Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Un problema triarmónico del tipo p(x)-Kirchhoff vía métodos topológicos

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Matemática Pura

AUTOR

Henry Cristhian ZUBIETA ROJAS

ASESOR

Dr. Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Zubieta, H. (2024). *Un problema triarmónico del tipo p(x)-Kirchhoff vía métodos topológicos*. [Tesis de doctorado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Henry Cristhian Zubieta Rojas.
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43404788
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9441-1369
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Eugenio Cabanillas Lapa
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445518
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-8941-4394
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Lito Edinson Bocanegra Rodríguez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	44374253
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Eduardo Valdemar Trujillo Flores
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08660272
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: -12.05611582267559 Longitud: -77.08468053573509
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Mayo 2023 – octubre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR

Siendo las 14:00 horas del día miércoles dieciocho de setiembre de dos mil veinticuatro, en el aula 103 de la Facultad de Ciencias Matemáticas, se reunió el Jurado Evaluador de tesis, presidido por el Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez e integrado por los siguientes miembros: Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (Jurado Informante), Dr. Eduardo Valdemar Trujillo Flores (Jurado Externo) y el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa como Miembro Asesor; se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «**UN PROBLEMA TRIARMÓNICO DEL TIPO P(X)-KIRCHHOFF VÍA METÓDOS TOPOLÓGICOS**», presentada por el Magister **HENRY CRISTHIAN ZUBIETA ROJAS**, para optar el Grado Académico de Doctor en Matemática Pura.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Magister **HENRY CRISTHIAN ZUBIETA ROJAS**, el calificativo de 18. MUY BUENO

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Doctor en Matemática Pura** al Señor Magister **HENRY CRISTHIAN ZUBIETA ROJAS.**

Siendo las 15:35 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez
PRESIDENTE

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO

Dr. Eduardo Valdemar Trujillo Flores
MIEMBRO EXTERNO

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA PURA

ESCALA DE CALIFICACIÓN

APRUEBA

A	EXCELENTE	20	19
B	MUY BUENO	18	17
C	BUENO	16	15
D	APROBADO	14	

NO APRUEBA

E	DESAPROBADO	13 o menos

La fracción de 13.5 p más es equivalente a 14

Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez
PRESIDENTE

Lima, 18 de setiembre de 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA PURA

ESCALA DE CALIFICACIÓN

APRUEBA

A	EXCELENTE	20	19
B	MUY BUENO	18	17
C	BUENO	16	15
D	APROBADO	14	

NO APRUEBA

E	DESAPROBADO	13 o menos

La fracción de 13.5 p más es equivalente a 14

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO

Lima, 18 de setiembre de 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO

GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA PURA

ESCALA DE CALIFICACIÓN

APRUEBA

A	EXCELENTE	20	19
B	MUY BUENO	18	17
C	BUENO	16	15
D	APROBADO	14	

NO APRUEBA

E	DESAPROBADO	13 o menos

La fracción de 13.5 p más es equivalente a 14

Dr. Eduardo Valdemar Trujillo Flores

MEMBRO EXTERNO

Lima, 18 de setiembre de 2024

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Eugenio Cabanillas Lapa en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001044-2023-D-FCM/UNMSM del 28/06/2023 de la tesis, cuyo título es **"Un problema triarmónico del tipo p(x) – Kirchhoff vía métodos topológicos"**, presentado por magíster **Henry Cristhian Zubieta Rojas** para optar el grado de **Doctor en Matemática Pura**.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según larevisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documentoevaluado cuenta con el porcentaje de **10**% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado correspondiente.

Firma del Asesor:

DNI:**06445518**

Nombres y apellidos del asesor: **Eugenio Cabanillas Lapa**



“A mis padres y hermanos
por su apoyo incondicional”.

Agradecimientos

Agradezco a **Dios**, por darme sabiduría, y ayudarme a no dejarme vencer ante la adversidad.

Agradezco al **Dr. Eugenio Cabanillas Lapa**, por el entusiasmo, optimismo, amabilidad, y buena disposición en su desempeño como asesor de la presente tesis.

Finalmente, agradezco a mis **padres, y hermanos** por su apoyo inmensurable.

Índice General

1. Introducción **1**

2. Preliminares **4**

2.1. Resultados Topológicos 4

2.2. Caracterización de la continuidad 7

2.3. Espacio de Lebesgue con exponente variable 7

2.4. Espacios de Sobolev con exponente variable 17

2.5. El espacio $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap W^{3,p(\cdot)}(\Omega)$ 18

2.6. Teoría del Grado 26

2.7. Teorema de Dinca 27

2.8. El grado topológico de aplicaciones condensantes 29

3. Existencia de la solución débil **33**

3.1. Solución Débil 36

3.2. Existencia de soluciones 36

4. Unicidad de la solución **47**

Trabajos futuros **49**

Conclusión **50**

Apéndice **51**

4.1. Derivada de Fréchet 52

4.2. Gâteaux Diferenciabilidad 53

4.3. La medida de Lebesgue 54

Bibliografía **56**

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^N$:	Espacio euclidiano de dimensión N, 5.
Ω :	Conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, Lebesgue medible 5.
$\partial\Omega$:	Frontera de Ω, 5.
$\overline{\Omega}$:	Clausura de Ω, 5.
$C^1\left(\overline{\Omega}\right)$:	Funciones continuamente diferenciables sobre $\overline{\Omega}$, 5.
$C^k(\Omega)$:	Funciones k veces continuamente diferenciables sobre Ω, 6.
$C^\infty(\Omega)$:	Funciones infinitamente diferenciables sobre Ω, 6.
$C_0^\infty(\Omega)$:	Funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto sobre Ω, 6.
V' :	Dual de V, 6.
$S(\Omega)$:	Funciones real medible sobre Ω, 7.
p^- :	Infimo esencial de $p(\cdot)$ en Ω, 7.
p^+ :	Supremo esencial de $p(\cdot)$ en Ω, 7.
$L^{p(x)}(\Omega)$:	Espacio de Lebesgue variable con exponente $p(\cdot)$ sobre Ω, 7.
$\lvert\cdot\rvert_{p(\cdot)}$:	Norma sobre el espacio $L^{p(x)}(\Omega)$, 7.
$L^1_{loc}(\Omega)$:	Funciones en $L^1(K)$ para cualquier compacto $K \subset \Omega$, 7.
D^α :	Derivada débil de orden α, 7.
$\rho_{p(\cdot)}$:	Modular asociado a $L^{p(x)}(\Omega)$, 8.
$p_+(\Omega)$:	Supremo esencial de $p(x)$ en Ω, 8.
$\lvert\Omega\rvert$:	Medida de Lebesgue de Ω, 8.
$p'(\cdot)$:	Exponente conjugado de $p(x)$, 11.
$L^\infty(\Omega)$:	Funciones medibles u con $\sup ess_\Omega \lvert u\rvert < \infty$, 13.
$\hookrightarrow$:	Inmersión continua, 15.
$W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$:	Espacio de Sobolev sobre Ω, con exponente variable $p(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, 15.
$\lVert\cdot\rVert_{k,p(\cdot)}$:	Norma sobre $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$, 15.
$\lvert\alpha\rvert$:	Longitud de multi-índice α, 15.

$H^{k,p(\cdot)}(\Omega)$:	Clausura de $C^k(\Omega) \cap W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$, 15.
$W_0^{k,p(\cdot)}(\Omega)$:	Clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$, 15.
$p_k^*(\cdot)$:	Exponente de Sobolev de $p_k(\cdot)$, 15.
X :	Espacio $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap W^{3,p(\cdot)}(\Omega)$, 16.
$\|\cdot\|_X$:	Norma de X, 16.
∇f :	Gradiente de f, 17.
Δ :	El Laplaciano, 18.
$p^*(\cdot)$:	Exponente de Sobolev de $p(\cdot)$, 20.
$c.t.p.$:	En casi todo punto, 22.
$d(f, \Omega, y)$:	Grado de f definido sobre Ω con valor $y.$, 23.
$d_{LS}(f, \Omega, y)$:	Grado de Leray-Schauder de f definido sobre Ω en y, 24.
$B_r(\theta)$:	Bola abierta de centro θ y radio r positivo, 26.
$\alpha(B)$:	Kuratowski medida de la no compacidad de B, 26.
$C_\alpha(\Omega)$:	Aplicaciones $\alpha-$condensadas $F : \Omega \to X$, 27.
$conv(B)$:	Cápsula convexa de B, 27.
$\mathscr{P}(X)$:	Conjunto de partes de X, 27.
$\Delta^3_{p(x)}u$:	Operador $p(x)$-triarmónico, 30.
div :	Divergencia, 30.
ν :	Vector normal exterior unitario, 30.
I'_F :	Derivada de Fréchet de I, 34.
I'_G :	Derivada de Gâteaux de I, 37.
$L^{p(x)}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$:	Producto cartesiano de N copias de $L^{p(x)}(\Omega)$, 40.

Resumen

Un problema triarmónico del tipo p(x)-Kirchhoff vía métodos topológicos

Henry Cristhian ZUBIETA ROJAS

Orientador: Eugenio Cabanillas Lapa
Grado obtenido: Doctor en Matemática Pura

Esta tesis tiene por objetivo probar la existencia soluciones débiles para una clase de problema elíptico no lineal que involucra a un operador triarmónico del tipo $p(x)-$ Kirchhoff con condiciones de fronteras Navier, y una no linealidad f dependiente de $(\nabla u, \Delta u, \nabla\Delta u)$.
Nuestra técnica se basa en un resultado del tipo Fredholm para un par de operadores no lineales y la teoría de espacios de Sobolev variables. Además probamos un resultado simple de unicidad.

Palabras clave. Espacio de Sobolev variable, Alternativa de Fredholm, Operador triarmónico del tipo $p(x)-$Kirchhoff.

Abstract

A triharmonic problem of the type p(x)-Kirchhoff via topological methods

Henry Cristhian ZUBIETA ROJAS

Advisor: Eugenio Cabanillas Lapa
Obtained Title: Doctor in Pure Mathematics

The aim of this thesis is to prove the existence of weak solutions for a class of nonlinear elliptic problem involving the $p(x)-$Kirchhoff type triharmonic operator with Navier boundary value conditions and a $(\nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u) -$ dependent nonlinearity f.

Our technique is based on a Fredholm-type result for a couple of nonlinear operators and the theory of variable Sobolev spaces. Furthermore, we prove a simple uniqueness result.

Keywords. Variable Sobolev spaces, Fredholm alternative, $p(x)-$Kirchhoff type triharmonic operator.

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis discutiremos la existencia de soluciones débiles del siguiente problema elíptico no lineal que involucra al operador triarmónico tipo $p(x)-$Kirchhoff, con condiciones de frontera Navier

$$\begin{aligned} -M\Big(I(u)\Big)\Delta^3_{p(x)}u = f(x,u,\nabla u,\Delta u,\nabla\Delta u) \ \text{ en } \ \Omega, \\ u=\Delta u=\Delta^2 u=0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

siendo Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ cuya frontera $\partial\Omega$ es suave, y $N \geq 3$, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ para cualquier $x \in \overline{\Omega}$, $p(x) > 1$, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función continua, $I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx$, $\Delta^3_{p(x)}u := div\left(\Delta\left(|\nabla\Delta u|^{p(x)-2}\nabla\Delta u\right)\right)$ es el llamado operador $p(x)-$triarmónico, y f es una función Caratheodory. Este operador tiene la propiedad de ser no homogéneo y está vinculado a los espacios de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ y Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$ con exponente variable.

El estudio de las ecuaciones diferenciales parciales con exponente variable ha recibido una atención considerable en los últimos años. Este interés se refleja directamente en diversas aplicaciones. Existen aplicaciones relacionadas con la teoría de la elasticidad no lineal Rajagopal and Růžička (2001), modelamiento de fluidos electrorreológicos Růžička (2000), Halsey (1992), Stangroom (1983), estudio del electromagnetismo Hamdani and Repovš (2020), restauración de imágenes Chen et al. (2006) y biología matemática Fragnelli (2010). También existen muchos resultados donde se han estudiado problemas de frontera elíptica de Navier, como por ejemplo Chung (2019), Chung (2020), Kefi (2021), Ădulescu and Vetro (2023); sin embargo, existen pocas contribuciones al estudio de los problemas triarmonicos con término de reacción $f(x,t,z,y,w)$ dependiendo del gradiente, el laplaciano y el gradiente del laplaciano de la solución. Podemos citar Aydin (2021), Belakhdarl et al. (2022), Goyal and Goyal (1989), Quang et al. (2020), Shokooh et al. (2020). Recientemente, Mehraban et. al. Mehraban and Heidarkhani (2022) considerada la existencia y la multiplicidad de soluciones para el problema (1.0.1), con

$M(t) = 1$, $f(x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u) := \lambda f(x, u) + \mu g(x, u)$. Notamos que si elegimos el funcional $L(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \, dx$ entonces tenemos el problema

$$\begin{gathered} -M\Big(\int_\Omega \tfrac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \, dx \Big) div \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = f(x, u) \ \text{ en } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{gathered} \tag{1.0.2}$$

que se denomina ecuación del tipo $p(x)-$Kirchhoff. El problema (1.0.2) tiene algunas motivaciones físicas. De hecho, está relacionado con el modelo físico

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{p_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1.0.3}$$

establecido por el Dr. Gustav Kirchhoff en 1883, Kirchhoff (1883), extienden las ecuaciones de ondas clásica de D'Alembert, considerando el efecto del cambio en la longitud de la cuerda durante la vibración. Aquí L es la longitud de la cuerda, el área de la sección transversal viene representado por h, y el módulo de Young del material es denotado con E, además ρ representa la densidad de masa y finalmente ρ_0 nos indica la tensión inicial. Una característica distintiva es que el modelo (1.0.3) contiene un coeficiente no local $\frac{p_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dx$ que depende de la media $\frac{1}{2L} \int_0^L |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dx$, y por lo tanto la ecuación ya no es una identidad puntual. El problema (1.0.3) ha recibido mucha atención después de Lions (1978) que propuso un marco abstracto para este problema, véase, por ejemplo Arosio and Panizzi (1996), Cavalcanti et al. (2001) y Corrêa and Figueiredo (2006), Corrêa and Figueiredo (2009), Dai and Hao (2009), Dai and Ma (2011), Dai and Wei (2010), Dreher (2006). Estudio de la ecuación de tipo Kirchhoff ya se ha extendido al caso del $p-$Laplaciano (para detalles ver Corrêa and Figueiredo (2006), Corrêa and Figueiredo (2009), Dreher (2006), Dreher (2007)) y $p(x)-$Laplaciano (ver Colasuonno and Pucci (2011), Dai and Hao (2009), Dai and Ma (2011), Dai and Wei (2010), Fan (2010)).

Motivados por las referencias anteriores, los resultados en Rahal (2019) y la importancia de la ecuación elíptica de sexto orden en el modelado de úlceras Ugail and Wilson (2005), fluido viscoso Rahal (2009), diseño geométrico Ugail (2011). Debido a la presencia del $\nabla u, \Delta u$ y el $\nabla \Delta u$ en f las técnicas variacionales más usuales no pueden utilizarse para estudiarlo; por lo que adaptamos herramientas topológicas. Este enfoque se basa en un teorema de tipo Fredholm para dos operadores que son no lineales, debido a Dinca (2001). Hasta donde sabemos, nuestro trabajo es el primer intento de considerar un problema triarmónico de tipo $p(x)-$Kirchhoff que a su vez presenta una no linealidad f dependiente de $(\nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u)$. Además, estudiamos la unicidad de las soluciones débiles bajo hipótesis adecuadas sobre la no linealidad.

Debemos mencionar que nuestro trabajo fue aceptado para publicacion en Asia Mathematika, An international Journal, como artciculo titulado: "A perturbed

elliptic problem involving the $p(x)-$Kirchhoff type triharmonic operator", Agosto 2023.

Esta investigación se desarrolla de la siguiente manera. En el capítulo 2 presentamos algunos resultados topológicos, tales como el teorema de la divergencia y la desigualdad de Tartar, necesarios para construir de una manera precisa la definición de solución débil del problema planteado, tal como se verá en el capítulo 3. También incluimos el teorema de Minty-Browder, y consideramos las propiedades de los espacios de Lebesgue variable. Además, desarrollamos las propiedades del modular y la norma, incluyendo la desigualdad de Hölder generalizada entre otras. Luego, exponemos brevemente la teoría del grado de Leray-Schauder. Continuamos enunciando el teorema topológico que permitirá mostrar el resultado principal de este trabajo, y que denominaremos "Teorema de Dinca". En el capítulo 3, mostraremos en detalle los cálculos realizados para conseguir una definición de solucicon débil al problema (1.0.1). A seguir demostramos que existen de soluciones débiles, utilizando el teorema de Minty-Browder y la teoría del grado vía el teorema de Dinca. Finalmente, en el capítulo 4, completamos nuestro resultado principal demostrando la unicidad de la solución.

Capítulo 2

Preliminares

"Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto, y pensar lo que nadie más ha pensado".
Albert Szent-Györgyi

2.1. Resultados Topológicos

Los resultados mencionados en la presente sección fueron extraídos de Berkovits (2007), Brézis (1984),Cabanillas and Huaringa (2021), Duoandikoetxea and Escauriaza (2018), Costa (2007),Kreyszig (1978), Simon (1978) y Zeidler (1985).

Definición 2.1 *Sean los espacios normados E y F sobre K y sea el operador lineal $T : E \to F$. Decimos que T es un operador compacto si para toda sucesión $(x_n) \subset E$ acotada, se tiene que $(T(x_n))_{n\geq 1}$ posee una subsucesión convergente.*

Definición 2.2 *Sean los espacios de Banach X e Y y sea $D \subseteq X$. Decimos que $f : D \to Y$ es compacto si:*

1. *f es continuo.*
2. *$\forall B$ acotado $\subseteq D$: $\overline{f(B)}$ es compacto en Y.*

Teorema 2.3 *Sean X y Y espacios métricos y $T : X \to Y$ un mapeo continuo. Entonces la imagen de un subconjunto compacto M de X bajo T es compacto.*

Teorema 2.4 *Sea X un espacio de Banach. Un subespacio Y de X es completo si y solo si $X - Y$ es abierto.*

Proposición 2.5 *Dado un espacio reflexivo E, sea $M \subset E$ un subespacio vectorial cerrado entonces M, con la norma inducida por E, es reflexivo.*

Teorema 2.6 (*Teorema de la Divergencia*) *Dado un conjunto abierto y acotado Ω de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $G : \Omega \to \mathbb{R}^N$ un campo vectorial en Ω, $G \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ y ν el vector normal exterior a $\partial\Omega$. Entonces*

$$\int_\Omega \nabla \cdot G(x)dx = \int_{\partial\Omega} G \cdot \nu d\sigma$$

Proposición 2.7 *(Desigualdad de Tartar) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$ y c.t.p. $x \in \Omega$*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \geq \begin{cases} c_p |x-y|^p & si \quad p \geq 2 \\ c_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{p-2}}, \ (x,y) \neq (0,0) & si \quad 1 < p < 2, \end{cases}$$

siendo $c_p > 0$ una constante que depende de p.

