^"<<j-1-k<<"|v|";}}
68              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x||y|^"<<j-1-k<<"|v|^"<<k;
69     }}}}
70 else{if(j-1-k==0)
71         {if(k==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|^"<<n-i-j;}}
72     else if(k==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|^"<<n-i-j<<"|v|";}}
73              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|^"<<n-i-j<<"|v|^"<<k;
74         }}}
75 else if(j-1-k==1)
76         {if(k==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|^"<<n-i-j<<"|y|";}}
77     else if(k==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|^"<<n-i-j<<"|yv|";}}
78              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|^"<<n-i-j<<"|y||v|^"<<k;
79         }}}
80 else{if(k==0)
81     {if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|^"<<n-i-j<<"|y|^"<<j-1-k;}}
82 else if(k==1)
83     {if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|^"<<n-i-j<<"|y|^"<<j-1-k<<"|v|";}}
84 else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,a,b);cout<<"|x|^"<<n-i-j<<"|y|^"<<j-1-k<<"|v|^"<<k;
85     }}}}
86     suma=suma+1;}////////////FIN PRIMERA SUMATORIA
87 for(k=0;k<=n-i-j-1;k++)
88     {if(n-i-j-1-k==0)
89         {if(k==0)
90             {if(j==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);}}
91         else if(j==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|v|";}}
92                 else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|v|^"<<j;}}}
93     else if(k==1)
94             {if(j==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|u|";}}
95         else if(j==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|uv|";}}
96                 else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|u||v|^"<<j;}}}
97         else{if(j==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|u|^"<<k;}}
98         else if(j==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|u|^"<<k<<"|v|";}}
99                 else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|u|^"<<k<<"|v|^"<<j;
100         }}}}
101 else if(n-i-j-1-k==1)
102     {if(k==0)
103         {if(j==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|";}}
104     else if(j==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|xv|";}}
105              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x||v|^"<<j;}}}
106 else if(k==1)
107         {if(j==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|xu|";}}
108     else if(j==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|xuv|";}}
109              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|xu||v|^"<<j;}}}
110     else{if(j==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x||u|^"<<k;}}
111     else if(j==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x||u|^"<<k<<"|v|";}}
112              else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x||u|^"<<k<<"|v|^"<<j;
113     }}}}
114 else{if(k==0)
115      {if(j==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-j-1-k;}}
116  else if(j==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-j-1-k<<"|v|";}}
117           else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-j-1-k<<"|v|^"<<j;
118      }}}
119 else if(k==1)
120     {if(j==0){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-j-1-k<<"|u|";}}
121 else if(j==1){if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-j-1-k<<"|uv|";}}