Lema 2.8 *Cabanillas and Huaringa (2021) Asuma que $a : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ es una función C^1-continua tal que*

$$a_0 + H(a_3)a_2 |t|^{\frac{q(x)-p(x)}{p(x)}} \leq a(t) \leq a_1 + a_3 |t|^{\frac{q(x)-p(x)}{p(x)}}$$

para todo $t \geq 0$, $a_0, a_1 > 0$, $a_2, a_3 \geq 0$ son números positivos, p es una función continua sobre $\overline{\Omega}$, q es alguna función continua con $N > q(x) > p(x)$ y $H(\tau) = 1$ si $\tau > 0$ y $H(\tau) = 0$ si $\tau = 0$. Entonces para cualquier $k_1, l_1 > 0$ tenemos

$$\left(k_1 a\left(|\xi|^p\right)|\xi|^{p-2}\xi - l_1 a\left(|\eta|^p\right)|\eta|^{p-2}\eta\right) \cdot (\xi - \eta) \geq C|\xi - \eta|^p, \ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Proposición 2.9 *Sea E un espacio métrico separable. Si $F \subset E$ entonces F también es separable.*

Teorema 2.10 *(Lema de Fatou) Sea una sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\geq 1}$ sobre X con valores en $\overline{\mathbb{R}}_+$. Entonces*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n d\mu\right).$$

Definición 2.11 *Dado un espacio de Banach X, $\emptyset \neq \Omega \subset X$ y $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ contenida en Ω. La aplicación $F : \Omega \subseteq X \to X^*$ es demicontinua, si $u_\nu \to u$ implica que $F(u_\nu) \rightharpoonup F(u)$.*

Definición 2.12 *Sea $\emptyset \neq \Omega \subseteq X$, $(u_\nu)_{\nu\geq 1} \subseteq X$ y $F : \Omega \subseteq X \to X^*$. Decimos que F es del tipo S_+ si $u_\nu \rightharpoonup u$ y $\limsup_{\nu\to+\infty} \langle Fu_\nu, u_\nu - u\rangle \leq 0$ resulta $u_\nu \to u$.*

Lema 2.13 *Berkovits (2007) Sea $T : X \to X^*$ acotado, una aplicación continua del tipo (S_+), el cual es biyectivo y satisface la condición*

$$\|T(u)\| \to \infty \text{ cuando } \|u\| \to \infty.$$

Entonces, $T^{-1} : X^* \to X$ es acotado, continuo y de clase (S_+).

Definición 2.14 *Sean $F : \Omega \subseteq X \to X$ un operador cualquiera y $T : \Omega_1 \subseteq X \to X^*$ cualquier operador acotado de modo que $\Omega \subseteq \Omega_1$. Si para cualquier sucesión $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ en Ω con $u_\nu \rightharpoonup u$, $T(u_\nu) \rightharpoonup y$ y $\limsup_{v\to+\infty} \langle Fu_\nu, Tu_\nu - y\rangle \leq 0$ se implica que $u_\nu \to u$, entonces decimos que F satisface la condición $(S_+)_T$.*

Consideremos los conjuntos

$$\mathscr{F}_1(\Omega) = \{G : \Omega \subseteq X \to X^* : G \text{ es acotada, demicontinua y de clase } (S_+)\}$$

y

$$\mathscr{F}_T(\Omega) = \{G : \Omega \subseteq X \to X^* : G \text{ es demicontinua y de clase } (S_+)_T\}.$$

Definición 2.15 *$T \in \mathscr{F}_1(\overline{\Omega})$ es llamado un mapeo interno esencial para F.*

Lema 2.16 *Sea un subconjunto abierto y acotado Ω en X un espacio de Banach real y reflexivo, y $T \in \mathscr{F}_1(\overline{\Omega})$ continua. Si $F, S \in \mathscr{F}_T(\overline{\Omega})$, entonces*

$$H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$$

$$H(t,u) := (1-t)Fu + tSu, \text{ para } (t,u) \in [0,1] \times \overline{\Omega}$$

En este caso, la homotopía afín es llamada homotopía afín admisible con el mapeo común interno esencial T.

Lema 2.17 *Sea $f : C \subseteq X \to \mathbb{R}$ un funcional $G-$diferenciable sobre el conjunto convexo C en el $B-$espacio real X. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

1. *f es convexo (resp. estrictamente convexo).*

2. *$f' : C \subseteq \to X^*$ es monótona (resp. estrictamente monótona).*

2.2. Caracterización de la continuidad

Los siguientes resultados se encuentran en Lions (1978).

Teorema 2.18 *(Minty-Browder). Sea V un espacio de Banach reflexivo y separable. Si $A : V \to V'$ cumple las siguientes propiedades:*

1. *A es acotado: $\forall B \subseteq V$, B acotado, se implica que $A(B)$ está acotado.*

2. *A es monótono: $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$*

3. *A es coercivo: $\lim_{\|v\|\to\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} = \infty.$*

4. *A es hemicontinua:*

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w\rangle .$$

de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$, es continua, $\forall u, v, w \in V.$

Entonces A es suryectivo, esto es, para cada $f \in V'$, existe $u \in V$ tal que

$$Au = f \quad (en\ V').$$

2.3. Espacio de Lebesgue con exponente variable

Todos los resultados relacionados a estos espacios, han sido tomados de Diening et al. (2011), Fiorenza and Uribe (2000) y Fan et al. (2001).

Notaciones 1 *1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un subconjunto medible en el sentido de Lebesgue con medida positiva.*

2. *$\Omega_\infty = \Omega_\infty^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$.*

3. *$\mathcal{P}(\Omega)$ está formado por todas las funciones Lebesgue-medibles, $p(\cdot) : \Omega \to [1, \infty]$.*

4. $\mathcal{C}(\Omega)$ *agrupa todas las funciones reales que son continuas sobre* Ω.

5. $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *para* $k = 1, 2, \ldots$ *anuncia el espacio de funciones* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *que son* k *veces continuamente diferenciable en* Ω.

6. $\mathcal{C}^\infty$ *indica el espacio de funciones* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *infinitamente diferenciable en* Ω.

7. $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *es el subespacio de* $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *consistiendo de funciones con soporte compacto en* Ω.

8. $S(\Omega)$ *agrupa a las funciones real-medibles definidas sobre* Ω. *Dos funciones en* $S(\Omega)$ *se consideran como el mismo elemento de* $S(\Omega)$ *cuando son iguales en casi todas partes.*

9. *Sean*

$$\mathcal{C}_+(\overline{\Omega}) = \left\{p(x) : p(x) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), p(x) > 1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}\right\};$$
$$p_+ = p_+(\Omega) = \max\left\{p(x) \in \mathcal{C}_+\left(\overline{\Omega}\right) : x \in \overline{\Omega}\right\},$$
$$p_- = p_-(\Omega) = \min\left\{p(x) \in \mathcal{C}_+\left(\overline{\Omega}\right) : x \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Definición 2.19 *Sea*

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{u \in S(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx < +\infty \text{ para } p \in \mathcal{C}_+\left(\overline{\Omega}\right)\right\}.$$

Proposición 2.20 *El espacio* $L^{p(x)}(\Omega)$ *se convierte en un espacio de Banach con las norma Luxemburgo*

$$\|u\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}$$

Teorema 2.21 *(Teorema de la convergencia dominada generalizada) Dado* Ω *y* $p(\cdot) \in \mathcal{C}_+(\Omega)$, *suponga que* $p_+ < \infty$. *Si la sucesión* $\{f_k\}_{k\geq 1}$ *satisface* $f_k \to f$ *puntualmente en casi todas partes, y existe* $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *con* $|f_k(x)| \leq g(x)$ *casi en cualquier parte, entonces* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *y* $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \to 0$ *cuando* $k \to \infty$.

Definición 2.22 *Dado un conjunto* Ω, *una función* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *y un multi-índice* α, f *tiene derivada débil de orden* α *si existe una función* $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ *de modo que cualquier función* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x)D^\alpha\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha(x)\phi(x)dx.$$

Se puede demostrar que g_α es única, y se escribe $D^\alpha f = g_\alpha$.

Definición 2.23 *Decimos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Caratheodory si:*

1. *$x \mapsto f(x,s)$ es medible en Ω para cada $s \in \mathbb{R}$.*
2. *$s \mapsto f(x,s)$ es continua en $\mathbb{R}$, para c.t.p. $x \in \Omega$.*

Dado una función Caratheodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el operador de Nemytskii N_f está definido por f, esto es

$$(N_f(u))(x) = f(x, u(x))$$

para cualquier función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Teorema 2.24 *Si $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$ entonces N_f es continuo, acotado y existen una constante $b \geq 0$ y una función $a \in L^{q(x)}(\Omega)$ no negativa tales que:*

$$|f(x,s)| \leq a(x) + b\,|s|^{\frac{p(x)}{q(x)}}, \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Definición 2.25 *El funcional $\rho : L^{p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\,dx$$

es también llamado el modular del espacio $L^{p(x)}(\Omega)$.

En adelante denotaremos $\rho_{p(x)}(u) \equiv \rho(u)$ si no hay lugar a confusión.

Definición 2.26 *Dada una función medible f y un conjunto E, si $0 < |E| < \infty$, se define*

$$f_E = \fint_E f(y)dy = \frac{\int_E f(y)dy}{|E|}$$

llamada integral media de E sobre el conjunto E.

Proposición 2.27 *Dado* Ω *y* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$*, si* $p_+(\Omega \setminus \Omega_\infty) < \infty$*, entonces para todo* $\lambda \geq 1$*,*

$$\rho(\lambda f) \leq \lambda^{p_+(\Omega\setminus\Omega_\infty)} \rho(f).$$

Además, si $p_+ < \infty$ *y* $\lambda \geq 1$*, entonces*

$$\lambda^{p_-} \rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p_+} \rho(f),$$

y si $0 < \lambda < 1$*, entonces las desigualdades inversas son ciertas.*

Proposición 2.28 *Dado* Ω *y* $p(x) \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$*, si* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *y* $\|f\|_{p(x)} > 0$*, entonces* $\rho\left(\frac{f}{\|f\|_{p(x)}}\right) \leq 1$*. Además,* $\rho\left(\frac{f}{\|f\|_{p(x)}}\right) = 1$ *para toda no trivial* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *sí, y solo sí,* $p_+(\Omega) < \infty$*.*

Demostración. Dada una sucesión decreciente $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \|f\|_{p(\cdot)}$. Entonces por el lema de Fatou y la definción del modular

$$\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) \leq \liminf_{k\to\infty} \rho(f/\lambda_k) \leq 1.$$

Considerando $p_+(\Omega \setminus \Omega_\infty) < \infty$ y, asumiendo por el absurdo, que $\rho(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}) > 1$. Asimismo, para cualquier valor de λ en $0 < \lambda < \|f\|_{p(\cdot)}$, junto con la Proposición 2.27, permiten deducir que

$$\rho(\frac{f}{\lambda}) = \rho\left(\left(\frac{\|f\|_{p(x)}}{\lambda}\right)\left(\frac{f}{\|f\|_{p(x)}}\right)\right) \geq \left(\frac{\|f\|_{p(x)}}{\lambda}\right)^{p_-(\Omega\setminus\Omega_\infty)} \rho\left(\frac{f}{\|f\|_{p(x)}}\right).$$

Por lo tanto, podemos encontrar un λ suficientemente cercano a $\|f\|_{p(\cdot)}$ tal que $\rho(f/\lambda) > 1$. Sin embargo, valiéndose de la definición de norma, se consigue $\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1$. Debido a esta contradicción, podemos afirmar que la igualdad es cierta.
Recíprocamente, suponga que $p_+(\Omega \setminus \Omega_\infty) = \infty$. Por la definición de supremo esencial existe una sucesión de conjuntos $\{E_k\}$ con medida finita tal que:

1. $E_k \subset \Omega \setminus \Omega_\infty$,
2. $E_{k+1} \subset E_k$ y $|E_k \setminus E_{k+1}| > 0$,
3. $|E_k| \to 0$,
4. Si $x \in E_k$, $p(x) \geq p_k > k$.

y definiendo la función f por

$$f(x)=\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{-2}}{|E_k\setminus E_{k+1}|}\chi_{E_k\setminus E_{k+1}}(x)\right)^{\frac{1}{p(x)}}.$$

Entonces para todo $\lambda<1$,

$$\rho\left(f/\lambda\right)=\int_{\Omega\setminus\Omega_\infty}\frac{\left|\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{-2}}{|E_k\setminus E_{k+1}|}\chi_{E_k\setminus E_{k+1}}(x)\right)^{\frac{1}{p(x)}}\right|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}}dx$$

$$=\int_{\Omega\setminus\Omega_\infty}\frac{\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{-2}}{|E_k\setminus E_{k+1}|}\chi_{E_k\setminus E_{k+1}}(x)\right)}{\lambda^{p(x)}}dx=\int_{\Omega\setminus\Omega_\infty}\lambda^{-p(x)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{-2}}{|E_k\setminus E_{k+1}|}dx$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2}\int_{\Omega\setminus\Omega_\infty}\frac{\lambda^{-p(x)}}{|E_k\setminus E_{k+1}|}dx$$

usando la definción de integral media de f sobre el conjunto $\Omega\setminus\Omega_\infty$ y el ítem 4 de la familia $\{E_k\}$, se sigue

$$=\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2}\fint_{E_k\setminus E_{k+1}}\lambda^{-p(x)}dx\geq\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2}\lambda^{-k}=\infty,$$

ya que por el criterio del cociente para series, se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{-2}\lambda^{-(k+1)}}{k^{-2}\lambda^{-k}}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-2}\frac{1}{\lambda}>1.$$

Por otra parte, un cálculo similar demuestra que

$$\rho\left(f\right)=\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2}<1.$$

Por lo tanto, $f\in L^{p(x)}(\Omega)$ y $\|f\|_{p(\cdot)}=1$, pero $\rho\left(f/\|f\|_{p(\cdot)}\right)<1$. Con esta contradicción se demuestra lo deseado. ■

Proposición 2.29 *Sea* $\rho(u)=\int_\Omega|u(x)|^{p(x)}\,dx$. *Para cualquier* $u,\ u_n\in L^{p(x)}(\Omega)$ *tenemos:*

1. $\|u\|_{p(x)} < 1$ *(respectivamente* $= 1; > 1$*) sí, y solamente sí,* $\rho(u) < 1$ *(respectivamente* $= 1; > 1$*).*
2. *Si* $\|u\|_{p(x)} > 1$*, entonces* $\|u\|_{p(x)}^{p_-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p_+}$.
3. *Si* $\|u\|_{p(x)} < 1$*, entonces* $\|u\|_{p(x)}^{p_+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p_-}$.
4. $\|u_n\|_{p(x)} \to 0$ *(respectivamente* $\to \infty$*) sí, y solamente sí,* $\rho(u_n) \to 0$ *(respectivamente* $\to \infty$*).*
5. $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n - u) = 0$.

Demostración. Se seguirá la línea del trabajo realizado en Fan et al. (2001).

1. Si $\|u\|_{p(\cdot)} = 0$, entonces $u \equiv 0$ y así $\rho(u) = 0$. Si $0 < \|u\|_{p(\cdot)} \leq 1$, entonces por la convexidad del modular, y la Proposición 2.28

$$\rho(u) = \rho\left(\|u\|_{p(\cdot)} \frac{u}{\|u\|_{p(\cdot)}}\right) \leq \|u\|_{p(\cdot)} \rho\left(\frac{u}{\|u\|_{p(\cdot)}}\right) \leq \|u\|_{p(\cdot)} \leq 1.$$

   Si $\|u\|_{p(\cdot)} > 1$, entonces $\rho(u) > 1$: porque si $\rho(u) \leq 1$, entonces por la definición de la norma, tendríamos $\|u\|_{p(\cdot)} \leq 1$. Pero luego tenemos que

$$\rho\left(u/\rho(u)\right) = \int_\Omega \left(|u(x)|/\rho(u)\right)^{p(x)} dx > \left(\rho\left(u\right)\right)^{-1} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx = 1$$

   entonces, la contrarecíproca, de lo mostrado, nos conduce a $\|u/\rho(u)\|_{p(\cdot)} > 1$, lo que equivale a $1 > \|u\|_{p(\cdot)} > \rho(u)$, esto es, $1 > \rho(u)$, pero, esto es una contradicción. Por lo tanto, $\|u\|_{p(\cdot)} \leq \rho(u)$, siendo $\|u\|_{p(\cdot)} > 1$, se implica que $\rho(u) > 1$. Esto demuestra, el recíproco de la primer afirmación. La prueba con el signo $>$, se deduce usando el contrarecíproco, de lo ya mostrado.

2. Si $p_+ < \infty$, y $\|u\|_{p(\cdot)} > 1$, entonces $1/\|u\|_{p(\cdot)}^{p_+} \leq 1/\|u\|_{p(\cdot)} \leq 1/\|u\|_{p(\cdot)}^{p_-}$. Como el modular, preserva el orden, $\rho\left(u\right)/\|u\|_{p(\cdot)}^{p_+} \leq \rho\left(u\right)/\|u\|_{p(\cdot)} \leq \rho\left(u\right)/\|u\|_{p(\cdot)}^{p_-}$. Por la Proposición 2.28, $\rho\left(u\right)/\|u\|_{p(\cdot)} = 1$. Reemplazado en la desigualdad anterior, resulta $\|u\|_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{p^+}$.

3. La prueba es esencialmente la misma que la prueba en 2.

4. En el ítem 1, vimos que si $\|u\|_{p(\cdot)} < 1$, entonces $0 \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}$. Para una sucesión $u_n \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ se tendría $0 \leq \rho(u_n) \leq \|u_n\|_{p(\cdot)}$. Como consecuencia, después de aplicar el teorema del Sandwich, resultaría $\rho.(u_n) \to 0$. La prueba del recíproco, se consigue de lo afirmado en el ítem 3, puesto que

si $\|u_n\|_{p(\cdot)} < 1$, entonces $0 \leq \|u_n\|_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \rho(u_n)$. Por el teorema del Sandwich, $\|u_n\|_{p(\cdot)} \to 0$ para $n \to \infty$. Análogamente, se prueba la validez de la equivalencia, cuando divergen.

5. Para esta prueba, es suficiente aplicar lo probado en el ítem 4, para la sucesión $u_n - u$.

■

Proposición 2.30 *(Desigualdad de Hölder Generalizada)*

1. *Sea $L^{p'(x)}(\Omega)$ el espacio conjugado de $L^{p(x)}(\Omega)$ con $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$. Para cualquier $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ y $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, tenemos*

$$\int_\Omega |uv|\,dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}\right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{p'(x)} \leq 2\,\|u\|_{p(x)} \|v\|_{p'(x)}\,.$$

2. *Suponga que $|\Omega| < \infty$ y p, $q \in \mathcal{C}_+(\Omega)$. Entonces $p(x) \leq q(x)$, para cualquier $x \in \Omega$ si y solo si $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$.*

Demostración.

1. Si $\|u\|_{p(\cdot)} = 0$ o $\|v\|_{p'(\cdot)} = 0$, entonces $uv \equiv 0$ así, no hay nada que probar. Por tanto, podemos asumir que $\|u\|_{p(\cdot)}\|v\|_{p'(\cdot)} > 0$; es más, por homogeneidad podemos asumir $\|u\|_{p(\cdot)} = \|v\|_{p'(\cdot)} = 1$.
   Para estimar la integral, aplicaremos la desigualdad de Young, como se verá a continuación:

$$\left|\int_\Omega uv dx\right| \leq \int_\Omega |uv|\,dx \leq \int_\Omega \left[|u|^{p(x)}/p(x) + |v|^{p'(x)}/p'(x)\right] dx$$

   desde que $p_- < p(x)$ implica $\frac{1}{p(x)} < \frac{1}{p_-}$ y del mismo modo para p', se sigue de lo anterior

$$\leq \frac{1}{p_-}\int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx + \frac{1}{p'_-}\int_\Omega |v|^{p'(x)}\,dx = \frac{1}{p_-}\rho_{p(\cdot)}(u) + \frac{1}{p'_-}\rho_{p'(\cdot)}(v)$$

   luego, por la Proposición 2.28, los modulares son ≤ 1, así

$$\int_\Omega |uv|\,dx \leq \frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-} = \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-}\right) \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)}$$

usando el hecho que $\frac{1}{p_-},\ \frac{1}{p'_-} < 1$, en lo obtenido arriba, nos conduce a

$$\leq 2 \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)} .$$

2. Suponga que $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$. Tomemos la función de Carathéodory

$$\begin{array}{rcl} f : \Omega \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, s) & \rightsquigarrow & f(x, s) := s \end{array}$$

Luego, debido al Teorema 2.24, existen una constante $b > 0$ y $a \in L^{p(x)}(\Omega)$, $a \geq 0$ tales que

$$|s| \leq a(x) + b\,|s|^{\frac{q(x)}{p(x)}} .$$

Haciendo $\widehat{b} = \max\{b, 1\}$, obtenemos de esta desigualdad

$$\begin{aligned} |s|^{p(x)} &\leq 2^{p(x)} \left(|a(x)|^{p(x)} + \widehat{b}^{p(x)} |s|^{q(x)} \right) \\ &\leq 2^{p_+} |a(x)|^{p(x)} + \left(2\widehat{b}\right)^{p_+} |s|^{q(x)} . \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Si fuese $p(x) > q(x)$ entonces

$$+\infty = \lim_{s\to\infty} |s|^{p(x)-q(x)} \leq \lim_{s\to\infty} \left(2^{p_+} \frac{|a(x)|^{p(x)}}{|s|^{q(x)}} + \left(2\widehat{b}\right)^{p_+} \right) = \left(2\widehat{b}\right)^{p_+}$$

lo que es una contradicción. Por tanto $p(x) \leq q(x)$. Recíprocamente, por hipótesis $p(x) \leq q(x)$, para todo $x \in \Omega$. Sea $u \in L^{q(x)}(\Omega)$. Consideremos el conjunto

$$F = \{x \in \Omega : |u(x)| < 1\} .$$

Luego

$$\rho_p(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx = \int_F |u(x)|^{p(x)}\, dx + \int_{\Omega\setminus F} |u(x)|^{p(x)}\, dx$$

$$\leq |F| + \rho_q(u) < \infty. \tag{2.3.2}$$

Así, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. En consecuencia $L^{q(x)}(\Omega) \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$.

Veamos la continuidad de la inmersión. De principio observemos que si

$$\|u\|_{q(x)} \leq 1 \text{ entonces } \|u\|_{p(x)} \leq |\Omega| + 1. \tag{2.3.3}$$

En efecto, sea $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, con $\|u\|_{q(x)} \leq 1$. Luego de (2.3.2) y el ítem 1 de la Proposición 2.30

$$\rho_p(u) \leq |\Omega| + \rho_q(u) \leq |\Omega| + 1,$$

lo que implica

$$\rho_p\left(\frac{u}{|\Omega|+1}\right)=\int_\Omega\left|\frac{u(x)}{|\Omega|+1}\right|^{p(x)}dx\leq\frac{1}{|\Omega|+1}\int_\Omega|u(x)|^{p(x)}\,dx\leq 1.$$

Aplicando, de nuevo, el ítem 1 de la Proposición 2.30 resulta

$$\left\|\frac{u}{|\Omega|+1}\right\|_{p(x)}\leq 1$$

lo que concluye la Afirmación 2.3.3.
Volviendo a la prueba de la continuidad, sea $u\in L^{q(x)}(\Omega)$ y $\|u\|_{q(x)}=a\neq 0$. De (2.3.3) se obtiene

$$\left\|\frac{u}{a}\right\|_{p(x)}\leq|\Omega|+1,$$

luego

$$\|u\|_{p(x)}\leq(|\Omega|+1)\,a=C_\Omega\,\|u\|_{q(x)}\,,$$

esto demuestra la inmersión continua de $L^{q(x)}(\Omega)$ sobre $L^{p(x)}(\Omega)$.

■

Proposición 2.31 *$L^{p(x)}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo y separable.*

Demostración. Ver Fan et al. (2001). ■

Proposición 2.32 *Sean $p(x)$ y $q(x)$ funciones medibles con $p(x)\in L^\infty(\Omega)$ y $1\leq p(x)q(x)\leq\infty$ para c.t.p. $x\in\Omega$. Sea $u\in L^{q(x)}(\Omega)$, $u\neq 0$. Entonces, tenemos:*

1. $\|u\|^{p+}_{p(x)q(x)}\leq\left\||u|^{p(x)}\right\|_{q(x)}\leq\|u\|^{p-}_{p(x)q(x)}$, *si* $\|u\|_{p(x)q(x)}\leq 1$.
2. $\|u\|^{p-}_{p(x)q(x)}\leq\left\||u|^{p(x)}\right\|_{q(x)}\leq\|u\|^{p+}_{p(x)q(x)}$, *si* $\|u\|_{p(x)q(x)}>1$.

Demostración. Sabemos que para cada $u\in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que $0<\|u\|_{q(x)}<\infty$ se tiene

$$\rho_q\left(\frac{u}{\|u\|_{q(x)}}\right)\leq 1. \tag{2.3.4}$$

En virtud de (2.3.4)

$$\rho_{pq}\left(\frac{u}{\|u\|_{(pq)(x)}}\right)\leq 1$$

luego

$$1 \geq \int_{\{x\in\Omega:(pq)(x)<\infty\}} \left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{(pq)(x)}} \right)^{p(x)q(x)} dx$$

$$\geq \int_{\{x\in\Omega:q(x)<\infty\}} \left(\frac{|u(x)|^{p(x)}}{\sup \operatorname{ess}_{x\in\Omega} \|u\|^{p(x)}_{(pq)(x)}} \right)^{q(x)} dx. \tag{2.3.5}$$

También $\sup \operatorname{ess}_{\{x\in\Omega:(pq)(x)=\infty\}} \frac{|u(x)|}{\|u\|_{(pq)(x)}} \leq 1$, lo que implica

$$\sup_{\{x\in\Omega:q(x)=\infty\}} \operatorname{ess} |u(x)|^{p(x)} \leq \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} \|u(x)\|^{p(x)}_{(pq)(x)}.$$

Esta última desigualdad y (2.3.5) conduce a

$$\rho_q \left(\frac{|u|^{p(x)}}{\sup \operatorname{ess}_{x\in\Omega} \|u\|^{p(x)}_{(pq)(x)}} \right) \leq 1.$$

Por tanto

$$\left\| |u|^{p(x)} \right\|_{q(x)} \leq \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} \|u\|^{p(x)}_{(pq)(x)}$$

lo que prueba la primera desigualdad de 1 y la segunda desigualdad de 2. Para probar las desigualdades restantes, se tiene $\rho_q \left(\frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|^{p(x)}_{q(x)}} \right) \leq 1$, luego

$$1 \geq \int_{\{x\in\Omega:q(x)<\infty\}} \left(\frac{|u(x)|^{p(x)}}{\|u\|^{p(x)}_{q(x)}} \right)^{q(x)} dx$$

$$\geq \int_{\{x\in\Omega:p(x)q(x)<\infty\}} \left(\frac{|u(x)|}{\sup \operatorname{ess} \left| \|u\|^{p(x)}_{q(x)} \right|^{\frac{1}{p(x)}}} \right)^{p(x)q(x)} dx.$$

También

$$\sup_{\{x\in\Omega:q(x)=\infty\}} \operatorname{ess} \frac{|u(x)|^{p(x)}}{\left\| |u|^{p(x)} \right\|_{q(x)}} \leq 1$$

luego

$$\sup_{\{x\in\Omega:p(x)q(x)=\infty\}} \operatorname{ess} |u(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} \left\| |u(x)|^{p(x)} \right\|^{\frac{1}{p(x)}}_{q(x)}.$$

En consecuencia

$$\rho_{pq}\left(\frac{|u|}{\sup \operatorname{ess}_{x\in\Omega}\left\||u(x)|^{p(x)}\right\|_{q(x)}^{\frac{1}{p(x)}}}\right)\leq 1$$

y

$$\|u\|_{(pq)(x)}\leq \sup_{x\in\Omega}\operatorname{ess}\left\||u(x)|^{p(x)}\right\|_{q(x)}^{\frac{1}{p(x)}}.$$

Como $p^{-}>1>0$, inmediatamente se sigue la segunda desigualdad en 1 y la primera desigualdad en 2. ■

Proposición 2.33 *1. Sean $p\in C_{+}(\overline{\Omega})$, $q\in C(\overline{\Omega})$ tal que $pq\in C_{+}(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$\|u\|_{p(x)q(x)}^{q-}-1\leq\left\||u|^{q(x)}\right\|_{p(x)}\leq\|u\|_{p(x)q(x)}^{q+}+1,\quad\forall u\in L^{p(x)q(x)}(\Omega).$$

2. Si $u\in L^{q(x)}(\Omega)$, entonces $|u|^{q(x)-1}\in L^{q'(x)}(\Omega)$ y $\left\||u|^{q(x)-1}\right\|_{q'(x)}\leq 2+\|u\|_{q(x)}^{q^{+}}$.

Demostración. Este es un resultado directo de la Proposición 2.32. ■

2.4. Espacios de Sobolev con exponente variable

Las definiciones, resultados y teoremas mencionados en esta sección son tomados de Fiorenza and Uribe (2000) y Fan et al. (2001).

Definición 2.34 *Sea*

$$W^{1,p(x)}(\Omega)=\left\{u\in L^{p(x)}(\Omega):|\nabla u|\in L^{p(x)}(\Omega)\right\},$$

equipada con la siguiente norma:

$$\|u\|_{1,p(x)}\equiv\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}=|u(x)|_{L^{p(x)}(\Omega)}+|\nabla u(x)|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Definición 2.35 *El espacio de Sobolev con exponente variable*

$$W^{r,p(\cdot)}(\Omega):=\left\{u\in L^{p(\cdot)}(\Omega):D^{\alpha}u\in L^{p(\cdot)}(\Omega),|\alpha|\leq r\right\},$$

donde $D^{\alpha}u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}$, *con* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ *es un multi-índice y* $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$, *equipado con la norma*

$$\|u\|_{r,p(\cdot)} = \sum_{|\alpha|\leq r} |D^{\alpha}u|_{p(\cdot)}\,.$$

Definición 2.36 *Dado* Ω *y* $p(x) \in \mathcal{C}_+(\Omega)$, *para* $k \geq 1$ *sea* $W_0^{k,p(x)}(\Omega)$ *la clausura de* $\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ *en* $W^{k,p(x)}(\Omega)$, *y sea* $H^{k,p(x)}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^k(\Omega) \cap W^{k,p(x)}(\Omega)}$.

Teorema 2.37 *Sean* $q(x) \in \mathcal{C}_+(\Omega)$ *y un entero* $k \geq 1$. *Si* $1 < q^- \leq q^+ < \infty$, *entonces* $W^{k,q(x)}(\Omega)$ *es un espacio de Banach reflexivo y separable.*

Proposición 2.38 *Si* $q \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$ *y* $q(x) \leq p_k^*(x)$ $(q(x) < p_k^*(x))$ *para cualquier* $x \in \overline{\Omega}$ *entonces hay una inmersión continua (compacta)* $W^{k,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ *donde*

$$p_k^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-kp(x)} & si \quad kp(x) < N, \\ +\infty & si \quad kp(x) \geq N. \end{cases}$$

El espacio $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ es la cerradura de $\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ en $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 2.39 ***Desigualdad de Poincaré*** *Dado un conjunto acotado* Ω *y* $p(\cdot) \in C_+(\Omega)$, *suponga que* $p(\cdot)$ *es continua sobre* $\overline{\Omega}$. *Entonces, para todo* $f \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$,

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq C(n, p(\cdot), \Omega)\,\|\nabla f\|_{p(\cdot)}\,.$$

2.5. El espacio $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap W^{3,p(\cdot)}(\Omega)$

Algunos de los resultados mostrados fueron extraídos de Fiorenza and Uribe (2000) y Fan et al. (2001)
Denotemos por X el espacio $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap W^{3,p(\cdot)}(\Omega)$ y defínase el funcional $\|\cdot\|_X$ de X por

$$\|u\|_X = \|u\|_{1,p(x)} + \|u\|_{2,p(x)} + \|u\|_{3,p(x)}\,.$$

Proposición 2.40 $\|\cdot\|_X$ *es una norma en* X.

Demostración. Por propiedad de la norma en $W^{k,p(x)}(\Omega)$, resulta $\|u\|_X \geq 0$. Ahora bien, si $\|u\|_X = 0$, entonces, debido a su definición, $\|u\|_{k,p(x)} = 0$, para

$k = 1, 2, 3$, lo que conlleva afirmar, $u = 0$, por que de no ser así, existiría un $k_0 \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\|u\|_{k_0,p(x)} > 0$, esto implicaría que $\|u\|_X > 0$, lo que sería una contradicción. El recíproco, es trivial. Por otro lado, sea

$$\|u+v\|_X = \|u+v\|_{1,p(x)} + \|u+v\|_{2,p(x)} + \|u+v\|_{3,p(x)}$$

$$\leq \left(\|u\|_{1,p(x)} + \|u\|_{2,p(x)} + \|u\|_{3,p(x)}\right) + \left(\|v\|_{1,p(x)} + \|v\|_{2,p(x)} + \|v\|_{3,p(x)}\right)$$

$$= \|u\|_X + \|v\|_X .$$

Finalmente, probaremos la homogeneidad. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera

$$\begin{aligned} \|\alpha u\|_X &= \|\alpha u\|_{1,p(x)} + \|\alpha u\|_{2,p(x)} + \|\alpha u\|_{3,p(x)} \\ &= |\alpha| \left(\|u\|_{1,p(x)} + \|u\|_{2,p(x)} + \|u\|_{3,p(x)}\right) = |\alpha| \|u\|_X . \end{aligned}$$

■

Proposición 2.41 *Si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ entonces $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach reflexivo y separable.*

Demostración. Dado que $W^{k,p(x)}(\Omega)$ y $W_0^{k,p(x)}(\Omega)$ son espacios de Banach para $k \geq 1$, ver Fiorenza and Uribe (2000), se deduce que X es un espacio vectorial. Se probará que X es completo. Sea $\{f_j\} \subset W^{k,p(x)}(\Omega)$ una sucesión de Cauchy. Entonces para cada $\alpha,\ 0 \leq |\alpha| \leq k,\ \forall k = 1, 2, 3$ fijado. Puesto que

$$\begin{aligned} \|u\|_X &= \|u\|_{1,p(x)} + \|u\|_{2,p(x)} + \|u\|_{3,p(x)} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_{p(x)} + \sum_{|\alpha|\leq 2} \|D^\alpha u\|_{p(x)} + \sum_{|\alpha|\leq 3} \|D^\alpha u\|_{p(x)}, \end{aligned}$$

para

$$\|D^\alpha u\|_{p(x)} \leq \|u\|_X ,\ \forall\, |\alpha| \leq 3.$$

Por consiguiente, de

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f_i\|_{p(x)} \leq \|f_j - f_i\|_X$$

se implica que la sucesión $\{D^\alpha f_j\}_{j\geq 1}$ es de Cauchy en $L^{p(x)}(\Omega)$. Además, si $L^{p(x)}(\Omega)$ es completo, se deduce que existe $g_\alpha \in L^{p(x)}(\Omega)$ de modo que $D^\alpha f_j \to g_\alpha$ en $L^{p(x)}(\Omega)$. Sea $g = g_0$. Así se tiene $g_j \to g_0$ en $L^{p(x)}(\Omega)$ si $j \to +\infty$.
Se afirma que $g \in X$ y $f_j \to g$ en norma X. Para hacerlo, se probará que si $0 \leq |\alpha| \leq k$, $D^\alpha g = g_\alpha$. Fijado α; entonces para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, mediante la Proposición 2.30

$$\|D^\alpha u\|_{p(x)} \leq \|u\|_X ,\ \forall\, |\alpha| \leq 3.$$

Por consiguiente, de

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f_i\|_{p(x)} \leq \|f_j - f_i\|_X$$

$$\left|\int_\Omega (g(x) - f_j(x))\, D^\alpha \phi(x) dx\right| \leq$$

$$\int_\Omega |g(x) - f_j(x)|\, |D^\alpha \phi(x)|\, dx \leq K_{p(x)} \|g - f_j\|_{p(x)} \|D^\alpha \phi\|_{p'(x)}.$$

Desde que $D^\alpha \phi \in L^{p'(x)}(\Omega)$, se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x) D^\alpha \phi(x) dx = \int_\Omega g(x) D^\alpha \phi(x) dx.$$

El mismo argumento demuestra que

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x) D^\alpha \phi(x) dx = \int_\Omega g(x) D^\alpha \phi(x) dx.$$

Ya que se verifica, debido a la Definición 2.22,

$$\int_\Omega f_j(x) D^\alpha \phi(x) dx = \int_\Omega D^\alpha f_j(x) \phi(x) dx$$

se puede deducir

$$\int_\Omega g(x) D^\alpha \phi(x) dx = \int_\Omega g_\alpha(x) \phi(x) dx.$$

Valiéndose una vez más, de la Definición 2.22, se concluye $D^\alpha g = g_\alpha$ y así, la prueba está completa.