122           else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-j<<"|u||v|^"<<j;
123      }}}
124 else{if(j==0)
125     {if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-j-1-k<<"|u|^"<<k;}}
126 else if(j==1)
127     {if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-j-1-k<<"|u|^"<<k<<"|v|";}}
128 else{if(a[n-i][j]!=0||b[n-i][j]!=0){h(n,i,j,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-j-1-k<<"|u|^"<<k<<"|v|^"<<j;
129     }}}}
130     suma=suma+1;}}} ////////////FIN SEGUNDA SUMATORIA///////  FIN SUMATORIAS TRIPLES
131 for(i=0;i<=n-1;i++)
132     {for(k=0;k<=n-i-1;k++)
133         {if(n-i-1-k==0)
134             {if(k==0)//INICIO PRI SUMATORIA DOBLE
135               {if(a[n-i][0]!=0||b[n-i][0]!=0){h(n,i,0,b,a);}}
136  else if(k==1){if(a[n-i][0]!=0||b[n-i][0]!=0){h(n,i,0,b,a);cout<<"|u|";}}
137           else{if(a[n-i][0]!=0||b[n-i][0]!=0){h(n,i,0,b,a);cout<<"|u|^"<<k;}}}
138 else if(n-i-1-k==1)
139         {if(k==0){if(a[n-i][0]!=0||b[n-i][0]!=0){h(n,i,0,b,a);cout<<"|x|";}}
140     else if(k==1){if(a[n-i][0]!=0||b[n-i][0]!=0){h(n,i,0,b,a);cout<<"|xu|";}}
```

```
141             else{if(a[n-i][0]!=0||b[n-i][0]!=0){h(n,i,0,b,a);cout<<"|x||u|^"<<k;}}}
142     else{if(k==0){if(a[n-i][0]!=0||b[n-i][0]!=0){h(n,i,0,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-1-k;}}
143     else if(k==1){if(a[n-i][0]!=0||b[n-i][0]!=0){h(n,i,0,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-1-k<<"|u|";}}
144             else{if(a[n-i][0]!=0||b[n-i][0]!=0){h(n,i,0,b,a);cout<<"|x|^"<<n-i-1-k<<"|u|^"<<k;
145         }}}
146     suma=suma+1;
147     }}////////FIN PRIMERA SUMATORIA DOBLE
148 for(i=0;i<=n-1;i++)
149     {for(k=0;k<=n-i-1;k++)
150         {if(n-i-1-k==0)
151             {if(k==0){if(a[n-i][n-i]!=0||b[n-i][n-i]!=0){h(n,i,n-i,a,b);}}
152         else if(k==1){if(a[n-i][n-i]!=0||b[n-i][n-i]!=0){h(n,i,n-i,a,b);cout<<"|v|";}}
153                 else{if(a[n-i][n-i]!=0||b[n-i][n-i]!=0){h(n,i,n-i,a,b);cout<<"|v|^"<<k;}}}
154         else if(n-i-1-k==1)
155             {if(k==0){if(a[n-i][n-i]!=0||b[n-i][n-i]!=0){h(n,i,n-i,a,b);cout<<"|y|";}}
156         else if(k==1){if(a[n-i][n-i]!=0||b[n-i][n-i]!=0){h(n,i,n-i,a,b);cout<<"|yv|";}}
157                 else{if(a[n-i][n-i]!=0||b[n-i][n-i]!=0){h(n,i,n-i,a,b);cout<<"|y||v|^"<<k;}}}
158         else{if(k==0){if(a[n-i][n-i]!=0||b[n-i][n-i]!=0){h(n,i,n-i,a,b);cout<<"|y|"<<n-i-1-k;}}
159 else if(k==1)
160             {if(a[n-i][n-i]!=0||b[n-i][n-i]!=0){h(n,i,n-i,a,b);cout<<"|y|^"<<n-i-1-k<<"|v|";}}
161        else{if(a[n-i][n-i]!=0||b[n-i][n-i]!=0){h(n,i,n-i,a,b);cout<<"|y|^"<<n-i-1-k<<"|v|^"<<k;
162     }}}
163     suma=suma+1;
164     }}////////////FIN SEGUNDA SUMATORIA DOBLE
165 if(suma==0){cout<<" 0 )\n";} else{cout<<"  )\n";}
166 return 0;
167 }///////////////FIN FUNCION PRINCIPAL
168 void h(int n, int i, int j, float cc[100][100], float dd[100][100])
169 {
170     cout<<" + "<<abs(cc[n-i][j])+2*abs(dd[n-i][j]);
171 }
172 void d(int p, int i, int j, string c)
173 {
174     cout<<" + "<<c<<"["<<p-i<<"]["<<j<<"]";
175 }
176 void e(int p, int i, int j, string c)
177 {
178     cout<<c<<"["<<p-i<<"]["<<j<<"]";
179 }
180 int gradoMuestraCoefPol(int p, string c, string r)
181 {   int cont=0;
182     cout<<endl<<"Si el grado de "<<r<<"(x,y) es ";cin>>p;
183     cout<<"Entonces "<<r<<"(x,y) = ";