Ahora se probará que X es reflexivo. En efecto, se sabe por el Teorema 6.6 y la Proposición 6.11, en Fiorenza and Uribe (2000), que los espacios $W^{3,p(x)}(\Omega)$ y $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ son de Banach, para $1 < p_- \leq p_+ < \infty$, y por el Teorema 2.4, ambos son cerrados. En consecuencia, X es cerrado. Además, debido al Teorema 6.7 en Fiorenza and Uribe (2000), $W^{3,p(x)}(\Omega)$ es reflexivo y separable, y como contiene el subespacio cerrado X, se implica por la Proposición 2.5 que X es reflexivo.

Finalmente, haciendo uso de la Proposición 2.9, podemos afirmar que X es separable, ya que está contenido en $W^{3,p(x)}(\Omega)$. ■

Proposición 2.42 *$\|u\|_X$ y $\|\nabla \Delta u\|_{p(x)}$ son dos normas equivalentes sobre X.*

Demostración. Como

$$\|u\|_{i,p(x)} \leq \|u\|_{3,p(x)}, \ i = 1, 2, \ \forall u \in X$$

resulta que

$$\|u\|_X = \sum_{i=1}^{3} \|u\|_{i,p(x)} \leq \|u\|_{3,p(x)}\,,\ \forall u \in X. \tag{2.5.1}$$

Ahora bien:

$$\|u\|_{3,p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^{\alpha}u\|_{p(x)} + \sum_{|\beta|=3} \left\|D^{\beta}u\right\|_{p(x)}.$$

Como $u \in X \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, resulta, por el Teorema de Poincaré en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, que existe $C_0 > 0$:

$$\|u\|_{p(x)} \leq C_0 \|\nabla u\|_{p(x)}\,,\ u \in X.$$

Luego se tiene

$$\|u\|_{3,p(x)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{p(x)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^{\alpha}u\|_{p(x)} + \sum_{|\beta|=3} \left\|D^{\beta}u\right\|_{p(x)} \tag{2.5.2}$$

Por otro lado, del Teorema 4.4 en Zang and Fu (2007), para $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap W^{2,p(x)}(\Omega)$, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=2} \|D^{\alpha}u\|_{p(x)} \leq C_2 \|\Delta u\|_{p(x)}\,. \tag{2.5.3}$$

De (2.5.3), la expresión en (2.5.2) se traduce en:

$$\|u\|_{3,p(x)} \leq C_3 \left(\|\nabla u\|_{p(x)} + \|\Delta u\|_{p(x)} + \sum_{|\beta|=3} \left\|D^{\beta}u\right\|_{p(x)} \right). \tag{2.5.4}$$

Ahora probaremos que

$$\sum_{|\beta|=3} \left\|D^{\beta}u\right\|_{p(x)} \leq C_4 \|\nabla(\Delta u)\|_{p(x)} \tag{2.5.5}$$

para alguna $C_4 > 0$.

En efecto, siguiendo las ideas de Zang and Fu (2007), tenemos para

$$u \in V = \left\{ v \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right) : v\Big|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}} &= -2\pi i x_i \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_l}} \\
&= -2\pi i x_i \left[\frac{-i x_j}{|x|} \widehat{R_l(\Delta u)} \right] \\
&= 2\pi i x_i R_j \widehat{(R_l(\Delta u))}
\end{aligned}$$

aplicando el Lema 4.1 enunciado en Gilbarg and Trudinger (1983), se sigue

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i} \widehat{R_j R_l(\Delta u)}.$$

Luego

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} = -R_j \left(R_l \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u \right) \right)$$

donde

$\widehat{f}$: Transformada de Fourier de f.

$R_i f$: Transformada de Riesz de f.

Como los operadores R_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ son acotados en $L^{p(x)}(\Omega)$, ver Diening (2004), resulta

$$\left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \right\|_{p(x)} \leq C_5 \left\| \nabla (\Delta u) \right\|_{p(x)}, \quad i, j, l = 1, 2, \ldots, N$$

lo que prueba (2.5.5).

Gracias a (2.5.5), la expresión (2.5.4) se reduce a

$$\|u\|_{3,p(x)} \leq C_6 \left(\|\nabla u\|_{p(x)} + \|\Delta u\|_{p(x)} + \left\| \nabla (\Delta u) \right\|_{p(x)} \right). \tag{2.5.6}$$

Ahora, nuevamente siguiendo la linea de Zang and Fu (2007), se tiene

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right| = \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} * \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right| \leq C_7 I_1 \left(\Delta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \leq C_8 M \left(\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right)$$

$$\leq C_9 \left| \frac{\partial (\Delta u)}{\partial x_i} \right| \tag{2.5.7}$$

donde Γ es el potencial Newtoniano, la función maximal de f está dado por

$$(Mf)(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_{B \cap \Omega} f(y) dy$$

siendo B una bola centrada en x y

$$I_1 (\Delta u) = \int_\Omega \frac{\Delta u(y)}{|x - y|^{n-1}} dy$$

Así, de (2.5.7) obtenemos

$$\|\Delta u\|_{p(x)} \leq C_{10} \left\| \nabla (\Delta u) \right\|_{p(x)}. \tag{2.5.8}$$

Similarmente, se prueba que

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \leq C_{11} \|\Delta u\|_{p(x)}$$

y junto con (2.5.8), permite conseguir

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \leq C_{11} \|\Delta u\|_{p(x)} \leq C_{12} \left\| \nabla (\Delta u) \right\|_{p(x)}. \tag{2.5.9}$$

Luego, de (2.5.6), (2.5.8) y (2.5.9):

$$\|u\|_{3,p(x)} \leq C_{13} \left\| \nabla (\Delta u) \right\|_{p(x)}, \ \forall u \in V \tag{2.5.10}$$

Como V es denso en X, la desigualdad (2.5.10) se verifica $\forall u \in X$. Esto concluye la prueba de la proposición. ■

Proposición 2.43 $X \hookrightarrow W^{3,p(x)}(\Omega)$.

Demostración. Debido a que $X \subset W^{3,p(x)}(\Omega)$ y $\|u\|_{3,p(x)} \leq \|u\|_{1,p(x)} + \|u\|_{2,p(x)} + \|u\|_{3,p(x)} = \|u\|_X$, se sigue por definición, la inmersión continua. ■

En adelante se asumirá que el exponente $p(x)$ sobre $\overline{\Omega}$ satisface:

$$p_- := \inf_{\Omega} p(x) \leq p(x) \leq p_+ := \sup_{\Omega} p(x) < \frac{N}{3},$$

así, por la Proposición 2.38, se define $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-3p(x)}$.

Proposición 2.44 *Si $q \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$ y $q(x) \leq p^*(x)$ $(q(x) < p^*(x))$ para $x \in \overline{\Omega}$, entonces existe una inmersión continua (compacta) $X \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$.*

Proposición 2.45 *Sea $\varphi_{p(x)}(u) = \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx$ para cualquier $u \in X$. Entonces, tenemos*

1. *si $\|u\|_X \geq 1$ entonces $\|u\|_X^{p_-} \leq \varphi_{p(x)}(u) \leq \|u\|_X^{p_+}$;*
2. *si $\|u\|_X \leq 1$ entonces $\|u\|_X^{p_+} \leq \varphi_{p(x)}(u) \leq \|u\|_X^{p_-}$.*

Demostración. Estas afirmaciones son válidas, por la equivalencia de normas, demostrada en la Proposición 2.42 y las relaciones que existen entre el modular y la norma en $L^{p(x)}(\Omega)$, probadas en la Proposición 2.29. ■

Proposición 2.46 *Si*

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx, \text{ para todo } u \in X,$$

entonces $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ y el operador I' de I es

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u \cdot \nabla\Delta v dx, \text{ para todo } u, v \in X.$$

Demostración. Calcularemos una expresión para I'_G, luego probaremos que I'_G es continua, en cuyo caso, por la Proposición 4.9, se obtendría que I es $F-$dif. e $I'_F = I'_G$. Sean u, $v \in X$, y $0 < |t| < \delta$, $0 < \delta$

$$\frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = \frac{1}{t} \int_\Omega \frac{|\nabla\Delta u + t\nabla\Delta v|^{p(x)} - |\nabla\Delta u|^{p(x)}}{p(x)} dx. \tag{2.5.11}$$

Investiguemos el integrando en (2.5.11). Sea

$$\varphi(t) = |\nabla\Delta u + t\nabla\Delta v|^{p(x)}\,,\ 0 < |t| < \delta.$$

Fijando $a = \nabla\Delta u(x)$ y $b = \nabla\Delta v(x)$

$$\varphi(t) = |a + tb|^{p(x)}$$

$$\Longrightarrow \varphi'(t) = p(x)b\,|a + tb|^{p(x)-2}\,(a + tb)$$

Como φ es diferenciable en t, aplicamos el teorema de valor medio para integrales, así

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(\xi_0)(t - 0),\quad 0 < |\xi_0| < |t| < \delta,$$

es decir

$$\left||\nabla\Delta u + t\nabla\Delta v|^{p(x)} - |\nabla\Delta u|^{px)}\right| = |\varphi'(\xi_0)|\,|t|$$

$$\Longrightarrow \frac{\left||\nabla u + t\nabla\Delta v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}\right|}{|t|} \leq c\,|\nabla\Delta u + t\nabla\Delta v|^{p(x)-1}\,|\nabla\Delta v|$$

luego, resulta que

$$c\,|\nabla\Delta u + t\nabla\Delta v|^{p(x)-1}\,|\nabla\Delta v| \leq C_q \underbrace{\left(|\nabla\Delta u|^{p(x)-1} + |t\nabla\Delta v|^{p(x)-1}\right)}_{\in L^{p'(x)}(\Omega)} \underbrace{|\nabla\Delta v|}_{\in L^{p(x)}(\Omega)} \in L^1(\Omega). \tag{2.5.12}$$

Por otro lado:

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla\Delta u + t\nabla\Delta v|^{p(x)} - |\nabla\Delta u|^{p(x)}}{t} = \varphi'(0) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

$$= p(x)\,|\nabla\Delta u|^{p(x)-2}\,\nabla\Delta u\cdot\nabla\Delta v. \tag{2.5.13}$$

De (2.5.12), (2.5.13) y el Teorema 2.21, se tiene

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla\Delta u + t\nabla\Delta v|^{p(x)} - |\nabla\Delta u|^{p(x)}}{t}dx = \int_\Omega p(x)\,|\nabla\Delta u|^{p(x)-2}\,\nabla\Delta u\cdot\nabla\Delta v dx.$$

Finalmente, aplicando el límite a (2.5.11) cuando $t \to 0$, resulta

$$\langle I'_G(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2}\,\nabla\Delta u\cdot\nabla\Delta v dx,\quad \forall u, v \in X.$$

Probemos ahora la continuidad de I'_G. Recordemos que

$$\begin{array}{rcl} I'_G : U_{abto} \subseteq X & \to & X' \\ u & \rightsquigarrow & I'_G(u) : \ X \to \mathbb{R} \\ & & \qquad\quad v \rightsquigarrow \langle I'_G(u), v\rangle\,. \end{array}$$

Sea $(u_r)_{r\geq 1} \subseteq X$, $v \in X : u_r \to u$ en X. Esto significa que: $u_r(x) \to u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$. Con todo esto, probaremos que

$$|I'_G(u_r) - I'_G(u)|_{L^{q'(x)}} = \sup_{|v|_X=1} |\langle I'_G(u_r) - I'_G(u), v\rangle| \to 0.$$

En efecto, sea $v \in X$, con $\|v\|_X = 1$.
Se tiene:

$$\langle I'_G(u_r) - I'_G(u), v\rangle = \langle I'_G(u_r), v\rangle - \langle I'_G(u), v\rangle$$
$$= \int_\Omega |\nabla\Delta u_r|^{p(x)-2} \nabla\Delta u_r \cdot \nabla\Delta v dx - \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u \cdot \nabla\Delta v dx$$
$$= \int_\Omega \left(|\nabla\Delta u_r|^{p(x)-2} \nabla u_r - |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u\right) \nabla\Delta v dx.$$

Luego

$$|\langle I'_G(u_r) - I'_G(u), v\rangle| \leq \int_\Omega \left||\nabla\Delta u_r|^{p(x)-2} \nabla\Delta u_r - |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla u\right| |\nabla\Delta v| \, dx$$
$$\leq \left||\nabla\Delta u_r|^{p(x)-2} \nabla\Delta u_r - |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} |\nabla v|_{p(x)}, \qquad (2.5.14)$$

pero $\left||\nabla\Delta u_r|^{p(x)-2} \nabla\Delta u_r - |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \to 0$, puesto que:

1. Como $h(t) = |t|^{p-2} t$ es continua, se implica que

   $$|\nabla\Delta u_r(x)|^{p(x)-2} \nabla\Delta u_r(x) \to |\nabla\Delta u(x)|^{p(x)-2} \nabla\Delta u(x)$$

   en c.t.p. $x \in \Omega$.

2. $$\left||\nabla\Delta u_r|^{p(x)-2} \nabla\Delta u_r - |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u\right|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}$$
   $$\leq c\left(|u_r|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) \leq 2c(h(x))^{p(x)} \in L^1(\Omega).$$

Luego, por el Teorema 2.21, se obtiene la convergencia pedida. Por tanto de (2.5.14)

$$|I'_G(u_r) - I'_G(u)|_{X'} = \sup_{|v|_X=1} \left||\nabla\Delta u_r|^{p(x)-2} \nabla\Delta u_r - |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \to 0.$$

Así I'_G es continua en X. De la Proposición 4.9:

$$I'_F = I'_G.$$

Esto es,

$$\langle I'_F(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u \cdot \nabla\Delta v dx, \text{ para todo } u, v \in X.$$

■

2.6. Teoría del Grado

El siguiente teorema que afirma la existencia y unicidad de la función grado para espacios de dimensión finita y demás resultados de esta sección se encuentran en Isaia (2004) y Berkovits (2007).

Teorema 2.47 *Sea un abierto, acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si*

$$N = \left\{(g, \Omega, v) : g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N \text{ es continua, } v \notin g(\partial\Omega)\right\}$$

entonces hay una función $d : N \to \mathbb{Z}$ verificando:

a) ***Normalidad.*** $d(I, \Omega, v) = 1$, *si* $v \in \Omega$.

b) ***Aditividad.*** $d(g, \Omega, v) = d(g, \Omega_1, v) + d(g, \Omega_2, v)$ *con* $\Omega_1,\ \Omega_2 \subseteq \Omega$, *abiertos* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *de modo que* $v \notin g\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$.

c) ***Invarianza Homotópica.*** $d(h(s, \cdot), \Omega, z(s))$ *es independiente de* s *si* $z : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ *y* $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *son funciones continuas y* $z(s) \notin h(s, \partial\Omega)$ *para cada* $s \in [0, 1]$.

Definición 2.48 *(Grado de Brouwer) Sea un conjunto abierto y acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continua, con $v \notin g(\partial\Omega)$. El* ***Grado de Brouwer de*** g ***en*** v *con respecto a* Ω *es el número* $d(g, \Omega, v)$ *donde* d *es la función del teorema anterior.*

En consecuencia con el Teorema 2.47, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.49 *Si* $d(f, \Omega, y) \neq 0$, *entonces existe* $x \in \Omega : f(x) = y$.

A continuación, se enuncia el Teorema de Leray-Schauder que generaliza el Teorema de Brouwer de dimensión finita, asociada a ternas con perturbaciones compactas de la identidad.

Teorema 2.50 *Sea un espacio de Banach E con dimensión no finita, Ω un abierto y acotado de E, $y \in E$ y*

$$\mathcal{M} = \left\{(\mathfrak{I} - \mathfrak{T}, \Omega, y)\,; \mathfrak{T} : \overline{\Omega} \to E \text{ es una aplicación compacta con } y \notin (\mathfrak{I} - \mathfrak{T})(\partial\Omega)\right\}$$

entonces hay un único grado de Leray-Schauder $d_{LS} : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ tal que verifica:

a) ***La Normalidad.*** $d_{LS}(\mathfrak{I}, \Omega, y) = 1$, *si* $y \in \Omega$.

b) ***La Aditividad.*** $d_{LS}(\mathfrak{I} - \mathfrak{T}, \Omega, y) = d_{LS}(\mathfrak{I} - \mathfrak{T}, \Omega_1, y) + d_{LS}(\mathfrak{I} - \mathfrak{T}, \Omega_2, y)$ *con abiertos* $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *tal que* $y \notin (\mathfrak{I} - \mathfrak{T})\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$.

c) ***La Invarianza Homotópica.*** $d_{LS}(h(s,\cdot), \Omega, z(s))$ *es independiente de* s *si* $z : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ *y* $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *son continuas y* $z(s) \notin h(s, \partial\Omega)$ *para cada* $s \in [0,1]$.

Corolario 2.51 *Si* $d_{LS}(\mathfrak{I} - \mathfrak{T}, \Omega, y_0) \neq 0$, *entonces existe* $x_0 \in \Omega : (\mathfrak{I} - \mathfrak{T})(x_0) = y_0$.

2.7. Teorema de Dinca

Proposición 2.52 *(Propiedad de la excisión) Sean* $\Omega_1 \subseteq \Omega$ *es abierto y* $\Omega \subset X$. *Si* $\mathfrak{F} : \Omega \to X$ *es un mapeo compacto y continuo y* $y_0 \notin (\mathfrak{I} - \mathfrak{F})\left(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1\right)$ *entonces*

$$d_{LS}\left(\mathfrak{I} - \mathfrak{F}, \Omega, y_0\right) = d_{LS}\left(\mathfrak{I} - \mathfrak{F}, \Omega_1, y_0\right).$$

El siguiente enunciado lo podemos encontrar en Dinca (2001) y .

Proposición 2.53 *(Teorema de Dinca) Sean* X *y* Y *espacios de Banach reales y dos operadores no lineales* T, $S : X \to Y$ *tal que*

1. T *es biyectivo y* T^{-1} *es continuo.*
2. S *es compacto.*
3. *Sea* $\gamma \neq 0$ *un número real tal que:* $\|(\gamma T - S)(x)\| \to +\infty$ *cuando* $\|x\| \to +\infty$;
4. *Existe una constante* $R > 0$ *tal que* $\|(\gamma T - S)(x)\| > 0$ *si* $\|x\| \geq R$,

$$d_{LS}\left(I - T^{-1}\left(\frac{S}{\gamma}\right), B(\theta, R), 0\right) \neq 0.$$

Entonces $\gamma T - S$ *es suryectivo de* X *sobre* Y.