184 for(int i=0;i<=p;i++)
185     {for(int j=0;j<=p-i;j++)
186         {if(cont==0){if(p==0||p==1){if(p==0)
187                     {e(p,i,j,c);}
188                 else{e(p,i,j,c);cout<<"x";}}
189                 else{e(p,i,j,c);cout<<"x^"<<p-i-j;}}
190         else{if(j==0){if(i==p||i==p-1){if(i==p)
191                     {d(p,i,j,c);}
192                 else{d(p,i,j,c);cout<<"x";}}
193                 else{d(p,i,j,c);cout<<"x^"<<p-i-j;}}
194         else{if(j==1){if(i==p-1||i==p-2){if(i==p-1)
195                     {d(p,i,j,c);cout<<"y";}
196                 else{d(p,i,j,c);cout<<"xy";}}
197                 else{d(p,i,j,c);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y";}}
198         else{if(j==p-i-1||j==p-i){if(j==p-i-1)
199                     {d(p,i,j,c);cout<<"xy^"<<j;}
200                 else{d(p,i,j,c);cout<<"y^"<<j;}}
201                 else{d(p,i,j,c);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y^"<<j;}}}}
202     cont=cont+1;}}
203 cout<<endl<<"Ingrese los coeficientes de "<<r<<"(x,y) :\n"<<endl;
204 return p;
205 }
206 void f(int p, int i, int j, string c, float cc[100][100])
207 {
208     cout<<"  ==>  "<<c<<"["<<p-i<<"]["<<j<<"] = ";cin>>cc[p-i][j];
209 }
210 void leePolinomio(int p, float cc[100][100], string c, string r)
211 {
212     for(int i=0;i<=p;i++)
213         {for(int j=0;j<=p-i;j++)
214             {if(j==0){if(i==p||i==p-1){if(i==p)
215                 {cout<<"T. Indpndient es";f(p,i,j,c,cc);}
216             else{cout<<"Coef de     x   ";f(p,i,j,c,cc);}}
217             else{cout<<"Coef de    x^"<<p-i-j<<"  ";f(p,i,j,c,cc);}}
218     else{if(j==1){if(i==p-1||i==p-2){if(i==p-1)
219                 {cout<<"Coef de     y   ";f(p,i,j,c,cc);}
220             else{cout<<"Coef de     xy  ";f(p,i,j,c,cc);}}
221             else{cout<<"Coef de   x^"<<p-i-j<<"y"<<"  ";f(p,i,j,c,cc);}}
```

```
222         else{if(j==p-i-1||j==p-i){if(j==p-i-1)
223                 {cout<<"Coef de   xy^"<<j<<"  ";f(p,i,j,c,cc);}
224             else{cout<<"Coef de    y^"<<j<<"  ";f(p,i,j,c,cc);}}
225             else{cout<<"Coef de  x^"<<p-i-j<<"y^"<<j<<" ";f(p,i,j,c,cc);}}}}}
226 }
227 void g(int p, int i, int j, int z, float cc[100][100])//g(p,i,j,1,cc);
228 {
229     if(z==1){cout<<" + "<<cc[p-i][j];}else{cout<<" "<<cc[p-i][j];}
230 }
231 void muestraPolinomio(int p, float cc[100][100])
232 {   int i,j,cont=0;  //    cout<<r<<"(x,y) = ";
233     for(i=0;i<=p;i++)
234         {for(j=0;j<=p-i;j++)
235             {if(j==0){if(i==p||i==p-1){if(i==p)
236                     {if(cc[p-i][j]>0){g(p,i,j,1,cc);}
237                 else{if(cc[p-i][j]<0){g(p,i,j,0,cc);}}}
238                 else{if(cc[p-i][j]>0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"x";}
239                 else{if(cc[p-i][j]<0){g(p,i,j,0,cc);cout<<"x";}}}}
240                 else{if(cc[p-i][j]>0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"x^"<<p-i-j;}
241                 else{if(cc[p-i][j]<0){g(p,i,j,0,cc);cout<<"x^"<<p-i-j;}}}}
242         else{if(j==1){if(i==p-1||i==p-2){if(i==p-1)
243                     {if(cc[p-i][j]>0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"y";}
244                 else{if(cc[p-i][j]<0){g(p,i,j,0,cc);cout<<"y";}}}
245                 else{if(cc[p-i][j]>0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"xy";}