Demostración. $T^{-1} : Y \to X$ es continua por hipótesis y $\frac{S}{\gamma} : X \to Y$ es evidentemente compacto; en particular $\frac{S}{\gamma} : \overline{B(0,R)} \to Y$ es compacto.

En consecuencia el operador

$$B(0,R) \xrightarrow{\frac{S}{\gamma}} Y \xrightarrow{T^{-1}} X, \quad T^{-1}\circ\frac{S}{\gamma}: B(0,R) \to X$$

$T^{-1}\circ\frac{S}{\gamma}:\overline{B(0,R)}\subseteq X\to X$ es compacto, por ser la composición de un operador compacto y uno continuo. Además de la hipótesis 4, $0\notin\left(I-T^{-1}\circ\frac{S}{\gamma}\right)(\partial B(0,R))$, de lo contrario $\gamma Tx_0-Sx_0=0$, para algún $|x_0|=R$, lo que no puede ser. Así el grado de Leray-Schauder está bien definido.
Por otro lado de la propiedad de excisión del grado resulta

$$d_{LS}\left(I-T^{-1}\left(\frac{S}{\gamma}\right),B(0,R_1),0\right)=d_{LS}\left(I-T^{-1}\left(\frac{S}{\gamma}\right),B(0,R),0\right)\neq 0 \tag{2.7.1}$$

$\forall R_1\geq R$.
Ahora probaremos que, dado $y\in Y$, existe $x\in X$ tal que

$$(\gamma T-S)x=y \tag{2.7.2}$$

lo que concluirá la proposición.
Sea $R_1\geq R$ tal que:

$$|(\gamma T-S)x|>|y|,\ \text{si}\ |x|\geq R_1. \tag{2.7.3}$$

Probaremos que existe $x\in B(0,R_1)$ tal que $x=T^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}(Sx+y)\right)$ lo que demostrará (2.7.2). Para esto consideremos el operador compacto

$$\begin{aligned} F:\overline{B(0,R_1)} &\to X \\ x &\rightsquigarrow Fx=T^{-1}\left(\tfrac{1}{\gamma}(Sx+y)\right). \end{aligned}$$

Debido a (2.7.3), $x\neq Fx$, $\forall x\in\partial B(0,R_1)$. Probaremos que

$$d_{LS}(I-F,B(0,R_1),0)\neq 0.$$

Para obtener esto, definiremos la homotopía de aplicaciones compactas

$$\begin{aligned} H:[0,1]\times\overline{B(0,R_1)} &\to X \\ (t,x) &\rightsquigarrow H(t,x)=T^{-1}\left(\tfrac{1}{\gamma}(Sx+ty)\right). \end{aligned}$$

Ahora, de (2.7.3) $x\neq H(t,x)$, $\forall t\in[0,1]$, $\forall x\in\partial B(0,R_1)$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} d_{LS}(I-H(1,x),B(0,R_1),0) &= d_{LS}(I-H(0,x),B(0,R_1),0) \\ &= d_{LS}(I-F,B(0,R_1),0). \end{aligned}$$

Luego de (2.7.1):

$$d_{LS}(I-F,B(0,R_1),0)=d_{LS}\left(I-T^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}S\right),B(0,R_1),0\right)\neq 0.$$

Por tanto F tiene un punto fijo en $B(0,R_1)$, lo que resuelve (2.7.2). ■

2.8. El grado topológico de aplicaciones condensantes

Las ideas expuestas en esta sección fueron publicadas en el artículo de Isaia (2004) y son presentadas en esta sección para una mejor comprensión del teorema que, al finalizar esta sección, presentaremos.
En este apartado, X será un espacio de Banach y $\mathcal{B} \subset \mathscr{P}(X)$ será la familia de todos sus conjuntos acotados del conjunto de partes de X.

Definición 2.54 *La función $\sigma : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ definida por*

$$\sigma(\mathscr{B}) = \text{ínf} \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{d} > 0 : \mathscr{B} \text{ posee una cubierta finita de} \\ \text{conjuntos con diámetro} \leq \mathfrak{d} \end{array} \right\}, \ \mathscr{B} \in \mathcal{B},$$

es llamada, ***medida de no compacidad de Kuratowski****.*

Proposición 2.55 *Sean $\mathscr{B}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

a) $\sigma(\mathscr{B}) = 0$ *si y solo si* $\mathscr{B}$ *es relativamente compacto.*

b) σ *es una seminorma, es decir,* $\sigma(\lambda\mathscr{B}) = |\lambda|\,\sigma(\mathscr{B})$ *y* $\sigma(\mathscr{B}_1 + \mathscr{B}_2) \leq \sigma(\mathscr{B}_1) + \sigma(\mathscr{B}_2)$.

c) $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$ *implica* $\sigma(\mathscr{B}_1) \leq \sigma(\mathscr{B}_2)$; $\sigma(\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2) = \text{máx}\{\sigma(\mathscr{B}_1), \sigma(\mathscr{B}_2)\}$.

d) $\sigma(conv(\mathscr{B})) = \sigma(\mathscr{B})$.

e) $\sigma(\overline{\mathscr{B}}) = \sigma(\mathscr{B})$.

Definición 2.56 *Considere $\Omega \subset X$ y una aplicación continua acotada $\mathscr{F} : \Omega \to X$. Decimos que $\mathscr{F} : \Omega \to X$ es $\sigma-$Lipschitz si existe $k \geq 0$ tal que*

$$\sigma(\mathscr{F}(\mathscr{B})) < k\sigma(\mathscr{B}) \ \ (\forall)\mathscr{B} \subset \Omega \text{ acotado.}$$

Además, decimos que $\mathscr{F} : \Omega \to X$ es una $\sigma-$contracción estricta si $k < 1$. Decimos que $\mathscr{F}$ es $\sigma-$condensante si

$$\sigma(\mathscr{F}(\mathscr{B})) < \sigma(\mathscr{B}) \ \ (\forall)\,\mathscr{B} \subset \Omega \text{ acotado con } \sigma(\mathscr{B}) > 0.$$

En otras palabras, $\sigma(\mathscr{F}(\mathscr{B})) \geq \sigma(\mathscr{B})$ implica $\sigma(\mathscr{B}) = 0$. Denotamos por $SC_\sigma(\Omega)$ a la clase de todas las $\sigma-$contracciones estrictas $\mathscr{F} : \Omega \to X$ y escribimos $C_\sigma(\Omega)$ para representar a la clase de todas las aplicaciones $\sigma-$condensantes $\mathscr{F} : \Omega \to X$

Observemos que $SC_\sigma(\Omega) \subset C_\sigma(\Omega)$ y cualquier $\mathscr{F} \in C_\sigma(\Omega)$ es $\sigma-$Lipschitz con constante $k_0 = 1$.
También recordemos que $\mathscr{F} : \Omega \to X$ es Lipschitz si existe $k_0 > 0$ tal que

$$\|\mathscr{F}x - \mathscr{F}y\| \leq k_0 \|x - y\| \quad (\forall)\ x, y \in \Omega$$

y que $\mathscr{F}$ es una contracción estricta si $k_0 < 1$.

Proposición 2.57 *Si las aplicaciones $\sigma-$Lipschitz $\mathscr{F}$, $\mathscr{G} : \Omega \to X$ tienen constantes k_1 y k_2 respectivamente, entonces $\mathscr{F} + \mathscr{G} : \Omega \to X$ es $\sigma-$Lipschitz con constante $k_1 + k_2$.*

Proposición 2.58 *Toda aplicación compacta $\mathscr{F} : \Omega \to X$ es $\sigma-$Lipschitz con constante $k = 0$.*

Proposición 2.59 *Si $\mathscr{F} : \Omega \to X$ es Lipschitziana con constante k, entonces $\mathscr{F}$ es $\sigma-$Lipschitz con la misma constante k.*

El teorema que sigue, afirma la existencia y las propiedades básicas del grado topológico para las perturbaciones $\sigma-$condensantes de la identidad.

Teorema 2.60 *Sea*

$$T = \left\{ \begin{array}{c} (\mathscr{I} - \mathscr{F}, \Omega, y) : \Omega \subset X \text{ abierto y acotado,} \\ \mathscr{F} \in C_\sigma\left(\overline{\Omega}\right),\ y \in X \setminus (\mathscr{I} - \mathscr{F})(\partial\Omega) \end{array} \right\},$$

la familia de ternas admisibles. Existe una función grado $D : T \to \mathbb{Z}$ el cual satisface las propiedades:

(D1) (Normalización) $D(\mathscr{I}, \Omega, y) = 1$ *para cualquier* $y \in \Omega$.

(D2) (Aditividad en el dominio) Para cualquier disjunto, conjuntos abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ *y cualquier* $y \notin (\mathscr{I} - \mathscr{F})\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$ *tenemos*

$$D(\mathscr{I} - \mathscr{F}, \Omega, y) = D(\mathscr{I} - \mathscr{F}, \Omega_1, y) + D(\mathscr{I} - \mathscr{F}, \Omega_2, y).$$

(D3) (Invarianza bajo homotopía) $D(\mathscr{I} - \mathscr{H}(t, \cdot), \Omega, y(t))$ *es independiente de* $t \in [0,1]$ *para cualquier aplicación acotada, continuo* $\mathscr{H} : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ *el cual satisface*

$$\sigma(\mathscr{H}([0,1] \times B)) < \sigma(B) \quad (\forall)\, B \subset \overline{\Omega} \text{ con } \sigma(B) > 0$$

y cualquier función continua $y : [0,1] \to X$ *el cual satisface*

$$y(t) \neq x - \mathscr{H}(t, x) \quad (\forall)\, t \in [0,1], \ (\forall)\, x \in \partial\Omega.$$

(D4) (Existencia) $D(\mathscr{I} - \mathscr{F}, \Omega, y) \neq 0$ *implica* $y \in (I - F)(\Omega)$.

(D5) (Excisión) $D(\mathscr{I} - \mathscr{F}, \Omega, y) = D(\mathscr{I} - \mathscr{F}, \Omega_1, y)$ *para cualquier conjunto abierto* $\Omega_1 \subset \Omega$ *y cualquier* $y \notin (\mathscr{I} - \mathscr{F})\left(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1\right)$.

Teorema 2.61 *Sean* X *un espacio de Banach,* $\mathscr{F} : X \to X$ *una aplicación* $\sigma-$*condensante y*

$$\mathscr{S} = \{x \in X : (\exists)\, s \in [0,1] \ \text{ tal que } x = s\mathscr{F}x\}.$$

Si $\mathscr{S}$ *es un conjunto acotado en* X*, existe* $r > 0$ *tal que si* $\mathscr{S} \subset B_r(0)$ *entonces*

$$D(\mathscr{I} - s\mathscr{F}, B_r(0), 0) = 1 \quad (\forall)\, s \in [0,1].$$

En consecuencia, $\mathscr{F}$ *posee algún punto fijo y el conjunto de ellos pertenece a* $B_r(0)$.

Demostración. En primer lugar, observemos que cualquier homotopía afín de funciones $\sigma-$condensantes es una homotopía admisible. Para ver esto, consideremos un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset X$, las aplicaciones $\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2 \in C_\sigma\left(\overline{\Omega}\right)$ y sea $\mathscr{H} : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ definido por

$$\mathscr{H}(t, x) = (1 - t)\,\mathscr{F}_1 x + t\mathscr{F}_2 x.$$

Para cualquier $B \subset \overline{\Omega}$ con $\sigma(B) > 0$ se tiene

$$\mathscr{H}([0,1] \times B) \subset conv\,(\mathscr{F}_1(B) \cup \mathscr{F}_2(B))$$

y usando la Proposición 2.55

$$\sigma\left(\mathscr{H}\left([0,1]\times B\right)\right)\leq\sigma\left(conv\left(\mathscr{F}_1\left(B\right)\cup\mathscr{F}_2\left(B\right)\right)\right)$$

$$=\sigma\left(\mathscr{F}_1\left(B\right)\cup\mathscr{F}_2\left(B\right)\right)=\text{máx}\left\{\sigma(\mathscr{F}_1(B)),\sigma(\mathscr{F}_2(B))\right\}<\sigma(B).$$

En seguida, fijemos $s\in[0,1]$ y consideremos la homotopía afín entre las aplicaciones $\sigma-$condensantes $s\mathscr{F}$, $0\in C_\sigma\left(X\right)$

$$\widetilde{\mathscr{H}}:[0,1]\times X\to X,\quad \widetilde{\mathscr{H}}(t,x)=(1-t)\,0x+ts\mathscr{F}x.$$

Por el argumento anterior,

$$\sigma\left(\widetilde{\mathscr{H}}\left([0,1]\times B\right)\right)<\sigma\left(B\right)\quad(\forall)\,B\subset X\text{ acotado con }\sigma\left(B\right)>0.$$

Si $x\in X$ y $t\in[0,1]$ verifica $x-\mathscr{H}(t,x)=0$, entonces $x\in\mathscr{S}\subset B_r(0)$. Por tanto, se puede usar las propiedades del grado $(D3)$, $(D1)$ y $(D4)$ presentados en el Teorema 2.60 y obtener

$$D\left(\mathscr{I}-s\mathscr{F},B_r(0),0\right)=D\left(\mathscr{I}-\mathscr{H}(1,\cdot),B_r(0),0\right)$$

$$=D\left(\mathscr{I}-\mathscr{H}(0,\cdot),B_r(0),0\right)=D\left(\mathscr{I},B_r(0),0\right)=1.$$

Esto es,

$$D\left(\mathscr{I}-s\mathscr{F},B_r(0),0\right)=1.$$

■

Capítulo 3

Existencia de la solución débil

"Ninguna investigación humana puede ser llamada ciencia real si no puede demostrarse matemáticamente".
Leonardo da Vinci

En el presente capítulo, primero se definirá de manera precisa el concepto de solución débil de la ecuación. Visto ello, nos dedicaremos a encontrar la solución del problema. Se usará un resultado topológico, conocido como el Teorema de Dinca. A continuación, motivaremos la definición de solución débil.

Usando las condiciones $u = \Delta u = \Delta^2 u = 0$ sobre $\partial\Omega$, se desea construir la definición de solución débil de (1.0.1).
El operador $p-$poliarmónico Δ_p^L, $1 < p < +\infty$ está definido por

$$\Delta_p^L \varphi = \begin{cases} \mathfrak{D}_L \left(|\mathfrak{D}_L \varphi|^{p-2} \mathfrak{D}_L \varphi \right), & si \quad L = 2j, \\ -div \left\{ \Delta^{j-1} (|\mathfrak{D}_L \varphi|^{p-2} \mathfrak{D}_L \varphi) \right\}, & si \quad L = 2j-1, \end{cases}$$

para $j = 1, 2, \ldots$, para toda $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) \in (C_0^\infty(\Omega))^d$ donde $d \geq 1$, Ω es un conjunto abierto y a la vez, acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $L = 1, 2, \ldots$, y $\mathfrak{D}_L$ denota el operador vectorial

$$\mathfrak{D}_L \varphi = \begin{cases} (\Delta^j \varphi_1, \ldots, \Delta^j \varphi_d), & si \quad L = 2j, \\ (\mathfrak{D}\Delta^{j-1} \varphi_1, \ldots, \mathfrak{D}\Delta^{j-1} \varphi_d), & si \quad L = 2j-1, \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots$$

(Δ es el operador laplaciano y $\mathfrak{D}$ es el operador gradiente).
Así, para $x \in \Omega$ el vector $\mathfrak{D}_L\varphi(x) \in \mathbb{R}^d$ si L es par ó dn si L es impar. La acción del operador vectorial $p-$poliarmónico Δ_p^L en el sentido débil está dada por la relación

$$\left\langle \Delta_p^L u, \varphi \right\rangle = \int_\Omega |\mathfrak{D}_L u|^{p-2} \mathfrak{D}_L u \cdot \mathfrak{D}_L \varphi dx \tag{3.0.1}$$

para toda $u = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$, $\varphi \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^d$.
Veamos algunos casos particulares para **d=1** , $n \in \mathbb{N}$
Caso L=1, p>1 $(j = 1)$
Entonces: $\mathfrak{D}_1\varphi = \nabla\varphi$, y $\Delta_p\varphi = -div\left(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\right)$ es el operador $p-$Laplaciano usual.
Caso L=2, p>1 $(j = 1)$
Entonces: $\mathfrak{D}_2\varphi = \Delta\varphi$, y $\Delta_p^2\varphi = \Delta\left(|\Delta\varphi|^{p-2}\Delta\varphi\right)$ es el operador $p-$biarmónico usual.
Caso L=3, p>1 $(j = 2)$
Entonces $\mathfrak{D}_3\varphi = \nabla\Delta\varphi$ y

$$\Delta_p^3\varphi = -div\left\{\Delta\left(|\nabla\Delta\varphi|^{p-2}\nabla\Delta\varphi\right)\right\}$$

llamado el operador $p-$triarmónico usual.
A seguir haremos algunas precisiones sobre este operador. En primer lugar, notemos que para $u \in C^3(\Omega)$ se tiene

$$\nabla(\Delta u) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u, \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta u \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\Delta u\right), \tag{3.0.2}$$

pero, para $1 \leq i \leq N$ se tiene:

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^3}{\partial x_j^2 \partial x_i}u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j^2}u$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}u\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta u). \tag{3.0.3}$$

Ahora, por definición:

$$\Delta(\nabla u) = \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u, \frac{\partial}{\partial x_2}u, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}u\right)$$

$$= \left(\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u\right), \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_2}u\right), \ldots, \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_N}u\right)\right) \tag{3.0.4}$$

Luego de (3.0.2), (3.0.3), (3.0.4)

$$\Delta\left(\nabla u\right)=\nabla\left(\Delta u\right) \tag{3.0.5}$$

En consecuencia

Caso L=3, p=2 $(j=2)$ Debido a (3.0.5)

$$-div\left\{\Delta\left(\nabla\Delta\varphi\right)\right\}=-div\left(\nabla\left(\Delta^{2}\varphi\right)\right)=-\Delta\left(\Delta^{2}\varphi\right)=-\Delta^{3}\varphi\equiv-\Delta_{2}^{3}\varphi.$$

Para ver la acción del operador $\Delta^3\varphi$, aplicando repetidamente la fórmula de Green, obtenemos

$$\int_{\Omega}\Delta^{3}\varphi\ vdx=-\int_{\Omega}\nabla\left(\Delta\varphi\right)\cdot\nabla\left(\Delta v\right)dx+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Delta^{2}\right)vd\Gamma-\int_{\partial\Omega}\Delta^{2}\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\Gamma$$

$$+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Delta\varphi\right)\Delta v\ d\Gamma,\ \forall\varphi,v\in C^{3}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Luego

$$-\int_{\Omega}\Delta^{3}\varphi vdx=-\int_{\Omega}div\left\{\Delta\left(\nabla\Delta\varphi\right)\right\}vdx=\int_{\Omega}\nabla\Delta\varphi\cdot\nabla\Delta vdx,\ \forall\varphi,v\in C^{3}\left(\overline{\Omega}\right)$$

$$\varphi=\Delta\varphi=\Delta^{2}\varphi=0,\quad v=\Delta v=\Delta^{2}v=0,\ (\partial\Omega) \tag{3.0.6}$$

que coincide con la fórmula dada en (3.0.2), usando $p=2$.

Para el caso $p>1$, aplicando el teorema de Green similarmente al anteior cálculo, usando la expresión (3.0.5) obtenemos

$$-\int_{\Omega}\Delta_{p}^{3}\varphi vdx=\int_{\Omega}div\left\{\Delta\left(\left|\nabla\Delta\varphi\right|^{p-2}\nabla\Delta\varphi\right)\right\}vdx$$

$$=\int_{\Omega}\left|\nabla\Delta\varphi\right|^{p-2}\nabla\Delta\varphi\cdot\nabla\Delta vdx$$

$\forall\varphi,v$ satisfaciendo (3.0.6), coincidente con la fórmula (3.0.2), por densidad para $\varphi,v\in W_{0}^{3,p}\left(\Omega\right)$.

El trabajo es similar para $L=3$, $p=p(x)>1$ $(j=2)$

$$-\int_{\Omega}\Delta_{p(x)}^{3}\varphi vdx=\int_{\Omega}\left|\nabla\Delta\varphi\right|^{p(x)-2}\nabla\Delta\varphi\cdot\nabla\Delta vdx,\quad\forall\varphi,v\in W_{0}^{3,p(x)}\left(\Omega\right). \tag{3.0.7}$$

Multiplicando la ecuación (1.0.1) por una función v regular, integrando sobre Ω y usando (3.0.7) resulta

$$M\Big(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}\left|\nabla\Delta u\right|^{p(x)}dx\Big)\left[\int_{\Omega}\left|\nabla\Delta u\right|^{p(x)-2}\nabla\Delta u\cdot\nabla\Delta vdx\right]=$$

$$\int_{\Omega}f(x,u,\nabla u,\Delta u,\nabla\Delta u)vdx,$$

para cualquier u y v suficientemente regulares.

3.1. Solución Débil

Considerando al espacio X, tal cual como se hizo en la sección 2.5, dotado de la norma equivalente dada en la Proposición 2.42.

Definición 3.1 *Decimos que $u \in X$ es una solución débil del problema* (1.0.1)*, si para todo $v \in X$*

$$M\Big(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx\Big) \left[\int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u \cdot \nabla\Delta v dx\right] = \int_\Omega f(x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla\Delta u) v dx,$$

Ahora, se introducirá algunas condiciones para el problema (1.0.1). Asumamos que M y f, satisfacen las siguientes condiciones:

(M_0) $M : [0, +\infty[\to [m_0, +\infty[$ es una función de clase $C^1([0, +\infty))$ y no decreciente con $m_0 > 0$.

(F_1) $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función Carathéodory y existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$|f(x, s_0, \xi_0, t_0, \zeta_0)| \leq c_1 \left(\sigma(x) + |s_0|^{\eta(x)} + |\xi_0|^{\delta(x)} + |t_0|^{\delta(x)} + |\zeta_0|^{\delta(x)}\right),$$

para todo $x \in \Omega$, $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $\zeta_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^N$.
Considerando los exponentes conjugados p, $p' \in C_+\left(\overline{\Omega}\right)$ se admitirá que $\sigma \in L^{p'(x)}(\Omega)$ y finalmente, se aceptará que $0 \leq \eta(x) < p(x) - 1$, $0 \leq \delta(x) < \frac{p(x)-1}{p'(x)}$ para $x \in \overline{\Omega}$ y η, $\delta \in C\left(\overline{\Omega}\right)$.

3.2. Existencia de soluciones

En esta sección analizaremos la existencia de soluciones débiles al problema (1.0.1). El resultado es como sigue.

Teorema 3.2 *Si se verifican los supuestos (M_0) y (F_1), entonces el problema* (1.0.1) *posee una solución débil en X.*

Demostración. Para aplicar la Proposición 2.53, tomamos $Y = X'$ y los operadores no lineales $T,\ S : X \to X'$ de la siguiente manera:

$$\langle Tu, v\rangle = M\Big(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx\Big) \left[\int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u \cdot \nabla\Delta v dx\right]$$

$$\langle Su, v\rangle = \int_\Omega f\left(x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla\Delta u\right) v dx$$

Entonces $u \in X$ es una solución débil de (1.0.1) sí, y solo sí

$$Tu = Su \text{ en } X'.$$

Para demostrar la existencia de soluciones débiles, bastará verificar que T y S satisfacen las condiciones de la Proposición 2.53. Esto será realizado en cinco pasos como sigue.

Paso 1. Probaremos que T es una inyección. Observemos que

$$\phi(u) := \widehat{M}\Big(I(u)\Big) \text{ donde } \widehat{M}(t) = \int_0^t M(z)dz$$

es $F - dif$. En efecto, usando la regla de la cadena se consigue

$$\widehat{M}'(I(u)) = M(I(u))I'(u),$$

reemplazando lo obtenido en la Proposición 2.46 (ver Proposición 4.6,2), se consigue

$$\left\langle \widehat{M}'(I(u)), v\right\rangle = M\Big(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx\Big) \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u \cdot \nabla\Delta v dx$$

En consecuencia del ítem 3 de la Observación 4.8 del Apéndice, ϕ es $G-dif.$ para todo $u \in X$. Entonces su derivada de Gâteaux en $u \in X$, es el funcional $\phi'(u) \in X'$ dado por

$$\langle \phi'(u), v\rangle = \langle T(u), v\rangle, \quad \text{para todo } v \in X. \tag{3.2.1}$$

Para probar que ϕ' es estrictamente monótono, es necesario probar que ϕ' es inyectiva. Por la Proposición 2.46, tenemos que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ y su derivada de Fréchet

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u \cdot \nabla\Delta v dx, \text{ para todo } u, v \in X.$$

Ahora probaremos que es estrictamente monótono. En efecto, sea

$$\langle I'(u) - I'(v), u - v\rangle = \langle I'(u), u - v\rangle - \langle I'(v), u - v\rangle =$$

$$\int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2}\nabla\Delta u\nabla\Delta(u-v)dx - \int_\Omega |\nabla\Delta v|^{p(x)-2}\nabla\Delta v\nabla\Delta(u-v)dx =$$

$$\int_\Omega \left[|\nabla\Delta u|^{p(x)-2}\nabla\Delta u - |\nabla\Delta v|^{p(x)-2}\nabla\Delta v\right]\nabla\Delta(u-v)dx$$

empleando la Desigualdad de Tartar (Proposición 2.7), para todo $u, v \in X$ con $u \neq v$, se verifica que

$$\langle I'(u) - I'(v), u - v\rangle > 0 \tag{3.2.2}$$

lo que significa que I' es estrictamente monótono. Así, por la Proposición 2.17, resulta que el operador I es estrictamente convexo. Adicionalmente, como M es no decreciente se tiene que $\widehat{M}''(t) = M'(t) > 0$. Esto significa que $\widehat{M}$ es estrictamente convexo en $[0, +\infty[$. Por lo tanto, para cualquier $u,\ v \in X$ con $u \neq v$, y para todo $s,\ t \in]0, 1[$ con $s + t = 1$ se tiene

$$\widehat{M}\left(I(su + tv)\right) < \widehat{M}\left(sI(u) + tI(v)\right) \leq s\widehat{M}\left(I(u)\right) + t\widehat{M}\left(I(v)\right)$$

Esto demuestra que ϕ es estrictamente convexo luego ϕ' es estrictamente monótono, y como $\phi'(u) = T(u)$ en X' inferimos que T es estrictamente monótono en X, esto es

$$\langle Tu - Tv, u - v\rangle > 0, \quad \forall u, v \in X \text{ con } u \neq v.$$

En consecuencia $T(u) \neq T(v)$, luego T es inyectiva.

Paso 2. Probaremos que la inversa $T^{-1} : X' \to X$ de T es continua. Para cualquier $u \in X$ con $\|u\|_X > 1$, se tiene

$$\frac{1}{\|u\|_X}\langle T(u), u\rangle = \frac{1}{\|u\|_X} M\Big(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla\Delta u|^{p(x)}\,dx\Big)\left[\int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)}\,dx\right]$$

y usando la condición (M_0) , se obtiene de lo conseguido arriba

$$\geq \frac{m_0}{\|u\|_X}\Big(\int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)}\,dx\Big)$$

luego de aplicar la propiedad del modular, se sigue de lo obtenido arriba

$$\geq m_0\,\|u\|_X^{p_- - 1}$$

con $p_- - 1 > 0$. Con esto, hemos conseguido la coercividad de T, puesto que

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle T(u), u\rangle}{\|u\|_X} \geq m_0 \|u\|_X^{p^- - 1} \to +\infty$$

lo que muestra que T es coercivo.

También como T es la derivada de Fréchet de ϕ, resulta que T es continua. Ahora verificaremos que T es un operador acotado, significa probar que para cualquier conjunto acotado $B \subseteq X$, $T(B)$ está acotado en X'. En efecto, como $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, se tiene por la Proposición 2.45, que $I(u)$ es compacto $\forall u \in B$, luego, por la continuidad de M, existe $m_1 > 0$ tal que $|M(z)| \leq m_1$ para todo $z = I(u) \in \mathbb{R}$. Además, si $u \in B$, $v \in X$ se tiene

$$|\langle T(u), v\rangle| \leq |m_1| \left| \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-2} \nabla\Delta u \cdot \nabla\Delta v \, dx \right|$$

$$\leq m_1 \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)-1} |\nabla\Delta v| \, dx$$

aplicando la Proposición 2.30, se sigue

$$\leq m_1 \left| |\nabla\Delta u|^{p(x)-1} \right|_{p'(x)} |\nabla\Delta v|_{p(x)}$$

$$\leq m_1 \left[|\nabla\Delta u|^{p_+ - 1}_{p'(x)(p(x)-1)} + 1 \right] |\nabla\Delta v|_{p(x)}$$

$$= m_1 \left[|\nabla\Delta u|^{p_+ - 1}_{p(x)} + 1 \right] |\nabla\Delta v|_{p(x)}$$

y mediante la Proposición 2.42, se obtiene

$$|\langle T(u), v\rangle| \leq m_1 \left[C_1 \|u\|_X^{p_+ - 1} + 1 \right] \|v\|_X$$

esto es,

$$\|T(u)\|_{X'} = \sup_{v\in X, v\neq 0} \frac{|\langle T(u), v\rangle|}{\|v\|_X} \leq m_1 C_2 \left[C_1 \|u\|_X^{p_+ - 1} + 1 \right]$$

Esto prueba que T está acotado en X'. Con todo lo probado hasta ahora, se puede concluir, por el Teorema 2.18, que T es suryectiva. Como X es reflexivo se puede identificar Y' con X, siendo $Y = X'$. Y así, por el Teorema 2.18 y la inyectividad probada en el paso 1, resulta que el operador $T^{-1} : X \to X'$ y, análogamente se prueba que T^{-1} está acotado.

Ahora probaremos la continuidad de T^{-1}. Primero, verificaremos que T es del tipo (S_+). En efecto, si $u_\nu \rightharpoonup u$ en X, existe $R > 0$ tal que $\|u_\nu\| \leq R$, junto con la monotonicidad estricta de T, implica que

$$0 = \limsup_{\nu\to\infty} \langle Tu_\nu - Tu, u_\nu - u\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \langle Tu_\nu - Tu, u_\nu - u\rangle$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \langle Tu_\nu, u_\nu - u\rangle - \lim_{\nu\to\infty} \langle Tu, u_\nu - u\rangle . \tag{3.2.3}$$

Debido a la convergencia débil en X' se verifica que

$$\lim_{\nu\to\infty} \langle Tu, u_\nu - u\rangle = 0$$

y usando este resultado en (3.2.3) permite concluir

$$\lim_{\nu\to\infty} \langle Tu_\nu, u_\nu - u\rangle = 0.$$

Esto es,

$$\lim_{\nu\to\infty} M\Big(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u_\nu|^{p(x)}\, dx\Big) \left[\int_\Omega |\nabla\Delta u_\nu|^{p(x)-2} \nabla\Delta u_\nu \cdot \nabla\Delta (u_\nu - u)\, dx\right] = 0. \tag{3.2.4}$$

Además

$$\left|\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u_\nu|^{p(x)}\, dx\right| \le \frac{1}{p_-} \int_\Omega |\nabla\Delta u_\nu|^{p(x)}\, dx \le \frac{\|u_\nu\|_X^{p_0}}{p_-}$$

donde $p_0 = p_+$, si $\|u_\nu\|_X > 1$ y $p_0 = p_-$, si $\|u_\nu\|_X \le 1$. Así, la sucesión

$$\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u_\nu|^{p(x)}\, dx\right)_{\nu\ge 1}$$

está acotada.
Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $t_0 \ge 0$ tal que , hasta una subsucesión, la sucesión converge a t_0. Luego, por la continuidad de M,

$$M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u_\nu|^{p(x)}\, dx\right) \to M(t_0) > m_0 > 0 \ \text{ cuando } \nu \to \infty.$$

Esto último y la propiedad de límite en (3.2.4), permite deducir

$$\lim_{\nu\to\infty} \left[\int_\Omega |\nabla\Delta u_\nu|^{p(x)-2} \nabla\Delta u_\nu \cdot \nabla\Delta (u_\nu - u)\, dx\right] = 0. \tag{3.2.5}$$

Sea $\Omega_+ = \{x \in \Omega : p(x) \ge 2\}$, $\Omega_- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\}$.
De (3.2.5) y $u_\nu \rightharpoonup u$ en X obtenemos

$$\lim_{\nu\to\infty} \langle I'(u_\nu) - I'(u), u_\nu - u\rangle = 0.$$

Ahora, de la Desigualdad de Tartar, analizaremos dos casos.
Si $p(x) \ge 2$:

$$C_1 \int_{\Omega_+} |\nabla\Delta u_\nu - \nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx \le \langle I'(u_\nu) - I'(u), u_\nu - u\rangle \to 0. \tag{3.2.6}$$

Si $1 < p(x) < 2$ aplicando la Proposición 2.30:

$$C_2 \int_{\Omega_-} |\nabla\Delta u_\nu - \nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx =$$

$$C_2 \int_{\Omega_-} \frac{|\nabla\Delta u_\nu - \nabla\Delta u|^{p(x)}}{(|\nabla\Delta u_\nu| + |\nabla\Delta u|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}}} (|\nabla\Delta u_\nu| + |\nabla\Delta u|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}}\, dx$$

$$\leq C \|h_\nu\|_{\frac{2}{p(x)}} \|g_\nu\|_{\frac{2}{2-p(x)}} \tag{3.2.7}$$

donde $h_\nu = \frac{|\nabla\Delta u_\nu - \nabla\Delta u|^{p(x)}}{(|\nabla\Delta u_\nu| + |\nabla\Delta u|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}}}$, $g_\nu = (|\nabla\Delta u_\nu| + |\nabla\Delta u|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}}$.
Pero (u_ν) es acotada en X, luego existe $C_3 > 0$: $\int_{\Omega_-} |\nabla\Delta u_\nu|^{p(x)}\, dx \leq C_3$, luego

$$\rho_{\frac{2}{2-p(x)}}(g_\nu) = \int_{\Omega_-} |g_\nu|^{\frac{2}{2-p(x)}}\, dx = \int_{\Omega_-} (|\nabla\Delta u_\nu| + |\nabla\Delta u|)^{p(x)}\, dx$$

$$\leq 2^{p^+} \int_{\Omega_-} |\nabla\Delta u_\nu|^{p(x)}\, dx + 2^{p^+} \int_{\Omega_-} |\nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx \leq C_4. \tag{3.2.8}$$

También, por la desigualdad de Tartar

$$\rho_{\frac{2}{p(x)}}(h_\nu) = \int_{\Omega_-} |h_\nu|^{\frac{2}{p(x)}}\, dx \leq C_5 \langle I'(u_\nu) - I'(u), u_\nu - u\rangle \to 0. \tag{3.2.9}$$

De (3.2.7), (3.2.8) y (3.2.9) se tiene

$$\int_{\Omega_-} |\nabla\Delta u_\nu - \nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx \to 0.$$

Luego

$$\int_{\Omega} |\nabla\Delta u_\nu - \nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx = \int_{\Omega_-} |\nabla\Delta u_\nu - \nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx +$$

$$\int_{\Omega_+} |\nabla\Delta u_\nu - \nabla\Delta u|^{p(x)}\, dx \to 0.$$

En consecuencia:

$$\|\nabla\Delta u_\nu - \nabla\Delta u\|_{p(x)} \to 0$$

lo cual significa que $\|u_\nu - u\|_X \to 0$, esto es $u_\nu \to u$ en X. Así T es del tipo (S_+). Además $\|Tu\|_{X'} \to +\infty$, si $\|u\|_X \to +\infty$, pues $\|Tu\|_{X'} \geq \frac{m_0 \int_\Omega |\nabla\Delta u|^{p(x)} dx}{\|u\|_X} \geq m_0 C_6 \|u\|_X^{p_- - 1} \to +\infty$
Por tanto, en virtud del Lema 2.13, T^{-1} es continua.

Paso 3. Probaremos que S es un operador compacto.