246                 else{if(cc[p-i][j]<0){g(p,i,j,0,cc);cout<<"xy";}}}}
247                 else{if(cc[p-i][j]>0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y";}
248                 else{if(cc[p-i][j]<0){g(p,i,j,0,cc);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y";}}}}
249             else{if(j==p-i-1||j==p-i){if(j==p-i-1)
250                     {if(cc[p-i][j]>0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"xy^"<<j;}
251                 else{if(cc[p-i][j]<0){g(p,i,j,0,cc);cout<<"xy^"<<j;}}}
252                 else{if(cc[p-i][j]>0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"y^"<<j;}
253                 else{if(cc[p-i][j]<0){g(p,i,j,0,cc);cout<<"y^"<<j;}}}}
254                 else{if(cc[p-i][j]>0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y^"<<j;}
255                 else{if(cc[p-i][j]<0){g(p,i,j,0,cc);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y^"<<j;}
256         }}}}}}
257 }
258 void llenaCerosPolinomio(int m, float cc[100][100])
259 {
260     for(int i=0;i<m;i++){for(int j=0;j<=m-i;j++){cc[m-i][j]=0;}}
261 }
262 int llenaCerosUnPolinomio(int p, int q, float cc[100][100], float dd[100][100])
263 {   int m, n;
264     m=p-q;
265     if(m=0||m>0){n=p; if(m=0){return n;}
266         else{ llenaCerosPolinomio(m,dd);return n;}}//CASO P=Q
267     else{n=q; llenaCerosPolinomio(-m,cc);return n;}////CASO Q>P////
268 }
269 void muestraCerosEnPolinomio(int p, float cc[100][100])
270 {   int i,j,cont=0; //cout<<r<<"(x,y)=";
271     for(i=0;i<=p;i++)
272         {for(j=0;j<=p-i;j++)
273             {if(cont==0){if(p==0||p==1){if(p==0){cout<<cc[p-i][j];}
274                     else{cout<<cc[p-i][j]<<"x";}}
275                     else{cout<<cc[p-i][j]<<"x^"<<p-i-j;}}
276     else{if(j==0){if(i==p||i==p-1){if(i==p)
277             {if(cc[p-i][j]>=0){g(p,i,j,1,cc);}
278                         else{g(p,i,j,0,cc);}}
279         else{if(cc[p-i][j]>=0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"x";}
280                         else{g(p,i,j,0,cc);cout<<"x";}}}
281         else{if(cc[p-i][j]>=0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"x^"<<p-i-j;}
282                         else{g(p,i,j,0,cc);cout<<"x^"<<p-i-j;}}}
283         else{if(j==1){if(i==p-1||i==p-2){if(i==p-1)
284             {if(cc[p-i][j]>=0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"y";}
285                         else{g(p,i,j,0,cc);cout<<"y";}}
286         else{if(cc[p-i][j]>=0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"xy";}
287                         else{g(p,i,j,0,cc);cout<<"xy";}}}
288         else{if(cc[p-i][j]>=0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y";}
289                         else{g(p,i,j,0,cc);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y";}}}
290         else{if(j==p-i-1||j==p-i){if(j==p-i-1)
291             {if(cc[p-i][j]>=0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"xy^"<<j;}
292                         else{g(p,i,j,0,cc);cout<<"xy^"<<j;}}
293         else{if(cc[p-i][j]>=0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"y^"<<j;}
294                         else{g(p,i,j,0,cc);cout<<"y^"<<j;}}}
295         else{if(cc[p-i][j]>=0){g(p,i,j,1,cc);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y^"<<j;}
296                         else{g(p,i,j,0,cc);cout<<"x^"<<p-i-j<<"y^"<<j;}}}}}
297         cont=cont+1;}}
298 }
```