1. El operador de Nemytskii $\omega : X \subseteq L^{p(x)}(\Omega) \to L^{p'(x)}(\Omega)$ definido por

$$\omega(u) = f(x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u) \text{ q.t.p. en } \Omega \tag{3.2.10}$$

es acotado y continuo. En efecto, usando (F_1) para todo u en X obtenemos

$$\begin{aligned}
&|f(x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u)|^{p'(x)} \\
&\leq c_1 \left|\sigma(x) + |u|^{\eta(x)} + |\nabla u|^{\delta(x)} + |\Delta u|^{\delta(x)} + |\nabla \Delta u|^{\delta(x)}\right|^{p'(x)} \\
&\leq c_1' \left(|\sigma(x)|^{p'(x)} + |u|^{\eta(x)p'(x)} + |\nabla u|^{\delta(x)p'(x)} + |\Delta u|^{\delta(x)p'(x)} + \right. \\
&\qquad \left. |\nabla \Delta u|^{\delta(x)p'(x)}\right).
\end{aligned}$$

Desde que $0 \leq \eta(x) \leq p(x)-1$, tenemos $0 \leq \eta(x)p'(x) < p(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\|f(x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u)\|_{p'(x)} \leq \\
&\left(\int_\Omega |f(x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u)|^{p'(x)} dx\right)^{1/\alpha} \\
&\leq c_1' \left[\int_\Omega \left(|\sigma(x)|^{p'(x)} + |u|^{\eta(x)p'(x)} + |\nabla u|^{\delta(x)p'(x)} + |\Delta u|^{\delta(x)p'(x)} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + |\nabla \Delta u|^{\delta(x)p'(x)}\right) dx\right]^{1/\alpha} \\
&\leq C\left(1 + c_{\eta p'}^{\frac{\beta}{\alpha}} \|u\|_X^{\frac{\beta}{\alpha}} + c_{\delta p'}^{\frac{\theta}{\alpha}} \|u\|_X^{\frac{\theta}{\alpha}}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

donde

$$\alpha = \begin{cases} p'^-, & si \quad \|f(x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u)\|_{p'(x)} > 1, \\ p'^+, & si \quad \|f(x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u)\|_{p'(x)} \leq 1, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} (\eta p')^+, & si \quad \|u\|_{\eta(x)p'(x)} > 1, \\ (\eta p')^-, & si \quad \|u\|_{\eta(x)p'(x)} \leq 1, \end{cases}$$

y

$$\theta = \begin{cases} (\delta p')^+, & si \quad \|\nabla u\|_{\delta(x)p'(x)} > 1, \\ (\delta p')^-, & si \quad \|\nabla u\|_{\delta(x)p'(x)} \leq 1. \end{cases}$$

Por otra parte, si $u_\eta \to u$ en X existe una subsucesión de (u_ν) tal que

$$u_\nu \to u, \ \nabla u_\nu \to \nabla u, \ \Delta u_\nu \to \Delta u, \text{ y } \nabla \Delta u_\nu \to \nabla \Delta u \text{ q.t.p. en } \Omega \tag{3.2.12}$$

a su vez,

$$|u_\nu| \leq k, \ \left|\frac{\partial u_\nu}{\partial x_j}\right| \leq w_j, \ \left|\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_j^2}\right| \leq z_j, \ \left|\frac{\partial^3 u_\nu}{\partial x_i \partial x_j^2}\right| \leq l_{ij} \tag{3.2.13}$$

para casi cualquier $x \in \Omega$ y para algún k, w_j, z_j, $l_{ij} \in L^{p(x)}(\Omega)$. Luego

$$\omega(u_\nu(x)) \to \omega(u(x)) \text{ en casi cualquier } x \in \Omega. \tag{3.2.14}$$

Pero, se sigue de (F_1) y (3.2.13) que

$$\begin{aligned} |\omega(u_\nu)(x) - \omega(u)(x)|^{p'(x)} &\leq C 2^{p'_+} \left[|\omega(u_\nu)(x)|^{p'(x)} + |\omega(u)(x)|^{p'(x)}\right] \\ &\leq h(x) \text{ c.t.p. } x \in \Omega \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

donde $h \equiv h(k, w_j, z_j, l_{ij}) \in L^1(\Omega)$. Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada Generalizada con (3.2.14) y (3.2.15), conseguimos

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega |\omega(u_\nu)(x) - \omega(u)(x)|^{p'(x)} \, dx = 0.$$

De aquí se implica que

$$\lim_{\nu \to \infty} |\omega(u_\nu)(x) - \omega(u)(x)|_{p'(x)} = 0.$$

2. S está bien definido. En efecto

$$\begin{aligned} |\langle Su, v\rangle| \leq \int_\Omega |\omega(u)(x)| \, |v| \, dx &\leq C \, |\omega(u)(x)|_{p'(x)} \, |v|_{p(x)} \\ &\leq C \, |\omega(u)(x)|_{p'(x)} \, \|v\|_X < \infty. \end{aligned}$$

3. $S = I_2^* \circ \omega \circ I_1$, donde $I_1 : X \to \Omega \times L^{p(x)}(\Omega) \times L^{p(x)}\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right) \times L^{p(x)}(\Omega) \times L^{p(x)}\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ está dado por

$$I_1(u) = (x, u, \nabla u, \Delta u, \nabla \Delta u),$$

ω es el operador de Nemitsky en (3.2.10) y $I_2^* : L^{p(x)}(\Omega) \to X'$ está dado por

$$\langle I_2^* v, u\rangle = \int_\Omega v u dx.$$

Desde que I_1 es lineal y acotado, ψ es continua y, por la Proposición 2.44, I_2^* es continuo y compacto, concluimos que S es continuo y compacto.

Paso 4. Se probará que

$$\|(T-S)(u)\|_{X'} \to \infty \text{ cuando } \|u\|_X \to \infty \text{ para } u \in X.$$

En efecto, para todo $u \in X$ con $\|u\|_X > 1$ y por la propiedad del modular

$$\|Tu\|_{X'} \geq \frac{M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla \Delta u|^{p(x)}\, dx\right)}{\|u\|_X} \left| \int_\Omega |\nabla \Delta u|^{p(x)-2} \nabla \Delta u \cdot \nabla \Delta u \, dx \right|$$

$$\geq \frac{m_0}{\|u\|_X} \int_\Omega |\nabla \Delta u|^{p(x)} \, dx \geq m_0 \|u\|_X^{p_- - 1} \tag{3.2.16}$$

y, ya que por la Proposición 2.30

$$\int_\Omega \omega(u)(x) v dx \leq C_p \left(\int_\Omega |\omega(u)(x)|^{p'(x)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \|v\|_X \text{ para todo } u, v \in X,$$

y debido a (3.2.11) obtenemos

$$\|Su\|_{X'} \leq C_1 \left(\|u\|_X^\gamma + \|u\|_X^\vartheta \right)^{\frac{1}{\alpha}} + C_2 \text{ para todo } u \in X \tag{3.2.17}$$

para algún $\gamma \in \left[(\eta p')^-, (\eta p')^+ \right]$ y $\vartheta \in \left[(\delta p')^-, (\delta p')^+ \right]$.
Combinando (3.2.16) y (3.2.17) se obtiene

$$\|(T-S)(u)\|_{X'} \geq \|Tu\|_{X'} - \|Su\|_{X'} \geq C_0 \|u\|_X^{p_- - 1} - C_1' \|u\|_X^{\frac{\gamma}{\alpha}} - C_2' \|u\|_X^{\frac{\vartheta}{\alpha}} - C_3. \tag{3.2.18}$$

Se observa que

$$0 \leq \frac{\gamma}{p'^+} < \frac{p^- - 1}{p'^+} \text{ y } 0 \leq \frac{\gamma}{p'^-} < \frac{p^- - 1}{p'^-}$$

siendo $\frac{p^- - 1}{p'^+} \leq \frac{p^- - 1}{p'^-}$, resulta

$$0 \leq \frac{\gamma}{\alpha} < \frac{p^- - 1}{p'^-} < p^- - 1,$$

esto es

$$0 \leq \frac{\gamma}{\alpha} < p^- - 1. \tag{3.2.19}$$

Análogamente, se consigue

$$0 \leq \frac{\vartheta}{\alpha} < p^- - 1. \tag{3.2.20}$$

Usando (3.2.19) y (3.2.20), se deduce

$$\lim_{t \to +\infty} C_0 t^{p_- - 1} - C_1' t^{\frac{\gamma}{\alpha}} - C_2' t^{\frac{\vartheta}{\alpha}} - C_3 =$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{p_--1}\left(C_0 - C_1' t^{\frac{\gamma}{\alpha}-(p_--1)} - C_2' t^{\frac{\vartheta}{\alpha}-(p_--1)} - C_3 t^{-(p_--1)}\right) =$$

$$\lim_{t\to+\infty} C_0 t^{p_--1} = +\infty.$$

y, junto con (3.2.18), se concluye que $\|(T-S)(u)\|_{X'} \to +\infty$ cuando $\|u\|_X \to +\infty$. Esto significa, por definición de limite, que existe $r_0 > 1$ tal que $\|(T-S)(u)\|_{X'} > 1$, para todo $u \in X$, con $\|u\|_X > r_0$.

Paso 5. Sea

$$W = \left\{u \in X : \exists t \in [0,1] \text{ tal que } u = tT^{-1}(Su)\right\}.$$

Probaremos que W es acotado en X. Para $u \in W \setminus \{0\}$, es decir, $u = tT^{-1}(Su)$ para algún $t \in [0,1]$ tenemos

$$\left\|T\left(\frac{u}{t}\right)\right\|_{X'} = \|S(u)\|_{X'} \leq C_1' \|u\|_X^{\frac{\gamma}{\alpha}} + C_2' \|u\|_X^{\frac{\vartheta}{\alpha}} + C_3 \text{ con } t > 0. \quad (3.2.21)$$

Luego, de (3.2.16), (3.2.17) y (3.2.21), existen las constantes $a, b, c > 0$ tal que
si $0 < \|u\|_X < t$,

$$m_0 \|u\|_X^{p_+-1} \leq a\|u\|_X^{\eta^-} + b\|u\|_X^{\delta^-} + c,$$

si $t \leq \|u\|_X \leq 1$,

$$m_0 \|u\|_X^{p_--1} \leq a\|u\|_X^{\eta^-} + b\|u\|_X^{\delta^-} + c,$$

y si $1 < \|u\|_X$,

$$m_0 \|u\|_X^{p_--1} \leq a\|u\|_X^{\eta^+} + b\|u\|_X^{\delta^+} + c.$$

Sean $h_1, h_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $h_3 :]1,\infty[\to \mathbb{R}$ definidos por

$$h_1(\tau) = m_0\tau^{p_+-1} - a\tau^{\eta^-} - b\tau^{\delta^-} - c, \quad h_2(\tau) = m_0\tau^{p_--1} - a\tau^{\eta^-} - b\tau^{\delta^-} - c,$$

y

$$h_3(\tau) = m_0\tau^{p_--1} - a\tau^{\eta^+} - b\tau^{\delta^+} - c.$$

Los conjuntos

$$\left\{\tau \in [0,1] : h_1(\tau) \leq 0\right\}, \ \left\{\tau \in [0,1] : h_2(\tau) \leq 0\right\}$$

son subconjuntos de $[0,1]$. Además,

$$\lim_{t\to+\infty} h_3(t) = \lim_{t\to+\infty} t^{p_--1}\left[m_0 - at^{\eta_+-(p_--1)} - bt^{\delta^+-(p_--1)} - ct^{-(p_--1)}\right] = +\infty.$$

Luego, por definición de límite infinito en el infinito,

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists L \in \mathbb{R} : t > L \text{ implica } h_3(t) > K.$$

Así, $\{t \in]1, \infty[: h_3(t) \leq 0\} \subset [1, L]$. Por tanto, los conjuntos están acotados.
De las anteriores desigualdades y (3.2.21) inferimos que W está acotada en X, así

$$W \subseteq B(0, r_1) \text{ para algún } r_1 > 0.$$

Por otra parte, ya que $T^{-1} \circ S$ es compacto, se implica, por la Proposición 2.58, $T^{-1} \circ S$ es $\sigma-$Lipschitz con $k = 0$. Luego, por la Definición 2.56, $T^{-1} \circ S$ es una $\sigma-$contracción estricta. En consecuencia, $T^{-1} \circ S$ es $\sigma-$condensante. Ahora bien, tomando $r = \text{máx}\{r_0, r_1\}$, se sigue del Teorema 2.61, que

$$d_{LS}\left(I - tT^{-1}(S), B(0, r), 0\right) = 1 \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

En particular, para $t = 1$ se tiene

$$d_{LS}\left(I - T^{-1}(S), B(0, r), 0\right) = 1.$$

Por lo tanto, el par (T, S) de operadores no lineales verifican las suposiciones del Teorema 2.53. Entonces $T - S : X \to X'$ es suryectivo. Por lo tanto, existe $u \in X$ tal que

$$(T - S)u = 0 \text{ en } X'.$$

Esto completa la prueba.

■

Capítulo 4

Unicidad de la solución

"En la investigación es incluso más importante el proceso que el logro mismo".
Emilio Muñoz

Debido a que ya sabemos que existe al menos una solución débil, ahora bajo ciertas condiciones sobre la no linealidad para f, demostraremos la unicidad de la solución débil al problema (1.0.1). Las condiciones se presentan como siguen:

(F_2) Existe $\beta_2 \geq 0$ tal que

$$|f(x, s_1, \xi_0, t_0, \zeta_0) - f(x, s_2, \xi_0, t_0, \zeta_0)|\,|s_1 - s_2| \leq \beta_2 |s_1 - s_2|^{p(x)}$$

para casi cualquier $x \in \Omega$ y todo $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$, $(\xi_0, t_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

(F_3) Existe $\beta_3 \geq 0$ tal que

$$\left|f(x, s, \xi_0, t_0, \zeta_0) - f\left(x, s, \widehat{\xi_0}, \widehat{t_0}, \widehat{\zeta_0}\right)\right| \leq \beta_3 \left|\zeta_0 - \widehat{\zeta_0}\right|^{p(x)-1}$$

para casi cualquier $x \in \Omega$ y todo $s \in \mathbb{R}$, $(\xi_0, t_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Teorema 4.1 *Sea $M : [0, +\infty[\to [m_0, m_1]$ una función satisfaciendo (M_0) con $m_1 > m_0 > 0$ y, además (F_2)-(F_3) se cumplen. Si $2 \leq p(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, entonces* (1.0.1) *tiene una única solución débil siempre que*

$$\frac{p^+}{m_0}\left[\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{p^-}\right)\lambda_*^{-1} + \beta_3 \frac{p^+ - 1}{p^-}\right] < 1 \tag{4.0.1}$$

donde

$$\lambda_* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla \Delta u|^{p(x)}\, dx}{\int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx} > 0.$$

Demostración. Se demostró en el Teorema 3.2, que existen soluciones débiles $u \in X$ al problema (1.0.1). Ahora bien, para mostrar su unicidad, es suficiente probar que $T - S : X \to X'$ es inyectivo. En efecto, sean dos soluciones débiles $u_1(x)$, $u_2(x)$ de (1.0.1) tal que $(T-S)\,u_1(x) = (T-S)\,u_2(x)$. Se cumple

$$\langle Tu_1(x) - Tu_2(x), u_1(x) - u_2(x)\rangle = \langle Su_1(x) - Su_2(x), u_1(x) - u_2(x)\rangle\,. \quad (4.0.2)$$

Del Lema 2.8, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad triangular, las condiciones (F_2) y (F_3), usando la condición sobre λ_* mediante la desigualdad de Young y (4.0.2) se tiene

$$\frac{m_0}{p^+}\int_\Omega |\nabla\Delta u_1(x) - \nabla\Delta u_2(x)|^{p(x)}\, dx \le m_0 \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla\Delta u_1(x) - \nabla\Delta u_2(x)|^{p(x)}\, dx \quad (4.0.3)$$

$$\begin{aligned}
&\le \langle Tu_1(x) - Tu_2(x), u_1(x) - u_2(x)\rangle \le |\langle Su_1(x) - Su_2(x), u_1(x) - u_2(x)\rangle| \\
&\le \int_\Omega |\omega(u_1(x)) - \omega(u_2(x))|\,|u_1(x) - u_2(x)|\, dx \\
&\le \int_\Omega |f(x, u_1, \nabla u_1, \Delta u_1, \nabla\Delta u_1) - f(x, u_2, \nabla u_1, \Delta u_1, \nabla\Delta u_1)|\,|u_1 - u_2|\, dx \\
&+ \int_\Omega |f(x, u_2, \nabla u_1, \Delta u_1, \nabla\Delta u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2, \Delta u_2, \nabla\Delta u_2)|\,|u_1 - u_2|\, dx \\
&\le \beta_2 \int_\Omega |u_1(x) - u_2(x)|^{p(x)}\, dx + \beta_3 \int_\Omega |\nabla\Delta(u_1(x) - u_2(x))|^{p(x)-1}\,|u_1(x) - u_2(x)|\, dx \\
&\le \beta_2 \lambda_*^{-1} \int_\Omega |\nabla\Delta(u_1(x) - u_2(x))|^{p(x)}\, dx + \beta_3 \frac{p^+ - 1}{p^-} \int_\Omega |\nabla\Delta(u_1(x) - u_2(x))|^{p(x)}\, dx \\
&\quad + \frac{\beta_3}{p^-}\lambda_*^{-1} \int_\Omega |\nabla\Delta(u_1(x) - u_2(x))|^{p(x)}\, dx \\
&= \left[\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{p^-}\right)\lambda_*^{-1} + \beta_3 \frac{p^+ - 1}{p^-}\right] \int_\Omega |\nabla\Delta(u_1(x) - u_2(x))|^{p(x)}\, dx.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\left(\frac{m_0}{p^+} - \left[\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{p^-}\right)\lambda_*^{-1} + \beta_3 \frac{p^+ - 1}{p^-}\right]\right) \int_\Omega |\nabla\Delta(u_1(x) - u_2(x))|^{p(x)}\, dx \le 0.$$

Por tanto, de las desigualdades anteriores y (4.0.3):

$$\int_{\Omega} |\nabla \Delta \left(u_1(x) - u_2(x)\right)|^{p(x)} \, dx = 0.$$

Así, mediante la Proposición 2.45, se demuestra que $u_1 = u_2$. Con esto se completa la prueba. ■

Trabajos futuros

Existen diversos tópicos vinculados al problema planteado en esta tesis que podrían abordarse en futuras investigaciones. Tales como por ejemplo:

1. ¿Será posible probar la existencia y unicidad al problema (1.0.1), si M fuese localmente lipschitziana y f monótona?.
2. Probar la existencia y unicidad considerando una perturbación $\lambda > 0$ sobre g bajo las mismas condiciones impuestas sobre f.

$$\begin{gathered} -M\Big(I(u)\Big)\Delta^3_{p(x)}u = (f+\lambda g)\,(x,u,\nabla u,\Delta u,\nabla\Delta u) \text{ en } \Omega \\ u = \Delta u = \Delta^2 u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{gathered}$$

3. Estudiar el problema (1.0.1), cuando el exponente p depende de u.
4. Resolver un problema de transmisión con el operador triarmónico.
5. Estudiar el problema del contacto friccional del tipo $p(x)$-Kirchhoff con el operador $p(x)$-triarmónico.
6. Analizar la regularidad de la solución para una ecuación de onda con el operador $p(x)$-triarmónico.

Conclusión

En el **Capítulo** 2 se mostró entre otras cosas, que el espacio X con su norma $\|\cdot\|_X$ verifica ser reflexivo y separable para $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, así como otros resultados topológicos.
Asimismo, en el **Capítulo** 3, se realizaron algunos cálculos para obtener la formulación débil del problema planteado en nuestro trabajo de investigación y así, conseguir definir el concepto de solución débil.
El método en que se fundamentó la existencia de la solución débil, es un resultado del tipo Fredholm para un par S y T de operadores no lineales junto con la teoría sobre espacios Lebesgue y Sobolev con exponente variable, los cuales integraron una eficaz herramienta para demostrar nuestro primer objetivo en nuestra investigación, bajo ciertas condiciones sobre las funciones M y f.
Posteriormente en el **Capítulo 4**, se impusieron algunas condiciones sobre la no linealidad de la función f, las cuales permitieron demostrar la unicidad de la solución débil al problema elíptico no lineal que involucra el operador triarmónico del tipo $p(x)-$Kirchhoff bajo condiciones de frontera del tipo Navier y una función f dependiendo no linealmente de $(\nabla u, \Delta u, \nabla\Delta u)$. Esto responde el segundo objetivo específico planteado en nuestro proyecto de investigación.
Finalmente, en el **Capítulo 5** se propuso algunos problemas que bien podrían servir a otros investigadores interesados en continuar con esta investigación.

Apéndice

Las definiciones y proposiciones presentadas en este apéndice, pueden ser encontradas en Badiale and Serra (2011) y Adams (1975).

4.1. Derivada de Fréchet

Definición 4.2 *Sea X e Y espacio normado (sobre $\mathbb{R}$), abiertos $U \subseteq X$ y $J : U \subseteq X \to Y$ una aplicación dada. Decimos que J es Fréchet diferenciable en $u_0 \in U$ si existe $A_{u_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que*

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|J(u_0 + h) - J(u_0) - A_{u_0}(h)|_Y}{|h|_X} = 0.$$

Observación 4.3 *1. A_{u_0} es único.*

2. *Por notación: $A_{u_0} \equiv J'_F(u_0) \equiv D_F J(u_0) \equiv J'(u_0)$ se llama la derivada de Fréchet de la aplicación J en u_0 (o derivada de J en u_0, según Fréchet).*

3. *Si $J : U \subseteq X \to Y$ es Fréchet diferenciable en cada punto $u \in U$, diremos que J es Fréchet diferenciable (F. dif.).*

4. *Si $Y = \mathbb{R}$, en este caso $A_{u_0} \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \equiv X'$. Así queda definido la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} J'_F : U \subseteq X & \to & \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \\ u & \rightsquigarrow & J'_F(u) : X \to \mathbb{R} \\ & & v \rightsquigarrow \langle J'_F(u), v\rangle \end{array}$$

   Estamos denotando

$$(J'_F(u))(v) \equiv \langle J'_F(u), v\rangle \equiv \langle J'_F u, v\rangle.$$

5. *La definición dada es equivalente a: J es F-diferenciable en u_0 sí, y solo sí,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |h|_X < \delta \Rightarrow |J(u_0 + h) - J(u_0) - A_{u_0}(h)|_Y < \epsilon\, |h|_X$$

   para alguna $A_{u_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

6. Si J es F. dif. entonces J es continua.

Definición 4.4 *Sea $J : U \subseteq X \to Y$ F. dif. La derivada de J (según Fréchet) en U, es la aplicación*

$$\begin{array}{ccccc} J'_F : U \subseteq X & \to & \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \\ u & \rightsquigarrow & J'_F(u) : X & \to & Y \end{array}$$

siendo $J'_F u$ una aplicación lineal y continua.

Definición 4.5 *Decimos que $J \in C^1(U, Y)$ (o simplemente que $J \in C^1$) si J'_F es continua.*

Proposición 4.6 *Asuma que I y J son diferenciables en $u_0 \in U \subseteq X$. Entonces se verifican:*

1. $\alpha I + \beta J$ es dif. en u_0, para cualquier α y $\beta \in \mathbb{R}$ y

   a) $(\alpha I + \beta J)'(u_0) = \alpha I'(u_0) + \beta J'(u_0)$.

   b) *$I.J$ es diferenciable en u_0 y vale la relación*

$$(I.J)'(u_0) = I'(u_0)J(u_0) + I(u_0)J'(u_0)$$

   siendo $I, J : U \subseteq X \to \mathbb{R}$.

2. Sea un abierto $D \subseteq \mathbb{R}$, $u_0 \in U$ abierto, $I(u_0) \in D$, $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable en $I(u_0)$. Entonces $K = f \circ I$ es dif. en u_0 y $K'_F(u_0) = f'(I(u_0)).I'_F(u_0)$.

3. Si I es $F-$dif. en u_0 entonces I es continua en u_0.

4.2. Gâteaux Diferenciabilidad

Definición 4.7 *Decimos que $J : U \subseteq X \to Y$ es Gâteaux diferenciable (o simplemente G. dif.) en $u_0 \in U$ si existe $A_{u_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u_0 + \lambda v) - J(u_0)}{\lambda} = A_{u_0}(v)$$

para todo $v \in X$.

Observación 4.8 *1. A_{u_0} es único.*

2. *Notación:* $A_{u_0} \equiv J'_G(u_0) \equiv D_G J(u_0)$.

3. $J'_G(u_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Si* $Y = \mathbb{R}$ *entonces* $J'_G(u_0) \in X'$.

4. *Si* J *es F. dif. entonces* J *es G. dif.*

Proposición 4.9 *Si* $J : U \subseteq X \to Y$ *es G. dif. en* U *con derivada* J'_G *continua en* U *entonces* J *es F. dif. en* U *y* $J'_F = J'_G$.

Proposición 4.10 *Sea* X *espacios de Banach y sea* $I : X \to \mathbb{R}$ *un funcional diferenciable. Asuma que para todo* $u,\ v \in X$,

$$(I'(u) - I'(v))(u - v) \geq 0.$$

Entonces I *es convexo. Si la desigualdad estricta cumple cuando* $u \neq v$, *entonces* I *es estrictamente convexo.*

4.3. La medida de Lebesgue

Definición 4.11 *Una colección* Σ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}^N$ *es llamada una* $\sigma-$*algebra si las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $\mathbb{R}^N \in \Sigma$.

2. *Si* $A \in \Sigma$, *entonces su complemento* $A^c \in \Sigma$.

3. *Si* $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, \ldots$, *entonces* $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.

4. $\emptyset \in \Sigma$.

5. *Si* $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, \ldots$, *entonces* $\cap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.

6. *Si* $A,\ B \in \Sigma$, *entonces* $A - B = A \cap B^c \in \Sigma$.

Definición 4.12 *Por una medida* μ *sobre una* $\sigma-$*algebra* Σ *nos referimos a una función sobre* Σ *tomando valores en* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *(una medida positiva) o* $\mathbb{C}$ *(una medida compleja) que es contablemente aditivo en el sentido de que*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j)$$

cuando $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, \ldots$, *y los conjuntos* A_j *son disjuntos dos a dos, esto es,* $A_j \cap A_k = \emptyset$ *para* $j \neq k$. *Para una medida compleja, la serie de la derecha*

debe converger a la misma suma para todas las permutaciones de los índices en la secuencia A_j, por lo que debe ser absolutamente convergente. Si μ es una medida positiva y si $A,\ B \in \Sigma$ y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. También, si $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, \ldots,$ y $A_1 \subset A_2 \subset \ldots,$ entonces $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

Teorema 4.13 *(Existencia de la Medida Lebesgue) Existe una $\sigma-$algebra Σ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y una medida positiva μ sobre Σ teniendo las siguientes propiedades:*

1. *Cualquier conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ pertenece a Σ.*
2. *Si $A \subset B$, $B \in \Sigma$, y $\mu(B) = 0$, entonces $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$.*
3. *Si $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, entonces $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$.*
4. *μ es invariante por traslación. Esto significa si $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \Sigma$, entonces $x + A = \{x + y : y \in A\} \in \Sigma$, y $\mu(x + A) = \mu(A)$.*

Los elementos de Σ son llamados (Lebesgue) subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, y μ es llamado la (Lebesgue) medida en $\mathbb{R}^n$. Normalmente suprimimos la palabra "Lebesgue" en estos términos ya que es la medida de $\mathbb{R}^n$ que utilizamos principalmente. Para $A \in \Sigma$ llamamos $\mu(A)$ la medida de A o el volumen de A, ya que la medida de Lebesgue es la natural extensión de volumen en $\mathbb{R}^3$. Si bien no hacemos ninguna distinción formal entre "medida" y "volumen" para conjuntos que se visualizan fácilmente geométricamente, como bolas, cubos, y dominios, y escribimos $vol(A)$ en lugar de $\mu(A)$ en estos casos. Por supuesto, los términos longitud y área son más apropiados en $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}^2$.

Definición 4.14 *(Casi en cualquier parte) Si $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mu(B) = 0$, entonces decimos que cualquier condición que se cumpla en el conjunto $A - B$ se cumple en casi todas partes (abreviado a.e.) en A. Se ve fácilmente que cualquier conjunto contable en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero. Sin embargo, lo contrario no es cierto.*

Definición 4.15 *(Funciones medibles) Una función f definida sobre un conjunto medible y teniendo valores en $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se llama en sí mismo medible si el conjunto*

$$\{x : f(x) > a\}$$

es medible para cualquier real a. Algunos de los más importantes aspectos de esta definición están listados en el siguiente teorema.

Teorema 4.16 *1. Si f es medible, también lo es $|f|$.*

2. *Si f y g son medibles y tienen valores reales, también lo son $f+g$ y fg.*

3. *Si $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$, $\lim\sup_{j\to\infty} f_j$ y $\lim\inf_{j\to\infty} f_j$ son medibles.*

4. *Si f es continua y está definida en un conjunto medible, entonces f es medible.*

5. *Si f es continua en $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y g es medible y de valor real, entonces la composición $f\circ g$ definida por $f\circ g(x) = f(g(x))$.*

Teorema 4.17 *(Teorema de Lusin) Si f es medible y $f(x) = 0$ para $x \in A^c$ donde $\mu(A) < \infty$, y si $\epsilon > 0$, entonces existe una función $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} g(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ y $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$.*

Definición 4.18 *(Funcion simple y característica) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. La función χ_A definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

es llamada la función característica de A. Una función de valor real s en $\mathbb{R}^n$ se llama función simple si su rango es un conjunto finito de números reales. Si para cualquier x, tenemos $s(x) \in \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces $s = \sum_{j=1}^m \chi_{A_j}(x)$, donde $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = a_j\}$, y s es medible si y solo si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son todos medibles.

Debido al siguiente teorema de aproximación, las funciones simples son una herramienta muy útil en la teoría de la integración.

Teorema 4.19 *Dada una función f de valor real con dominio $A \subset \mathbb{R}^n$, existe una secuencia $\{s_j\}$ de funciones simples que convergen puntualmente a f en A. Si f está acotada, se puede elegir $\{s_j\}$ de modo que la convergencia sea uniforme. Si f es mensurable, cada s_j puede elegirse como mensurable. Si f tiene un valor no negativo, se puede elegir que la secuencia $\{s_j\}$ sea monótonamente creciente en cada punto.*

Bibliografía

Adams, R. (1975). *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York.

Arosio, A. and Panizzi, S. (1996). On the well-posedness of the Kirchhoff string. *Trans. Amer. Math.Soc.*, 348:305–330.

Aydin, I. (2021). Dirichlet type problem with $p(x)-$ triharmonic operator. *J.Sci.Arts*, 57(4):1037–1042.

Badiale, M. and Serra, E. (2011). *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Springer.

Belakhdarl, A., Belaouidel, H., Filali, M., and Tsouli, N. (2022). Existence and multiplicity of solutions of $p(x)-$triharmonic problem, Nonlinear Funct. *Anal. App.*, 27(2):349–361.

Berkovits, J. (2007). Extension of the Leray-Schauder degree for abstract hammerstein type mappings. *J. Differ. Equ. 234*, 1:289–310.

Brézis, H. (1984). *Análisis funcional teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, S.A., Madrid.

Cabanillas, E. and Huaringa, L. (2021). A nonlocal $p(x)\&q(x)$ elliptic transmission problem with dependence on the gradient. *Int. J. Appl. Math*, 1(34):93–108.

Cavalcanti, M. M., Cavalcanti, V. N. D., and Soriano, J. A. (2001). Global existence and uniform decay rates for the Kirchhoff-Carrier equation with nonlinear dissipation. *Adv. differential equations*, 6:701–730.

Ădulescu, V. R. and Vetro, C. (2023). Navier Kirchhoff problems with convection and Laplacian dependence. *Math Methods Appl. Sci.*, 1(46):461–478.

Chen, Y., Levine, S., and Rao, M. (2006). Exponent variable, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, 46(66):1383–1406.

Chung, N. (2019). Multiple solutions for a fourth order elliptic equation of Kirchhoff type with variable exponent. *Asian-European J. Math.*

Chung, N. (2020). On the existence of solutions for a class of fourth order elliptic equations of Kirchhoff type with variable exponent. *Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl.*, 20(3):35–45.

Colasuonno, F. and Pucci, P. (2011). Multiplicity of solutions for $p(x)-$polyharmonic Kirchhoff equations. *Nonlinear Anal.*, 74:5962–5974.

Corrêa, F. J. S. A. and Figueiredo, G. M. (2006). On an elliptic equation of $p-$Kirchhoff type via variational methods. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 74:263–277.

Corrêa, F. J. S. A. and Figueiredo, G. M. (2009). On a $p-$Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus. *Appl. Math. Letters*, 22:819–822.

Costa, D. G. (2007). *An invitation to Variational Methods in Differential Equations*. Birkhauser Boston.

Dai, G. and Hao, R. (2009). Existence of solutions for a $p(x)-$Kirchhoff-type equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 359:275–284.

Dai, G. and Ma, R. (2011). Solutions for a $p(x)-$Kirchhoff-type equation with Neumann boundary data. *Nonlinear Anal.*, 12:2666–2680.

Dai, G. and Wei, J. (2010). Infinitely many non-negative solutions for a $p(x)-$Kirchhoff-type problem with Dirichlet boundary condition. *Nonlinear Anal.*, 73:3420–3430.

Diening, L. (2004). Maximal function on generalized $L^{p(x)}$ spaces. *Math. Inequal Appl.*, 7:245–253.

Diening, L., Harjulehto, P., Hasto, P., and Ruzicka, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lectures Notes in Mathematics 2017*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2011.

Dinca, G. (2001). A fredholm-type result for a couple of nonlinear operators. *CR. Math. Acad. Sci.*, 333:415–419.

Dreher, M. (2006). The Kirchhoff equation for the $p-$Laplacian. *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*, 64:217–238.

Dreher, M. (2007). The wave equation for the $p-$Laplacian, Hokkaido. *Math. J.*, 36:21–52.

Duoandikoetxea, J. and Escauriaza, L. (2018). Notas de EDP. https://n9.cl/3v3b9.

Fan, X. L. (2010). On nonlocal $p(x)-$Laplacian Dirichlet problems. *Nonlinear Anal.*, 72:3314–3323.

Fan, X. L., Shen, J. S., and Zhao, D. (2001). Sobolev embedding theorems $W^{k,p(x)}(\Omega)$. *Math. Anal. Appl.*, 38(262):749–760.

Fiorenza, A. and Uribe, D. (2000). Variable Lebesgue Spaces.

Fragnelli, G. (2010). Positive periodic solutions for a system of anisotropic parabolic equations. *J. Math. Anal. Appl.,*, 73:110–121.

Gilbarg, D. and Trudinger, N. (1983). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, second ed.*, volume 244. Grundlehren Math. Wiss Springer-Verlag, Berlin.

Goyal, S. and Goyal, V. B. (1989). Liouville-Type and uniqueness results for a class of sixth-order elliptic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 139(19):586–599.

Halsey, T. C. (1992). Electrorheological fluids. *Science, New Series*, 258(5083):761–766.

Hamdani, M. K. and Repovš, D. D. (2020). Existence of solutions for systems arising in electromagnetism. *J. Math. Anal. Appl.*, 486(2):123898.

Isaia, F. (2004). An existence result for a nonlinear integral equation whithout compactness. *PanAmerican Mathematical J.*, 4(14):93–106.

Kefi, K. (2021). On the existence of solutions of a nonlocal biharmonic problem. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 12(1):35–45.

Kirchhoff, G. (1883). *Mechanik*. Teubner, Leipzig.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Ed. Jhon Wiley and Sons.

Lions, J. L. (1978). On some questions in boundary value problems of mathematical physics, in proceedings of international symposium on continuum mechanics and partial differential equations. *Math. Stud.*, 2(30):248–346.

Mehraban, Z. and Heidarkhani, S. (2022). Infinitely many weak solutions for a $p-$triharmonic problem with Navier boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*

Quang, D., Quoc, N., and Vinh, V. (2020). Existence results and numerical method of fourth order convergence for solving a nonlinear triharmonic equation. *arXiv:2004.00324*.

Rahal, B. (2009). On the boundary integral equations for a two-dimensional slowly rotating highly viscous fluid flow. *Adv. Appl. Math. Mech.*, 1:140–150.

Rahal, B. (2019). Existence results of infinitely many solutions for $p(x)-$Kirchhoff type triharmonic operator with Navier boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 478:1133–1146.

Rajagopal, K. R. and Růžička, M. (2001). Mathematical modeling of electrorheological materials. *Contin. Mech. Thermodyn*, 1(13):59–78.

Růžička, M. (2000). *Electro-rheological fluids: modeling and mathematical theory.* Lecture Notes in Math. 1784, Springer, Berlin.

Shokooh, S., Hossini, S. K., and Shahini, M. (2020). Infinitely many solutions for a nonlinear equation with potential,int. *J. Math. Anal. Appl.In Press 10.22075/ijnaa.2022.7047.*

Simon, J. (1978). *Régularité de la solution d'une équationnon linéaire dans* $\mathbb{R}^N$*, in Journées d'Analyse Non Linéaire (Proc. Conf., Besanon, 1977), in: Lecture Notes in Math.*, volume 665. Springer, Berlin.

Stangroom, J. F. (1983). Electrorheological fluids. *Physyis in Technology*, 14(14):290–296.

Ugail, H. (2011). *Partial Differential Equations for Geometric Design.* Springer.

Ugail, H. and Wilson, M. (2005). Modeling of oedemus limbs and venous ulcers using partial differential equations. *Theor. Biol. Med. Model.*, 40(2):1–28.

Zang, A. and Fu, Y. (2007). Interpolation inequalities for derivatives in variable exponent Lebesgue-Sobolev spaces. *Nonlinear Analysis*, 69(2008):3629–3636.

Zeidler, E. (1985). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vol. II/B.* Berlin, Heidelberg, New York.